

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université El Hadj Lakhdar – Batna-



MÉMOIRE

Présentée au Département de physique

Faculté des Sciences

Pour l'obtention du diplôme de

Magistère en physique

Option : physique des Rayonnements

Par

Siham AZIEZ

Thème

**Étude Théorique et Numérique
de la Propagation des Solitons
dans les Fibres Optiques.**

Mémoire soutenue le 24 /06 / 2009 devant le jury composé de :

Président :	A. BOULDJEDRI	Professeur	Université de Batna
Rapporteur :	D. BAHLOUL	Maitre de conférences	Université de Batna
Examineurs:	A. BENDIB	Professeur	Université USTHB
	A. OUNISSI	Professeur	Université de Batna
	Y. DJABALLAH	Dr. Chargé de Cours	Université de Batna

Dédicace

D'un jour à l'autre et avec tout lever du soleil, je me trouve débitrice à tous ceux qui m'ont appris, même si un lettre, a été la cause de m'ouvrir les portes de la connaissance, À tous ceux qui m'ont aidé de poser mes pieds dans le chemin de la science, À tous ceux qui m'ont appris que ce chemin est une lutte, travail, et patience, À tous ceux qui m'ont encouragé, supporté et aidé:

À mes Parents.

À mes Enseignantes

À mon frère Salah, mon mari Adel
et mes sœurs.

« Science sans conscience n'est que ruine de l'âme »

Rabelais

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu.

Sans aucun doute, sans l'aide et le support de Monsieur *Derradji BAHLOUL*, maître de conférences à l'université de Batna, ce travail n'aurait pu être mené à bien..... Je le remercie du fond du cœur. Je tiens aussi à leur exprimer toute ma gratitude et reconnaissance pour les moyens mis à ma disposition pour la réalisation de cette thèse, et aussi pour ces innombrables précieux conseils, leur encouragement, et leur patience. Vraiment, tous les mots de remerciement ne sont pas suffisants pour te dire, MERCI BIEN.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur *Abd-alhamid BOULDJEDRI*, Professeur à l'Université de Batna, pour l'honneur qui ma fait quand il a accepté de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi aux Messieurs *Abdelaziz BENDIB*, Professeur à l'Université USTHB, *Yacine DJABALLAH*, Dr. Chargé de Cours à l'Université de Batna, et *A. OUNISSI*, Professeur à l'Université de Batna, d'avoir accepté de lire et d'évaluer mon travail.

Un grand merci à Monsieur *Moussa SMADI*, Chargé de Cours à l'Université de Batna, pour leurs diverses aides.

Ma reconnaissance et mes profonds sentiments vont à les personnes qui m'ont toujours soutenu et encouragé : mes *Chers Parents*, ma *Grande Mère 'Elhadja Kalthoume'*, mon *Frère Salah* et mes *Soeurs*. Je les remercie très sincèrement de m'avoir permis de faire les études de mon choix.

Retourneront maintenant à la personne de mon cœur, *mon mari Adel*, qui m'a encouragé, supporté et aidé dans tous les moments. Il a été toujours à mes côtés.....Je voudrais le remercier largement.

D'une manière générale je remercie toutes personnes qui, de près ou de loin m'ont participé à la réalisation et l'accomplissement de ce travail.

Table de matière

Table de matière.

Introduction	1
---------------------	----------

Chapitre I : Rappels et Généralités.

I.1. Introduction.	4
I.2. Notions de base sur les fibres optiques.	6
I.3. Fibres multi-modes.	12
I.3.1. Fibres multi-modes à saut d'indice.	12
I.3.2. Fibres multi-modes à gradient d'indice.	15
I.4. Fibres monomodes.	18
I.4.1. Les équations de Maxwell.	18
I.4.2. Dispersion de la vitesse de groupe.	27
I.4.2.a. Dispersion chromatique.	32
I.4.2.b. Dispersion guide d'onde.	34
I.4.3. Dispersion d'ordre supérieur.	36
I.4.4. Origine de la biréfringence dans les fibres optiques.	38
I.5. Pertes dans la fibre.	41
I.6. Les effets non linéaires dans les fibres optiques.	43
I.6.1. L'auto-modulation de phase.	44
I.6.2. La modulation de phase croisée.	46
I.6.3. L'auto-raïdissement de l'impulsion.	47
I.6.4. Mélange à quatre ondes.	47
I.6.5. Les diffusions stimulées de la lumière.	49
I.6.5.a. La diffusion Raman stimulée	49
I.6.5.b. La diffusion Brillouin stimulée.	51
I.7. Conclusion.	52

Chapitre II : Les Effets Solitoniques.

II.1. Introduction	55
II.2. Solitons optiques.	56
II.2.a. Petit rappel historique sur les solitons optiques.	56
II.2.b. Formation des solitons optiques.	57
II.3. Les effets solitoniques.	59
II.3.a. La gigue temporelle de GORDON-HAUS.	61
II.3.b. La fission soliton.	61
II.3.c. L'auto-décalage en fréquence des solitons.	62
II.4. Dérivation de l'équation de Schrödinger non linéaire pour les fibres biréfringentes.	62
II.5. Méthode de la diffusion inverse.	68
II.6. Conclusion.	70

Chapitre III : Applications Numériques.

III.1. Introduction.	73
III.2. Illustration de la méthode de Padé.	74
III.2.a. Le schéma de Padé pour l'équation linéaire.	76
III.2.b. Méthode de RK4 pour les équations non linéaires	79
III.3. Analyse de la stabilité linéaire.	80
III.4. Simulations numériques.	84
III.4.a. Les conditions initiales.	84
III.4.b. Les conditions aux limites.	84
III.4.c. La dispersion du troisième ordre comme une petite perturbation.	85
III.4.c.1. Premier cas : les amplitudes égales $\theta = 45^0$.	86
III.4.c.2. Le deuxième cas : des amplitudes inégales $\theta = 30^0$.	89
III.5. Comparaison des temps de calcul entre la méthode Padé et de Crank-Nicholson.	92
III.5. Mesure de la quantité conservée Q.	93
III.7. Conclusion.	94
Conclusion et Interprétations	97
Références Bibliographiques	101

Introduction

Introduction

Pendant quelques décennies passées, les solitons ont été le sujet des études théorique et expérimental intenses dans presque tous les domaines de la physique comme l'hydrodynamique, le plasma, l'optique non linéaire, la biologie moléculaire, la théorie des champs, et l'astrophysique. Mais sûrement, l'optique est le domaine où l'étude des solitons est la plus riche. En général, les solitons se manifestent pratiquement dans tout milieu qui possède des effets dispersif et non linéaire.

Dans le domaine de l'optique non linéaire, les solitons optiques résulte quand la dépendance non linéaire de l'indice de réfraction à l'intensité balance exactement la dispersion chromatique linéaire [1-5].

Dans une fibre optique, l'information est transportée par les solitons qui se propagent idéalement sans se disperser, ni changer de fréquence. L'utilisation des solitons dans les communications améliore l'utilisation des fibres optiques puisqu'ils permettent de transporter une grande quantité d'information sur de très longues distances.

En générale, quand une impulsion lumineuse se propage dans une fibre optique, son état de polarisation n'est pas préservé. Les deux états de polarisations de l'impulsion possèdent en effet des propriétés de propagation différentes. Ceci est dû à la biréfringence de la fibre. Bien que la dispersion des deux modes de polarisations puisse être souvent négligée ; elle joue un rôle significatif si elle est couplée aux effets non linéaires, ceci dans le cas des impulsions très intenses. Par exemple : en présence de la modulation de phase croisée, les deux états de polarisation se couplent et permette l'excitation d'autres effets très intéressants tels que le glissement de phase dû à la modulation de phase croisé. La dynamique des deux états de polarisation dans une fibre biréfringente est décrite par un système de deux équations de Schrödinger non linéaires couplées qui ont comme famille de solutions, les solitons vectoriels qui présentent deux composantes sur les deux axes orthogonaux de la fibre.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[3] G. P. AGRAWAL, *Applications of nonlinear fiber optics*, Academic Prass, 2001.

[4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, Optical Fiber Technology 10 (2004) 150–170.

[5] A. HASEGAWA et Y. KODAMA, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press Oxford, US, 1995.

La méthode dite ‘*Semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization*’ (OSPD) [8] est proposée pour étudier numériquement la propagation des solitons vectoriels pour le système des équations de Schrödinger non linéaire couplées (CNLS). Nous avons divisé chaque équation en deux sous-problèmes, l’un purement linéaire et l’autre purement non linéaire. Après, on résout séparément les deux sous-problèmes alternativement pour chaque pas de distance. L’approximation de Padé, qui est bien adaptée aux termes des dérivés temporelles d’ordres supérieurs décrivant les différents ordres de dispersion, a été appliquée au sous-problème linéaire. Cette méthode a prouvé une stabilité remarquable, une bonne efficacité et un temps de calculs beaucoup plus rapides que les méthodes numériques classiques.

L’organisation de cette thèse est comme suit :

Après quelques rappels sur les fibres optiques, nous présentons dans le premier chapitre les équations de Maxwell pour trouver une équation caractéristique des modes se propageant dans une fibre optique. Nous avons donné la condition nécessaire pour assurer une propagation d’un seul mode à l’intérieur d’une fibre optique, c’est le cas des fibres monomodes. Les effets non linéaires sont aussi décrits dans ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté un petit rappel sur les solitons optiques, et comment ils se forment. La dérivation du système d’équations de Schrödinger non linéaires couplées, dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre, est aussi faite. L’existence des termes couplés est le résultat de la biréfringence de la fibre optique. Finalement, nous avons fait une description de la méthode de diffusion inverse qui est utilisée pour résoudre analytiquement l’équation de Schrödinger non linéaire.

Le troisième chapitre est consacré à l’étude numérique du système d’équations de Schrödinger non linéaire couplées, dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre, en utilisant la méthode d’OSPD. Cette méthode a beaucoup d’avantages comparativement à la méthode de Crank-Nicholson. Le calcul de la stabilité est aussi présenté.

Finalement, on présente quelques conclusions importantes.

[8] ZHENLI. XU, JINGSON HE et HOUDE HAN, *Semi-implicit operator splitting Padé method for higher-order nonlinear Schrodinger equations*, Applied Mathematics and computation , 2006, Vol 179, Issue 2, pp. 596-605.

Chapitre I : Rappels et Généralités

I. 1. Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre des notions physiques essentielles à l'étude de la propagation non linéaire d'ondes dans les fibres optiques.

Les fibres optiques, qui sont basées sur le phénomène de la réflexion totale interne, sont connues à partir du dix-neuvième siècle. Bien que les fibres du verre aient été fabriquées en 1920 [1,2], leur usage est devenu pratique seulement dans les années 50 [1,2], quand l'utilisation de la gaine optique ayant un indice de réfraction légèrement inférieur à celui du cœur a mené à des améliorations considérables dans leurs caractéristiques de guidage en particulier la réduction considérable du nombre de modes guidés.

Le domaine des fibres optiques a développé rapidement pendant les années 60 [1,2], mais l'utilisation des premières fibres pour les communications optiques a été considéré irréaliste à cause des pertes élevées (~1000 dB/km). Cependant, la situation a changé considérablement quand les pertes des fibres optiques de silice ont été réduites au-dessous de 20 dB/km. Cette valeur a été encore diminuée jusqu'à 0.2 dB/km près de la région spectrale 1.55 μ m [1,2]. Pour compenser les pertes de la fibre, on utilise des amplificateurs optiques pour régénérer le signal affaibli par l'atténuation cumulée le long de la propagation de plusieurs dizaines de kilomètres.

Malgré l'invention des amplificateurs optiques au début des années 60, c'était seulement après 1987 que leur développement a été élargi [1,20]. Les amplificateurs à erbium ont attiré beaucoup d'attention parce qu'ils opèrent dans la troisième fenêtre des télécommunications. De tels amplificateurs ont été utilisés depuis 1995 [1].

Les effets non linéaires tels que les effets d'auto-modulation de phase et de modulation de phase croisée participent dans les fibres optiques et sont indépendants du régime de dispersion. Ils dépendent de l'intensité de l'onde incidente, de la longueur de propagation et de l'indice non linéaire du matériau. Les processus de la diffusion Raman stimulée et la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques ont été étudiés dès 1972 [1,2,3].

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[3] G. P. AGRAWAL, *Applications of nonlinear fiber optics*, Academic Press, 2001.

[20] P. KAEWPLUNG, T. VIITRMEKTHONG, *Ideal Soliton transmission in lossy optical fiber*, ISCT 2004, 2004, 884-889.

A. HASEGAWA et F. TAPPERT furent les premiers à avoir l'idée de la propagation d'un soliton dans une fibre optique par une compensation mutuelle entre la dispersion et l'auto-modulation de phase [1,2,4,5]. Les solitons optiques ont été observés expérimentalement par L. MOLLENAUER et *al.* [1,2,4,5]. Ses expériences ont mené à un progrès énorme dans le domaine de la génération et le contrôle des impulsions optiques ultra-courtes [2]. Les recherches sur les solitons optiques ont mené aussi au concept de solitons managé en dispersion qui font actuellement l'objet de nombreuses études [17,19,22].

