

*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique*

*Université El Hadj Lakhdar - Batna*

*Mémoire*

*Présenté à*

*La Faculté des Sciences – Département de Physique*

*Pour obtenir*

*Le diplôme de MAGISTERE en Physique*

*Option : Physique Energétique*

*Par*

*HAMIDANE Abbas*

*Thème*

*Etude numérique de la génération de pression  
par un jet turbulent confiné dans  
un mélange gazeux*

*Soutenu devant le jury :*

<i>Président:</i>	<i>Dr A. SOUDANI</i>	<i>M.C. U. Batna</i>
<i>Rapporteur:</i>	<i>Dr S. BOUGOUL</i>	<i>M.C. U. Batna</i>
<i>Examineur:</i>	<i>Dr R. BESSAIH</i>	<i>prof. U. Constantine</i>
	<i>Dr M. Si -AMEUR</i>	<i>prof. U. Batna</i>

## REMERCIEMENT

*Je tiens à remercier, le Dr S.Bougoul de m'avoir orienter dans mes recherches. Et pour sa disponibilité, son aide précieuse et la bonne ambiance de travail qu'il a su créer en me proposant le thème de ce travail et qui a su, en tant qu'encadreur, m'initier à l'éthique même du métier de chercheur en me faisant partager, avec enthousiasme, sa passion du travail bien fait. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde estime.*

*Je tiens à remercier tous particulièrement le Dr A.Soudani , pour ses précieux conseils et l'intense effort qu'il a déployé tout au long de l'année théorique, et qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence des jury.*

*C'est avec un grand plaisir que j'adresse mes remerciements et que j'exprime ma plus profonde reconnaissance aux deux rapporteurs ; Monsieur le Prof R.Bessaih et Monsieur le Prof M.Si-Ameur qui sont intéressé à ce travail et d'accepter d'être membre de jury, ainsi à l'ensemble du personnel de l'Institut, qu'ils en soient ici profondément remerciés.*



# SOMMAIRE

<b>Notations et terminologies</b>	
<b>Introduction</b>	01
<b>Chapitre 1 : Etude bibliographique</b>	03
1.1 Les jets confinés	03
1.2 Les jets confinés à densité variable	03
1.3 Description de l'écoulement	05
1.4 Etude théorique	08
1.4.1 Méthode intégrale	08
1.4.2 Méthode différentielle	10
1.5 Etude expérimentale	10
1.5.1 Expérience de Barchilon et Curtet	10
1.5.2 Expérience de Kian et Binder	11
1.5.2 Expérience de T. Djeridane	13
1.6 Objectifs du travail	14
<b>Chapitre 2 : Formulation mathématique de problème</b>	35
2.1 Equations des écoulements laminaires	15
2.2 Equations standard de transport	16
2.3 Equation exacte des contraintes de Reynolds	18
2.4 Modélisation de la turbulence	21
2.5 Modèle mathématique du problème traité	25
2.5.1 Définitions et hypothèses des problèmes	25
2.5.2 Jets laminaires	25
2.5.4 Jet turbulent	26
2.5.5 Jet turbulent à densité variable	27
<b>Chapitre 3 : Procédure numérique</b>	
3.1 Introduction	32
3.2 Maillage et discrétisation	32
3.3 Expression de la source pour les différents écoulements	41
3.3.1 Ecoulement laminaire	41
3.3.2 Ecoulement turbulent	43
3.4 Conditions aux limites	49
3.4.1 Condition à l'entrée	49
3.4.2 Condition à la sortie	49
3.4.3 Conditions à l'axe de symétrie	49
3.4.4 Condition près des parois solides	50
3.5 Algorithme simple	53
3.6 Résolution numérique	56
3.7 Séquences des opérations itératives	59
<b>Chapitre 4 : Résultats et interprétations</b>	60
4.1 Le jet confiné laminaire	60
4.2 Le jet confiné turbulent	65
4.3 Le jet confiné turbulent à densité variable	77



## Nomenclature

$C$	<i>Fraction massique ou concentration</i>
$d_i$	<i>Diamètre intérieur de la buse coaxiale</i>
$d_e$	<i>Diamètre de confinement</i>
$S$	<i>Rapport de masse volumique initiale</i>
$M$	<i>La masse molaire</i>
$U_i$	<i>Vitesse du jet</i>
$U_e$	<i>Vitesse de l'écoulement secondaire</i>
$S_{ch}$	<i>Nombre de Schmidt</i>
$Re$	<i>Nombre de Reynolds</i>
$S_\Phi$	<i>Terme de source relatif à la variable <math>\Phi</math></i>
$k$	<i>Energie cinétique turbulente</i>
$A_P$	
$A_E$	
$A_W$	<i>Coefficients du système d'équations algébriques</i>
$A_N$	
$A_S$	
$u_i u_j$	<i>Contrainte de Reynolds en notation indicielle</i>
$u^2$	<i>Contrainte de Reynolds suivant <math>ox</math></i>
$v^2$	<i>Contrainte de Reynolds suivant <math>or</math></i>
$uv$	<i>Contrainte de Reynolds tangentielle</i>
$x, r, \theta$	<i>Coordonnées cylindriques</i>

## *Symboles grecs*

$\rho$	<i>Masse volumique ou densité de fluide</i>
$\mu$	<i>Viscosité dynamique</i>
$\mu_t$	<i>Viscosité turbulente</i>
$\nu$	<i>Viscosité cinématique</i>
$\varepsilon$	<i>Taux de dissipation de l'énergie cinématique turbulente</i>
$\delta_{ij}$	<i>Symbole de KRONECKER</i>
$\Gamma_\Phi$	<i>Coefficient de diffusion de la variable <math>\Phi</math></i>
$\sigma_k \sigma_\varepsilon$	<i>Constantes empiriques de la modélisation</i>

## *Indices et exposants*

$( )_i$	<i>Relative à la buse intérieure</i>
$( )_e$	<i>Relative la buse extérieure</i>
$( )_a$	<i>Relative à l'ambient</i>
$( )$	<i>La moyenne de Favre</i>
$( )$	<i>La moyenne de Reynolds</i>
$E$	<i>Indice du plan EST</i>
$W$	<i>Indice du plan OUEST</i>
$N$	<i>Indice du plan Nord</i>
$S$	<i>Indice du plan Sud</i>
$t$	<i>Turbulent</i>

## *Introduction*

Les processus thermiques et hydrodynamiques qui se produisent dans la nature et dans la technologie provoquent souvent des écoulements où la masse volumique varie fortement. Ceci constitue l'un des sujets actuels de la thermo physique moderne. Ces écoulements se rencontrent dans différentes applications industrielles liées à l'énergétique et à la propulsion. La variation de la masse volumique peut être provoquée soit par des grands écarts de température ou des réactions chimiques au sein de l'écoulement, soit par le mélange de plusieurs écoulements de compositions différentes.

De nombreux procédés industriels nécessitent le mélange des gaz réactifs ou non réactifs. Bien qu'ils restent en moyenne hors des limites d'auto inflammation, les réactifs peuvent atteindre occasionnellement de telles limites, et pour des situations extrêmes, la combustion peut s'initier. La vitesse de flamme est alors en mesure de s'accélérer et même de conduire vers une transition déflagration – détonation, phénomène particulièrement dangereux et destructif.

La conception de tels systèmes industriels exige donc la mise en place de mélangeurs hautement efficaces afin de réduire à la fois la longueur et le temps caractéristique du mélange, et ainsi diminuer les risques d'auto-allumage. La plupart des mélangeurs statiques actuels sont certes très efficaces, mais peuvent parallèlement conduire à la formation de zones où la fraction de réactifs et les temps de séjour deviennent compatibles aux conditions d'inflammation spontanée.

Les mélangeurs dynamiques, contents à eux, en comportant un jet introduit dans un écoulement transverse, constituent une alternative intéressante au problème.

L'écoulement de type jet turbulent confiné à densité variable ne fait pas l'exception à cet égard, en effet, il est devenu dans le présent, l'un des plus grands problèmes de mécanique des fluides.

Le but de ce projet est donc d'étudier numériquement l'écoulement d'un jet turbulent confiné dans un mélange gazeux. Une fois les caractéristiques du fluide établi en sortie de confinement, les conséquences sur le comportement du jet y sont également étudiées.

Dans la première partie de ce mémoire, une étude bibliographique est effectuée sur les diverses recherches qui ont pour sujet les jets turbulents en générale et ceux à densité variable particulièrement. Cela permet de déterminer l'évolution de

certaines paramètres sur des géométries données. Ces derniers sont repris et introduits, dans la mesure du possible, dans les simulations numériques effectuées sur l'injecteur. Cela aboutit à l'obtention des divers profils (vitesse, pression, concentration) qui permettent une caractérisation relativement complète de l'écoulement.

La deuxième partie illustre les équations de transport fondamentales de la mécanique des fluides pour les écoulements turbulents à densité variable.

La troisième partie traite la méthode numérique basée sur des intégrales locales sur des volumes finis, et les principes de la discrétisation des équations de mouvement.

Enfin, dans la dernière partie de ce mémoire. On présente les principaux résultats en appliquant la méthode numérique discutée à La troisième partie, où les résultats numérique pour chaque cas, homogène comme le cas hétérogène sont commentés et comparés avec les résultats expérimentaux obtenues par *Jérôme Pigeot (1995)* pour le jet turbulent et *Toufik Djeridane (1994)* pour le jet turbulent à densité variable pour pouvoir ensuite tirer les conclusions et faire les remarques nécessaires.

## ***Chapitre 1 : Etude bibliographique***

### ***1.1 Les jets confinés***

L'injection d'un fluide à l'intérieur d'un milieu confiné a fait l'objet de plusieurs études théoriques que expérimentales. On retiendra surtout la théorie d'intégration approchée des équations de mouvement de *Barchilon et Curtet (1964)* et *Kian et Binder (1983)*. Ainsi que celle de *Craya et Curtet (1985)* qui a donné une bonne base pour l'étude de cet écoulement.

*Gaskin. S et Wood. I. R (2002)* ont montré que les variations des propriétés moyennes d'un jet axisymétrique et d'un jet plan dans un courant de même direction, en conduite infinie ont été déterminées en utilisant l'équation de quantité de mouvement supplémentaire et une fonction d'entraînement.

### ***1.2 Les jets turbulents à densité variable***

Les jets turbulents à fortes variations de masse volumique, par exemple ceux correspondant au mélange d'hélium gazeux à température ambiante avec l'air environnant, ont été l'objet de nombreuses études depuis une bonne dizaine d'années. *John Way et Paul A.Libby (1971)*, *Amielh. M, Djeridane. T, Anselmet. F et Fulachier (1995)* ont montré que les forts écarts de masse volumique en sortie de buse génèrent un entraînement de l'air ambiant nettement plus efficace lorsque le gaz issu de la buse est plus léger que celui-ci. Ils montrent que le taux asymptotique sur l'axe des écart-types des fluctuations de vitesse et de concentration est atteint pour des sections situées d'autant plus près de la buse que le rapport de masse volumique ( $\rho_j/\rho_e$ ) est plus faible. Par contre, lorsque les jets ont atteint un régime pleinement développé, la structure de la turbulence ne semble pas être affectée par l'écart initial de masse volumique, même pour ce qui concerne les corrélations d'ordre trois, intervenant, dans les équations de bilan des tensions de *Reynolds*.

*Sarh (1990)* remarque que l'énergie cinétique de la turbulence, d'un jet plan d'air fortement chauffé est plus forte que celle d'un jet froid. *Panchapakesan et Lumley (1993)* trouvent le même résultat dans un jet d'hélium pour l'énergie cinétique de la turbulence

Dans les jets axisymétriques fortement chauffés *Bahraoui (1887)* et *Amialh (1989)* observent une augmentation notable de la turbulence.

La variation de la masse volumique joue un rôle très important dans la stabilité des jets. *Sohn (1988)* trouve que si le rapport ( $\rho_j/\rho_e$ ) est inférieur à 0.74, le jet devient absolument instable et on peut citer aussi les travaux de *Sreenivisan et Col (1989)* pour le jet d'hélium dans l'air et les travaux de *Mokewitz et Col (1990)* pour les jets d'air fortement chauffés.

Pour la validation des lois de décroissance générales, dans les jets à masse volumique variable, plusieurs travaux montrent que, l'entraînement du jet augmente lorsque la masse volumique diminue.

Pour un jet fortement chauffé *Corrcin et Ulberoi (1949)* (pour  $\rho_j/\rho_e=0.49$ ) ont montré la décroissance axiale de la vitesse, et de la température sont plus prononcées que, celle d'un jet à faible chauffage (pour  $\rho_j/\rho_e=0.95$ ).

*Tombach (1969)* trouve, qu'un jet d'hélium débouchant dans l'air, se développe plus rapide qu'un jet homogène ( $\rho_j/\rho_e=1$ ).

Sans oubliant, l'effet des conditions initiales, sur le développement des jets à masse volumique variable. *Antonia et Bilger (1973)* se sont intéressés à l'étude de l'effet d'un co-courant pour un jet d'air ( $\rho_j/\rho_e=1$ ). Ils concluent que l'écoulement ne serait en similitude que pour des rapports  $Ct = U_j/U_e$  suffisamment inférieurs à l'unité.

*Matsumoto et Col (1973)* montrent que l'épaisseur de la paroi de la buse d'éjection peut avoir une influence considérable sur la croissance d'un jet. Et celle ci est d'autant plus forte que l'épaisseur de la buse est importante.

Le nombre de *Reynolds* est aussi un paramètre d'importance. En effet, *Pitts (1991)* obtient, indépendamment de la masse volumique, une diminution de la croissance d'un jet, lorsque,  $R_{ej}$  augmente.

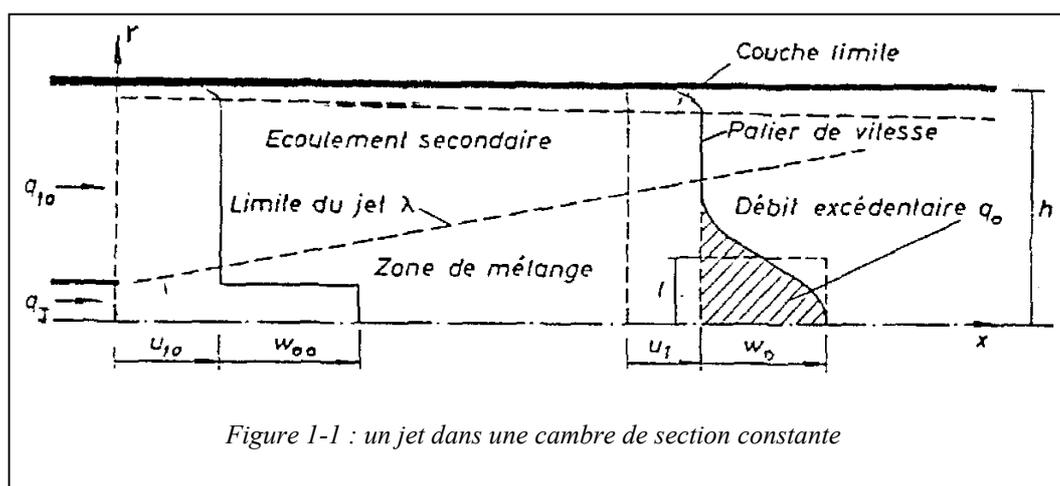
Pour les études théoriques et numériques plusieurs schémas de décomposition sont valables pour l'étude de ce genre d'écoulement. *Donnalcsou et col (1972)*, *Janika et kollman (1979)* et *Janika et Lumley (1981)*, ont utilisé l'approche des moyennes conventionnelles au sens de *Reynolds*.

D'autres chercheurs ont utilisés l'approche des moyennes dites "pondérées par la masse" ou moyenne de *Faver (1966,1969)*, *Borghini et Dotoya (1978)*, *Jones (1979)*, *Chassaing (1979)*, *Viollet et Col (1987)* et *Ruffin et Col (1994)*, adoptent cette décomposition pour étudier des écoulement turbulent à masse volumique variable.

En conclusion, la plus part des études précédentes s'accordent sur un effet global significatif de la variation de la masse volumique : « *plus le jet de gaz est léger, meilleur est son mélange* ».

### 1.3 Description de l'écoulement

Le jet confiné est un écoulement turbulent complexe et comme son nom l'indique son évolution est à l'intérieur d'un conduit (à section variable ou constante) voir figure 1-1.



L'évolution de cet écoulement est globalement contrôlée par les mécanismes de diffusion et d'entraînement du jet (lorsque c'est un écoulement turbulent) qui produisent l'expansion du jet et l'augmentation de son débit.

Le confinement et la conservation du débit total de l'écoulement implique l'augmentation du débit du jet doit être compensée par une réduction de celui de l'écoulement ambiant, ainsi la vitesse de l'écoulement secondaire tend à diminuer ce qui engendre un gradient de pression positif.

Ce gradient de pression longitudinale (suivant l'axe  $ox$ ) engendré par le confinement influence à son tour l'évolution de l'écoulement et favorise le développement rapide des phénomènes turbulents.

Dans notre cas (jet turbulent confiné à section constante cylindrique) la vitesse ambiante peut s'annuler quand le débit excédentaire devient égale au débit total, ici on distingue deux cas :

- 1- La vitesse ambiante s'annule avant que le jet n'atteigne la paroi, dans ce cas après l'épuisement du débit ambiant disponible le jet continue à entraîner encore du fluide qui doit donc venir de l'aval, il y a génération de courant de retour turbulent (apparition de recirculation).
- 2- Le fluide ambiant alimente toujours la zone de mélange jusqu'au point où le jet touche la paroi l'entraînement du jet s'arrête et l'écoulement tend vers l'écoulement établi dans une conduite.

L'apparition de la recirculation dépend donc du débit ambiant, c'est à dire à la fois des conditions cinématiques à l'entrée et des caractéristiques géométriques des jets confinés.

Il est évident que l'écoulement d'un jet confiné a pour caractéristique fondamentale un haut niveau de turbulence difficile à évaluer, alors que les difficultés sont multiples :

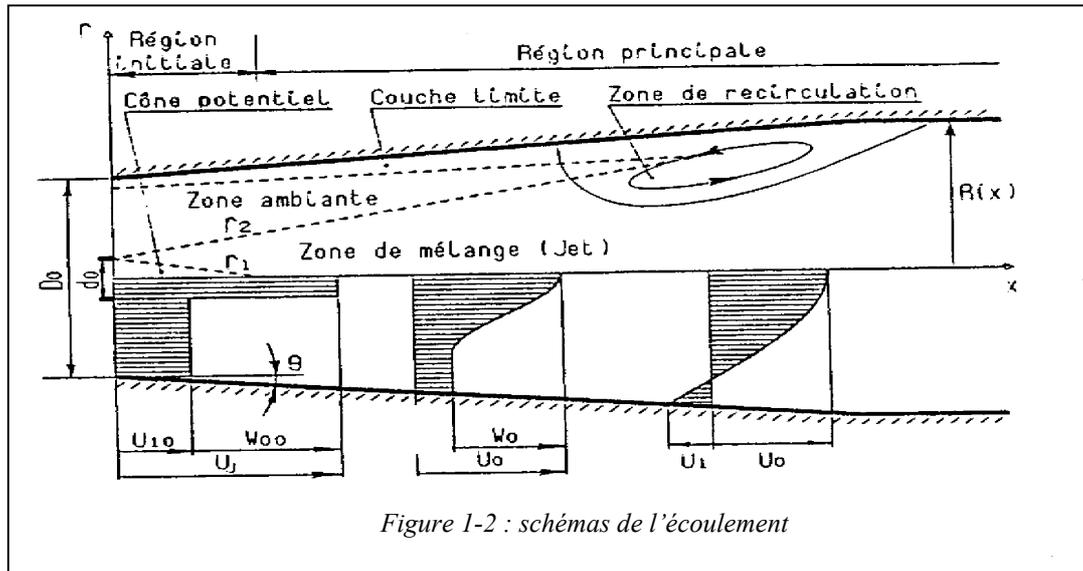
- la longueur initiale de développement du jet représente souvent une fraction non négligeable de la longueur de la chambre de confinement, dans cette région l'entraînement diffère de celui du jet développé.

- l'écoulement étant déjà fortement perturbé en présence de recirculation, il peut apparaître un régime oscillatoire dans lequel le jet balaye toute la chambre de confinement, ceci pour de très faible débit ambiant (entraînement du jet très important)

- le gradient de pression adverse peut être suffisamment important pour influencer la diffusion du jet, et l'épaississement des couches limites sur les parois a dans ce cas une influence non négligeable sur l'écoulement.

- la géométrie du conduit peut également favoriser le décollement et renforcer la recirculation comme c'est le cas dans un confinement divergent.

Dans le cas d'un jet confiné à section variable, on distingue de point de vue physique cinq régions principales dans le champ d'écoulement (figure 1-2) :



- 1- Le cône potentiel de jet.
- 2- La zone d'écoulement ambiant dont l'écoulement est potentiel.
- 3- La zone de jet ou zone de mélange où il existe des gradients élevés de vitesse et une turbulence intense.
- 4- La couche limite sur la paroi.
- 5- La zone de recirculation qui apparaît lorsque le gradient de pression adverse est suffisamment important.

Le jet confiné donc est un écoulement turbulent très complexe surtout en présence de la recirculation (qui a une théorie spéciale), pour notre cas et pour une étude judicieuse il nous faut l'introduction de paramètre de similitude de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ) qui fait intervenir les conditions cinématiques, les dimensions d'entrée et la géométrie de conduit de confinement.

## 1.4 Etude théorique

### 1.4.1 Méthodes intégrales

La base de ces méthodes est l'intégration directe des équations de mouvement classique de la mécanique des fluides, et se sont les premiers modèle développé pour le calcul numérique des jets confinés.

Leur élaboration débutât avec les travaux de *Craya* et *Curtet* dans les années cinquante (jet confiné à section constante).

Ces méthodes sont basées dans leur traitement sur les suppositions suivantes :

Les jets confinés ont même comportement que les jets libres (Permet de définir certaine similitude).

Les profils de vitesse excédentaire de frottement turbulent sont considéré affines (*Reynolds* turbulent constant dans l'écoulement).

Les différentes méthodes proposées ne sont pas applicables à tout type de jet confiné. Néanmoins *Craya* et *Curtet* ont été les premiers à développer une théorie complète pour les jets confinés dans un conduit de section constante.

Le profile de vitesse excédentaire a été supposé affine (fig.1-1).

$$w = w_0 f(\eta)$$

$$\eta = \frac{r}{l} \quad , \quad w_0 = w_0(x) \quad \text{et} \quad L = L(x)$$

L'écoulement de fluide ambiant est potentiel :

$$\frac{dp}{dx} = -U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (1.1)$$

Les trois inconnues sont alors:  $l(x)$ ,  $w_0(x)$  et  $U_1(x)$ .

Pour résoudre le problème *Craya* et *Curtet* ont intégré le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Equation de continuité :} \quad & \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial r} = 0 \\ \Rightarrow \quad & Q = \pi W_0 L^2 + \pi U_1 (R - \delta_*^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

### Équation de quantité de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \Rightarrow \frac{(U_1^2 W_0^2 L^2)'}{U_1 W_0^2 L} + K_1 \frac{(W_0^2 L^2)'}{W_0^2 L} = 0 \quad (1.3)$$

### Profil de contrainte

$$\sigma(x) = \int_0^\lambda \frac{2\tau\eta}{\rho W_0^2} \chi(x) d\eta \Rightarrow \sigma(x) = -a \frac{(W_0^2 L^2)'}{W_0^2 L^2} + b \frac{(U_1 L^2)'}{W_0 L} \quad (1.4)$$

Les trois équations (1.2), (1.3) et (1.4) traduisent :

- La conservation de débit total.
- La conservation de la poussée totale dans le conduit de section constante ce qui suppose le frottement pariétal négligeable.
- L'affinité du profil des contraintes.

*Craya* et *Curtet* ont le mérite de voir que l'équation (1.3) était directement intégrable et de reconnaître l'importance de la constante d'intégration.

$$M = \frac{-3}{2} R^2 + R + K \frac{R^2}{L^2} \quad (1.5)$$

Où :  $R = \frac{q_0}{Q}$  et  $L = \frac{1}{h}$ ,  $h$  : est la demi hauteur de la chambre de confinement.

$Ct = \frac{1}{\sqrt{m}}$  :  $C$ 'est le paramètre de *Craya* et *Curtet*. Le paramètre ( $m$ ) peut être

retrouver par l'application directe de la théorie de quantité de mouvement, donc  $Ct$  traduit la conservation de la poussée totale le long d'un conduit de section uniforme, ceci dans le cas où les frottements pariétaux sont négligeables.

$$m + \frac{1}{2} = \frac{S}{Q^2} \int_s (U^2 + \frac{p}{\rho}) ds \quad \text{Où} \quad Q = \int_s U ds$$

Si  $s \ll S$  et  $q_j \ll q_{10}$  on peut écrire  $Ct \approx \frac{Q}{q_j} \frac{d_0}{D_0}$

A partir de cette dernière expression on peut obtenir les différentes valeurs de  $Ct$  il suffit de contrôler le rapport de débit primaire et secondaire dans une installation donnée.

On peut aussi exprimer  $Ct$  ainsi :

$$Ct = \frac{U_m}{\left[ (U_j^2 - U_{10}^2) \left( \frac{d_0}{D_0} \right)^2 + 0,5(U_{10}^2 - U_m^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.6)$$

Avec :  $U_m = (U_j - U_{10}) \left( \frac{d_0}{D_0} \right)^2 + U_{10}$

Il existe bien d'autres méthodes intégrales comme celle de *Hill P.G (1973)* qui a été applicable à tout type de jet confiné avec ou sans recirculation.

### 1.4.2 Méthode différentielle

Actuellement on se base dans la résolution numérique des problèmes de la turbulence sur les méthodes différentielles car elles sont beaucoup plus puissantes et permettent des modélisations plus fines de la turbulence.

*Zhu (1981)* s'est attaché à une étude systématique des différents modèles de turbulence avec pour base de comparaison les mesures de *Barchilon* et *Curtet* (jet confiné dans un conduit cylindrique) et celle de *Kian* et *Bindre* (jet confiné dans un conduit divergent). *Zhu* a obtenu des résultats en bon accord avec les expériences.

Malgré tout, cette recherche montre que pour les calculs d'écoulements complexes des jets confinés avec recirculation, les méthodes de résolution différentielles paraissent plus compétitives et prometteuses que les méthodes intégrales, même si beaucoup de problèmes dus à certaines faiblesses des modèles de turbulence et à des difficultés numériques.

## 1.5 Etude expérimentale

### 1.5.1 Expérience de *Barchilon* et *Curtet*

La théorie de *Craya* et *Curtet* présente beaucoup d'insuffisance surtout lorsqu'il y a recirculation, ce qui a conduit *Barchilon* et *Curtet* à affecter une recherche expérimentale systématique en vue de savoir comment se comporte un écoulement en présence de recirculations turbulentes.

Les dimensions caractéristiques de leur expérience sont les suivantes :

$d_e = 160 \text{ mm}$	diamètre de confinement cylindrique.
$D_j = 12 \text{ mm}$	diamètre de l'éjecteur.
$L = 1,6 \text{ m}$	longueur du confinement.

*Barchilon et Curtet* ont réalisé plusieurs expériences en gardant le débit primaire approximativement constant (environ 1,46 l/s) et en faisant varier le débit secondaire.

Le tableau ci-dessous représente leurs résultats.

Teste n <sup>o</sup>	Débit de jet (l/s)	Débit ambiant (l/s)	m	$Ct$	Vitesse moyenne (m/s)
1	1,463	1,689	1,05	0,976	0,913
2	1,469	1,214	1,96	0,714	0,677
3	1,418	7,96	3,91	0,506	0,466
4	1,450	4,37	10,77	0,305	0,289
5	1,466	1,48	43,24	0,152	0,147
6	1,456	0,00	1,767	0,075	0,072

Les mesures montrent que l'apparition de la recirculation est proportionnelle aux valeurs de  $Ct$  et elle se limite quand  $Ct \geq 0,976$ . Par contre le calcul théorique nous donne une valeur de  $Ct=0,816$  ce qui traduit que la recirculation est un écoulement très complexe tant pour les mesures que pour les calculs.

En confinement cylindrique le gradient de pression longitudinal adverse est engendré uniquement par l'entraînement du jet.

### **1.5.2 Expérience de Kian et Binder**

Les investigations expérimentales détaillées de jets confinés dans des conduits de section variable étant peu nombreuses, surtout en présence de recirculation, *Kian* et *Binder* se sont employés à de telles études.

Les dimensions caractéristiques de leur expérience sont les suivantes :

$d_j = 16 \text{ mm}$	diamètre de l'éjecteur.
$D_e = 160 \text{ mm}$	diamètre de la section d'entrée du divergent.
$D_s = 240 \text{ mm}$	diamètre de la section de sortie du divergent.
$L = 640 \text{ mm}$	longueur de la chambre d'essai.

Le choix du demi angle de divergence  $\theta = 2.5^0$  est justifié par la nécessité de pouvoir étudier différents types d'écoulements sans pour autant avoir un décollement trop important de la couche limite (même à  $Ct$  très faible).

Bien que le nombre de *Craya – Curtet* ne soit pas constant le long d'une conduite à section variable, sa valeur dans la section d'entrée peut être utilisée pour y caractériser les conditions cinématiques et géométriques d'entrée.

Comme dans le cas de *Barchilon*, les différentes valeurs de  $Ct$  sont réalisées en gardant les vitesses primaires constantes et en faisant varier les vitesses secondaires à l'entrée, les conditions expérimentation retenues sont les suivantes :

n°	$Ct$	$U_J$ ( cm/s )	$U_e$ ( cm/s )
1	0.590	40	2.330
2	0.570	650	29.90

Par comparaison avec un écoulement dans une chambre cylindrique avec des conditions cinématiques identiques à l'entrée (même valeur de  $Ct$ ), *Kian* et *Binder* ont trouvé que :

- L'étendue de la zone de recirculation est plus importante.
- L'évolution de pression est plus forte.
- L'expansion du jet est plus rapide.

Leur conclusion est que la divergence quoique choisie judicieusement, pouvait influencer considérablement l'écoulement surtout aux valeurs de  $Ct$  inférieures à 1. La divergence du conduit doit favoriser le décollement et renforcer la recirculation.

### 1.5.2 Expérience de T. Djeridane

T. Djeridane (1994) a réalisé un jet de tube (buse :  $d_j = 26 \text{ mm}$ ) turbulent pleinement développé, axisymétrique, vertical, ascendant et sans rotation. Le fait que l'écoulement soit turbulent dès l'émission présente essentiellement deux avantages :

- D'une part ce régime est très souvent rencontré dans les installations industrielles.
- d'autre part, étant donné que l'un des objectifs à atteindre est la validation de modèles numériques, le calcul de la transition laminaire/turbulent n'est, dans ces conditions, pas à faire.

Ce jet est faiblement confiné ( $d_e/d_j > 10$ ), la vitesse de l'écoulement secondaire doit, néanmoins, être assez élevée pour éviter l'existence de la zone de recirculation.

Ce problème est normalement évité lorsque le paramètre de Craya-Curtet ( $Ct$ ), pour des écoulements à masse volumique variable (Steward et Guruz (1977)), demeure supérieur à 0.8 quel que soit le gaz considéré.

La variation de la masse volumique est obtenue en injectant dans le jet primaire des gaz de densité  $\rho_j$  différente de celle de l'écoulement d'air  $\rho_e$  du secondaire dans lequel ils s'épanouissent.

Les dimensions caractéristiques de leur expérience sont les suivantes :

- $d_j = 26 \text{ mm}$  diamètre de l'éjecteur.
- $D_e = 285 \text{ mm}$  diamètre de la section d'entrée du divergent.
- $L = 640 \text{ mm}$  longueur de la chambre d'essai.

#### Propriétés physiques des gaz purs considérés (20°)

Gaz	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Hélium	0.17
Air	1.29
CO <sub>2</sub>	1.82

## ***1.6 Objectifs du travail***

Le premier objectif qui motive cette étude consiste à explorer le comportement des jets confinés turbulents homogènes et hétérogènes en fonction des vitesses et de la densité initiale, et de comprendre la dynamique et les processus de mélange des jets confinés avec fortes et faibles différences de densité. La détermination de l'existence d'une zone de recirculation ou d'une génération de pression, pour chaque type de jet, sont des priorités de ce mémoire. Les rapports initiaux des vitesses (paramètre de *Craya-Curtet*  $Ct$ ) et des densités sont les paramètres qui vont définir le type de jet. En faisant varier le nombre  $Ct$  et le rapport de densité, nous allons nous déplacer entre les deux extrêmes. Il y aura des combinaisons vitesse-densité initiales qui développeront un cône potentiel et d'autres qui conduiront à l'établissement d'une zone de recirculation. Un paramètre important dans cette étude est la longueur du cône potentiel et sa variation avec les paramètres de l'écoulement.

Le deuxième objectif de ce travail numérique c'est d'établir et formuler les équations des écoulements turbulents où la masse volumique est variable, dû à un mélange non réactif de gaz différent. Sur le plan de la modélisation de ce type d'écoulement, il existe plusieurs schémas de fermeture au second ordre, qui seront comparés et discutés. Le schéma adopté ici c'est la proposition de *Favre*.

## Chapitre 2 : Formulation mathématique du problème

Ce chapitre expose les équations mathématiques gouvernantes des écoulements laminaires, turbulents et à densité variable d'un jet confiné, particulièrement les écoulements axisymétriques elliptiques.

### 2.1 Equations des écoulements laminaires

#### 2.1.1 Equation de continuité

Le principe de conservation sur une unité de volume d'un fluide mène à une équation de continuité qui se met sous la forme suivante.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (2.1)$$

Pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ) on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Equations de quantité de mouvement (Equations de Navier-Stokes)

L'application de la deuxième loi fondamentale de la dynamique à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de quantité de mouvement où équations de *Navier-Stokes*.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.3)$$

-Les force de pression :  $\frac{\partial p}{\partial x_i}$  .

-Les force de surface :  $\frac{\partial (\tau_{ij})}{\partial x_j}$  .

-Les forces extérieures de volume et regroupent généralement les forces de gravité  $f_i$  :

-Les contraintes  $\tau_{ij}$  pour un fluide newtonien sont liées linéairement aux taux de déformation par l'intermédiaire de la viscosité dynamique du fluide :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Si les forces de la gravité sont négligeables les équations de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i) = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.5)$$

- Les termes à gauche représentent le taux de variation locale de la quantité de mouvement et son transport par convection.
- Les termes à droite représentent le gradient de pression et le transport par diffusion.

## 2.2 Equations standard de transport

### 3.2.1 Equations instantanées

Le transport d'une variable générale dépendante par unité de masse en tout point de l'espace et du temps peut être exprimé par une équation différentielle partielle en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}(J\phi) + S_\phi \quad (2.6)$$

L'équation de transport de masse de fluide par unité de masse s'obtient de l'équation (2.6) en mettant  $\phi = 1$  (en régime permanent pour un fluide incompressible) :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

L'équation de transport de quantité de mouvement dans la direction  $x_i$  ( $\phi = U_i$ ) s'écrit dans le même cas d'écoulement :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

$U_i$  : Composante de la vitesse instantanée dans la direction  $x_i$  .

$S_\phi$  : Taux de production (destruction) de  $\phi$  .

$\phi$  : Valeur instantanée de la variable dépendante par unité de masse.

$\tau_{ij}$  : Contraintes dans la direction  $x_i$  sur la face normale à la direction  $x_j$  .

Si le fluide est newtonien :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.-10)$$

### 2.2.2 Equation du mouvement moyen

Dans un écoulement turbulent les vitesses changent sensiblement pour un incrément de temps infinitésimal. Il est très difficile de capturer les fines Perturbations qui subsistent sur une telle échelle et la résolution dépasse la capacité des calculateurs présents.

Pour étudier l'évolution du mouvement d'une particule fluide dans un écoulement turbulent, une approche statistique a été proposée par *Reynolds (1895)*.

La valeur instantanée ( $\phi$ ) d'une valeur dépendante est séparée en une valeur moyenne ( $\bar{\phi}$ ) et une fluctuation ( $\phi'$ ).

