

N° d'ordre : /2008/PHY

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTE DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

**MAGISTÈRE**

EN

**PHYSIQUE**

**Option : ÉNERGÉTIQUE**

PAR

**DOUAK MOHAMED**

---

**ETUDE DE LA COUCHE LIMITE  
MAGNETOHDRODYNAMIQUE NON ISOTHERME  
AUTOUR D'UN CYLINDRE**

---

*Soutenue le: 09/04/2008.*

**Devant le Jury :**

**Dr. Soudani Azeddine**  
**Dr. Aouachria Zeroual**  
**Dr. Bessaih Rachid**  
**Dr. Bougoul Saâdi**

**M.C. U. de BATNA**  
**Dr. U. de BATNA**  
**Prof. U. de CONSTANTINE**  
**M.C. U. de BATNA**

**Président**  
**Rapporteur**  
**Examineur**  
**Examineur**

**Année Universitère 2007 / 2008**

# **DEDICACE**

*Je dédie ce modeste travail à:*

*Mon père et ma mère.*

*Mes frères et ma sœur.*

*Toute ma famille.*

*Ma grand-mère Hadda*

*Mes collègues d'étude et en particulier :*

*Adèl, Mourad, .*

*Mes frères dans l'école de construction de civilisation  
en particulier : Hamza, Ridha, Adèl, Kamal, Abd-annour,*

*Abd-Annasar,...*

*Au grand penseur algérien Malek ben nabai*

*A tous ceux qui ont été à ma coté dans les moments  
difficiles .*

**Tout la promotion 2007/2008**

**MOHAMED DOUAK**

# Remerciements

*Je remercie Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant tous ces années d'étude.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Z. Aouachria Docteur d'état, pour avoir assuré la direction de ce mémoire, pour sa confiance constante et pour ses encouragements tout au long de ces trois années de travail.*

*Je remercie tout particulièrement Monsieur A.Soudani Maître de conférences et chef de département de physique, université de Batna, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Docteur S.Bougoul, Maître de conférences, université de Batna.*

*Monsieur Dr.R.Bessaih, Professeur, université de Constantine,*

*Mes remerciements vont encore à :*

*Mes collègues et amis pour leur soutien et leur aide à finaliser ce travail,*

*Enseignants, et doctorants de département de physique, pour leur soutien moral et leur accueil chaleureux,*

*Je n'oublie pas, enfin, d'exprimer ma profonde reconnaissance à :*

*Mes parents mes frères et ma sœur que Dieu les garde.*

# chapitre -1-

## **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.1 INTRODUCTION.....01

# chapitre -2-

## **ETUDE THEORIQUE**

2.1 Position du problème et Analyse mathématique.....05

2.2 Approximation des équations gouvernant le problème .....06

2.3 Gradient de pression.....11

2.3.1 Gradient de pression hydrodynamique.....11

2.3.2 Gradient de pression magnétique.....12

2.3.3 Gradient de pression total.....12

2.4 Echelles et paramètres caractéristiques de la couche limite.....13

2.4.1 Epaisseur de la couche limite.....13

2.4.2 Epaisseur de déplacement .....13

2.4.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....14

2.4.4 Facteur de forme H.....15

2.4.5 contraintes visqueuses.....15

2.4.6 force de traînée.....15

2.4.7 Décollement.....16

2.5 Changement du domaine physique.....18

2.6 Expression des caractéristiques de la couche limite dans le nouveau domaine.....20

# chapitre -3-

## RESOLUTION NUMERIQUE

3.1 Introduction.....	23
3.2 Discrétisation du domaine.....	24
3.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement pour ( $\xi = 0$ ).....	24
3.4 Discrétisation de l'équation de continuité pour ( $\xi = 0$ ).....	25
3.5 Equation d'énergie pour ( $\xi = 0$ ).....	25
3.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement pour ( $\xi \neq 0$ ).....	26
3.7 Discrétisation de l'équation de continuité pour ( $\xi \neq 0$ ).....	27
3.8 Discrétisation de l'équation d'énergie pour ( $\xi \neq 0$ ).....	27
3.9 Gradient de pression.....	30
3.9.1 Gradient de pression hydrodynamique.....	30
3.9.2 Gradient de pression magnétique.....	30
3.9.3 Gradient de pression total.....	31
3.10 Expressions discrétisées des paramètres de la couche limite.....	31
3.10.1 Epaisseur de la couche limite.....	31
3.10.2 Epaisseur de déplacement.....	31
3.10.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....	31
3.10.4 Facteur de forme H.....	32
3.10.5 contraintes visqueuses.....	32
3.10.6 force de traînée.....	32
3.10.7 Décollement.....	32
3.11 Organigramme général.....	33

# chapitre -4-

## RESULTATS ET DISCUSSION

4.1 Simulation par le logiciel FLUENT.....	38
4.2 Analyse du champ des vitesses.....	42
4.2.1 Champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite.....	42
4.2.2 Influence du $Re$ sur la vitesse pour $I=0$ .....	43
4.2.3 Influence du paramètre $I$ sur la vitesse $F$ pour $Re= 3.10^5$ .....	46
4.2.4 Influence du $Re$ sur la vitesse $F$ pour $I=1$ .....	49
4.2.5 Corrélation entre $Re$ et $I$ qui illuminant le décollement.....	51
4.2.6 Vitesse à la frontière de la couche limite.....	54
4.3 Champ de pression.....	55
4.4 Champ de température.....	58
4.4.1 Influence de Reynolds sur le profile de température ( $I=0$ ).....	58
4.4.2 Influence du champ magnétique sur le profile de température.....	60
4.4.3 Influence du Prandtl sur le profile de température.....	62
4.5 Paramètres caractéristique de la couche limite.....	64
4.5.1 Epaisseur de déplacement de la couche limite.....	64
4.5.2 Epaisseur de quantité de mouvement.....	66
4.5.3 Facteur de forme.....	68
4.5.4 Les contraintes visqueuses.....	70
4.5.4.1 Influence du champ magnétique sur les contraintes visqueuses.....	71
4.5.4.2 Influence du $Re$ sur les contraintes visqueuses.....	72
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>76</b>

## PRINCIPAUX SYMBOLES ET UNITES UTILISES

Symboles	Définitions	Unités SI
$u$	vitesse suivant la direction $x$	$m/s$
$v$	vitesse suivant la direction $y$	$m/s$
$u_e$	vitesse à la frontière de la couche limite	$m/s$
$T$	température	$K$
$x$	Coordonné spatial	$m$
$y$	Coordonné spatial	$m$
$R$	Rayon du cylindre	$m$
$B$	Champ magnétique	$T$
$P$	Pression hydrodynamique	$Pa$
$C_p$	Coefficient de portance	$W/mK$
$C_f$	Coefficient de frottement	$W/mK$
$c_p$	Chaleur massique de fluide (air)	$J/kgK$
$F$	vitesse adimensionnelle dans la direction de $\xi$	
$V$	vitesse adimensionnelle dans la direction de $\eta$	

## LES SYMBOLES GREEK

Symboles	Définitions	Unités SI
$\sigma$	La conductivité électrique	$\Omega^{-1}$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide (air)	$kg/(m.s)$
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide (air)	$m^2/s$
$\rho$	Masse volumique du fluide	$kg/m^3$
$\xi$	Coordonné longitudinal	$kg^2/m^2.s^2$
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2/s$
$\lambda$	Conductivité thermique	$W/mK$

$\delta$	Epaisseur de la couche limite	m
$\delta^*$	Epaisseur de déplacement de la couche limite	m
$\delta^{**}$	Epaisseur de quantité de mouvement	m
$\tau$	contrainte visqueuse	$N/m^2$
$\eta$	Coordonnée spatiale adimensionnelle	
$\theta$	température adimensionnelle	

### LES NOMBRES ADIMENSIONNELLES

Symboles	Définitions
$Re$	Nombre de Reynolds
$I$	Paramètre d'interaction magnétique
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Ec$	Nombre d' Eckert

**SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

**ET INTRODUCTION GENERALE**

## 1 Introduction

L'étude des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD) est d'une grande importance compte tenu des diverses applications scientifiques et industrielles qu'on peut lui associer tels que la géophysique et l'astrophysique ou encore le génie métallurgique et les futurs réacteurs de fusion. Ces écoulements sont modélisés par un couplage des équations de Maxwell et de Navier Stokes. Comme dans la dynamique des fluides, en général, les calculs et les simulations numériques sont essentiels et permettent d'avoir les prédictions des résultats ce qui est d'une grande utilité devant la complexité de la réalisation des expérimentations. Il y a là deux grands problèmes: la technologie concernant la réalisation de ce milieu magnétisé et la physique s'occupant d'étudier l'influence qui engendre sur les paramètres de l'écoulement dans un tel milieu. Physiquement, le plus intéressant de ces paramètres est le phénomène de décollement de la couche limite sur une paroi d'un corps immergé dans le fluide en écoulement.

Le contrôle de ce décollement de la couche limite, autour d'un profil, trouve des applications nombreuses et variées dans diverses configurations aéronautiques. Ceci parce qu'il a l'aptitude à retarder ou à supprimer le phénomène de décollement et conduit par conséquent à améliorer le niveau de portance, et de réduire le bruit et la traînée générés sur les engins aéronautiques. Ceux-ci représentent des enjeux économiques et technologiques évidents. De nombreuses études ont jusqu'ici été menées sur le plan expérimental pour tester l'efficacité de différents actionneurs capables de contrôler le décollement et les différents procédés d'action sont extrêmement diversifiés. Par exemple, en ce qui concerne les méthodes dites « actives » qui introduisent de l'énergie extérieure dans le fluide, on distingue l'utilisation des parois mobiles [1], des méthodes à base d'aspiration ou de soufflage [2,3], des méthodes acoustiques [4], thermiques [5] ou électromagnétiques [6], et micro jets à soufflage continu[7]. Cette liste est loin d'être exhaustive et plusieurs de ces travaux offrent des résultats excellents et des perspectives très prometteuses. Une méthode, se basant sur l'injection des forces électromagnétique dans les équations de Navier Stokes, fournit une approche de contrôle de l'écoulement. C'est le rôle des méthodes d'optimisation qui recherchent la meilleure action à appliquer au fluide, pour atteindre l'objectif de réduire efficacement les effets de décollement. Afin de réduire les coûts de calculs numériques de ces méthodes qui sont souvent prohibitifs pour des configurations complexes, une méthode consiste à approcher le système d'équations de Navier–Stokes.

Des études magnétohydrodynamique du contrôle de l'écoulement ont été réalisées dans l'armature des investigations sur la propulsion magnétohydrodynamique des bateaux. (Mengs, 1994) [8].

Les forces électromagnétiques consistent en leur règlement instantané par l'intermédiaire des courants d'électrode ou l'alimentation d'énergie en champ magnétique, qui fait cette approche en particulier il existe deux approches pour créer un courant électrique à proximité d'un corps. Au début, dans un système de conducteur, le courant alimente le fluide par l'intermédiaire d'électrodes en contact direct avec le fluide. En second lieu, dans un système d'induction, des courants sont provoqués localement, par un champ magnétique alternatif situé à l'intérieur du corps. Pour la première fois la commande de la couche limite à une paroi plane a été proposée par (Gailitis et Lieudits (1961)) [9], en utilisant les forces électromagnétiques. Le profil de la couche limite est changé suivant une exponentielle avec sa stabilité linéaire plus élevée et bien connue qui peut même mener à une réduction énergétiquement positive de la force de traînée au niveau de la paroi. Notons que cette idée n'a pas été encore considérée jusqu'ici, ni l'un ni l'autre, en termes de non stabilité linéaire du profil de couche limite ou en terme d'expérimentation. Une recherche substantielle et systématique sur des arrangements des conducteurs ont été exécutés dans le groupe de Yakovlev (Khonichev et Yakovlev, 1978[10], Shatrov et Yakovlev, 1981[11]; 1990[12], 1992; Yakovlev, 1986[13]).

Il apparaît de ces recherches que ces arrangements sont très importants dans les problèmes de commande de la couche limite sur des obstacles (Henoeh et Stace, 1995) [14], et ils trouvent leurs applications dans la commande de la turbulence sur une paroi (Nosenchuck et Brown, 1993; Crawford [15], et Karniadakis, 1997[16]), dans la commande du sillage d'un cylindre (Weier et autres, 1998b) [17], ainsi que le contrôle de la force de Lorentz (Weier et autres, 1998a) [18], et enfin de contrôler le décollement sur les profils hydrodynamiques inclinés (Weier et autres, 2003) [19].

L'application des forces de Lorentz sous forme d'une propagation d'onde donne une réduction énergétiquement positive de la force de traînée trouvée par Du et Karniadakis (2000) [20]. Sa vérification expérimentale est une tâche délicate. Dans ce système, le corps contient des enroulements produisant un champ magnétique alterné qui induit les courants électriques alternatifs en dehors du corps. Ceci mène à une distribution des forces de Lorentz à proximité du corps, et engendre une force de poussée intégrale sur le corps. Notons que dans l'armature de cet arrangement

inductif, les courants électriques et les champs magnétiques oscillent avec une certaine fréquence, mais les forces résultantes de Lorentz et de poussée ont une partie régulière qui détermine l'influence sur l'écoulement dans le cas d'une sphère, en utilisant un dipôle magnétique simple comme source de champ( Khonichev et Yakovlev (1978) [10], tandis que Shatrov et Yakovlev (1981) [11], ont utilisé une source qui fournit un champ magnétique de déplacement sur la surface de sphère. De nos jours les champs électromagnétiques sont considérés comme outil pour la propulsion du corps.

D'autres études se sont portées non seulement dans le but de réduire la force de traînée, mais elles considèrent l'équilibre énergétique, en comparant la force de traînée réduite à l'effort additionnel fourni par les forces électromagnétiques. Une telle analyse a été effectuée sur une paroi plane par Yakovlev (1986) [13], et autour d'une sphère par Shatrov et Yakovlev (1992) [21], et par Shatrov et Gerbeth (2005)[22]. Quand les forces de Lorentz, sont approximativement parallèles et dirigées dans le sens de l'écoulement à proximité de la surface du corps, elles accélèrent le fluide. Ceci mène simultanément; à une augmentation du coefficient de frottement  $C_f$  et à la variation de la distribution de pression le long de la surface de corps (Shatrov et Yakovlev, 1981 [11], 1990 [12]). Sous l'influence de ces forces, le point de décollement se décale vers l'aval du point de stagnation, et par conséquent la zone de la partie décollée se réduit et tend à se disparaître, et que les coefficients de la traînée et de la pression  $C_p$  se réduisent aussi. Le coefficient de traînée globale  $C_d = C_p + C_f$  peut être plus grand ou plus petit comparé à un  $C_d(0)$  non contrôlé[11]. Pour les sources spécifiques de champ magnétique considérées par [10,11], le coefficient de traînée global  $C_d$  était plus grand que  $C_d(0)$ , pour de petits nombres de Reynolds, il est évident qu'à de petits nombres de Reynolds, le frottement domine la force de traînée (dans l'approximation de Stokes et pour une sphère ce rapport est  $(C_f / C_d = 2 / 3)$ , mais pour les grands nombres de Reynolds ce rapport devient plus petit, et la réduction de  $C_p$  peut mener à une réduction de toute la force de traînée.

Les écoulements turbulents autour d'obstacles sont rencontrés dans de nombreuses applications industrielles. Les simulations numériques présentées dans cette étude concernent le contrôle de l'écoulement turbulent incompressible autour d'un cylindre circulaire. Cet écoulement représente un problème classique en mécanique des fluides et a été abondamment étudié expérimentalement et numériquement depuis 60 ans. La plupart des régimes de l'écoulement, qui dépendent du nombre de Reynolds, sont connus. Le régime pleinement turbulent (décollement

turbulent et disparition des allées tourbillonnaires) est atteint pour de très hauts nombres de Reynolds de l'ordre de  $5 \cdot 10^5$ . Le décollement de couche limite étant générateur de perte de portance et d'augmentation de traînée, il faut chercher à la réduire. Différentes solutions ont été apportées à ce problème, en particulier en aéronautique.

Dans ce travail on envisage la solution qui peut agir sur le fluide d'une manière à modifier son écoulement. Comment agir à distance sur les fluides ? Si dans un fluide on crée un champ magnétique  $B$ , et un courant électrique  $I$ , qui lui est perpendiculaire, alors le fluide subit une force de Laplace d'intensité et dont la direction est donnée par la règle des 3 doigts. On se propose de traiter numériquement l'étude de la couche limite magnétohydrodynamique se développant sur la paroi d'un obstacle cylindrique. Pour se démarquer de la singularité existante à l'origine de la naissance de la couche limite et de normaliser les coordonnées perpendiculaires à la paroi dans un domaine d'intégration rectangulaire, la simulation numérique de l'écoulement sera menée, en effectuant un changement de variables approprié (H.Goertler [23,24]), et (H. Shlichting [25]).

# **CHAPITRE 2**

## **Etude théorique**

## Ch. 2

### Étude théorique

#### 2.1 Position du problème et Analyse mathématique

On considère un écoulement à caractère bidimensionnel et stationnaire d'un fluide incompressible et newtonien autour d'un cylindre. On applique un champ magnétique d'intensité  $\vec{B}$  perpendiculairement au plan d'écoulement, voir la figure (2.1)

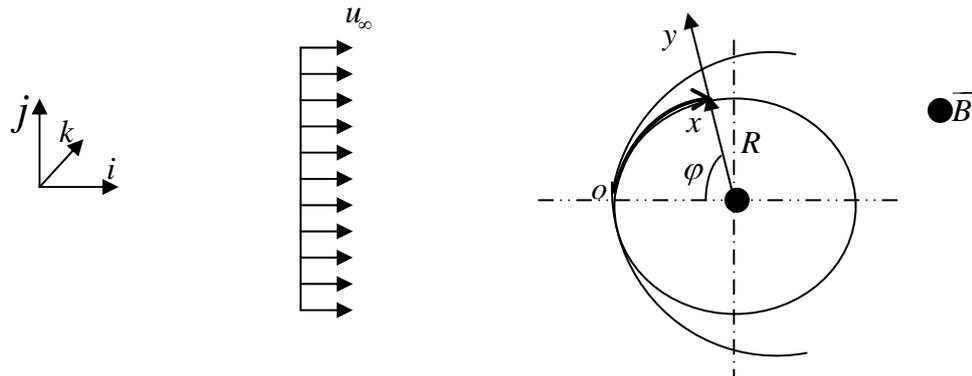


Figure 2.1 : Ecoulement autour d'un cylindre

Ce champ magnétique engendre une force électromagnétique dite de Lorentz qui vient s'ajouter dans les équations de Naviers-Stockes. Elle s'exprime par :

$$\vec{F}_{em} = \vec{J} \times \vec{B} = \sigma \left( \vec{E} + (\vec{U} \times \vec{B}) \right) \times \vec{B} \quad (2.1)$$

En fluide parfait cette force est conservative, donc elle n'a pas d'action sur les lignes du courant. En fluide réel, seul la partie  $(\vec{U} \times \vec{B}) \times \vec{B}$  n'est plus conservative, ce qui va modifier l'écoulement. Par conséquent, l'étude que nous allons développer dans notre travail consèrnera un écoulement de type couche limite (zone ou se font sentir les effets visqueux), sous l'action d'un champ magnétique. Ce champ, appliqué perpendiculairement au plan de l'écoulement, permet de modifier les lignes de courant en faisant reculer le point de décollement vers l'aval du point d'arrêt. Lorsque l'écoulement non isotherme, L'interaction du champ magnétique et thermique se débouche sur l'effet d'échauffement, en faisant augmenté la vitesse de variation du gradient de la température.

Lorsqu'on néglige l'effet joule, le champ magnétique induit, les forces de masse, et nous supposons que les propriétés physiques du fluide sont constantes, les équations gouvernant le problème s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\sigma}{\rho} (E_y - uB)B \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma}{\rho} (E_x + vB)B \\ \rho c p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma B^2 u^2 \end{array} \right.$$

(2.2)

Avec :

Les conditions initiales :

$$u(x_0, y) = u_0(y), \quad T(x_0, y) = T_0(y)$$

et les conditions aux limites :

- A la paroi :  $y = 0$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0. \quad \text{et} \quad T(x, 0) = T_p(x)$$

- A la surface de la frontière de la couche limite :  $y = \delta(x)$

$$u(x, \delta) = u_e(x). \quad \text{et} \quad T(x, \delta) = T_e(x)$$

## 2.2 Approximation des équations gouvernant le problème :

Nous allons maintenant effectuer une estimation a priori des ordres des termes qui apparaissent dans les équations du mouvement. Pour cela, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement, en définissant un certain nombre de références permettant d'adimensionnaliser les variables.

- $\delta$  : l'épaisseur de la couche limite,
- $L$  : une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement.

Nous supposerons, en outre, que la couche limite est mince et telle que  $\delta/l \ll 1$ .

Considérons à présent l'équation de continuité. Si  $U$  désigne une vitesse axiale typique et  $V$  une vitesse transversale typique, les gradients  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  peuvent être estimés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U}{l} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{V}{\delta} \tag{2.3}$$

Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, ces deux termes doivent être du même ordre de grandeur :

$$\frac{V}{\delta} \approx \frac{U}{l} \tag{2.4}$$

et dans ces conditions, l'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donné par :

$$V \approx U \frac{\delta}{l} \tag{2.5}$$

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction  $x$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma}{\rho} (E_y - uB)B \tag{2.6}$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont respectivement :

$$\begin{array}{cccccc} \frac{U^2}{l} & \frac{U^2}{l} & \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} & \nu \frac{U}{l^2} & \nu \frac{U}{\delta^2} & \frac{\sigma}{\rho} (E_y - UB)B \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array} \tag{2.7}$$

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur  $U^2/l$ . Le quatrième terme est beaucoup plus petit que le cinquième, en effet :

$$\frac{(4)}{(5)} \approx \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \ll 1 \quad (2.8)$$

On peut donc raisonnablement négliger le quatrième terme.

Les deux premiers termes et le cinquième terme doivent donc avoir le même ordre de grandeur : (1) et (2), soit :

$$\frac{U^2}{l} \approx \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (2.9)$$

Cette condition fixe le rapport de l'épaisseur  $\delta$  à la longueur  $l$  :

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \approx \frac{\nu}{Ul} = \frac{1}{\text{Re}_l} \quad (2.10)$$

Soit :

$$\delta \approx \frac{l}{(\text{Re}_l)^{1/2}} \quad (2.11)$$

Ainsi pour que le rapport  $\delta/l$  soit petit devant 1, il faut que le nombre de Reynolds basé sur la distance  $l$  soit suffisamment grand :  $\delta/l \ll 1$  si  $\text{Re}_l \gg 1$ .

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction transversale :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{\rho} (E_x + vB)B \quad (2.12)$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont :

$$U \frac{U\delta}{l^2} \quad \left(\frac{U\delta}{l}\right)^2 \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} \quad \frac{\nu U \delta}{l^2} \quad \frac{\nu U}{l\delta} \quad -\frac{\sigma}{\rho} (E_x + U \frac{\delta}{l} B)B \quad (2.13)$$

Pour que l'équilibre des termes qui composent cette équation puisse être réalisé, le gradient de pression transversal doit avoir comme ordre de grandeur :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \approx U^2 \frac{\delta}{l^2} \quad (2.14)$$

Alors que le gradient de pression longitudinal a comme ordre de grandeur :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{U^2}{l} \quad (2.15)$$

Le gradient de pression dans la direction transversale est inférieur de l'ordre de grandeur à celui qui existe dans la direction longitudinale, en effet :

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) / \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \approx \frac{\delta}{l} \ll 1 \quad (2.16)$$

Dans une couche limite, la pression ne varie pratiquement pas dans la direction transversale, et l'équation de la quantité de mouvement suivant  $y$  peut être remplacée par :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

Considérons maintenant l'écoulement externe (l'écoulement à l'extérieur de la couche limite).

Dans cette région, il n'y a pas de gradient important dans la direction transversale et l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant la direction des  $x$  devient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e(x)}{dx} = U_e \frac{dU_e(x)}{dx} - \frac{\sigma}{\rho} (E_y - U_e B) B \quad (2.18)$$

Où  $u_e$  est une fonction de  $x$  décrite par la théorie potentielle

Considérons à présent l'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho c p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma B^2 u^2 \quad (2.19)$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \rho c p U \frac{T}{L} & \rho c p U \frac{T}{L} & \lambda \frac{T}{L^2} & \lambda \frac{T}{\delta^2} & 2\mu U \left( \frac{1}{L} \right)^2 & 2\mu U \left( \frac{1}{L} \right)^2 & \mu \left[ \frac{U\delta}{L^2} + \frac{U}{\delta} \right]^2 & U \frac{\delta p}{\delta x} & v \frac{\delta p}{\delta y} & \sigma B^2 U^2 & & \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) & & \end{array} \quad (2.20)$$

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur que :  $\rho c p U \frac{T}{L}$

Le troisième terme est beaucoup plus petit que le cinquième, en effet :

$$\frac{(3)}{(4)} \approx \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (2.21)$$

On peut donc raisonnablement négliger le troisième terme devant le cinquième terme

Les termes (5) et (6) sont beaucoup plus petit  $\left( \frac{1}{L^2} \right)$

Dans le terme (7)  $\frac{U\delta}{L^2}$  est beaucoup plus petit que  $\frac{U}{\delta}$ .

$$\left( \frac{U\delta}{L^2} \right) / \frac{U}{\delta} \approx \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (2.22)$$

On peut donc raisonnablement négliger le terme  $\frac{U\delta}{L^2}$  devant le terme  $\frac{U}{\delta}$

Compte tenu de ces simplifications, on obtient les équations de Prandtl de la couche limite laminaire bidimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U_e) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{cp} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{u}{cp} \left( u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\sigma B^2}{\rho} u_e \right) + \frac{\sigma B^2}{\rho cp} u^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Avec comme condition aux limite :

- A la paroi :  $y = 0$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0. \quad \text{et} \quad T(x, 0) = T_p(x)$$

- A la surface de la couche limite :  $y = \delta(x)$

$$u(x, \delta) = u_e(x). \quad \text{et} \quad T(x, \delta) = T_e(x)$$

Pour  $u_e(x)$  qui représente la vitesse dans l'écoulement extérieur, on la choisit égale à celle de l'écoulement irrotationnel autour d'un cylindre de révolution de rayon  $R$  (H. Shlichting [24]).

$$u_e(x) = 2u_\infty \sin \varphi \quad (2.24)$$

avec :  $\varphi = \frac{x}{r}$

## 2.3 Gradient de pression

### 2.3.1 Gradient de pression hydrodynamique

De l'équation (2.18) nous obtenons

$$\text{grad}(P_{hd}) = -\rho U_e \frac{dU_e(x)}{dx} \quad (2.25)$$

Portons (2.24) dans l'équation (2.25), nous obtenons :

$$\text{grad}(P_{hd}) = -4\rho u_{\infty}^2 \sin(2\varphi) / R \quad (2.26)$$

Le gradient de pression hydrodynamique sans dimension est donné par :

$$\text{grad}(P_{hd\text{sd}}) = -8 \sin(2\varphi) / R \quad (2.27)$$

### 2.3.2 Gradient de pression magnétique

De l'équation (2.18) nous obtenons

$$\text{grad}(P_m) = -\sigma U_e B^2 \quad (2.28)$$

Le gradient de pression magnétique sans dimension est donné par :

$$\text{grad}(P_{msd}) = -2I u_{en} / u_{\infty} \quad (2.29)$$

### 2.3.3 Gradient de pression total

Le gradient de pression total donné par :

$$\text{grad}(P_T) = \text{grad}(P_{hd}) + \text{grad}(P_m) \quad (2.30)$$

Gradient de pression total sans dimension :

$$\text{grad}(P_{Tsd}) = \text{grad}(P_{hd\text{sd}}) + \text{grad}(P_{msd}) \quad (2.31)$$

Le coefficient de pression est donné par [27] :

$$Cp = 1 - 4 \sin^2(\varphi) + 4I(\cos(\varphi) - 1) \quad (2.32)$$

## 2.4 Echelles et paramètres caractéristiques de la couche limite :

La présence d'une couche limite dans l'écoulement modifie l'uniformité des débits de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. Ces modifications peuvent être décrites à l'aide des expressions de ces épaisseurs caractéristiques que nous allons maintenant définir.

### 2.4.1 Epaisseur de la couche limite :

L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  définit la dimension transversale de la couche limite. Dans une section donnée, cette épaisseur correspond à l'ordonnée du point où la vitesse axiale atteint 99% de sa valeur dans l'écoulement externe.

$$\frac{U(x, \delta)}{U_e(x)} = 0.99 \quad (2.33)$$

Cette définition permet de déterminer de façon précise la frontière de la couche limite.

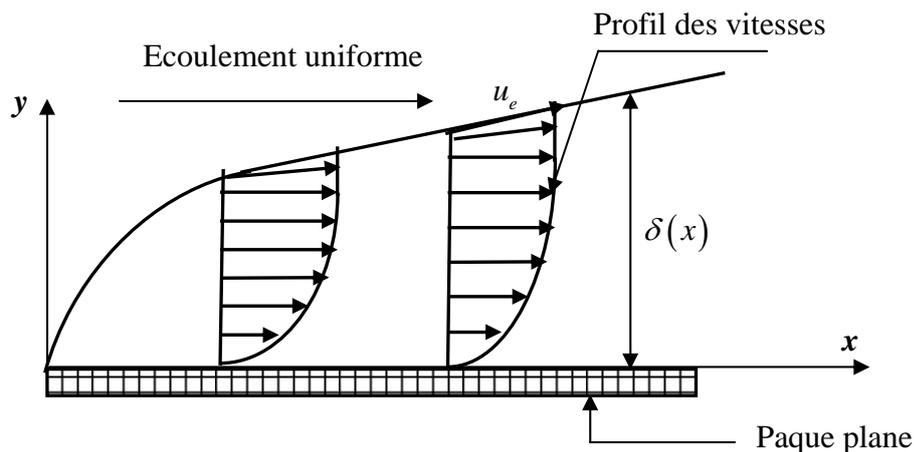


Figure 2.2. Epaisseur de la couche limite

### 2.4.2 Epaisseur de déplacement de l'épaisseur de la couche limite :

L'épaisseur de déplacement  $\delta^*$ , C'est la distance sur laquelle un écoulement de fluide parfait est déplacé par rapport à la paroi du fait du ralentissement de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite.