Les fibres optiques utilisées dans les réseaux de télécommunication sont à base de la silice amorphe. Cependant, plusieurs équipes de recherche s'intéressent à la réalisation de fibres optiques exotiques à base d'autre types de verres comme les verres fluorés, le tellure (Te), le bismuth (Bi), le chalcogénure (GLSO) ou encore le SF6. L'intérêt porté pour de tels verres vient du fait que :

- ❖ Ils disposent de forts indices de réfraction induisant alors des indices non linéaires élevés et permettent d'obtenir des coefficients non linéaires très supérieurs à celui de la silice.
- ❖ Les fenêtres de transparence de ces matériaux sont très décalées dans l'infrarouge. Il en résulte que le zéro de dispersion du matériau se trouve à des longueurs d'onde élevés.

Par contre, les fibres en verre non silice montrent des inconvénients tels que les difficultés de fabrication, les pertes qui demeurent encore très élevées, aussi que des difficultés dans leur usage à cause des problèmes mécaniques.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, Optical Fiber Technology 10 (2004) 150–170.

[5] A. HASEGAWA et Y. KODAMA, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press Oxford, US, 1995.

[17] F. J. DIAZ-OTERO, P. CHAMORRO-POSADA, J.C. GARCIA-ESCARTIN, *Dispersion-Managed soliton interactions in the presence of third-order dispersion*, Caol 2005, 2005, pages 153-155.

[19] T. S. YANG, W. L. KATH, *Radiation loss of dispersion-managed solitons in optical fibers*, Physica D 149, 2001, pages 80-94.

[22] K. PORSEZIAN , A. HASEGAWA , V.N. SERKIN, T.L. BELYAEVA, R. GANAPATHY, *Dispersion and nonlinear management for femtosecond optical solitons*, Phys. Lett. A 361 (2007) 504–508.

Les applications de la fibre optique sont nombreuses et variées allant des télécommunications jusqu'à la métrologie, les capteurs et même en médecine.

Dans le domaine des télécommunications on utilise la fibre pour la transmission de l'information telle que le téléphone, l'Internet et la télévision,

En médecine : La fibre optique est utilisée en chirurgie, associée à un faisceau laser pour pulvériser un calcul rénal, découper une tumeur, réparer une rétine,....

Le transport de la lumière est une des applications importantes des fibres optiques utilisées pour l'éclairage, le balisage, le surlignage des bâtiments, la décoration et l'illumination de piscines, bassins, fontaines, etc.

I. 2. Notions de base sur les fibres optiques

Une fibre optique est un guide diélectrique de la lumière à symétrie de révolution. Elle est constituée d'un cœur d'indice de réfraction n_c , entouré d'une gaine d'indice de réfraction n_g légèrement inférieur à celui du cœur ($n_c > n_g$), le tout entouré d'une gaine mécanique (manteau ou revêtement de protection) qui protège la fibre, mais n'a aucun rôle dans le principe du guidage optique.

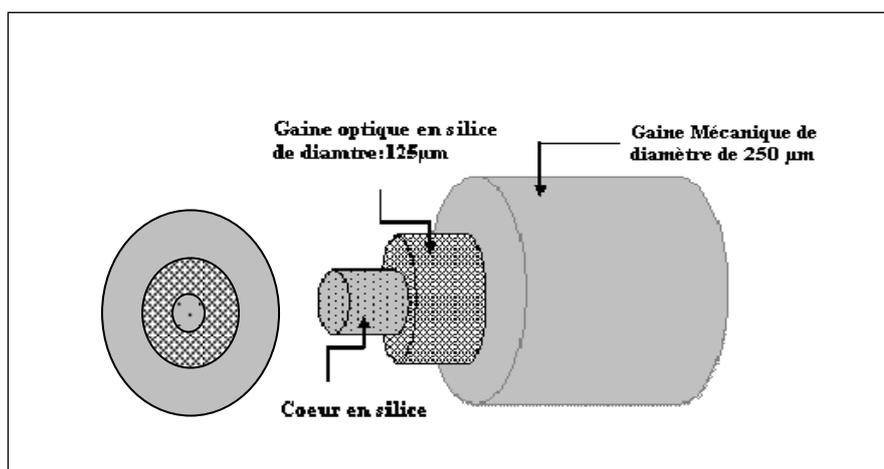


Figure. I.1 : Schéma d'une fibre en silice.

Le cœur possède un diamètre allant de quelques microns à quelques dizaines de microns. L'augmentation de l'indice de réfraction du cœur est assurée par la présence de dopants qui sont généralement constituées de germanium [1]. La gaine optique possède un diamètre de $125\mu\text{m}$ est en silice pure d'indice $n_g = 1.46$, tandis que, la gaine mécanique qui n'est d'autre que la protection mécanique de la fibre, est en polymère [1].

Pour une fibre optique à saut d'indice dont le rayon du cœur est a , on note (Figure. I.2) :

$$n(\rho) = \begin{cases} n_c & \text{si } \rho < a \\ n_g & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

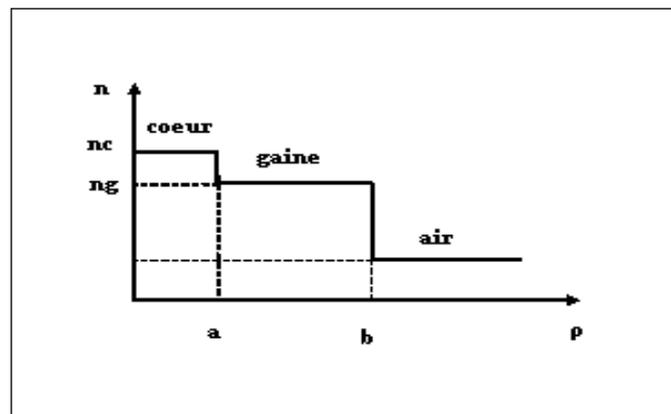


Figure. I-2 : Profil d'indice d'une fibre à saut d'indice sans manteau.

Les lois de l'optique géométrique peuvent expliquer d'une manière assez simple le guidage de la lumière à l'intérieur du cœur lorsque son indice est supérieur à celui de la gaine $n_c > n_g$. Pour mieux expliquer ce point, considérons un rayon lumineux qui passe d'un milieu d'indice n_c (cœur) à un milieu d'indice n_g (gaine) avec un angle d'incidence θ_1 (Figure. I.3). Ce passage est régit par la loi de réfraction de Snell-Descartes :

$$n_c \sin\theta_1 = n_g \sin\theta_2 \quad (\text{I.2})$$

Où θ_2 est l'angle du rayon réfracté dans la gaine (Figure. I.3).

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

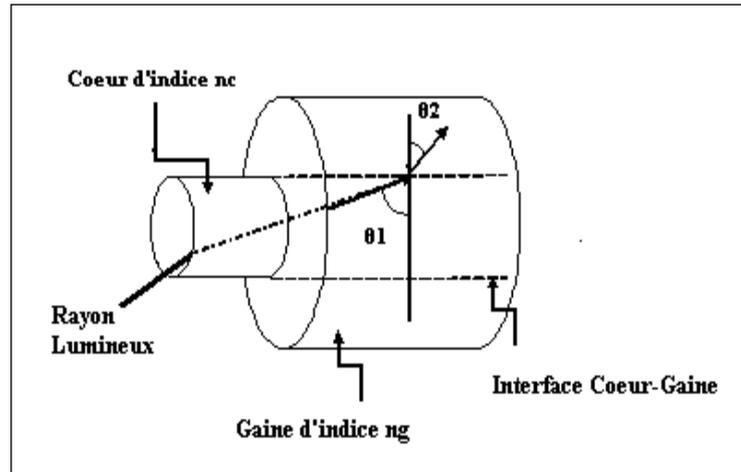


Figure. I.3: Le passage d'un rayon lumineux d'un milieu d'indice n_c (cœur) à un milieu d'indice n_g (gaine) avec un angle d'incidence θ_1 et un angle de réfraction θ_2 .

Lors du passage d'un milieu d'indice de réfraction plus élevé à un milieu d'indice de réfraction plus faible, il existe une valeur critique de l'angle d'incidence θ_{cr} , pour laquelle il y a réflexion totale interne (Figure. I.4). Cet angle critique est celui pour lequel le rayon réfracté sort avec un angle $\theta_2 = 90^\circ$ par rapport à la normale à l'interface cœur-gaine :

$$n_c \sin \theta_{cr} = n_g \sin 90^\circ \quad (\text{I.3})$$

$$\sin \theta_{cr} = \frac{n_g}{n_c} \quad \text{Avec } n_c > n_g \quad (\text{I.4})$$

$$\theta_{cr} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_g}{n_c} \right) \quad (\text{I.5})$$

Puisque nous avons défini un angle critique θ_{cr} dans la fibre où les faisceaux lumineux sont guidés à l'intérieur du cœur, il est intéressant aussi de retrouver l'expression de l'angle limite θ_a d'injection de la lumière dans la fibre optique (Figure. I.5). En utilisant la loi de Snell-Descartes :

$$n_a \sin \theta_a = n_c \sin \theta \quad (\text{I.6})$$

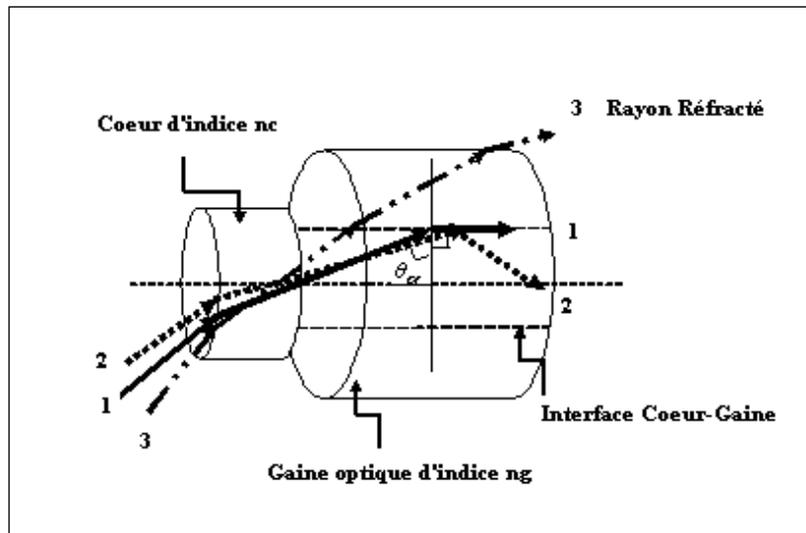


Figure. I.4 : La valeur critique de l'angle d'incidence θ_{cr} , pour laquelle il y a réflexion totale interne.

Dans l'équation (I.6), n_a est l'indice de réfraction de l'air ($n_a = 1$), θ est l'angle avec lequel le rayon lumineux entre dans le cœur, et θ_a est l'angle supérieur d'injection de la lumière dans la fibre optique.

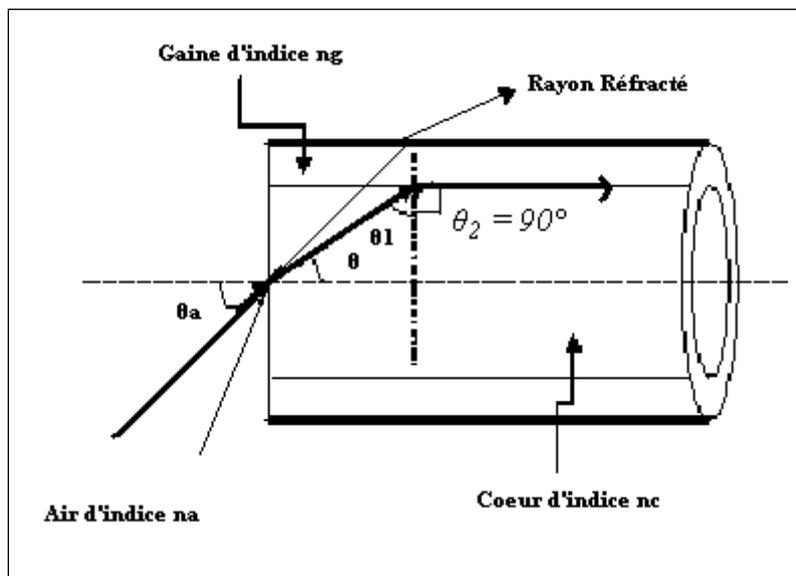


Figure. I.5 : Schéma pour le calcul de l'ouverture numérique.

Quand le rayon lumineux entre dans le cœur, on peut écrire en utilisant aussi la loi de Snell-Descartes :

$$n_c \sin \theta_1 = n_g \sin \theta_2 \quad (\text{I.7})$$

Pour qu'il y a réflexion totale, il faut que $\theta_2 = 90^\circ$, donc l'équation (I.7) donne :

$$\sin \theta_1 = \frac{n_g}{n_c}, \quad (\text{I.8})$$

De l'équation (I.6) on a :

$$\sin \theta_a = \frac{n_c}{n_a} \sin \theta \quad (\text{I.9})$$

Où $\theta_1 + \theta + 90^\circ = 180^\circ$ (Figure. I.5).

$$\sin \theta_1 = \sin(90^\circ - \theta) = \sin 90^\circ \cos \theta - \cos 90^\circ \sin \theta \quad (\text{I.10})$$

Alors on aura : $\cos \theta = \frac{n_g}{n_c}$

De l'équation (I.9) on peut écrire :

$$\sin^2 \theta_a = \frac{n_c^2}{n_a^2} \sin^2 \theta = \frac{n_c^2}{n_a^2} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{n_c^2 - n_g^2}{n_a^2} \quad (\text{I.11})$$

L'ouverture numérique ON est un des paramètres les plus importants d'une fibre optique. Elle est définie comme:

$$ON = \sin \theta_a = \frac{1}{n_a} (n_c^2 - n_g^2)^{1/2} = (n_c^2 - n_g^2)^{1/2} \quad (\text{I.12})$$

Enfin, on peut constater que plus l'angle θ_a est grand, plus il sera facile d'injecter dans la fibre, une grande quantité de lumière. Par contre, une grande ouverture numérique entraîne un étalement des impulsions transmises par l'effet de dispersion intermodale.