La moyenne ( $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ) et définie comme suit :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_0^T \phi \cdot dT \quad (2.11)$$

Si  $U_i$  est la vitesse instantanée dans la direction  $x_i$  et  $P$  la pression instantanée :

$$U_i = \bar{U}_i + u_i'$$

$$P = \bar{P} + p'$$

$u_i'$  : Fluctuation de la vitesse

$\bar{U}_i$  : Moyenne de la vitesse

Du calcul de la moyenne, on déduit les égalités suivantes :

$$\overline{U_i U_j} = \bar{U}_i \bar{U}_j + \overline{u_i' u_j'}$$

$$\overline{U_i u_j'} = \overline{u_i' U_j} = 0$$

$$\overline{u_i'} = 0$$

On prend la moyenne de l'équation instantanée de la quantité de mouvement dans la direction  $x_i$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{U_i U_j}) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}_i \bar{U}_j) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i' u_j'}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On remarque qu'en plus de terme de transport par diffusion par interaction moléculaire (i.e., la contrainte de viscosité  $\mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$ ), L'apparition d'un nouveau terme, le tenseur  $\overline{\rho u_i' u_j'}$  qui exprime le transport diffusif du au mouvement turbulent appelés contraintes de *Reynolds*.

## 2.3 Equation exacte des contraintes de Reynolds

### 2.3.1 Equation de Reynolds

Pour obtenir la double corrélation de *Reynolds*  $\overline{\rho u_i' u_j'}$ , il a été procédé de la manière suivante :

En soustrayant l'équation du mouvement instantané (2.12) de l'équation instantanée (2.10), l'équation obtenue pour la composante  $u_i$  est :

$$\rho \bar{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\rho u'_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial U}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} - u'_i u'_j) \quad (2.13)$$

Une équation identique pour la composante  $u_k$  :

$$\rho \bar{U}_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} = -\rho u'_j \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k u'_j} - u'_k u'_j) \quad (2.14)$$

En multipliant l'équation pour  $u'_i$  par  $u'_k$  et l'équation pour  $u'_k$  par  $u'_i$  on a :

$$\rho u'_k \bar{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\rho u'_k \left\{ u'_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} - u'_i u'_j) \right\} \quad (2.15)$$

$$\rho u'_i \bar{U}_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} = -\rho u'_i \left\{ u'_j \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k u'_j} - u'_k u'_j) \right\} \quad (2.16)$$

En additionnant les deux dernières équations membre à membre :

$$\begin{aligned} \rho u'_k \bar{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} &= -\rho u'_k \left\{ u'_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} - u'_i u'_j) \right\} \\ &\quad - \rho u'_i \left\{ u'_j \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k u'_j} - u'_k u'_j) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Après réarrangement et en prenant la moyenne, on arrive finalement l'équation exacte pour la contrainte de Reynolds :

$$\bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_k}) = \quad -1- \quad (2.18)$$

$$- (\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}) \quad -2-$$

$$- 2\nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) - \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad -3-$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_k u'_j} + \delta_{kj} \frac{\overline{u'_i p}}{\rho} + \delta_{ij} \frac{\overline{u'_k p}}{\rho} \\
& \quad - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - \nu u'_k \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} - \nu u'_i \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}) \quad -4-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\overline{p}}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_i} \right) \quad -5-
\end{aligned}$$

Le terme 1 : représente le taux de variation de la contrainte de Reynolds.

Le terme 2 : représente le taux de production de la turbulence.

L'action de taux de déformation normal  $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  sur la double corrélation augmente

l'intensité de turbulence.

Les termes 3 : représentent le taux de dissipation (les tourbillons ayant les petites échelles de longueurs s'étouffent par l'effet de la viscosité).

Les termes 4 : représentent différents mécanismes de diffusion (diffusion par interaction moléculaire, diffusion par la turbulence et fluctuation de pression).

Les termes 5 : sont des termes de redistribution (interaction pression / taux de déformation qui tend à l'isotropie des contraintes de Reynolds).

### 2.3.2 Equation de l'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente  $k$  par unité de masse est définis par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad (2.19)$$

En mettant  $i=k$  dans l'équation exacte des contraintes de Reynolds et on divisant par 2, on obtient l'équation de l'énergie cinétique  $k$  :

$$\begin{aligned}
\rho \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= -\rho \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right] \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\rho k u'_j} + \delta_{ij} \overline{\rho u'_i} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2-20)
\end{aligned}$$

Le taux de dissipation a été donné par le terme :

$$\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]} \quad (2.21)$$

## 2.4 Modélisation de la turbulence

La détermination de la double corrélation  $\overline{u'_i u'_j}$  est le principal problème rencontré dans le calcul des écoulements turbulents. On ne peut le déduire de l'équation exacte de transport (comme c'est démontré précédemment) car ceci contient des corrélations d'ordre supérieur ( $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ ). La fermeture du système d'équations ne peut être donc obtenue par l'appel à des équations et à des corrélations d'ordre supérieur. Par conséquent la modélisation de la turbulence doit être introduite à un certain niveau, ceci consiste à approcher les contraintes de *Reynolds*.

Les moyens de fermeture utilisés font intervenir : Soit des équations de transports des contraintes de *Reynolds*, soit le concept de la viscosité turbulente. Parmi les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente et qui vont être exposés par la suite, il existe :

- Les modèles à zéro équation de transport.
- Les modèles à une équation de transport.
- Les modèles à deux équations de transport.

### 2.4.1 Concept de la viscosité turbulente

La plus ancienne des hypothèses de la modélisation de la turbulence et qui est devenue aujourd'hui une proposition de grande importance, est le concept de *Boussinesq (1877)*. Par analogie à la viscosité moléculaire dans les écoulements laminaire, les contraintes turbulentes sont liées aux gradients des vitesses moyennes par les biais d'un coefficient appelé :

Viscosité turbulente et notée :  $\mu_t$

$$-\overline{u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.22)$$

La viscosité turbulente comme l'indique son nom dépend de l'état de la turbulence, en tout point du domaine d'écoulement, donc elle n'est pas une propriété de fluide lui-même, mais une propriété de la turbulence, elle varie sensiblement d'un point à un autre et d'un écoulement à un autre.

Cependant l'introduction de l'hypothèse de *Boussinesq*, seule, ne peut en aucun cas constituer un modèle de turbulence, seulement elle fournit une structure de travail pour une construction de la sorte. Le problème qui se pose maintenant est la détermination de la distribution de la viscosité turbulente.

Stimulé à la théorie cinétique des gaz, le concept de la viscosité turbulente a été conçu pour présumer une analogie entre le mouvement moléculaire et le mouvement turbulent les tourbillons analogues aux molécules se heurtent (entrent en collision) et échangent donc la quantité de mouvement. La viscosité moléculaire est proportionnelle à la vitesse moyenne et le libre parcours moyen des molécules, par conséquent la viscosité turbulente est considérée proportionnelle à une vitesse caractéristique du mouvement fluctuant  $V$  et à une longueur typique ou une échelle de longueur caractéristique  $L$  :

$$\nu_t \propto VL$$

L'échelle caractéristique des fluctuations de vitesse et l'échelle typique des longueurs ont été postulées à partir de plusieurs hypothèses.

#### 2.4.2 Modèle à zéro équation

La première génération de la modélisation de la turbulence est celle proposé par *Prandtl (1925)* connue par l'hypothèse de la longueur de mélange.

La longueur de mélange  $L_m$  est définie par *Prandtl* comme suit :

Si dû au mouvement turbulent qu'un bloc de fluide se déplace avec une vitesse moyenne  $U_1$  dans la direction transversale de  $Y_1$  à  $Y_2$  , sa vitesse  $U_2$  à la position  $Y_2$

différentielle de  $\Delta U$  la distance  $Y_2 - Y_1$  pour laquelle  $\Delta U$  est égale à la moyenne transversale de la fluctuation de vitesse et la longueur de mélange.

Il a postulé donc que :

$$Lm = L \text{ et } V = Lm \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (2.23)$$

D'où la distribution de la viscosité turbulente donnée par *Prandtl* :

$$v_t = Lm^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (2.24)$$

Ce modèle peut être appliqué avec succès dans les écoulements dont la longueur de mélange peut être spécifiée par des formulations empiriques simples, cependant il reste invalide dans les écoulements complexes (où les processus de convection et de diffusion sont importants) à cause de la difficulté de la détermination de la longueur de mélange.

### 2.4.3 Modèle à une équation de transport

Pour surpasser les difficultés de l'hypothèse de *Prandtl*, le modèle à une équation a été développé, il prend en considération les caractéristiques de l'agitation turbulente, par l'évolution d'une grandeur transportable analogue à la vitesse. Ainsi *Prandtl* et *Kolmogorov*, ont introduit indépendamment que l'échelle de la vitesse du mouvement fluctuant est :

$$V \propto K^{1/2}$$

Par conséquent :

$$v_t = C\mu K^{1/2} L \quad (2.25)$$

$C\mu$  : Constante empirique de *Prandtl*.

$k$  et  $L$  : sont respectivement l'énergie turbulente et l'échelle de longueur caractéristique des tourbillons porteurs d'énergie.

Ce modèle exige la détermination de l'énergie  $k$  qui est donnée par l'équation de transport (2.20).

$$\bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{\sigma_{k,l}} + \frac{\nu_t}{\sigma_{k,t}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \varepsilon \quad (2.26)$$

Le taux de la dissipation  $\varepsilon$  étant donné par la formule empirique :

$$\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{L} \quad (2.27)$$

L'échelle de longueur caractéristique doit être spécifiée pour ce modèle par des informations empiriques, ce qui limite donc son utilisation.

#### 2.4.4 Modèle à deux équations de transport

Dans le but d'éliminer les besoins de spécifier la longueur caractéristique plusieurs chercheurs l'ont obtenue à partir d'une équation de transport pour le paramètre  $K^m L^n$  analogue à l'équation de l'énergie turbulente  $k$  ces modèles sont dits modèles à deux équations de transport.

Parmi ces derniers, on cite le modèle  $k - \varepsilon$  proposé par *Jones et Launder (1972)* où :

$$\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{L} \quad (2.28)$$

( $m=3/2$  et  $n=-1$ ).

Les équations de transport semi-empiriques de l'énergie cinétique  $k$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$  sont données, pour un écoulement permanent en absence de l'effet de pesanteur par :

$$\bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{\sigma_{k,l}} + \frac{\nu_t}{\sigma_{k,t}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \varepsilon \quad (2.29)$$

$$\bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{v}{\sigma_{k,l}} + \frac{v_t}{\sigma_{k,t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.30)$$

Les constantes standard du modèle  $k-\varepsilon$  sont celles données par *Lander et Spalding (1974)* voir le tableau 2-1 :

**Tableau2-1 : constantes du modèle  $k - \varepsilon$**

$c_\mu$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	$\sigma_{k,l}, \sigma_{k,t}$	$\sigma_{\varepsilon,t}$	$\sigma_{\varepsilon,l}$
0.09	1.44	1.92	1	1.3	1

### **2.5 Modèle mathématique du problème à traiter :**

Dans ce paragraphe, on donnera les équations développées du problème traité dans cette présente étude.

#### **2.5.1 Définitions et hypothèses du problème**

Notre travail consiste à étudier l'évolution de l'écoulement à l'intérieur d'un conduit cylindrique par injection du fluide homogène incompressible turbulent. On considérera que l'écoulement est permanent, axisymétrique, incompressible sans réaction chimique les équations régissant l'écoulement en question sont du type elliptique.

#### **2.5.2 Jet laminaire (cas homogène)**

Les équations régissant un tel écoulement, dans le système de coordonnées cylindro-polaires sont :

##### **Equation de continuité**

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho r V)}{r \partial r} = 0 \quad (2.31)$$

## **Equations de quantité de mouvement**

### **Direction axiale**

$$U \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho U)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (2.32)$$

### **Direction radiale**

$$U \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho V)}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \mu \frac{V}{r^2} \quad (2.33)$$

### **2.5.3 Jet turbulent (cas homogène)**

En plus des équations de continuité et de quantité mouvement on a deux autres équations pour l'énergie turbulente  $k$  et le taux de dissipation  $\varepsilon$ .

## **Equations de quantité de mouvement**

### **Direction axiale**

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho\overline{UU})}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho\overline{VU})}{\partial r} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\rho k)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2r(\mu_t + \mu) \frac{\partial \overline{U}}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r} (r(\mu_t + \mu) (\frac{\partial \overline{U}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial x})) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

### **Direction radiale**

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho\overline{UV})}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho\overline{VV})}{\partial r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\rho k)}{\partial x} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2r(\mu_t + \mu) \frac{\partial \overline{V}}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial r} (r(\mu_t + \mu) (\frac{\partial \overline{U}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial x})) \right] \\ &- 2(\mu_t + \mu) \frac{\overline{V}}{r} \end{aligned} \quad (2.35)$$

### Equation de l'énergie cinétique turbulent $k$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho\bar{U}k)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho\bar{V}k)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right] + Pk - \rho\varepsilon \quad (2.36)$$

### Equation de taux de dissipation $\varepsilon$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho\bar{U}\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho\bar{V}\varepsilon)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} Pk - c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.37)$$

Avec :

$$Pk = (\mu_t + \mu) \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\bar{V}}{r} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \right)^2 \right]$$

$$\text{Et : } \mu_t = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

#### 2.5.4 Jet turbulent à densité variable

Les équations différentielles aux dérivées partielles présentées dans le chapitre 2 peuvent se mettre sous la forme :

$$\left[ \frac{\partial(r\rho U\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho V\phi)}{\partial r} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] + rS_\phi \quad (2.38)$$

Où :

$\phi$  : est la variable indépendante.

$\Gamma$  : le coefficient de diffusion.

$S_\phi$  : le terme source ou puits.

Le tableau 2-2 rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent les différents phénomènes physiques.

**Tableau 2-2**

Equation	$\phi$	$\Gamma$	$S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant(x)	$U$	$\mu$	$\left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \right]$
Quantité de mouvement suivant(y)	$V$	$\mu$	$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{2}{3} \rho K \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} - 2(\mu_t + \mu) \frac{V}{r^2}$
Energie cinétique turbulente	$k$	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$Pk + G - \rho \varepsilon$
dissipation	$\varepsilon$	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$\left[ (C\varepsilon_1 \frac{\varepsilon}{k} (Pk + G)) - (C\varepsilon_2 \rho \frac{\varepsilon}{k}) \right]$
Concentration	$C$	$D + \frac{\mu_t}{\sigma}$	0

Avec :

$$Pk = (\mu_t + \mu) \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 \right]$$

$$G = -\overline{v_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_t}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}$$

**Equation de continuité**

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} (r \bar{\rho} V) = 0 \quad (2.39)$$

**Equation de quantité de mouvement**

**Direction axiale**

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\rho u''^2})}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \tilde{U} \tilde{V})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{\rho u'' v''})}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \right] \quad (2.40)$$

**Direction radiale**

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U} \tilde{V})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{\rho v'' u''})}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \tilde{V} \tilde{V})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{\rho u'' v''})}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial \tilde{V}}{\partial r} \right) - \frac{\tilde{V}}{r^2} \right] \quad (2.41)$$

Avec :

$$-\overline{u'' u''} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \tilde{k} \delta_{ij}$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i'' \tilde{u}_j''} = \frac{1}{2} \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\rho}$$

**Modèle k-ε à densité variable**

Les deux équations de transport sur l'énergie cinétique turbulente et la partie incompressible de l'équation ε s'écrivent :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{k})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{k} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right] + P + G - \rho \varepsilon \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + \left[ \frac{\varepsilon}{k} [C_{\varepsilon_1} (P + G) - C_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon] \right] \quad (2.43)$$

Avec :

$$P = -\overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho \tilde{k} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j}$$

$$G = -\overline{u_i} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = \frac{\overline{\rho' u'}}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \quad \text{avec :} \quad 0.7 \leq \sigma_t \leq 1$$

### **Equation de transport de la concentration**

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{C})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{C} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \rho d + \frac{\mu_t}{S_{ct}} \right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_j} \right] \quad (2.44)$$

Où :  $S_{ht}$  est le nombre de *Schmidt* ( $S_{ht} = \frac{\mu_t}{\rho d_t}$ )

### **La masse volumique**

Dans le cas d'un mélange non réactif, où la fraction massique de chaque espèce est conservée, l'inverse de la masse moléculaire peut être décomposé linéairement en fonction de  $C_{gaz}$ . La loi des gaz parfaits permet, pour un écoulement isotherme à pression constante ( $M / \rho = Cte$ ), de déduire la masse volumique moyenne de mélange (gaz +air) comme suit :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{M_{mélange}} = \frac{C}{M_{gaz}} + \frac{1-C}{M_{air}} = \frac{C}{\rho_{gaz}} + \frac{1-C}{\rho_{air}} \quad (2.45)$$

Cette équation équivalente à :

$$\rho = a\rho C + b$$

Où :

$$a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \quad \text{et} \quad b = \rho_2$$

En introduisant la décomposition de *Faver* pour  $C = \tilde{C} + c''$  et de *Reynolds*

Pour  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$  on trouve :

$$\bar{\rho} + \rho = a[(\bar{\rho} + \rho')(\tilde{C} + c'')] + b$$

$$\bar{\rho} + \rho = a\left[(\bar{\rho}\tilde{C} + \rho'\tilde{C}) + \underbrace{(\bar{\rho}c'' + \rho c'')}_{\rho c''}\right] + b$$

$$\bar{\rho} + \rho = a[(\bar{\rho}\tilde{C} + \rho'\tilde{C}) + \rho c''] + b$$

En prenant la moyenne on peut obtenir :

$$\bar{\rho} = a\bar{\rho}\tilde{C} + b$$

$$\bar{\rho}(1 - a\tilde{C}) = b$$

Ce qui donne :

$$\bar{\rho} = \frac{b}{(1 - a\tilde{C})} \tag{2.46}$$

## Chapitre 3 : Procédure numérique

### 3.1 Introduction

La résolution analytique des équations aux dérivées partielles qui régissent le type d'écoulements considérés dans le présent travail est pratiquement impossible, par ailleurs un appel à la résolution numérique est absolument nécessaire. Parmi les méthodes existantes on cite :

- La méthode des différences finies
- Les méthodes des éléments finis
- La méthode des volumes finis

Ces méthodes tendent toutes à linéariser les systèmes d'équations en des systèmes algébriques dont la résolution est possible

La méthode adoptée dans notre cas est la méthode des volumes finis présentée par Patankar (1980) elle est basée sur l'intégration des équations précédentes sur des volumes finis obtenus par découpage du domaine d'étude de l'écoulement. Elle assure la conservation de masse, d'où le concept conservatif qui la rend avantageuse relativement à d'autres méthodes.

### 3.2 Discrétisation des équations de transport

L'équation générale de transport pour un écoulement permanent incompressible, axisymétrique s'écrit dans le système de coordonnées polaires  $(x, r)$  :

$$\underbrace{\left[ \frac{\partial(r\rho U\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho V\phi)}{\partial r} \right]}_{\text{terme de convection}} = \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \right]}_{\text{terme de diffusion}} + \underbrace{rS_\phi}_{\text{terme source}} \quad (3-1)$$

**Maillage et discrétisation :**

La géométrie adoptée au problème est schématisée dans la figure 3-1.

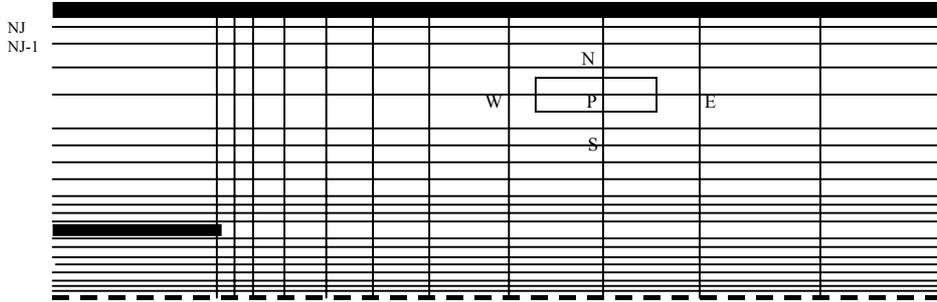


Figure 3-1 : maillage et volume de contrôle

Un maillage consiste à diviser le domaine d'étude en un ensemble de cellules appelées : volumes de contrôles, aux centres desquels ont stockés les variables  $\phi$ .

Les différentes variables à déterminer dans notre cas sont  $U$ ,  $V$ ,  $k$  et  $\varepsilon$ . Chaque nœud de maillage est repéré par deux indices  $i$  et  $j$  dont les positions sont données suivant les directions  $x$  et  $r$ . Le nombre total des nœuds est  $NI*NJ$ , tel que  $NI$  : nombre total suivant  $x$  et  $NJ$  nombre total suivant  $r$ .

**Localisation des différentes variables**

Considérons le volume de contrôle de la figure 3-2 :

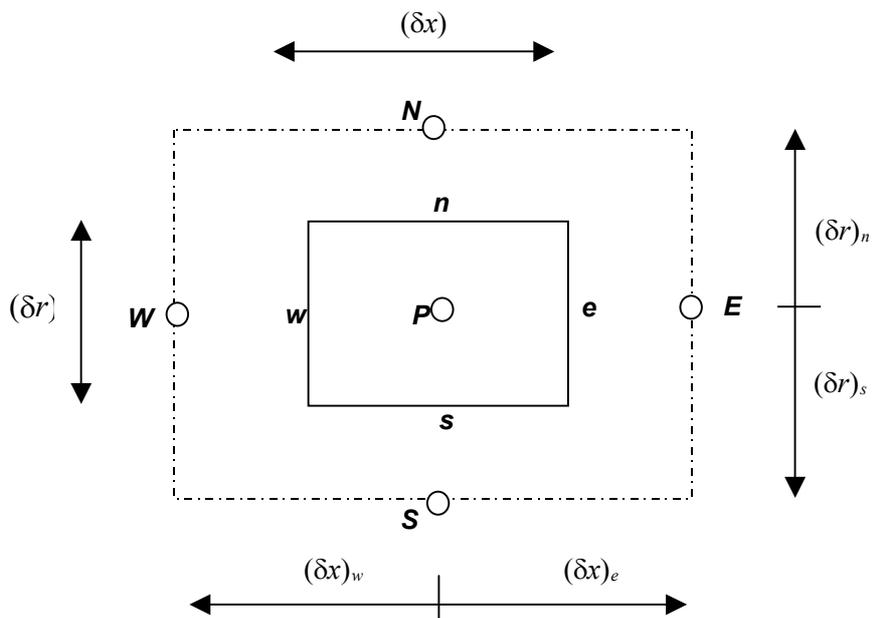


Figure 3-2 : volume de contrôle de  $\phi$

On note par  $P$  le centre de volume de contrôle de la variable  $\phi$  et  $E, W, N$  et  $S$  les nœuds voisins des volumes de contrôle adjacents.

Ces nœuds seront les lieux de stockage des variables scalaires ( $P, k, \varepsilon, \dots$ ).

Au milieu de chaque segment reliant deux nœuds adjacents qu'on note par  $e, w, n$  et  $s$ , on stocke les variables vectorielles.

Donc pour chaque nœud, on associe trois volumes de contrôles alternés schématisés dans la figure 3-3.

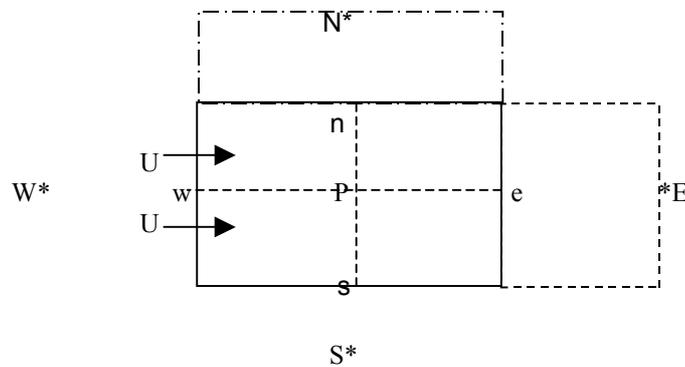
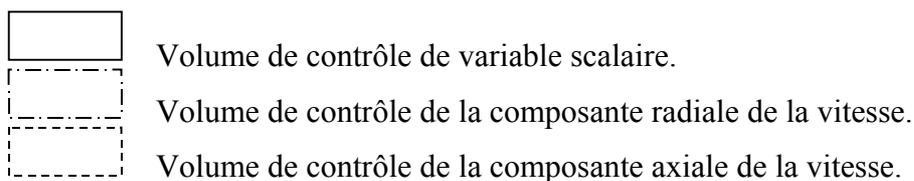


Figure. 3-3 : Alternance des volumes de contrôles.



Les faces du volume de contrôle de la pression  $P$  passent par les lieux de stockage de composantes de vitesse, et pour cette raison qu'on a fait le choix d'un maillage décalé, ce choix donne une bonne estimation des flux convectifs dans l'équation de continuité.

De même pour les faces des volumes de contrôles des composantes de vitesse qui passe par les nœuds de stockage de la pression, ce la permet une estimation de gradient de pression dans les équations du mouvement.

### ***Discrétisation***

La discrétisation consiste à transformer les équations différentielles en des équations algébriques approchées. Les valeurs de  $\phi$  sont calculées en un nombre de points (valeurs discrétisées).

### ***Intégration de l'équation de transport***

Avant l'intégration, on réécrit l'équation (3-1) de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\rho r U \phi) - (r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\rho r V \phi) - (r \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) \right] = r S_{\phi} \quad (3-2)$$

Si on note par  $J_x$  et  $J_r$  les densités de flux totaux (densité de flux par convection + densité de flux par diffusion) à travers les surfaces du volume de contrôle dans les directions  $x$  et  $r$ . Elles seront données par :

$$J_x = (\rho U \phi) - (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})$$

$$J_r = (\rho V \phi) - (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}) \quad (3.3)$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\partial(rJ_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ_r)}{\partial r} = r S_{\phi} \quad (3-4)$$

On intègre l'équation (3-4) sur le volume de contrôle correspondant à la variable  $\phi$  de la figure 3-2 :

$$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial(rJ_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rJ_r)}{\partial r} \right] \partial x \partial r = \int_s^n \int_w^e r S_\phi \partial x \partial r \quad (3.5)$$

$$\int_s^n [(J_x)_e - (J_x)_w] r \partial r + \int_w^e [(J_r)_n - (J_r)_s] r \partial r = \int_s^n \int_w^e (r S_\phi) \partial x \partial r$$

$$J_e a_e - J_w a_w + J_n a_n - J_s a_s = \int_s^n \int_w^e (r S_\phi) \partial x \partial r \quad (3.6)$$

**Remarque :**

Les  $a_E, a_w, a_s$  et  $a_n$  sont les aires est, ouest, nord et sud des faces de volume de contrôle.

$J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les densités des flux totaux à travers les faces est, ouest, nord et sud du volume de contrôle

$$\begin{aligned} J_e &= (\rho U \phi)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e & a_e &= (r \delta r)_e \\ J_w &= (\rho U \phi)_w - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w & a_w &= (r \delta r)_w \\ J_n &= (\rho U \phi)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n & a_n &= (r \delta x)_n \\ J_s &= (\rho U \phi)_s - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s & a_s &= (r \delta x)_s \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'intégration de l'équation de mouvement donne :

$$\begin{aligned} & \left[ \rho U \phi \right]_w - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \left] a_w + \left[ (\rho U \phi)_e - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \right] a_e + \\ & \left[ (\rho V \phi)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n \right] a_n - \left[ (\rho V \phi)_s - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_s \right] a_s = \int_{uu}^n \int_w^e (r S_\phi) \partial x \partial r \end{aligned} \quad (3-8)$$

Si l'équation (3-8) exprime le transport de masse ( $\phi = 1, \Gamma = 0, S_\phi = 0$ ), on aura l'équation de continuité donnée par :

$$(\rho U \phi)_e a_e - (\rho U \phi)_w a_w + (\rho U \phi)_n a_n - (\rho U \phi)_s a_s = 0 \quad (3-9)$$

### **Schémas de discrétisation**

Les schémas de discrétisation sont des méthodes de calcul adoptées pour évaluer les grandeurs à calculer aux différents points du domaine d'étude.

Ils sont choisis, d'après les problèmes traités, suivant la concordance des résultats qu'ils donnent avec les résultats physiques et la stabilité numérique

Le schéma utilisé dans l'étude présente est le schéma *Hybrid*. Ce dernier est la combinaison de deux autres schémas : schéma aux différences centrées et le schéma *Upwind*.

### **Schéma aux différences centrées**

Le schéma des différences centrées est basé sur l'approximation des valeurs de la grandeur  $\phi$  au niveau des interfaces par une interpolation linéaire.

Les valeurs de  $\phi$  au niveau des interfaces de volume de contrôle de la figure 3-3, sont approximées par :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{\phi_P + \phi_E}{2} & (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_e &= \frac{\Gamma_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta s)_e} \\ \phi_w &= \frac{\phi_P + \phi_W}{2} & (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_w &= \frac{\Gamma_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta s)_w} \\ \phi_n &= \frac{\phi_P + \phi_N}{2} & (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r})_n &= \frac{\Gamma_n (\phi_N - \phi_P)}{(\delta r)_n} \\ \phi_s &= \frac{\phi_P + \phi_S}{2} & (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r})_s &= \frac{\Gamma_s (\phi_P - \phi_S)}{(\delta r)_s} \end{aligned} \quad (8.10)$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation intégrée (3-8), l'équation discrétisée par le schéma des différences centrées et dont les coefficients sont notés par  $A_i$  sera alors :

$$A_P \phi_P = A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_E \phi_E + A_W \phi_W + \int_s^e \int_w^e (r S_\phi) \partial r \partial x \quad (3-11)$$

Où :

$$\begin{aligned} A_n &= \left[ -\frac{(\rho V)_n}{2} + \frac{\Gamma}{(\delta r)_n} \right] a_n \\ A_s &= \left[ -\frac{(\rho V)_s}{2} + \frac{\Gamma_s}{(\delta r)_s} \right] a_s \\ A_e &= \left[ -\frac{(\rho V)_e}{2} + \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \right] a_e \\ A_w &= \left[ -\frac{(\rho V)_w}{2} + \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \right] a_w \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si on définit les paramètres  $F$  et  $D$  par :

$$F_e = (\rho U)_e \quad \text{et} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}.$$

On aura :

$$\begin{aligned} F_w &= (\rho U)_w & D_w &= \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \\ F_e &= (\rho U)_e & D_e &= \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \\ F_s &= (\rho V)_s & D_s &= \frac{\Gamma_s}{(\delta r)_s} \\ F_n &= (\rho V)_n & D_n &= \frac{\Gamma_n}{(\delta r)_n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les coefficients  $A_i$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left[ -\frac{F_n}{2} + D_n \right] a_n \\
 A_s &= \left[ -\frac{F_s}{2} + D_s \right] a_s \\
 A_e &= \left[ -\frac{F_e}{2} + D_e \right] a_e \\
 A_w &= \left[ -\frac{F_w}{2} + D_w \right] a_w
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \tag{3.15}$$

Ce qui vérifié alors :

$$A_p = A_n + A_s + A_e + A_w \tag{3.16}$$

### ***Schéma Upwind***

Les valeurs de  $\phi$  au niveau des faces des volumes de contrôles sont évalués par le schéma *Upwind* comme suit : au lieu d'évaluer les valeurs de  $\phi$  par une moyenne, il donne une meilleure contribution, il prend en considération le sens de l'écoulement.

$$\begin{aligned}
 \phi_n &= \phi_p \quad \text{si } F_n > 0 \quad \text{et } \phi_n = \phi_N \quad \text{si } F_n < 0 \\
 \phi_e &= \phi_p \quad \text{si } F_e > 0 \quad \text{et } \phi_e = \phi_E \quad \text{si } F_e < 0 \\
 \phi_w &= \phi_p \quad \text{si } F_w > 0 \quad \text{et } \phi_w = \phi_W \quad \text{si } F_w < 0 \\
 \phi_s &= \phi_p \quad \text{si } F_s > 0 \quad \text{et } \phi_s = \phi_S \quad \text{si } F_s < 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ces relations peuvent être généralisées par une seule expression, en définissant l'opérateur :  $\max(A, B) = \llbracket A, B \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
F_e \phi_e &= \phi_p \llbracket F_e, 0 \rrbracket - \phi_e \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \\
F_w \phi_w &= \phi_p \llbracket F_w, 0 \rrbracket - \phi_w \llbracket -F_w, 0 \rrbracket \\
F_n \phi_n &= \phi_p \llbracket F_n, 0 \rrbracket - \phi_n \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \\
F_s \phi_s &= \phi_p \llbracket F_s, 0 \rrbracket - \phi_s \llbracket -F_s, 0 \rrbracket
\end{aligned} \tag{3.17}$$

L'équation discrétisée dans ce cas est donnée par :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + \int_s^e \int_w^e (r S_\phi) \partial x \partial r \tag{3.18}$$

Où :

$$\begin{aligned}
A_N &= D_n + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \\
A_S &= D_s + \llbracket -F_s, 0 \rrbracket \\
A_E &= D_e + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \\
A_W &= D_w + \llbracket -F_w, 0 \rrbracket
\end{aligned} \tag{3.19}$$

### **Schéma hybride**

En introduisant le nombre de *Pecklet* définit par :  $P_e = \frac{F_e}{D_e}$ , Qui exprime le rapport de la convection à la diffusion. L'évaluation des grandeurs aux nœuds dépendra de ce nombre.

$$\begin{aligned}
\phi_e &= \phi_p \quad \text{si } P_e > 2 \\
\phi_e &= \phi_E \quad \text{si } P_e < -2 \\
\phi_e &= \frac{\phi_E + \phi_p}{2} \quad \text{si } |P_e| > 2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

On remarque que le schéma *Hybride* coïncide avec le schéma des différences centrées dans le cas où  $|P_e| < 2$  et avec le schéma *Upwind* pour  $|P_e| > 2$ .

Une expression générale proposée par *Patankar (1980)* d'une fonction qui tient compte de toutes les conditions précédentes est :

$$A(|P_e|) = \llbracket 0, 1 - 0.5|P_e| \rrbracket \quad (3.21)$$

Les coefficients  $A_i$  seront des données par :

$$\begin{aligned} A_N &= D_n A(|P_n|) + \llbracket -F_n \cdot 0 \rrbracket \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \llbracket -F_s \cdot 0 \rrbracket \\ A_E &= D_n A(|P_e|) + \llbracket -F_e \cdot 0 \rrbracket \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \llbracket -F_w \cdot 0 \rrbracket \\ A_p &= A_N + A_S + A_E + A_W \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.3 Expression de la source pour les différents écoulements

Avant d'aboutir à la forme finale de l'équation discrétisée, il faut discrétiser la source de chaque variable  $\phi$  ( $U$ ,  $V$ ,  $K$  et  $\varepsilon$ ). L'expressions de la source se différent d'une variable à une autre et d'un écoulement à un autre. Pour cette raison, il a été estimé nécessaire d'étudier chaque type d'écoulement à part.

#### 3.3.1 Ecoulement laminaire

##### **Terme source dans la direction $x$ :**

La source pour la composante axiale de la vitesse à exprimer en fonction du gradient de pression dans la même direction est :

$$\overline{S_U} = \int_n \int_e^w (r S_U) \partial x \partial r = \int_n \int_e^w \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) \partial v \quad (3.23)$$

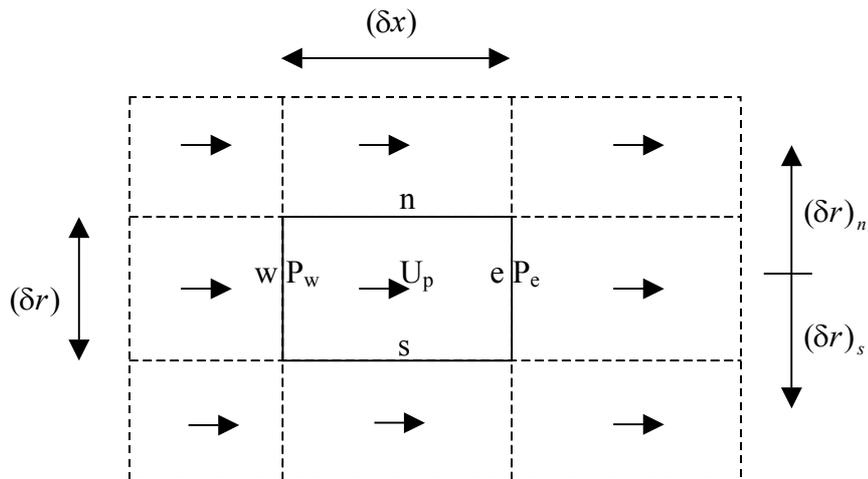
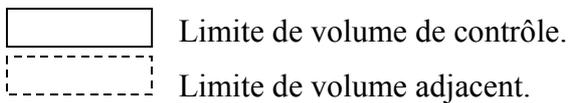


Figure 3-4 : volumes de contrôle de  $U$ .