L'expression de  $\delta^*$  est donnée dans le cas général par :

$$\delta_* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \quad (2.34)$$

En écoulement incompressible, cette expression devient :

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy \quad (2.35)$$

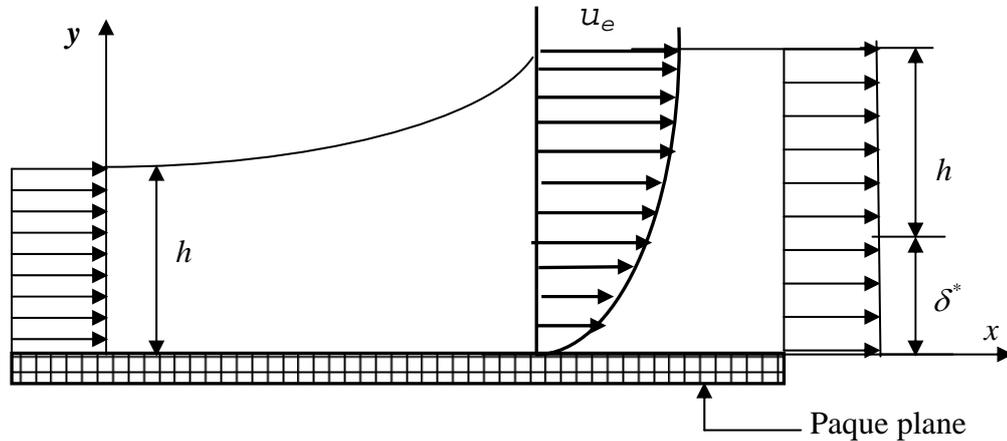


Figure 2.3. Epaisseur de la couche limite et épaisseur de déplacement

### 2.4.3 Epaisseur de quantité de mouvement

L'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta^{**}$  représente la perte de quantité de mouvement due à la couche limite, et qui est une mesure du frottement total sur la paroi.

On définit de la même façon cette épaisseur  $\delta^{**}$ , correspondant au déficit de la quantité de mouvement dans la couche limite.

On écrit, par définition :

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.36)$$

En écoulement incompressible, cette épaisseur est donnée par :

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.37)$$

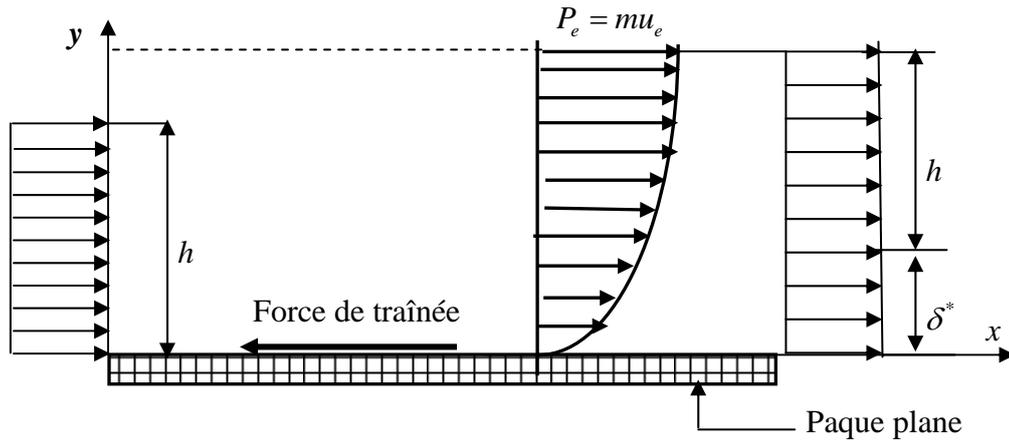


Figure 2.4 Epaisseur de quantité de mouvement

### 2.4.4 Facteur de forme H :

On définit aussi le paramètre ou facteur de forme  $H$  par :

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (2.38)$$

Cette grandeur prend des valeurs différentes selon la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la couche limite. Le facteur de forme est également influencé par le gradient longitudinal de pression en présence d'un gradient adverse  $\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$ .

### 2.4.5 contrainte visqueux

La contrainte visqueux à la paroi est donnée par :

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (2.39)$$

La contrainte visqueuse sans dimension est définie par [25]:

$$\tau_{(sd)} = \frac{2\tau\sqrt{Re}}{\rho u_\infty^2} \quad (2.40)$$

### 2.4.6 La force de traînée

La force de traîner est égale à la somme des contraintes locales et est définie par :

$$D = \int_0^l \tau_w dx \quad (2.41)$$

### 2.4.7 Décollement

Le phénomène de décollement est intimement lié au comportement dynamique de la couche limite. Il intervient lorsque la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est-à-dire dans une situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. Dans ce cas, la vitesse,  $U_e$ , de l'écoulement externe diminue les particules fluides subissent une décélération (figure 2.5). Cette décélération est encore plus importante dans la couche limite du fait des transferts de quantité de mouvement par les forces visqueuses. Dans ces conditions, la quantité de mouvement des particules fluides qui se déplacent près de la paroi est diminuée et le fluide perd son inertie et sa capacité à avancer. La quantité de mouvement du fluide diminue graduellement avec les forces de frottement pariétales, jusqu' en un certain point, où la vitesse des particules fluides s'annule.

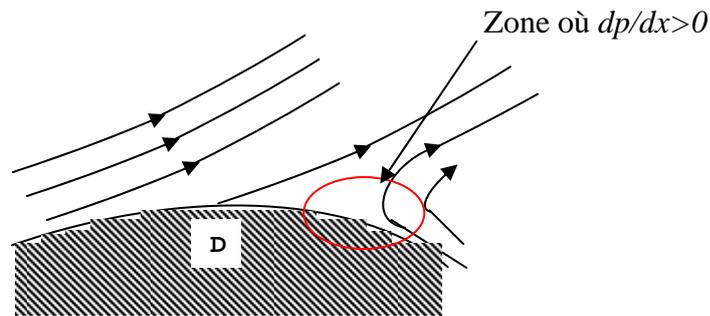


Figure 2.5 Le décollement apparaît lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse[26]

La théorie classique du décollement définit le point de décollement comme le point où  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

En ce lieu, la contrainte pariétale est :

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (2.42)$$

En aval du point de décollement, le gradient de pression induit un écoulement à contre-courant, et l'épaisseur de la couche limite augmente notablement et les filets fluides quittent la paroi (figure 2.6).

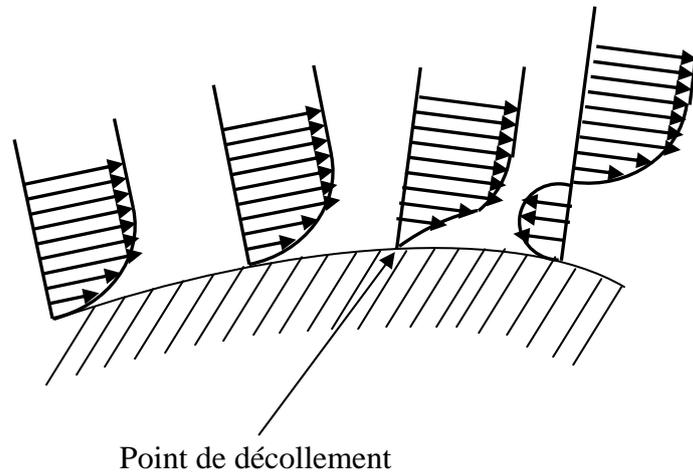


Figure 2.6 : Au point de décollement le profil de vitesse présente une tangente verticale et la contrainte pariétale s'annule. [26]

On observe alors la formation de tourbillons qui se propagent dans le sillage du cylindre et la théorie de la couche limite n'est plus valable. Le décollement, généralement, est accompagné par le développement des instabilités de l'écoulement. Très souvent des tourbillons se forment dans la région décollée. Ainsi, dans le cas d'un cylindre placé dans un écoulement uniforme, on observe pour certaines gammes de valeurs du nombre de RYNOLDS, un lâchage de tourbillons alternés (figure 2.7).

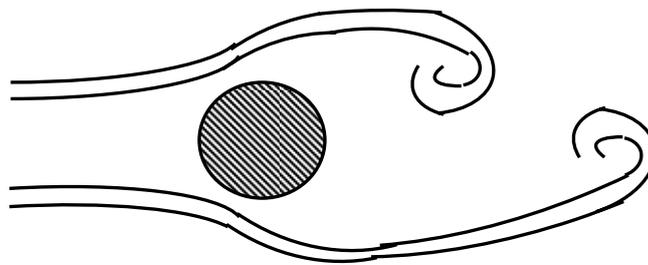


Figure 2.7 : Décollement de la couche limite sur un cylindre placé dans un écoulement uniforme. Le sillage est instationnaire et on observe sous certaines conditions un lâchage de tourbillons. [26]

2.5 Changement du domaine physique

Lorsque le domaine physique est complexe (curviligne par exemple) la résolution numérique de tels problèmes dans ces domaine est plus délicate que dans les domaines simples comme rectangulaire, D'autre part notre problème comporte une singularité au point d'arrêt de l'écoulement. Afin de contourner ces deux difficultés nous obtenons le choix de changement de variables approprié utiliser par H. Shlichting [25], qui est le suivant :

$$\xi(x) = \frac{1}{\nu} \int_0^x u_e(x) dx \quad ; \quad \eta(x, y) = \frac{u_e}{\nu \sqrt{2\xi}} y \quad (2.43)$$

$$F = \frac{u}{u_e} \quad , \quad V = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} \left( \frac{\sqrt{2\xi}}{\nu} v + 2\xi F \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad , \quad \theta = \frac{T}{T_e} \quad (2.44)$$

Avec  $[\xi] \equiv \left[ \frac{kg^2}{m^2 \cdot s^2} \right] \quad ; \quad [\eta] \equiv 1$

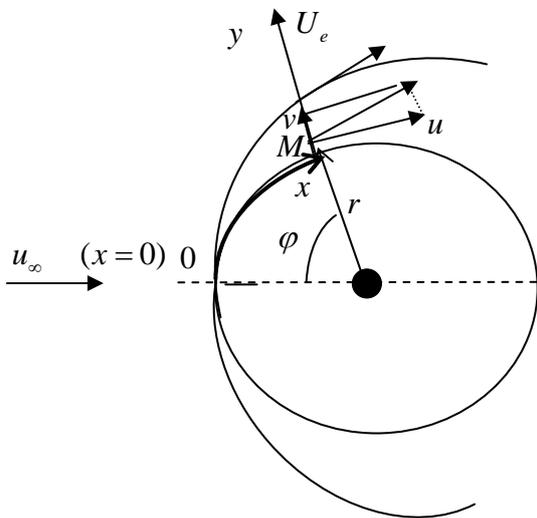


Figure 2.8 : Domaine physique

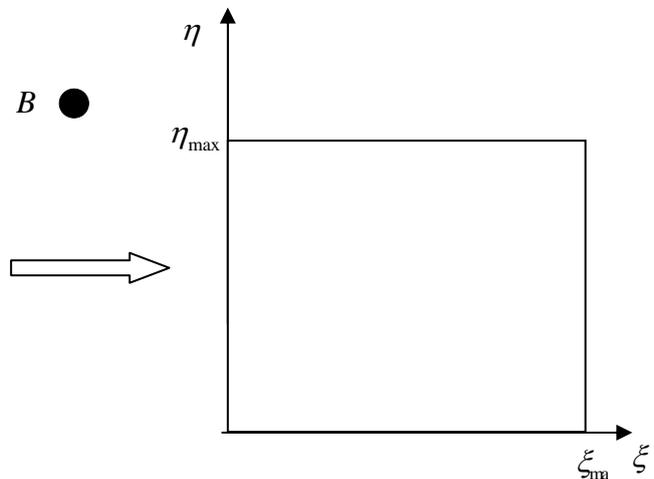


Figure 2.9 Domaine transformé

Donc les équations (2.23) s'écrivent en fonction de ces nouvelles variables sous la forme suivante

Le système général s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{u_e^2}{\nu} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{u_e^2}{2\xi\nu} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \left( \frac{2u_\infty}{r} - \frac{\nu\xi}{2r^2} \right) F = 0 \\ \frac{u_e^2}{\nu} F \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{u_e^2}{2\xi\nu} V \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{u_e^2}{2\xi\nu} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{u_e}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} (F^2 - 1) - \frac{\sigma B^2}{\rho} (F - 1) = 0 \\ \frac{u_e^2}{\nu} F \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{u_e^2}{2\xi\nu} V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \alpha \frac{u_e^2}{2\xi\nu^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \frac{u_e^4}{2\nu c p \xi T_e} \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{F u_e^3}{\nu c p T_e} \frac{du_e}{d\xi} + \frac{\sigma B^2 u_e^2}{\rho c p T_e} (F^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Ce système se compose de deux parties :

a- les points de l'écoulement intérieurs de la couche limite pour ( $\xi \neq 0$ ).

$$\begin{cases} 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + F = 0 \\ 2\xi F \frac{\partial F}{\partial \xi} + V \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \beta_\xi (F^2 - 1) - \frac{I}{k} (F - 1) = 0 \\ 2\xi F \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - Ec(m \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + 2\gamma - \gamma I (F^2 - 1)) = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

b- pour le point d'arrêt ( $\xi = 0, u_e = 0$ ) qui correspondent à [ $\xi = 0, \eta \in (0, \eta_{\max})$ ].

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\eta} + F = 0 \\ V \frac{dF}{d\eta} - \frac{d^2 F}{d\eta^2} + (F^2 - 1) - \frac{1}{2} I (F - 1) = 0 \\ V \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{1}{Pr} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{u_e^2}{2\nu\xi} \right) = \frac{2u_\infty}{r} \neq 0$$

avec les conditions aux limites :

$$F(\xi, 0) = 0 \quad , \quad V(\xi, 0) = 0 \quad , \quad \theta(\xi, 0) = \theta_p$$

$$F(\xi, \eta_e) = 1 \quad , \quad V(\xi, \eta_e) = 0 \quad , \quad \theta(\xi, \eta_e) = 1$$

Où les paramètres intervenant dans le système général (2.28) sont définis par :

$$\beta_\xi = \frac{2\xi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} = \frac{2 \cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)}$$

$$\gamma = 4(1 - \cos(\varphi))$$

$$k = 1 + \cos(\varphi)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad ; \quad \text{Ec} = \frac{u_\infty^2}{c_p T_e} \quad ; \quad I = \frac{\sigma B^2 R}{\rho u_\infty}$$

## 2.6 Expression des caractéristiques de la couche limite dans le nouveau domaine :

L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  correspond à l'ordonnée du point où :

$$F(\xi, \eta) \cong 0.99$$

L'expression de  $\delta^*$  dans le nouveau domaine est donnée par :

$$\delta^* = \frac{\nu \sqrt{2\xi}}{u_e} \left( \eta_e - \int_0^{\eta_e} F d\eta \right) \quad (2.48)$$

L'introduction des nouvelles variables dans l'équation (2.35) conduit à :

$$\delta^{**} = \int_0^{\eta_e} (F - F^2) \frac{\nu \sqrt{2\xi}}{u_e} d\eta \quad (2.49)$$

Donc l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta^{**}$  est donnée par :

$$\delta^{**} = \frac{\nu\sqrt{2\xi}}{u_e} \left[ \int_0^{\eta_e} F d\eta - \int_0^{\eta_e} F^2 d\eta \right] \quad (2.50)$$

Le facteur de forme, H, désigne le rapport de l'épaisseur  $\delta^*$ , et l'épaisseur  $\delta^{**}$  :

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (2.51)$$

L'introduction des nouvelles variables dans l'équation (2.38), nous donnons :

$$\tau = \frac{\rho u_e^2}{\sqrt{2\xi}} \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (2.52)$$

La contrainte visqueuse sans dimension est définie par:

$$\tau_{(sd)} = \frac{2\tau\sqrt{Re}}{\rho u_\infty^2} \quad (2.53)$$

La force de traînée s'écrit en fonction des nouvelles variables par :

$$D = \int_0^l \frac{\nu}{u_e} \tau_w d\xi \quad (2.54)$$

Donc l'équation (2.41) devient :

$$D = \int_0^\pi 2R\tau \sin(\varphi) d\varphi \quad (2.55)$$

Le point de décollement est défini en fonction des nouvelles variables par la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = 0 \quad (2.56)$$

En ce point, la contrainte visqueuse est nulle.

$$\tau_w = \frac{\rho u_e^2}{\sqrt{2\xi}} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = 0 \quad (2.57)$$

# **CHAPITRE 3**

## **Résolution numérique**

## Ch. 3

### Résolution numérique

#### 3.1 Introduction

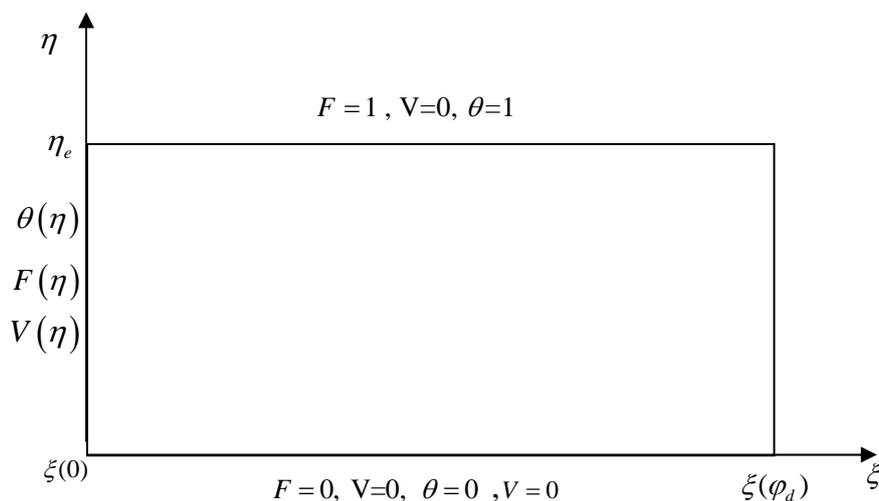
Le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques est régi par des équations aux dérivées partielles. L'étude de ces systèmes nécessite donc la résolution de ces équations.

Il existe plusieurs méthodes de résolution de ces équations : Méthodes analytiques et méthodes numériques telles que la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis, etc...

Dans ce travail nous avons opté pour la méthode des différences finies. Elle a fait ses preuves dans différents domaines de Physique : mécanique des fluides, transfert thermique, électromagnétisme, etc. Elle s'applique aux problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires.

Dans ce chapitre, nous utiliserons la méthode des différences finies pour résoudre un problème aux limites bidimensionnelles pour déterminer les paramètres caractéristiques de la couche limite autour d'un obstacle cylindrique

les conditions aux limites de notre problème sont mentionnées sur le schéma du domaine d'étude ( figure 3.1)



**Figure 3.1** : Domaine d'étude

### 3.2 Discrétisation du domaine

Le domaine rectangulaire de notre étude est découpé en  $N \times M$  carrés de cotés  $\Delta\xi$ , et  $\Delta\eta$ .

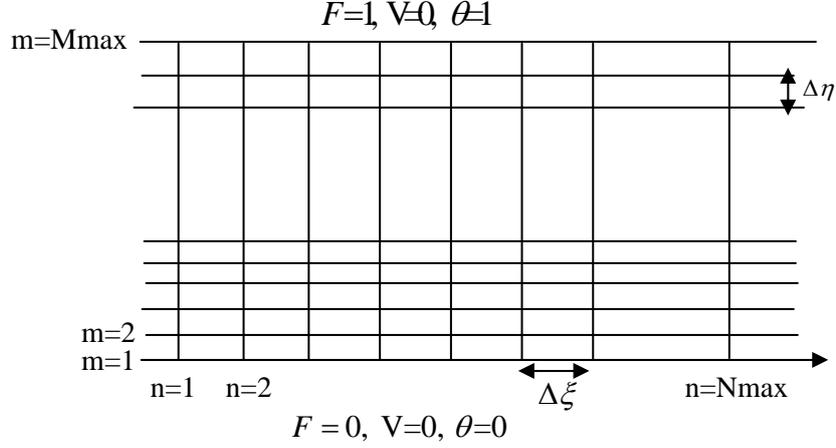


Figure 3.2 : Maillage du domaine d'étude

### 3.3 L'équation de quantité de mouvement pour ( $\xi = 0$ ) :

Discretisons l'équation (2.71), nous obtenons :

Pour  $\xi = 0 \Rightarrow F = F(\eta)$

$$V_m \frac{F_{(m+1)} - F_{(m-1)}}{2\Delta\eta} + (F_m^2 - 1) - \frac{1}{2} I (F_m - 1) = \frac{F_{(m+1)} - 2F_m + F_{(m-1)}}{\Delta\eta^2} \quad (3.1)$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$F_m = (b_s F_{(m-1)} + b_n F_{(m+1)} + Sb) / b_p \quad (3.2)$$

Avec :

$$b_s = -\left( \frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{V_m}{2\Delta\eta} \right)$$

$$b_n = \left( -\frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{V_m}{2\Delta\eta} \right)$$

$$b_p = b_n + b_s$$

$$Sb = \left( (F_m^2 - 1) - \frac{1}{2} I (F_m - 1) \right)$$

Avec les conditions aux limites :

$$F(1) = 0 \quad ; \quad F(\eta_e) = 1 \tag{3.3}$$

### 3.4 Equation de continuité pour ( $\xi = 0$ )

Discretisons l'équation (2.63), nous obtenons :

$$\frac{V_{(m+1)} - V_m}{\Delta\eta} + F_m = 0 \tag{3.4}$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$V_{(m+1)} = V_m - \Delta\eta F_m \tag{3.5}$$

Avec les conditions aux limites :

$$V(1) = 0 \quad ; \quad V(\eta_e) = 0 \tag{3.6}$$

### 3.5 L'équation d'énergie pour ( $\xi = 0$ )

Pour ( $\xi = 0$ ) on a  $\theta = \theta(\eta)$

$$V_m \frac{\theta_{m+1} - \theta_{m-1}}{2\Delta\eta} - \frac{1}{Pr} \frac{\theta_{m+1} - 2\theta_m + \theta_{m-1}}{\Delta\eta^2} = 0 \tag{3.7}$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$\theta_m = (c_n \theta_{m+1} + c_s \theta_{m-1} + Sc) / c_p \tag{3.8}$$

Où :

$$c_n = \left( -\frac{1}{\text{Pr} \Delta \eta^2} + \frac{V_m}{2\Delta \eta} \right)$$

$$c_s = -\left( -\frac{1}{\text{Pr} \Delta \eta^2} - \frac{V_m}{2\Delta \eta} \right)$$

$$C_p = C_n + C_s$$

$$Sc = 0$$

Avec les conditions aux limites :

$$\theta(1) = 0 \quad ; \quad \theta(\eta_e) = 1 \quad (3.9)$$

Pour résoudre les systèmes d'équations algébriques (3.2), (3.8) on utilise la méthode itérative de Jacobi

### 3.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement pour ( $\xi \neq 0$ ) :

Discretisons l'équation (2.66), nous obtenons :

$$2\xi_{n+1} F_{nm} \frac{F_{(n+1)m} - F_{nm}}{\Delta \xi} + V_{nm} \frac{F_{(n+1)(m+1)} - F_{(n+1)(m-1)}}{2\Delta \eta} - \frac{F_{(n+1)(m-1)} - 2F_{(n+1)m} + F_{(n+1)(m+1)}}{\Delta \eta^2} + \beta_{n+1} (F_{nm} F_{(n+1)m} - 1) = 0 \quad (3.10)$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$a_{nm} F_{(n+1)(m-1)} + b_{nm} F_{(n+1)m} + c_{nm} F_{(n+1)(m+1)} = d_{nm} \quad (3.11)$$

Les coefficients de cette équation sont exprimés comme suit :

$$a_{nm} = -\left( \frac{1}{\Delta \eta^2} + \frac{V_{nm}}{2\Delta \eta} \right)$$

$$b_{nm} = \frac{2}{\Delta\eta^2} - \beta_{n+1}F_{nm} + \frac{2\xi_{n+1}}{\Delta\xi}F_{nm}$$

$$c_{nm} = \left( -\frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{V_{nm}}{2\Delta\eta} \right)$$

$$d_{nm} = -\beta_{n+1} + \frac{2\xi_{n+1}}{\Delta\xi}F_{nm}^2$$

Avec les conditions aux limites :

$$F(\xi_{n+1}, 1) = 0 \quad ; \quad F(\xi_{n+1}, \eta_e) = 1 \quad (3.12)$$

### 3.7 Discrétisation de l'équation de continuité pour ( $\xi \neq 0$ ) :

Discrétisons l'équation (2.61), nous obtenons :

$$2\xi_{n+1} \frac{F_{(n+1)m} - F_{nm}}{\Delta\xi} + \frac{V_{(n+1)(m+1)} - V_{(n+1)m}}{\Delta\eta} + F_{nm} = 0 \quad (3.14)$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$V_{(n+1)(m+1)} = 2\xi_{n+1} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} (F_{nm} - F_{(n+1)m}) + V_{(n+1)m} - \Delta\eta F_{nm} \quad (3.15)$$

Avec les conditions aux limites :

$$V(\xi_{n+1}, 1) = 0 \quad ; \quad V(\xi_{n+1}, \eta_e) = 0 \quad (3.16)$$

### 3.8 Discrétisation de l'équation d'énergie pour ( $\xi \neq 0$ ) :

Discrétisons l'équation (2.63), nous obtenons :

$$2\xi_{n+1}F_{(n+1)m} \frac{\theta_{(n+1)m} - \theta_{nm}}{\Delta\xi} + V_{(n+1)m} \frac{\theta_{(n+1)(m+1)} - \theta_{(n+1)(m-1)}}{2\Delta\eta} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\theta_{(n+1)(m-1)} - 2\theta_{(n+1)m} + \theta_{(n+1)(m+1)}}{\Delta\eta^2} - Ec \left[ h_{n+1} \left( \frac{F_{(n+1)(m+1)} - F_{(n+1)m}}{\Delta\eta} \right)^2 + 2K_{n+1} - K_{n+1}I(F^2 - 1) \right] = 0 \quad (3.17)$$

Après réarrangement des différents facteurs, nous aurons :

$$a_{nm}\theta_{(n+1)(m-1)} + b_{nm}\theta_{(n+1)m} + c_{nm}\theta_{(n+1)(m+1)} = d_{nm} \quad (3.18)$$

Avec :

$$a_{nm} = - \left( -\frac{1}{\text{Pr} \Delta\eta^2} - \frac{V_{(n+1)m}}{2\Delta\eta} \right)$$

$$b_{nm} = \frac{2\xi_{n+1}}{\Delta\xi} F_{(n+1)m} + \frac{2}{\text{Pr} \Delta\eta^2}$$

$$c_{nm} = \left( -\frac{1}{\text{Pr} \Delta\eta^2} + \frac{V_{(n+1)m}}{2\Delta\eta} \right)$$

$$d_{nm} = \frac{2\xi_{n+1}}{\Delta\xi} F_{(n+1)m} + Ec \left[ h_{n+1} \left( \frac{F_{(n+1)(m+1)} - F_{(n+1)m}}{\Delta\eta} \right)^2 + 2K_{n+1} - K_{n+1}I(F^2 - 1) \right]$$

Avec les conditions aux limites :

$$\theta(\xi_{n+1}, 1) = 0 \quad ; \quad \theta(\xi_{n+1}, \eta_e) = 1 \quad (3.19)$$

Les équations (3.11) et (3.18) peuvent être écrites sous une forme commune. Cette formulation permet de ne pas réitérer le travail de discrétisation pour chaque équation. Si on note par  $\phi$  la variable étudiée, les équations peuvent être réduites à une seule équation générale selon la forme suivante :

$$a_{nm}\phi_{(n+1)(m-1)} + b_{nm}\phi_{(n+1)m} + c_{nm}\phi_{(n+1)(m+1)} = d_{nm} \quad (3.20)$$

Tel que :  $1 \leq n \leq N \max$  et  $2 \leq m \leq M \max - 1$

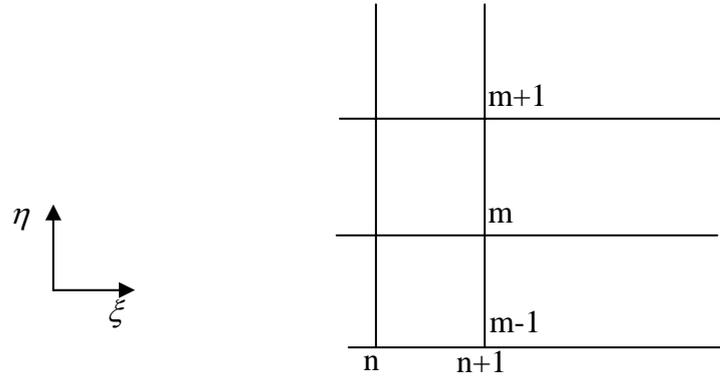


Figure 3.4 : Domaine de calcul

On attribut à la variable  $\phi$  pour la ligne  $n$ , ses valeurs obtenues lors de l'itération précédente, on aboutit au système suivant :

$$a_m \phi_{(m-1)} + b_m \phi_m + c_m \phi_{(m+1)} = d_m \quad ; \quad 2 \leq m \leq M \max - 1 \quad (3.21)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \phi_M = 1 \quad (3.22)$$

Où  $m = 1$  présente la paroi, et  $m = M$  présente la frontière de la couche limite.

Cette technique de balayage permet une convergence plus rapide. Le choix de la direction de balayage est exigé par les conditions aux limites [28]. Dans notre problème on utilise le balayage suivant l'axe  $(o\eta)$ .

Dans l'équation (3.21),  $\phi_m$  est fonction de  $\phi_{m+1}$  et  $\phi_{m-1}$ , or une équation correspondante au nœud  $(n, m)$  peut être écrite de la manière suivante :

$$\phi_m = E_m \phi_{m+1} + G_m \quad (3.23)$$

L'introduction de la condition  $\phi_1 = 0$  dans l'équation (3.23) donne :

$$E_1 = 0, \quad G_1 = 0. \quad (3.24)$$

Une équation correspondante au nœud  $(n+1, m-1)$  est de la forme :

$$\phi_{m-1} = E_{m-1}\phi_{m+1} + G_{m-1} \quad (3.25)$$

En introduisant l'expression précédente dans l'équation (3.21), nous aurons :

$$\phi_m = \frac{-c_m}{b_m + a_m E_{m-1}} \phi_{m+1} + \frac{d_m - a_m G_{m-1}}{b_m + a_m E_{m-1}} \quad (3.26)$$

De telle façon que :

$$E_m = \frac{-c_m}{b_m + a_m E_{m-1}} \quad \text{et} \quad G_m = \frac{d_m - a_m G_{m-1}}{b_m + a_m E_{m-1}} \quad (3.27)$$

Avec les équations (3.27) et la condition (3.24), il devient possible de calculer  $E_m$  et  $G_m$  pour des valeurs successives de  $m$ , commençant par  $m=2$  pour tous les nœuds situés entre la paroi et la frontière de la couche limite.

La valeur de  $\phi_{m+1}$  pour  $m=M-1$  étant connue d'après les conditions aux limites (3.22), on déterminera par retour en arrière  $\phi_{m-1}, \phi_{m-2}, \dots, \phi_2$  ( $\phi_1$  étant connue aux limites).