Par ailleurs, on peut introduire le paramètre de guidage Δ défini comme la différence relative d'indices entre le cœur et la gaine :

$$\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2} \quad (\text{I.13})$$

Dans le cas du guidage faible ($\Delta \ll 1$ c.-à-d. $n_c \approx n_g$) ce paramètre peut avoir une expression plus simple :

$$\begin{aligned} \Delta(n_g \approx n_c) &\approx \Delta(n_c = n_g) + (n_g - n_c) \left. \frac{d\Delta}{dn_g} \right|_{n_g=n_c} \\ &= 0 + (n_g - n_c) \left. \frac{2n_g}{2n_c^2} \right|_{n_g=n_c} = \frac{n_c - n_g}{n_c} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

Donc:

$$\Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c} \quad (\text{I.15})$$

On peut alors écrire l'ouverture numérique en fonction de Δ sous la forme :

$$ON = n_c \sqrt{2\Delta} \quad (\text{I.16})$$

Il existe différents types des fibres optiques de silice selon le profil radial de l'indice de réfraction et les dimensions du cœur :

- Selon la dimension du cœur et la différence d'indices relativement à la longueur d'onde on a :
 - Fibre monomode.
 - Fibre multi-mode.
- Selon le profil d'indice de réfraction on a :
 - Fibre à saut d'indice.
 - Fibre à gradient d'indice.

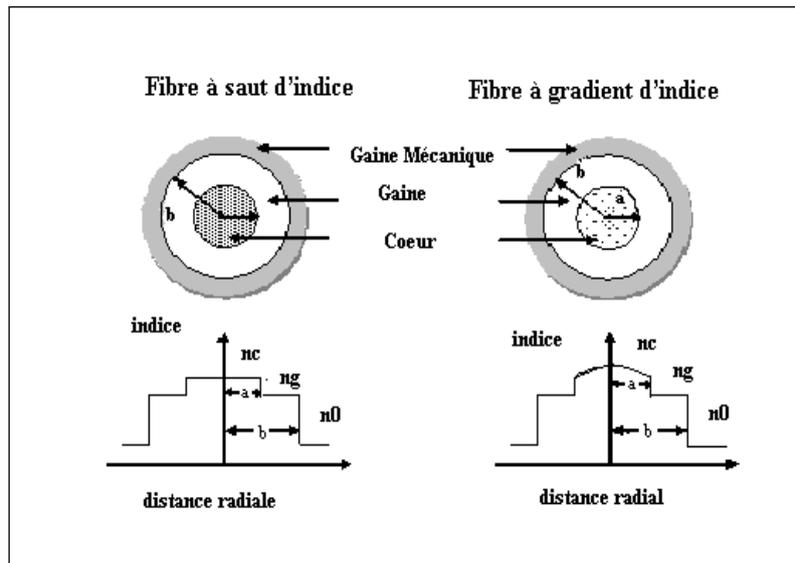


Figure. I.6 : Coupe et profil d'indice de réfraction d'une fibre à saut d'indice et d'une fibre à gradient d'indice.

I. 3. Fibre multi-mode

I. 3. 1. Fibres multi-modes à saut d'indice

Une fibre optique multi-mode est une fibre dont le cœur où se propage la lumière a un diamètre grand devant la longueur d'onde. On peut donc les étudier de façon simplifiée mais correcte, utilisant l'optique géométrique.

Il est facile d'imaginer que chaque faisceau entre dans la fibre multi-mode avec un angle différent, suivra un trajet différent. Chacun de ces trajets est appelé mode de propagation. Il est important de noter qu'à chaque trajet est associé un temps de propagation. C'est cette multitude de temps de propagation qui limite la bande passante de la fibre optique.

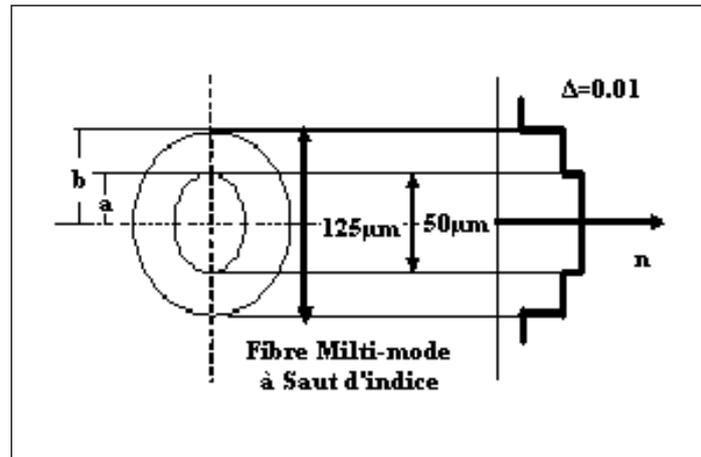


Figure. I.7 : Profile d'indice pour une fibre multi-mode à saut d'indice.

Pour définir la bande passante, considérons une fibre optique de longueur L . Connaissant la vitesse de propagation de la lumière dans le cœur ($v = \frac{c}{n_c}$), la bande passante (exprimée en seconde) est défini comme la différence de temps de propagation entre le faisceau qui suit l'axe de la fibre et celui qui entre dans la fibre avec l'angle limite θ_a (défini au-dessus), c'est-à-dire, la différence entre les chemins le plus court et le plus long (Figure I.8):

$$\Delta T = \Delta L / v = \frac{n_c}{c} \left(\frac{L}{\sin \theta_{cr}} - L \right) = \frac{L n_c^2}{c n_g} \Delta \quad (\text{I.17})$$

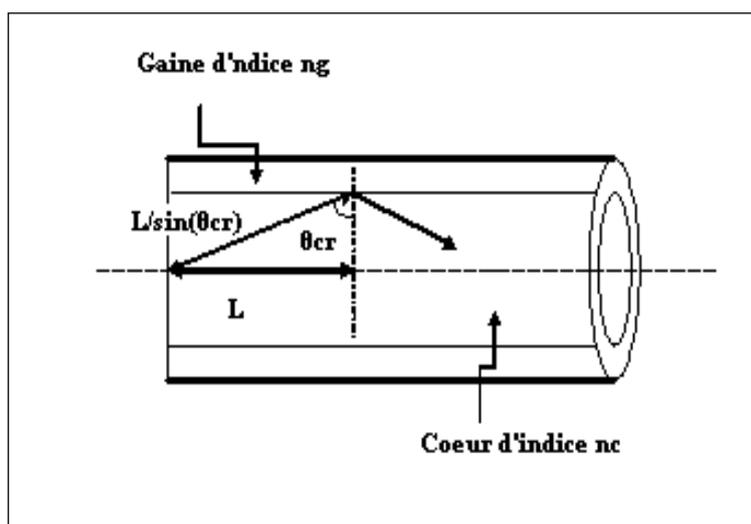


Figure. I.8 : Calcul de la bande passante.

Alors, le retard du temps entre les deux rayons qui prennent les chemins le plus court et le plus long est une mesure d'élargissement éprouvé par une impulsion lancée à l'entrée de la fibre.

Donc, il est important de noter que la dispersion intermodale est le principal facteur limitatif des performances des fibres multi-mode. Dans le cas d'une impulsion lumineuse très courte injectée dans la fibre, l'énergie se répartie sur les différents modes et on obtient, en sortie, un train d'impulsions, une impulsion pour chaque mode (Figure I.9).

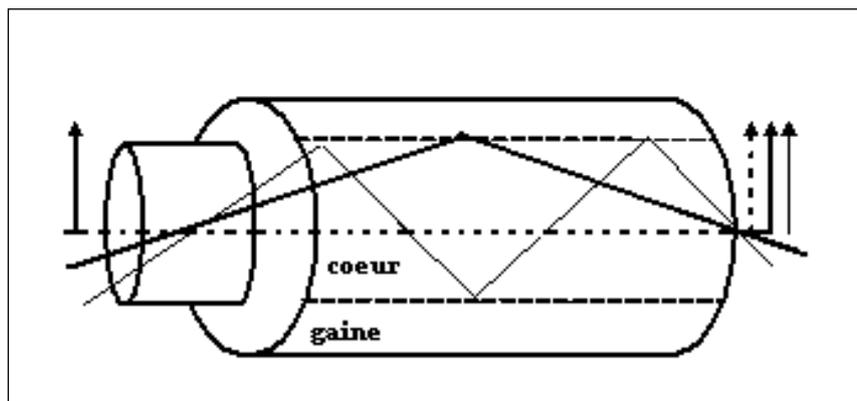


Figure I. 9 : Une impulsion lumineuse très courte en entrée se voit transformer en un train d'impulsions en sortie de fibre.

La dispersion intermodale (exprimer en ns/km) est défini par la relation :

$$D = \frac{\Delta T}{L} \quad (\text{I.18})$$

Pour estimer le produit débit-portée ($B.L$) des fibres multi-mode à saut d'indice, nous imposerons que l'étalement soit être inférieur à $T_B = 1/B$ [1]. On écrit donc :

$$\Delta T = \frac{L n_c^2}{c n_g} \Delta \leq \frac{1}{B} \quad (\text{I.19})$$

Donc :

$$BL \leq \frac{c n_g}{n_c^2 \Delta} \quad (\text{I.20})$$

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

La grandeur $B.L$ veut dire : transmettre sur la plus grande distance possible un maximum d'information. On comprend maintenant aisément l'intérêt du faible guidage ($\Delta \ll 1$) c'est-à-dire de l'utilisation d'une gaine d'indice très légèrement inférieur à celui du cœur.

- Prenons un exemple [1] :
 -
 - Une fibre sans gaine optique: $n_c = 1.5$; $n_g = 1$; $\Delta = 0.27$; $B.L < 0.4 \text{Mbits/s.Km}$.
 - Une fibre avec gaine optique: $n_c = 1.5$; $n_g = 1.47$; $\Delta = 0.002$; $B.L < 100 \text{Mbits/s.Km}$.
- Les telles fibres peuvent communiquer les données avec un débit de 10Mb/s sur des distances jusqu'à 10Kms .

La dispersion intermodale peut être réduite si on utilise des fibres à gradient d'indice plutôt que des fibres à saut d'indice.

I. 3. 2. Fibre multi-mode à gradient d'indice

Dans ce type de fibres, l'indice de réfraction du cœur n'est pas constant. Il décroît de façon régulière de la valeur maximale n_c au centre, à la valeur n_g , à l'interface cœur-gaine.

Ces fibres sont décrites par un paramètre ζ , caractéristique du profil de décroissance. L'indice du cœur à une distance ρ de l'axe est donné par la loi [1]:

$$n(\rho) = \begin{cases} n_c \left[1 - \Delta \left(\frac{\rho}{a} \right)^\zeta \right] & \text{pour } \rho < a \\ n_c [1 - \Delta] = n_g & \text{pour } \rho \geq a \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

La majorité des fibres à gradient d'indice ont un profil quasi-parabolique, le profil parabolique étant obtenu pour $\zeta = 2$. A la limite ($\zeta \rightarrow \infty$), on obtient la fibre à saut d'indice.

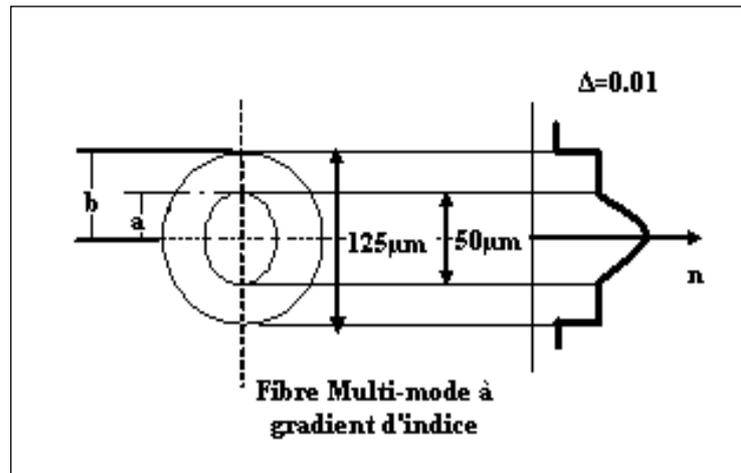


Figure. I. 10 : Profile d'indice pour une fibre multi-mode à gradient d'indice.

C'est facile de comprendre qualitativement pourquoi la dispersion intermodale est réduite pour les fibres à gradient d'indice. La figure I.11 représente schématiquement les chemins pour trois différents rayons. Semblable au cas des fibres à saut d'indice, le chemin est plus long pour les rayons plus obliques. Cependant, la vitesse du rayon change le long du chemin à cause des variations de l'indice de réfraction du cœur. Plus spécifiquement, le rayon qui se propage le long de l'axe de la fibre prend le chemin le plus court mais le parcourt le plus lentement car l'indice est plus grand le long de ce chemin. Les rayons obliques ont une grande partie de leur chemin dans un milieu d'indice de réfraction plus faible, où ils voyagent plus vite. C'est par conséquent possible pour tous les rayons d'arriver ensemble à la sortie de la fibre par un choix convenable du profil d'indice de réfraction.