L'intégration de l'équation précédente sur le volume de contrôle de la figure 3-4 correspondant à  $U$  donne :

$$\overline{S_u} = \left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)(\partial v)U = (p_w - p_p)a_e \quad (3.24)$$

Elle peut se mettre sous une forme linéarisée :

$$\overline{S_u} = Su + S_{pu}U_p \quad \text{avec} \quad Su = \overline{S_u} \quad \text{et} \quad S_{pu} = 0$$

**Terme source dans la direction  $r$  :**

L'intégration de la source de la composante  $V$  se fait sur le volume de contrôle de la figure 3-5 :

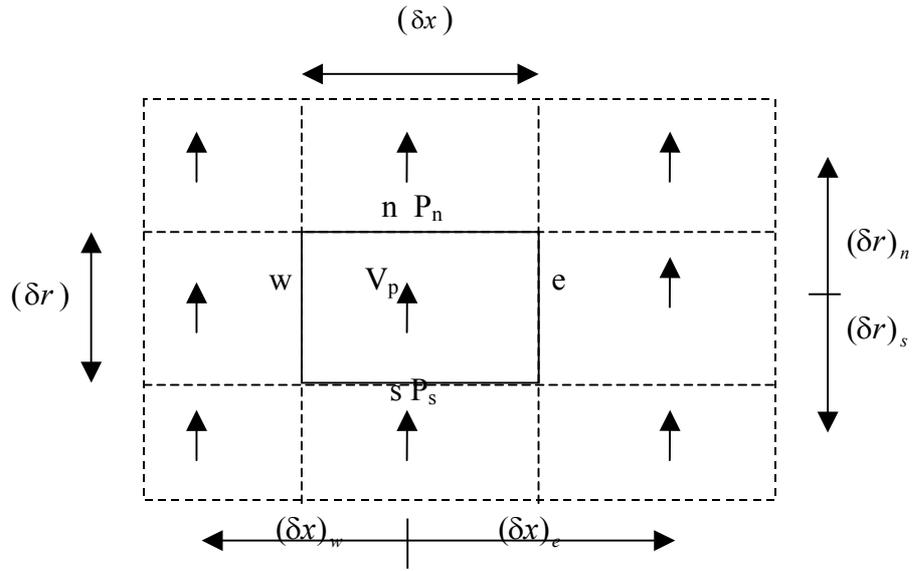


Figure 3-5 : volumes de contrôle de  $V$ .

$$\begin{aligned} \overline{S_v} &= \int_s^e \int_w^e (r S_v) \partial x \partial r = \int_s^e \int_w^e \left( -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} V \right) \partial v \\ &= \left( \frac{\delta p}{\delta r} - \frac{\mu}{r^2} V_p \right) (\delta v) v \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ou encore sous la forme linéarisée :

$$S_v = S_v + S_{pv} V_p \quad (3.25)$$

Avec :

$$S_v = \left( \frac{P_s - P_p}{\delta r} \right) (\delta v) v \quad \text{et} \quad S_{pv} = \left( \frac{\mu}{r^2} \right) (\delta v) v$$

### 3.3.2 Ecoulement turbulent

On note que pour la discrétisation des termes diffusifs, il faut évaluer la viscosité turbulente sur chaque face du volume de contrôle correspondant à chaque variable à déterminer.

**Expression de la source de la composante axiale  $u$**

L'intégration se fait sur le volume de contrôle de la figure 3- 4.

$$rS_u = r \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \right] \quad (3.26)$$

$$\overline{S_u} = \int_s^e \int_w^e (rS_u) \partial x \partial r \quad (3.27)$$

$$\overline{S_u} = \int_s^e \int_w^e \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \right] r \partial x \partial r \quad (3.28)$$

$$\overline{S_u} = A + B + C$$

$$A = -\frac{\delta}{\delta x} \left( p + \frac{2}{3} \rho k \right) (\delta v) U = \left[ \frac{p_w - p_p}{\delta x} + \rho \frac{k_w - k_p}{\delta x} \right] (\delta v) U \quad (3.29)$$

$$B = \int_s^e \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right] r \partial x \partial r \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} &= \int_s^e \left( (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right) r \delta r \Big|_w^e \\ &= \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right]_e a_e - \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right]_w a_w \\ &= \left[ (\mu_t + \mu)_e \frac{U_E - U_P}{(\delta x)_e} \right] a_e - \left[ (\mu_t + \mu)_w \frac{U_P - U_W}{(\delta x)_w} \right] a_w \end{aligned}$$

$$C = \int_s^e \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \right] r \partial x \partial r \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} &= \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \right] r \partial x \Big|_s^n \\ &= \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_n \right] a_n + \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_s \right] a_s \\ C &= \left[ (\mu_t + \mu)_n \frac{V_{PN} - V_{WN}}{\delta x} \right] a_n - \left[ (\mu_t + \mu)_s \frac{V_P - V_{WP}}{\delta x} \right] a_s \end{aligned}$$

En regroupant et en arrangeant les termes en  $U_p$  on aura les expressions de  $S_u$  et  $S_{up}$  de l'équation linéarisée :

$$S_u = \left[ \frac{P_w - P_p}{\delta x} + \rho \frac{k_w - k_p}{\delta x} \right] (\delta v)U + \left[ (\mu_t + \mu)_e \frac{U_E - U_P}{(\delta x)_e} \right] a_e - \left[ (\mu_t + \mu)_w \frac{U_P - U_W}{(\delta x)_w} \right] a_w + \left[ (\mu_t + \mu)_n \frac{V_{PN} - V_{WN}}{\delta x} \right] a_n - \left[ (\mu_t + \mu)_s \frac{V_P - V_{WP}}{\delta x} \right] a_s \quad (3.32)$$

$$S_{pu} = \left[ ((\mu_t + \mu)_e \frac{a_e}{(\delta x)_e}) + (\mu_t + \mu)_w \frac{a_w}{(\delta x)_w} \right] \quad (3.33)$$

### ***Terme source de la composante transversale v***

L'intégration se fait sur le volume de contrôle de la figure 3- 5.

$$rS_v = r \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{2}{3} \rho K \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} - 2(\mu_t + \mu) \frac{V}{r^2} \quad (3.34)$$

On procède de la même manière :

$$\overline{S_v} = \int_s^e \int_w^e (rS_v) \delta x \delta r \quad (3.35)$$

On pose :

$$\overline{S_v} = A + B + C + D + E$$

En regroupant et en arrangeant les termes en  $V_p$  on aura les expressions de  $S_v$  et  $S_{vp}$  de l'équation linéarisée :

$$A = - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{2}{3} \rho K \right) \right\} (\delta v)_v = \left[ \frac{P_s - P_p}{\delta r} + \rho \frac{K_s - K_p}{\delta r} \right] (\delta v)_v \quad (3.36)$$

$$B = \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} \right] r \delta r \delta x \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_w^e \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} \right] r \delta x \Big|_s^n \\ &= (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_n a_n - (\mu_t + \mu) \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_s a_s \\ &= \left[ (\mu_t + \mu)_n \frac{V_n - V_p}{(\delta r)_n} a_n \right] - \left[ (\mu_t + \mu)_s \frac{V_p - V_s}{(\delta r)_s} a_s \right] \end{aligned}$$

$$C = \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial r} \right] r \delta r \delta x \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &= \int_s^n \left[ (\mu_t + \mu) \frac{\partial U}{\partial r} \right] r \delta r \Big|_w^e \\ &= \left[ (\mu_t + \mu)_e \frac{U_{EP} - U_{ES}}{(\delta r)} a_e \right] - \left[ (\mu_t + \mu)_w \frac{U_p - U_{PS}}{(\delta r)} a_w \right] \end{aligned}$$

$$D = \left[ -2(\mu_t + \mu) \frac{V_p}{r^2} \right] (\delta v)_v \quad (3.39)$$

En regroupant et en arrangeant les termes en  $V_p$  on aura les expressions de  $S_v$  et  $S_{Pv}$

$$S_v = \left[ \frac{P_s - P_p}{\delta r} + \rho \frac{K_s - K_p}{\delta r} \right] (\delta v)_v \quad (3.40)$$

$$+ \left[ (\mu_t + \mu)_e \frac{U_{EP} - U_{ES}}{(\delta r)} a_e \right] - \left[ (\mu_t + \mu)_w \frac{U_p - U_{PS}}{(\delta r)} a_w \right]$$

$$+ \left[ (\mu_t + \mu)_n \frac{V_n}{(\delta r)_n} a_n \right] + \left[ (\mu_t + \mu)_s \frac{V_s}{(\delta r)_s} a_s \right]$$

$$S_{Pv} = \left[ (\mu_t + \mu)_e \frac{a_e}{(\delta x)_e} \right] + \left[ (\mu_t + \mu)_w \frac{a_w}{(\delta x)_w} \right] + \left( 2 \frac{(\mu_t + \mu)}{r^2} \right) (\delta v)_v \quad (3.41)$$

**Expression de la source de l'énergie cinétique turbulent  $k$  :**

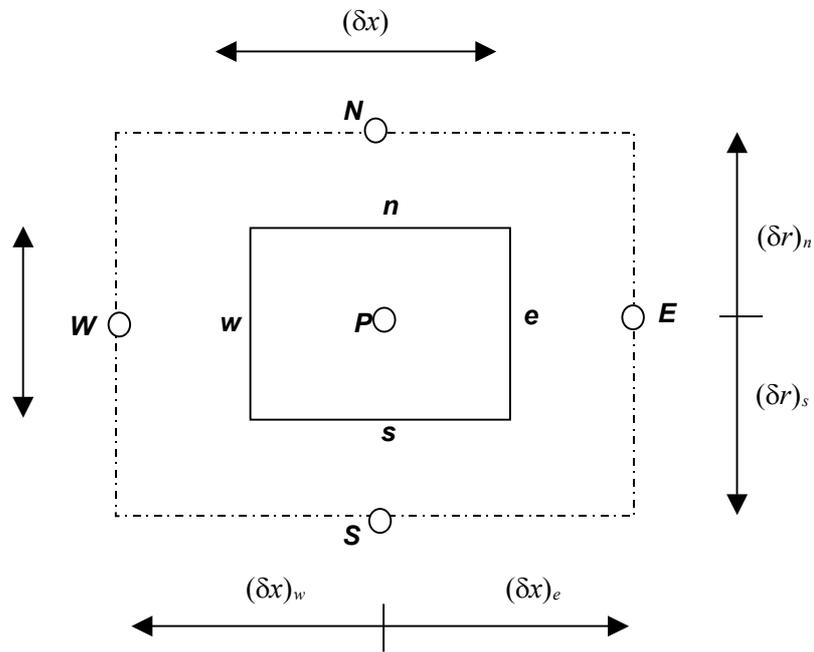
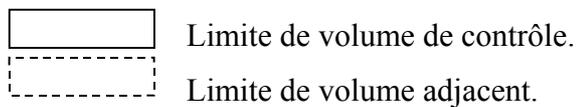


Figure 3-6 : volume de contrôle de l'énergie cinétique  $k$ .



L'intégration se fait sur le volume de contrôle de la figure 3-6 :

$$\overline{Sk} = \int_s^e \int_w^e (Pk - \rho\varepsilon) r \partial x \partial r \quad (3.42)$$

$$\overline{Sk} = Sk + S_{Pk} Kp \quad (3.43)$$

Où :

$$Sk = \overline{Pk}$$

$$S_{Pk} = (-\rho\varepsilon)(\delta v)_k = (-\rho^2 C_\mu \frac{k}{\mu_t})(\delta v)_k$$

$$\overline{Pk} = \int_s^e \int_w^e Pkr \partial x \partial r \quad (3.44)$$

Mettons le terme  $\overline{Pk}$  sous la forme :

$$\overline{Pk} = A + B$$

Où :

$$A = \iint 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right] r \partial x \partial r \quad (3.45)$$

$$A = 2 \left[ \left( \frac{U_E - U_P}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{V_N - V_P}{\delta r} \right)^2 + \left( \frac{V_P}{r} \right)^2 \right] (\delta v)_k$$

$$B = \iint \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] r \partial x \partial r \quad (3.46)$$

$$B = \left\{ \left[ \left( \frac{U_{EN} + U_{PN}}{4\delta r} + \frac{U_{EP} + U_P}{4\delta r} \right) - \left( \frac{U_{EP} + U_P}{4\delta r} + \frac{U_{ES} + U_{PS}}{4\delta r} \right) \right] + \left[ \left( \frac{V_{EN} + V_{EP}}{4\delta x} \right) - \left( \frac{V_{WN} + V_{WP}}{4\delta x} \right) \right] \right\}^2 (\delta v)_k$$

### **Expression de la source du taux de dissipation $\varepsilon$**

L'intégration se fait sur le volume de contrôle de  $k$  :

$$\overline{S\varepsilon} = \int_s^e \int_w^e \left[ (C\varepsilon_1 \frac{\varepsilon}{k} Pk) - (C\varepsilon_2 \rho \frac{\varepsilon}{k}) \right] r \partial x \partial r \quad (3.47)$$

$$\overline{S\varepsilon} = S\varepsilon + S_{P\varepsilon} \varepsilon p \quad (3.48)$$

Avec :

$$S\varepsilon = (C\varepsilon_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{Pk}) (\delta v) \varepsilon$$

$$S_{P\varepsilon} = (C\varepsilon_2 \rho \frac{\varepsilon}{k}) (\delta v) \varepsilon$$

$$\overline{Pk} = A + B \quad (3.49)$$

Où :  $A$  et  $B$  les expressions déterminées précédemment.

### 3.4 Conditions aux limites

#### 3.4.1 Conditions à l'entrée

Généralement dans la simulation des écoulements, le profil d'entrée est déduit des données expérimentales.

Dans la présente étude, on impose deux vitesses d'entrée uniforme  $U_j$  et  $U_e$  au jet central et à l'écoulement ambiant (externe), respectivement. La condition initiale de l'énergie turbulente et le taux de dissipation sont évalués en considérant les approximations de *Prandtl* :

$$k(1, j) = 0.01 \overline{U}^2(1, j) \quad (3.50)$$

$$\varepsilon(1, j) = \frac{k^{1.5}(1, j)}{\delta} \quad (3.51)$$

#### 3.4.2 Condition à la sortie

On supposera que le régime est établi (écoulement développé) ce qui se traduit par la non variation par rapport à l'axe, donc on a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

Il faut noter cependant que la composante axiale  $U$  de la vitesse doit être corrigée afin de vérifier le principe de la conservation de masse.

### 5.3.3 Conditions à l'axe de symétrie

Près de l'axe de symétrie, il n'y a pas de variation par rapport à  $r$  pour les variables  $U$ ,  $V$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $C$ .

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial r} = 0 \quad (3.53)$$

La discrétisation de cette condition se fait comme suit :

Sur l'axe de symétrie, la face inférieure du volume de contrôle est nulle, donc le flux sur la face sud est égal à zéro.

#### **3.4.4 Condition près des parois solides**

##### ***Régime laminaire***

Des vitesses nulles sont imposées aux parois solides.

$$U=V=0 \quad (3.54)$$

##### ***Régime turbulent***

##### ***Composantes de vitesse***

Au niveau de la frontière nord, la paroi solide exerce sur le fluide un cisaillement ayant des composantes axiales et circonférentielles. Les conditions pour la vitesse  $U$  sont présentées ci-dessus :

A la paroi nord qui est tangente à  $U$  un traitement spécial est adapté. Il existe deux méthodes de traitement près des parois solides :

**1- Modèle à faible nombre de Reynolds** : Dans ce cas les équations de transport doivent être intégrées sur des volumes de contrôles se trouvant dans la sous couche laminaire ou l'effet de la viscosité est très important, ce qui demande un très grand nombre de nœuds pour capter les grandes variations qui dominent dans cette région et ce qui devient très coûteux.

**2- Fonction de paroi** : Les volumes de contrôles d'intégration aux frontières se situent, dans ce cas, dans la couche turbulente (figure 3-7) et des lois empiriques sont utilisées.

Le traitement adopté est basé dans notre cas sur la fonction de paroi. Considérant un volume de contrôle près de la paroi nord, figure3-7, les suppositions suivantes sont faites :

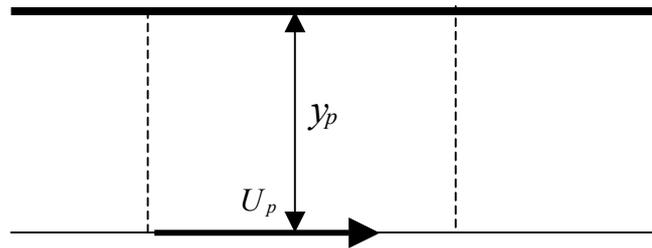


Figure 3-7: volume de contrôle près de la paroi

1/ la vitesse  $U_p$  a la distance  $y_p$  de la paroi varie suivant la loi logarithmique

$$\frac{U_p}{U_\tau} = \frac{1}{x} \text{Log}(EY^+) \quad (\text{a})$$

Tel que :

$x$  : Constante de *Van-Karman* ( $x=0.42$ )

$E=9$  : pour une paroi lisse.

$U_\tau$  : Vitesse de frottement ( $U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$ )

$Y^+$  : distance adimensionnelle à la paroi  $Y^+ = \frac{\rho y_p U_\tau}{\mu}$ .

2/ les transports par convection et par diffusion de la turbulence sont négligeables d'où la supposition de l'équilibre locale : la production de l'énergie turbulente est égale à sa destruction :

$$Pk = \rho\varepsilon$$

$$-uv \frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon$$

$$C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon$$

$$\mu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \frac{\rho^2 C \mu k^2}{\mu_t}$$

$$\tau_p^2 = \rho^2 C \mu k_p^2$$

$$\tau_p = \rho C \mu^{1/2} k_p \quad (b)$$

3/ En combinant les équations (a) et (b) on déterminera l'expression de  $U_p$  et par la suite celle de la viscosité près de la paroi.

$$U \tau = \frac{x U_p}{\text{Log}\left(\frac{E \rho U \tau y_p}{\mu}\right)} = C \mu^{1/4} k_p^{1/2}$$

$$\frac{x U_p}{\text{Log}\left(\frac{E \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu}\right)} = C \mu^{1/4} k_p^{1/2}$$

On obtient :

$$\tau_p = \frac{x U_p C \mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\text{Log}\left(\frac{E \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu}\right)} \quad (c)$$

De cette dernière égalité on tire l'expression de la viscosité près de la paroi.

$$\mu_p = \frac{k U_p \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\text{Log}\left(\frac{E \rho C \mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu}\right)} \quad (3.55)$$

### ***Energie turbulente et son taux de dissipation***

Pour les nœuds situés près de la paroi nord, l'énergie cinétique turbulente  $k$  est tirée de l'expression (b) :

$$k_p = \frac{\tau_p}{\rho C \mu^{1/2}} \quad (3.56)$$

Avec  $\tau_p$  : donnée par l'expression (c) :

Le taux de dissipation  $\varepsilon$  pour les nœuds aux frontières de la paroi nord est donné par la formule empirique :

$$\varepsilon_p = \frac{C\mu^{3/4}k_p^{3/2}}{xy_p} \quad (3.57)$$

### 3.5 Algorithme simple

Jusqu'ici, le travail fait est valable pour n'importe quelle grandeur transportable, or la pression n'a pas sa propre équation, on peut déterminer le champ de pression, en utilisant l'équation de continuité.

En ce donnant un champ initial de pression, l'équation algébrique résultante de l'équation de continuité contiendra des fluctuations de pression. Les fluctuations calculées permettent par la suite de corriger la pression donnée initialement.

L'algorithme résultant de cette transformation est connue sous le nom de l'Algorithme *SIMPLE* : *Sem-Implicit-Method-for-Pressure -Linked-Equation*.

### Développement de l'algorithme

Pour la résolution des équations de continuité et de mouvement il faut connaître le champ de pression. Or ce dernier est inconnu. Pour cette raison *Patankar* et *Spalding* ont développé une méthode basée sur le principe suivant :

On se donne un champ de pression initial dans le domaine d'écoulement. Les vitesses figurant dans l'équation de continuité, intégrée sur le volume de contrôle associée à la pression, seront alors des vitesses approchées, elles ne vérifieront pas l'équation de conservation de masse à cause d'un résidu de masse accumulé dans le volume de contrôle du à la fausse distribution de pression, ceci peut se traduire mathématiquement par :

Si on note les valeurs exactes des composantes de vitesse et de pression par  $U, V$  et  $P$ , les vitesses approchées seront notées par  $U^*, V^*$  et  $P^*$ . L'équation de continuité intégrée sur le volume de contrôle associé à  $P$  s'écrit pour les valeurs exactes :

$$(\rho U)_e a_e - (\rho U)_w a_w + (\rho V)_n a_n - (\rho V)_s a_s = 0 \quad (3-58)$$

Dans le cas des valeurs approchées, il n'y aura pas de conservation de masse l'équation de continuité sera donnée par :

$$(\rho U^*)_e a_e - (\rho U^*)_w a_w + (\rho V^*)_n a_n - (\rho V^*)_s a_s = M \quad (3-59)$$

Les vitesses exactes seront égales à la somme des vitesses approchées et des corrections de vitesses qu'on note par  $U'$ ,  $V'$  :

$$\begin{aligned} U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \\ U^* &= U - U' \\ P &= P^* + P' \\ V^* &= V - V' \\ P' &= P - P^* \end{aligned} \quad (3.60)$$

En remplaçant les valeurs approchées par leurs expressions dans l'équation (3-58) et en tenant compte de l'équation (3-59), on aura :

$$(\rho U')_e a_e - (\rho U')_w a_w + (\rho V')_n a_n - (\rho V')_s a_s = -M \quad (3-61)$$

Retournant maintenant aux équations discrétisées des composantes de vitesse  $U$  et  $V$  (sur le volume de contrôle correspondant) qui s'écrivent respectivement (dans la direction  $x$  et  $r$ ) en fonction du champ exact de pression.

$$A_p^u U_p = A_E^u U_E + A_W^u U_W + A_S^u U_S + A_N^u U_N + (p_W - p_P)(r\delta r)^u \quad (3-62)$$

$$A_p^v V_p = A_E^v V_E + A_W^v V_W + A_S^v V_S + A_N^v V_N + (p_S - p_P)(r\delta x)^v \quad (3-63)$$

Les équations précédentes s'écrivent de la même sorte pour les vitesses approchées qui sont arbitraires :

$$A_p^u U_p^* = A_E^u U_E^* + A_W^u U_W^* + A_S^u U_S^* + A_N^u U_N^* + (p_W^* - p_P^*)(r\delta r)^u \quad (3-64)$$

$$A_p^v V_p^* = A_E^v V_E^* + A_W^v V_W^* + A_S^v V_S^* + A_N^v V_N^* + (p_S^* - p_P^*)(r\delta x)^v \quad (3-65)$$

En soustrayant l'équation (3-64) de l'équation (3-62) et l'équation (3-65) de l'équation (3-63) on obtient des équations pour les corrections de vitesse ( $U'$  et  $V'$ ).

$$A_p^u U_p' = A_E^u U_E' + A_W^u U_W' + A_S^u U_S' + A_N^u U_N' + (p_W' - p_P')(r\delta r)^u \quad (3.66)$$

$$A_p^v V_p' = A_E^v V_E' + A_W^v V_W' + A_S^v V_S' + A_N^v V_N' + (p_S' - p_P')(r\delta x)^v \quad (3.67)$$

On suppose que la vitesse se corrige en un point en fonction des corrections de pression seulement sans tenir compte des corrections des vitesses des points voisins, donc les équations pour les corrections se réduisent par :

$$A_p^u U_p' = (p_W' - p_P')(r\delta r)^u \quad (3.68)$$

$$A_p^v V_p' = (p_S' - p_P')(r\delta x)^v \quad (3.69)$$

Par conséquent, on tire les valeurs des corrections des vitesses :

$$U_p' = \frac{(p_W' - p_P')(r\delta r)^u}{A_p^u} \quad (3.70)$$

$$V_p' = \frac{(p_S' - p_P')(r\delta x)^v}{A_p^v} \quad (3.71)$$

On note par :

$$dU = \frac{(r\delta r)^u}{A_p^u} \quad \text{et} \quad dV = \frac{(r\delta x)^v}{A_p^v}$$

Les  $(r\delta r)^u$  et  $(r\delta x)^v$  sont les aires des faces des volumes de contrôle des composantes  $U$  et  $V$  respectivement :

$$U_p' = dU(p_W' - p_P') \quad (3.72)$$

$$V_p' = dV(p_S' - p_P') \quad (3.73)$$

Rappelant que les faces ( $e$ ,  $w$ ,  $s$  et  $n$ ) du volume de contrôle de la pression  $P$  contient les nœuds de stockage des composantes de vitesse. On aura par un même raisonnement

$$U'_e = dU_e (p'_P - p'_E) \quad (3.74)$$

$$U'_w = dU_w (p'_W - p'_P)$$

$$V'_n = dV_n (p'_P - p'_N) \quad (3.75)$$

$$V'_s = dV_s (p'_S - p'_P)$$

En substituant les valeurs des corrections des vitesses précédentes dans l'équation (3.61) on obtient l'équation discrétisée de la correction de pression  $P'$  :

$$\rho dU_e (p'_P - p'_E) a_e - \rho dU_w (p'_W - p'_P) a_w + \rho dV_n (p'_P - p'_N) a_n - \rho dV_s (p'_S - p'_P) a_s = -M \quad (3.76)$$

$$A_P p'_P = A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_S p'_S - M \quad (3.77)$$

Où :

$$A_E = \rho dU_e a_e$$

$$A_W = \rho dU_w a_w$$

$$A_N = \rho dV_n a_n$$

$$A_S = \rho dV_s a_s$$

### 3.6 Résolution numérique

Le choix d'une méthode de résolution numérique ne dépend pas seulement des caractéristiques intrinsèques du problème, mais aussi et surtout des possibilités du calculateur (ordinateur). Les deux facteurs essentiels sont la capacité de stockage de la mémoire et le temps d'exécution.

Les méthodes de calcul d'un système d'équations algébriques sont classées en deux catégories principales :

- Méthodes directes qui sont limitées aux seuls systèmes linéaires et elles exigent une mémoire énorme et un temps de calcul relativement grand.
- Méthodes indirectes qui peuvent s'appliquer aux systèmes non linéaires et surtout aux problèmes où des nombreux éléments matriciels sont nuls. Par conséquent ces dernières exigent moins de mémoire d'ordinateur que les méthodes directes.

Dans notre cas le système d'équations obtenu est :

$$A_p\phi_p = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + \overline{S\phi} \quad (3.78)$$

Ou encore pour un nœud  $(I,J)$  où  $I$  : désigne le numéro de la ligne et  $J$  : le numéro de la colonne.

$$A(I,J)\phi(I,J) = A_E(I,J)\phi(I+1,J) + A_W(I,J)\phi(I-1,J) + \\ A_N(I,J)\phi(I,J+1) + A_S(I,J)\phi(I,J-1) + \overline{S_\phi}$$

La résolution directe d'un tel système est très compliquée. Une méthode semi- itérative a été suggérée pour rendre le système moins dense que dans sa forme initiale, c'est à dire diminuer le nombre de variable dans les équations (pour occuper moins de mémoire d'ordinateur).

La méthode semi-itérative consiste faire un balayage ligne ; donc rendre le système précédent à un système à matrice tri diagonale.

Le balayage suivant  $x$  se faire comme suit : pour déterminer les valeurs d'une grandeur sur une ligne  $I$ , les valeurs sur les lignes voisines  $(I+1)$  et  $(I-1)$  sont connues. Par conséquent on aura un système tri diagonal qui s'écrit :

$$d(J)\phi(J) = \alpha(J)\phi(J+1) + \beta(J)\phi(J-1) + c(J) \quad (3.79)$$

$$-\beta(J)\phi(J-1) + d(J)\phi(J) - \alpha(J)\phi(J+1) - \beta(J)\phi(J-1) = c(J)$$

Avec :

$$c(J) = A_E(I,J)\phi(I+1,J) + A_W(I,J)\phi(I-1,J) + \overline{S_\phi} \quad (3.80)$$

$$\beta(J) = A_S(I,J-1)$$

$$\alpha(J) = A_N(I,J+1)$$

$$d(J) = A_p(I,J)$$

avec:  $(1 \leq I \leq NI)$  et  $(1 \leq J \leq NJ)$  .

Les valeurs de  $\phi(1)$  et  $\phi(NJ)$  sont données par les conditions aux limites sous forme matricielle le système s'écrit avec les conditions précédentes :

$$\begin{bmatrix} d(2) & -\alpha(2) & 0 & 0 \\ 0 & -\beta(3) & +d(3) & -\alpha(3) & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & & \beta(NJ-1) & +d(NJ-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(NJ-2) \\ \phi(NJ-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1) + \beta(2)\phi(1) \\ C(2) \\ C(NJ-1) \\ C(NJ) + \alpha(NJ-1)\phi(NJ-1) \end{bmatrix}$$

Pour la résolution du système tri diagonal, on utilise l'algorithme de *Thomas* qui transforme le système matriciel tri diagonal en un système à matrice bi diagonale unitaire (éléments diagonaux égaux à 1) dont la résolution est immédiate.

**Détermination des coefficients de la matrice de Thomas :**

La première ligne donne la valeur de  $\phi(2)$  en fonction de  $\phi(3)$

$$\phi(2) = \frac{\alpha(2)}{d(2)}\phi(3) + \frac{C(2) + \beta(2)\phi(1)}{d(2)}$$

$$\phi(2) = a(2)\phi(3) + b(2)$$

Avec :

$$a(2) = \frac{\alpha(2)}{d(2)} \quad \text{et} \quad b(2) = \frac{C(2) + \beta(2)\phi(1)}{d(2)}$$

On remplace  $\phi(2)$  par son expression dans la deuxième ligne qui donne la valeur de  $\phi(3)$  en fonction de  $\phi(4)$  :

$$\phi(3) = \frac{\alpha(3)}{d(3) - \beta(3)a(2)}\phi(4) + \frac{C(3) + \beta(3)b(2)}{d(3) - \beta(3)a(2)}$$

$$\phi(3) = a(3)\phi(4) + b(3)$$

Avec :

$$a(3) = \frac{\alpha(3)}{d(2) - \beta(3)a(2)} \quad \text{et} \quad b(3) = \frac{C(3) + \beta(3)b(2)}{d(3) - \beta(3)a(2)}$$

On continue l'opération pour toutes les autres lignes on aura la forme de récurrence des coefficients.

$$\phi(J) = a(J)\phi(J+1) + b(J)$$

$$a(J) = \frac{\alpha(J)}{d(J) - \beta(J)a(J-1)}$$

$$b(J) = \frac{C(J) + \beta(J)b(J-1)}{d(J) - \beta(J)a(J-1)}$$

Le système associé sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a(3) & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -a(J) \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(2) \\ \phi(3) \\ \\ \phi(NJ-2) \\ \phi(NJ-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(2) \\ \\ \\ b(NJ-2) \\ b(NJ-1) \end{bmatrix}$$

### 3.7 Séquence des opérations itératives

Les étapes sont les suivantes :

- 1- Donner un champ de pression initiale  $P$ .
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour les vitesses  $U$  et  $V$
- 3- Résoudre l'équation de la correction de pression  $P$ .
- 4- Corriger  $P$  :  $P = P^* + P'$ .
- 5- Corriger les champs des composantes de vitesses  $U$  et  $V$  en utilisant les formules des corrections.
- 7- Résoudre l'équation de transport de l'énergie turbulente  $k$ .
- 8- Résoudre l'équation de transport de taux de dissipation  $\varepsilon$ .
- 9- Résoudre l'équation de transport de la concentration  $C$ .
- 10- Refaire les étapes de 2 à 9 jusqu'à la convergence.

## ***Chapitre 4 : Résultats et discussions***

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenues par le calcul numérique pour différents types de jet confiné (laminaire –turbulent –turbulente à densité variable).

Pour le jet laminaire et le jet turbulent, on injecte l'air de masse volumique  $\rho=1.29\text{kg}/\text{m}^3$  avec une vitesse  $U_j$  dans un écoulement ambiant de vitesse  $U_e$ . Pour les jets à densité variable, on utilise le gaz d'hélium, de masse volumique  $\rho=0.17\text{kg}/\text{m}^3$  et le dioxyde de carbone de masse volumique  $\rho = 1.82\text{kg}/\text{m}^3$ .

Les calculs sont effectués sur un maillage non uniforme comportant (90 x 80) nœuds, raffiné aux limites.

Pour la stabilité numérique on a utilisé une méthode de sous relaxation à chaque itération pour les champs de vitesse  $U, V$  et le champ de pression  $P$  et l'énergie turbulente  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$  et aussi à la concentration  $C$  pour le cas à densité variable.

La solution est considérée avoir convergé si la somme absolue des résidus de chaque variable est inférieure à 5% .

### ***4.1 Le jet confiné laminaire***

#### ***Décroissance axiale de la vitesse longitudinale***

En remarque sur la figure (4-1) que la vitesse longitudinale sur l'axe  $ox$  décroît en se déplaçant vers l'avale. L'écoulement ambiant applique une décélération sur l'écoulement du jet (effet de la viscosité).

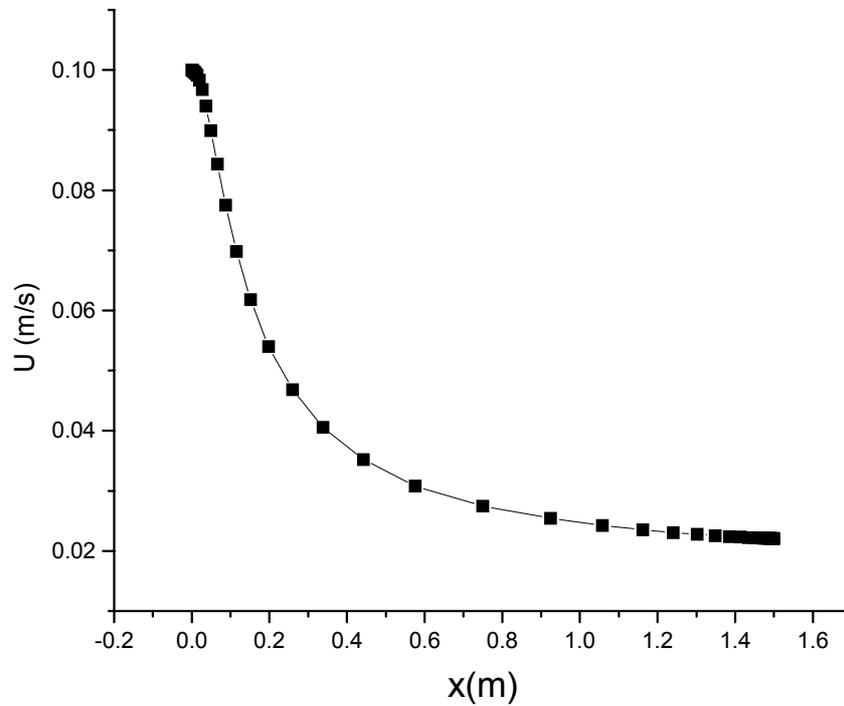


Figure 4-1 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale

***Evolution de la pression près de la paroi :***

En observe que la pression près de la paroi diminue, ce résultat nous informe que la diminution de vitesse est due aux frottements pariétaux. On n'a aucune génération de pression (gradient de pression adverse), et l'écoulement dans cette zone reste naturel sans un courant de retour. En observe l'absence totale de la zone de recirculation.