### 3.9 Gradient de pression

#### 3.9.1 Gradient de pression hydrodynamique

$$\text{grad}(P_{hd})_n = -4\rho u_\infty^2 \sin(2\varphi_n) / R \quad (3.28)$$

Le gradient de pression hydrodynamique sans dimension est donné par :

$$\text{grad}(P_{hdsd})_n = -2 \sin(2\varphi_n) / R \quad (3.29)$$

#### 3.9.2 Gradient de pression magnétique

$$\text{grad}(P_m) = -\sigma U_{en} B^2 \quad (3.30)$$

Gradient de pression magnétique sans dimension

$$\text{grad}(P_{msd}) = -2I(u_e)_n / u_\infty \quad (3.31)$$

### 3.9.3 Gradient de pression totale

$$\text{grad}(P_T)_n = \text{grad}(P_{hd})_n + \text{grad}(P_m)_n \quad (3.32)$$

Gradient de pression totale sans dimension

$$\text{grad}(P_{Tsd})_n = \text{grad}(P_{hdsd})_n + \text{grad}(P_{msd})_n \quad (3.33)$$

L'expression discrétisée du coefficient de pression est donné par :

$$Cp_n = 1 - 4 \sin^2(\varphi_n) + 4I(\cos(\varphi_n) - 1) \quad (3.34)$$

## 3.10 Expressions discrétisées des paramètres de la couche limite

### 3.10.1 Epaisseur de la couche limite :

L'épaisseur de la couche limite  $\delta_n$  correspond à l'ordonnée du point où  $F(\xi, \eta) = 0.99$

### 3.10.2 Epaisseur de déplacement :

L'expression discrétisé de  $\delta^*$  dans le nouveau domaine est donnée par :

$$\delta_n^* = \frac{\nu \sqrt{2\xi_n}}{(u_e)_n} \left( \delta_n - \int_0^{\delta_n} F d\eta \right) \quad (3.35)$$

### 3.10.3 Epaisseur de quantité de mouvement :

La discrétisation de l'équation (2.49) conduit à :

$$\delta_n^{**} = \int_0^{\delta_n} (F - F^2) \frac{\nu \sqrt{2\xi_n}}{u_{en}} d\eta \quad (3.36)$$

Donc l'équation (3.35) devient :

$$\delta_n^{**} = \frac{U\sqrt{2\xi_n}}{u_{en}} \left[ \int_0^{\delta_n} F d\eta - \int_0^{\delta_n} F^2 d\eta \right] \quad (3.37)$$

Nous utilisons la méthode du trapèze pour calculer les formes intégrales des équations (3.35), (3.37)

**3.10.4 Facteur de forme H :**

Le facteur de forme désigne le rapport suivant :

$$H = \frac{\delta_n^*}{\delta_n^{**}} \quad (3.38)$$

**3.10.5 contraintes visqueuses :**

L'expression discrétisé des contraintes visqueuses donné par :

$$\tau_n = \frac{\rho u_{en}^2 (18F_{n2} - 9F_{n3} + 2F_{n4})}{6\sqrt{2\xi_n} d\eta} \quad (3.39)$$

la contrainte visqueuse sans dimension

$$\tau_{(sd)n} = \frac{2\tau_n \sqrt{Re}}{\rho u_\infty^2} \quad (3.40)$$

**3.10.6 La force de traînée :**

La force de traînée s'écrit sous forme discrétisée par :

$$D = \sum_{n=1}^{n=N_{max}} 2R\tau_n \sin(\varphi_n) d\varphi \quad (3.41)$$

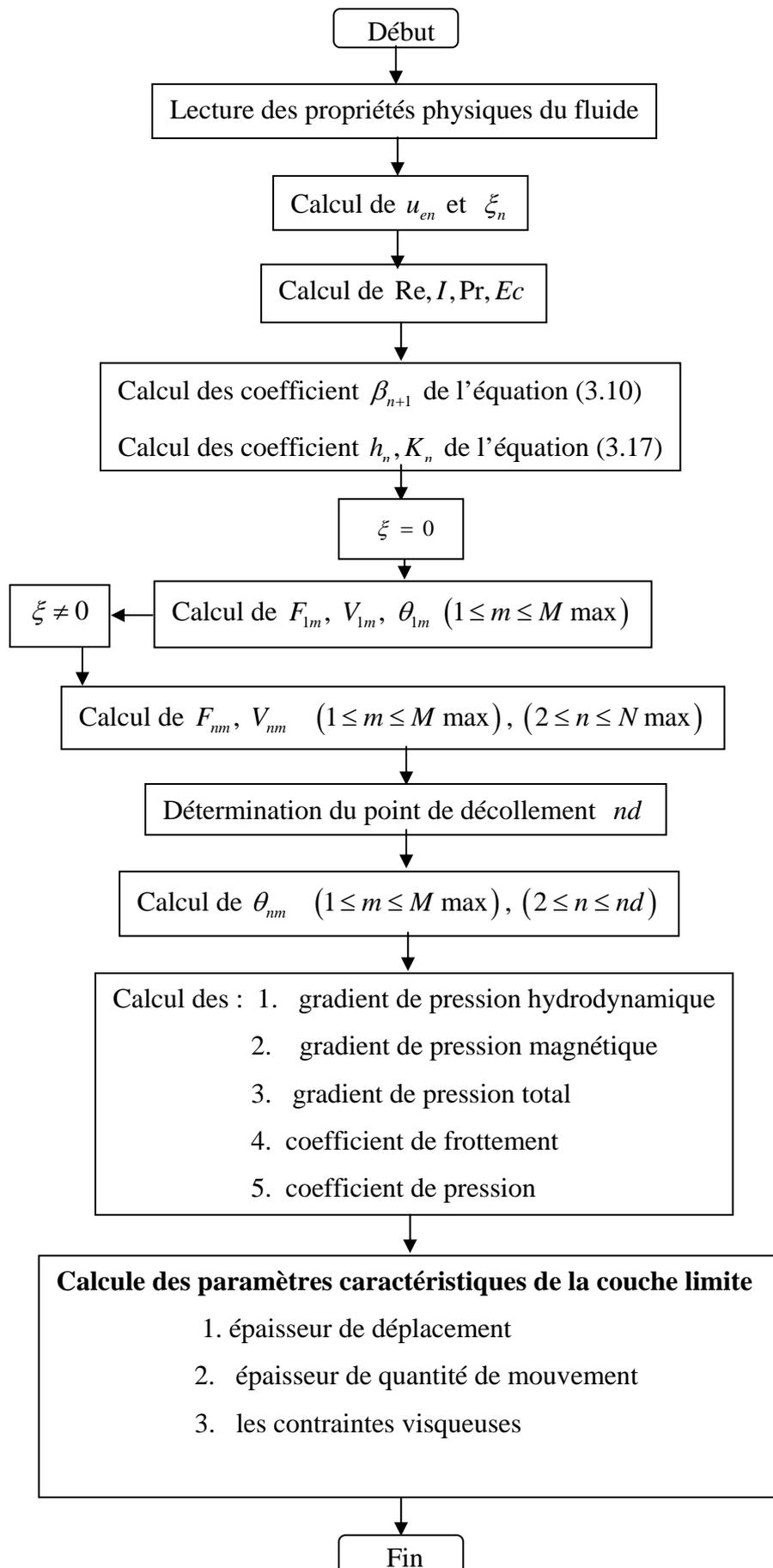
**3.10.7 Décollement :**

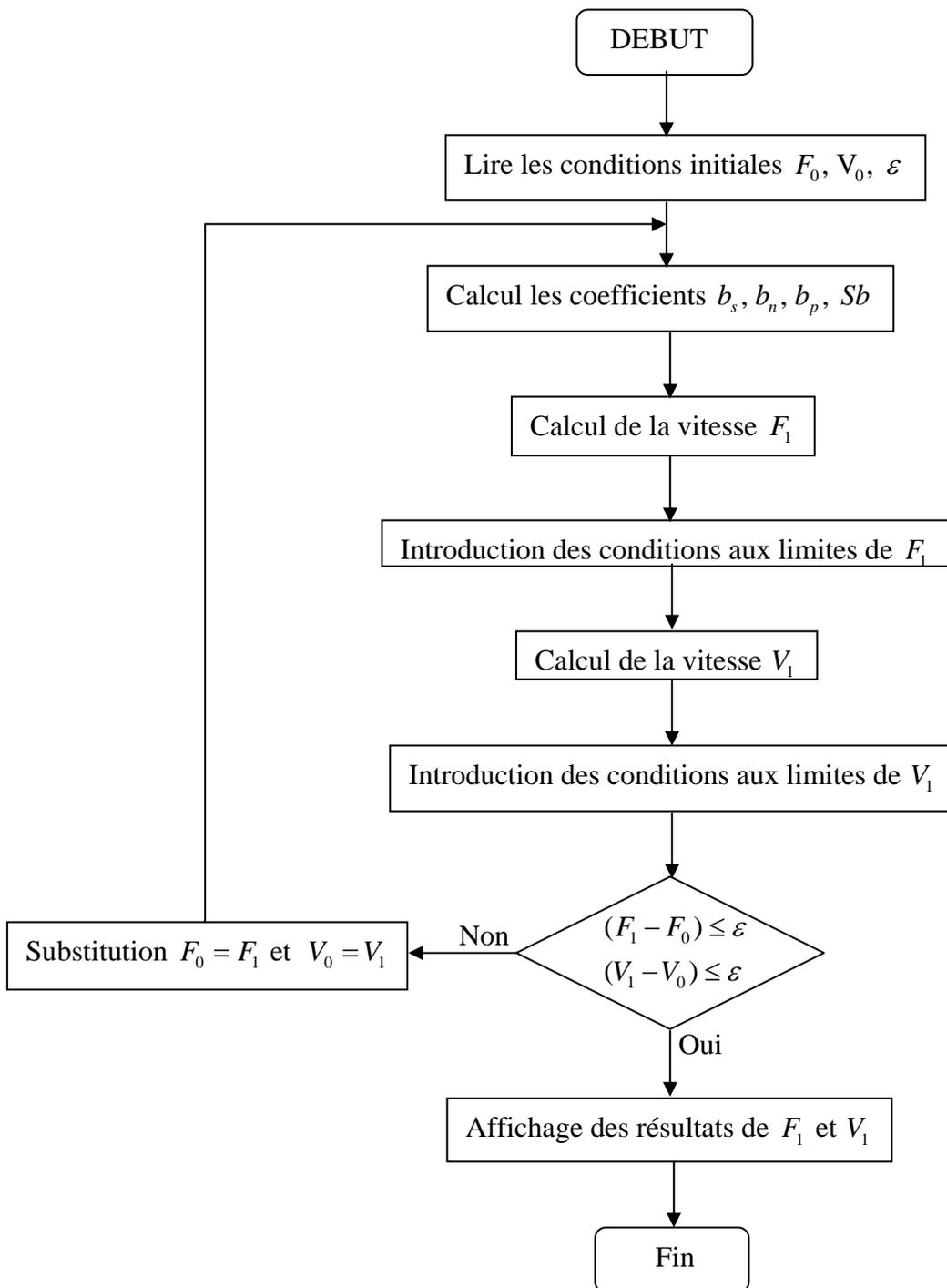
Le point de décollement est défini par la condition suivante :

$$F_{n2} = F_{n1} = 0 \quad (3.42)$$

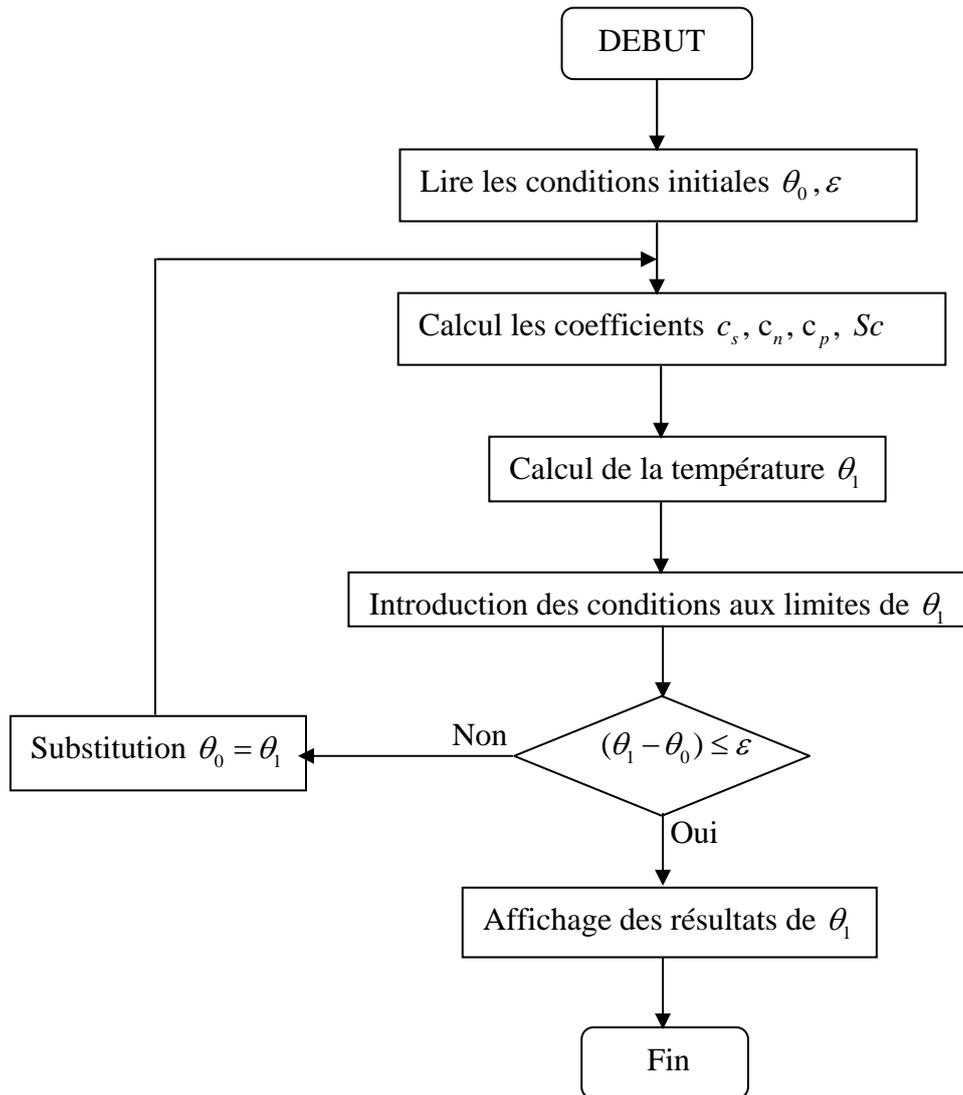
En ce lieu, la contrainte visqueuse :  $\tau_n = 0$

## 3.11 Organigramme général :

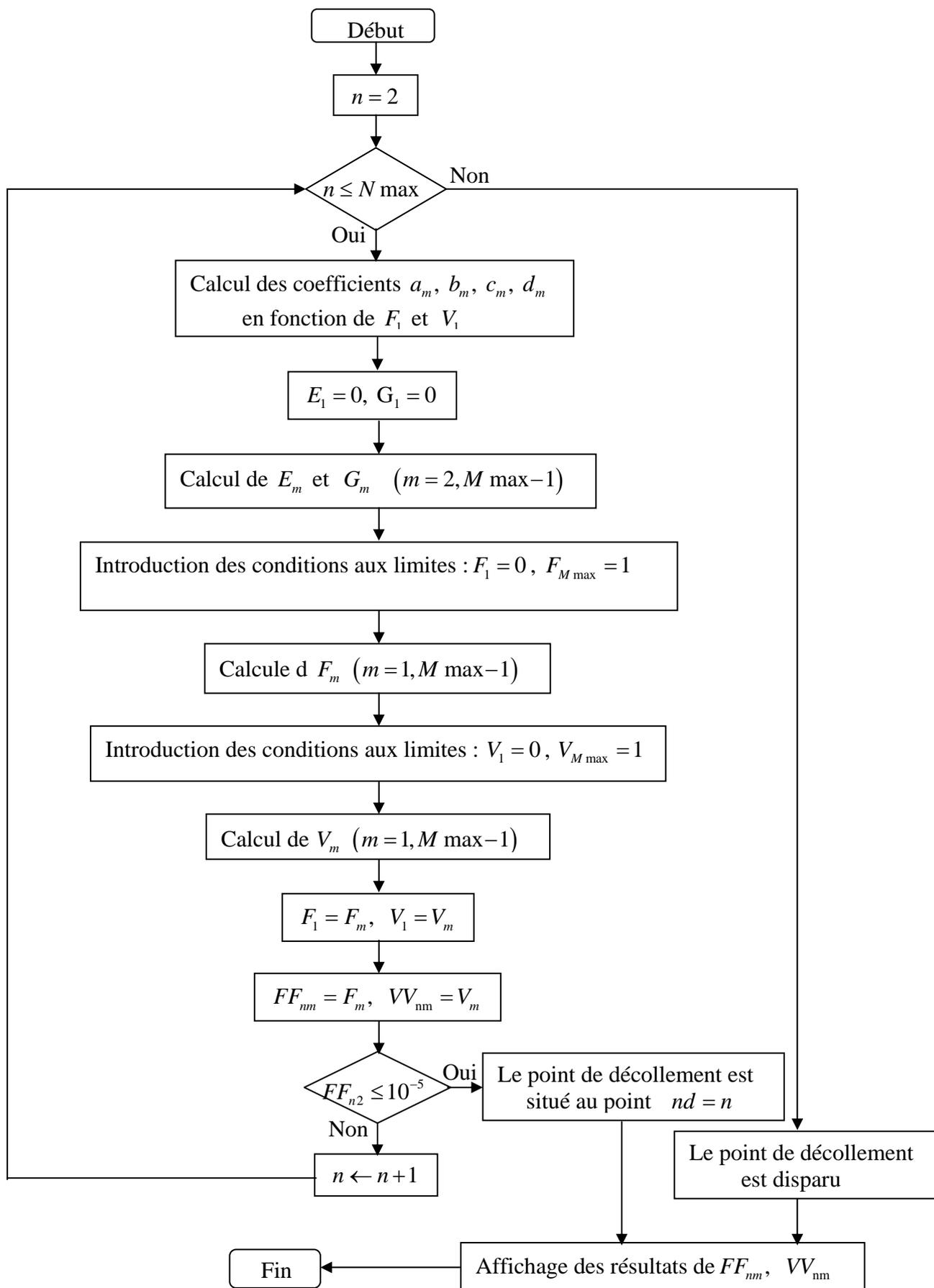




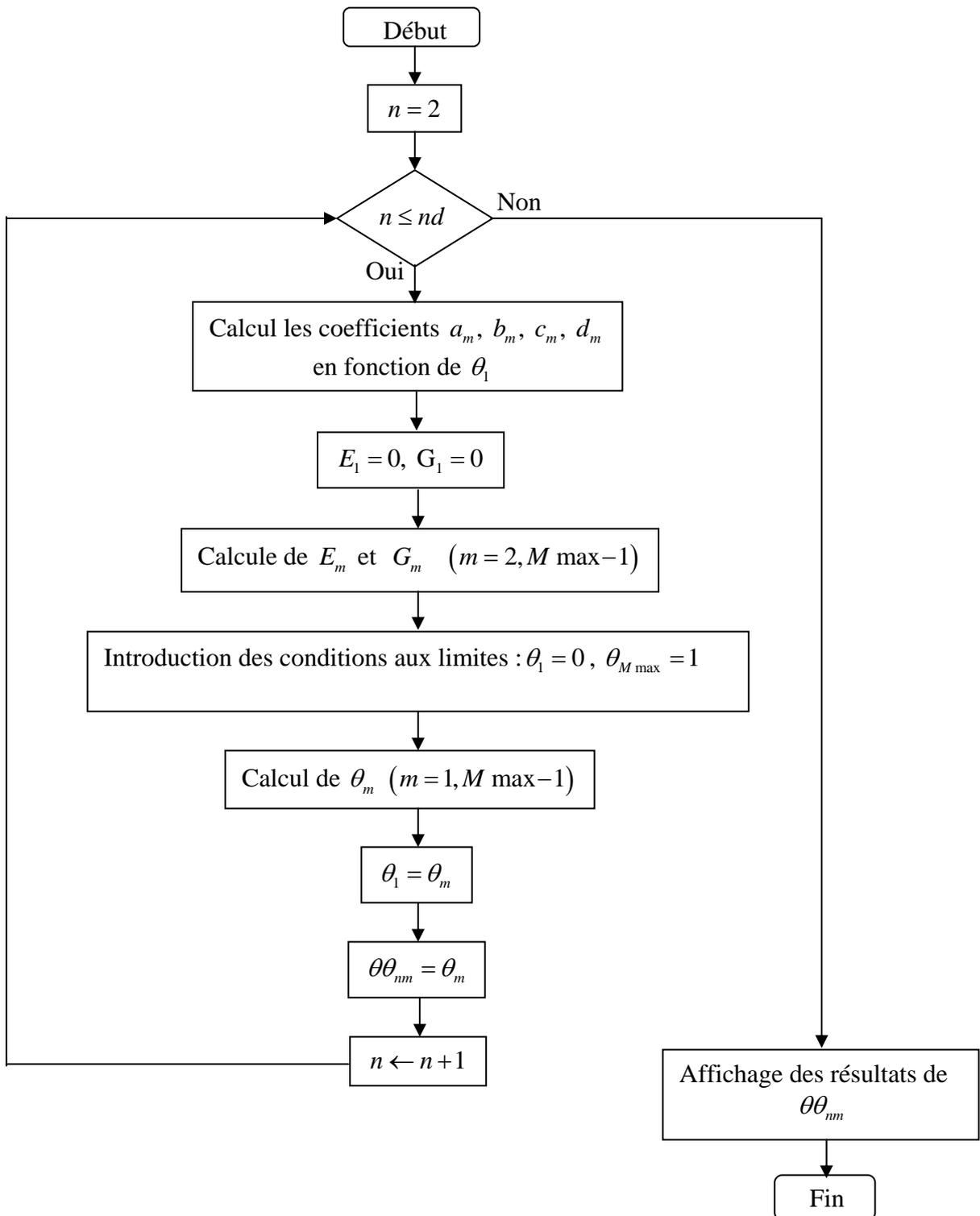
-a- Subroutine de calcul de  $F_1$ , et  $V_1$  pour  $\xi = 0$



**-b- Subroutine de calcul de  $\theta_1$  pour  $\xi = 0$**



-c- Subroutine de calcul de  $F_{nm}$ , et  $V_{nm}$  pour  $\xi \neq 0$



-d- Subroutine de calcul de  $\theta_{nm}$  pour  $\xi \neq 0$

# **CHAPITRE 4**

## **Analyse et discussion des résultats**

## Ch. 4

### Analyse et discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous allons utiliser un code de différence finis pour étudier le problème de la couche limite magnétohydrodynamique, autour d'un obstacle cylindrique, qui est régie par le modèle mathématique (2.45). Dans ce problème, nous étudions les paramètres caractéristiques de la couche limite sans et avec présence d'un champ magnétique perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

#### 4.1 La simulation par le logiciel FLUENT :

Le maillage du domaine physique est effectué à l'aide de logiciel Gambit, nous avons adopté un maillage très fin au voisinage de la paroi cylindrique (figure 4.1'), pour capter toutes les informations sur la couche limite.

On note sur la figure 4.1 que les lignes de courants, se serrent de plus en plus en se rapprochant de l'obstacle ce qui engendra une survitesse autour du cylindre à cause de l'effet de la courbure de la paroi, ce qui implique un déplacement de la couche limite afin d'assurer la conservation de masse. La figure 4.2 représente le champ de vitesses dans le plan physique. On peut observer une formation de deux tourbillons symétriques à l'aval du cylindre, qui sont le résultat du décollement qui c'est produit sur la paroi en cette zone. Ce phénomène est représenté sur les figures 4.3, et 4. 1.

Le champ de pression est symétrique par rapport l'axe des (x). La figure 4.4 montre que la pression décroît de l'amont ( $P_{\max}$ ) à l'aval ( $P_{\min}$ ). Les points de décollements sont aussi symétriques par rapport l'axe des (x). Ils se situent à environ ( $\pm\varphi = 120^\circ c$ ).