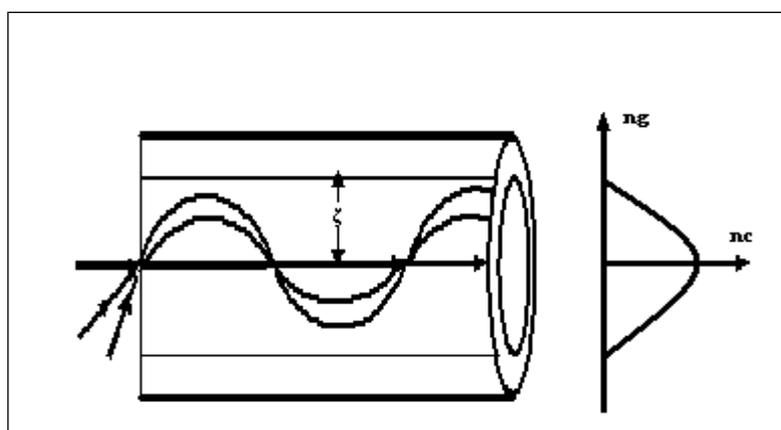


Figure I. 11 : Trajectoires sinusoïdales des faisceaux dans une fibre à gradient d'indice parabolique.

La dispersion intermodale dans les fibres à gradient d'indice a été étudiée largement. La quantité $\Delta T/L$ où ΔT est le retard maximal dans une fibre de longueur L , et elle varie considérablement en fonction du paramètre ζ . Figure I.12 montre cette variation pour $n_c = 1.5$ et $\Delta = 0.01$. La dispersion minimale se produit pour $\zeta = 2(1 - \Delta)$ et dépend de Δ comme [1] :

$$\Delta T/L = n_c \Delta^2 / 8c \quad (I.22)$$

Le produit débit-portée ($B.L$) est obtenu en utilisant $\Delta T < 1/B$ et est donné par :

$$BL < 8c / n_c \Delta^2 \quad (I.23)$$

La Figure. I.12 présente un calcul exacte de la dispersion et du produit $B.L$ pour une fibre à gradient d'indice en fonction du paramètre ζ . De telles fibres peuvent communiquer les données avec un débit de $100Mb/s$ sur des distances jusqu'aux $100Kms$ [1]. Le produit $B.L$ de telles fibres est amélioré par presque trois ordres de grandeur comparativement avec celle de fibres à saut d'indice.

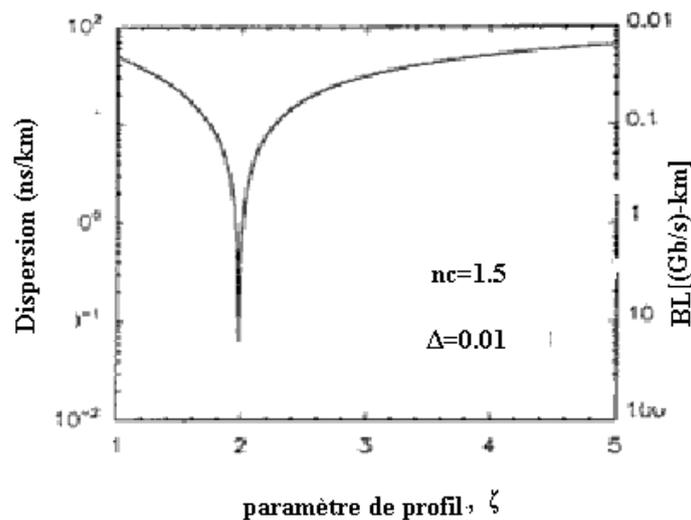


Figure I.12: Variation de la dispersion intermodale $\Delta T/L$ avec le paramètre de profil ζ pour une fibre à gradient d'indice. L'échelle à droite montre le produit débit-portée correspondant (d'après Réf. [1]).

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

I. 4. Fibres monomodes

Pour éliminer la dispersion intermodale, qui est la principale source de limitation des performances des fibres multi-modes, on choisit les paramètres optogéométriques de la fibre (indice du cœur et de gaine, rayon du cœur, longueur d'onde de la lumière guidée) de façon à s'assurer qu'un seul mode puisse se propager dans la fibre. Dans ce cas on a une fibre monomode, dont le rayon du cœur est comparable à la longueur d'onde. Donc, il n'est pas possible de décrire les fibres optiques monomodes par l'optique géométrique mais par l'optique ondulatoire qui nécessite l'introduction des équations de Maxwell.

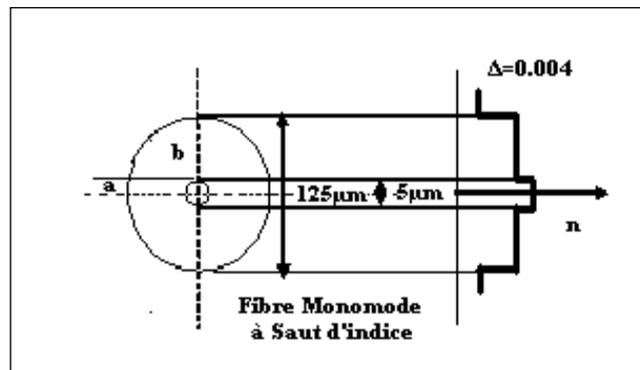


Figure. I. 13 : Profil d'indice pour une fibre monomode à saut d'indice.

I. 4.1. Les équations de Maxwell

Comme tout phénomène électromagnétique, la propagation de la lumière est décrite par les équations de Maxwell. Dans un milieu non magnétique, transparent et homogène, caractérisé par une constante diélectrique ϵ une perméabilité magnétique égale à celle du vide μ_0 , les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.24})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.25})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (\text{I.26})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.27})$$

\vec{E} , \vec{H} étant respectivement les vecteurs champs électrique et magnétique. \vec{D} , \vec{B} correspondent respectivement aux densités du flux électrique et magnétique. Dans le cas des milieux optiques les densités de courant et de charges libres sont nulles : $\vec{J} = 0$ et $\rho_l = 0$.

Les densités du flux électrique et magnétique sont données par les relations suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{I.28})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (\text{I.29})$$

Où \vec{P} et \vec{M} sont respectivement la polarisation électrique et l'aimantation du milieu. Dans un milieu non magnétique ce qui est le cas pour les milieux optiques en générale, $\vec{M} = 0$.

En prenant l'équation. (I.24), et utilisant les équations (I.25), (I.28) et (I.29), on peut trouver l'équation d'onde :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{I.30})$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

En général, pour trouver une relation entre \vec{P} et \vec{E} dans une fibre optique, il faut prendre en compte les effets non linéaires. Dans ce cas, la polarisation est constituée de deux parties :

$$\vec{P}(r,t) = \vec{P}_L(r,t) + \vec{P}_{NL}(r,t) \quad (\text{I.31})$$

Les termes linéaire \vec{P}_L et non linéaire \vec{P}_{NL} sont exprimés en fonction du champ électrique \vec{E} sous forme de produit de convolution tenant en compte la réponse non instantanée du milieu :

$$\vec{P}_L(r,t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(r,t-t') \vec{E}(r,t') dt' \quad (\text{I.32})$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_{NL}(r,t) = \varepsilon_0 \iint \chi^{(2)}(t-t_1, t-t_2) : \bar{E}(r,t_1) \bar{E}(r,t_2) dt_1 dt_2 \\ + \varepsilon_0 \iiint \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) : \bar{E}(r,t_1) \bar{E}(r,t_2) \bar{E}(r,t_3) dt_1 dt_2 dt_3\end{aligned}\quad (\text{I.33})$$

$\chi^{(1)}$ est la susceptibilité linéaire. $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ sont respectivement les susceptibilités non linéaire du deuxième et troisième ordre. Les fibres optiques en silices sont des milieux centrosymétriques. Dans un milieu centrosymétrique la susceptibilité du deuxième ordre est nulle. Il ne reste donc dans l'expression de la polarisation non linéaire que le terme contenant $\chi^{(3)}$.

Dans un premier temps nous allons déterminer les différentes configurations du profile transverse des modes qui peuvent se propager dans les fibres optiques. Pour cela nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices :

- Nous allons considérer le cas d'une fibre à saut d'indice.
- Nous considérons uniquement la polarisation linéaire du milieu. Les effets non linéaires ne constituent qu'une perturbation et peuvent être négligés pour le calcul des modes, $\bar{P}_{NL} = 0$.

Dans ce cas l'équation d'onde exprimée dans l'espace de Fourier prend la forme suivante :

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \tilde{\bar{E}}(r, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega) \tilde{\bar{E}}(r, \omega) = 0 \quad (\text{I.34})$$

Où $\tilde{\bar{E}}(r, \omega)$ est la transformée de Fourier de $\bar{E}(r, t)$ défini comme suivant :

$$\tilde{\bar{E}}(r, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(r, t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{I.35})$$

La constante diélectrique relative, est donnée par :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \quad (\text{I.36})$$

Où $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\chi^{(1)}(t)$. La perméabilité relative $\varepsilon_r(\omega)$ est relié à l'indice de réfraction complexe $n(\omega)$ et au coefficient d'absorption $\alpha(\omega)$ par les relations suivantes :

$$\varepsilon_r = \left(n + i\alpha \frac{c}{2\omega} \right)^2 \quad (\text{I.37})$$

Des équations (I.36), (I.37), n , et α sont donné par les relations :

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (\text{I.38})$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \text{Im}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (\text{I.39})$$

Où Re et Im sont respectivement la partie réelle et imaginaire. Puisqu'il s'agit d'un milieu sans charge, on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (\text{I.40})$$

Où la relation $\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_r \nabla \cdot \vec{E} = 0$ a été utilisée de l'équation (I.26). Enfin, nous négligeons l'absorption (donc $\varepsilon_r \approx n^2$), et obtenons l'équation d'onde :

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2(\omega) k_0^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{I.41})$$

Avec $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Une fibre optique peut supporter un nombre fini de modes guidés où leurs distribution spatiale $\vec{E}(r, \omega)$ est une solution de l'équation d'onde (I.41) satisfaisant les conditions aux limites appropriées.

A cause de la symétrie cylindrique de la fibre optique, nous écrivons l'équation (I.41) en coordonnées cylindriques ρ , φ et z :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (\text{I.42})$$

Comme \vec{E} et \vec{H} satisfont les équations de Maxwell, on peut choisir seulement les deux composantes E_z et H_z comme grandeurs indépendantes. Donc E_z et H_z satisfont l'équation (I.42). On peut donc résoudre l'équation pour E_z en utilisant la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire en posant $E_z = F(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$, ce qui nous permet d'obtenir trois équations :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) F = 0 \quad (\text{I.45})$$

Où m est un entier. Les solutions de ces équations sont les suivantes :

$$Z(z) = \exp(i\beta z) \quad (\text{I.46})$$

$$\Phi(\phi) = \exp(im\phi) \quad (\text{I.47})$$

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_m(\kappa\rho) + A'Y_m(\kappa\rho) & \text{pour } \rho \leq a \\ CK_m(\gamma\rho) + C'I_m(\gamma\rho) & \text{pour } \rho \geq a \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Où les fonctions J_m , K_m , Y_m , et I_m sont les diverses fonctions de Bessel. Les constantes A , A' , C , et C' sont calculées en utilisant les conditions aux limites. κ et γ sont donnés par les relations :

$$\kappa^2 = (n_c^2 k_0^2 - \beta^2) \quad (\text{I.49})$$

$$\gamma^2 = (\beta^2 - n_g^2 k_0^2) \quad (\text{I.50})$$

Enfin, pour éviter une solution divergente, il faut imposer que $A' = C' = 0$. Ce qui nous permet d'écrire la composante en z du champ électrique :

$$E_z(\rho, \phi, z) = \begin{cases} AJ_m(\kappa\rho)\exp(im\phi)\exp(i\beta z) & \text{pour } \rho \leq a \\ CK_m(\gamma\rho)\exp(im\phi)\exp(i\beta z) & \text{pour } \rho \geq a \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

De la même façon, on peut obtenir l'expression de la composante en z du champ magnétique:

$$H_z(\rho, \phi, z) = \begin{cases} BJ_m(\kappa\rho)\exp(im\phi)\exp(i\beta z) & \text{pour } \rho \leq a \\ DK_m(\gamma\rho)\exp(im\phi)\exp(i\beta z) & \text{pour } \rho \geq a \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

La continuité des composantes tangentielles des champs électriques (E_z et E_ϕ) et magnétiques (H_z et H_ϕ) à l'interface ($\rho = a$) impose quatre équations. Celles-ci permettent de déterminer les constantes A , B , C et D . La recherche d'une solution non triviale (c'est-à-dire différente de $A=B=C=D=0$) nécessite l'égalité suivante :

$$\left[\frac{J'_m(\kappa a)}{\kappa J_m(\kappa a)} + \frac{K'_m(\gamma a)}{\gamma K_m(\gamma a)} \right] \left[\frac{J'_m(\kappa a)}{\kappa J_m(\kappa a)} + \frac{n_g^2}{n_c^2} \frac{K'_m(\gamma a)}{\gamma K_m(\gamma a)} \right] = \left[\frac{m\beta k_0 (n_c^2 - n_g^2)}{an_c \kappa^2 \gamma^2} \right]^2 \quad (\text{I.53})$$

Où la relation suivante a été utilisée :

$$\kappa^2 + \gamma^2 = (n_c^2 - n_g^2) k_0^2 \quad (\text{I.54})$$

L'équation des valeurs propres (I.53) est l'équation caractéristique des modes. Elle a plusieurs solutions pour β pour chaque valeur de m . Alors, les solutions seront notées β_{mn} . Chaque valeur propre de β_{mn} correspond à un mode de propagation.