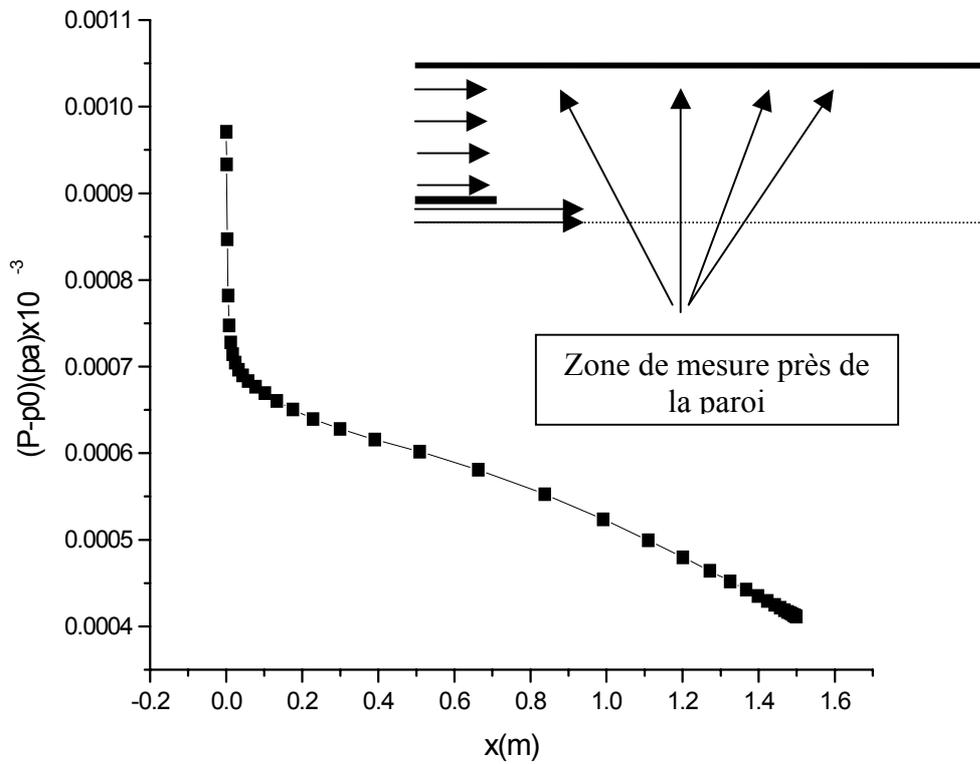


Figure 4-2 : Evolution de la pression près de la paroi

### ***Evolution radiale du champ de vitesse longitudinale***

La simulation numérique nous donne de bonnes informations sur l'évolution de la vitesse aux différentes stations le long du conduit, et montre aussi l'accélération de l'écoulement ambiant, la décélération de l'écoulement du jet et le développement du mélange vers un écoulement établi.

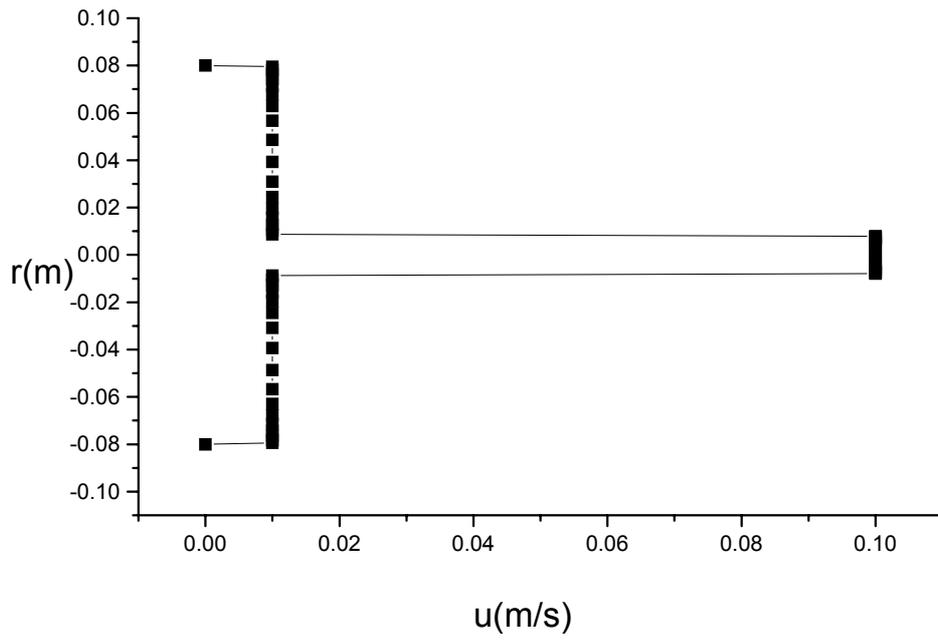


Figure 4-3 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$

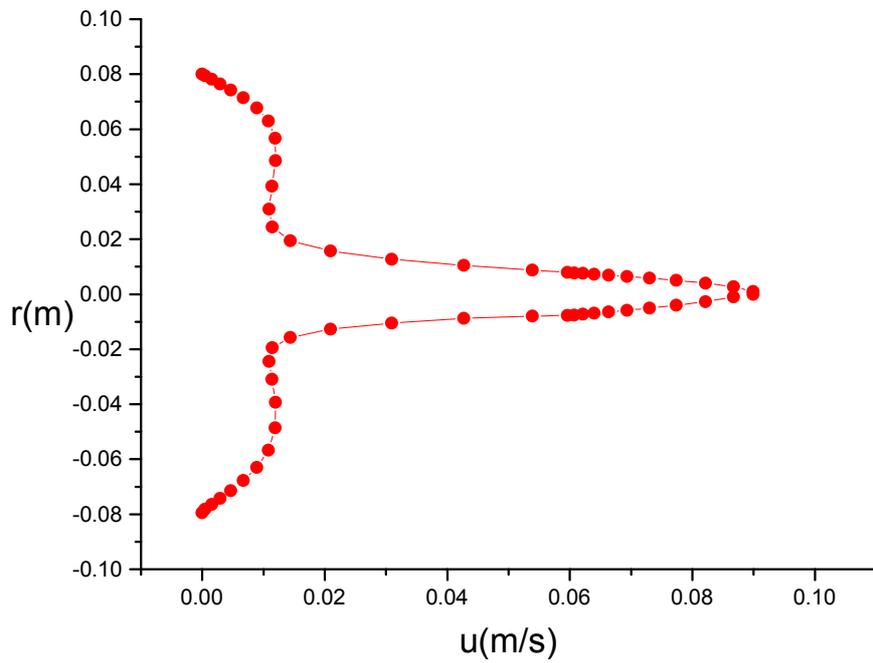


Figure 4-3 b : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.40$  m

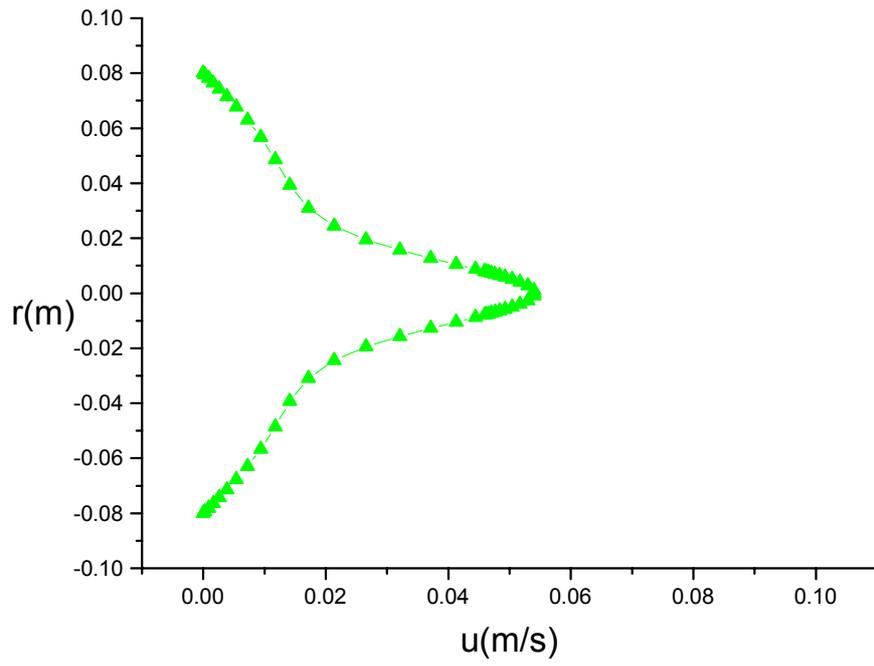


Figure 4-3 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.74\text{ m}$

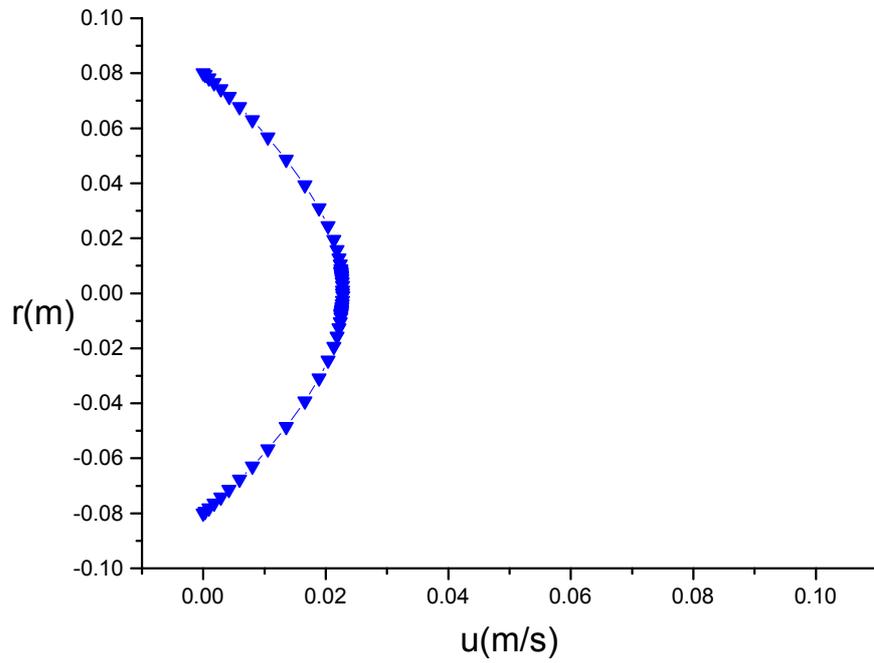


Figure 4-3 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=1.27\text{ m}$

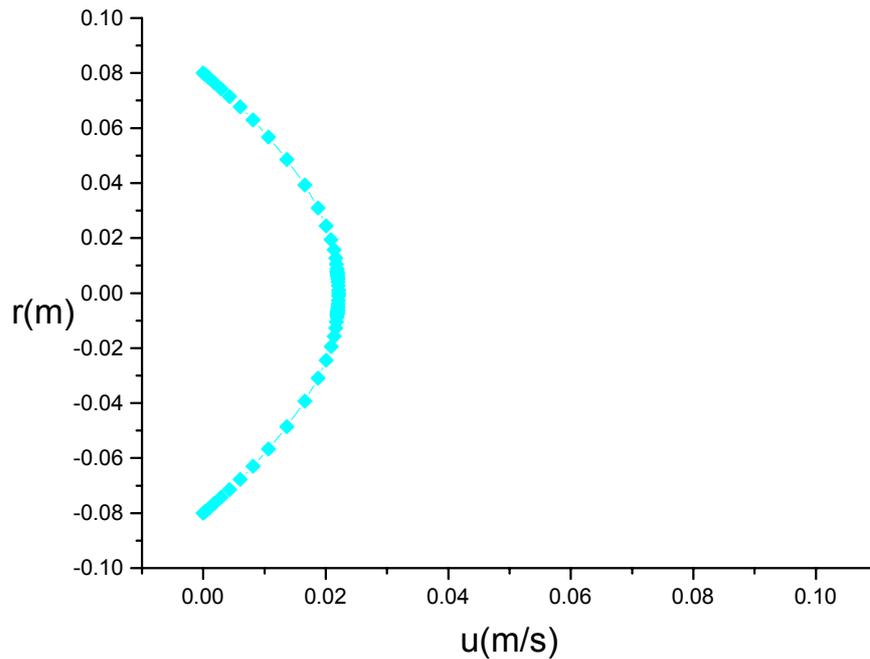


Figure 4-3 e : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=1.57$  m

## 4.2 Le jet confiné turbulent

Le nombre adimensionnel de Craya et Curtet ( $Ct$ ) étant défini comme le rapport des deux débits (d'écoulement ambiant et du jet). On prendra les résultats pour trois valeurs de ce nombre  $Ct$ , pour mettre en évidence l'influence de ce nombre sur le développement de cet écoulement.

### 4.2.1- Evolutions axiales

#### Vitesse longitudinale

A priori, la décroissance de la vitesse longitudinale sur l'axe ne devrait pas constituer un test sévère pour la modélisation, dans la mesure où le gradient de pression adverse n'agit que faiblement sur les parties de l'écoulement où la vitesse dépasse fortement la valeur moyenne dans la section. Ce pendant, il ne faut pas oublier que cette décroissance dépend fortement des conditions initiales amont.

Les figures (4-4,4-5,4-6) comparent les résultats obtenus par le calcul numérique avec les données expérimentales de *J. Pigeot (1995)*. Dans les trois cas, la longueur du cône potentiel semble être correctement évaluée, et ce même en présence de recirculation, bien que la décroissance qui suit la région du cône potentiel soit

légèrement surestimé. On remarque que l'écart avec les mesures est à peu près constant quel que soit le nombre de  $Ct$ .

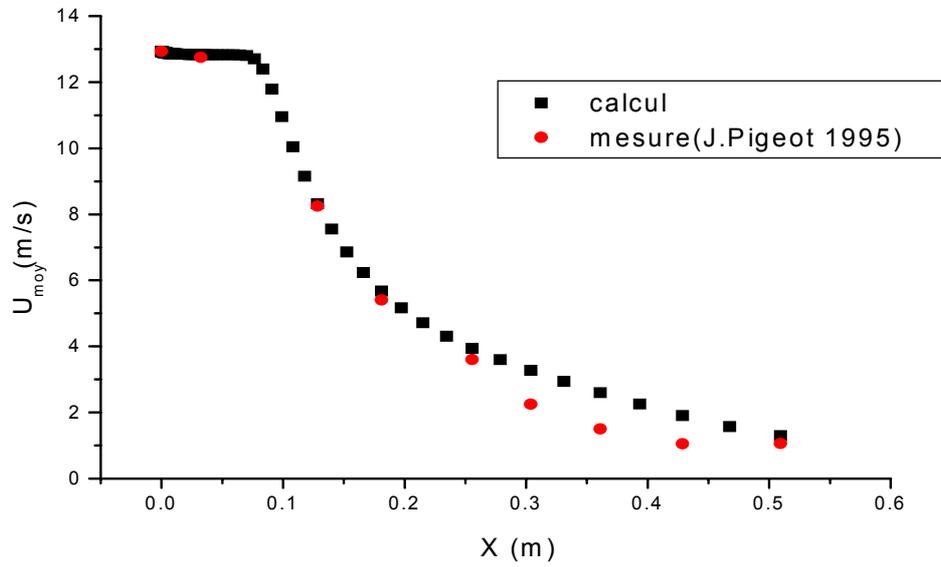


Figure 4-4: Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.976$

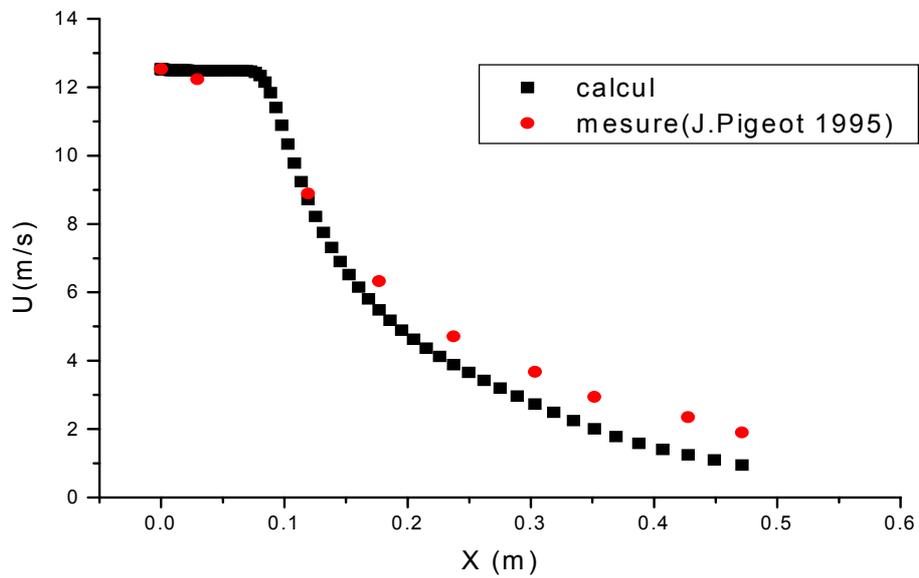


Figure 4-4: Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.506$

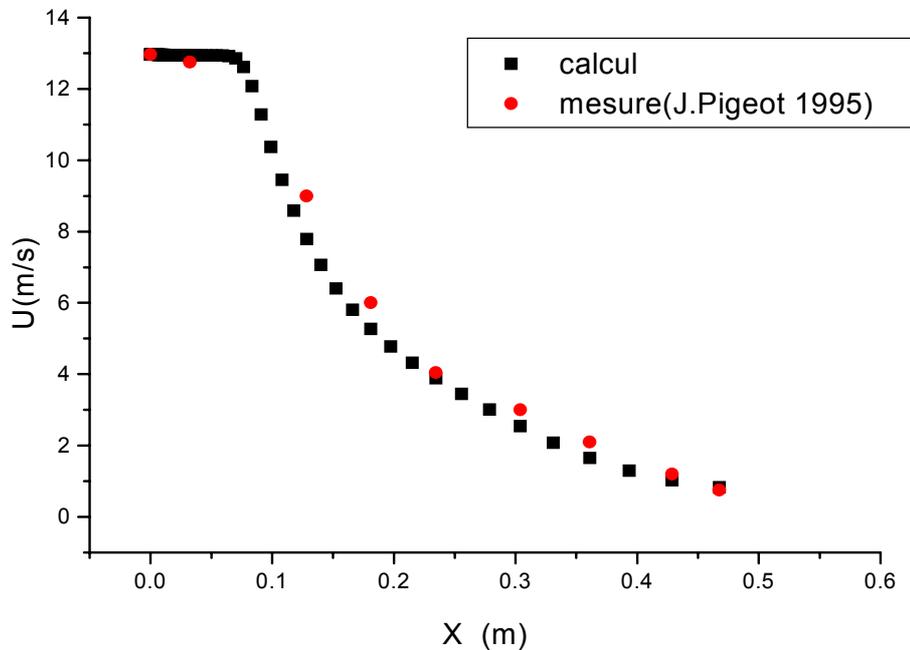


Figure 4-6 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.152$

### ***Evolution de la pression près de la paroi***

Les figures (4-7,4-8,4-9) montrent que le modèle  $k-\varepsilon$  simule de manière satisfaisante l'écoulement de jets confinés. Le seul problème sérieux du calcul est le départ prématuré du brusque changement de pente de la variation de pression. Alors que l'on s'attendait à avoir de moins bons résultats aux faibles valeurs de  $Ct$ , et une recirculation plus importante. Donc le plateau de pression est plus difficile à calculer.

Globalement, l'augmentation totale de pression qui est la caractéristique principale des jets confinés est surestimée par le calcul numérique.

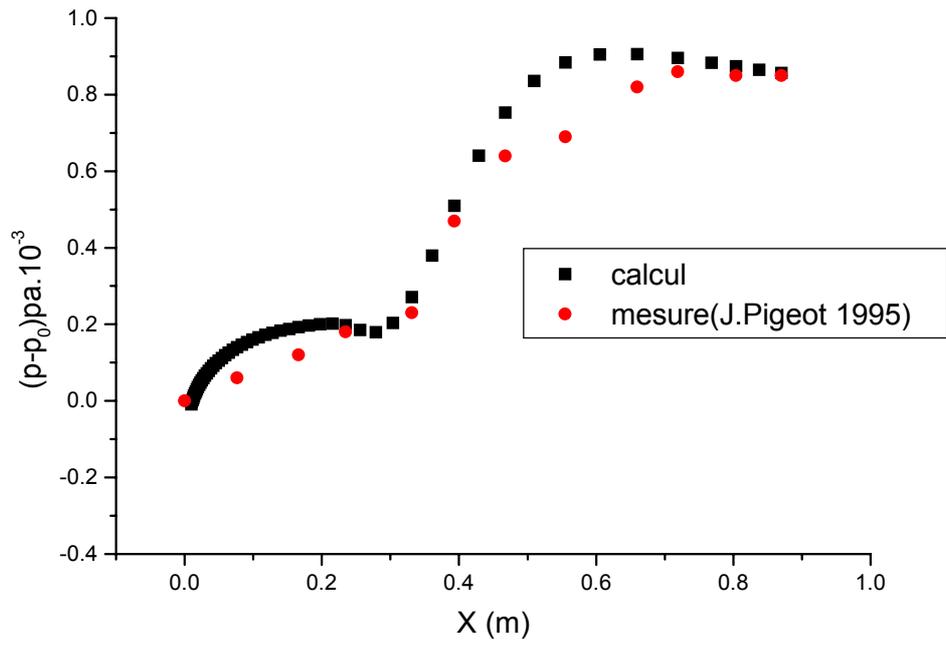


Figure 4-7 : - Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.976$

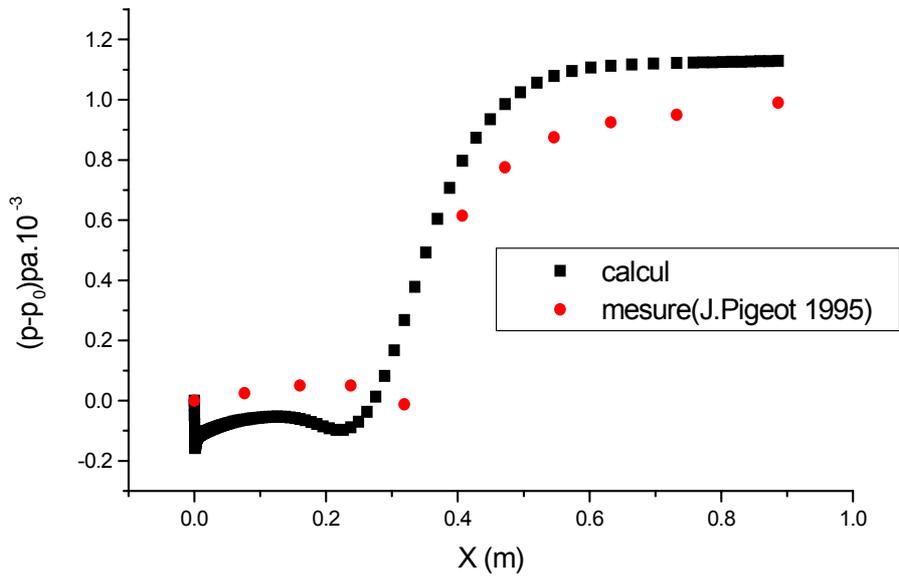


Figure 4-8: Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.506$

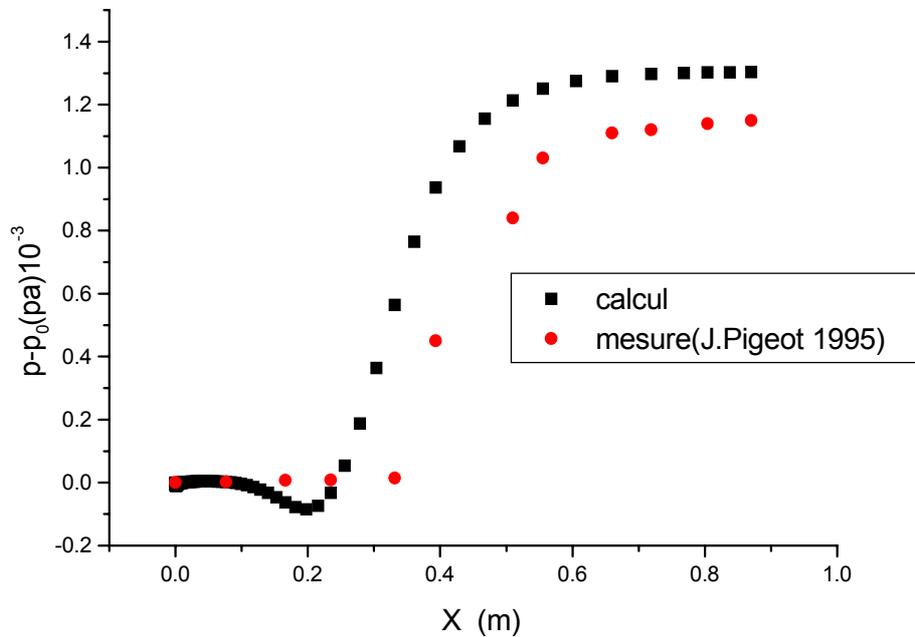


Figure 4-9: Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.152$

### ***Champ de vitesse longitudinale moyenne***

Les profile radiaux de la vitesse longitudinale moyenne sont présentées sur les figures (4-10 a,b,c,d), (4-11 a, b, c, d) et (4-12 a, b, c, d) respectivement pour les valeurs de  $Ct=0.976, 0.506$  et  $0.152$  aux différentes sections. Pour les valeurs plus faibles de  $Ct$  on observe que l'écoulement se développe rapidement vers un écoulement établi à une vitesse importante.

Aux valeurs plus élevées de  $Ct$  on a des vitesses établies plus faibles que la vitesse initiale de l'écoulement ambiant.

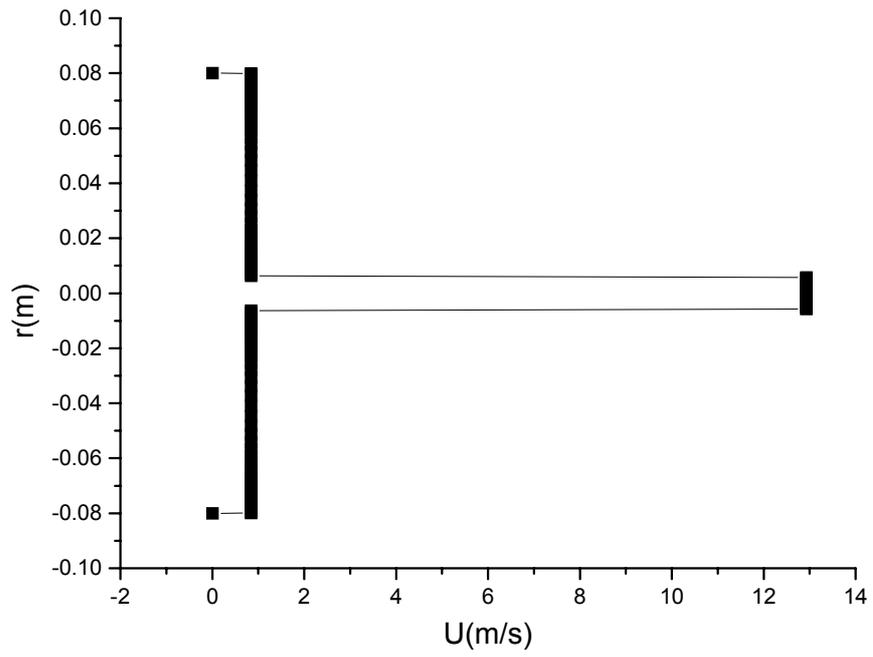


Figure 4-10 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m pour  $Ct=0.976$

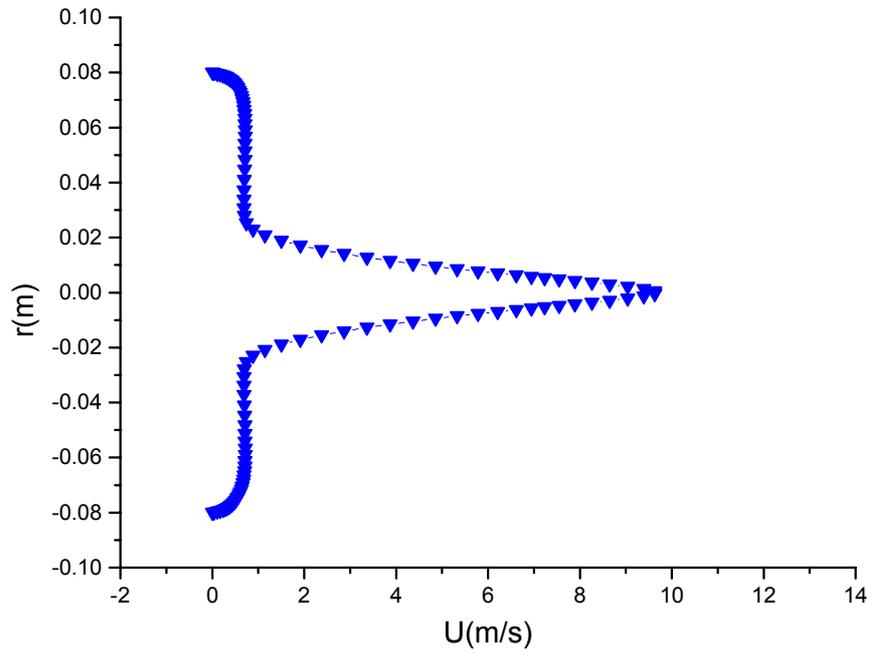


Figure 4-10 b : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m pour  $Ct=0.976$

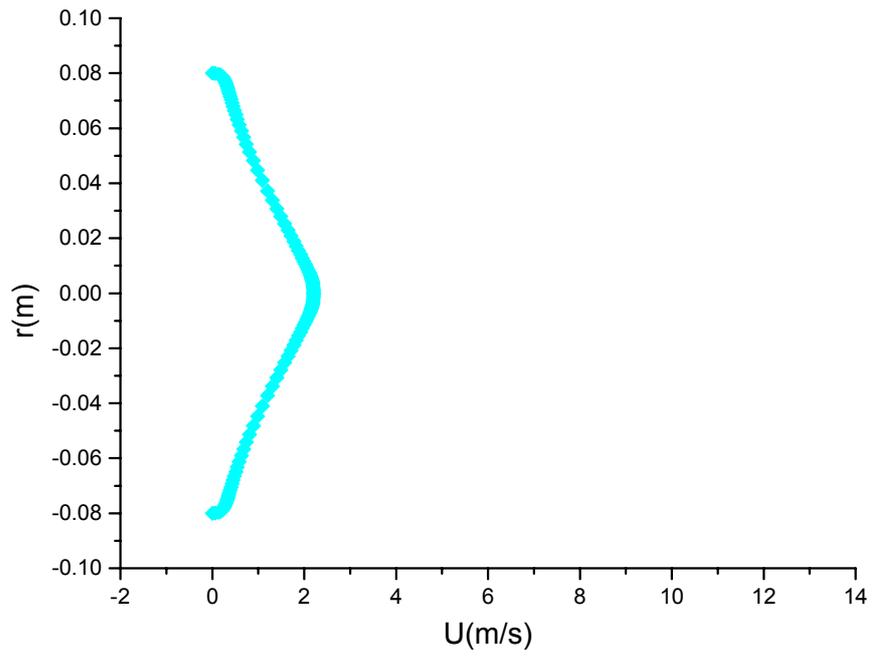


Figure 4-10 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56$  m pour  $C_t=0.976$

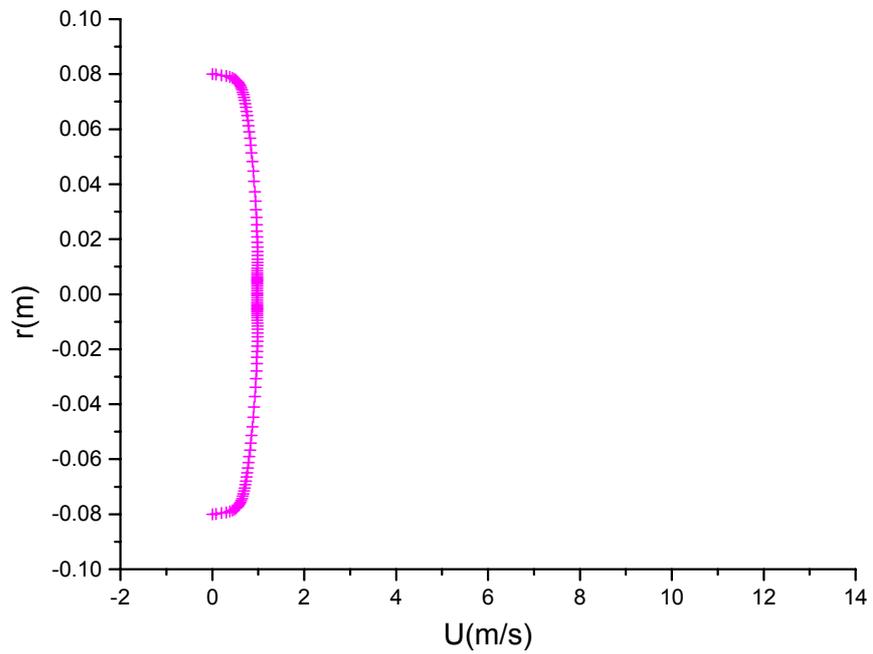


Figure 4-10 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99$  m pour  $C_t=0.976$

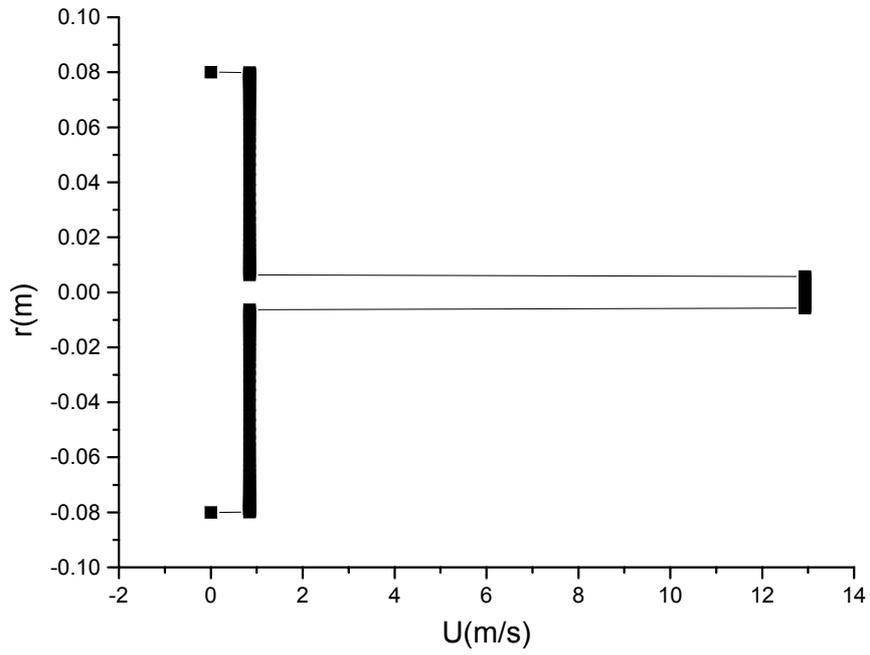


Figure 4-11 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m pour  $Ct=0.506$

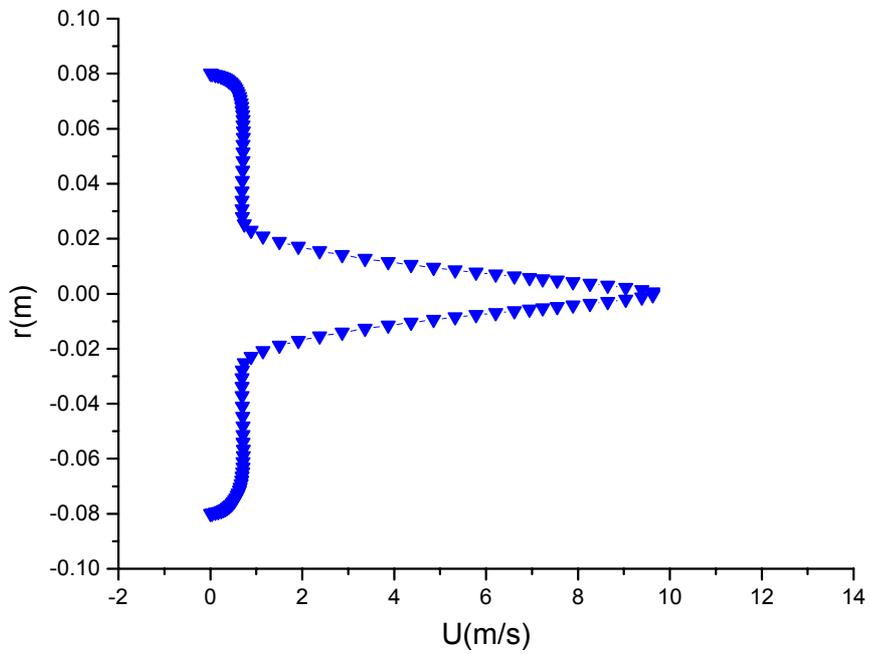


Figure 4-11 b : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m pour  $Ct=0.506$