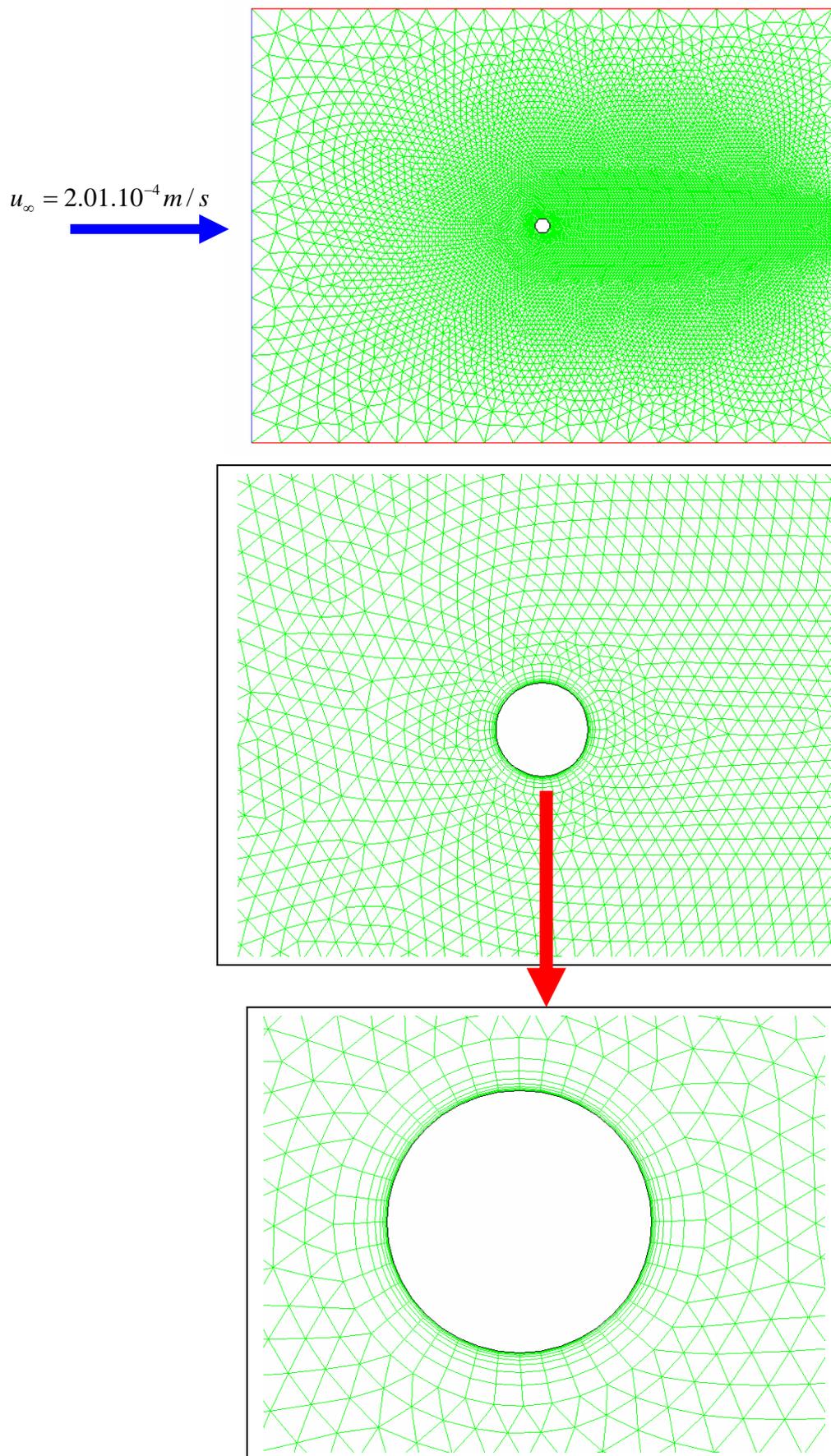


Figure 4.1' : Maillage du domaine physique

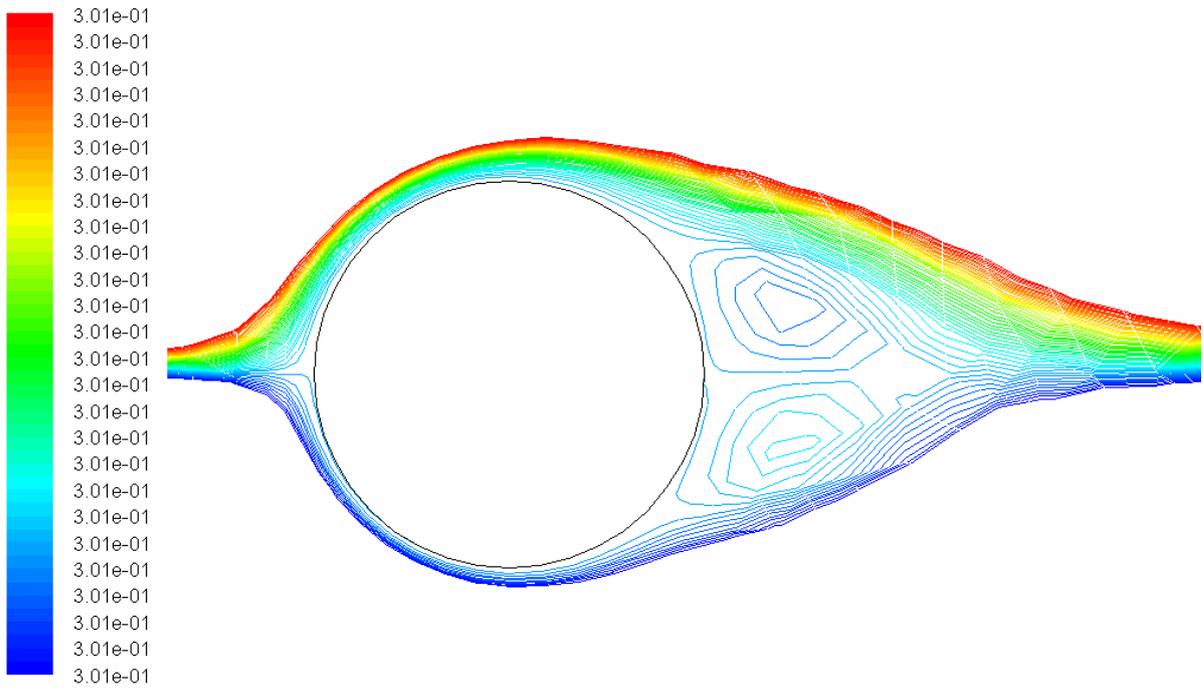


Figure 4.1 les lignes de courants

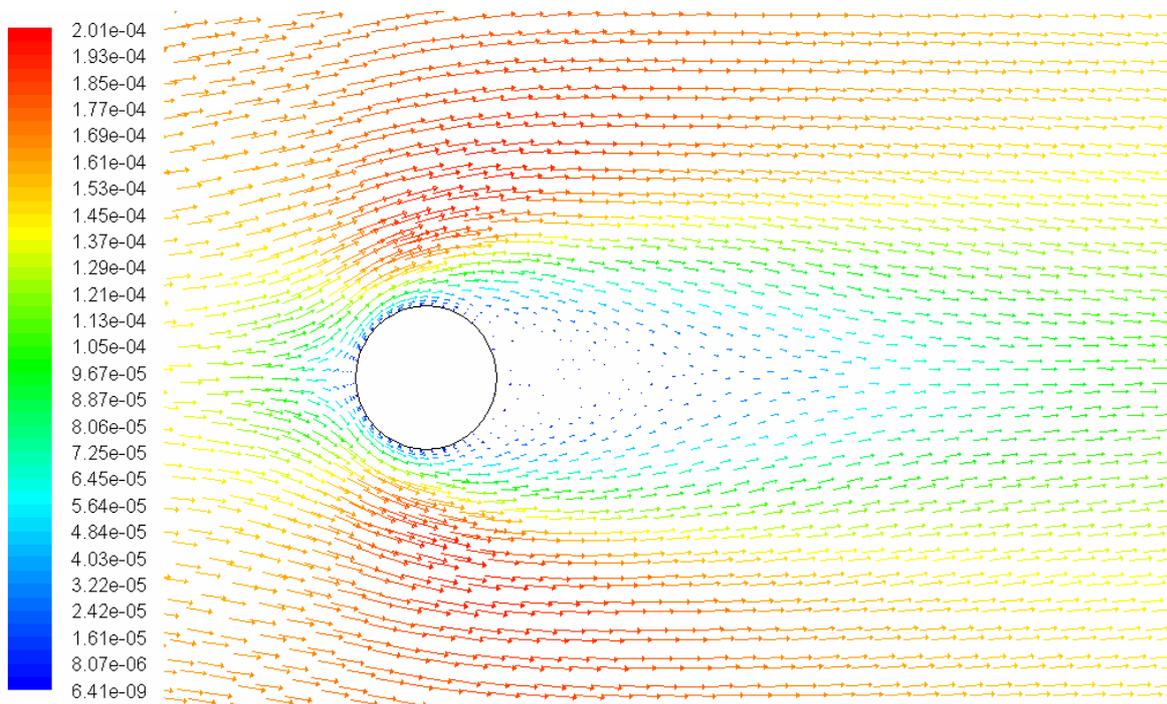


Figure 4. 2 : Champ de vitesses

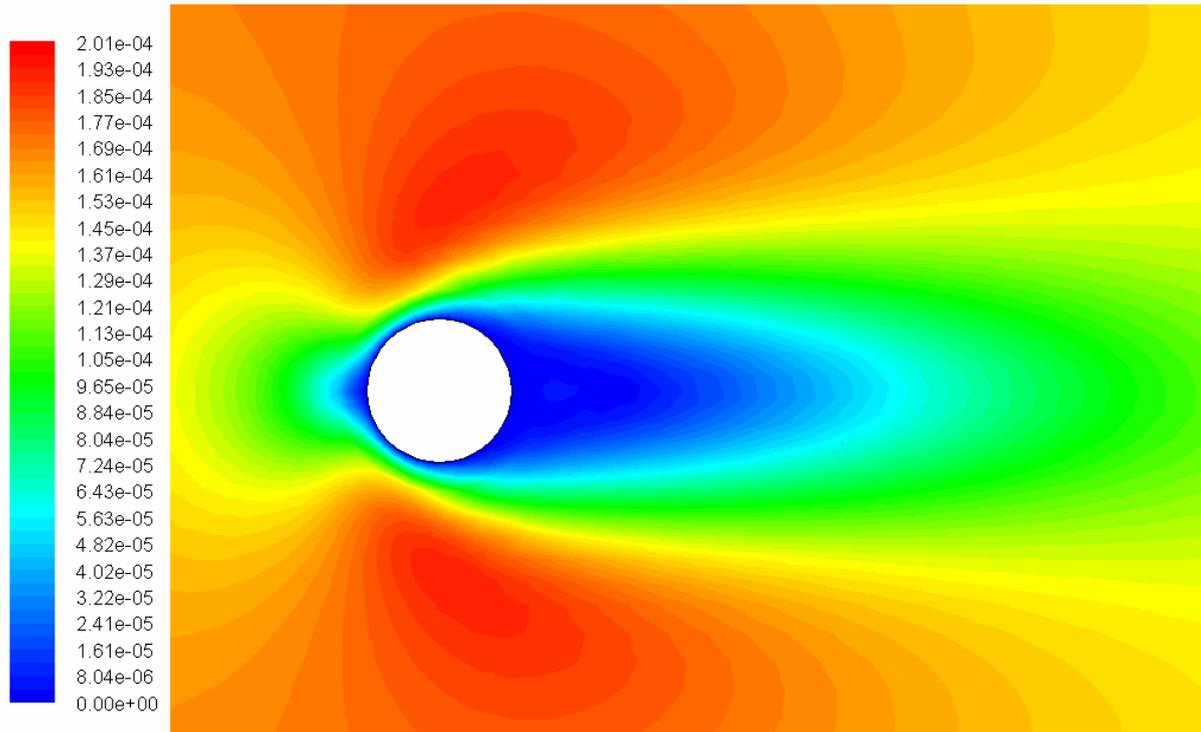


Figure 4.3 contour des vecteurs vitesses

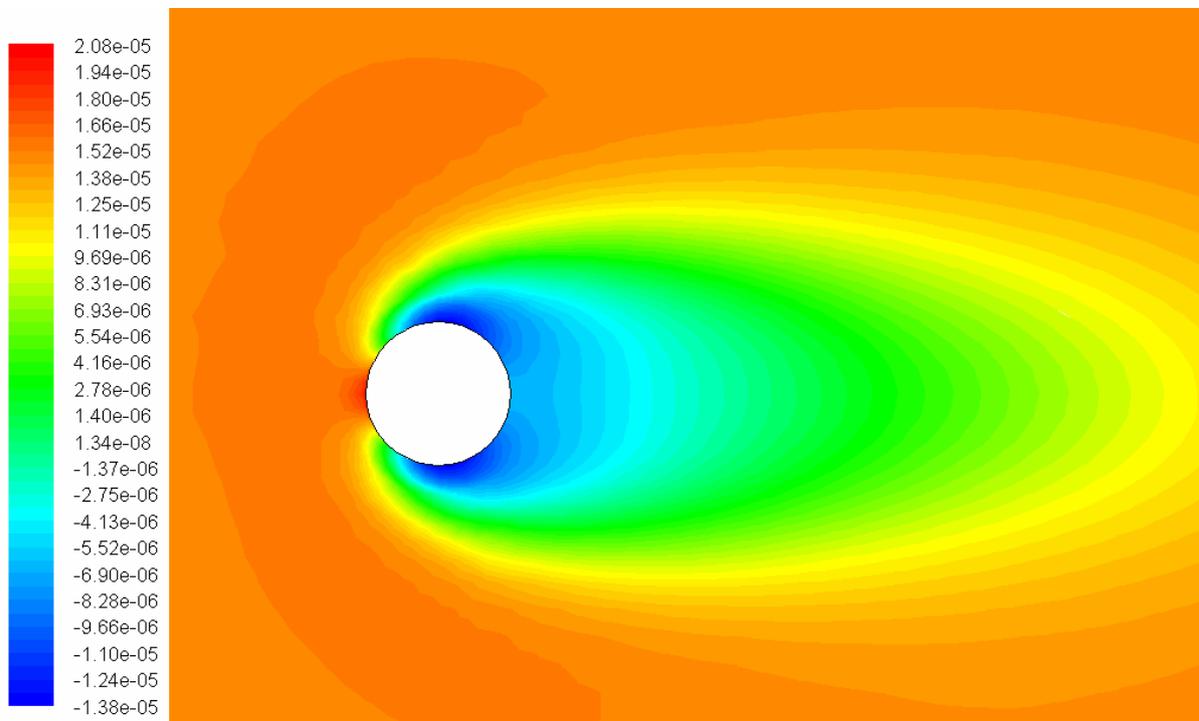


Figure 4.4 pression totale

## 4.2 Analyse du champ des vitesses

### 4.2.1 Le champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite :

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une surface, les particules à proximité de la surface sont ralenties en vertu des forces de viscosité. Les particules fluides adjacentes à la surface y adhèrent, et ont une vitesse nulle par rapport à la paroi. Les autres particules fluides s'efforcent de glisser sur les premières sont ralenties par suite de l'interaction entre le mouvement accéléré et retardé du fluide, phénomène qui donne naissance aux forces de cisaillement, voire la figure 4.5. qui représente le champ des vitesses dans une section transversale de la couche limite.

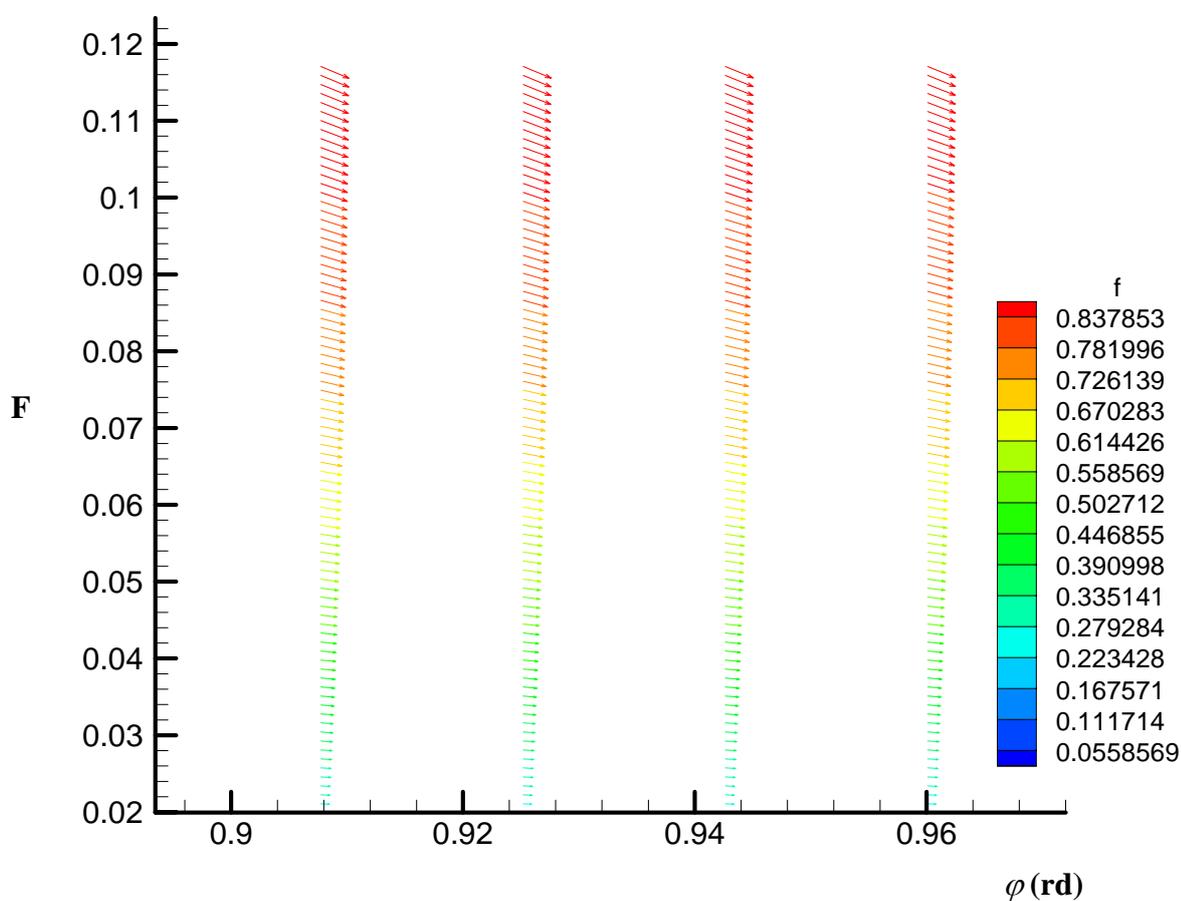


Figure 4.5 : Le champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite

### 4.2.2 Influence du Reynolds sur la vitesse adimensionnelle $F$ pour $I=0$

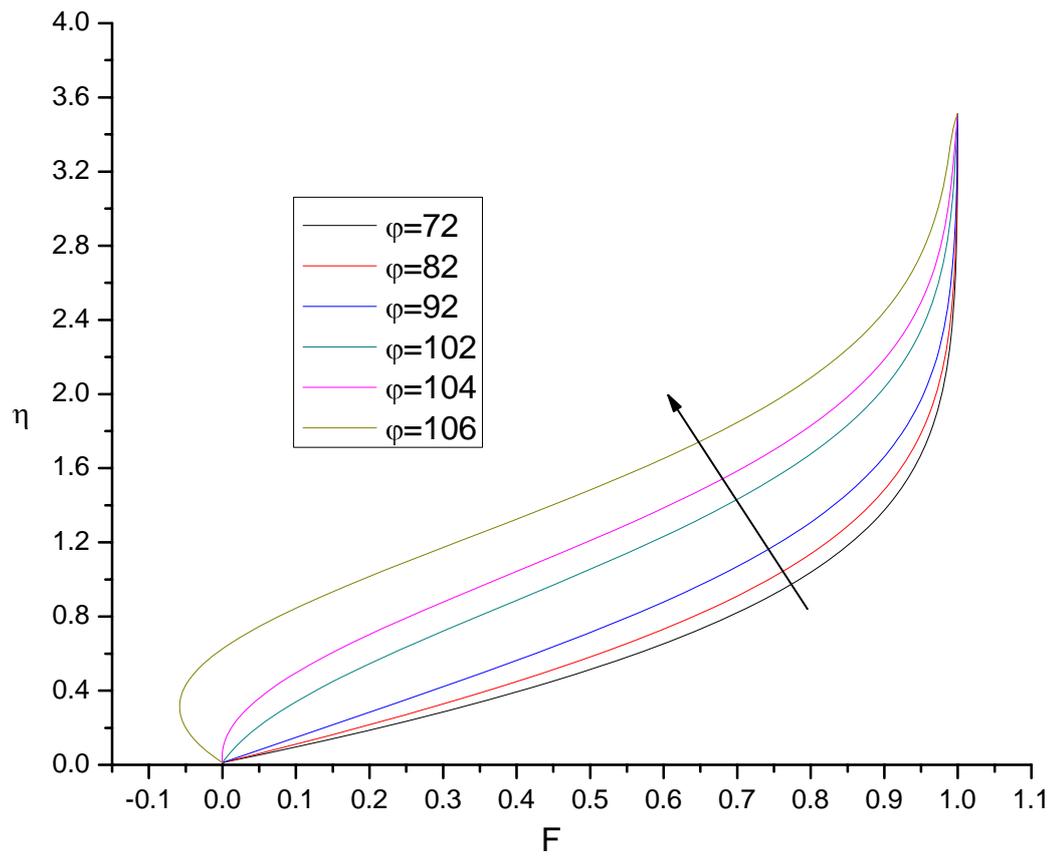
La figure 4.6-a- traduit d'une manière générale l'allure du profile des vitesses en chaque position de la couche limite. On remarque l'évidence de la décroissance de la vitesse durant de l'écoulement. Ce phénomène est dû surtout à l'effet de la courbure de la surface du cylindre.

On en distingue deux zones caractéristique: la première représente la zone de la paroi du cylindre où on aperçoit les phénomènes de décollement de l'écoulement sous les conditions bien déterminées, C'est la zone où on peut avoir des vitesses négatives en des positions bien définies telle que  $\varphi = 106^\circ$ . La seconde est adjacente à l'écoulement potentiel extérieur.

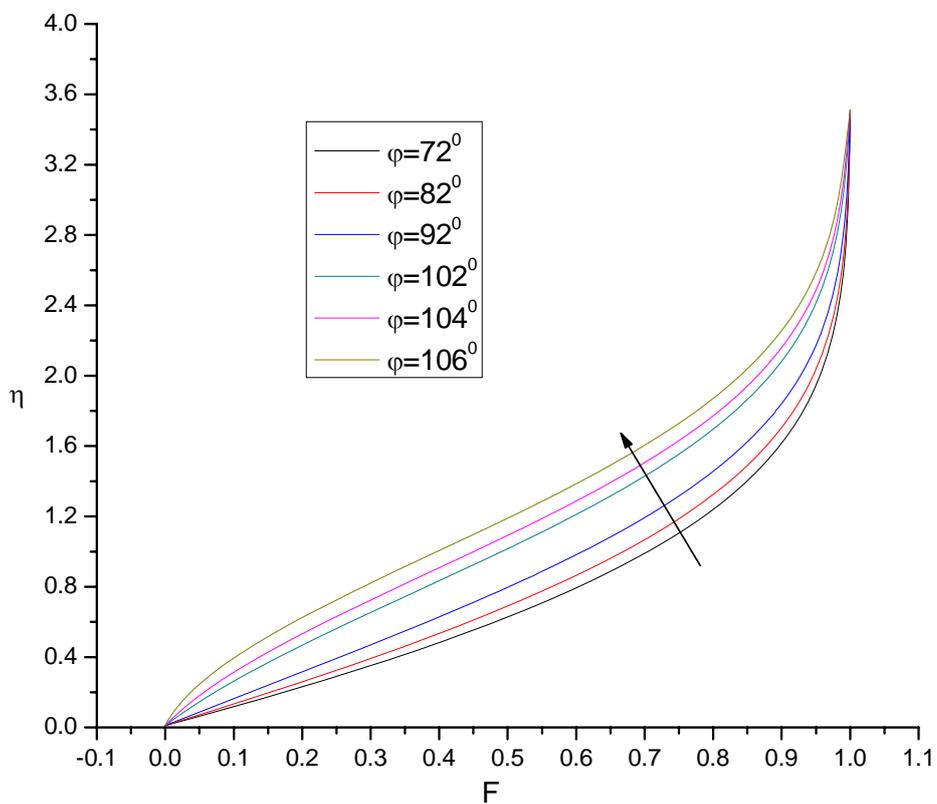
La figure 4.6.-a- montre pour un  $Re = 1.8.10^5$ ,  $I=0$ , que la vitesse des particules fluides qui se déplacent près de la paroi est diminuée et le fluide perd son énergie et sa capacité d'avancer. La quantité de mouvement du fluide diminue graduellement pour compenser le gradient de pression, et en un certain point de la paroi du cylindre ( $\varphi = 104^\circ$ ), la vitesse des particules fluides s'annule. En aval de ce point de décollement, le gradient de pression induit un écoulement à contre courant, Le phénomène du contre courant est plus évident à partir de ( $\varphi = 106^\circ$ ), Voir figure 4.6-a-.

A la surface de la paroi, la vitesse du fluide est ramenée à zéro, car il n'y a pas de glissement sur la paroi et les particules fluides adhèrent à celle-ci. À la limite externe de la couche limite, la vitesse tend vers une valeur finie ( $F=1$ ). L'épaisseur de la couche limite est généralement faible et par conséquent le gradient de vitesse est important dans cette région et les particules fluides subissent un taux de cisaillement élevé. Donc la structure de la couche limite est déterminée dans ce cas par la compétition entre les forces d'inertie, les forces de pression et les contraintes visqueuses. Voir la figure (4.5).

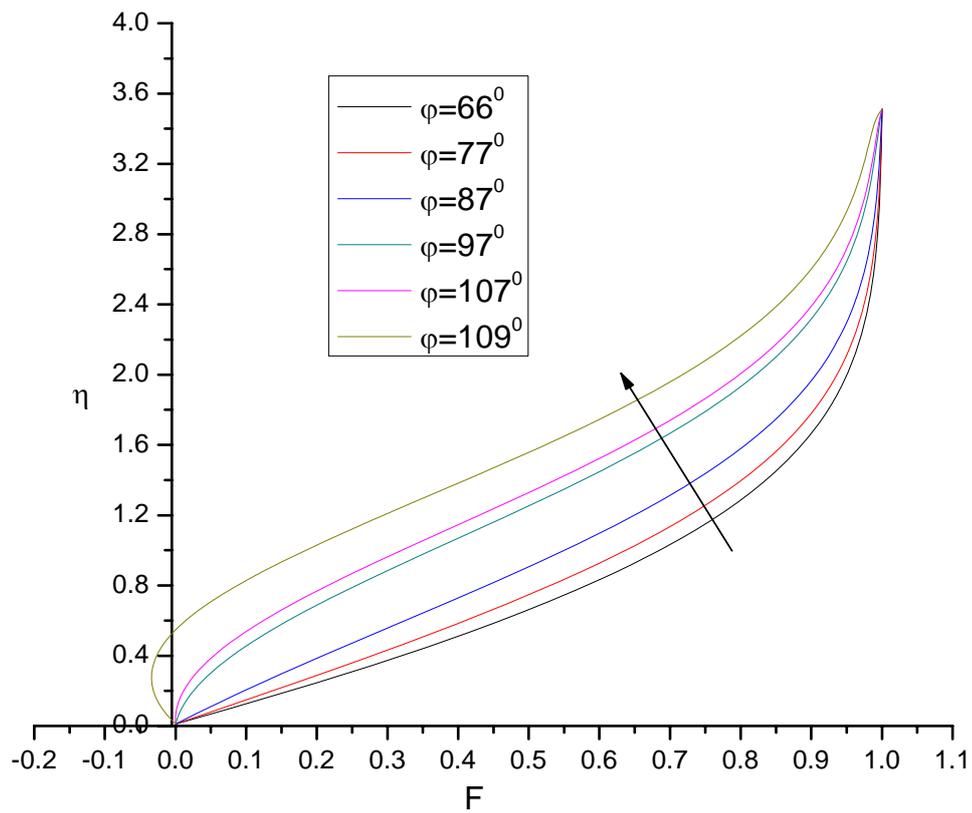
Les figures 4.6.-b- et -c-. mettent bien en évidence l'effet du nombre de Reynolds sur la zone de décollement. On remarque bien que le point de décollement repéré par la coordonné polaire ( $\varphi = 104^\circ$ ) pour  $Re = 1.8.10^5$  est repoussé vers son amont à la position ( $\varphi = 107^\circ$ ) pour  $Re = 1.2.10^5$ .



-a-



-b-



-c-

**Figure 4.6:** Influence du  $Re$  sur la vitesse  $F$  pour  $I=0$   
 -a-  $Re= 1.8.10^5$ ; -b-  $Re= 1.2.10^5$ ; -c-  $Re= 1.2.10^5$

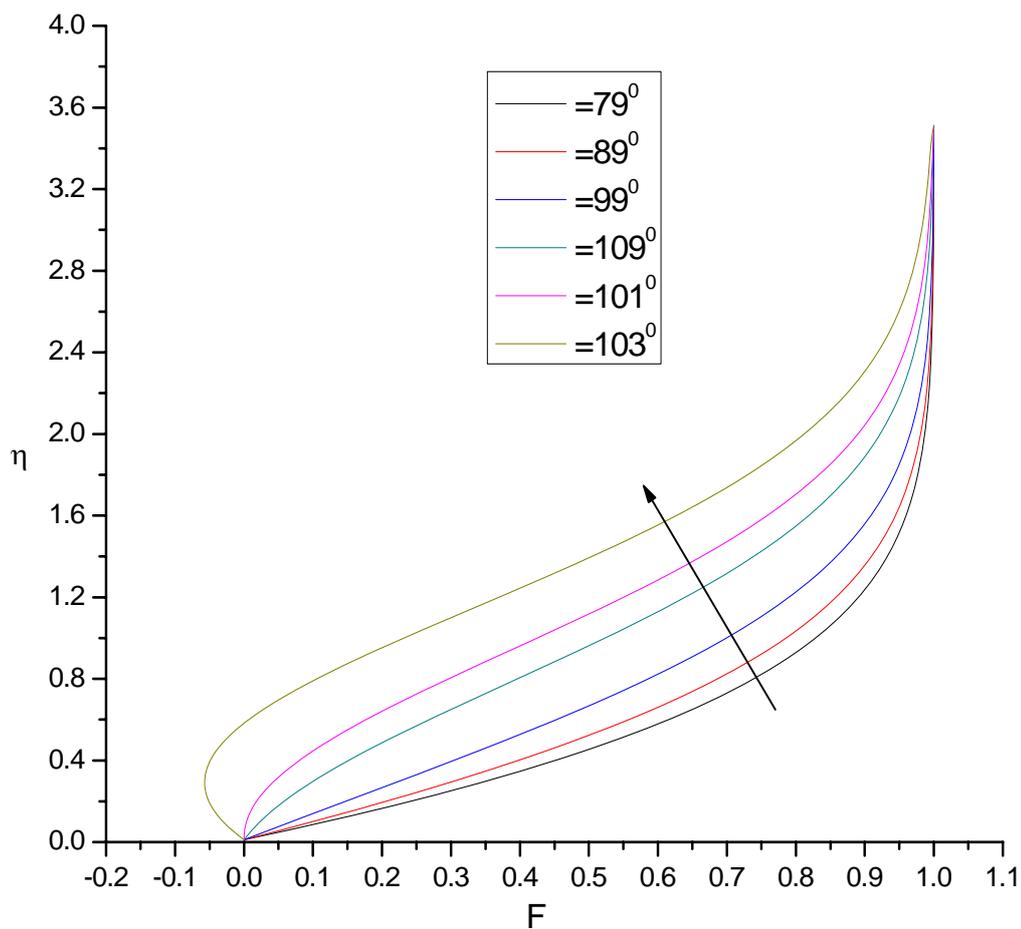
### 4.2.3 Influence du paramètre $I$ sur la vitesse $F$ pour $Re = 3.10^5$

Pour le cas de l'étude de l'effet du champ magnétique sur le point de décollement, nous avons montré sur la figure 4.7.-a- les profils de la vitesse longitudinale pour  $Re = 3.10^5$  et pour différentes valeurs du paramètre d'interaction magnétique  $I$ .

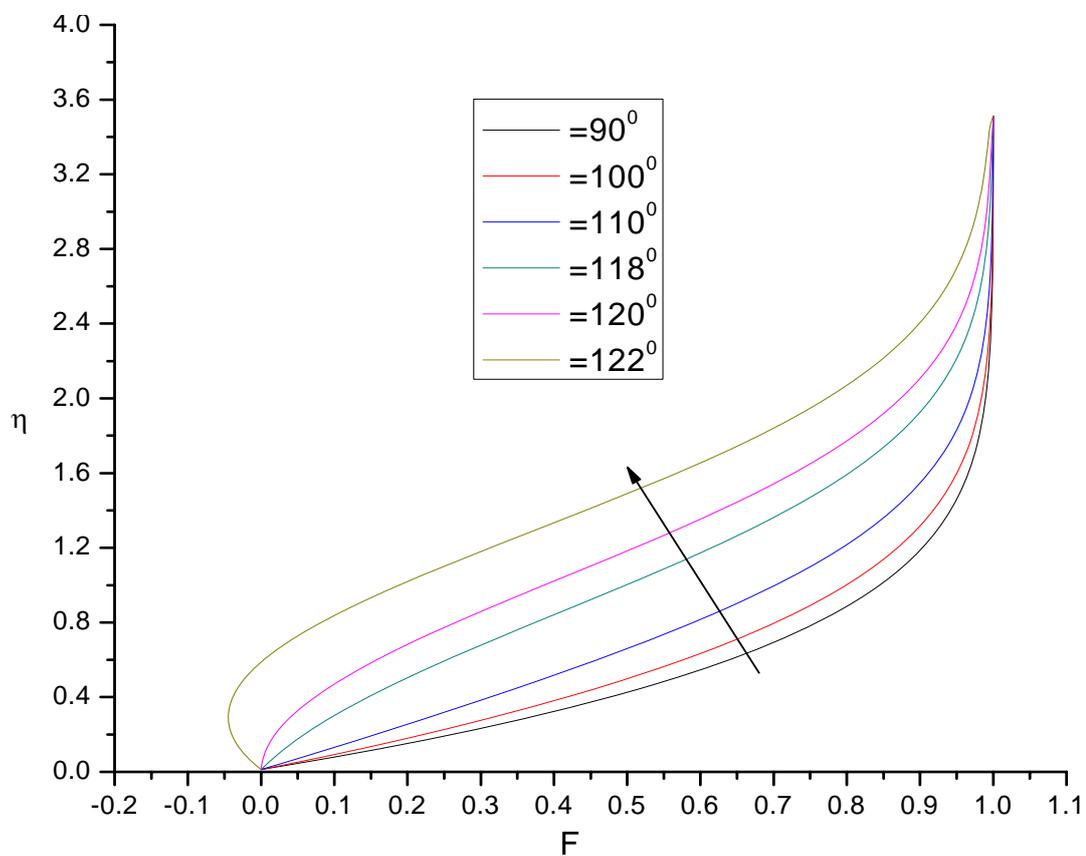
La figure 4.7.-a- pour  $I = 0$ , montre que le phénomène de décollement est situé au point de coordonné  $\varphi = 101^\circ$ , et pour  $I = 1.85$ , ce phénomène persiste, mais se déplace vers l'aval, à la position définie par  $\varphi = 120^\circ$ , figure(4,7b). On peut dire alors que le champ magnétique agit contre l'écoulement du contre courant.

De même on remarque sur les courbes de la figure 4.7.-c- le phénomène de décollement qui disparaît totalement de cette position  $\varphi = 120^\circ$  pour  $I = 2.5.$ , et vient se placer à son aval, à la position définie par ( $\varphi = 130^\circ$ ). Voir figure 4.7.-d-.

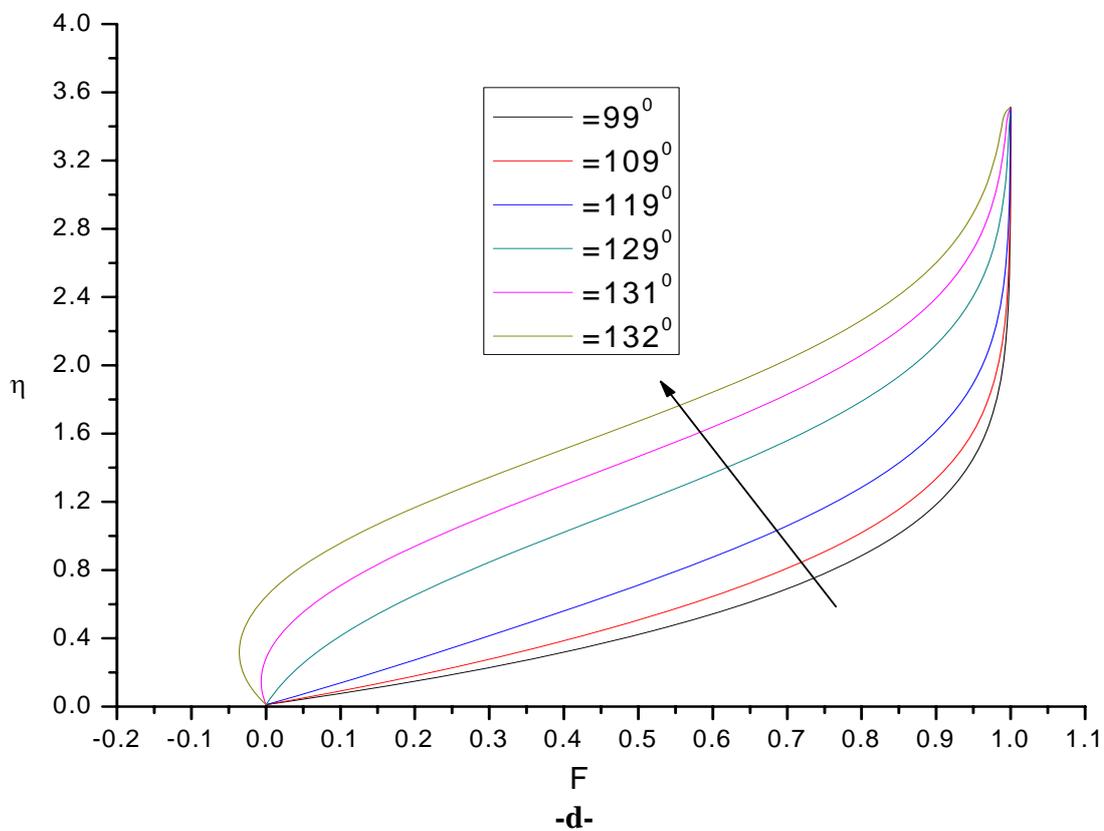
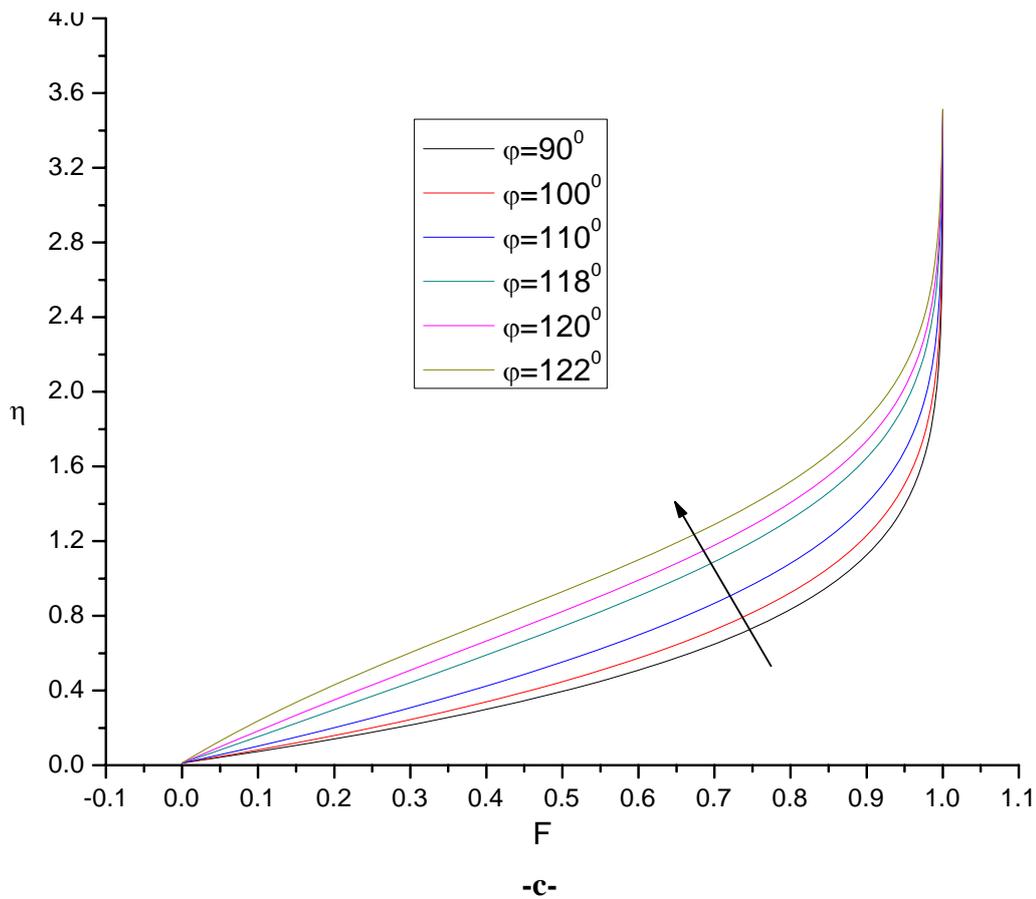
Sous la lumière de ces résultats on peut dire que le point de décollement se déplace vers l'aval lorsque l'intensité du champ magnétique  $B$  augmente.