Dans une fibre optique il existe deux types de modes, ils sont désignés comme HE_{mn} et EH_{mn} . Pour $m=0$, ces modes sont analogues aux modes : transverse électrique TE et transverse magnétique TM d'un guide d'onde planaire.

Le nombre de modes supporté par une fibre optique à une longueur d'onde donnée dépend de des paramètres optogéométriques de la fibre suivant (rayon du cœur a , différence d'indices cœur

gaine $n_c - n_g$ et longueur d'onde optique λ). Un paramètre important pour chaque mode, est la fréquence de coupure. La fréquence de coupure correspond à la plus haute longueur d'onde permettant à un mode transverse de se propager dans le guide d'onde. Cela signifie qu'au-dessus de cette valeur limite, le mode considéré ne peut se propager sans subir de pertes importantes. Cette grandeur est dépendante des paramètres optogéométriques de la fibre.

La fréquence correspond à $\gamma = 0$. Quand $\gamma = 0$ la valeur de κ (noté κ_c) pour un mode donné, détermine la fréquence de coupure à partir de l'équation (I.54):

$$\kappa_c = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(n_c^2 - n_g^2)} \quad (\text{I.55})$$

La fréquence normalisée est donnée par :

$$V = \kappa_c a = k_0 a (n_c^2 - n_g^2)^{1/2} \approx (2\pi / \lambda) a n_c \sqrt{2\Delta} \quad (\text{I.56})$$

Le paramètre V détermine le nombre de modes supportés par la fibre.

La notion de l'indice effectif n_{eff}^{mn} (ou l'indice du mode désigné par les indices m et n) est très utile puisqu'elle nous permet d'exprimer une condition de guidage. Cet indice a une signification physique qui veut dire chaque mode de la fibre propage avec un indice de réfraction effectif vérifiant la condition $n_c > n_{eff}^{mn} > n_g$. Un mode cesse d'être guidé lorsque :

$$n_{eff}^{mn} = \frac{\beta^{mn}}{k_0} \leq n_g \quad (\text{I.57})$$

On définit aussi pour chaque mode (chaque valeur de β suivant m et n) un paramètre de guidage normalisé (ou une constante de propagation normalisée):

$$b = \frac{\beta / k_0 - n_g}{n_c - n_g} = \frac{\tilde{n} - n_g}{n_c - n_g} \quad (\text{I.58})$$

Dont la valeur varie de 0 (pour un mode non guidé) à 1 (pour un mode parfaitement guidé, c'est-à-dire pour le cas de la réflexion totale interne).

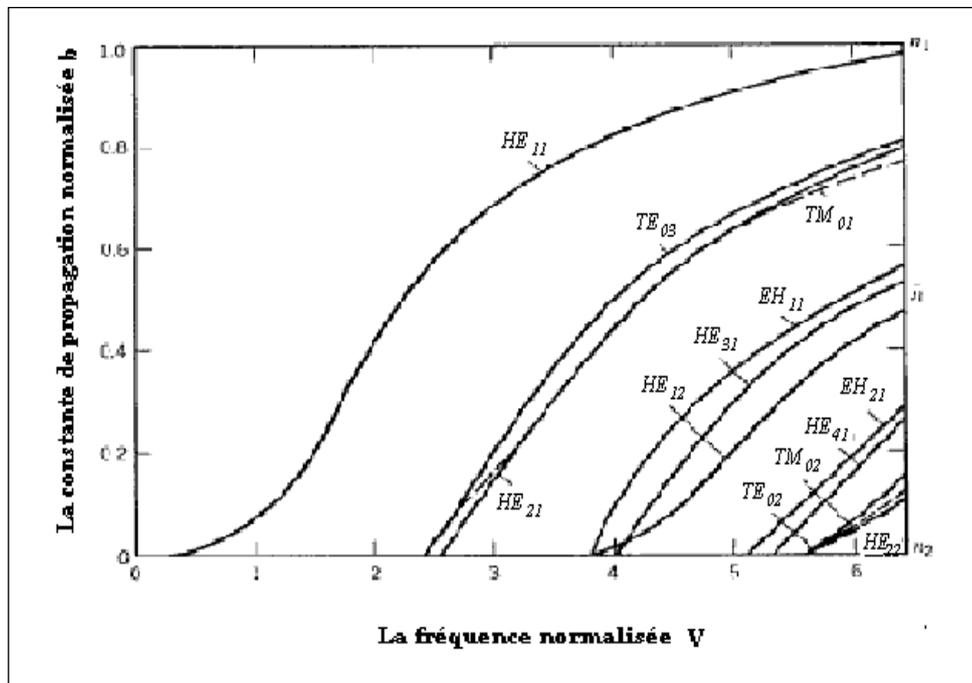


Figure. I. 14 : La constante de propagation normalisée b et l'indice effectif en fonction de la fréquence normalisée (d'après réf. [1]).

On constate de la figure (I. 14) que, tous les modes, à l'exception du mode HE_{11} , présentent une fréquence de coupure pour laquelle la constante de propagation normalisée devient nulle (et l'indice effectif devient égal à l'indice de la gaine).

La fibre optique monomode peut supporter seulement le mode HE_{11} . Donc, il suffit, pour avoir un seul mode guidé, de choisir les paramètres de la fibre (n_c , n_g et a) et la longueur d'onde λ , de telle sorte que la fréquence normalisée soit inférieure à la fréquence de coupure du second mode guidé. La condition monomode est déterminée par la valeur de V à qui les modes TE_{01} et TM_{01} atteignent la coupure. Elle est obtenue en posant $m=0$ dans l'équation caractéristique des modes (I.53). On obtient deux solutions possibles (les deux modes TE_{01} et TM_{01}) :

$$\gamma K_0(\gamma a) J_0'(\kappa a) + \kappa J_0(\kappa a) K_0'(\gamma a) = 0 \quad (\text{I.59})$$

$$n_c^2 \gamma K_0(\gamma a) J_0'(\kappa a) + n_g^2 \kappa J_0(\kappa a) K_0'(\gamma a) = 0 \quad (\text{I.60})$$

Pour trouver la fréquence de coupure, il suffit de poser $\gamma=0$ et, puisque $V = \kappa a$, on obtient, comme fréquence de coupure (la même pour les deux modes) :

$$J_0(V) = 0 \quad (\text{I.61})$$

La petite valeur de V pour laquelle $J_0(V) = 0$ est 2.405 [1,2]. La condition pour qu'une fibre optique peut supporter qu'un seul mode de propagation HE_{11} est donc :

$$V = k_0 a \sqrt{n_c^2 - n_g^2} < 2.405 \quad (\text{I.62})$$

Elle est déterminée par l'ouverture numérique, le rayon de cœur et la longueur d'onde. On définit la longueur d'onde de coupure (longueur d'onde à partir de laquelle une fibre devient monomode) :

$$\lambda < \frac{2\pi a ON}{2.405} \quad (\text{I.63})$$

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Les fibres à saut d'indice peuvent supporter un seul mode si $V < 2.405$ [2] et sont appelées les fibres monomodes. La différence principale entre les fibres monomode et multi-mode est la dimension du cœur. Le rayon du cœur a est typiquement $25\text{-}30\mu\text{m}$ pour les fibres multi-mode. Tandis que, pour les fibres monomode ayant $\Delta \approx 0.003$ le rayon du cœur a est inférieur à $5\mu\text{m}$ [2]. Une valeur standard du rayon externe $b = 62.5\mu\text{m}$ [2] est utilisée communément pour les fibres monomode et multi-mode.

I.4. 2. Dispersion de vitesse de groupe

La dispersion de la vitesse de groupe est dû essentiellement à deux effets : la dispersion du matériau dite aussi dispersion chromatique et la dispersion du guidage.

La dispersion chromatique résulte de la variation de l'indice de réfraction du matériau en fonction de la longueur d'onde de l'onde lumineuse. La dispersion du guidage correspond à la variation d l'indice effectif d'un mode particulier en fonction de la longueur d'onde optique même si l'indice du matériau était constant.

Ces deux effets contribuent ensemble à la dispersion de vitesse de groupe que l'on peut exprimer en termes de variation de la constante de propagation en fonction de la fréquence optique.

On peut donc procéder à un développement de la constante de propagation $\beta(\omega) = n_{\text{eff}}(\omega)\omega / c$ en série de Taylor autour de la pulsation centrale ω_0 de l'impulsion :

$$\begin{aligned} \beta(\omega) = & \beta_0 + \frac{\partial\beta}{\partial\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3\beta}{\partial\omega^3}(\omega - \omega_0)^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4\beta}{\partial\omega^4}(\omega - \omega_0)^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Avec la constante de propagation $\beta_0 = n(\omega_0)\omega_0 / c$ et $n(\omega_0)$ est l'indice de réfraction à la pulsation ω_0 .

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Le terme $\beta_1 = \frac{\partial\beta}{\partial\omega}$, correspond à l'inverse de la vitesse de groupe de l'onde lumineuse. Le terme

$\beta_2 = \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}$ est le paramètre de la dispersion de la vitesse de groupe (GVD pour « *Group Velocity Dispersion* »).

Les deux paramètres β_1 et β_2 sont donné par les relations suivantes :

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n_{eff} + \omega \frac{dn_{eff}}{d\omega} \right) \quad (I.65)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn_{eff}}{d\omega} + \omega \frac{d^2n_{eff}}{d\omega^2} \right) \quad (I.66)$$

$\beta_3 = \frac{\partial^3\beta}{\partial\omega^3}$ et $\beta_4 = \frac{\partial^4\beta}{\partial\omega^4}$ sont les termes de dispersion d'ordres supérieurs que nous allons traiter ultérieurement.

Le temps mis par une composante spectrale spécifique à la fréquence ω est donné par :

$$T = L / v_g(\omega) \quad (I.67)$$

Où L est la longueur de la fibre, et v_g est la vitesse de groupe, défini comme :

$$v_g = \left(d\beta / d\omega \right)^{-1} \quad (I.68)$$

Ici β est la constante de propagation donnée par la relation :

$$\beta = n_{eff} k_0 = n_{eff} \omega / c \quad (I.69)$$

Où n_{eff} est l'indice effectif donné par [1] :

$$n_{eff} = n_g + b(n_c - n_g) \approx n_g (1 + b\Delta) \quad (I.70)$$

Et b est la constante de propagation normalisée.

En introduisant l'équation (I.68) dans l'équation (I.69), on peut montrer que :

$$v_g = \frac{c}{n_{eff-gr}} \quad (I.71)$$

Où n_{eff-gr} est l'indice du groupe donné par :

$$n_{eff-gr} = n_{eff} + \omega \left(\frac{dn_{eff}}{d\omega} \right) \quad (I.72)$$

La dépendance de la vitesse de groupe à la fréquence mène à l'élargissement de l'impulsion à cause de la dispersion des différentes composantes spectrales d'une impulsion pendant la propagation. Par conséquent, ils ne font pas arriver simultanément à la sortie de la fibre. Si $\Delta\omega$ est la largeur spectrale de l'impulsion, l'étalement en temps de l'impulsion est décrit par :

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \omega} \Delta\omega = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \Delta\omega = \beta_2 L \Delta\omega \quad (I.73)$$

Où l'équation. (I.68) a été utilisée.

Cette équation montre que la différence entre les temps de l'arrivée de l'information est proportionnelle à la dispersion de groupe β_2 , la largeur spectrale de l'impulsion $\Delta\omega$, et la longueur de la fibre L .

Dans quelques systèmes des communications optiques, la largeur spectrale de l'impulsion $\Delta\omega$ est déterminée par la gamme des longueurs d'onde $\Delta\lambda$ émise par la source optique. Il est coutumier d'utiliser $\Delta\lambda$ au lieu de $\Delta\omega$. En utilisant $\omega = 2\pi c/\lambda$ et $\Delta\omega = \left(-2\pi c/\lambda^2 \right) \Delta\lambda$, équation. (I.35) peut être écrite comme :

$$\Delta T = \beta_2 L \left(-2\pi c/\lambda^2 \right) \Delta\lambda = \frac{-2\pi c \beta_2}{\lambda^2} L \Delta\lambda \quad (I.74)$$

La dispersion chromatique est désignée par le paramètre du retard de groupe, D , qui peut être décrit par :

$$D = \frac{-2\pi c \beta_2}{\lambda^2} \quad (\text{I.75})$$

Donc la propriété de la dispersion d'une fibre est désignée par le retard de groupe, D , qui a une unité de ps/nm/km. Equation (I.74) peut être écrite comme :

$$\Delta T = DL\Delta\lambda \quad (\text{I.76})$$

Évidemment, la convention de $D > 0$ ($D < 0$) est utilisée quand l'information, à une longueur d'onde plus courte, propage plus vite (plus lente), un cas appelé dispersion anormale (normale).

Le produit débit-portée ($B.L$) est obtenu en utilisant $\Delta T < 1/B$ [1] et est donné par :

$$B\Delta T < 1 \quad (\text{I.77})$$

En utilisant ΔT d'équation (I.76) cette condition devient :

$$B|D|\Delta\lambda L < 1 \quad (\text{I.78})$$

L'équation (I.78) fournit une évaluation d'ordre de grandeur du produit $B.L$ offerte par les fibres monomode.