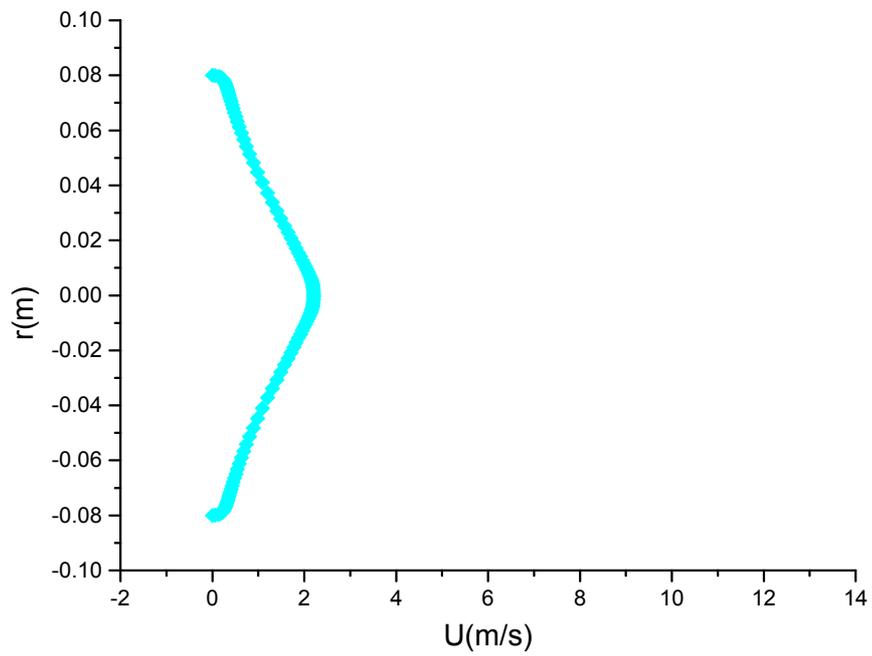


Figure 4-11 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56$  m pour  $Ct=0.506$

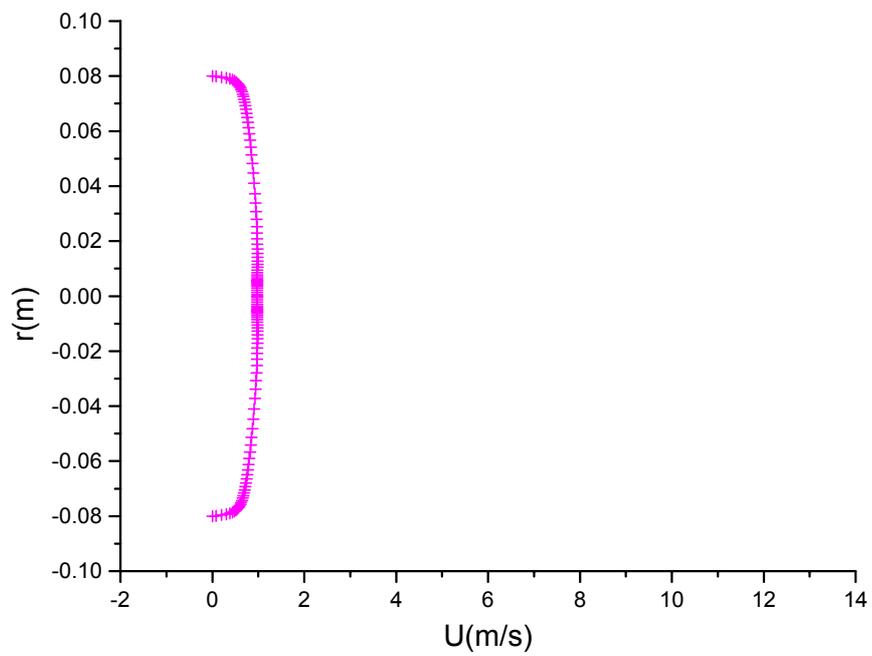


Figure 4-11 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99$  m pour  $Ct=0.506$

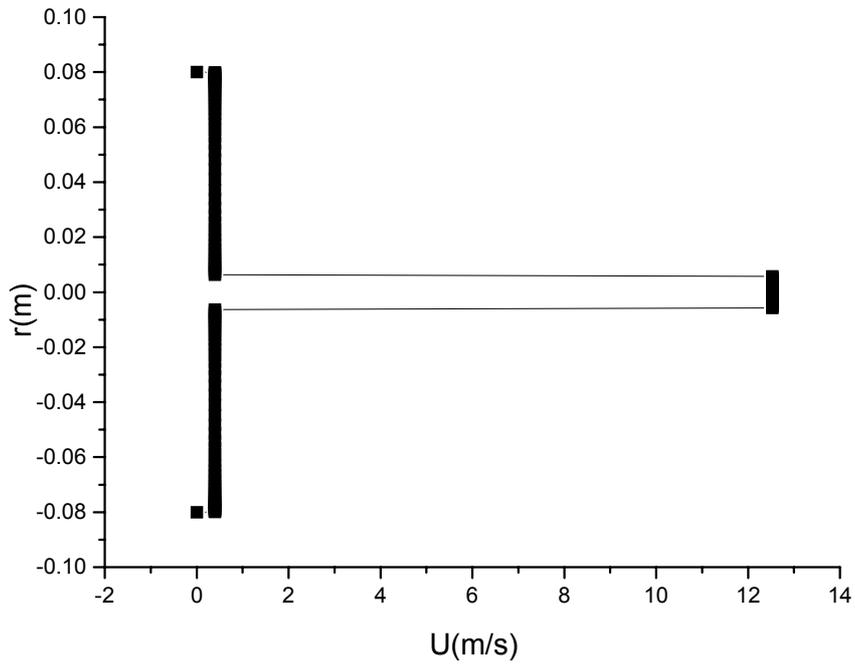


Figure 4-12 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m pour  $Ct=0.152$

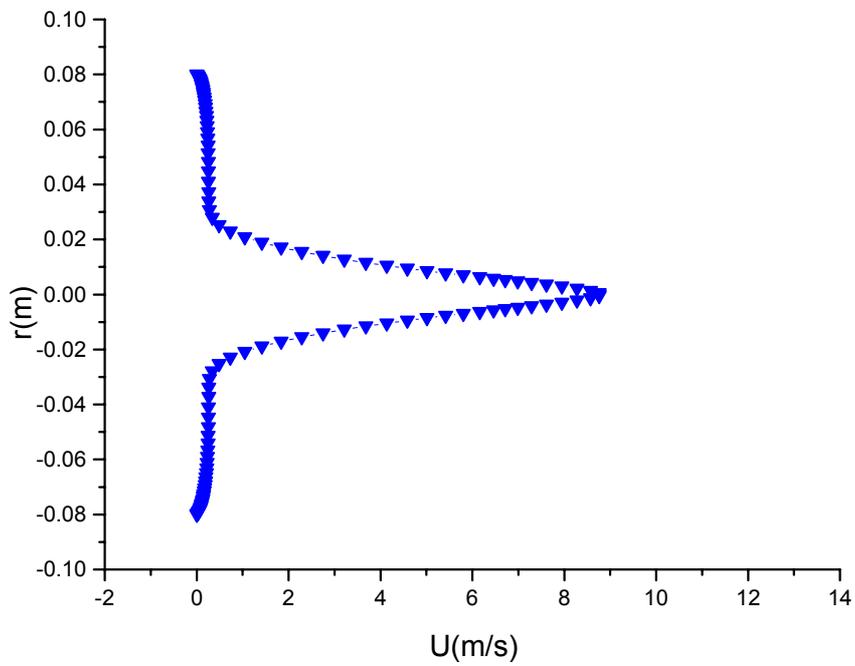


Figure 4-12 b: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m pour  $Ct=0.152$

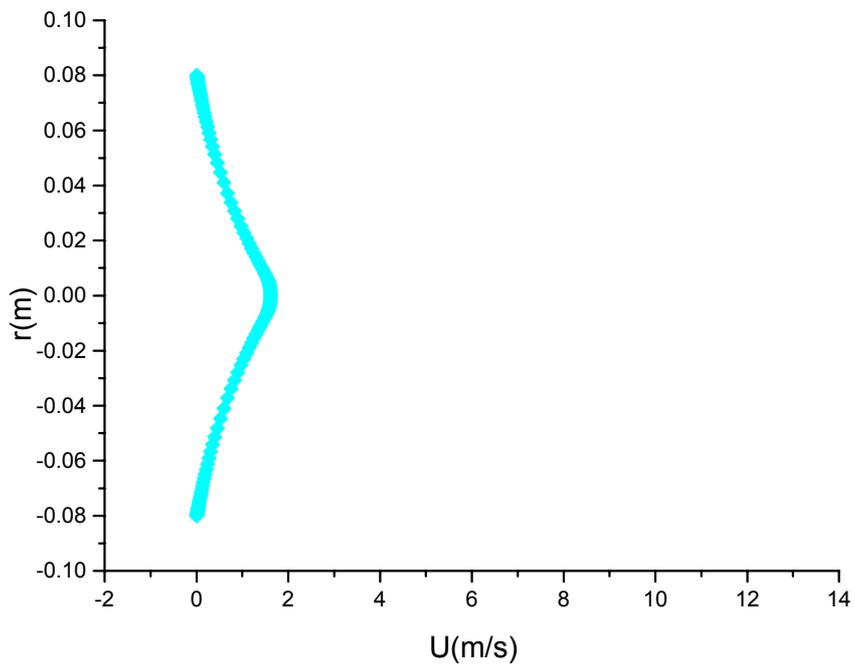


Figure 4-12 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56$  m pour  $Ct=0.152$

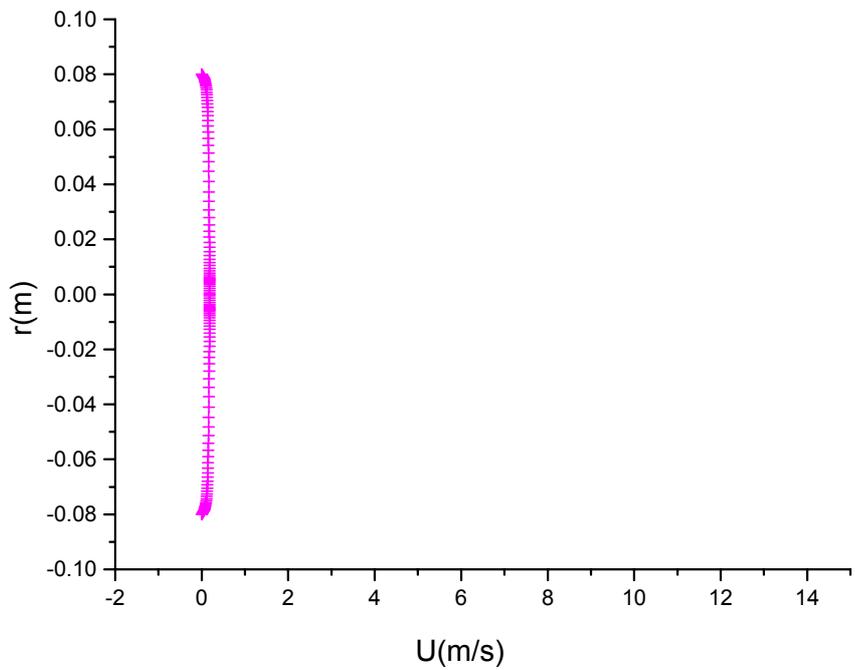
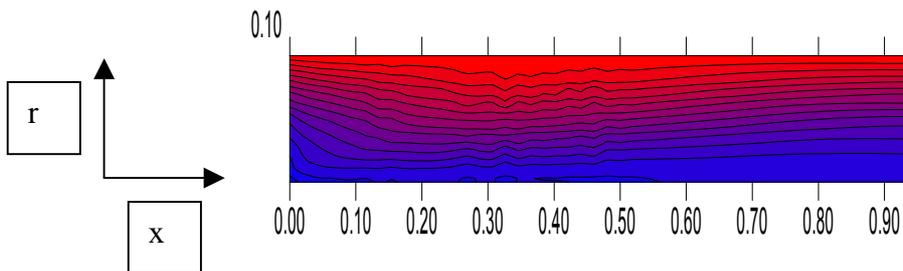


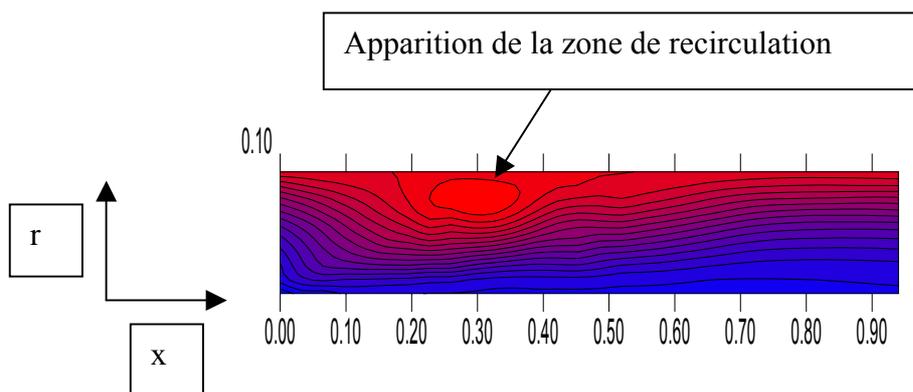
Figure 4-12 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99$  m pour  $Ct=0.152$

### ***Lignes de courant***

Les figures (4-13,4-14,4-15) montrent la zone de recirculation pour les faibles valeurs de  $Ct$ . Alors ces figures justifient les résultats et les observations de *J.Pigeot(1995)*, donc le rapport des deux vitesses (vitesse de l'écoulement ambiant et vitesse du jet) jouent un rôle très important dans le mécanisme de mélange, la génération de pression adverse et la taille de la zone de recirculation.



*Figure 4-13 : lignes de courant pour  $Ct=0.976$*



*Figure 4-14 : lignes de courant pour  $Ct=0.506$*

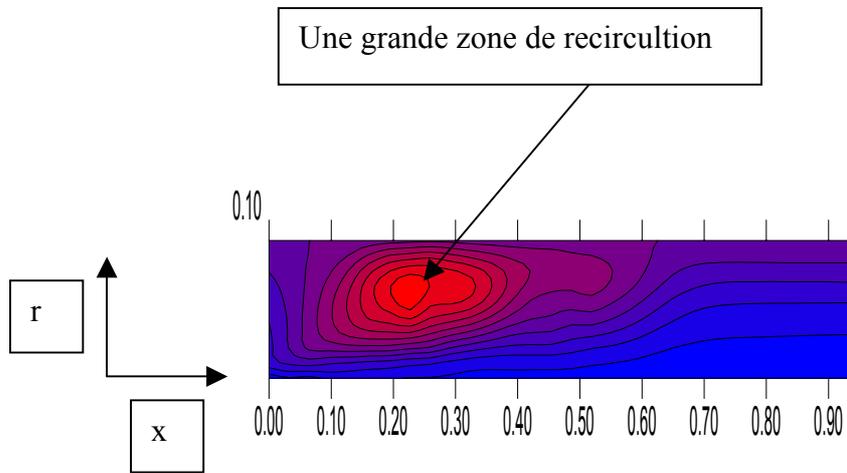


Figure 4-15 : lignes de courant pour  $Ct=0.152$

### 4.3 Le jet confiné à densité variable

Dans l'écoulement à densité variable on utilise l'air, l'hélium et le dioxyde de carbone. Tout d'abord, on prendra les résultats pour un jet d'air dans un écoulement ambiant de l'hélium pour les trois valeurs de  $Ct=0.976, 0.506, 0.152$  respectivement, pour avoir l'effet du rapport de vitesse. En suite on va prendre les résultats pour un jet d'hélium et un jet de gaz carbonique, pour avoir l'effet de la densité variable sur le développement des champs moyens. En fin on comparera les différents résultats.

**Evolutions axiales :**

#### **Lois de décroissance de la vitesse longitudinale moyenne**

L'évolution axiale de la vitesse longitudinale moyenne représentée dans les figures (4-13,4-17,4-18,4-19,4-20) par la valeur de  $U$  axiale en fonction de la position axiale montre une décroissance plus prononcée de  $U_j$  lorsque le rapport de densité ( $\rho_j/\rho_e$ ) diminue. En particulier, le jet d'hélium se développe beaucoup plus vite que le jet d'air dont la croissance elle même plus forte que celle de dioxyde de carbone.

Ces figures montrent que le paramètre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ) a une influence relativement faible, comparativement à l'effet induit par la variation du rapport ( $\rho_j/\rho_e$ ) sur le développement axial de la vitesse longitudinale moyenne.

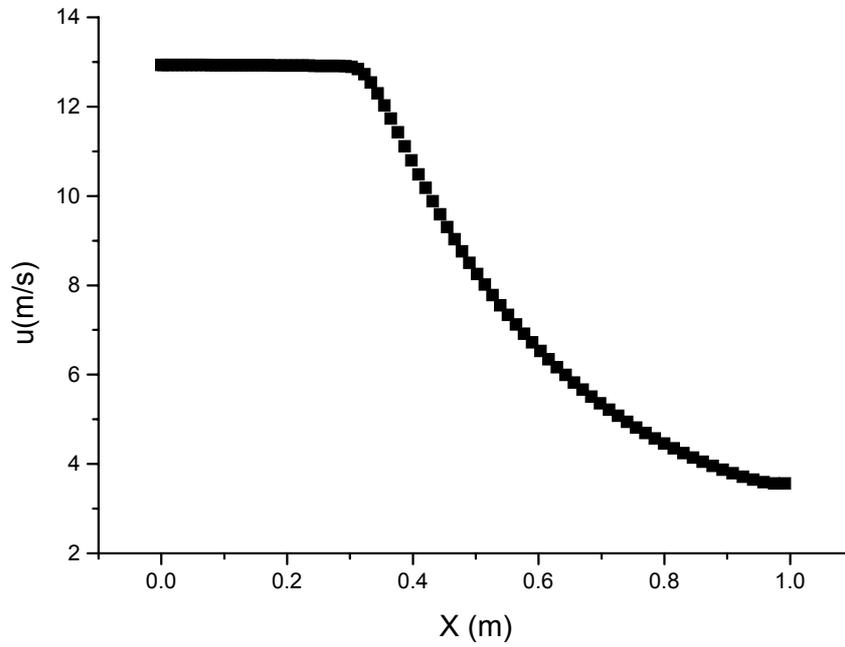


Figure 4-16 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.976$  (air-hélium)

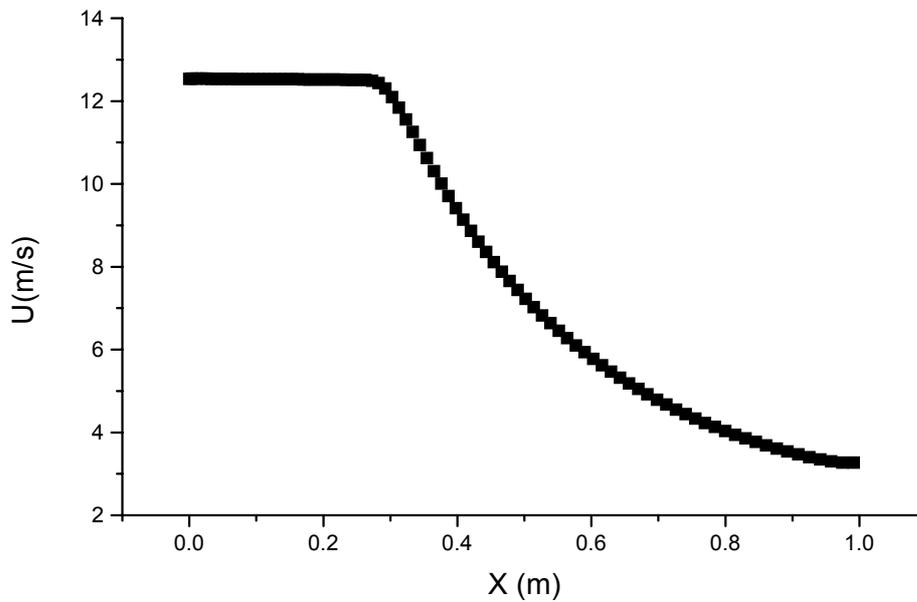


Figure 4-17 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.506$  (air-hélium)

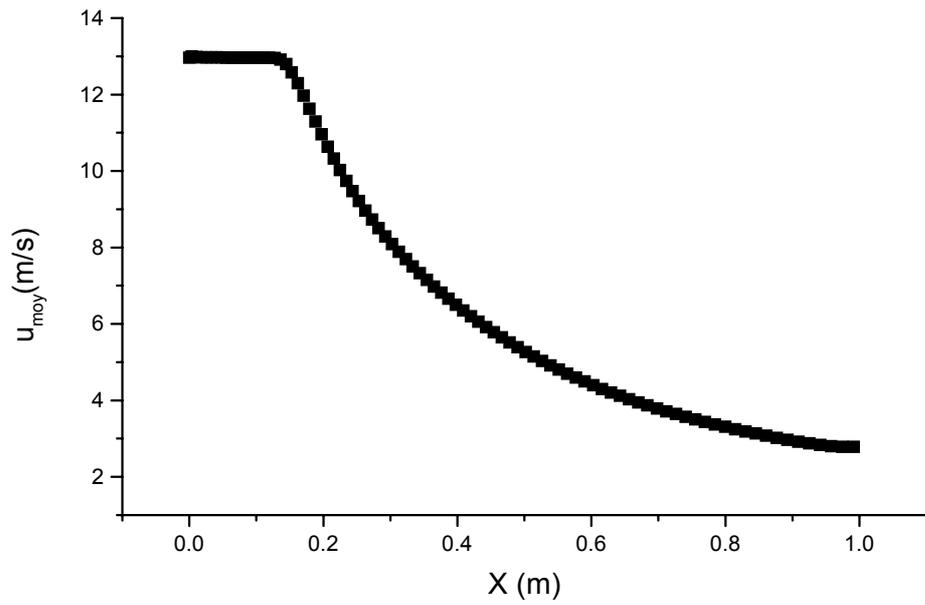


Figure 4-18 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.152$  (air-hélium)

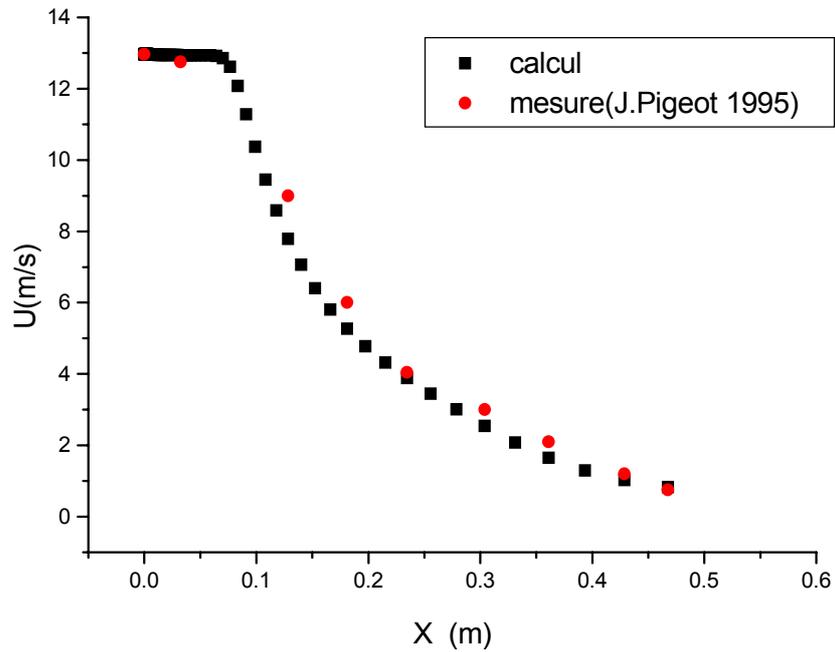


Figure 4-19 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.152$ (air-air)

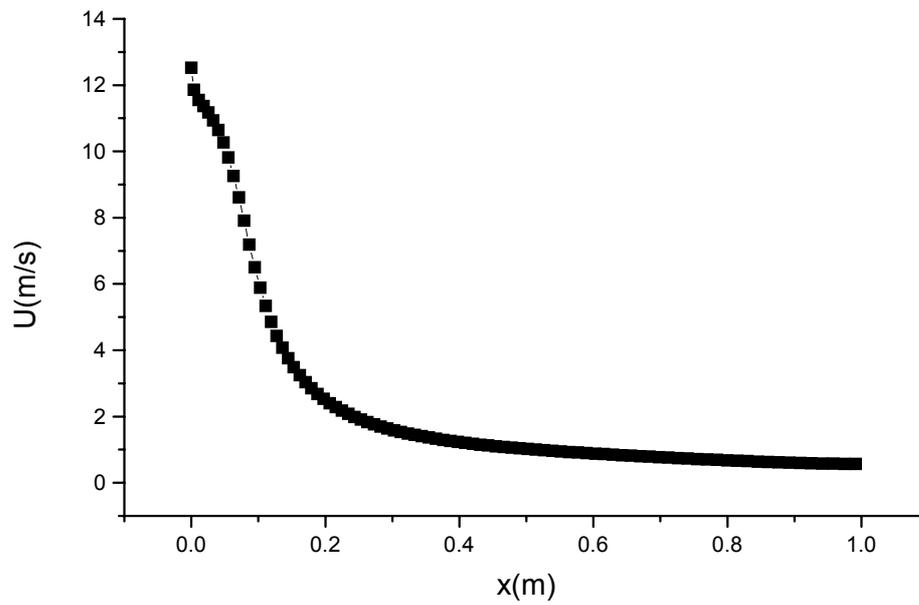


Figure 4-20 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.152$  (hélium - air)

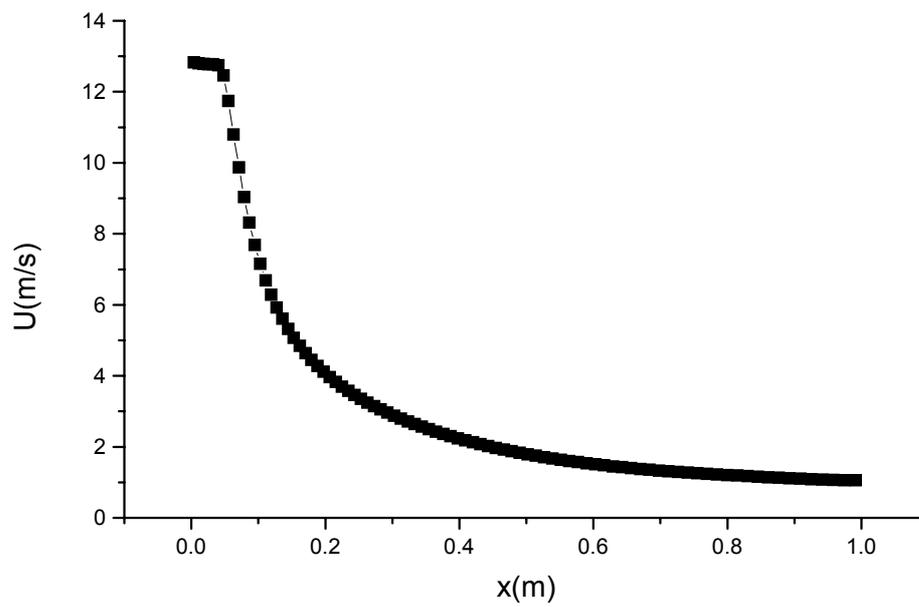
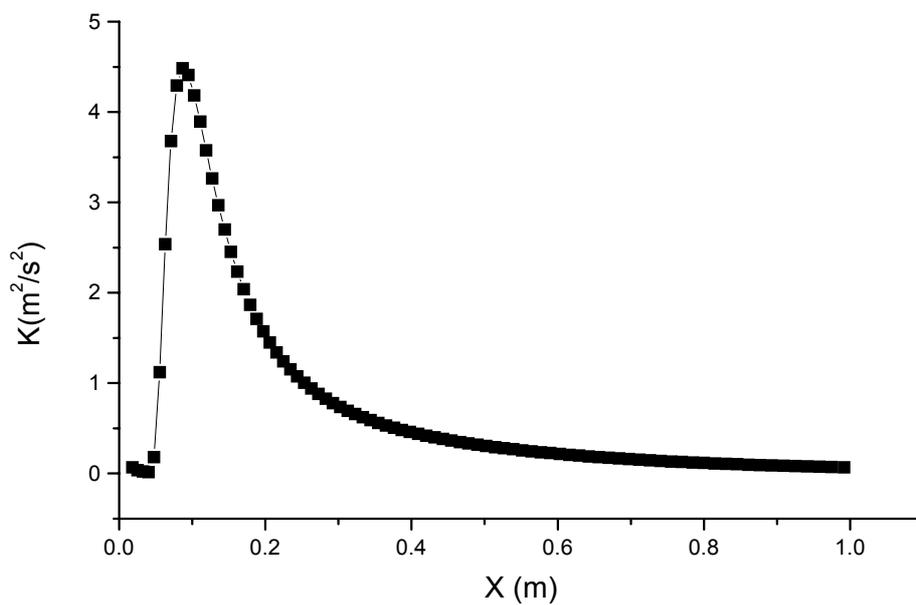


Figure 4-21 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale pour  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ - air)

### ***Energie cinétique turbulente***

Les figures (4-22,4-23) représentent l'évolution axiale de l'énergie cinétique turbulente. L'influence de la masse volumique variable est importante. On observe tout d'abord, dans une région initiale une croissance suivie immédiatement d'une décroissance, qui sont d'autant plus prononcées que le rapport de densité ( $\rho_j/\rho_e$ ) est plus faible. De plus, les valeurs maximales atteintes sont en amplitude et en position axiale différentes. Ces deux pics nous indiquent les limites de la couche de mélange sur l'axe de symétrie ou l'écoulement est en pleine turbulence.



*Figure 4-23 : Evolution axiale de l'énergie cinétique turbulente pour  $Ct=0.152$  (helium- air)*

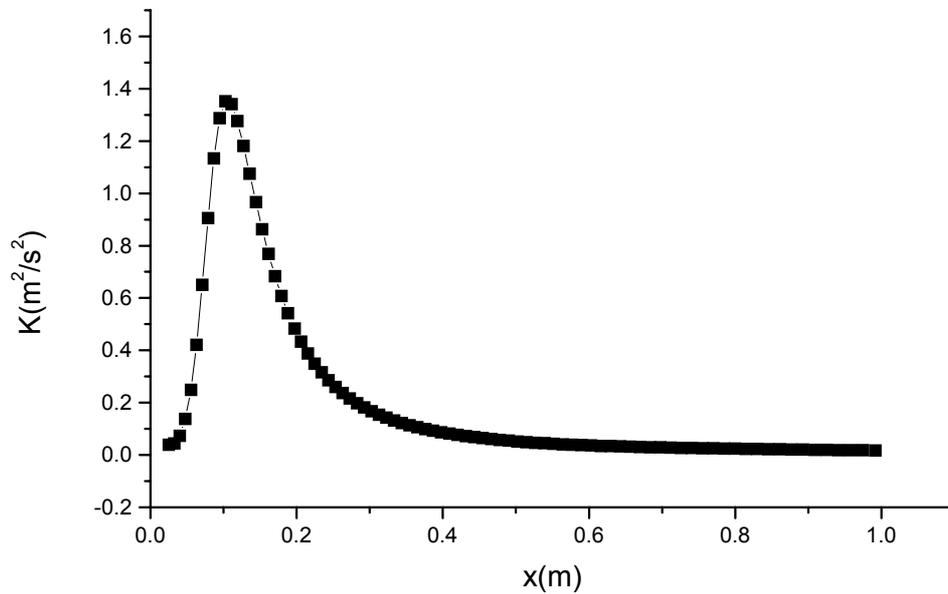


Figure 4-23 : Evolution axiale de l'énergie cinétique turbulente pour  $Ct=0.152$  ( $\text{CO}_2$ - air)

### ***Lois de décroissance de la concentration massique***

La décroissance axiale de la concentration massique, pour les jets d'hélium et de dioxyde de carbone, est représentée sur les figures (4-24, 4-25).

On observe le même comportement que celui de la vitesse longitudinale. En effet plus que le gaz est léger, plus vite que la fraction massique diminue, traduisant ainsi un mélange plus efficace.

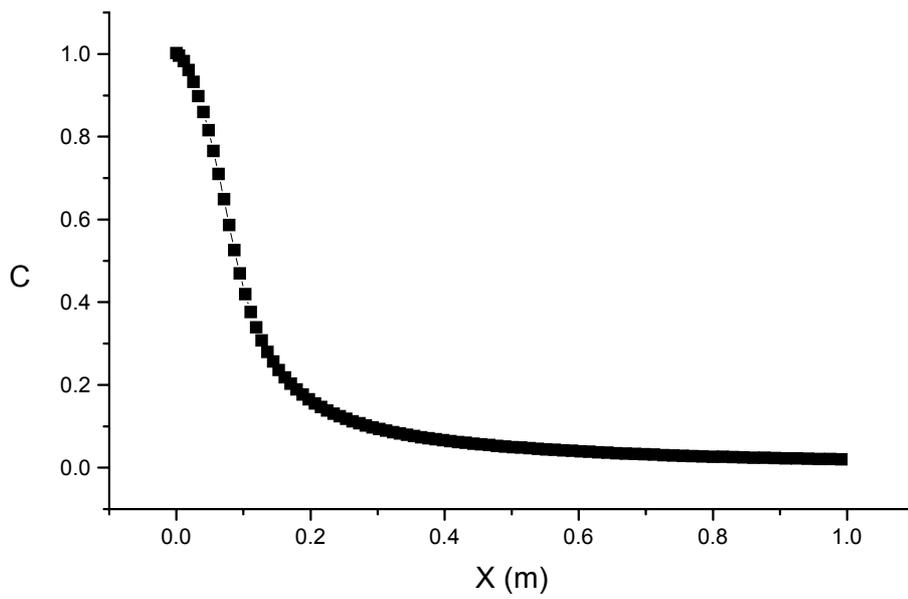


Figure 4-24: Evolution axiale de la concentration pour  $Ct=0.152$  (he - air)

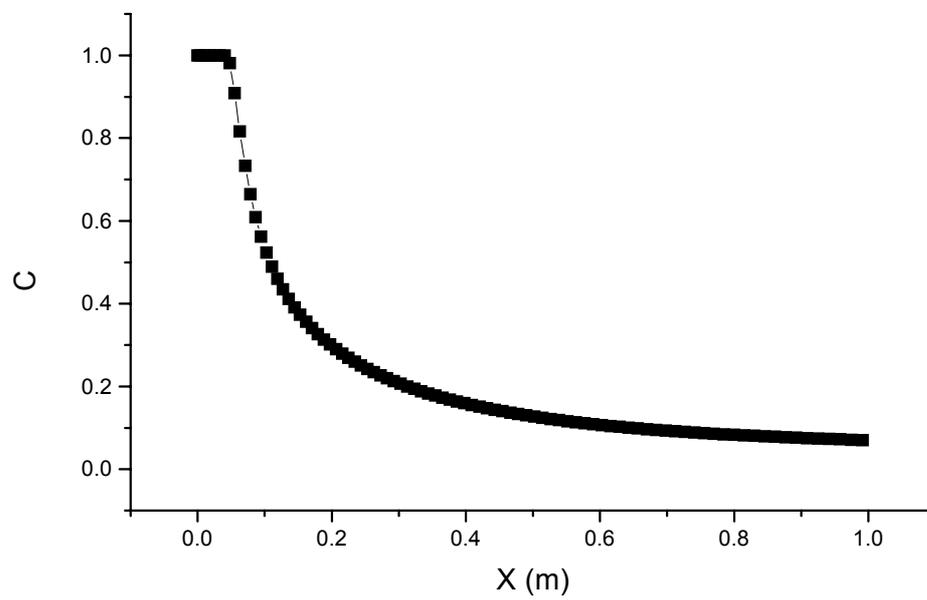


Figure 4-25: Evolution axiale de la concentration pour  $Ct=0.152$  (Co2 - air)

### **Masse volumique**

Les calculs du champ de concentration nous ont permis de déterminer l'évolution axiales de la masse volumique des jets d'hélium et de dioxyde de carbone (figure 4-26,4-27), le développement de cette grandeur est lié au rapport initial ( $\rho_j/\rho_e$ ).