-a-



-b-



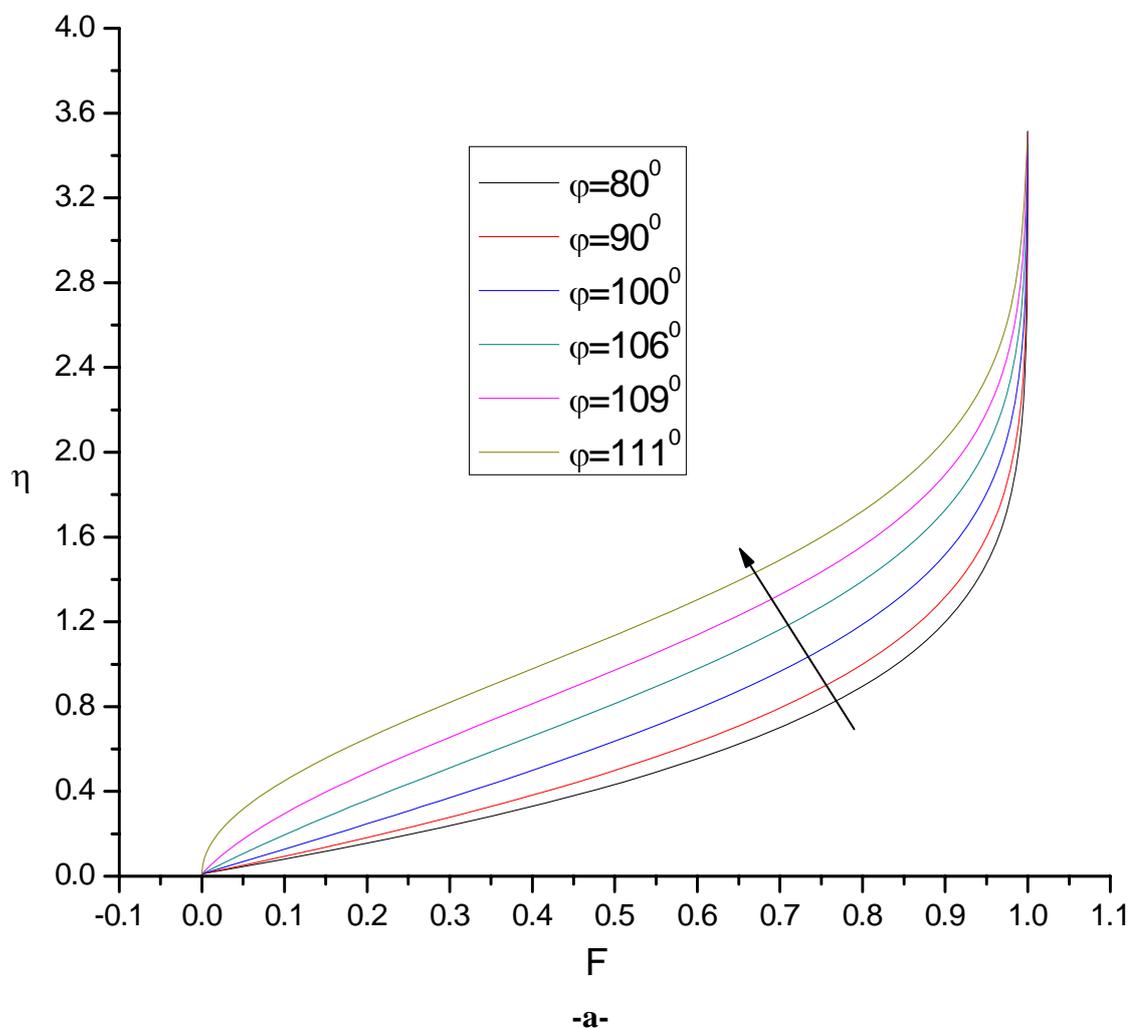
**Figure 4.7** : Influence du paramètre  $I$  sur la vitesse  $F$  pour  $Re = 3.10^5$   
 -a-  $I = 1.85$ ; -b-  $I = 2.$ ; -c-  $I = 2.5$ ; -d-  $I = 3.$

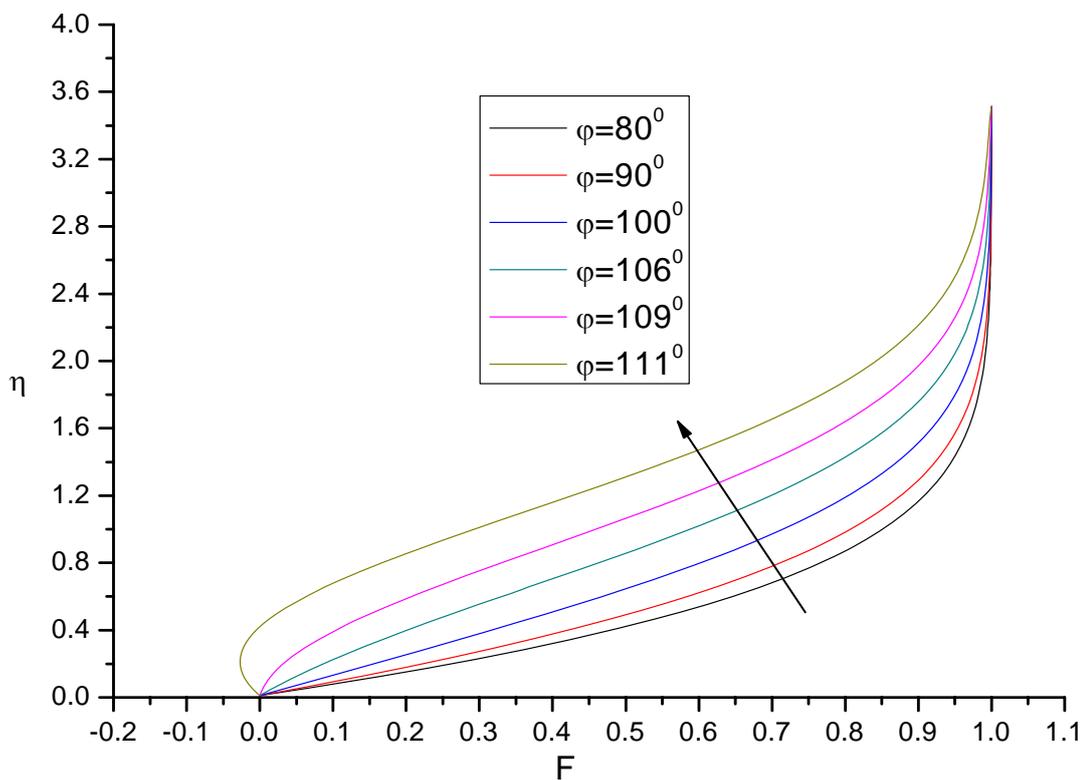
#### 4.2.4 Influence du $Re$ sur la vitesse $F$ pour $I=1$ .

La figure 4.8.-a- montre que pour  $Re=3.10^5$ , qu'il n'est y a pas d'écoulement a contre courant au point  $\varphi = 111^\circ$ , mais si  $Re=3.36.10^5$ , nous voyant un écoulement à contre courant qui apparaît à la même zone ( $\varphi = 111^\circ$ ), voir figure 4.8.-b-.

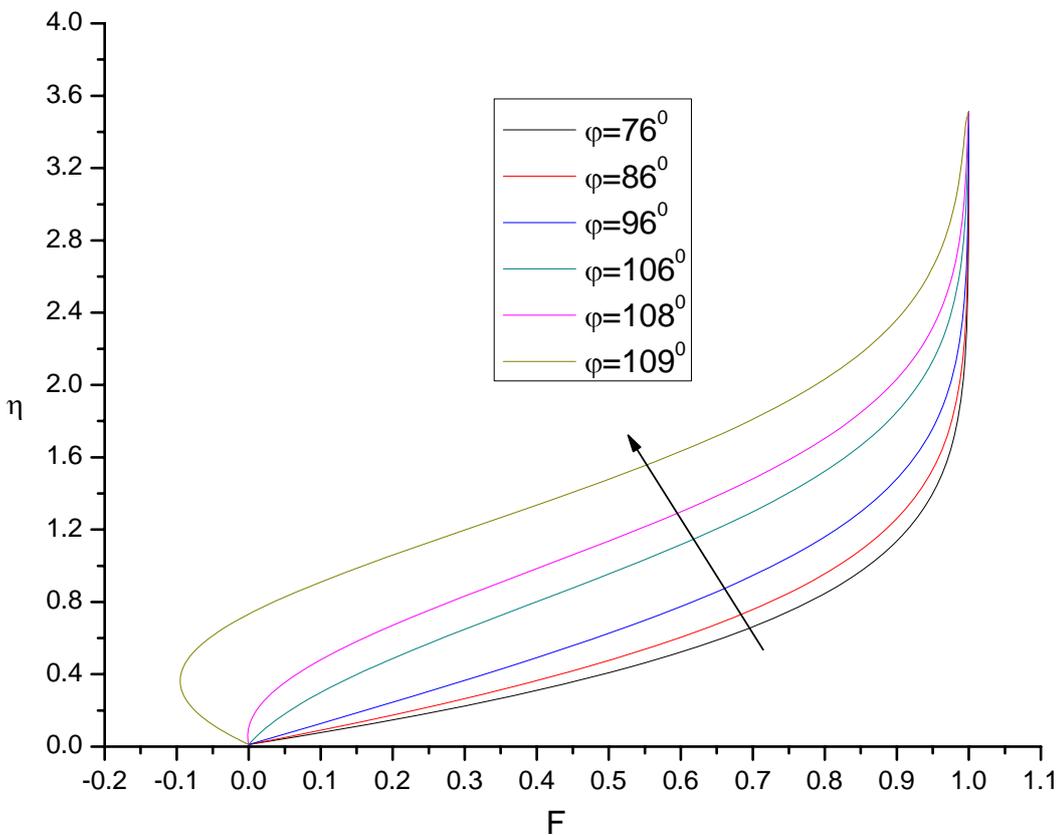
La courbe figure 4.8.-c- montre que pour  $Re=3.6.10^5$ , le point de décollement se déplace vers l'amont ( $\varphi = 109^\circ$ ). L'accroissement du nombre de Reynolds fait déplacer le point du décollement vers l'amont.

En conclusion on peut dire que les effets dynamique et magnétique sur l'écoulement en couche limite sont antagonistes.





-b-



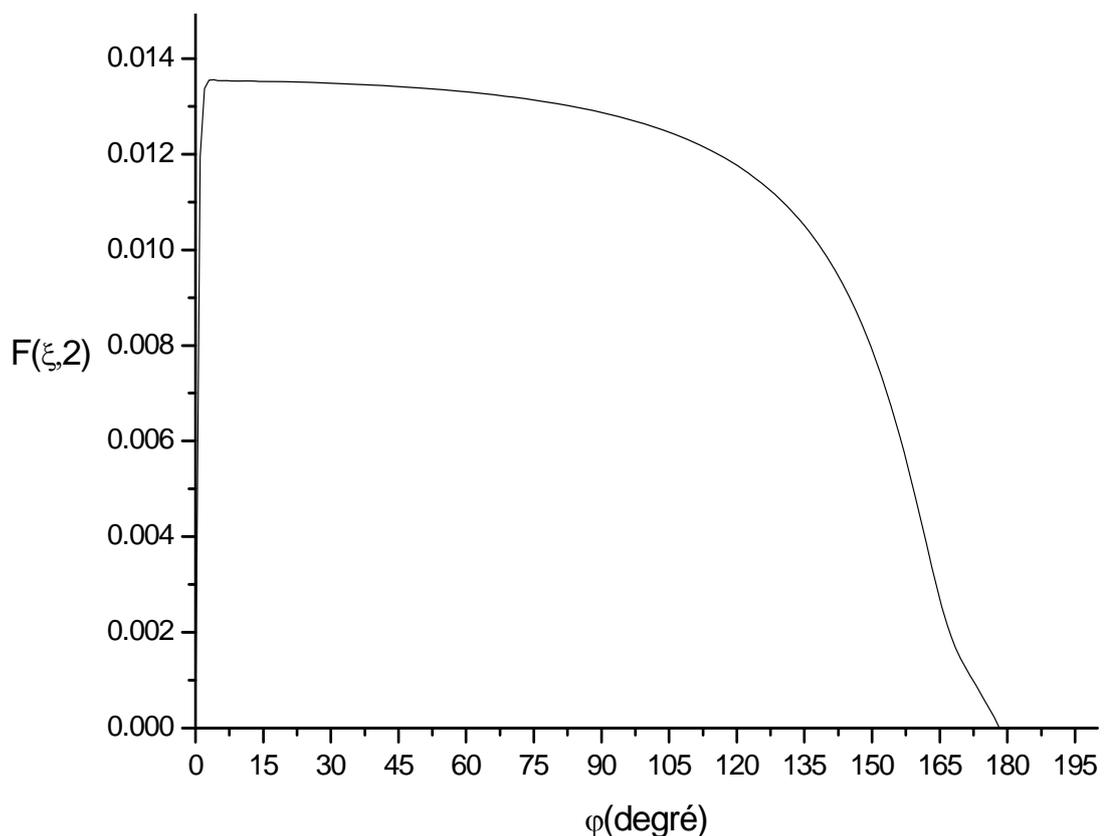
-c-

Figure 4.8 : Influence de  $Re$  sur la vitesse  $F$  Pour  $I=1$ .

4.2.5 La corrélation entre  $Re$  et  $I$  qui illuminant le décollement  
 -a-  $Re=3 \cdot 10^5$ ; -b-  $Re=3.36 \cdot 10^5$ ; -d-  $Re=3.6 \cdot 10^5$

La figure 4.9 montre qu'au voisinage de la paroi du cylindre, la composante adimensionnelle de la vitesse  $F$  décroît progressivement plus qu'on tend vers l'aval de la paroi. Et en certain point, la vitesse  $F$  des particules fluides s'annule. D'après l'expression (2.49) ce point représente le point de décollement de la couche limite.

La figure 4.9.-b- montre que Si  $Re=0.6.10^5$ , le décollement est disparais pour  $I=1$



**Figure 4.9 :** La relation entre le point de décollement et les nombres :  $Re$ , et  $I$  pour  $Re=0.6.10^5$ ,  $I=1$

De la même manière, on trouve que les valeurs de  $I$  qui suppriment le phénomène de décollement de la couche limite est proportionnel aux valeurs du  $Re$  correspondantes, voir tableau (4.1).

La figure 4.10 illustre les valeurs de  $I$  qui suppriment le point de décollement pour différentes valeurs de  $Re$

**Tableau (4.1) :** Valeurs de  $I$  qui supprime le décollement pour certaines valeurs de  $Re$

Re	I
120	0
$0.6 \cdot 10^5$	1
$1.2 \cdot 10^5$	2
$1.8 \cdot 10^5$	3
$2.4 \cdot 10^5$	4
$3 \cdot 10^5$	5
$3.6 \cdot 10^5$	6

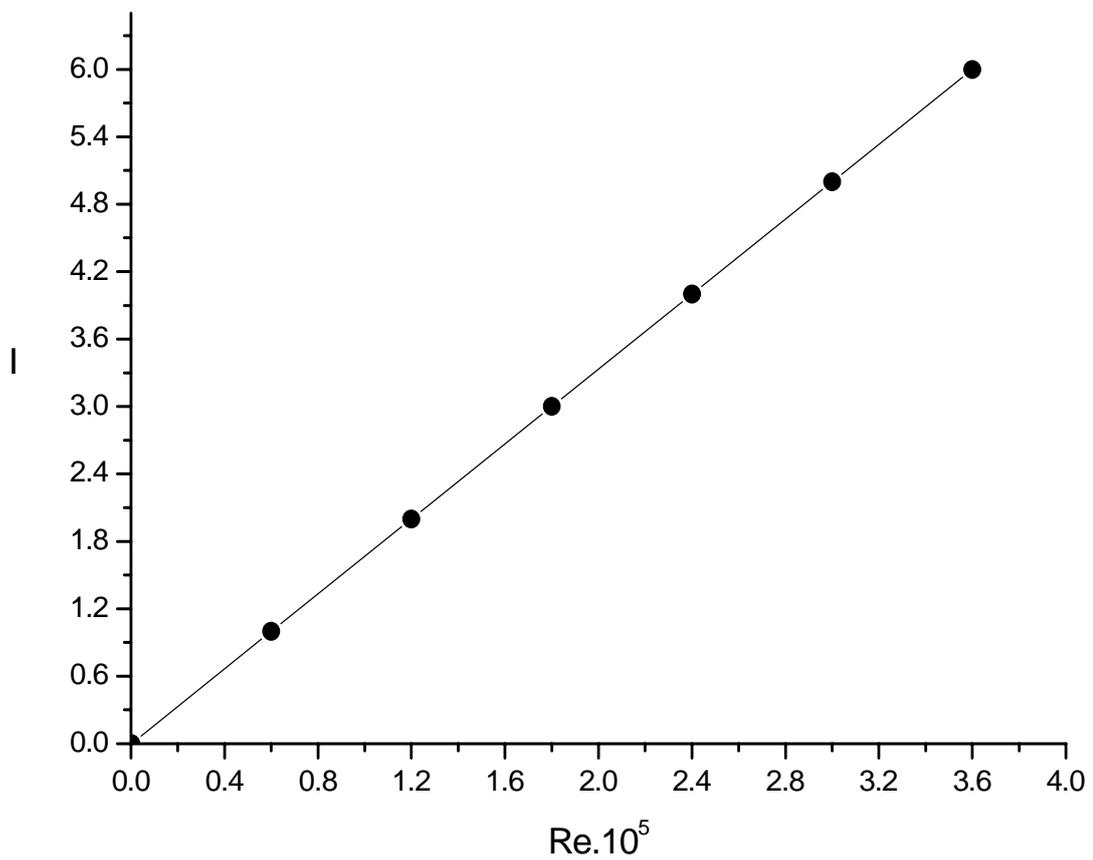


Figure 4.10 : corrélation entre Re et I qui donnant la disparition du point de décollement

Pour le même nombre de Reynolds, nous remarquons que le point de décollement se déplace vers l'arrière du cylindre lorsque le paramètre d'interaction magnétique,  $I$ , augmente, mais ce déplacement dépend du nombre de Reynolds. La figure 4.11 montre que si  $Re=0.24 \cdot 10^5$ , l'angle  $\varphi$  qui correspond au point de décollement, prend les valeurs suivantes :  $127^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $144^\circ$ , pour  $I=0$ ,  $0.1$ ,  $0.2$ , successivement. Par contre si  $Re=3 \cdot 10^5$ , le point de décollement occupe les positions suivantes  $101^\circ$ ,  $102^\circ$ ,  $103^\circ$ , pour les mêmes valeurs précédentes de  $I$ , donc on peut dire que pour les mêmes valeurs de  $I$ , le déplacement du point de décollement est très importantes pour des faibles nombres de Reynolds, comme c'est montré sur la figure 4.11, par exemple :

$$\Delta\varphi_{Re_I} \square \Delta\varphi_{Re_{II}}$$

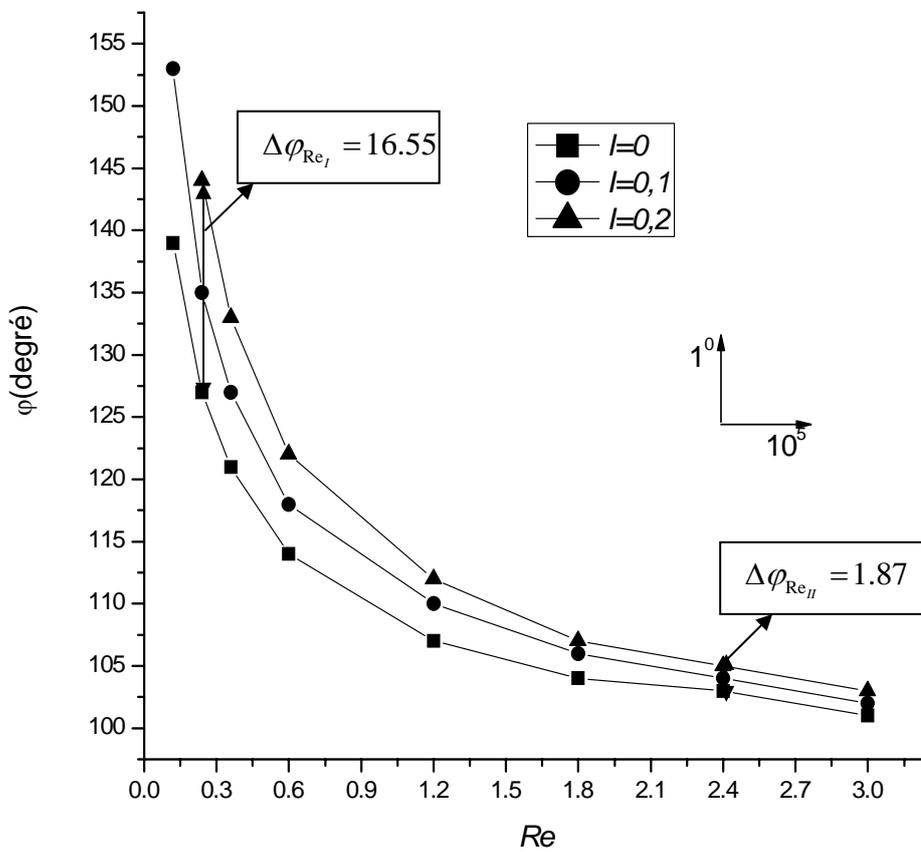


Figure 4.11 : Influence des nombres de  $Re$  et de  $I$  sur la position du point de décollement

#### 4.2.6 La vitesse à la frontière de la couche limite :

La figure 4.12, montre que pour  $u_\infty = 1\text{ m/s}$ , la vitesse à la frontière de la couche limite  $u_e$  est augmentée progressivement à partir du point d'arrêt, et atteint sa valeur maximal à la position définie par  $\varphi = 90^\circ$ . Par contre, en aval de celle-ci, la vitesse décroît progressivement, et atteint sa valeur minimal ( $u_e = 0$ ) pour  $\varphi = 180^\circ$

L'augmentation du module de la vitesse  $u_e$  est due à la croissance de la vitesse de l'écoulement libre (en d'hors de la couche limite)

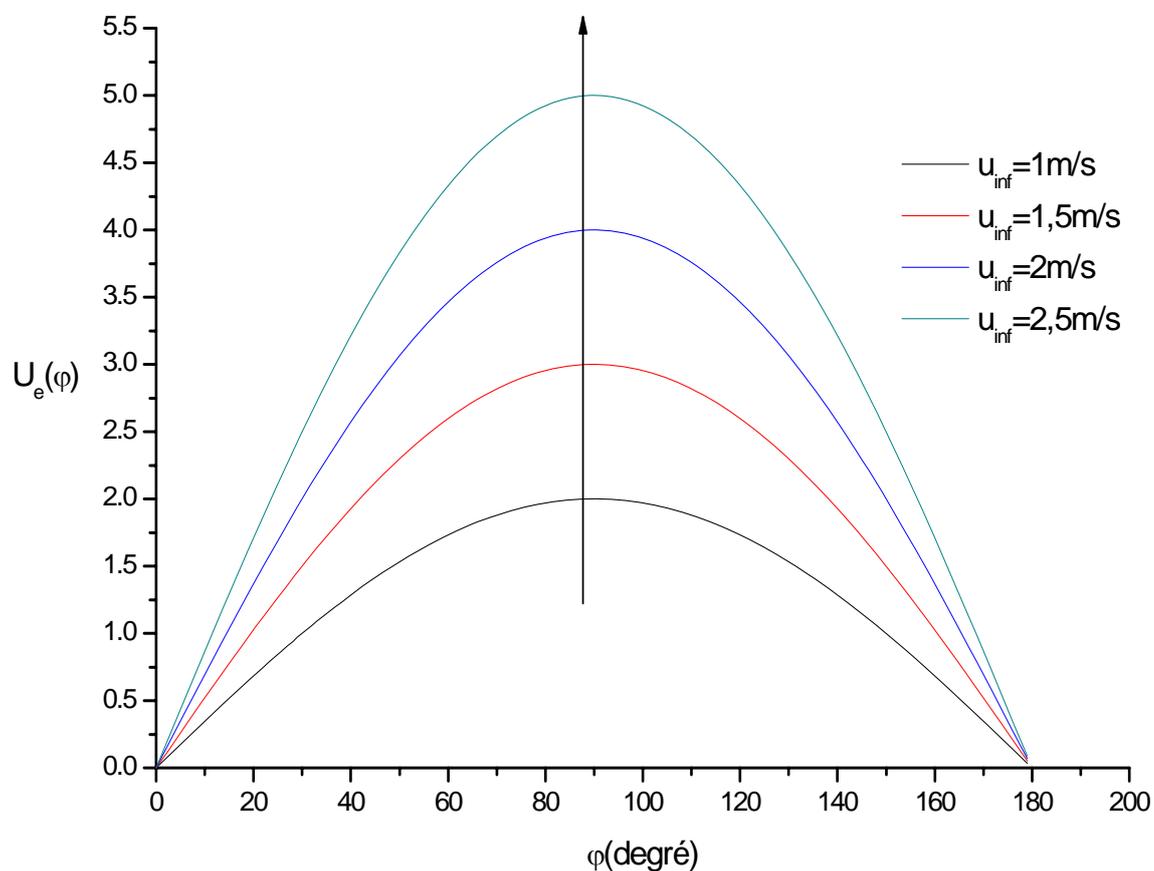


Figure 4.12 : Influence de la vitesse  $u_\infty$  sur la vitesse  $u_e(\varphi)$

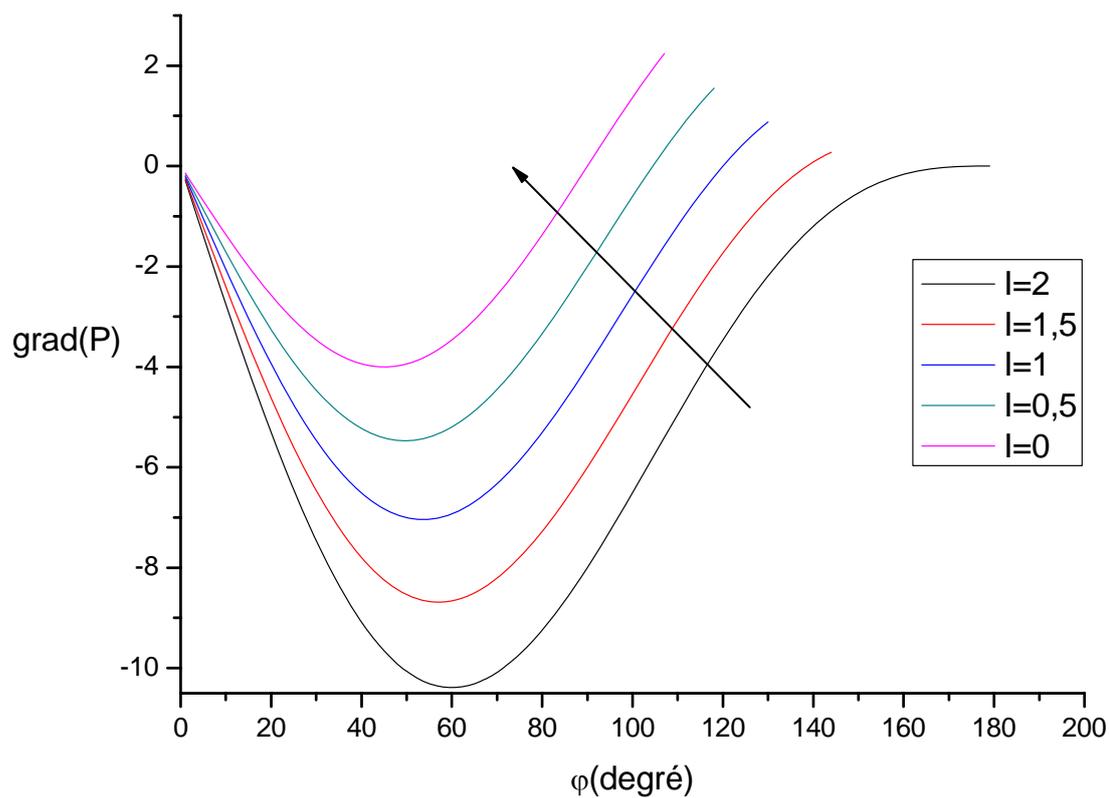
### 4.3 Champ de pression

Le gradient de pression dans la couche limite varie d'une manière différente dans deux régions adjacentes indépendamment du champ magnétique. Le champ magnétique porte son influence sur l'étendue de ces deux zones et sur l'amplitude de ce gradient. La figure 4.13 met en évidence ce phénomène pour un  $Re=1.2 \times 10^5$  et différentes valeurs du paramètre d'interaction magnétique. Le gradient de pression décroît sur la première zone qui s'étale de  $0^\circ$  à environ  $60^\circ$ , et s'accroît sur la deuxième puis s'étale sur des gammes très variables avec l'intensité du champ magnétique. En effet on observe sur la figure 4.13. que la zone de croissance des gradient de pression passe de  $(45^\circ - 93^\circ)$  pour  $I=0$  à  $(60 - 155^\circ)$  pour  $I=2$ .