Pour une fibre monomode, D devient 0 (16 ps/nm/km) à $\lambda = 1300\text{nm}$ (1550nm) [1,4]. Il existe un autre type des fibres où la dispersion du groupe D est nulle à une longueur d'onde égale à 1550nm [1,4] où les pertes sont minimales. Ce type des fibres est connu sous le nom d'une fibre à dispersion décalée (*dispersion-shifted fibers*) (Figure I.15).

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, Optical Fiber Technology 10 (2004) 150–170.

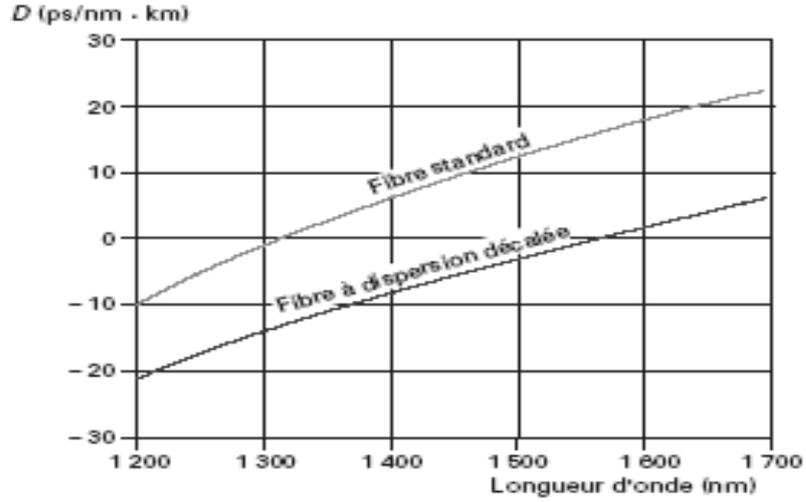


Figure. I.15 : La dispersion chromatique pour une fibre standard et une fibre à dispersion décalée. Puisque le paramètre D dépend de la longueur d'onde (aussi l'indice du mode n_{eff}), on peut l'écrire de l'équation. (I.75) comme suivant :

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left(2 \frac{d\tilde{n}}{d\omega} + \omega \frac{d^2\tilde{n}}{d\omega^2} \right) \quad (I.79)$$

Où équation. (I.72) a été utilisée. Si on substitue n_{eff} d'équation. (I.70) et on utilise l'équation (I.56), D peut être écrit comme :

$$D = D_M + D_W \quad (I.80)$$

Où D_M est la dispersion matériau et D_W est la dispersion guide d'onde. Elles sont données par :

$$D_M = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{dn_{ggr}}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{dn_{ggr}}{d\lambda} \quad (I.81)$$

$$D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \left[\frac{n_{ggr}^2}{n_g \omega} \frac{V d^2(Vb)}{dV^2} + \frac{dn_{ggr}}{d\omega} \frac{d(Vb)}{dV} \right] \quad (I.82)$$

Ici n_{gr} est l'indice de groupe de la gaine et les paramètres V et b sont donnés par les équations (I.56) et (I.58), respectivement. Dans le calcul d'équations (I.81)-(I.82), le paramètre Δ est supposé indépendant de la fréquence. Un troisième terme connu sous le nom de dispersion matérielle devrait être ajoutée à l'équation (I.80) quand $d\Delta/d\omega \neq 0$, mais pratiquement leur contribution est négligeable.

I.4.2.a Dispersion chromatique

La dispersion chromatique est l'effet pour lequel l'indice de réfraction de la silice, la matière utilisée pour la fabrication des fibres optiques, dépend de la fréquence optique ω .

Fondamentalement, l'origine de la dispersion chromatique est en rapport avec les fréquences de résonance caractéristiques par lesquelles le milieu absorbe la radiation électromagnétique à travers les oscillations des électrons du lien. Loin des résonances du matériau, l'indice de réfraction $n(\omega)$ peut s'exprimer à partir de l'équation de SELLMIEIER [1]:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^M \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (I.83)$$

Où ω_j et B_j sont la fréquence et la force de la $j^{\text{ème}}$ résonance. La somme étend sur toutes les résonances matérielles qui contribuent dans la gamme de fréquence.

Dans le cas des fibres optiques, les paramètres B_j et ω_j sont obtenus expérimentalement pour $M = 3$ [1]. Ils dépendent des constituants du cœur (c.-à-d. de la quantité de dopants). Pour la silice pure, ces paramètres pour $j = 1, 2, 3$ ont les valeurs suivantes : $B_1 = 0.6961663$, $B_2 = 0.4079426$, $B_3 = 0.8974794$, $\lambda_1 = 0.0684043 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.1162414 \mu\text{m}$, et $\lambda_3 = 9.896161 \mu\text{m}$ où $\lambda_j = 2\pi c / \omega_j$ [1]. L'indice du groupe $n_{gr} = n + \omega \left(\frac{dn}{d\omega} \right)$ peut être obtenu en utilisant ces valeurs des paramètres.

La figure I.16 illustre la variation de l'indice de réfraction n et de l'indice de groupe n_{gr} en fonction de la longueur d'onde dans la gamme de $0.5 - 1.6 \mu m$ pour la silice. On remarque que l'indice de groupe passe par une valeur minimale, il s'avère donc que la dérivée $dn_{gr}/d\lambda = 0$ à $\lambda = 1.276 \mu m$ [1]. Cette longueur d'onde est connu sous le nom de la longueur d'onde de zéro de dispersion λ_{ZD} , c.-à-d. la dispersion chromatique est nulle à $\lambda = \lambda_{ZD}$ ($D_M = 0$). Le paramètre de la dispersion D_M est négative (positive) au-dessous (au-dessus) de λ_{ZD} . Dans la gamme de la longueur d'onde $1.25 - 1.66 \mu m$ D_M peut être approximé par la relation [1] :

$$D_M \approx 122 \left(1 - \lambda_{ZD} / \lambda \right) \quad (I.84)$$

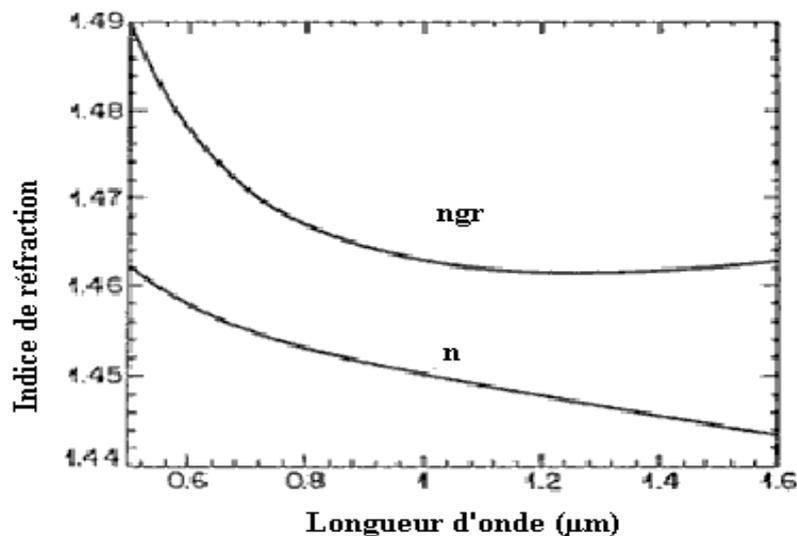


Figure I.16 : Variation de l'indice de réfraction n et de l'indice de groupe n_{gr} en fonction de la longueur d'onde pour la silice (d'après Réf. [1]).

Il faut à noter que $\lambda_{ZD} = 1.276 \mu m$ seulement pour la silice pure [1]. Mais cette valeur peut varier dans la gamme de $1.27 - 1.29 \mu m$ pour les fibres optiques dont le cœur et la gaine sont dopés pour varier l'indice de réfraction [1].

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

I.4.2.b. Dispersion guide d'onde

La contribution de la dispersion guide d'onde D_W au paramètre de la dispersion D est donnée par équation. (I.82) et dépend du paramètre V de la fibre.

Dans la figure I.17, même si les deux dérivés sont positives, D_W est négatif dans la gamme de la longueur d'onde de 0–1.6 μm . En revanche, D_W est négatif (positif) pour les longueurs d'onde au-dessous (au-dessus) de λ_{ZD} .

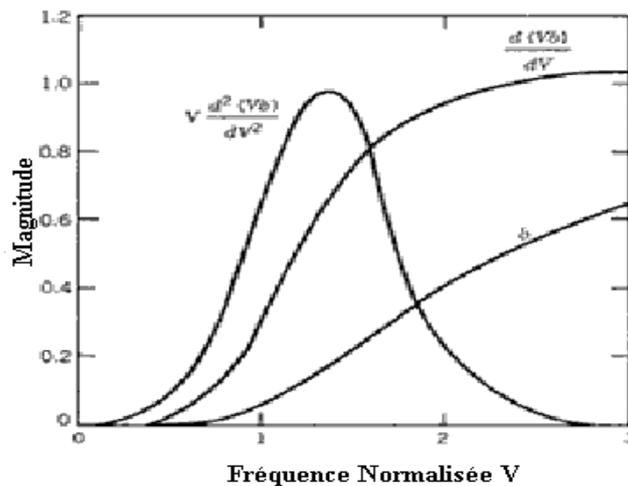


Figure I.17 : Variation de la constante de propagation normalisée b et ses dérivés $d(Vb)/dV$ et

$$V \left[\frac{d^2(Vb)}{dV^2} \right] \text{ par rapport au paramètre } V \text{ (d'après Réf. [1]).}$$

Figure I.18 présente D_M , D_W , et leurs somme $D = D_M + D_W$, pour une fibre monomode. L'effet principal de la dispersion guide d'onde est de déplacer λ_{ZD} par une quantité de 30–40 nm afin que la dispersion totale D soit nulle près de 1.31 μm .

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

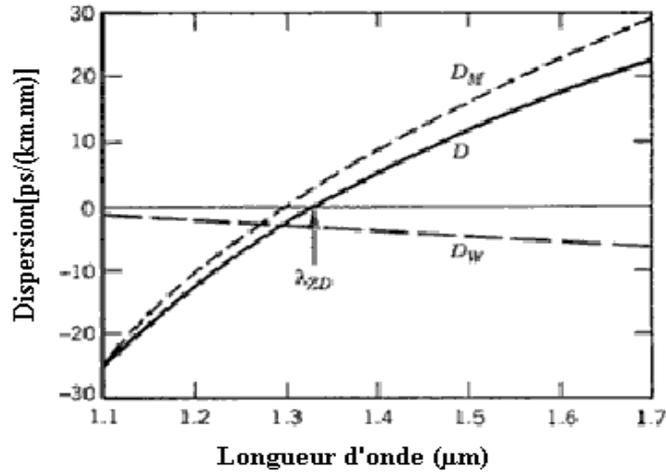


Figure I.18 : La dispersion totale D et des contributions relatives de la dispersion matériau D_M et de la dispersion guide d'onde D_W pour une fibre conventionnelle monomode. La longueur d'onde de zéro de dispersion est déplacée à une valeur plus élevée à cause de la contribution du guide d'onde (d'après Réf. [1]).

Puisque la dispersion guide d'onde D_W dépend des paramètres de la fibre, tel que le rayon du cœur et le paramètre de guidage Δ , c'est possible de faire varier D_W de façon à déplacer λ_{ZD} à $1.55\mu\text{m}$. De telles fibres sont appelées les fibres à dispersion décalée (*Dispersion-Shifted Fibers*). C'est aussi possible de faire varier D_W pour que la dispersion totale D est relativement petite sur une large gamme de longueur d'onde qui étend de 1.3 à $1.6\mu\text{m}$. De telles fibres sont appelées des fibres à dispersion plate (*Dispersion-flattened Fibers*).

Figure I.19 montre des exemples de la dépendance de la dispersion D à la longueur d'onde pour des fibres standard, à dispersion décalée, et à dispersion plate.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

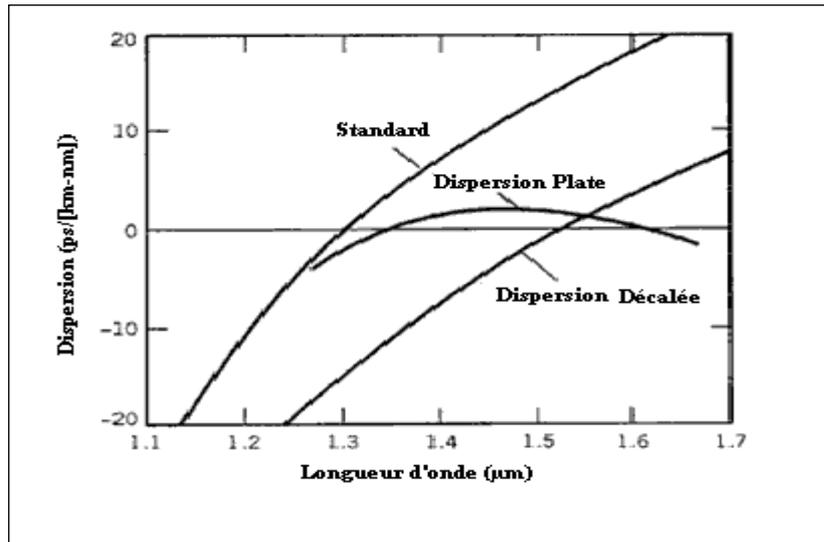


Figure I.19 : Dispersion chromatique en fonction de la longueur d'onde pour des fibres standard, à dispersion décalée, et à dispersion plate (d'après Réf. [1]).