On observe une augmentation de la densité pour le jet de l'hélium et au contraire une diminution de celle-ci pour le jet de  $CO_2$ .

La détermination de  $\rho$  est essentielle car mise à part le fait qu'elle est une caractéristique de l'écoulement. Elle nous informe aussi sur l'état du mélange.

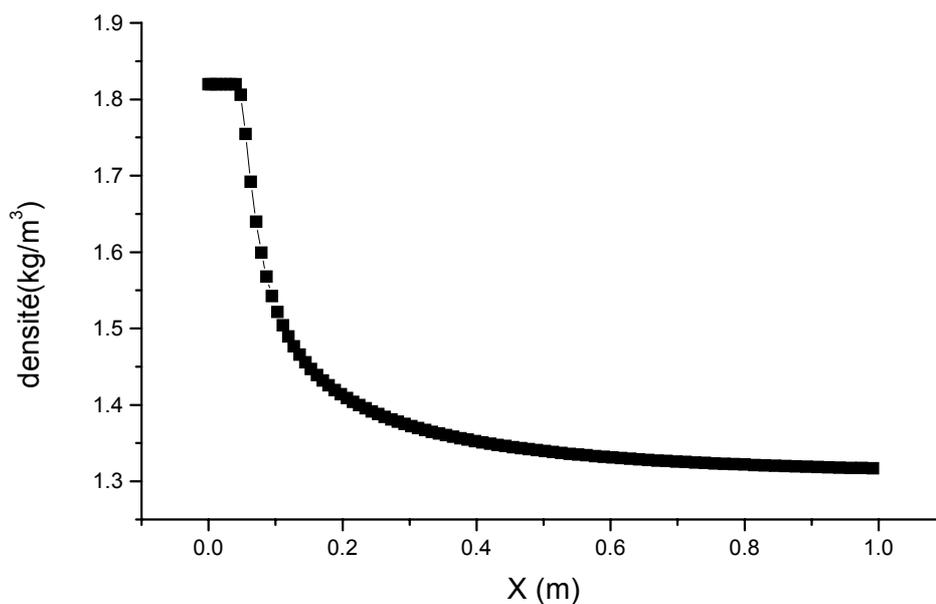


Figure 4-26 : Evolution axiale de la masse volumique pour  $Ct=0.152$  ( $CO_2$  - air)

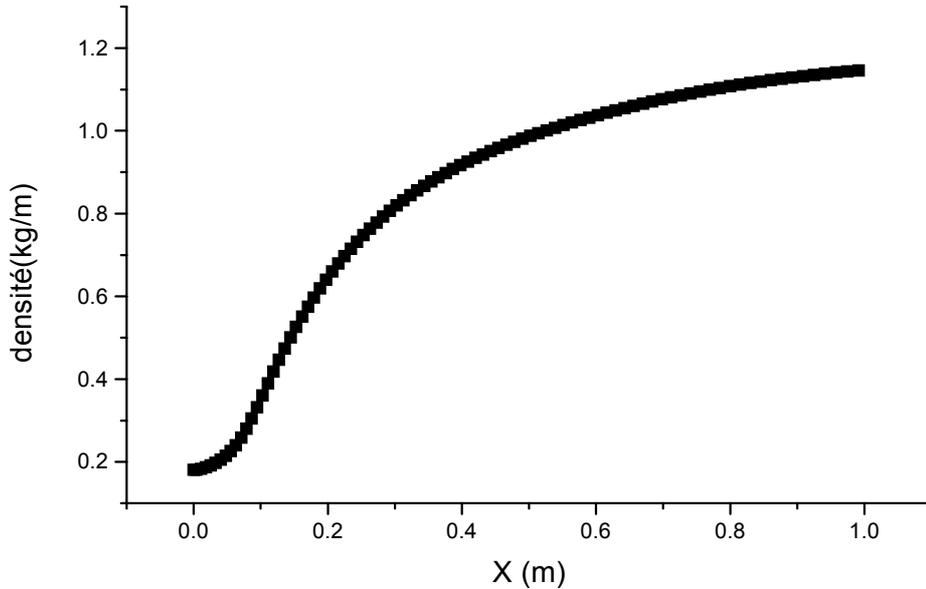


Figure 4-27: Evolution axiale de la masse volumique pour  $Ct=0.152$  (hélium - air)

### ***Evolution radiale***

Les résultats de l'exploration radiale des champs dynamiques et scalaire obtenus pour différentes sections étudiées nous ont permis d'analyser l'influence de la masse volumique sur l'épanouissement des champs moyens et fluctuants des grandeurs caractéristique d'un jet turbulent.

### ***Champ de vitesse***

#### ***Vitesse longitudinale moyenne :***

Les profils de vitesse moyenne  $U$  sont présentés sur les figures (4-28,4-29, 4-30,4-31,4-32) respectivement pour l'hélium, pour l'air et pour le dioxyde de carbone en fonction de la position radiale ( $r$ ). Comme on peut le voir, ces figures présentent l'influence de la masse volumique, sur l'évolution de vitesse longitudinale moyenne aussi bien sur l'axe du jet lorsque ( $\rho_j/\rho_e$ ) diminue.

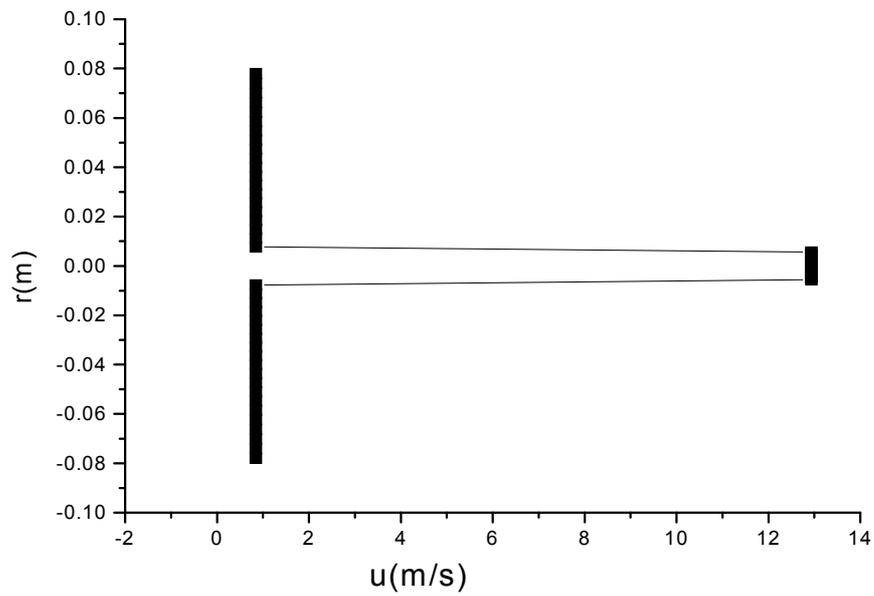


Figure 4- 28 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.976$  (air-hélium)

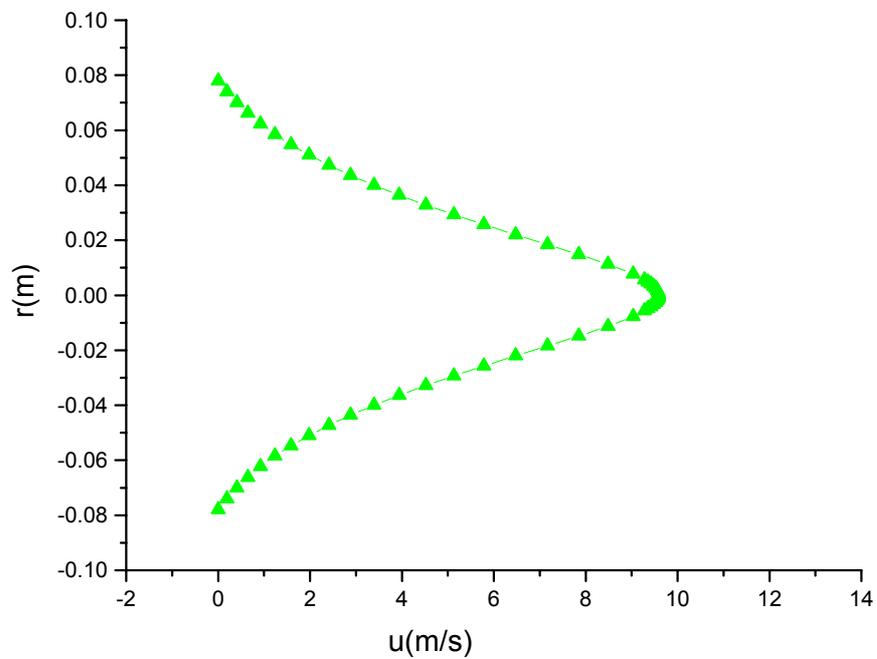


Figure 4- 28 b : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.976$  (air-hélium)

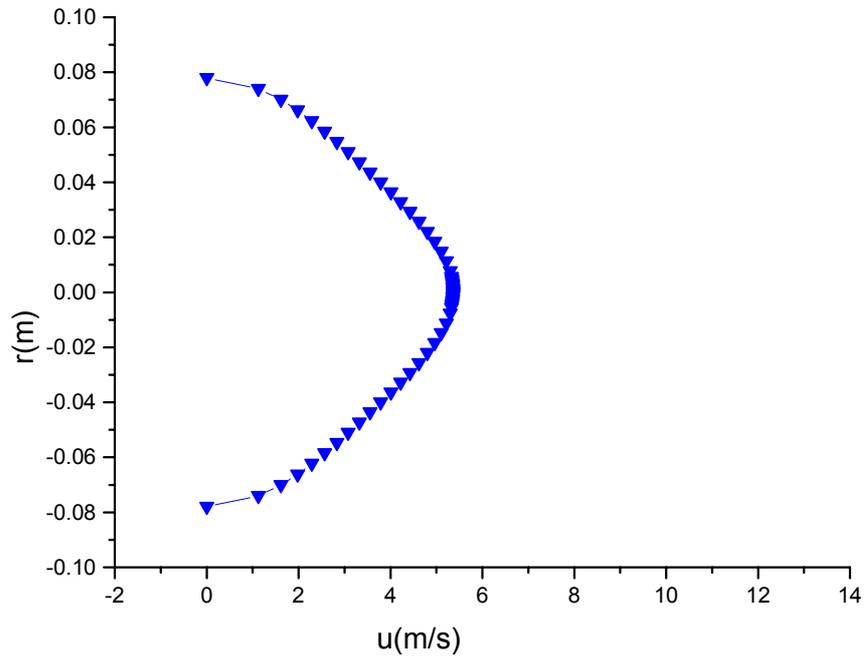


Figure 4- 28 c: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56\text{ m}$   $Ct=0.976$  (air-hélium)

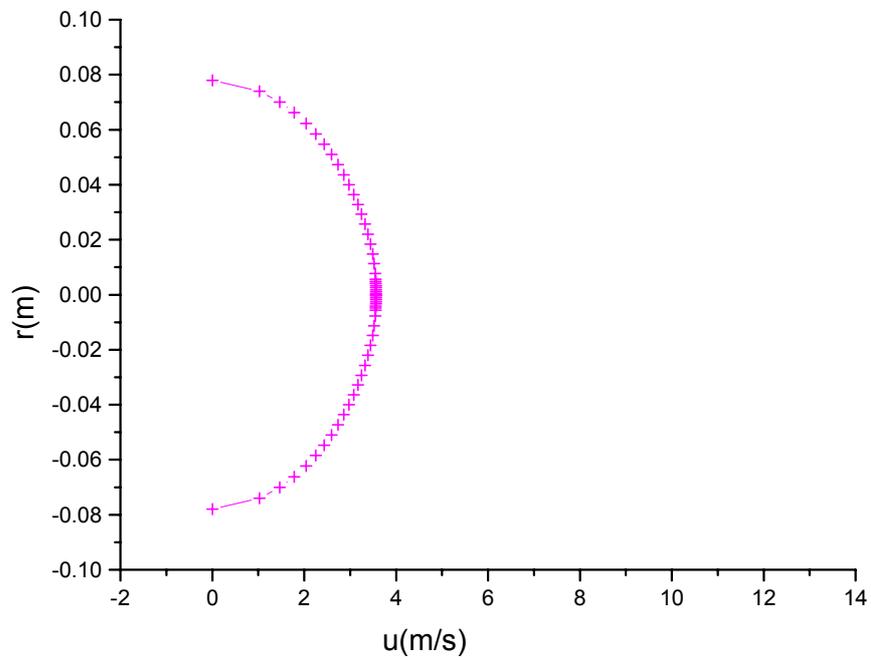


Figure 4- 28 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99\text{ m}$   $Ct=0.976$  (air-hélium)

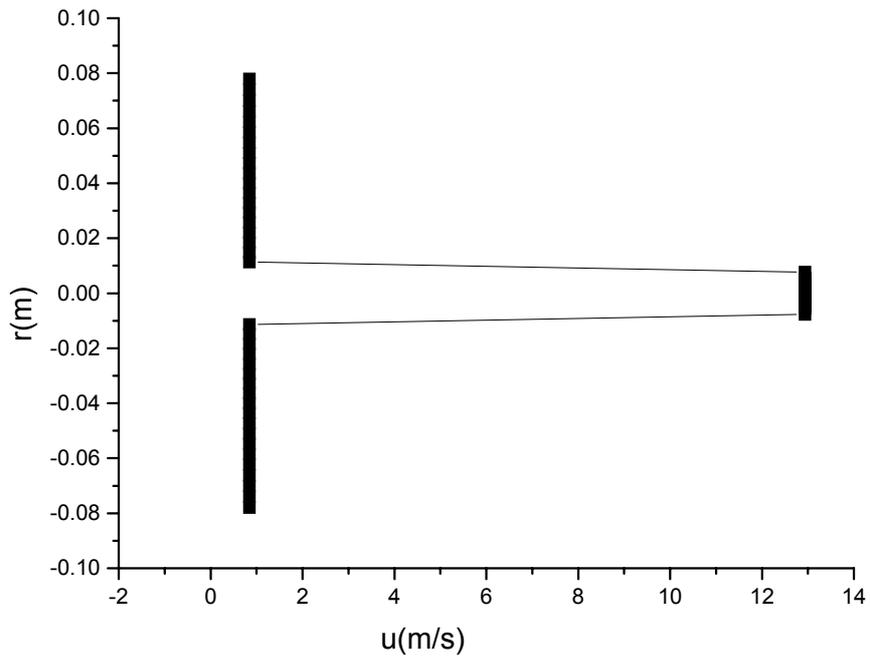


Figure 4- 29 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.506$  (air-hélium)

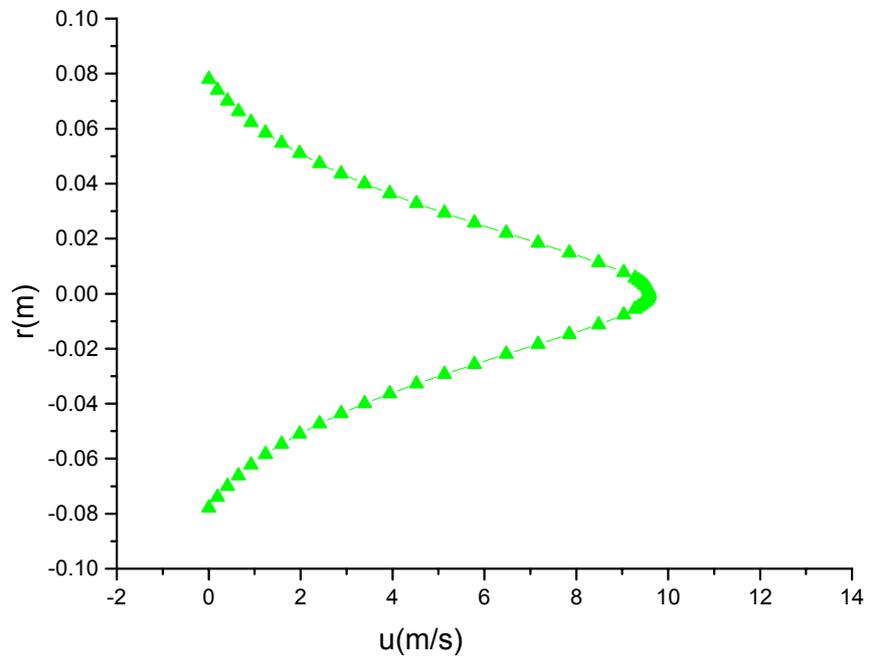


Figure 4- 29 b: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.506$  (air-hélium)

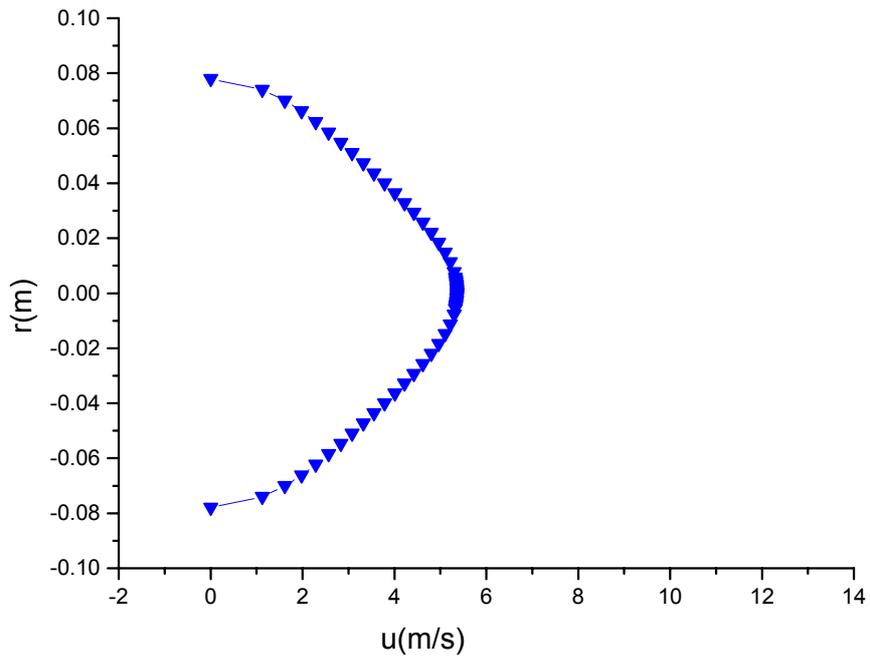


Figure 4- 29 c: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56 \text{ m}$   $Ct=0.506$  (air-hélium)

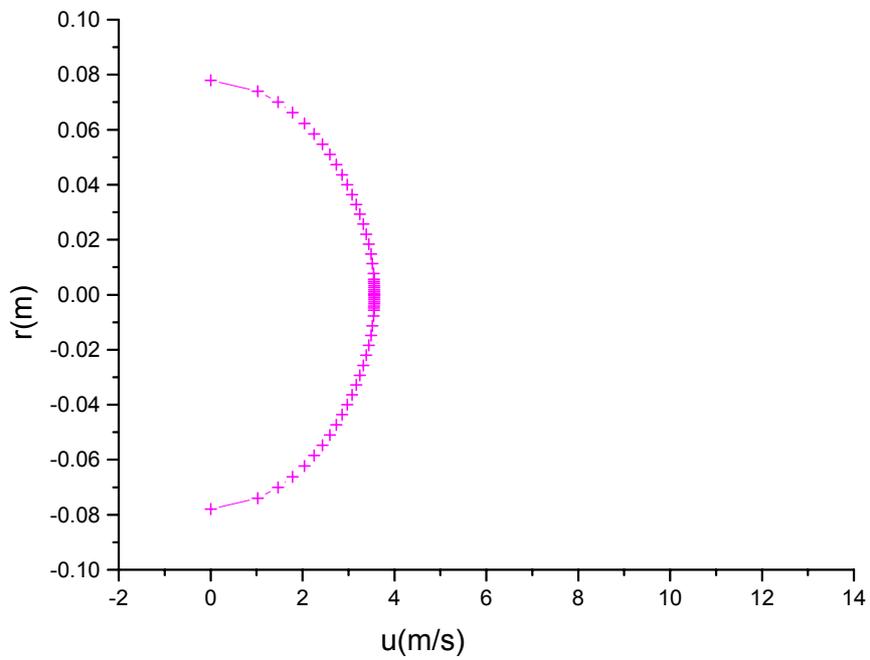


Figure 4- 29 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99 \text{ m}$   $Ct=0.506$  (air-hélium)

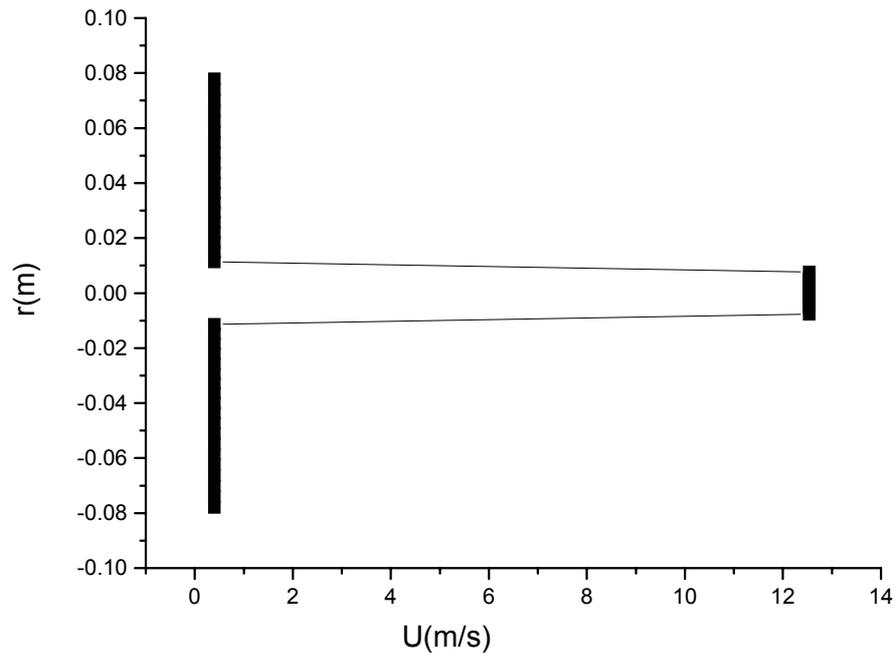


Figure 4- 30 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  (air-hélium)

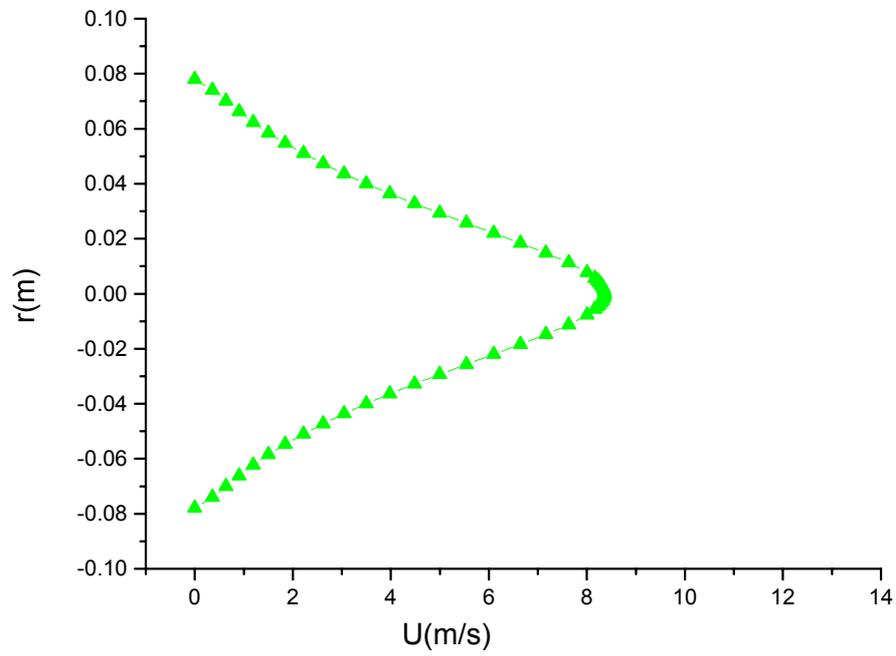


Figure 4- 30 b : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  (air-hélium)

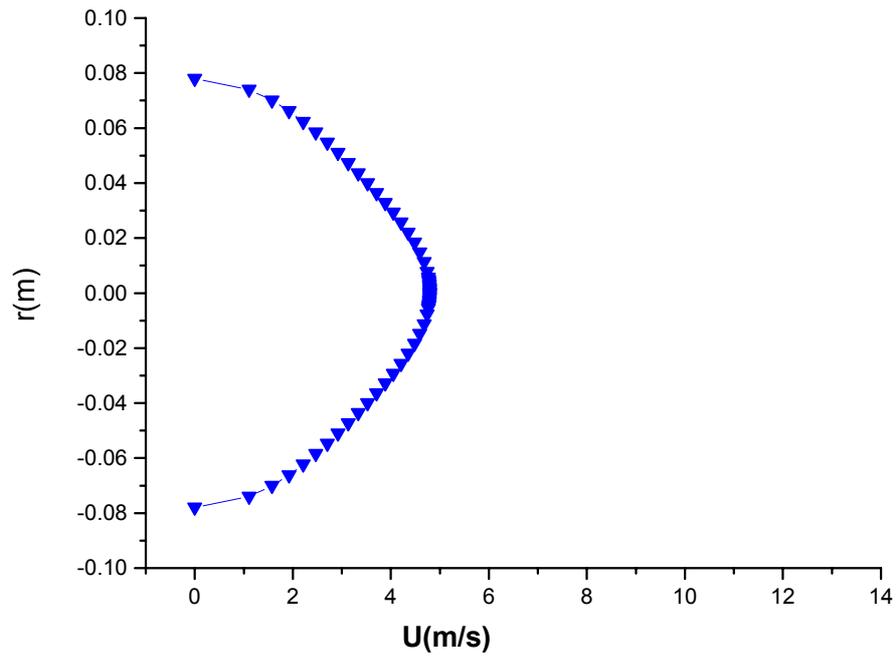


Figure 4- 30 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56m$   $Ct=0.152$  (air-hélium)

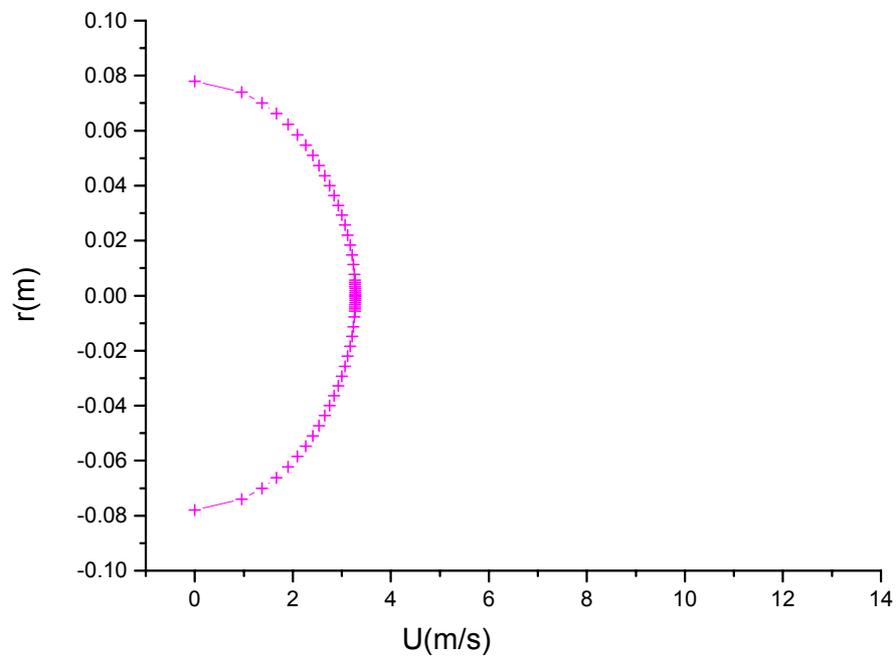


Figure 4- 30 d: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99 m$   $Ct=0.152$  (air-hélium)

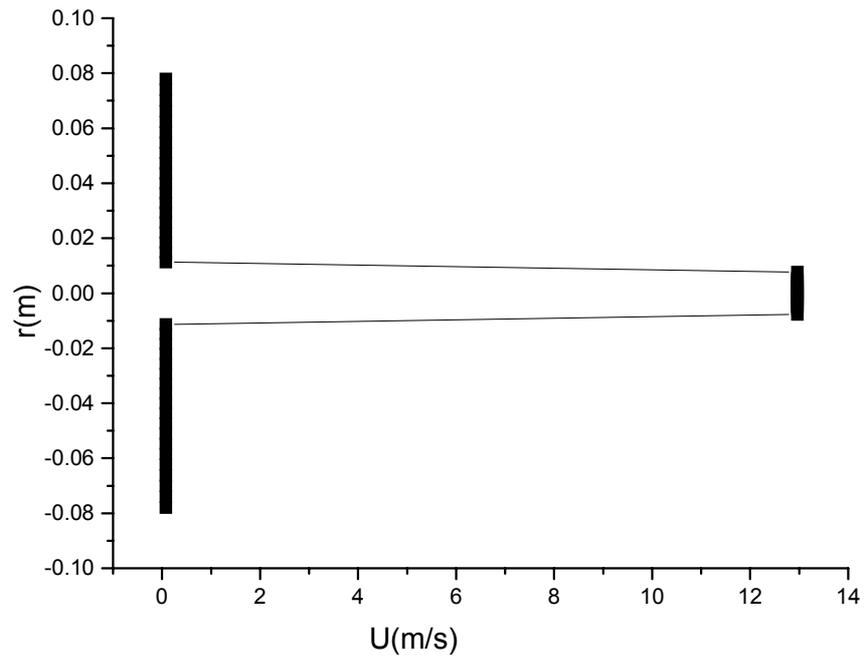


Figure 4- 31 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  (hélium- air)

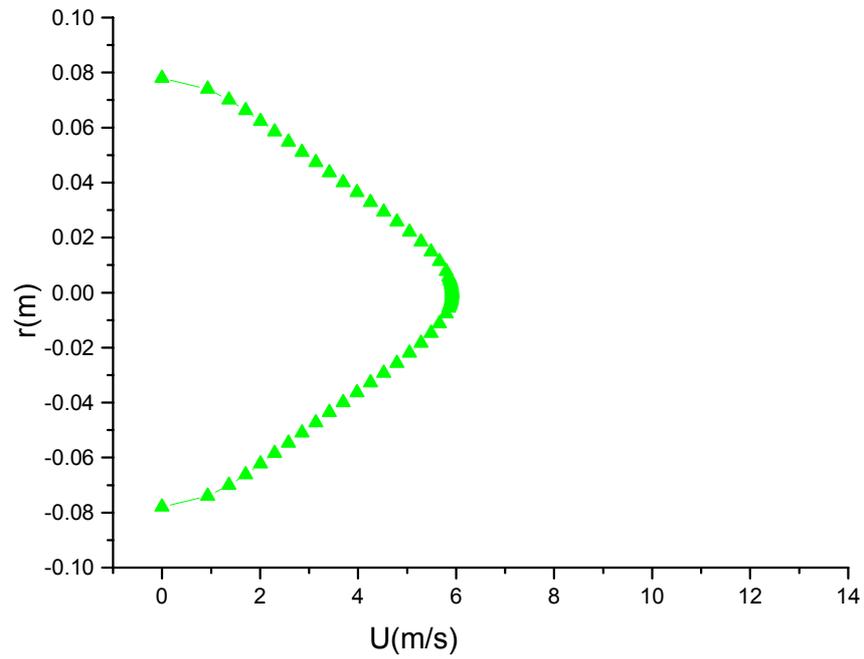


Figure 4- 31 b: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  (hélium- air)

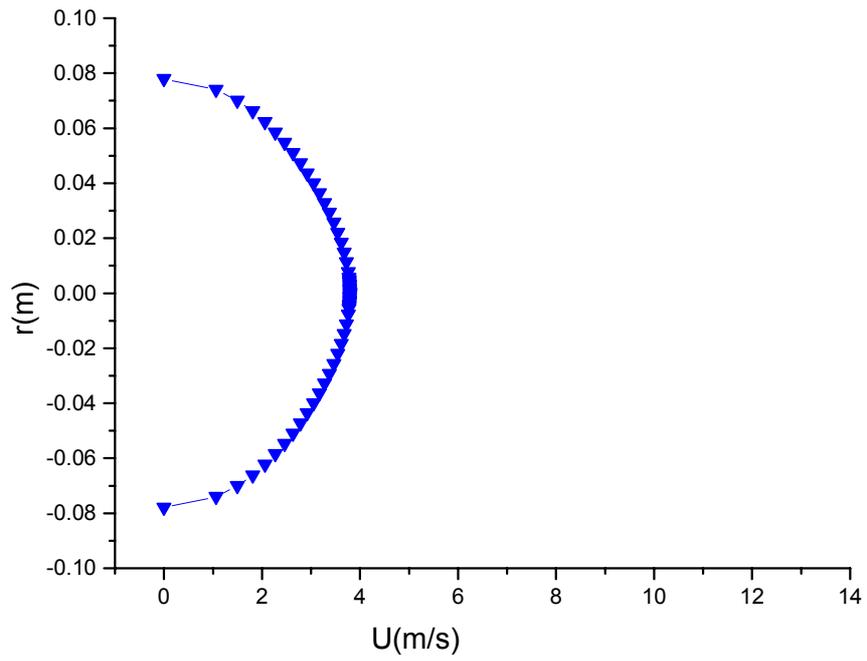


Figure 4- 31 c : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56m$   $Ct=0.152$  (hélium- air)

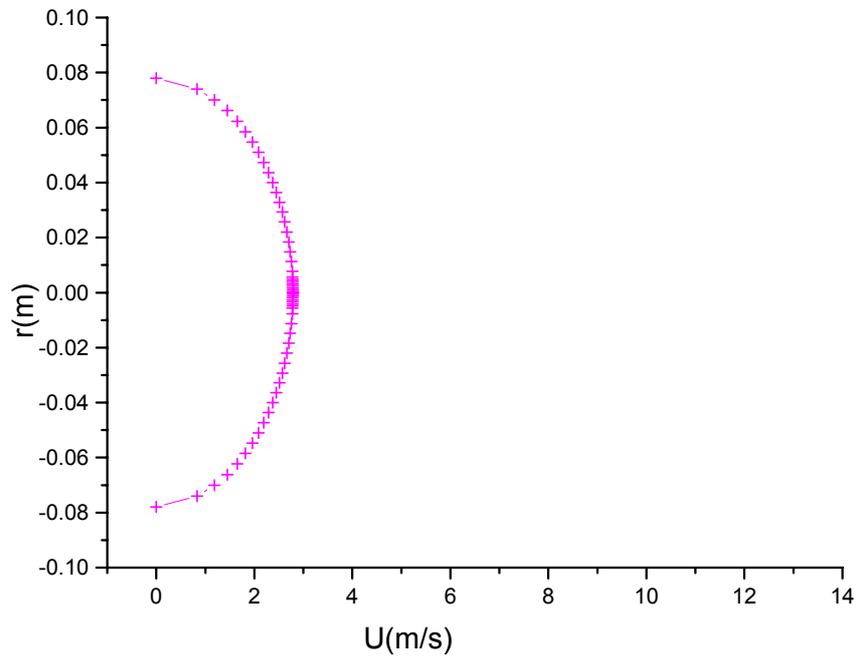


Figure 4- 31 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99 m$   $Ct=0.152$  (hélium- air)

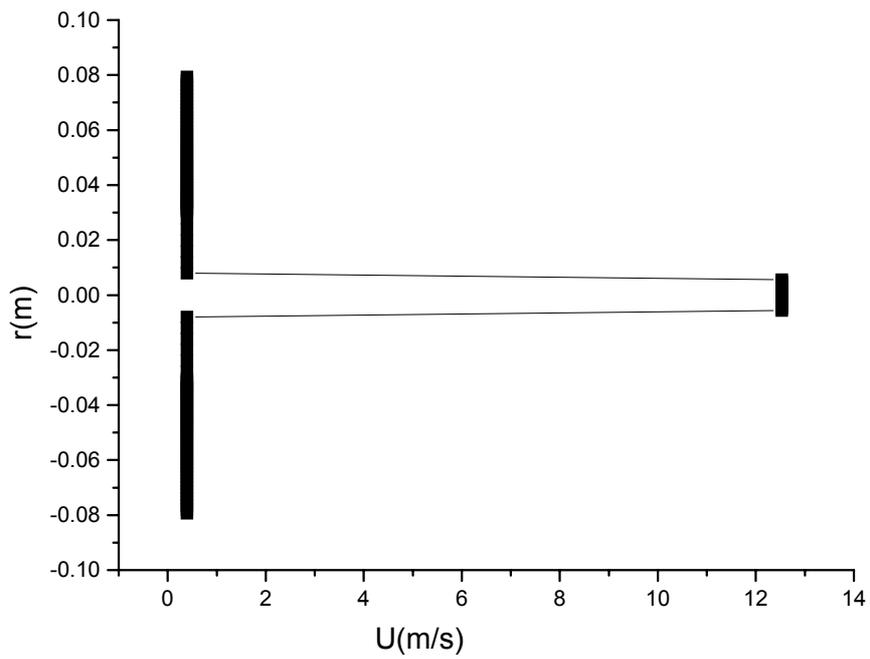


Figure 4- 32 a : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  (hélium- air)