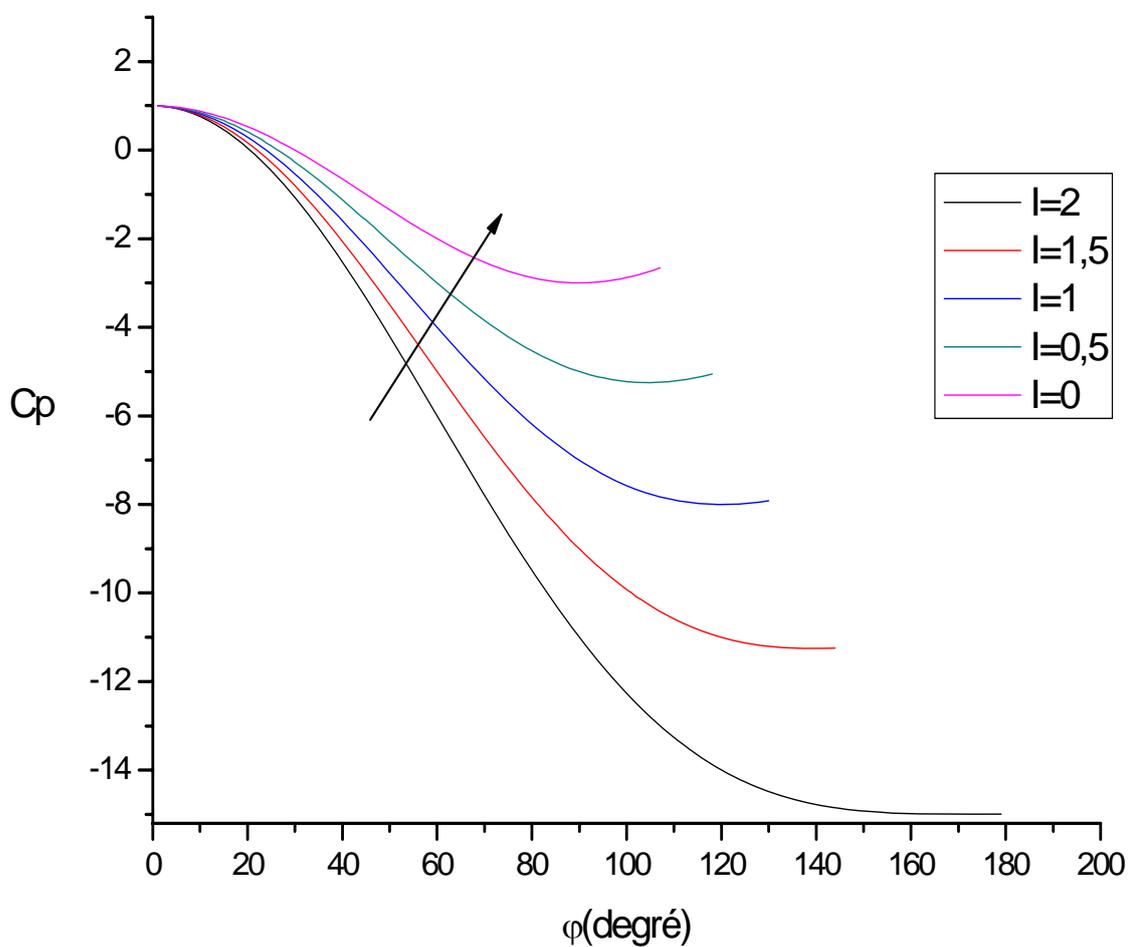
La figure 4.13, pour ( $I=0$ ,  $Re=1.2 \times 10^5$ ) montre que le gradient de pression est négatif entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 60^\circ$ , d'après S.Candel [26] ce gradient correspond à une accélération de l'écoulement dans la direction axial apparaît comme favorable. À partir de  $\varphi = 60^\circ$  le gradient de pression augmente dans la direction de l'écoulement. L'écoulement est donc dans un gradient de pression adverse, Dans ce cas les particules fluides subissent une décélération, voir figure 4.13, et il peut entraîner le décollement de la couche limite [26].

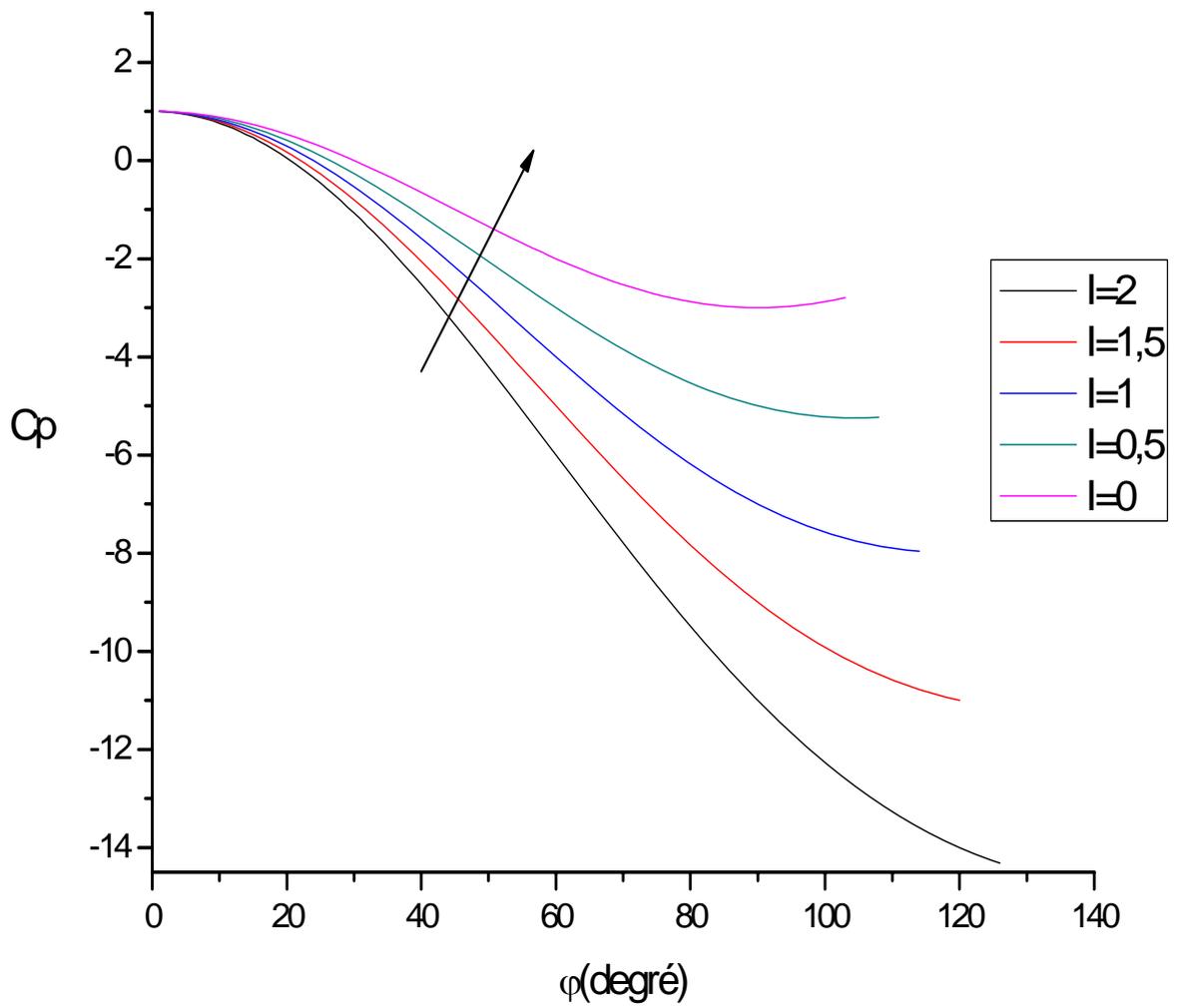
La figure 4.13 montre que si  $I$  augmente le gradient de pression total (magnétique + hydrodynamique) diminue, ce résultat explique bien le phénomène de déplacement du point de décollement vers l'aval.

Nous remarquons de même dans la figure 4.14. qu'il y a une diminution du coefficient de pression causé par l'augmentation de  $I$ , ce qui est conforme au résultat de réduction du gradient de pression.



**Figure 4.13 :** Influence du champ magnétique sur le gradient de pression total  
 Pour  $Re = 1.2 \times 10^5$





-b-

**Figure 4.14 :** Influence du champ magnétique sur le coefficient de pression  
 -a-  $Re = 1.2 \times 10^5$  ; -b-  $Re = 2.4 \times 10^5$

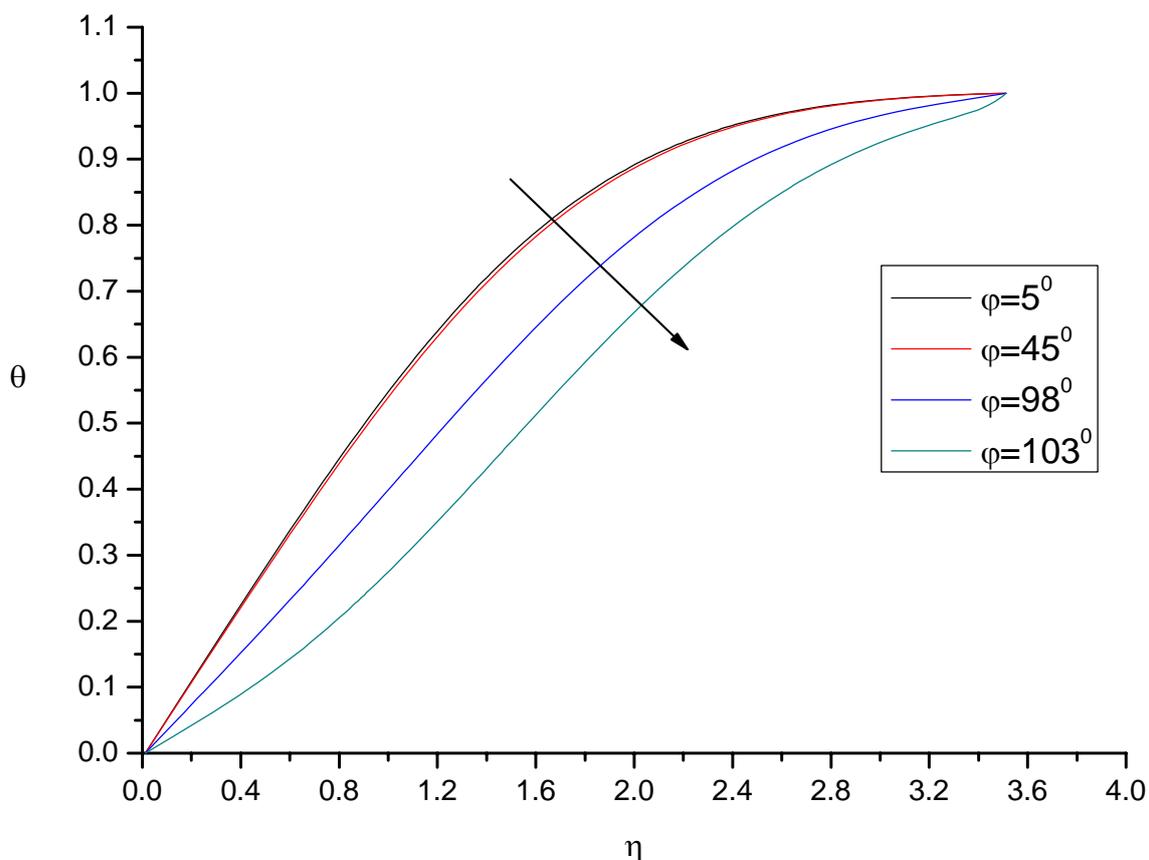
#### 4.4 Champ de température

##### 4.4.1 Influence de $Re$ sur le profil des températures :

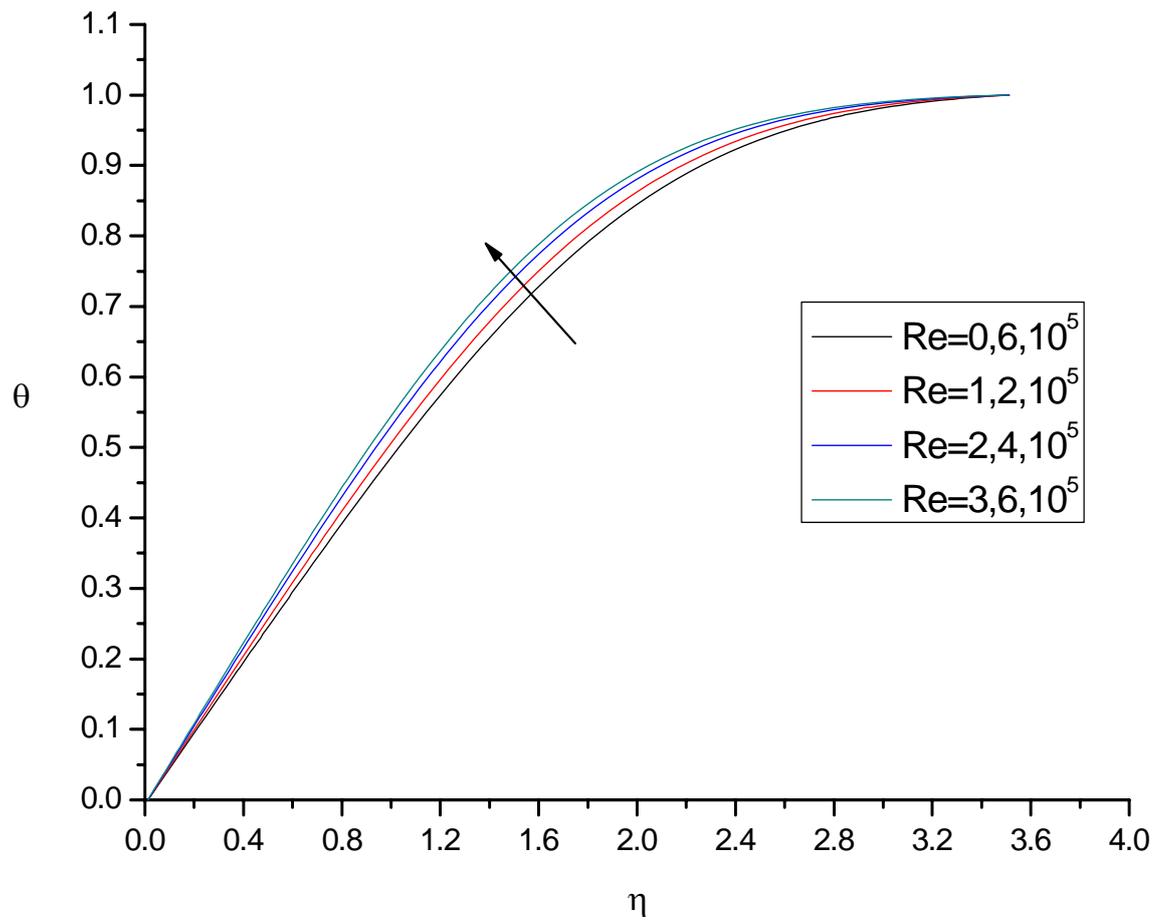
La figure 4.15 montre que, pour  $Re = 1.8 \cdot 10^5$ ,  $I=0$ , la température adimensionnelle  $\theta$ , des particules fluides qui se déplacent près de la paroi est plus faible. Le fluide perd son énergie et sa capacité thermique le long de l'écoulement.

A la surface de la paroi, la température du fluide est ramenée à zéro, car la paroi cylindrique est isotherme ( $\theta = 0$ ). À la limite externe de la couche limite, la température tend vers la valeur finie de l'écoulement extérieur,  $T_\infty$ , soit ( $\theta = 1$ ). L'épaisseur de la couche limite est généralement faible et par conséquent le gradient transversal de température est important dans cette région, voir la figure 4.15.

La figure 4.16 montre que l'augmentation du nombre de  $Re$  induit un échauffement de la couche limite, cause de la dégradation de l'énergie mécanique en énergie thermique.



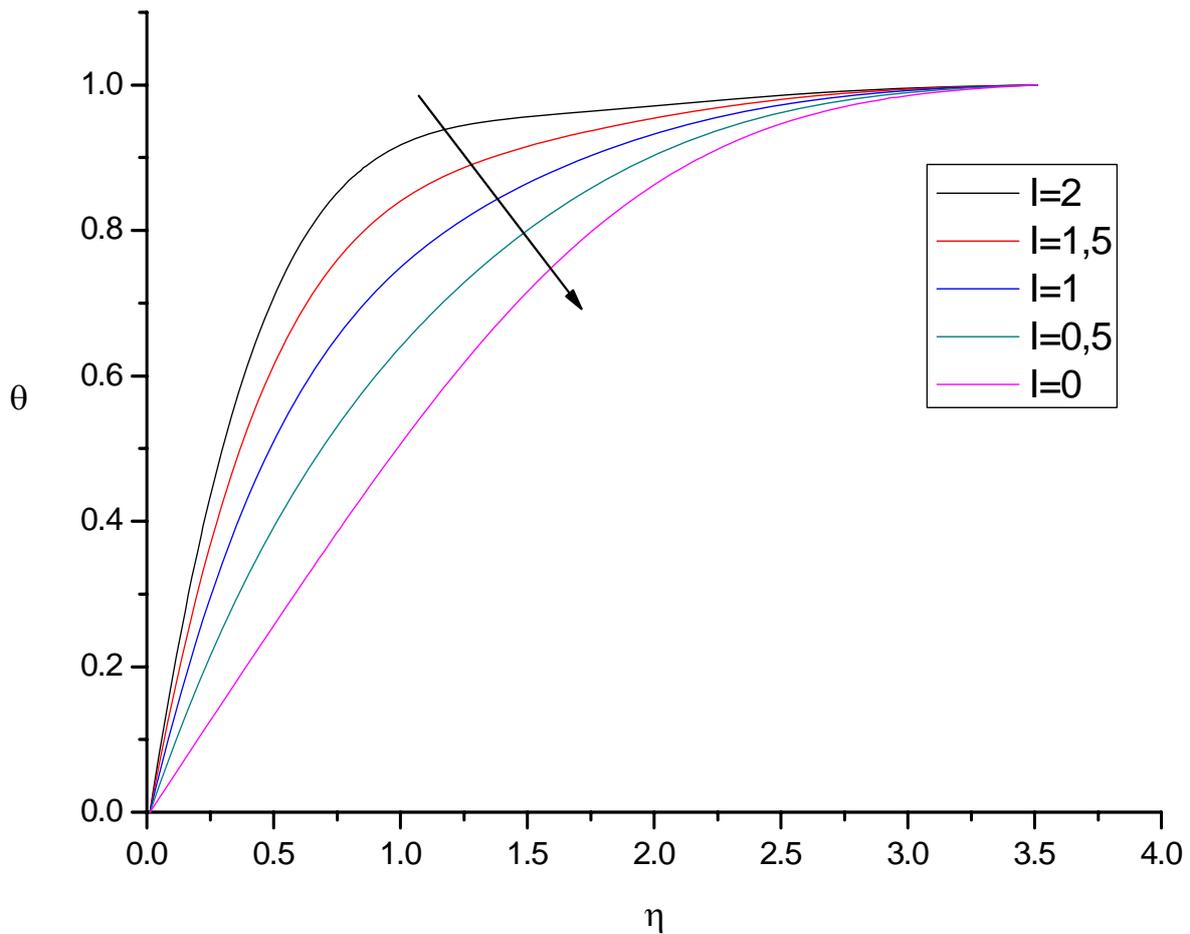
**Figure 4.15** : l'évolution de la température dans une section transversale  
De la couche limite



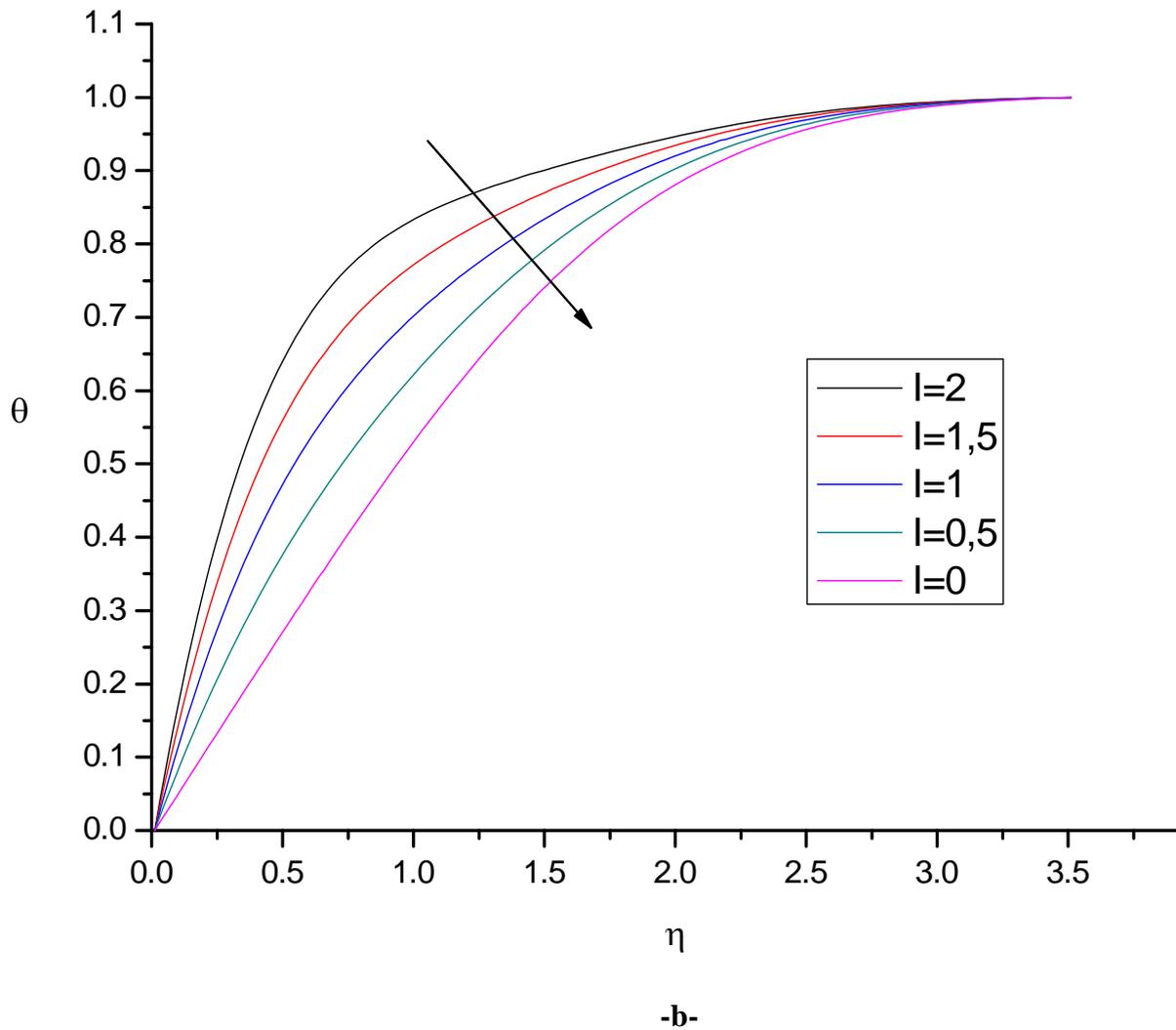
**Figure 4.16 :** Influence de  $Re$  sur le profil de température pour  $Pr = 0.9, I = 0$

#### 4.4.2 Influence du champ magnétique sur le profil de température :

La figure 4.17.-a- montre que le champ magnétique provoque un effet d'échauffement, en faisant augmenter la vitesse de variation du gradient de la température, cela peut s'expliquer par la force magnétique qui augmente l'énergie mécanique, qui se transforme par frottement dans la couche limite en énergie thermique. Il faut aussi souligner que cet apport est important en comparaison avec le cas de l'écoulement sans champ magnétique.



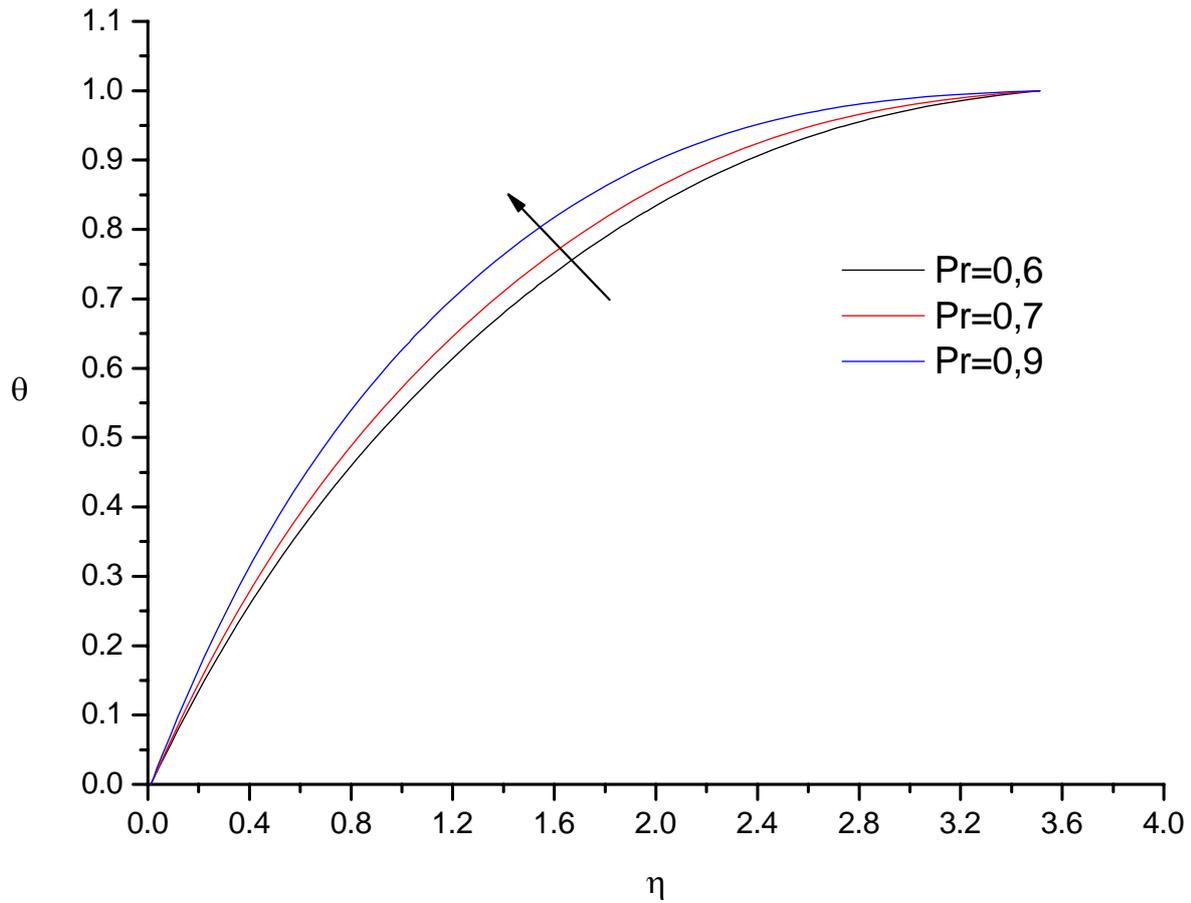
-a-



**Figure 4.17 :** Influence du champ magnétique sur le profile des températures pour  
 -a-  $Re = 1.2 \times 10^5$ , -b-  $Re = 2.4 \times 10^5$  ; ( $Pr = 0.9, \varphi = 60^\circ$ )

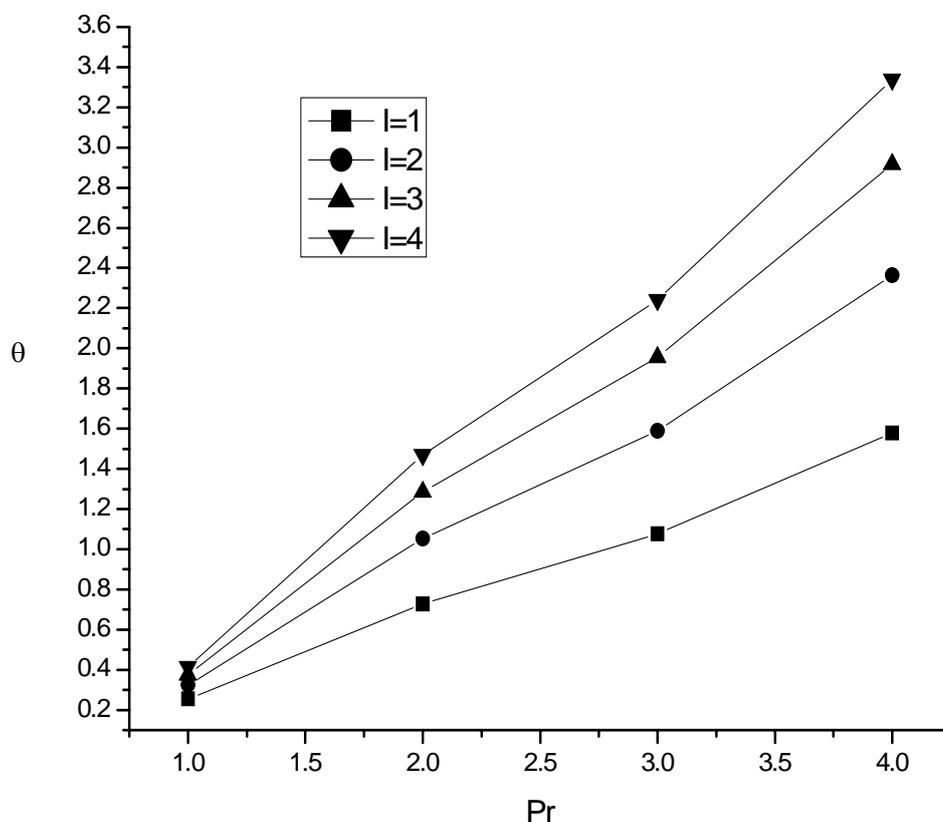
#### 4.4.3 Influence du $Pr$ sur le profil de température :

On remarque bien, l'importance de l'influence de Prandtl sur le champ des températures. En effet une faible variation de ce paramètre génère une variation qui peut aller jusqu'à  $\Delta\theta$  voisine de 0.06 qui représente une valeur relativement importante, Voir figure 4.18.