Une quantité importante qui indique l'effet de la dispersion de la fibre est la longueur de dispersion L_D . Elle est définie comme la distance sur laquelle la largeur de l'impulsion est doublée dû au retard de groupe. La longueur de la dispersion est donnée comme :

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (I.85)$$

T_0 étant la largeur de l'impulsion.

I. 4.3. Dispersion d'ordres supérieurs

On pourrait penser que le produit débit-portée $B.L$ d'une fibre monomode, qui est donné par l'équation. (I.78), peut être augmenté indéfiniment en opérant à la longueur d'onde de zéro de dispersion λ_{ZD} où $D=0$. Cependant, à $\lambda = \lambda_{ZD}$, les impulsions optiques souffrent encore d'un élargissement à cause des effets dispersifs d'ordres supérieurs.

On peut comprendre cet effet en notant que le paramètre D ne peut pas être en fait nulle à toutes les longueurs d'onde contenues dans le spectre de l'impulsion concentré à λ_{ZD} .

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

Les effets dispersifs d'ordre supérieur sont gouvernés par la pente de courbe de dispersion :

$$S = dD/d\lambda \quad (\text{I.86})$$

En utilisant équation. (I.75), on peut écrire [1]:

$$S = \left(2\pi c/\lambda^2\right)^2 \beta_3 + \left(4\pi c/\lambda^3\right) \beta_2 \quad (\text{I.87})$$

Où $\beta_3 = \frac{d\beta_2}{d\omega} \equiv \frac{d^3\beta}{d\omega^3}$ est le paramètre de dispersion de troisième ordre.

À $\lambda = \lambda_{ZD}$, $\beta_2 = 0$, donc S est proportionnel à β_3 .

La valeur numérique de la pente de la courbe de dispersion, S , joue un rôle important dans les systèmes à multiplexage en longueur d'onde (WDM pour « *wavelength division multiplex system* ») [1]. Pour la plupart des fibres optiques $S > 0$, donc, les différents canaux ont des valeurs légèrement différentes de dispersion de vitesse de groupe. Alors c'est difficile de compenser simultanément la dispersion pour tous les canaux. Pour résoudre ce problème, un nouveau genre des fibres optiques a été utilisé pour lequel S est petit (des fibres à pente réduite « *reduced-slope fibers* ») ou négatif (des fibres à dispersion inverse « *reverse-dispersion fibers* »).

On peut estimer le produit $B.L$ en notant que pour une source de largeur spectrale $\Delta\lambda$, la valeur effective du paramètre de dispersion devient $D = S\Delta\lambda$ [1]. Le produit $B.L$ peut être obtenu en utilisant équation (I.78) :

$$BL|S|(\Delta\lambda)^2 < 1 \quad (\text{I.88})$$

Dans une fibre à dispersion décalée et pour une largeur spectrale $\Delta\lambda = 2$ nm, $S = 0.05$ ps/(km·nm²) à $\lambda = 1.55$ μm, le produit BL approche 5 (Tb/s)-km [1].

I.4.4. Origine de la biréfringence dans les fibres optiques

Dans une fibre optique monomode idéale (c.-à-d. le coeur est parfaitement circulaire), le mode fondamental HE_{11} correspond à deux modes dégénérés, polarisés orthogonalement. Ces deux modes se propagent à la même vitesse.

En réalité, on ne peut pas réaliser des fibres optiques parfaites. La cause est que les imperfections de fabrication produisent un cœur de forme elliptique. Elles sont soumises aussi à certaines contraintes comme les variations de température, les étirements, les torsions. De plus, lors de l'utilisation, les courbures déforment aussi la fibre. On a alors un milieu anisotrope, c.-à-d. la distribution transverse de l'indice de réfraction dans le coeur devient anisotrope. Par conséquence, la dégénérescence des modes de polarisation va être levée.

Mathématiquement, les indices de réfraction effectifs (aussi les constantes de propagation β) des deux modes de polarisation seront différents. Donc, ces deux modes vont se propager à des vitesses différentes. Cette différence entre les indices (ou entre les vitesses) nous offre une propriété connue sous le nom de la biréfringence. Le degré de biréfringence d'une fibre monomode est défini comme suivant [1,2] :

$$B = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0} = \Delta n = |n_x - n_y| \quad (\text{I.89})$$

Où n_x et n_y sont les indices de réfraction effectifs des deux états de polarisation correspondant aux directions orthogonales x et y.

Dans une fibre optique biréfringente, un rayon lumineux incident est décomposé en deux rayons polarisés linéairement. Aussi, les modes orthogonaux de la polarisation linéaire sont superposés. Pour une valeur donnée de B , les deux modes de polarisation échangent leurs énergies d'une façon périodique lors de leur propagation à l'intérieur d'une fibre optique.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Donc, dans le cas de la présence d'une différence d'indices entre les deux modes de polarisation linéaire, on peut définir la longueur de battement [1,2] :

$$L_B = \frac{2\pi}{|\beta_x - \beta_y|} = \frac{\lambda}{B} \quad (\text{I.90})$$

Où λ est la longueur d'onde du rayon lumineux injecté. La différence d'indices, dans les fibres standards usuelles, qui dépend de la longueur d'onde de la lumière, est de l'ordre de : $10^{-7} < n_y - n_x < 10^{-5}$ [9].

Malgré cette faible différence entre n_x et n_y , on ne peut pas la négliger. La cause est que cette différence conduit à des longueurs de battement qui vont de quelques centimètres à quelques mètres à $\lambda = 1550 \text{ nm}$.

Comme on a dit précédemment, il existe une biréfringence linéaire intrinsèque à l'intérieur d'une fibre ayant un cœur elliptique. Les axes de biréfringence sont alignés avec les axes principaux de l'ellipse. L'axe auquel l'indice modal est plus petit est appelé l'axe rapide parce que la vitesse de groupe est plus grande. Tandis que, l'axe avec le plus grand indice modal est appelé l'axe lent.

Si une impulsion lumineuse se propage dans une fibre optique, qui soumise à des variations géométriques et des contraintes extérieures, elle se décompose en deux modes polarisés linéairement selon les axes principaux de l'ellipse. Donc, ces deux modes vont se propager à des vitesses différentes à cause de la différence entre les indices. L'impulsion devient généralement plus large à la sortie de la fibre optique. Ce phénomène, est connu sous le nom de la dispersion des modes de polarisation (PMD pour «*Polarization-Mode Dispersion*»). Il a été étudié largement pendant 1990 à cause de son importance pour les systèmes à long-courrier. Aujourd'hui, il constitue un des facteurs limitants de la bande passante de ces systèmes [9].

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[9] G. V. SIMAEYS, *Instabilité, solitons et solhiatons, une approche expérimentale de la dynamique non linéaire en fibres optiques*, Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 2002-2003, 86-90.

Dans une fibre optique ayant une biréfringence constante (par exemple, une fibre à maintien de polarisation), l'élargissement de l'impulsion peut être estimé du retard du temps ΔT entre les deux modes de polarisation. Pour une fibre optique de longueur L , ΔT est donné par :

$$\Delta T = \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} = L|\beta_x - \beta_y| = L(\Delta\beta) \quad (\text{I.91})$$

Où les indices x et y identifient les deux modes orthogonalement polarisés, $v_{gx} = \frac{d\beta_x}{d\omega}$ et $v_{gy} = \frac{d\beta_y}{d\omega}$ sont les vitesses du groupe et $\Delta\beta$ est relié à la différence entre les vitesses du groupe des deux états principaux de polarisation. La quantité $\frac{\Delta T}{L}$ est une mesure de PMD. Pour les fibres à maintien de polarisation (PMF pour «*Polarisation-Maintaining Fibers*»), la quantité $\frac{\Delta T}{L}$ est tout à fait grande (~ 1 ns/km) quand les deux modes de polarisation sont excités également à l'entrée de la fibre. Cette quantité peut être égale à zéro en lançant l'onde lumineuse le long d'un des axes principaux [1].

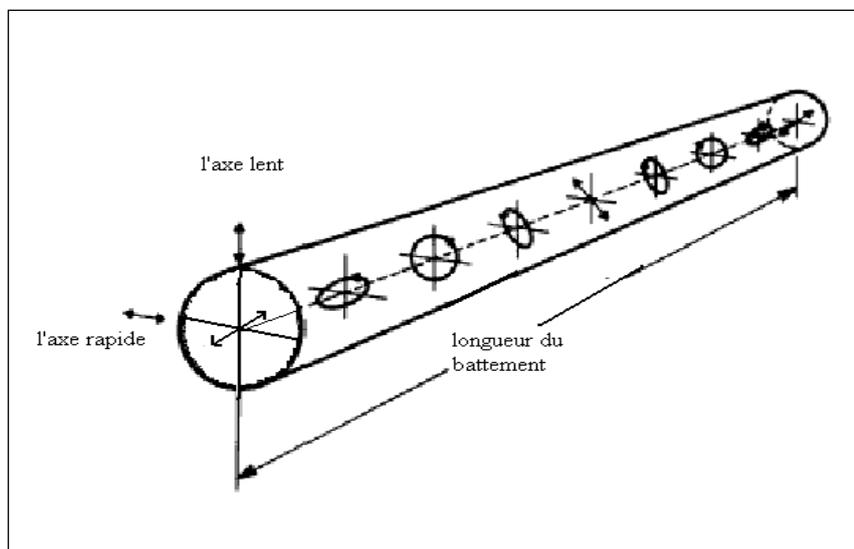


Figure I.20 : Évolution des deux états de polarisation le long d'une fibre à maintien de polarisation. L'onde lumineuse, à l'entrée de la fibre, est polarisée linéairement à 45° par rapport à l'axe lent (d'après réf. [2]).

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

I. 5. Pertes de la fibre

Dans une fibre optique, l'onde lumineuse perd son énergie au cours de la propagation, due soit à l'absorption ou à la diffusion. Alors, il existe un autre facteur limitatif connu sous le nom des pertes de la fibre. Ce qui conduit à la réduction de la puissance lumineuse du signal optique au niveau du récepteur.

La variation de la puissance du signal optique se propageant à l'intérieur d'une fibre optique est gouvernée par la loi de Bière [1] :

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P \quad (\text{I.92})$$

Où α est le coefficient d'atténuation. Si P_i est la puissance injectée dans une fibre optique de longueur L , la puissance de sortie P_s est donnée par :

$$P_s = P_i \exp(-\alpha L) \quad (\text{I.93})$$

Dans la majorité des cas, le coefficient d'atténuation α est exprimé en dB/km en utilisant la relation suivante:

$$\alpha(\text{dB} / \text{km}) = -\frac{10}{L} \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_i} \right) \approx 4.343\alpha \quad (\text{I.94})$$

La figure I.21 représente la variation du facteur d'atténuation en fonction de la longueur d'onde ($\alpha(\lambda)$) d'une fibre standard monomode en silice amorphe. Les pertes pour les longueurs d'onde correspondant au domaine ultraviolet sont liées essentiellement à la diffusion Rayleigh qui est un mécanisme fondamental qui survient des fluctuations microscopiques locales de la densité du matériau. Dans le domaine infrarouge l'atténuation est engendrée par l'absorption. L'absorption matérielle peut être divisée en deux catégories. Les pertes de l'absorption intrinsèques correspondent à l'absorption par la silice amorphe alors que l'absorption extrinsèque est en rapport avec les pertes causées par les impuretés dans la silice. La valeur minimale des pertes se situe autour de 1550 nm. Elle est de l'ordre de 0,2 dB/km ce qui correspond à la 3^{ème} fenêtre des télécoms.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002

Il existe un minimum secondaire près de $1.3\mu\text{m}$ où l'atténuation est au-dessous de 0.5 dB/km . Puisque la dispersion de la fibre est aussi minimale près de cette longueur d'onde ($1.3\mu\text{m}$), cette fenêtre de faibles atténuation a été utilisée pour les systèmes d'onde lumineuse de deuxième génération [1] ce qui correspond à la 2^{ème} fenêtre des télécoms. La 1^{ère} fenêtre qui a été utilisé pour les premiers réseaux télécoms était autour de $0.8\mu\text{m}$

Le spectre des pertes présente un pic près de $1.4\mu\text{m}$. Ce pic correspond à la présence des ions de l'eau dans la fibre. Il est possible maintenant diminuer de façon considérable le maximum du pic avec des procédés compliqués.

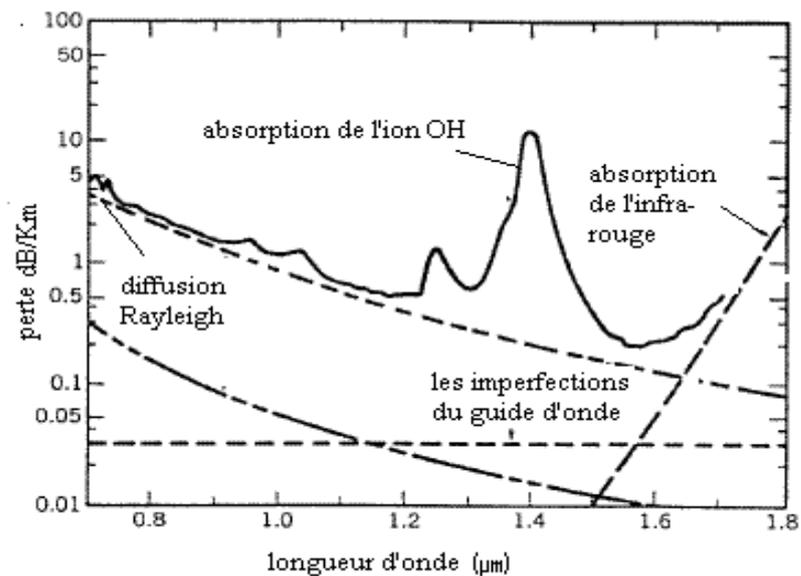


Figure I. 21 : le spectre de la Perte d'une fibre monomode a réalisée dans les années 1979 (d'après Réf. [1]).