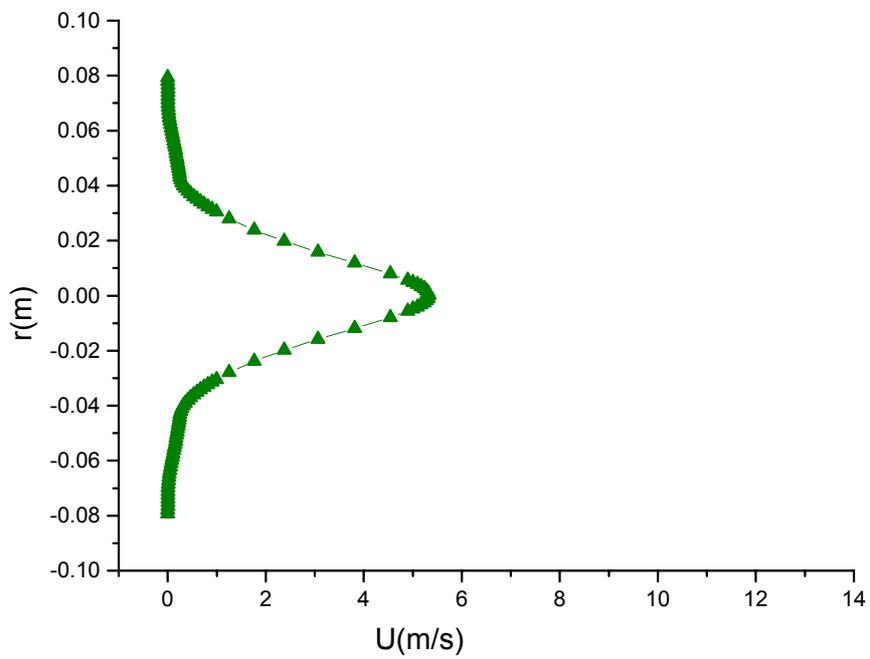


Figure 4- 32 b: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  (hélium - air)

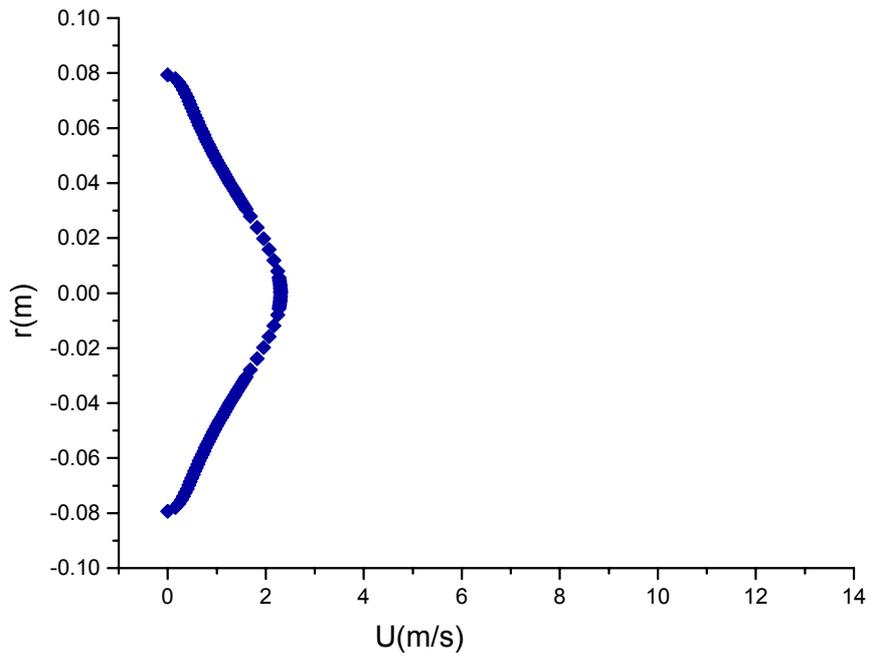


Figure 4- 32 c: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56$  m  $Ct=0.152$  (hélium - air)

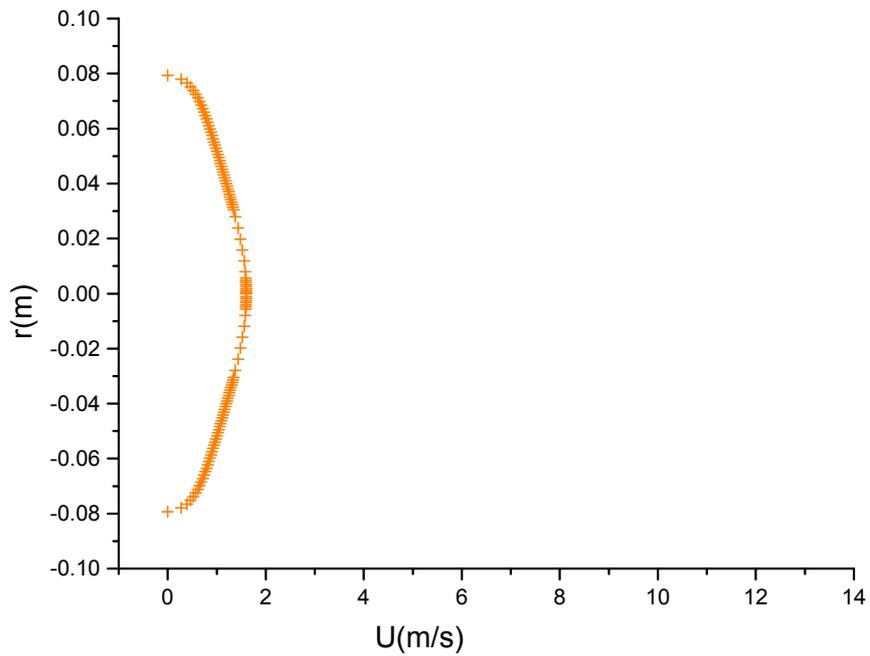


Figure 4- 32 d : profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  (hélium - air)

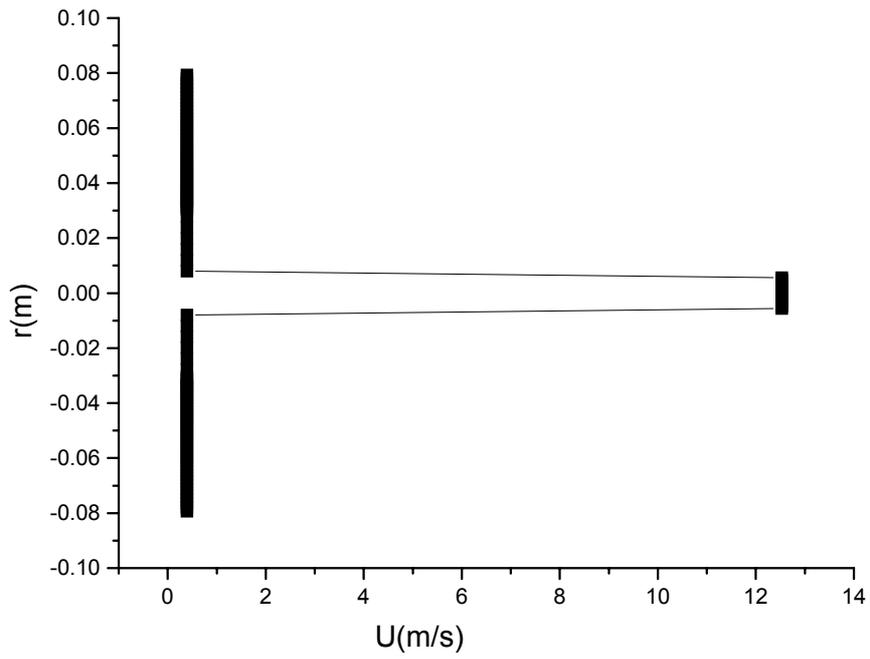


Figure 4- 32 a: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -hélium)

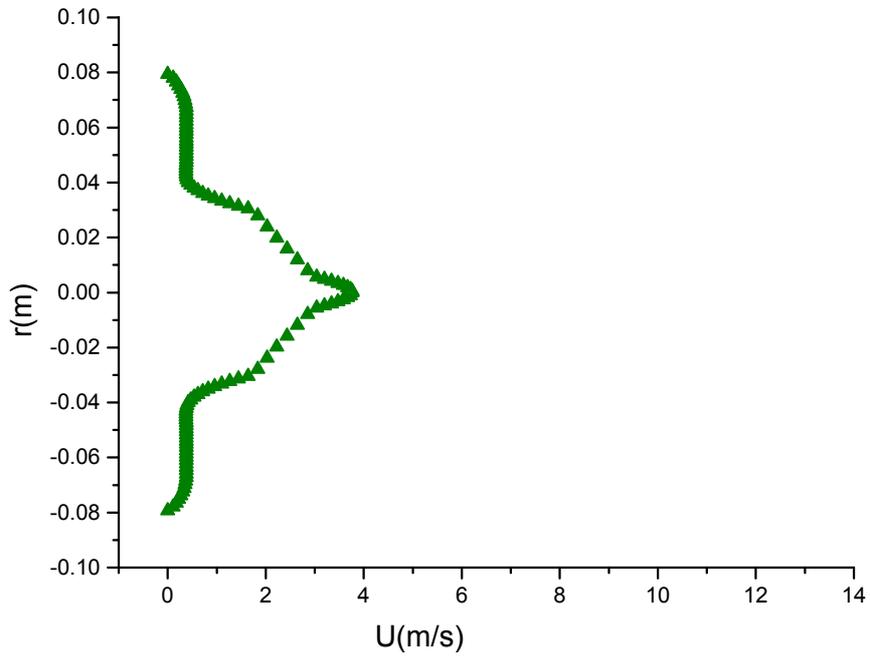


Figure 4- 32 b: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -hélium)

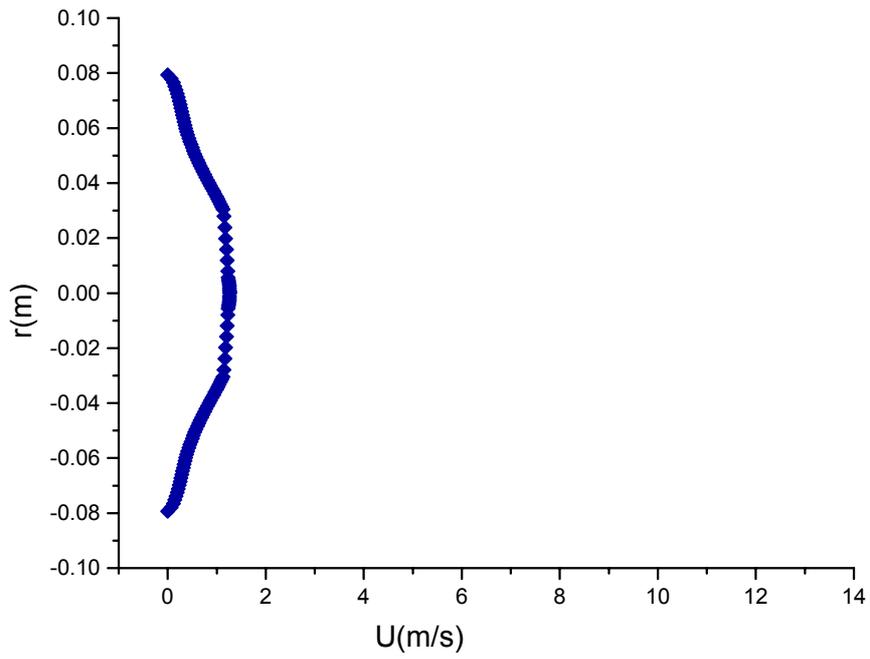


Figure 4- 32 c: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.56\text{ m}$   $Ct=0.152$  ( $\text{CO}_2$ -hélium)

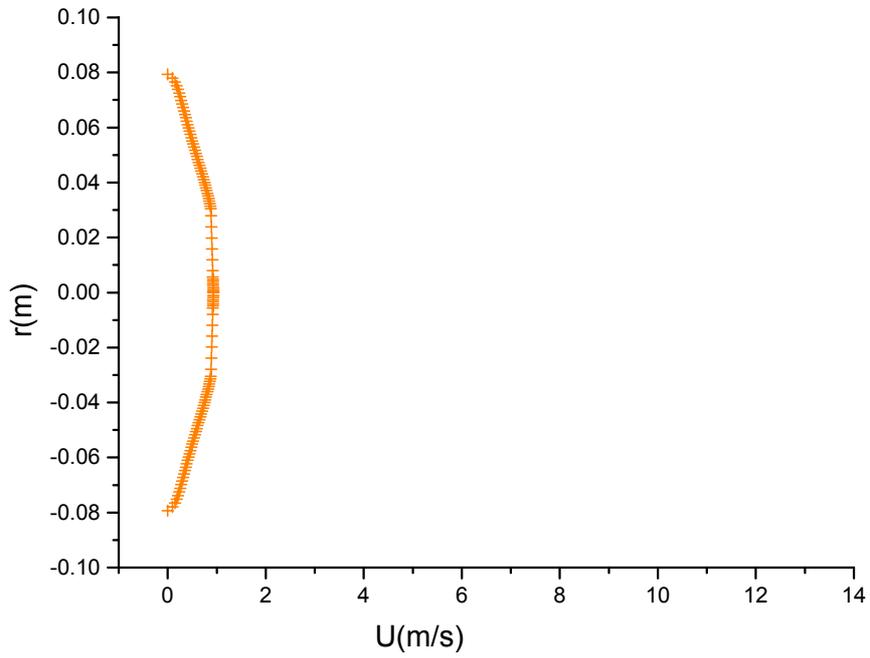
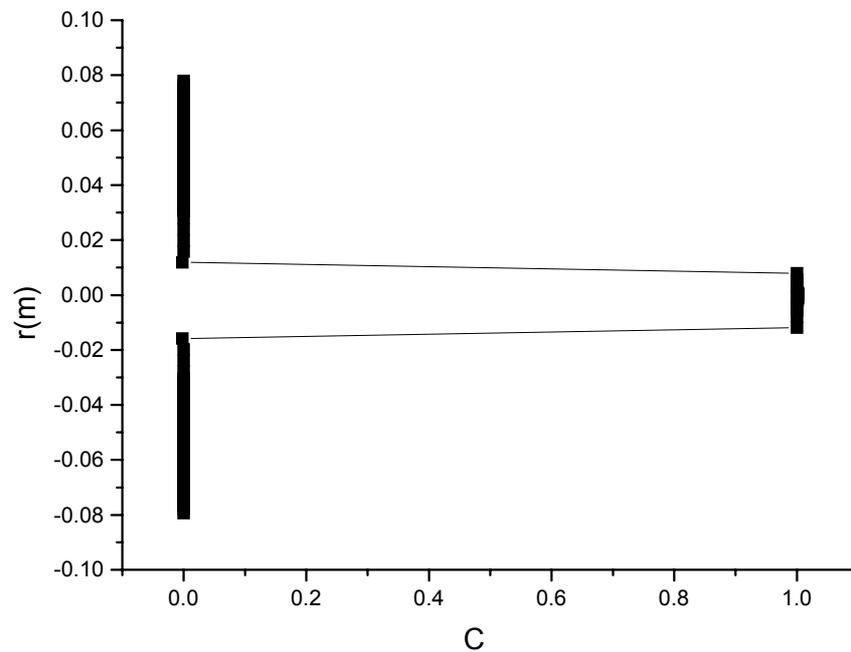


Figure 4- 32 d: profil radial de la vitesse longitudinale à la section  $x=0.99\text{ m}$   $Ct=0.152$  ( $\text{CO}_2$ -hélium)

### ***Champ de concentration moyenne***

Les profils radiaux de la concentration massique moyenne  $C$  (où  $C/C_j$  avec  $C_j=1$ ) sont présentés sur les figures (4-33,4-34) respectivement pour l'hélium et le dioxyde de carbone en fonction de la position radiale ( $r$ ) on observe que les profils radiaux de concentration s'épanouissent plus vite pour le jet plus légers. Car ce dernier se développe plus rapide avec une grande turbulence.



*Figure 4- 33 a: profil radial de la concentration à la section  $x=0.00$  m  $Ct=0.152$  (hélium-air)*

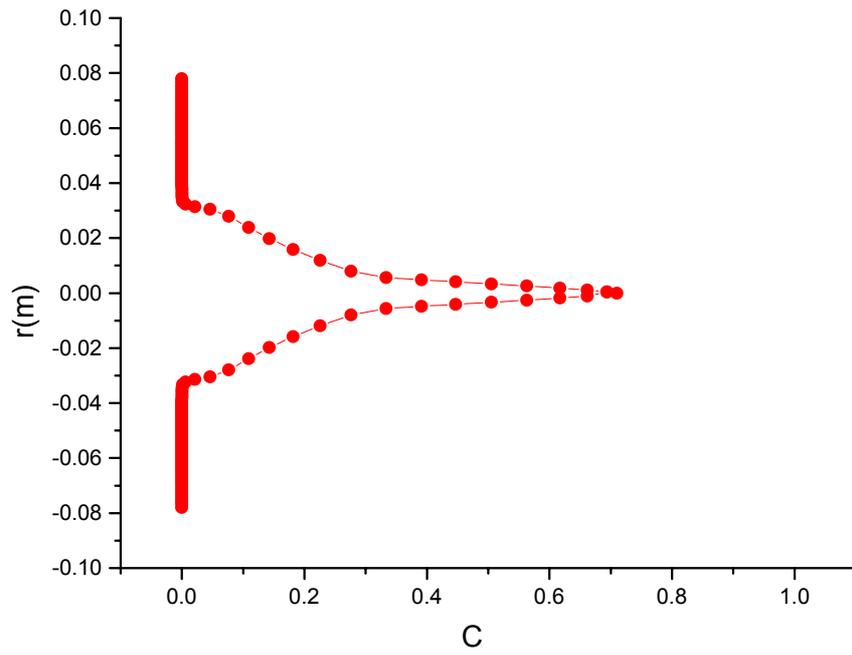


Figure 4- 33 b: profil radial de la concentration à la section  $x=0.32$  m  $Ct=0.152$  (hélium-air)

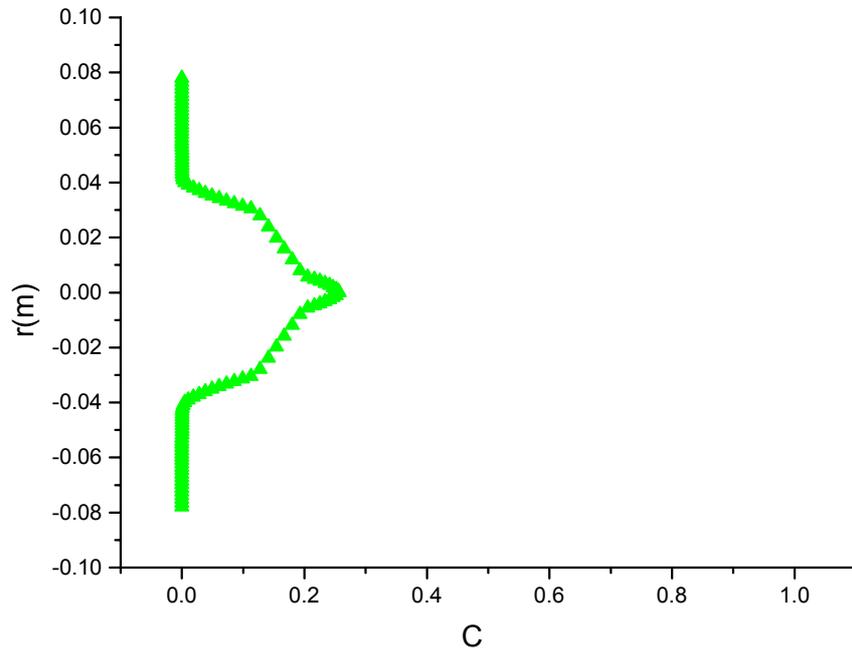


Figure 4- 33 c: profil radial de la concentration à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  (hélium-air)

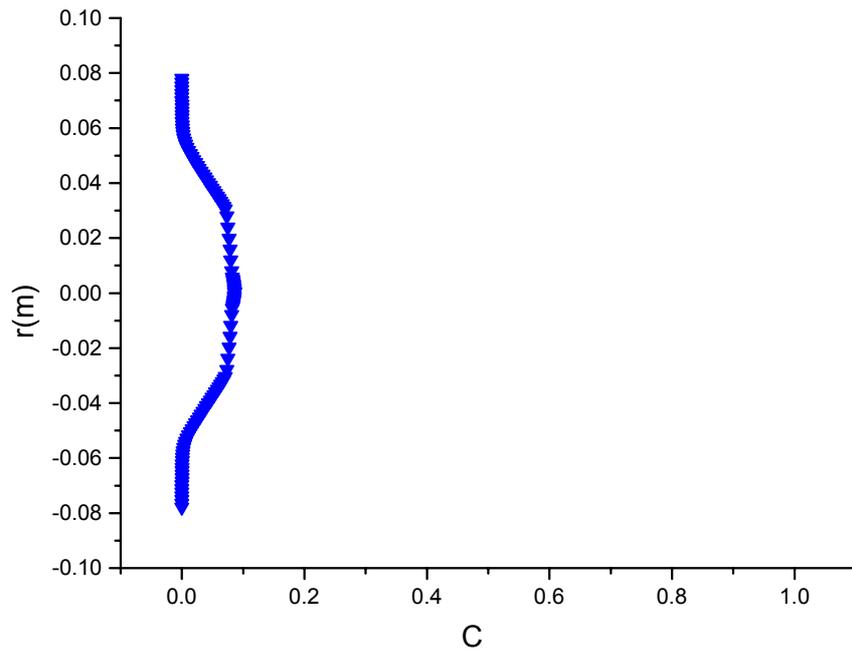


Figure 4- 33 d: profil radial de la concentration à la section  $x=0.56\text{ m}$   $Ct=0.152$  (hélium-air)

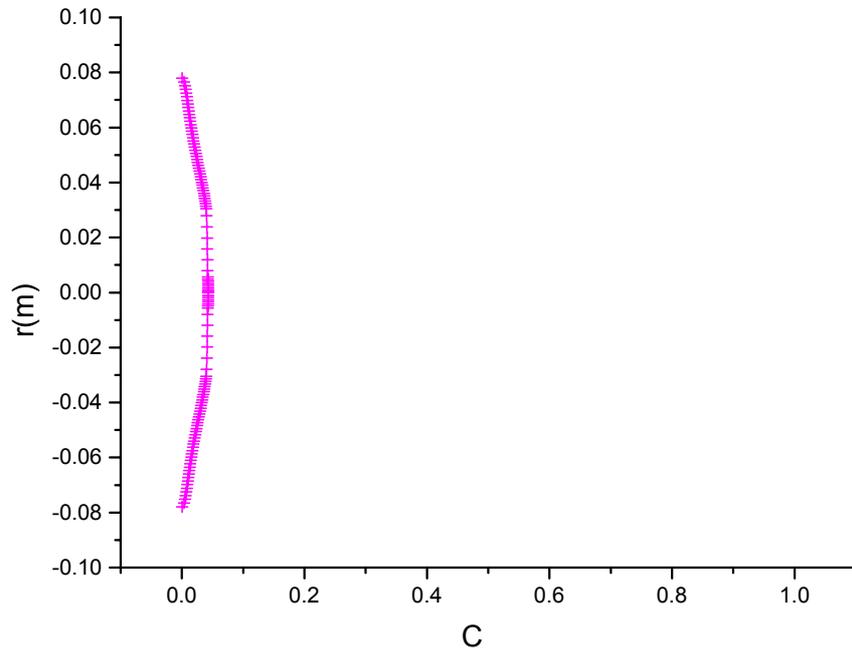


Figure 4- 33 e: profil radial de la concentration à la section  $x=0.99\text{ m}$   $Ct=0.152$  (hélium-air)

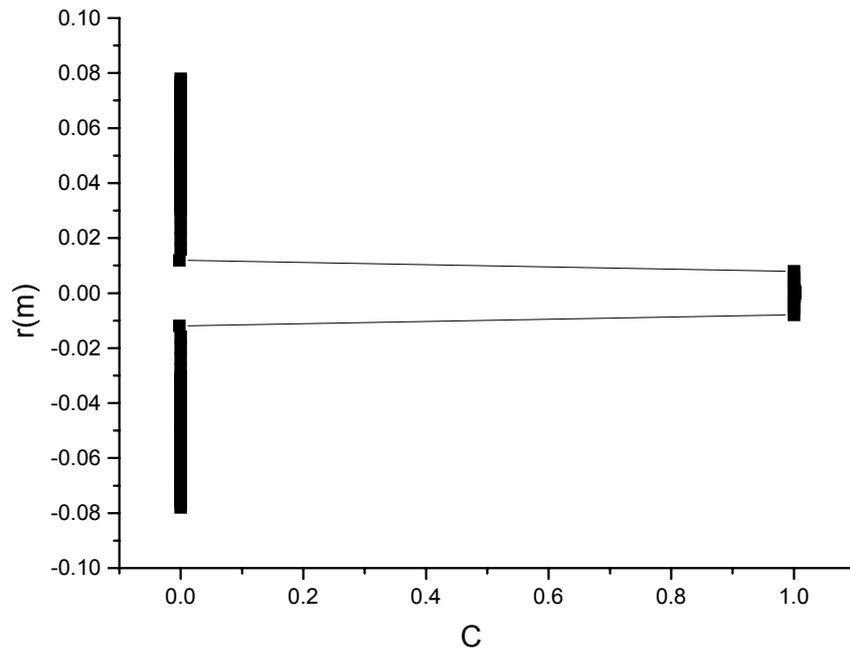


Figure 4- 34 a: profil radial de la concentration à la section  $x=0.00\text{ m}$   $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -air)

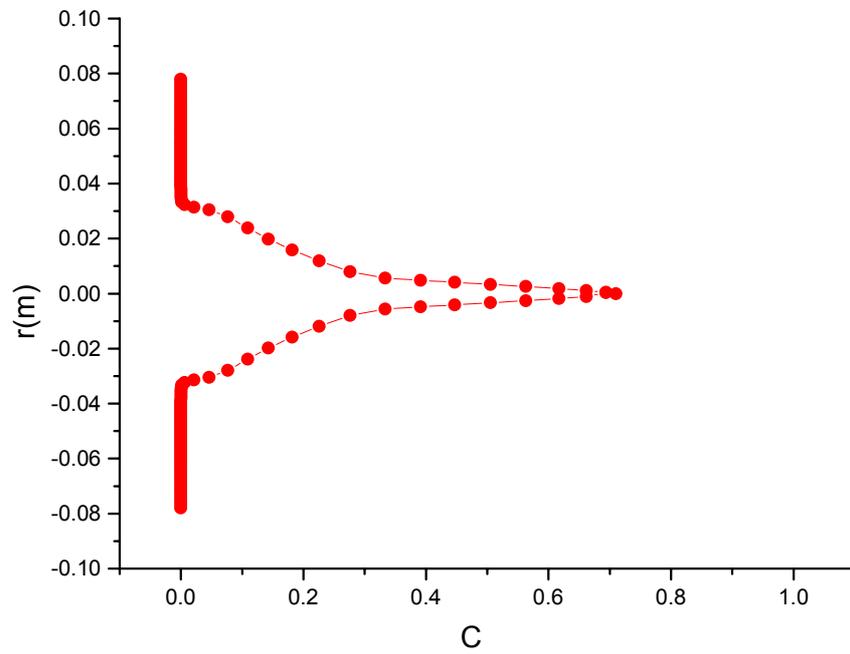


Figure 4- 34 a: profil radial de la concentration à la section  $x=0.32\text{ m}$   $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -air)

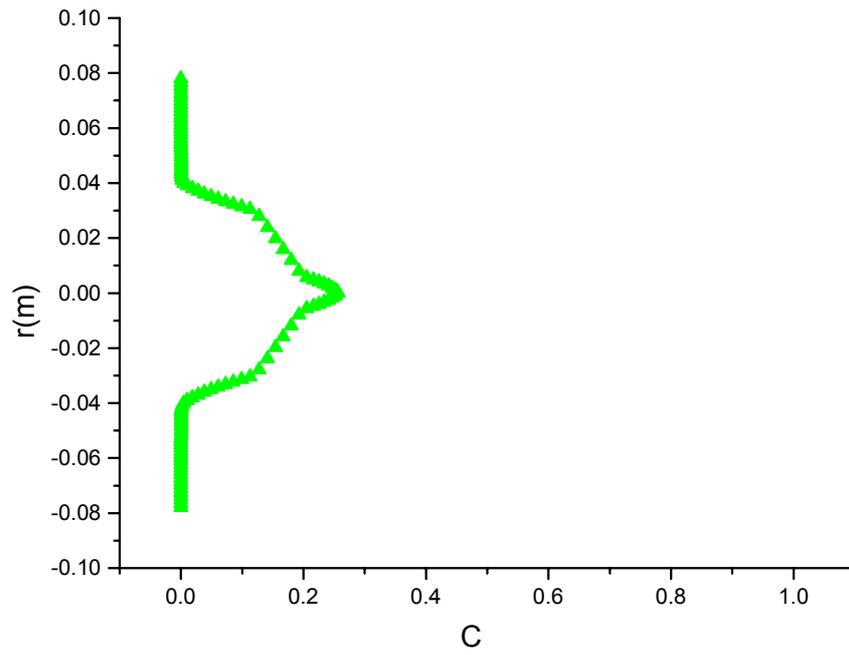


Figure 4- 34 c: profil radial de la concentration à la section  $x=0.44$  m  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -air)

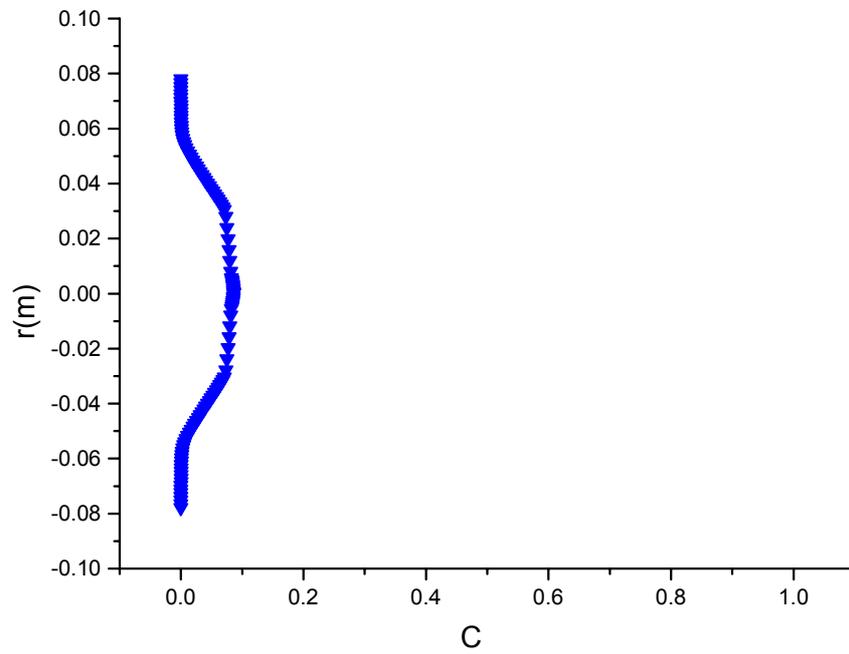


Figure 4- 34 d: profil radial de la concentration à la section  $x=0.56$  m  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -air)

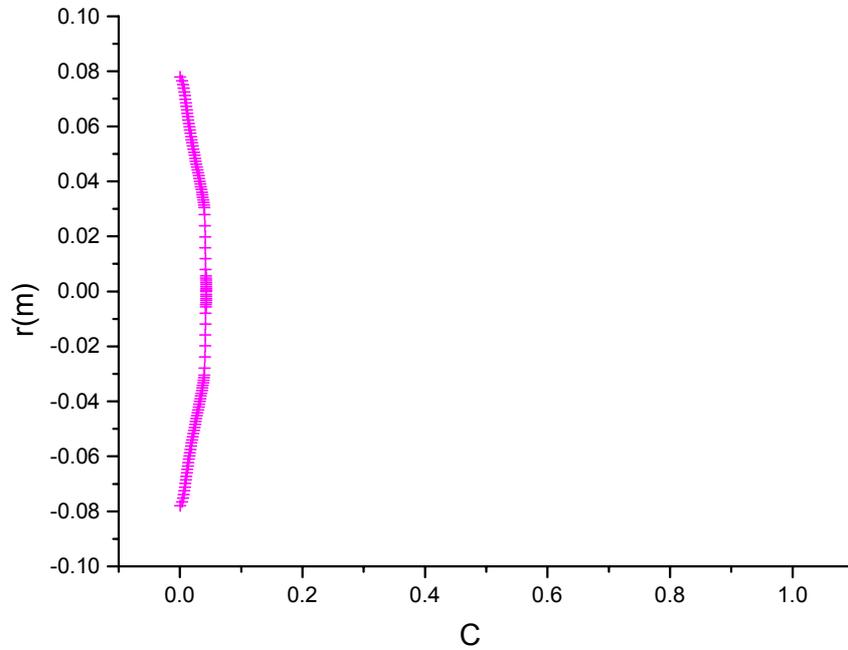


Figure 4- 34 e: profil radial de la concentration à la section  $x=0.99$  m  $Ct=0.152$  ( $CO_2$ -air)

### ***Evolution de la pression près de la paroi***

Les figures ( 4-35, 4-36, 4-37) montrent que la génération de pression est proportionnelle aux rapports de masse volumique  $\frac{\rho_j}{\rho_e}$  et de nombre de *Craya-Curtet* ( $Ct$ ) , donc l'injection d'un fluide lourd avec une vitesse plus grande dans un fluide léger à faible vitesse est plus efficace pour la génération de la pression et favorise l'apparition de la zone de recirculation.