**Figure 4.18:** Influence de  $Pr$  sur le profil de température pour  $Re = 1.2 \times 10^5$ ,  $I = 0.44$

Pour le même nombre de Prandtl  $Pr$ , la température augmente avec l'augmentation du paramètre d'interaction magnétique  $I$ , mais la valeur de cette augmentation dépend du nombre de  $Pr$ , la figure 4.19 montre que pour  $Pr = 1$ , la température prend les valeurs suivantes : 0.26, 0.31, 0.37, 0.43 pour les valeurs 1, 2, 3, 4 de  $I$  successivement, par contre dans le cas où  $Pr = 4$ , et pour les mêmes valeurs précédentes de  $I$ , la température prend les valeurs suivantes : 1.58, 2.36, 2.91, 3.34, donc on peut dire que pour les mêmes valeurs de  $I$ , l'augmentation de la température est très élevée pour des nombres de Prandtl élevés.



**Figure 4.19** : Influence de  $I$  sur les profile de température pour différentes valeurs de  $Pr$

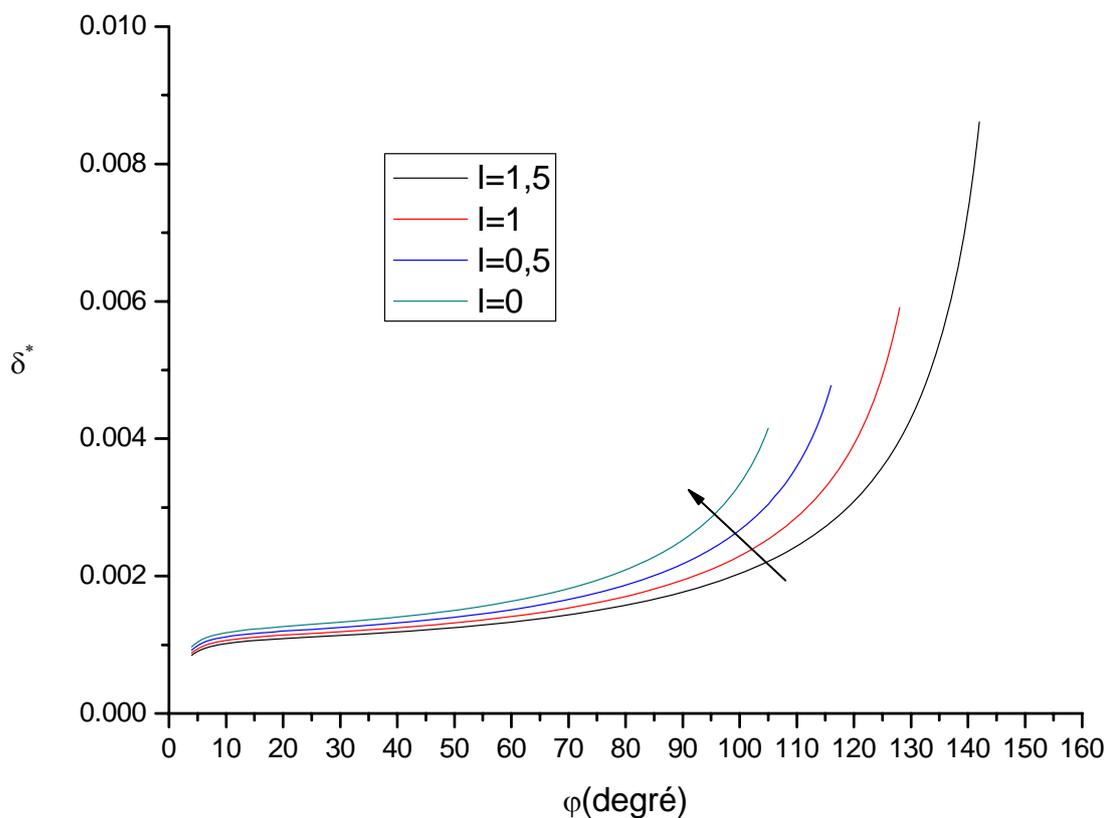
## 4.5 Paramètres caractéristiques de la couche limite

### 4.5.1 L'épaisseur de déplacement de la couche limite

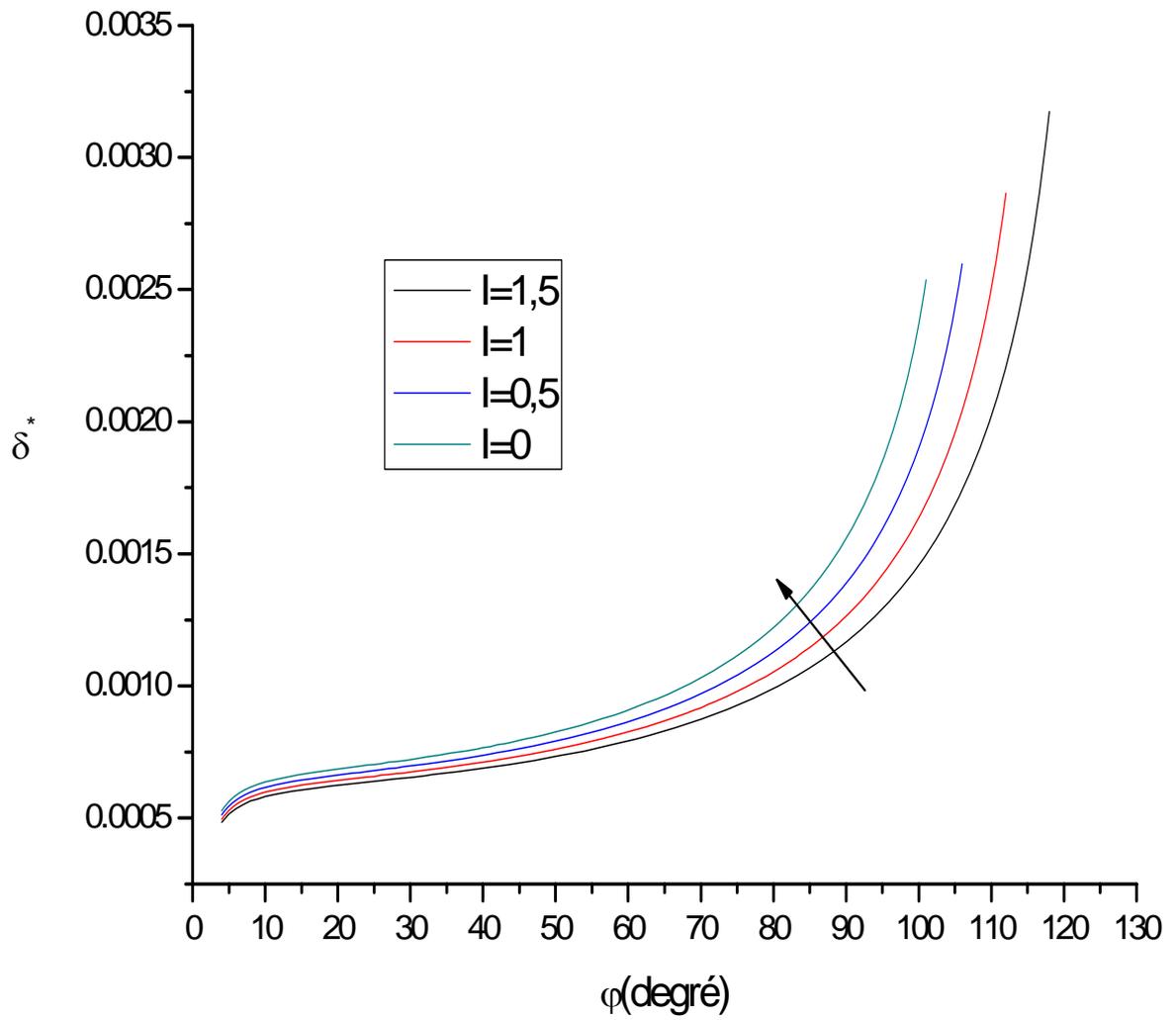
L'épaisseur de déplacement de la couche limite s'accroît continuellement à partir de bord d'attaque du fait du ralentissement de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite, et pour maintenir le même débit massique que l'écoulement non visqueux,  $c'$  est une fonction de  $\varphi$  et pas une constante, voire Figure 4.20.-a-. On observe que l'épaisseur de déplacement de la couche limite décroît avec l'augmentation de  $I$ , ce qui signifie que la force magnétique joue le rôle d'une force de pression qui accélère le fluide dans la couche limite.

D'autre part, on remarque le même rôle que joue le champ magnétique, l'augmentation du nombre de Reynolds diminue l'épaisseur de déplacement de la couche limite comme le montre la figure 4.20.-a- et -b-

Et la figure 4.20 b pour  $Re = 2.4 \times 10^5$ , montre que l'augmentation du  $Re$  aura pour effet une diminution de l'épaisseur de déplacement la couche limite.



-a-



-b-

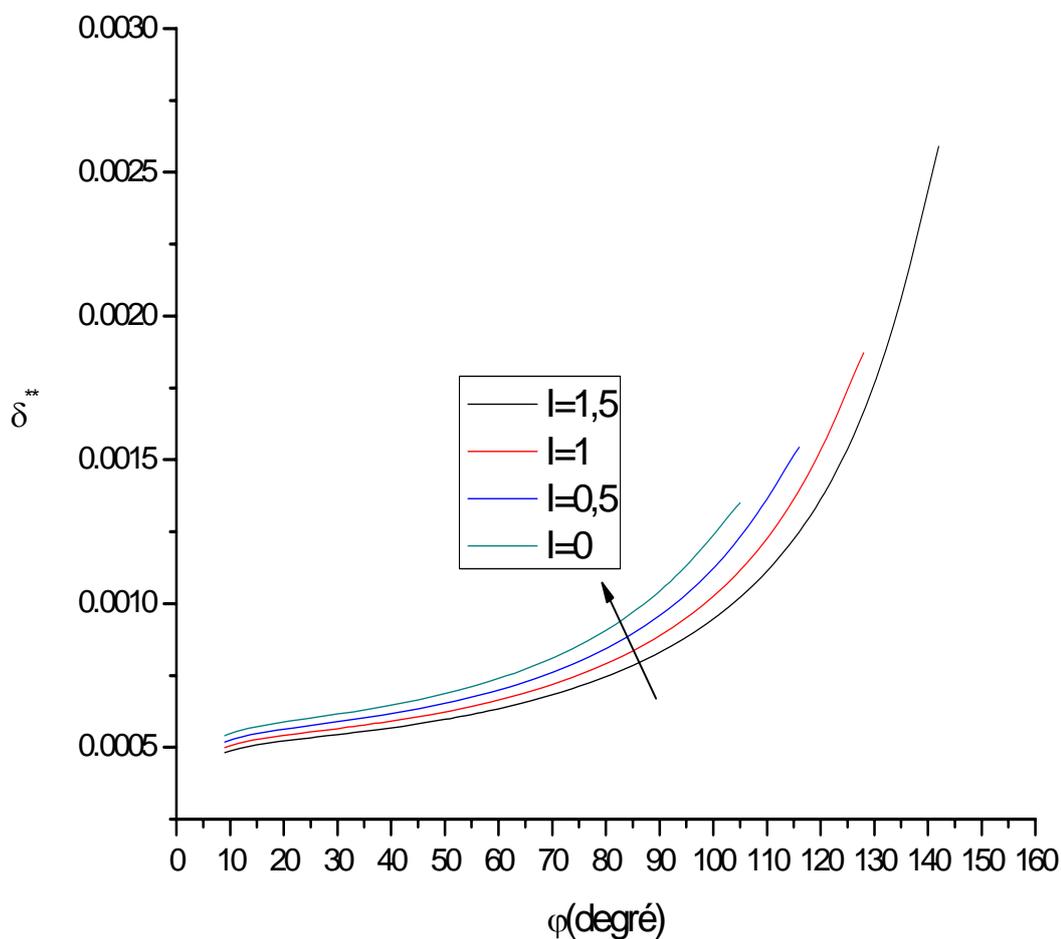
**Figure 4.20 :** Influence du  $Re$  sur l'épaisseur de déplacement en présence D'un champ magnétique

-a-  $Re = 1.2 \times 10^5$  ; -b-  $Re = 2.4 \times 10^5$

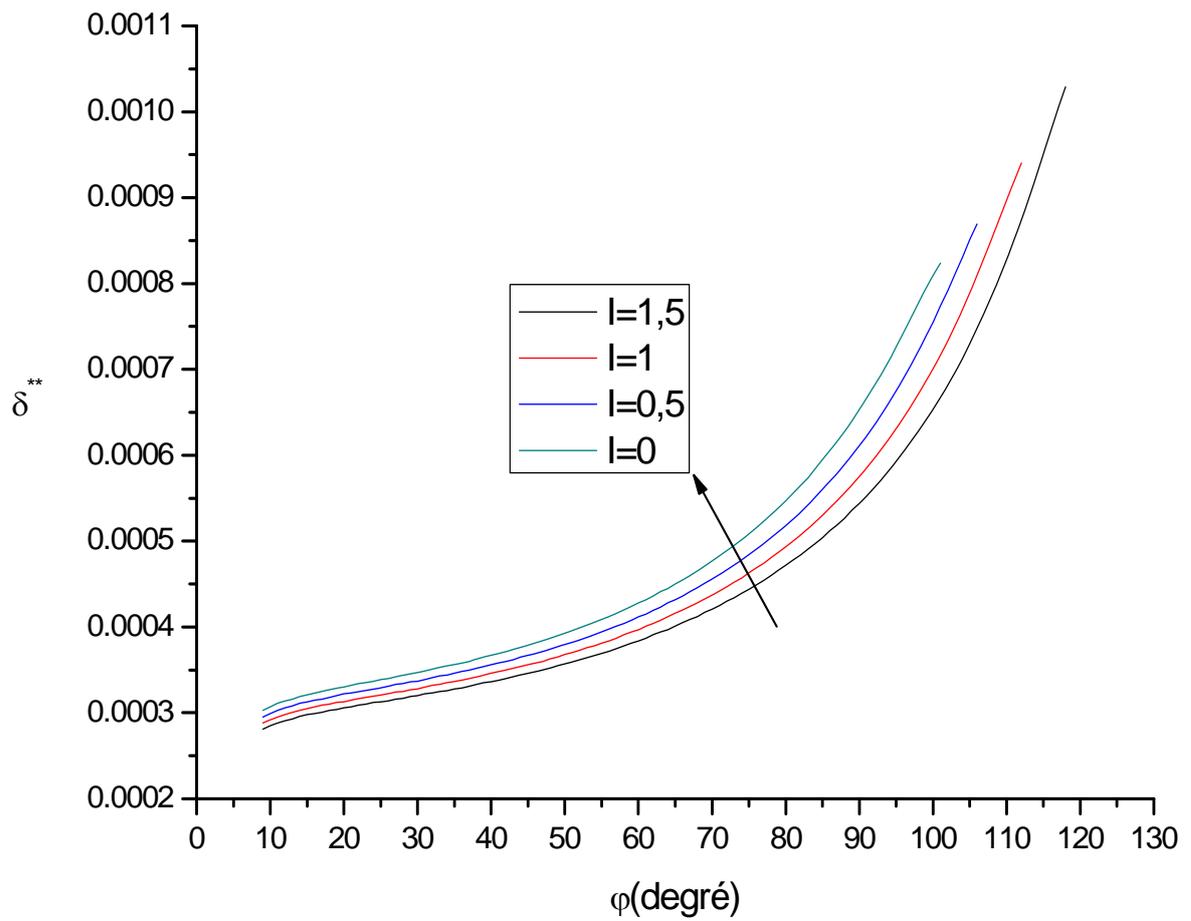
#### 4.5.2 L'épaisseur de quantité de mouvement

L'épaisseur de quantité de mouvement s'accroît continuellement à partir de bord d'attaque du fait du ralentissement de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite, figure 4.21.- a-.

La variation de la quantité de mouvement du fluide est produite par les forces qui s'exercent sur la surface du volume de contrôle de la couche limite, donc l'injection d'une force magnétique extérieur au sens inverse de la contrainte visqueuse fait diminuer l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite. La figure 4.21.- a- illustre cet effet, et montre que cette épaisseur diminué avec l'augmentation de paramètre d'interaction magnétique  $I$  comme c'est le cas aussi pour l'effet du nombre de Reynolds, voir figure 4.21.-b-.



-a-

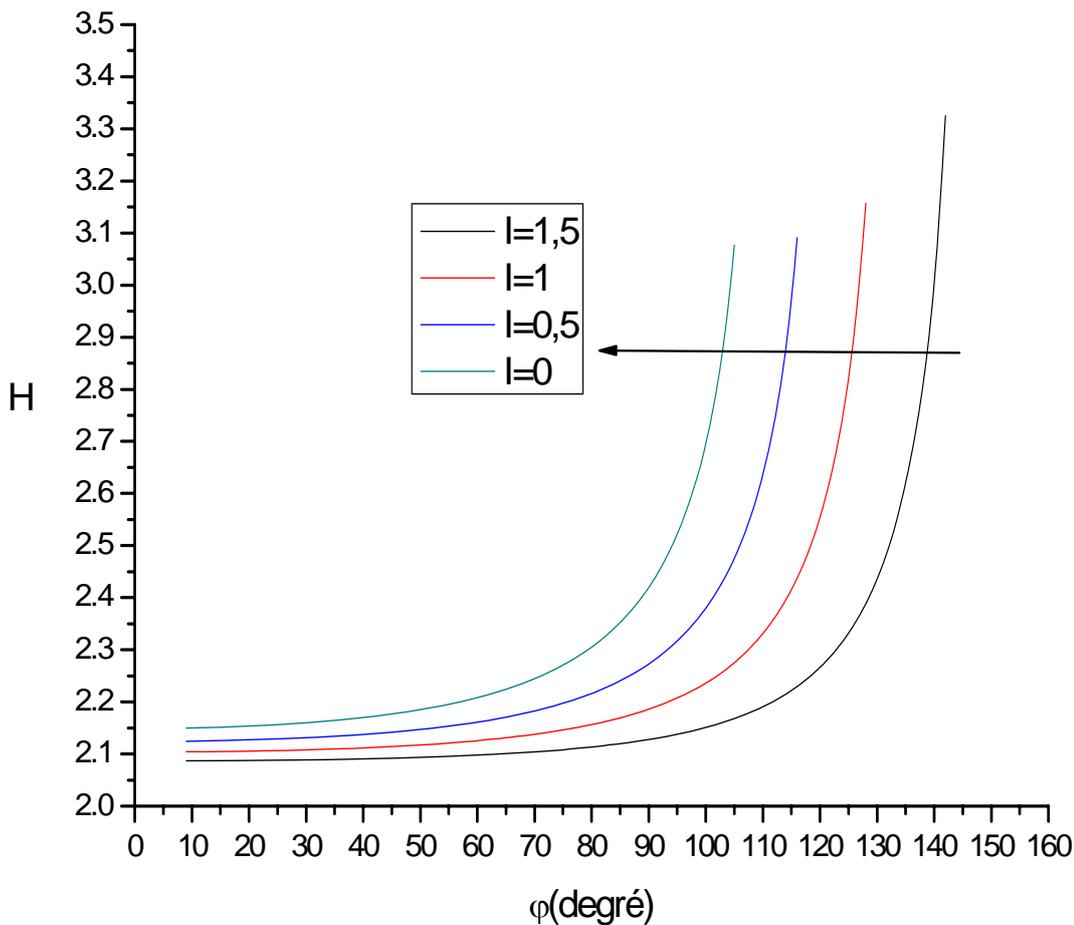


-b-

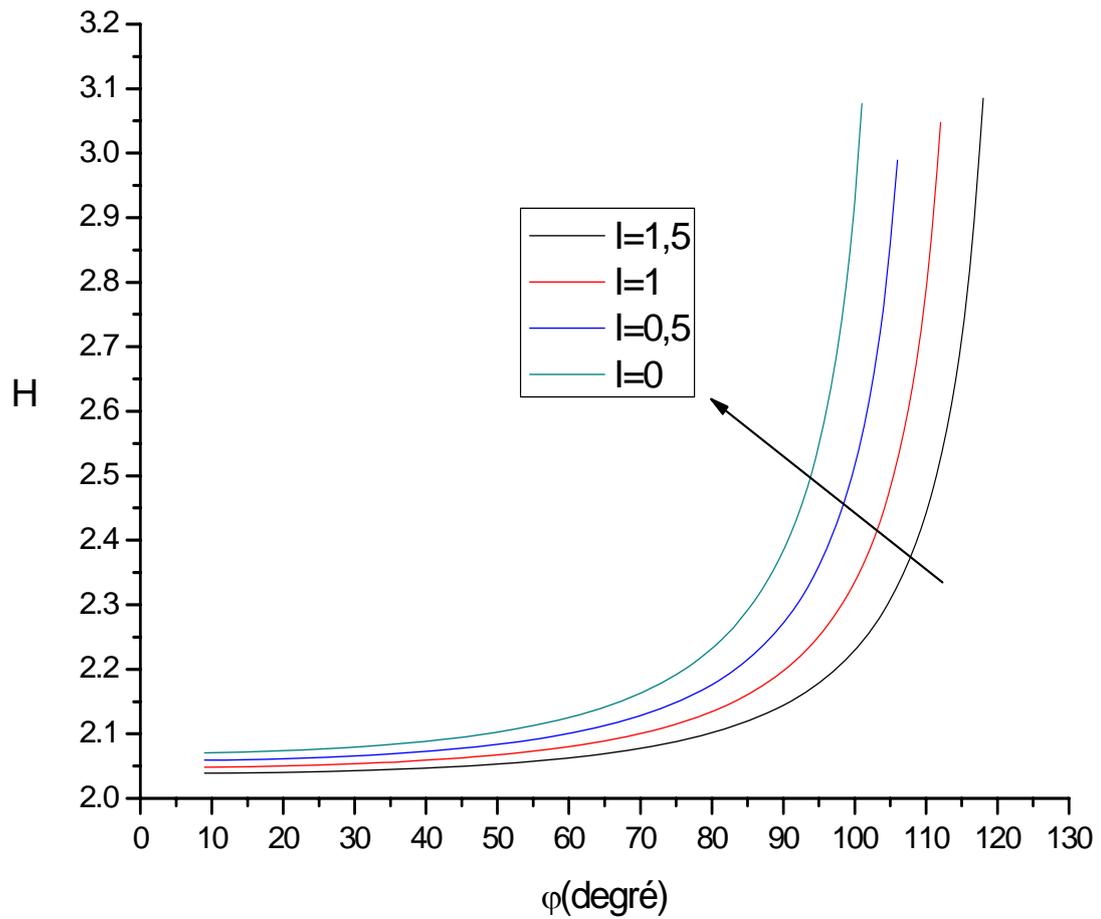
**Figure 4.21** : Influence du champ magnétique sur l'épaisseur de quantité de mouvement  
 -a-  $Re = 1.2 \times 10^5$  ; -b-  $Re = 2.4 \times 10^5$

4.5.3 Facteur de forme de la couche limite

Le facteur de forme  $H$  désigne le rapport du déplacements de l'épaisseur de la couche limite et de sa quantité de mouvement  $\delta^*/\delta^{**}$ . Et comme  $\delta^*$  et  $\delta^{**}$  s'accroissent continuellement à partir de bord d'attaque, et diminue avec l'augmentation de  $I$ , ce facteur est soumis aux même effets et suit alors l'allure semblables à celles de  $\delta^*$  et  $\delta^{**}$  comme on le remarque sur la figure 4.22.-a- et -b-.



-a-



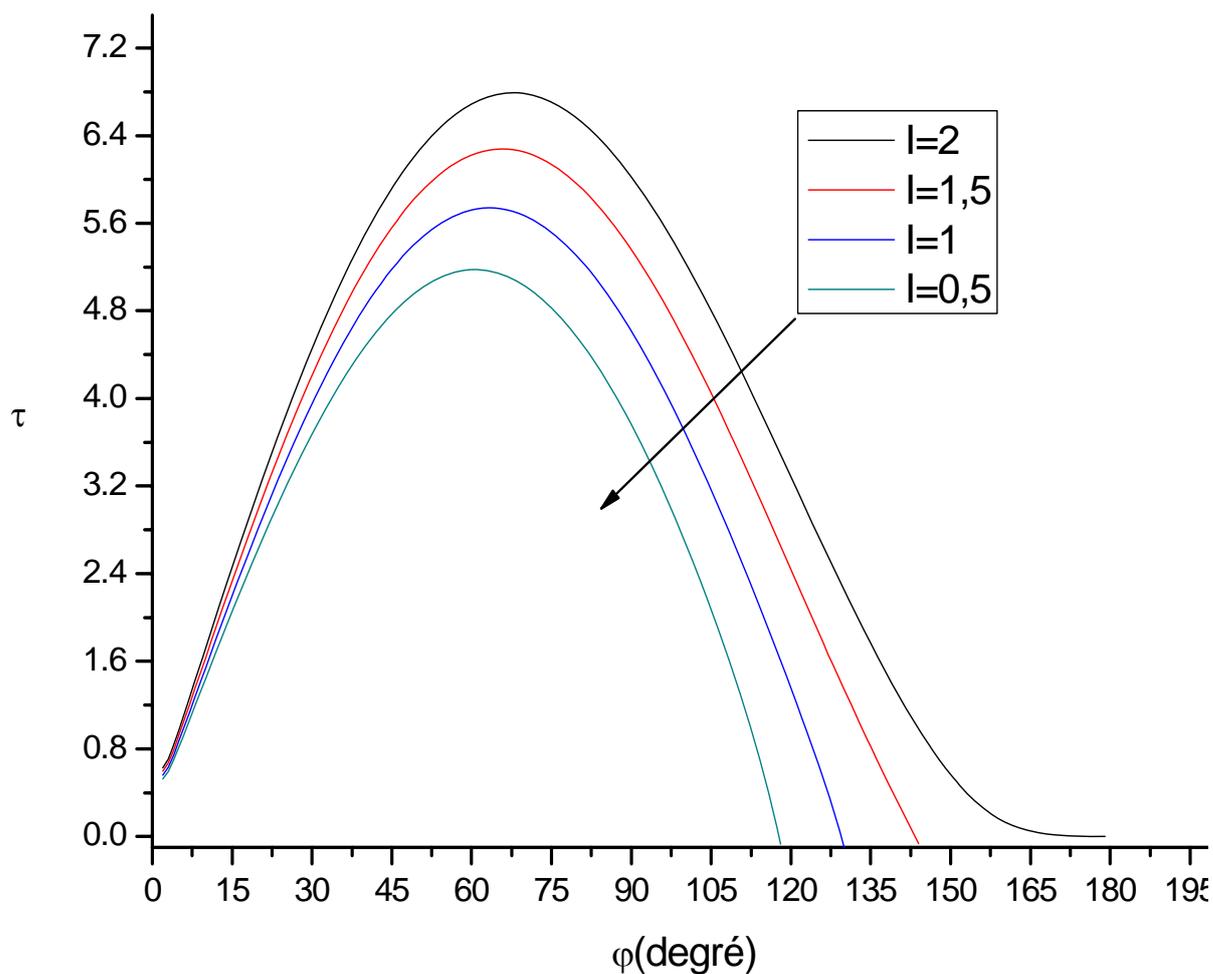
-b-

**Figure 4.22 :** Influence du champ magnétique sur le facteur de forme  
 -a-  $Re = 1.2 \times 10^5$  ; -b-  $Re = 2.4 \times 10^5$

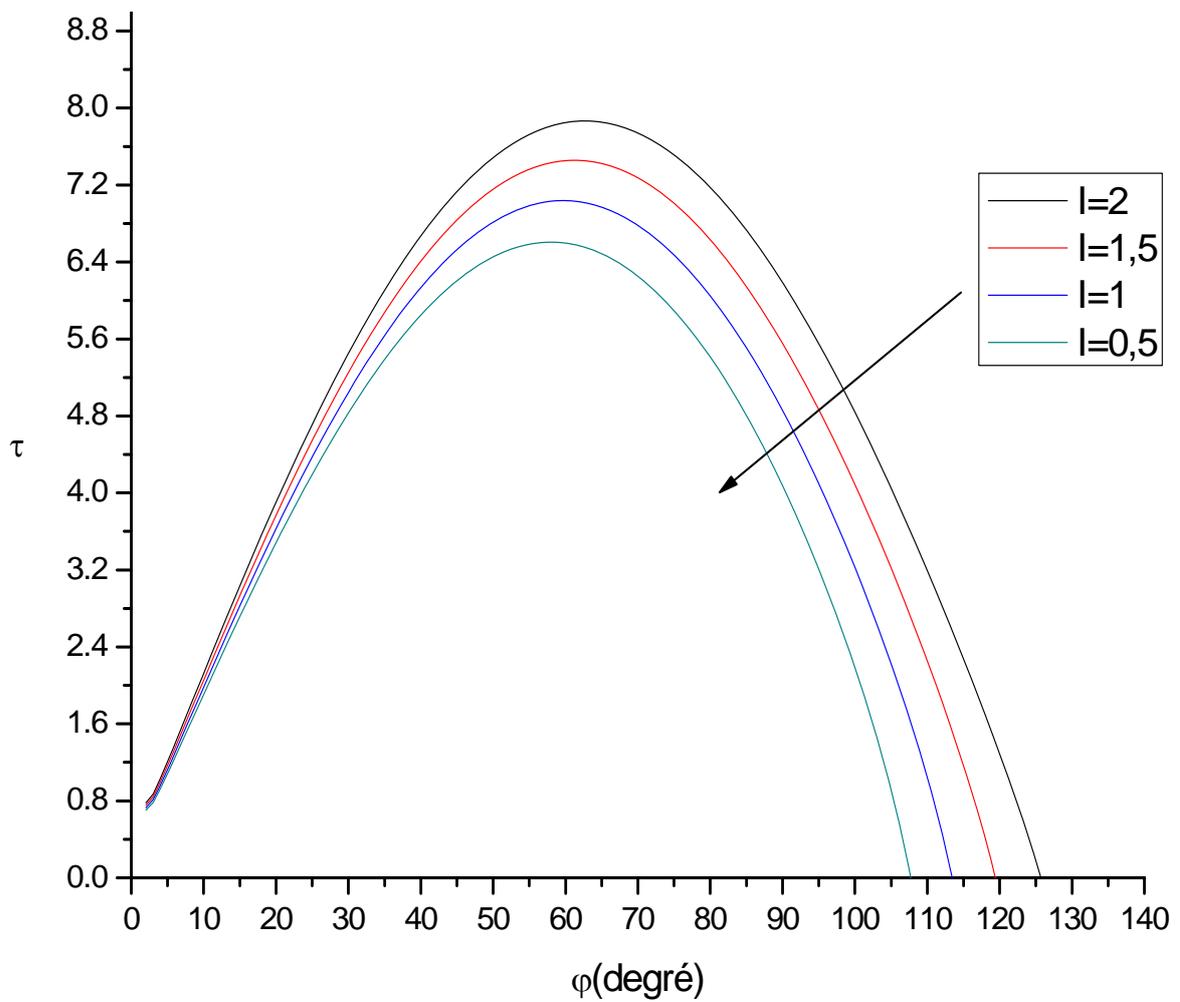
#### 4.5.4 Les contraintes visqueuses

##### 4.5.4.1 Influence du champ magnétique sur les contraintes visqueuses

La figure 4.23.-d- montre que les contraintes visqueuses augmentent avec l'augmentation du paramètre d'interaction magnétique  $I$ , la figure 4.23.-b- montre que si  $Re$  augmente les contraintes visqueuses augmentent plus que précédemment. Par ailleurs, pour  $Re= 1.2.10^5$  ou  $Re= 2.4.10^5$ , Le max de  $\tau$  est repoussé vers l'arrière du cylindre avec l'augmentation du champ magnétique.