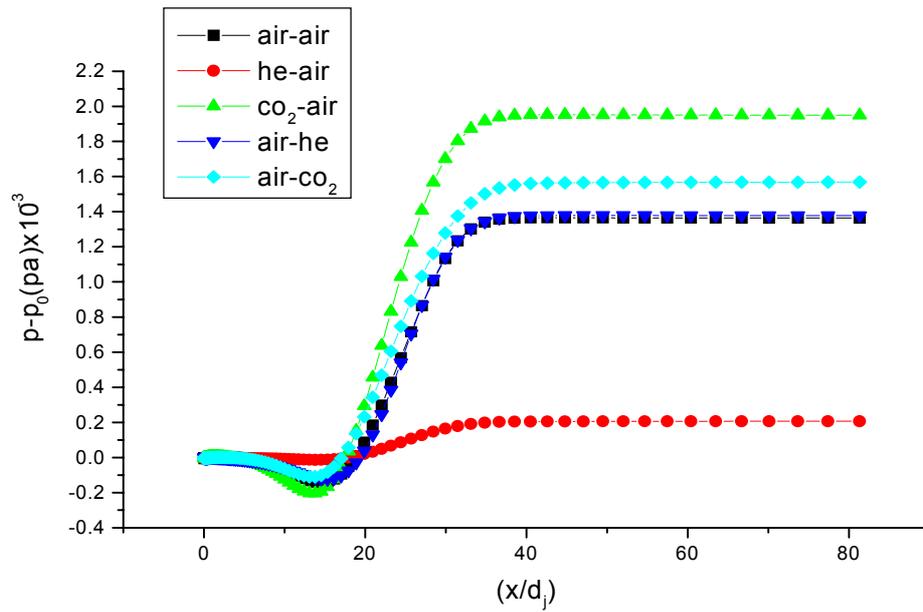


Figure 4-35 : Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.152$

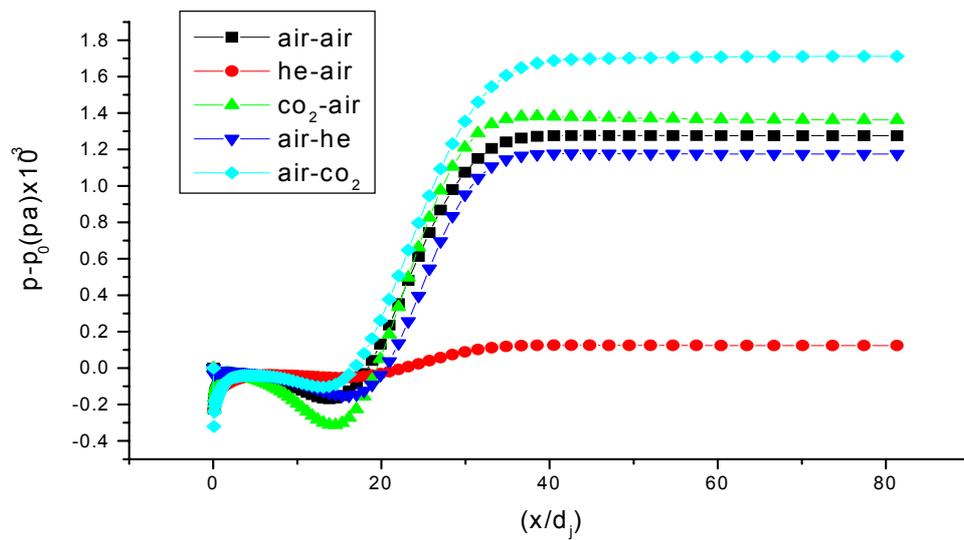


Figure 4-35 : Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.506$

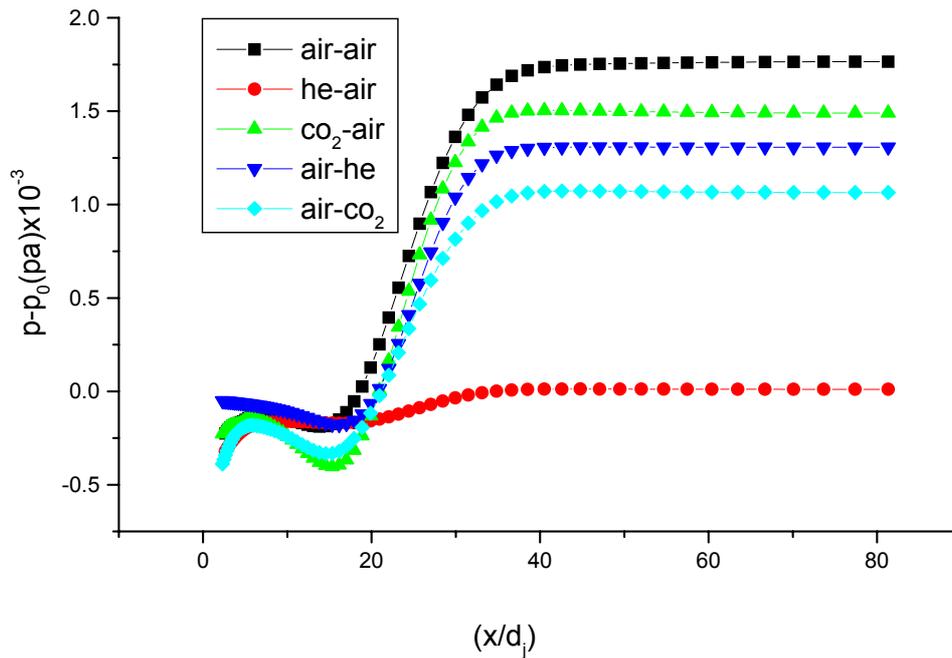


Figure 4-35 : Evolution de la pression près de la paroi pour  $Ct=0.976$

### ***Le jet turbulent vertical***

Nous exposons dans cette partie les résultats obtenus par la méthode de calcul décrite précédemment appliquée pour le cas d'un jet vertical.

Les résultats concernent d'abord la détermination du champ de vitesse pour chacun des configurations de jet :air –air,  $CO_2$ -air et He-air.

En suite, nous aborderons les résultats relatifs au champ de concentration massique moyenne en jet d'Hélium et de dioxyde de carbone. En fin nous présentons des comparaisons avec les résultats expérimentaux obtenus par *Toufik Djeridane(1994)*.

### ***Evolutions axiales***

#### ***Champ de vitesse***

Les mesures sur l'axe des jets du champ dynamique on été effectuées pour les trois gaz étudiés, pour  $x/dj=0.2$  à 40.

### ***Loi de décroissance de la vitesse longitudinale moyenne***

L'évolution de la vitesse longitudinale moyenne représentée de façon usuelle (figures 4-36,4-37) par le rapport des écart de vitesse  $(U_j-U_e)/(U_c-U_e)$  et  $(U_c/U_j)$  en

fonction de la position axiale ( $x/d_j$ ) montre une décroissance plus prononcée de  $U_c$  lorsque le rapport de densité ( $\frac{\rho_j}{\rho_e}$ ) diminue. En particulier le jet d'hélium se développe plus vite que le jet d'air dont le développement est lui-même plus rapide que le jet de dioxyde de carbone. La masse volumique ne serait pas la seule cause d'un tel effet. *Gladlick* et *Col* montrent que la décroissance axiale de la vitesse longitudinale est liée au rapport initial de vitesse ( $U_j/U_e$ ) ainsi qu'à la forme du profil de la vitesse initiale. Le nombre de *Reynolds* est aussi un paramètre à prendre en considération. En effet, *Pitts* (1991) observe une augmentation de la décroissance axiale du champ de concentration massique lorsque ( $Re_j$ ) diminue. Notons, dans notre cas, que l'ordonnement des nombres de *Reynolds* (7000 pour He, 21000 pour l'air et 32000 pour le CO<sub>2</sub>) va dans le sens de l'observation d'une diminution de développement dynamique du jet considéré lorsque le rapport de densité ( $\frac{\rho_j}{\rho_e}$ ) augmente.

L'observation des figures (4-36, 4-37) confirme que l'existence d'un co-courant et/ou un confinement retard légèrement l'épanouissement du jet. Toutefois les évolutions des jets d'air et d'hélium ne sont en aucun cas comparables. Ceci justifie la prédominance de l'effet de la masse volumique sur l'interprétation des résultats des figures (4-36,4-37). Ainsi est mise en évidence un résultat attendu : « *plus le gaz est léger, meilleur est son mélange* » .

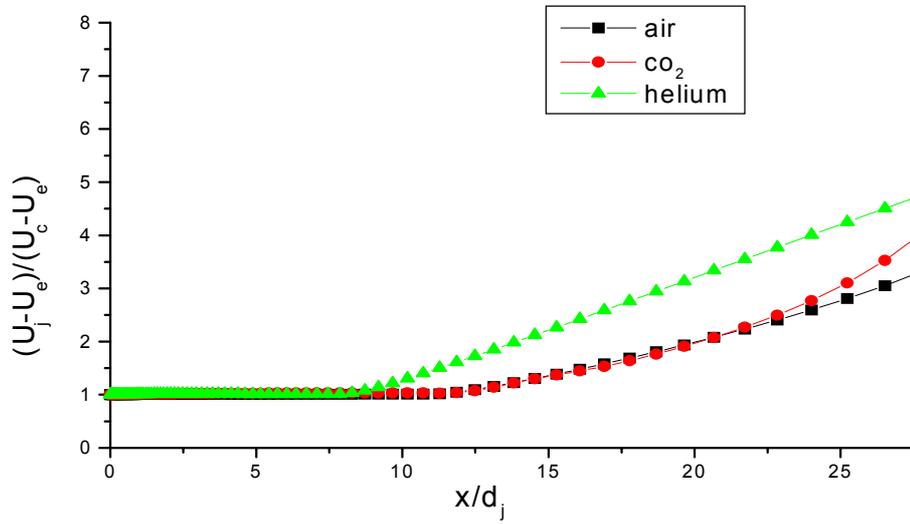


Figure 4.37 : Evolution axiale de la vitesse longitudinale exprimé par le rapport  $(U_j - U_e)/(U_c - U_e)$

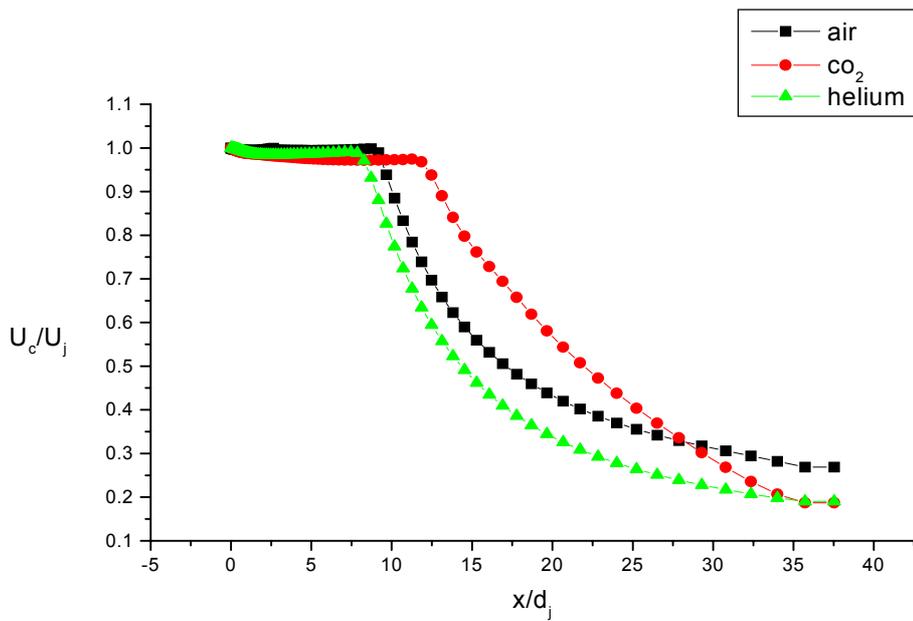


Figure 4.37: Evolution axiale de la vitesse longitudinale exprimé par le rapport  $(U_c/U_j)$

### *Écarts types et énergie cinétique de la turbulence*

La figure (4-38) représente l'évolution axiale de l'écart type des fluctuations de vitesse longitudinale rapporté à l'écart de vitesse moyenne en sortie ( $U_j - U_e$ ).. L'influence de la masse volumique est plus importante. On observe tout d'abord, dans une région initiale, une croissance suivie immédiatement, d'une décroissance, qui sont d'autant plus prononcées que le rapport de densité ( $\frac{\rho_j}{\rho_e}$ ) est faible.

Les valeurs maximales atteintes sont en position axiale différente.

Autrement dit : Comparé au jet d'air, une augmentation plus rapide de la turbulence pour le jet d'hélium et, au contraire, relativement moins rapide pour le jet de dioxyde de carbone.

Les décroissances observées dans les figures (4-38, 4-39, 4-40 ,4-41) semblent être de type hyperbolique et donc analogues aux décroissance de la vitesse longitudinale moyenne.

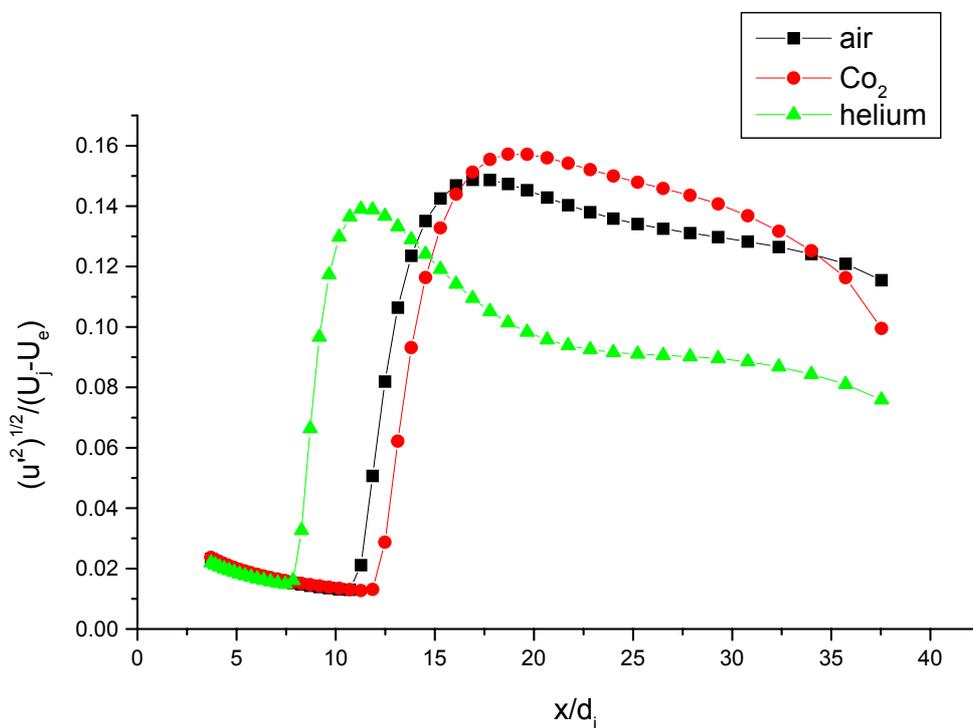


Figure 4-38-a: Evolution axiale de l'écart type des fluctuation de la vitesse longitudinale.

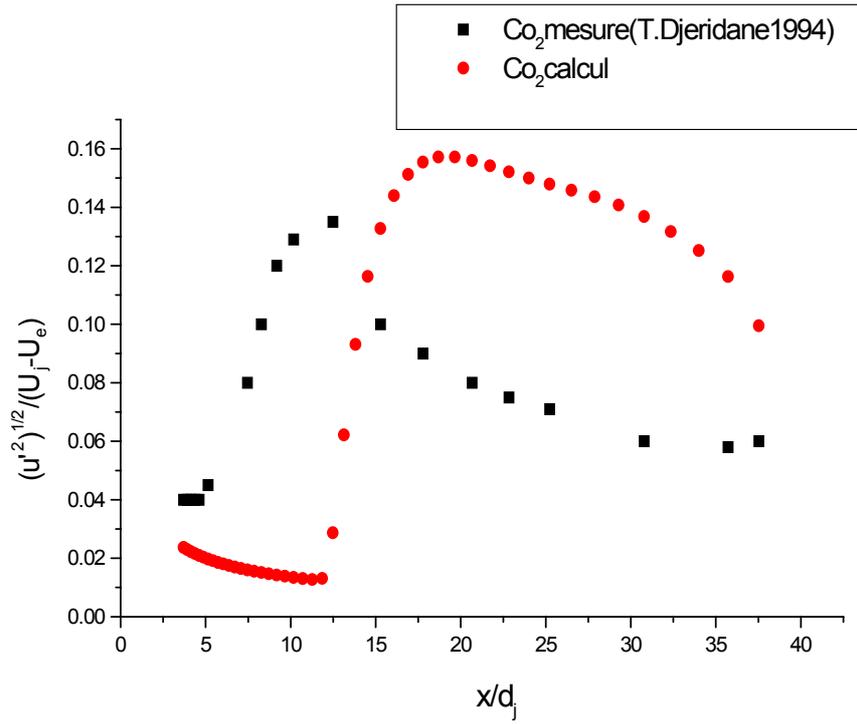


Figure 4-38-b: Evolution axiale de l'écart type des fluctuations de la vitesse longitudinale

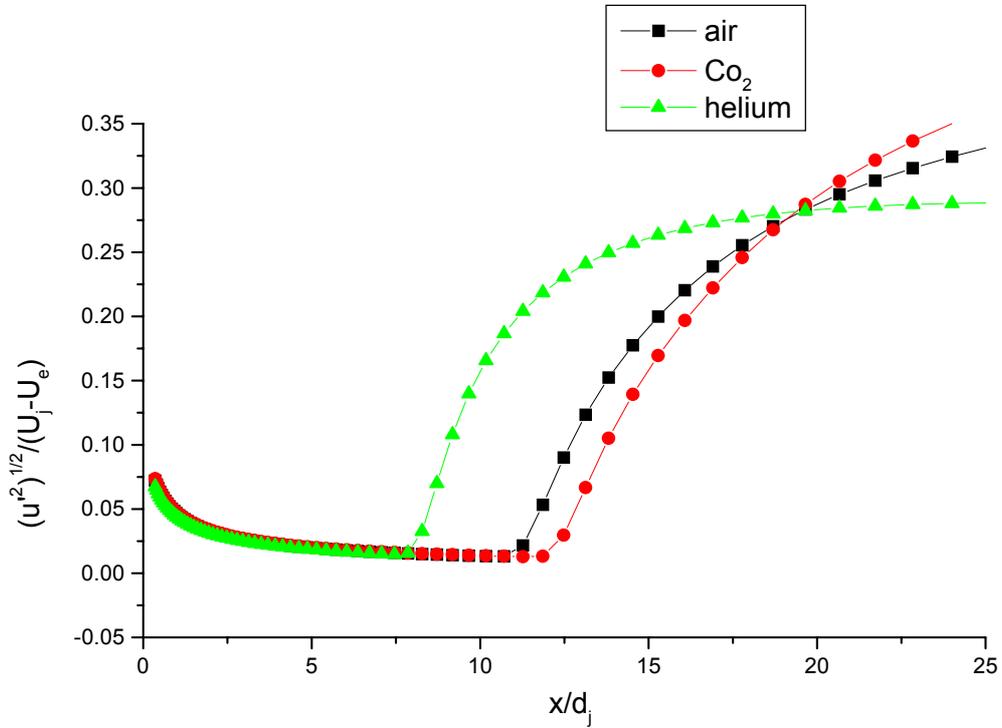


Figure 4-39: Evolution axiale de l'intensité de la turbulence longitudinale

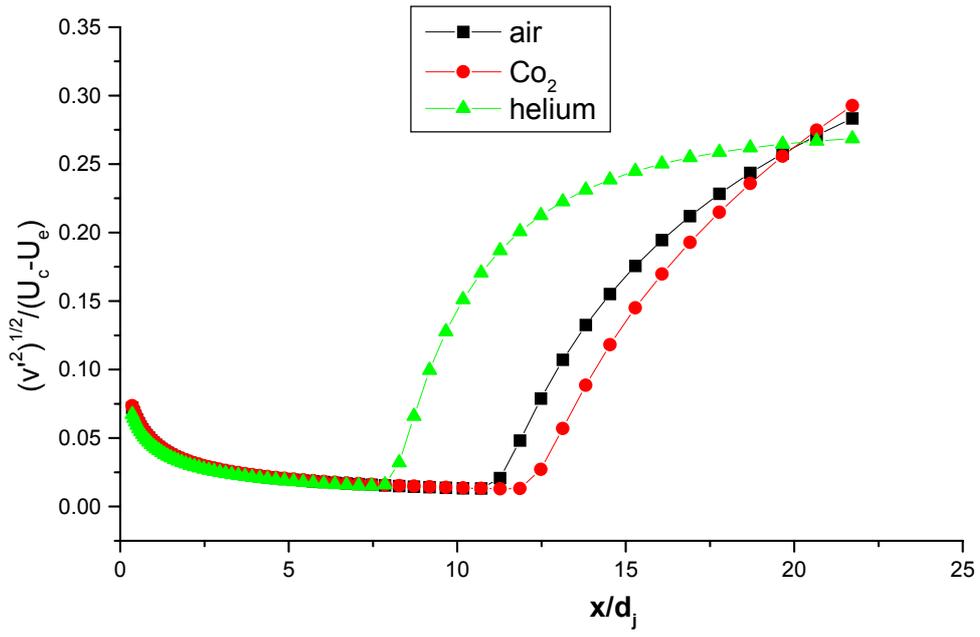


Figure 4-40: Evolution axiale de l'intensité de la turbulence radiale

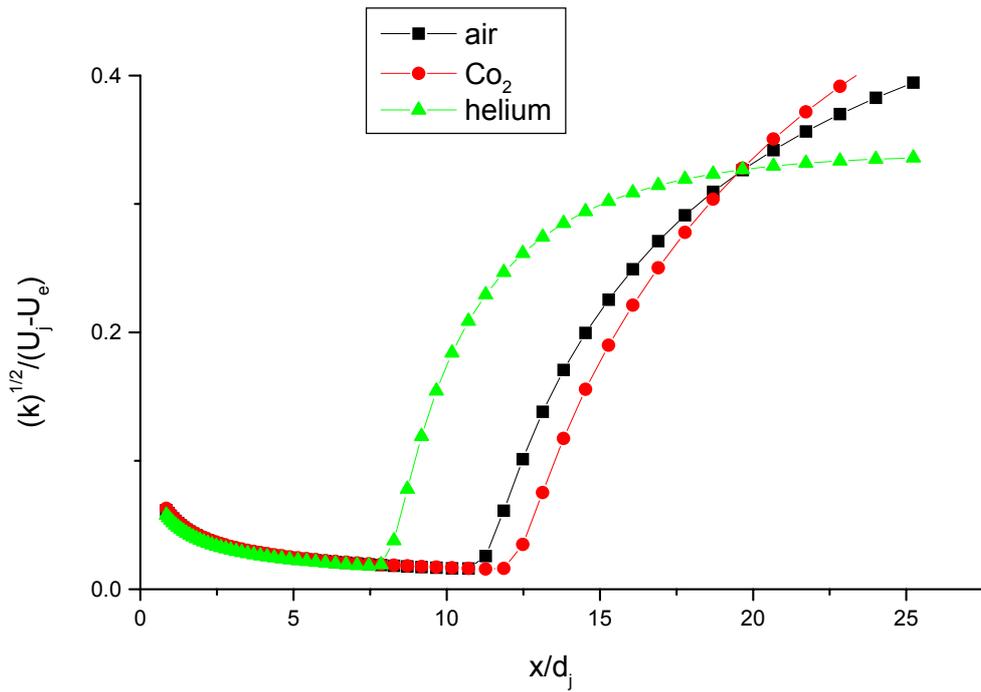


Figure 4-41 : Evolution axiale de l'énergie cinétique de la turbulence.

### Loi de décroissance de la concentration massique

La décroissance axiale de la concentration massique pour un jet verticale est représentée sur la figure (4-42). On observe un comportement analogue à celui dans le cas d'un jet horizontal et cela justifie que la fraction massique se diminue rapidement pour l'injection d'un gaz léger. Ces mesures nous permis de déterminer les évolutions de la masse volumique des jets d'hélium et de dioxyde de carbone (figure 4-43). Le développement de cette grandeur est lié au rapport initial de densité ( $\frac{\rho_j}{\rho_e}$ ). On observe une augmentation de la densité pour le jet d'hélium et, au contraire, une diminution de celle ci pour le jet de CO<sub>2</sub>. Ces résultats sont d'ailleurs, en assez bon accord avec les mesures de *Djeridane* (1994).

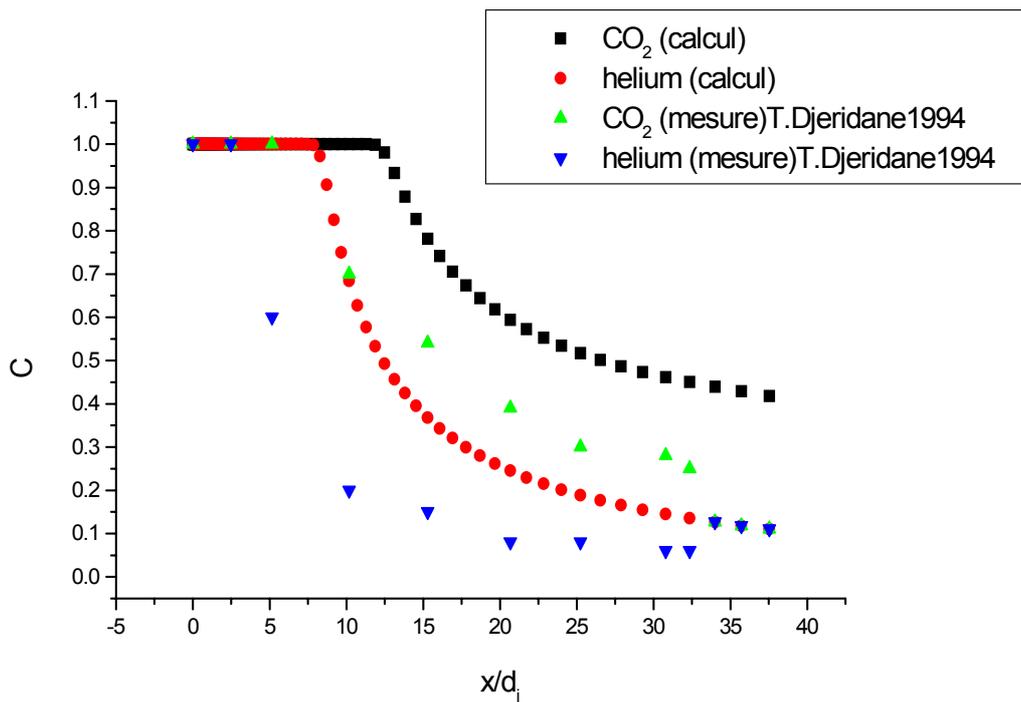


Figure 4-42 : Evolution axiale de la concentration massique.

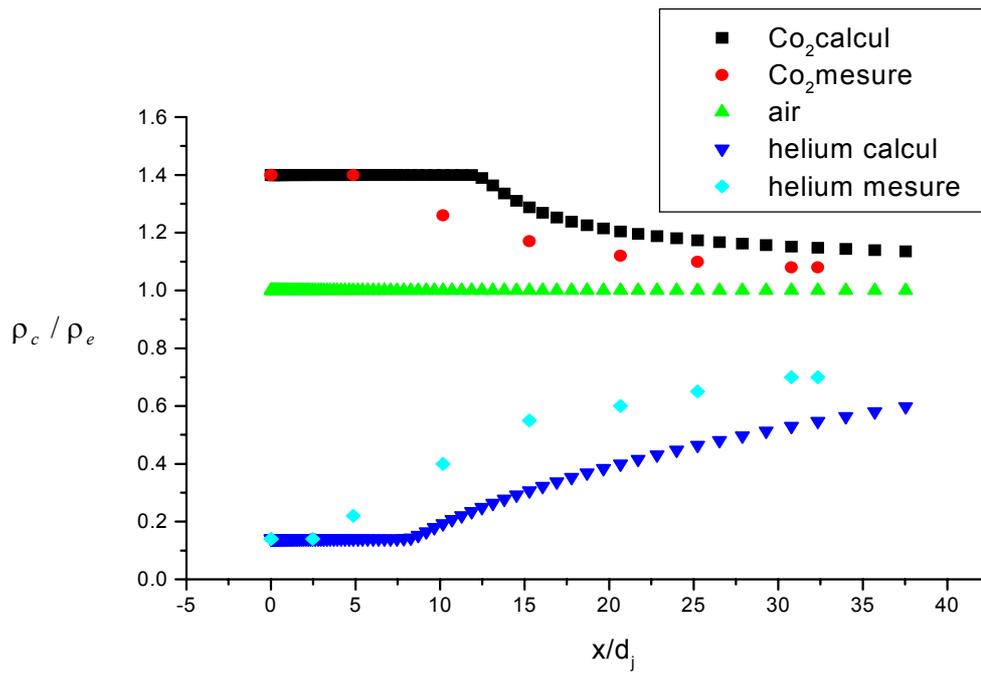


Figure 4-43 : Evolution axiale de la masse volumique.

## *Chapitre 5 : Conclusion et perspectives*

L'objectif principal de cette recherche était d'étudier de manière fine et détaillée l'influence de la variation de la masse volumique sur le développement du champ dynamique et scalaire des jets turbulents axisymétriques dans un confinement avec un co-courant.

Les paramètres les plus importants de cette étude sont, sans doute, le nombre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ), et le rapport de la masse volumique  $\frac{\rho_e}{\rho_j}$ .

Nous avons, donc étudié le développement de champ de vitesse et de concentration massique moyenne pour les différentes valeurs de nombre  $Ct$  et de  $\frac{\rho_e}{\rho_j}$ , dont on voit

l'effet de la variation de densité sur l'efficacité de mélange.

Le développement initial du champ dynamique et scalaire d'un jet turbulent à masse volumique variable est essentiellement gouverné par le rapport de densité  $\frac{\rho_e}{\rho_j}$ .

Les influences de paramètres tels que le nombre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ), le co-courant et le confinement, ne sont pas prépondérantes dans ce cas, mais elles peuvent s'avérer considérablement dans le cas d'un jet confiné laminaire ou turbulent.

Pour l'apparition de la recirculation nous observons que cette zone est relative au nombre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ), donc le rapport des deux vitesses  $\frac{U_e}{U_j}$  joue un rôle très

important dans ce phénomène.

L'influence de la variation de la densité sur l'entraînement du fluide extérieure par le jet est clairement établie dans la région initiale puisque un gaz plus léger que l'ambient dans lequel il s'épanouit, l'hélium par exemple, se mélange plus rapidement, et donc possède un entraînement plus important qu'un gaz lourd. Cette tendance est observée aussi bien pour des écoulements avec le même nombre de *Craya-Curtet* ( $Ct$ ).

La génération de pression a été estimée en fonction du nombre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ) et de rapport de masse volumique. On note un bon regroupement des résultats en

fonction de nombre de *Craya* et *Curtet* ( $Ct$ ), avec un faible influence de la variation de la masse volumique.

En conclusion, la plus part de nos résultats s'accordent sur un effet global significatif de la variation de la masse volumique : "plus le jet de gaz est léger, meilleur est son mélange".

***Perspectives :***

Deux types d'études futures se dégagent de ce mémoire sur les jets confinés avec différence de densité : Une partie fondamentale et l'autre d'application.

Parmi les premières en peut citer :

- \*l'étude expérimentale et théorique des couches de mélange
- \*la recherche d'un mélange idéale.
- \*l'étude d'un mélange réactif.

Pour l'application spécifique aux jets confinés :

- \*la réalisation de mesures simultanées de vitesse et concentration.
- \*la comparaison des résultats expérimentaux avec de résultats des simulations numériques.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- A.GHARBI ,M.AMIELH et F.ANSELMET (1995), *Experimental investigation of turbulence proprieties in the interface region of variable density jets*  
Amiricane institute of physique
- AMIELH. M,T.DJERIDANE ,F.ANSELMET et L.FULACHIRE (1995),  
*Velocity near-filde variable density turbulent jets*  
Heat mass transfer Vol 39 No 10 GB
- ANSELMET F., SCHIESTEL R., BAHRAOUI E.M., ZAHIBO I. Et FULACHIER L.,  
1988 , *Experimental investigation and turbulent flux modelling of a strongly heated turbulent jet*.Coll. Euromech 237, Marseille.
- AMIELH M ( 1989) , *Etude experimentale d'un dilueur de jet chaud*. Thèse de Doctoat, IMST, Marseille.
- ANSELMET F, ANTONIA R.A, BENABID T.ET FULACHIER L , 1990 , *Effects of wall suction on the transport of a scalar by coherent structures in a turbulent boundary layer*. *Structure of turbulence and drag reduction*, Ed. A. gyr, Springer-verlag, pp 349-336 .
- BAHRAOUI E.M 1987 , *Contribution à l'étude d'un jet turbulent axisymétrique en présence de forts gradients de temperature*. These de Doctorat s-Sciences, IMST, Marseille.
- CAMANO, E.B. ET FAVRE MARINET, M.(1994), *On the initial region of inhomogeneous coaxial jets*. *Advances in turbulence 5* , Kluwer Academic Publ., R. Benzi Ed., pp 58-62 .
- CHASSAING P. *Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre*.Thèse Docteur-\UNICODE{0xe8}s-Sciences, I.N.P. Toulouse, n°42,1979 .
- CHASSAING P. 1985 *Une alernative à la formulation des équations du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable*.J. Méc.Théo. Appl. 4 , 375-389 .
- CHASSAING P. ET CHIBAT M, 1988 , *Second order modelling of variable density mixing layer and jets*. Coll. Euromech 237, Marseille.
- CHASSAING P., 1992 , *Incidences du traitement statistique des équations ouvertes sur la modélisation au second ordre des écoulements à masse volumique variable*. Journées d'études sur les écoulements à masse volumique variable, Orl ans 14-15 Mai.
- DJERIDANE. T (1994), *Contribution à l'étude expérimental de jets turbulent axisymétrique à densité variable*.  
These de doctorat AIX-MARSEILLE II

FAVRE\ A., *Equations statistiques des gaz turbulents* (CR.Ac.Sci.,T.246, 1958 , pp. 2576 , 2723 , 2839 , 3216 ).

FAVRE\ A., *Equations des gaz turbulents compressibles. I. Formes générales* (J. de Mécanique.Vol. 4, n° 3 , 1965 , pp. 361-390 .II. Méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique (J. de mécanique,ol. 4 , 1965 , pp. 390-421

FAVRE\ A *Equations statistiques aux fluctuations turbulentes d'entropie, de concentration, de rotationnel, dans les écoulements compressibles* CR. . AcSci. T.273 , 1971 , pp. 1289-1924

FAVRE A., *Equations statistiques des fluides turbulents compresibles* Cong. Can. de Méc. Appliquée. Université New Brunswick, 1975 , pp G34

G.L.BROWN et A.ROSHKO (1974) , *On density effects and large structure in turbulent mixing layers* , Journal of fluid mech Vol 64 part 4 G B

N.CHIDAMBARAM,S.M.DACH et D.C .KENZAKOWSKI(2001) ,*Scalar variance transport in the turbulence modieling propulsive jets* journal of propulsion and power Vol 17 No 1 USA

R.K.DUGGINS (1973) , *The mixing of a parallel stream* fluide meccanic of mixing

RICOU F.P. et SPALDING., 1961 , *Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets*. J. Fluid Mech., vol.\$11\$, pp 21-32 .

SARH M (1990) , *Contribution à l'étude des jets turbulents à masse volumique variable et des flammes de diffusion turbulentes*, Thèse de Doctorat Es-Science, Univ. Paris .

SUHAS V. PATANKAR (1981), *Numerical heat transfert and fluid flow*, Mc Graw-hill- .

PITTS W.M (1991) , *Effects of global density ratio on the centreline mixing behavior of axisymmetric turbulent jets*, Exp. Fluids, vol. 11 , pp 135-141 .

PITTS W.M ( 1991) , *Reynolds number effects on the mixing behavior of axisymmetric turbulent jets*.Exp. Fluids, vol. 11 , pp. 135-141 .

**Résumé** : L'objectif de cette étude est de faire une simulation numérique d'un jet confiné turbulent axisymétrique de mélange gazeux binaire isotherme. Une procédure de prédiction d'écarts entre grandeurs statistiques au sens de Favre et grandeurs statistiques au sens de Reynolds à partir d'un modèle au second ordre basé sur la moyenne pondérée par la masse est proposée. Cette procédure utilise des relations de passage entre grandeurs statistiques, relations qui s'appuient sur l'équation d'état du mélange et qui s'expriment à l'aide de corrélations faisant intervenir la fluctuation de la fraction massique de l'un des constituants du mélange.

**Mots clés** : Jet, Mélange binaire, Favre, Reynolds.

**Abstract** : The objective of this study is to make a numeric simulation of a turbulent axisymmetric confined jet of isotherm binary gas mixture. A procedure of prediction of gaps between statistical sizes to the sense of Favre and statistical sizes to the sense of Reynolds from a model to the second order on the average pondered by the mass is proposed. This procedure uses relations of passage between statistical sizes, relations that lean on the equation of state of the mixture and that express themselves with the help of fluctuation making intervene the fluctuation of the mass fraction of one of the constituent of the mixture.

Key words: jet, binary Mixture, Favre, Reynolds.

**المُلخَص**: هدفَ هذه الدراسة هو انجاز محاكاة عددية لنفاث مضطرب متناظر محصور لخليط غازي ثنائي ذو حرارة ثابتة. وذلك مع اعتماد القيم المتوسطة الإحصائية بصيغة رينولدز و القيم المتوسطة الإحصائية بصيغة فافر المحددة بالكتلة يستعمل في هذه العمليات علاقات المرور بين القيم المتوسطة الإحصائية بصيغتيها، العلاقات التي تعتمد على معادلة حالة الخليط بمساعدة التقلبات بواسطة تدخل تقلب الكسر الجماعي لأحد عناصر الخليط.

**الكلمات الدلالية**: نفاث ، خليط غازي ثنائي، فافر، رينولدز.