-a-



-b-

Figure 4.23 : Influence du champ magnétique sur les contraintes visqueuses

-a-  $Re = 1.2 \cdot 10^5$  ; -b-  $Re = 2.4 \cdot 10^5$

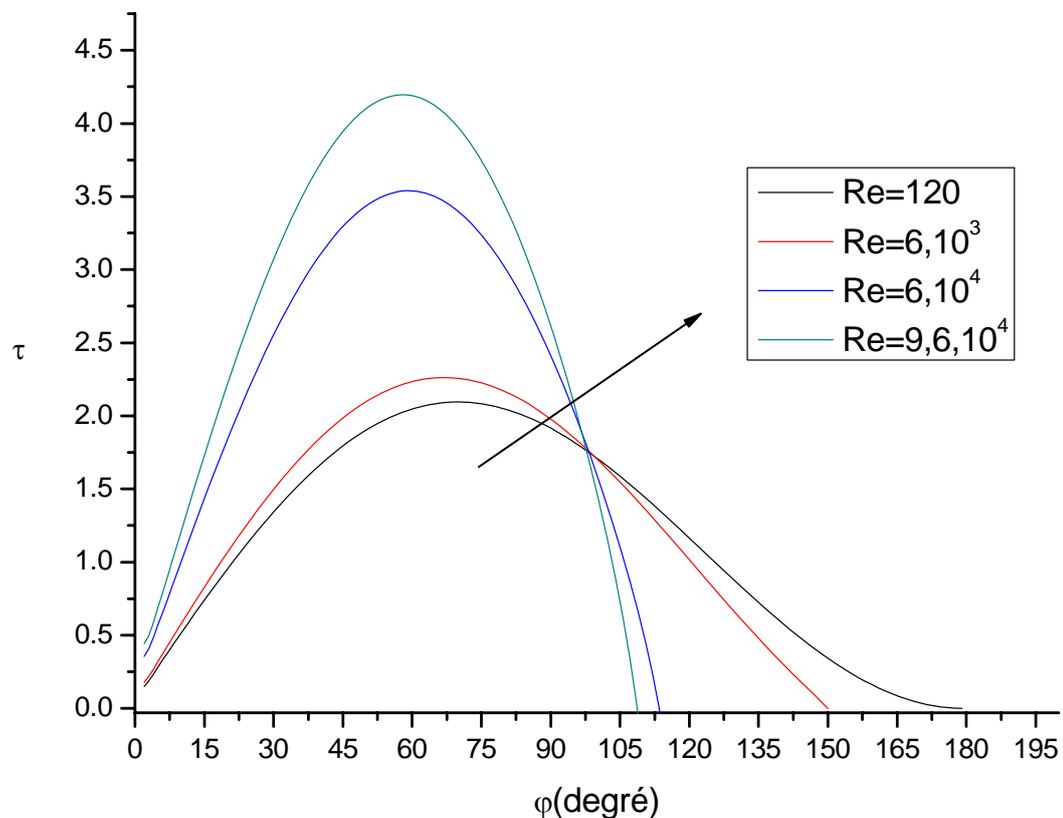
#### 4.5.4.2 Influence du $Re$ sur les contraintes visqueuses

On observe aussi que les contraintes maximales se situent à des positions différentes suivant la valeur du nombre de Reynolds. L'augmentation du nombre de Reynolds déplace la zone où règne la contrainte maximale vers le point d'arrêt, et fait en conséquence rétrécir la zone d'application de la contrainte de frottement. Il est à noter aussi l'apparition d'un fait remarquable qui représente l'existence d'un point sur le cylindre  $\varphi = 98.23^{\circ}$  où la contrainte visqueuse prend une valeur unique quelque soit le nombre de Reynolds,  $\tau = 1.75$ , voire la figure 4.24.

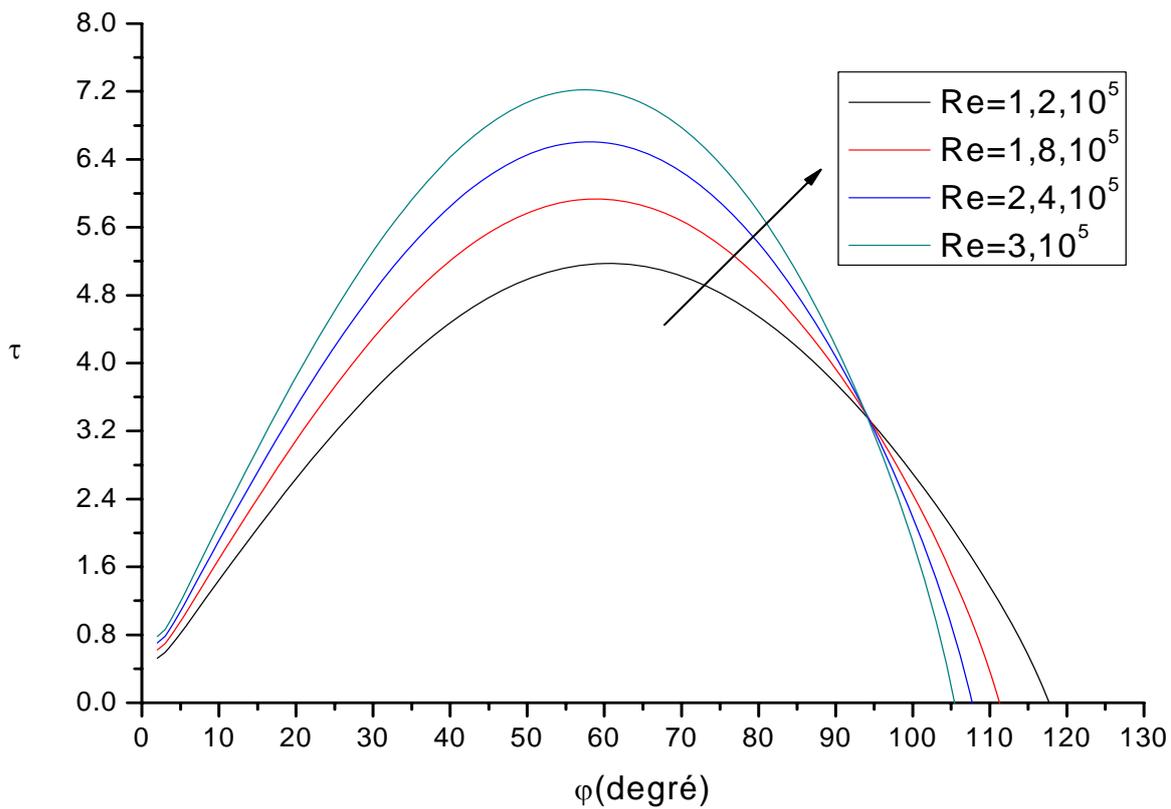
D'autre part cette valeur est influencée par la variation du champ magnétique. En effet le champ magnétique a un effet important sur la valeur, comme sur la position où elle règne cette contrainte. L'augmentation de l'intensité du champ magnétique augmente les contraintes visqueuses, voir la figure 4.25.-a,-b,-c,-d-.

En conclusions que l'augmentation du paramètre  $I$  fait accroître cette contrainte, et déplace légèrement sa position vers l'amont de l'écoulement, figure 4.26.

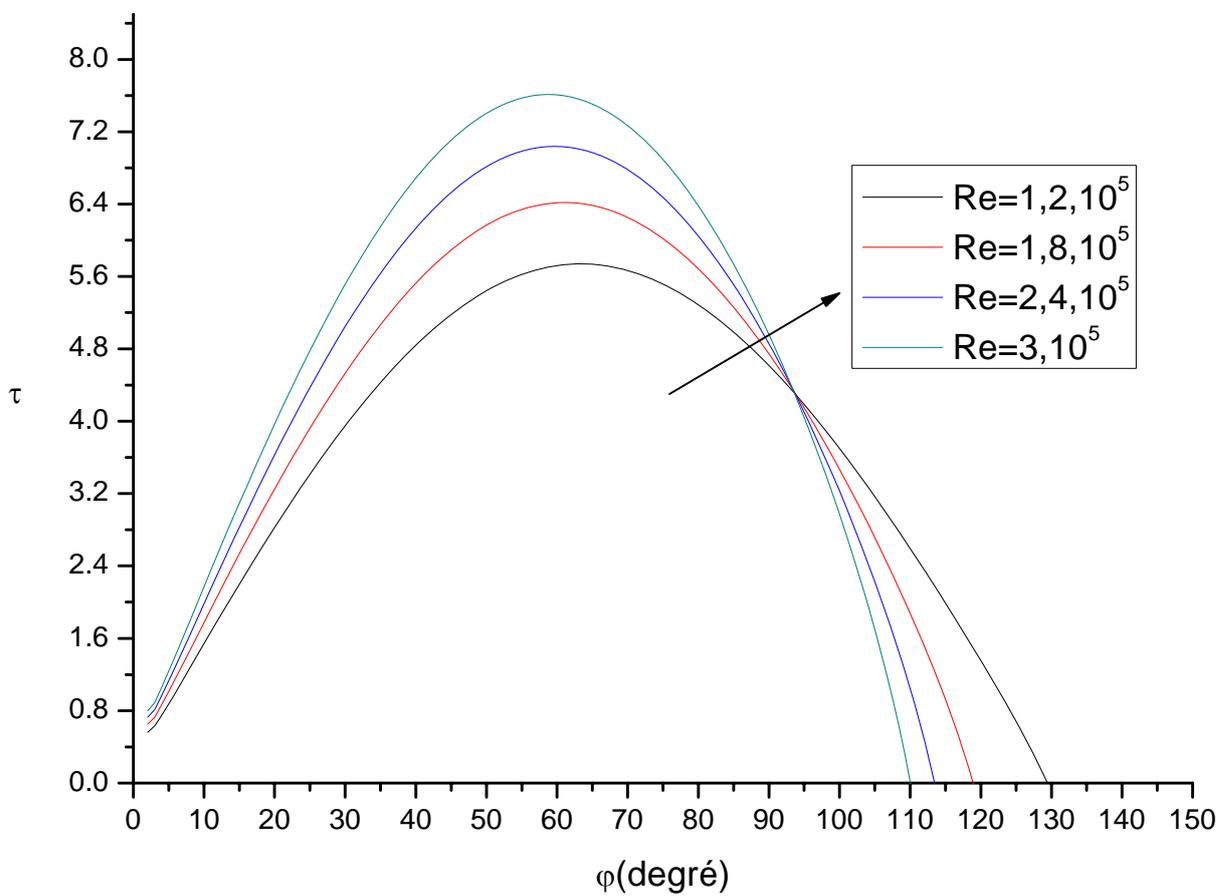
La figure 4.27 montre, par exemple pour  $Re=1.2.10^5$ , que l'augmentation du paramètre  $I$  fait accroître la contrainte maximale, et déplace sa position vers l'aval.



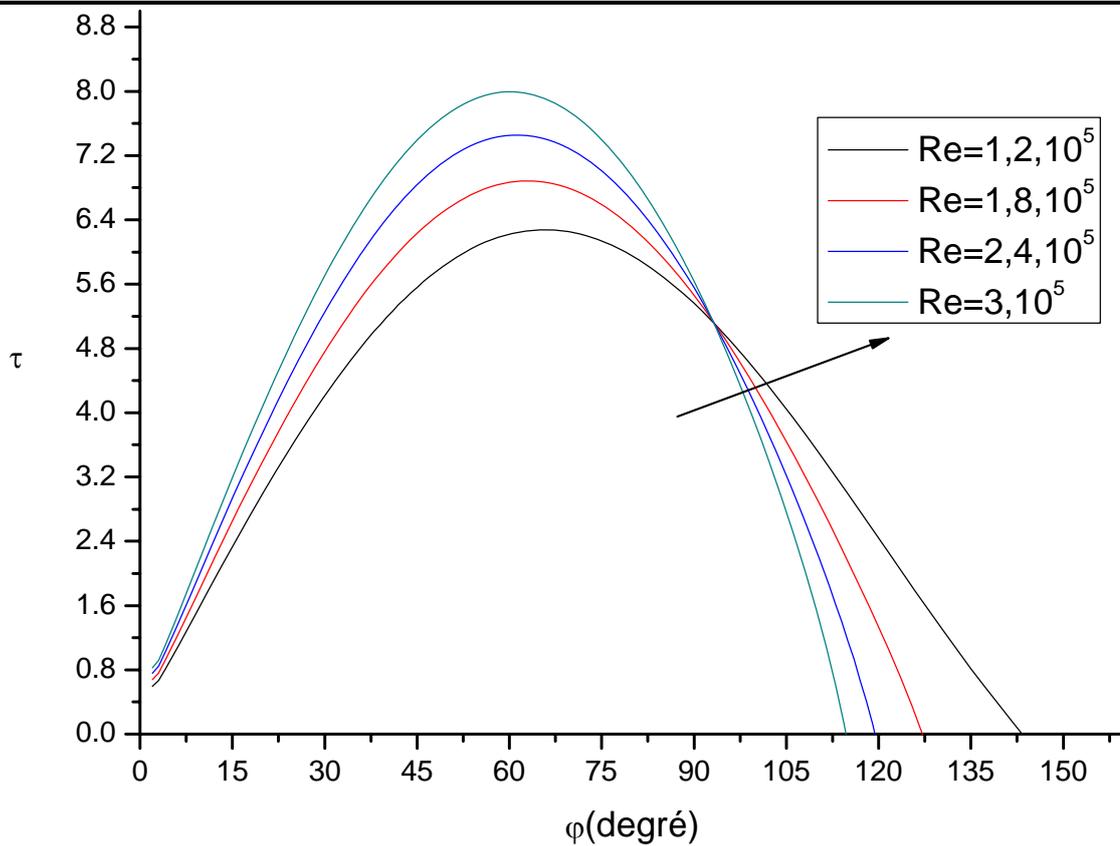
**Figure 4.24 :** Influence du  $Re$  sur les contraintes visqueuses pour  $I=0$ .



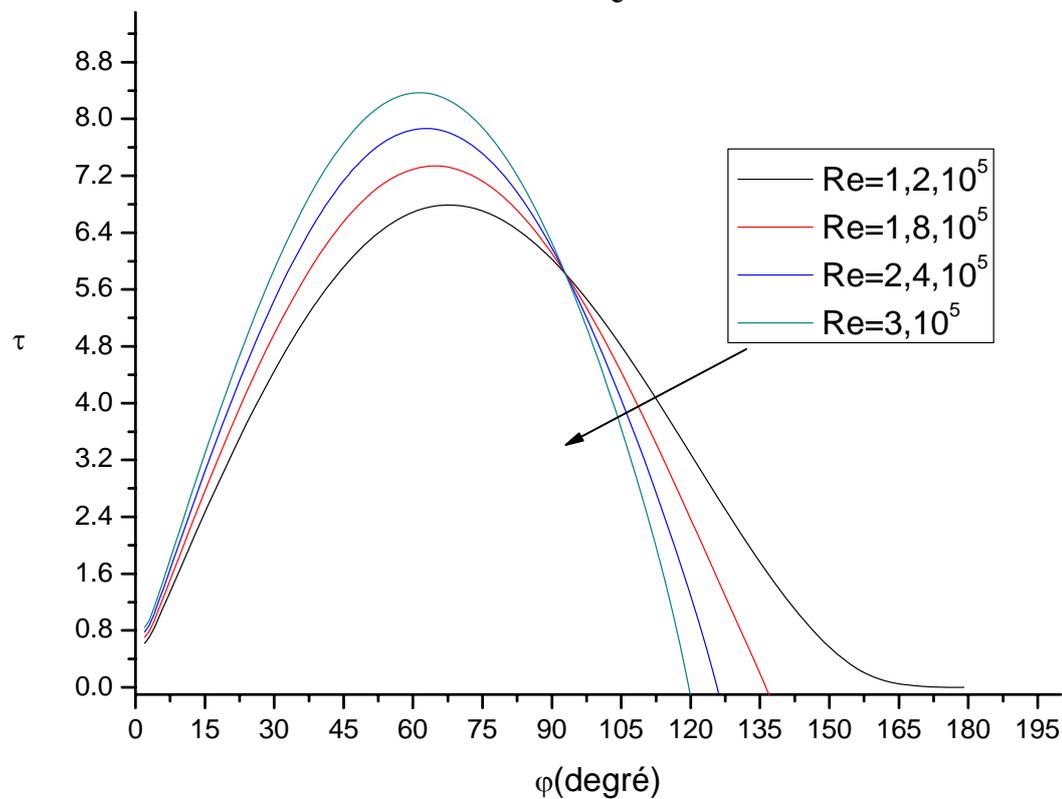
-a-



-b-



-c-



-d-

Figure 4.25 : Influence du  $Re$  sur les contraintes visqueuses en présence d'un champ magnétique  
 -a-  $I=0.5$  ; -b-  $I=1$  ; -c-  $I=1.5$  ; -d-  $I=2$

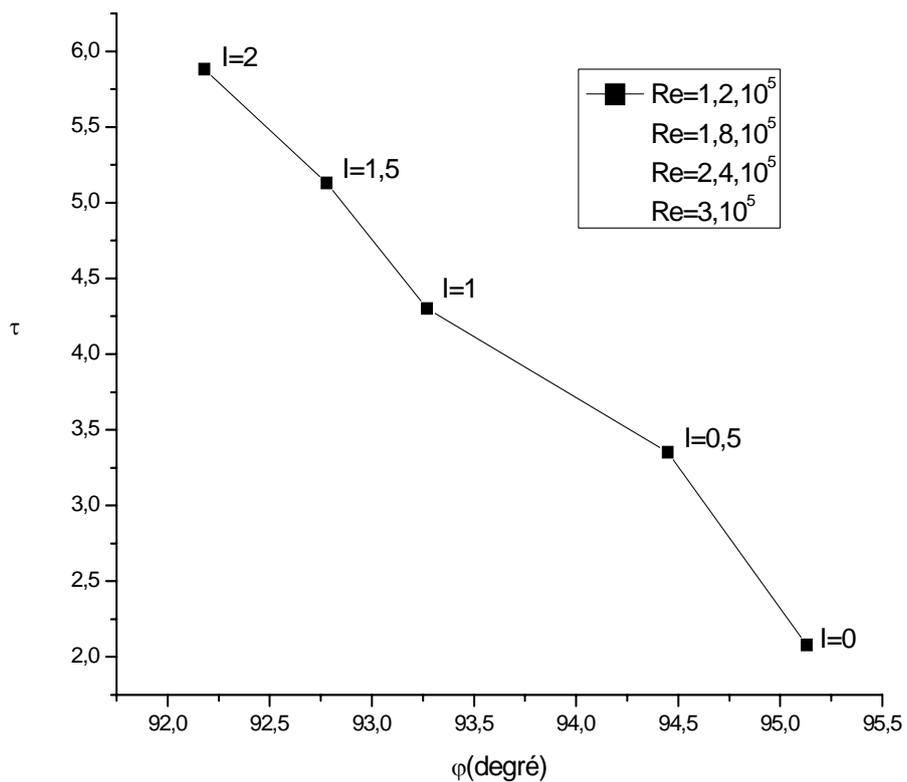


Figure 4.26 : Influence de I sur la valeur et la position de la contrainte commune pour divers nombres de Re

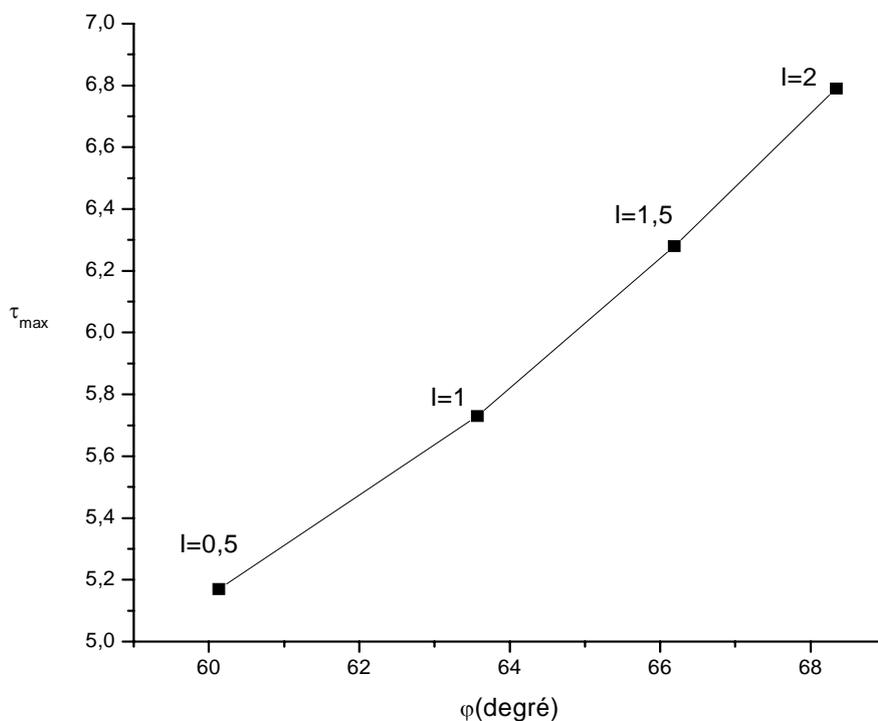


Figure 4.27 : Influence de I sur la position des contraintes Maximal pour  $Re=1.2.10^5$

# CONCLUSION GENERALE

## CONCLUSION GENERALE

Ce travail présente une étude numérique d'une couche limite magnétohydrodynamique se développant sur la paroi d'un obstacle cylindrique en présence d'un champ magnétique perpendiculaire à l'écoulement. Le programme de calcul élaboré nous a permis de se rapprocher aux résultats expérimentaux [22] qui représentent sa validation.

Notre étude comporte une analyse des phénomènes thermique et dynamique dans la couche limite avec et sans champ magnétique.

- On remarque bien que l'augmentation du nombre de Reynolds repousse le point de décollement vers l'amont de l'écoulement et induit un échauffement de la couche limite.
- L'augmentation du nombre de Reynolds déplace la zone où règne la contrainte maximale vers le point d'arrêt et fait, en conséquence, rétrécir la zone d'application de la contrainte de frottement.
- l'augmentation du nombre de Reynolds diminue l'épaisseur de déplacement de la couche limite de la quantité de mouvement.
- L'existence d'un point sur le cylindre où la contrainte visqueuse prend une valeur fixe quelque soit le nombre de Reynolds.
- Si  $I$  augmente le gradient de pression total (magnétique + hydrodynamique) diminue.
- Le champ magnétique provoque un effet d'échauffement, en faisant augmenter la vitesse de variation du gradient de la température. Il faut aussi souligner que cet apport est important en comparaison avec le cas de l'écoulement sans champ magnétique.
- Le champ magnétique diminue l'épaisseur de déplacement de la couche limite et de la quantité de mouvement.
- Le champ magnétique a un effet sur la valeur de la contrainte visqueuse, aussi bien que sur la position où elle règne cette contrainte.
- On note bien l'influence du champ magnétique sur le champ thermique qui est relativement importante par rapport à celle de l'effet hydrodynamique. Ce point de vue pourra faire une issue à penser sur l'utilisation du champ magnétique pour la production de la chaleur.
- La valeur de  $I$  où le point de décollement disparaît est proportionnelle au nombre de  $Re$ .
- En résumé, on peut affirmer que les effets des phénomènes magnétique et hydrodynamique sur les caractéristiques de la couche limite magnétohydrodynamique sont antagonistes.



## Bibliographie

- [1] V.J.Modi, F. Mokhtarian, T. Yokozimo, Moving surface boundary layer control as applied to 2-d airfoils, AIAA paper, 1989, pp. 89-0296.
- [2] I. Wyganski, Boundary layer flow control by periodic addition of momentum, in: 4<sup>th</sup> AIAA shear flow control Conference, Silvertree Hotel Snomass Village, CO, June 29-July 2, 1997.
- [3] D.C. Me Cormick, boundary layer separation control with directed synthetic jets, AIAA paper, 2000-0519, January 2000.
- [4] F.G. Collins, Boundary layer control on wings using sound and leading edge serrations, 1979, pp. 1875-1979.
- [5] P.K. Chang, control of flow separation, Hemisphere, Washington, DC, 1976.
- [6] M.Gad-el-Hak, Flow control, Passive, Active and Reactive Management, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2000.
- [7] J.Favier, A.Kourta, Etude du contrôle du décollement sur un profil d'aile par mesures PIV et analyse POD, C.R.Mecanique, Toulouse, France, 2006
- [8] Meng, J.C.S., 1994. Seawater electromagnetics. A new frontier. *Magnetohydrodynamics* 30, 401-418.
- [9] Gailitis, A., Lielausis, O., On the possibility to reduce the hydrodynamics drag of a plate in an electrolyte. *Appl. Magnetohydrodynamics, Rep. Inst. Phys. Riga* 13, 14-146 (in Russian), 1961.
- [10] Khonichev, V.I., Yakovlev, V.I. Motion of a sphere in an infinite conductive fluid, produced by a variable magnetic dipole located within the sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 19, 760-766. 1978.
- [11] Shatrov, V.I., Yakovlev, V.I. Change in the hydrodynamic drag of a sphere set in motion by electrodynamic forces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 22, 817-823. 1981.
- [12] Shatrov, V.I., Yakovlev, V.I. The possibility of reducing hydrodynamic resistance through magnetohydrodynamic streamlining of a sphere. *Magnetohydrodynamics* 26, 102-106. 1990.
- [13] Yakovlev, V.I. Optimal internal structure of electric and magnetic field in the problem of MHD motion of a plate. *Magnetohydrodynamics* 22, 333-338. 1986.
- [14] Henoeh, C., Stace, J. Experimental investigation of a salt water turbulent boundary layer modified by an applied streamwise magnetohydrodynamics body force. *Phys. Fluids* 7, 1371-1383. 1995.
- [15] Nosenchuck, D.M., Brown, G.L. Discrete spatial control of wall shear stress in a turbulent boundary layer. In: So, R.M.C., Spziale, C.G., Launder, B.E. (Eds.), *Near-wall turbulent Flows*. Elsevier, Amsterdam, pp. 689-898. 1993.

## Bibliographie

---

- [16] Crawford, C.H., Karniadakis, G.E., 1997. Reynolds stress analysis of EMHD-controlled wall turbulence, Part 1 : streamwise forcing. *Phys. Fluids* 9, 788-806.
- [17] Weie, T., Gerberth, G., Mutschke, G., Platacis, E., Lielausis, O. Experiments on cylinder wake stabilization in an electrolyte solution by means of electromagnetic forces localized on the cylinder surface. *Exp. Thermal Fluid Sci.* 16, 84-91. 1998b.
- [18] Weie, T., Gerberth, G., Mutschke, G., Fey, U., Posdziech, Lielausis, O., Platacis, E. some results on electromagnetic control of flow around bodies. *Proceeding of the international symposium. "Seawater drag reduction"*, Newport, USA, pp. 395-400. 1998a.
- [19] Weie, T., Gerberth, G., Mutschke, G., Lielausis, O., Lammers, G. Control of flow separation using electromagnetic forces. *Flow, Turbulence Combust.* 71, 5-17. 2003.
- [20] Du, Y., Karniadakis, G.E. Suppressing wall-turbulence via a transverse traveling wave. *Science* 288, 1230-1234. Fornberg, B. Steady viscous flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* 190, 471-489. 2000.
- [21] Shatrov, V.I., Yakovlev, V.I. Optimization of the internal source in the problem of MHD flow around a sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 33, 334-341. 1992.
- [22] V. Shatrov, G. Gerberth. Electromagnetic flow control leading to a strong drag reduction of a sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 36, 153-173. 2005.
- [23] Görtler, H: A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows. *J. Math. Mech.* 6, 1-66 (1957).
- [24] Görtler, H; and Witing, H.: Zu den Tanischen Grenzsichten. *Österr. Ing.-Archiv* 11, 111-122 (1957).
- [25] H. Schlichting. *Boundary-Layer theory*. University of Braunschweig. Germany former director of the Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen. 1979

## Résumé

Le contrôle du décollement de la couche limite autour d'un corps trouve des applications nombreuses et variées dans diverses configurations aéronautiques car l'aptitude à supprimer ou à retarder le phénomène de décollement conduit à améliorer le niveau de portance, réduire le bruit et la traînée générée sur les engins aéronautiques, ce qui représente des enjeux économiques et technologiques évidents.

Ce travail présente une étude numérique de la couche limite magnétohydrodynamique se développant sur la paroi d'un obstacle cylindrique. La simulation numérique de l'écoulement a été menée, par un changement de variables approprié permettant de supprimer la singularité existante à l'origine de la couche limite et de normaliser les coordonnées perpendiculaires à la paroi, dans un domaine d'intégration rectangulaire. Cette étude a mis en évidence l'influence du nombre de Reynolds, et le paramètre d'interaction magnétique sur les paramètres caractéristiques de la couche limite, des profils hydrodynamique et thermique ainsi que sur le phénomène de décollement de l'écoulement.

**Mots clés :** couche limite, Magnétohydrodynamique, simulation, Epaisseur de déplacement, contrainte de viscosité

## Abstract

The fluid separated control of the boundary layer around a body finds numerous applications in varied aeronautic configurations. Because, the ability of this control is to avoid this phenomenon, it represents an interest subject for investigations, although it is subject to many studies from various angles. This operation leads to improve the lift level, and to reduce the noise and the drag force, which are generated by the aeronautic machines. Then, these three parameters present the evident economical and technological stakes.

This work presents an analysis of a boundary layer magneto hydrodynamics developing on the wall of a cylindrical body. The simulation of the flow was carrying out, by a suitable change of variables making it possible to remove the existing singularity at the origin of the boundary layer and to standardize the co-ordinates perpendicular to the wall, in a rectangular field of integration. The study carries out clearly the influence of the Reynolds numbers and the interaction magnetic parameter on the boundary layer characteristics parameters and makes in evidence their effects on the separate flow, thermal and hydrodynamic profiles.

**Keywords:** boundary layer, magneto hydrodynamic, simulation, thickness of displacement, constraint viscous, thermal field.

## ملخص

التحكم في ظاهرة الانفصال في الطبقات المحدودة حول الأجسام الصلبة لها تطبيقات عديدة في مختلف الاشكال الهوائية، لأن القدرة على إزاحة أو إزالة ظاهرة الانفصال تؤدي إلى تحسين مستوى قوة الرفع ، التخفيف من الضجيج و قوة الاحتكاك المتولدة على سطح الأجسام الهوائية، هذا ما يمثل فوائد إقتصادية و تكنولوجية جد هامة.

هذا البحث يمثل دراسة عددية لطبقة محدودة هيدروكهرومغناطيسية حول سطح أسطواني . الدراسة العددية لحركة التدفق تمت عن طريق تحويل المتغيرات من أجل إزالة مشكلة النقطة الحرجة عند مبدأ المعلم ولصياغة معلم متعامد. هذه الدراسة أظهرت تأثير كل من الحقل الديناميكي و المغناطيسي على خصائص الطبقة المنتهية و على الحقل الديناميكي و الحراري.

**الكلمات المفتاحية :** الطبقة المنتهية، هيدروكهرومغناطيسية، حساب عددي، سمك التنتقل، إجهاد الاحتكاك، الحقل الحراري.