Pour compenser l'atténuation de la puissance lumineuse du signal optique on utilise des amplificateurs optiques comme répéteurs que réengendrent le signal affaibli après des dizaines de kilomètre de propagation le long de la fibre.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

I.6. Les effets non linéaires dans les fibres optiques

Quand on applique des champs électromagnétiques intenses, la réponse de tout diélectrique à la lumière devient non linéaire, et les fibres optiques ne sont pas une exception. La plupart des fibres optiques sont constituées de la silice, qui est un diélectrique de type isolant formé des molécules symétriques (SiO_2) ; alors la silice est un matériau centrosymétrique.

Sous l'influence d'un champ électrique \vec{E} , il est possible de déformer le nuage électronique de la silice, ce phénomène est connu sous le nom de la polarisation électronique. La polarisation est définie comme la grandeur macroscopique correspondant à la somme des moments dipolaires microscopiques.

Si on applique un champ électromagnétique faible, la silice a une réponse dite linéaire en fonction de l'amplitude du champ électrique, donc la polarisation est linéaire, notée P_L . Pour un champ électromagnétique intense, la polarisation du matériau devient alors une fonction non linéaire du champ électrique \vec{E} et est donnée par la relation suivante [2]:

$$P = P_L + P_{NL} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot E + \chi^{(2)} : EE + \chi^{(3)} : EEE + \dots \right) \quad (\text{I.95})$$

Où ϵ_0 est la permittivité du vide, le coefficient $\chi^{(1)}$ représente la susceptibilité linéaire, qui est la principale contribution de la polarisation. Cette grandeur complexe intervient directement dans l'indice de réfraction du milieu et dans le coefficient d'atténuation.

Pour les matériaux centrosymétriques, la susceptibilité non linéaire d'ordre deux $\chi^{(2)}$ est égale à zéro. Puisque cette non linéarité est responsable des effets comme le doublage en fréquence ou la somme de fréquence, il est donc théoriquement impossible (sauf pour des cas particuliers) d'obtenir de la génération de second harmonique dans les fibres optiques en silice.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Les effets non linéaires qui se produisent dans les fibres optiques sont causés par la susceptibilité non linéaire d'ordre trois $\chi^{(3)}$. Ces effets tels que l'effet Kerr optique, la diffusion Raman stimulée, la diffusion Brillouin stimulée ainsi que le mélange à quatre ondes sont des effets du 3^{ème} ordre.

I.6.1.L'auto-modulation de phase

Dans une fibre optique en présence de l'effet Kerr l'indice de réfraction n devient fonction de l'intensité du champ électrique et peut être donné par :

$$n(\omega, t) = n_L(\omega) + n_2 \cdot I(t) \quad (\text{I.96})$$

Où n_L correspond à l'indice linéaire, I à l'intensité du champ électrique et n_2 à l'indice non linéaire du milieu et est appelé le coefficient de Kerr. L'indice n_2 est compris entre $2,6 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$ et $3,2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$ pour une fibre en silice [1].

L'indice non linéaire est directement relié à la susceptibilité d'ordre trois par la relation :

$$n_2 = \frac{3}{8n_L} \text{Re}[\chi^{(3)}] \quad (\text{I.97})$$

Dans le cas de la présence de l'effet Kerr, l'indice de réfraction n est donné par l'équation (I.96). Donc, le nombre d'onde devient :

$$k = \frac{\omega}{c} [n_L(\omega) + n_2(\omega) \cdot I(t)] \quad (\text{I.98})$$

Cette équation indique que sous une forte intensité du champ électrique, la variation de l'indice de réfraction entraîne un déphasage auto-induit ; cet effet est appelé auto-modulation de phase (SPM pour «*Self-Phase Modulation*»). Le déphasage non linéaire induit par l'auto-modulation de phase provient de la partie non linéaire du nombre d'onde k_{NL} :

$$\Delta\Phi_{NL-SPM}(t) = k_{NL} \cdot L = n_2 \cdot k_0 \cdot L \cdot I(t) \quad (\text{I.99})$$

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

Avec k_0 est le vecteur d'onde et L la longueur de propagation.

Le décalage en fréquence engendré par l'auto-modulation de phase est obtenu par la relation suivante :

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\Delta\Phi_{NL-SPM}(t)}{dt} \quad (I.100)$$

Il est important de définir le coefficient non linéaire γ (en $m^{-1}.W^{-1}$) qui permet d'évaluer la réponse non linéaire d'une partie de la fibre quand on applique un champ électromagnétique :

$$\gamma = \frac{2\pi n_2}{\lambda A_{eff}} \quad (I.101)$$

Où A_{eff} correspond à l'aire effective du mode se propageant dans le guide, et est donné par l'équation suivante :

$$A_{eff} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E(x, y)|^2 dx dy \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E(x, y)|^4 dx dy} \quad (I.102)$$

Où $E(x, y)$ est la distribution transverse du champ électrique.

Il faut noter que plus le coefficient γ est élevé, plus la fibre est considérée comme non linéaire.

Pour une fibre standard en silice amorphe, le coefficient non linéaire est de l'ordre de $3Km^{-1}W^{-1}$ à $1.55\mu m$. Dans une fibre hautement non linéaire toujours en silice amorphe, le coefficient γ est supérieur à $10Km^{-1}W^{-1}$ et peut atteindre des valeurs proches de $200Km^{-1}W^{-1}$.

Enfin en connaissant le coefficient non linéaire du guide γ et la puissance P_0 injectée dans la fibre optique, il est possible de calculer, de manière approximative, la longueur non linéaire L_{NL} :

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (\text{I.103})$$

Il est défini comme la longueur à partir de laquelle les effets non linéaires commencent à apparaître.

I.6.2. La modulation de phase croisée

La dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité dans l'équation () peut mener aussi à un autre phénomène non linéaire connu sous le nom de la modulation de phase croisée (XPM pour « *Cross Phase Modulation* »). Il se produit quand deux champs optiques se propagent simultanément dans une fibre à des longueurs d'onde différentes ou avec des états de polarisation différents.

Le phénomène est lié au fait que l'indice de réfraction vu par une impulsion est modifié par la présence de l'autre dans la zone de chevauchement. Le déphasage non linéaire induit par la modulation de phase croisée sur la première impulsion par l'intensité de la deuxième impulsion I_2 est donné par :

$$\Delta\Phi_{NL_XPM\ 1}(t) = 2n_2.k_0.L.I_2(t) \quad (\text{I.104})$$

Le déphasage non linéaire total subi par une impulsion j , en co-propagation avec N impulsions, s'écrit alors :

$$\Delta\Phi_{NL_j}(t) = n_2.k_0.L \left[I_j(t) + 2 \sum_{i \neq j}^N I_i(t) \right] \quad (\text{I.105})$$

Dans l'expression (I.105), on considère que la polarisation linéaire des faisceaux est parallèle. Si la polarisation est orthogonale il faut remplacer le facteur 2 par un facteur 2/3.

I.6.3. L'auto-raïdissement de l'impulsion

Cet effet résulte de la dépendance de la vitesse de groupe à l'intensité. Ainsi, lorsqu'une impulsion à profil gaussien, de forte intensité, se propage dans un milieu non linéaire tel que la silice, la crête de l'impulsion voit un indice plus fort que les ailes de l'impulsion. La vitesse de propagation de son centre est alors plus faible que celle du reste de l'impulsion. Il en résulte une asymétrie et un raidissement du front arrière de celle-ci. Le phénomène est appelé effet d'auto-raïdissement (SS pour « *Self-Steepening* »).

Cet effet est généralement pris en compte pour des impulsions femtoseconde ultra-courtes (typiquement < 100 fs).

I.6.4. Mélange à quatre ondes

Le phénomène non linéaire, connu sous le nom de mélange à quatre ondes (FWM pour « *Four-Wave-Mixing* »), est aussi provient de la susceptibilité non linéaire d'ordre trois et correspond à la recombinaison et génération de photons à différentes fréquences.

Pour obtenir ce phénomène, il est nécessaire de respecter deux conditions : la première est la conservation de l'énergie et la deuxième est l'accord des vitesses de phase entre les ondes.

Il existe deux types de mélanges à quatre ondes. Dans le premier cas, il y a interaction de trois photons aux fréquences ω_1 , ω_2 , ω_3 donnant naissance à un quatrième photon à la fréquence $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Ce processus permet d'expliquer la génération de troisième harmonique dans les fibres. Il est difficile d'obtenir ce type de mélange à quatre ondes dans les fibres optiques à cause de l'accord de phase généralement non satisfait.

Le deuxième cas est la création de deux photons aux fréquences ω_3 , ω_4 due à l'annihilation de deux photons à ω_1 , ω_2 avec $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$. L'accord de phase est alors donné par l'expression :

$$\begin{aligned} \Delta k &= k_3 + k_4 - k_1 - k_2 \\ &= (n_3\omega_3 + n_4\omega_4 - n_1\omega_1 - n_2\omega_2)/c = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

Où n_i étant l'indice de réfraction de la silice à la fréquence ω_i . L'onde à ω_3 est nommée ondes « Stokes », tandis que, à ω_4 ($>\omega_3$) on a une onde « anti-Stokes ». Dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$ (on a une seule longueur d'onde de pompe injectée), le phénomène correspond alors au mélange à quatre ondes dégénéré. L'accord de phase est composé d'une partie linéaire Δk due à la dispersion chromatique et une partie non linéaire Δk_{NL} induite par l'effet Kerr. Ainsi, l'accord de phase τ dans le cas dégénéré est donné par l'expression suivante [1]:

$$\tau = \Delta k + \Delta k_{NL} = (n_3\omega_3 + n_4\omega_4 - 2n_1\omega_1)/c + 2\gamma P = 0 \quad (\text{I.107})$$

Où γ représentant le coefficient non linéaire du guide et P la puissance de pompe.

-Instabilité de modulation

Le phénomène de l'instabilité de modulation est similaire au mélange à quatre ondes, et aussi doit respecter les conditions d'accord de phase et de conservation de l'énergie. Il est dû à l'origine à la propagation d'une impulsion de forte intensité dans un milieu dispersif et non linéaire comme une fibre optique.

Le phénomène se traduit par l'apparition de modulations ultra rapides conduisant à la génération d'un train d'impulsions à forte fréquence de récurrence.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

I.6.5. Les diffusions stimulées de lumière

La diffusion Rayleigh, est un exemple de la diffusion élastique pour laquelle la fréquence (ou l'énergie du photon) de la lumière diffusée reste inchangé. Les effets de la diffusion, Raman et Brillouin, furent les premiers effets non linéaires étudiés dans les fibres optiques pendant les années 1970 [1,2,3]. Contrairement aux effets non linéaires précédemment présentés, les effets de diffusion Raman et Brillouin sont dus à un échange d'énergie entre le champ optique et le milieu diélectrique, on parle alors des effets inélastiques.

Ces deux effets peuvent être compris comme une diffusion d'un photon à un autre d'énergie inférieure tel que la différence d'énergie apparaît sous la forme d'un phonon. La différence principale entre les deux effets est que les phonons optiques participent dans la diffusion Raman, alors que les phonons acoustiques participent dans la diffusion Brillouin.

I.6.5.a. La diffusion Raman

La diffusion Raman stimulée (SRS pour « *Stimulated Raman Scattering* ») est un processus non linéaire important. Il se produit quand un champ optique intense se propage dans un milieu non linéaire. Alors, le photon de l'onde pompe à la fréquence ω_p est diffusé en un photon de fréquence ω_s , la différence d'énergie ($\Omega = \omega_p - \omega_s$) étant absorbée par le centre diffuseur.

Il est important à noter que l'excitation du milieu se traduit par une modification du niveau vibrationnel ou rotationnel des molécules. Deux cas sont mentionnés, le premier est que ce processus donne naissance à un photon de plus faible fréquence (onde Stokes) alors que le deuxième donne naissance à un photon de plus grande fréquence (onde anti-Stokes). Généralement, l'intensité de la lumière diffusée à la fréquence anti-Stokes est plus faible que celle diffusée à la fréquence Stokes de plusieurs ordres de grandeur.

Le processus de la diffusion Raman spontanée est caractérisée par un faible transfert d'une fraction de la puissance de l'onde pompe à l'onde Stokes (typiquement $\sim 10^{-6}$) [2].

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[3] G. P. AGRAWAL, *Applications of nonlinear fiber optics*, Academic Press, 2001.

Cependant, en présence d'une onde pompe intense ω_P , le phénomène non linéaire de la diffusion Raman stimulée peut se produire dans une manière où on aura un processus d'amplification de l'onde Stokes ω_S au détriment de l'onde ω_P . Ce processus d'amplification peut être très efficace (> 10% de la valeur de l'onde pompe) [2].

La variation de l'intensité Stokes par rapport à la distance est donnée par la relation suivante [1,2]:

$$\frac{dI_S}{dz} = g_R I_P I_S \quad (\text{I.108})$$

Où I_S , I_P et g_R désigne respectivement l'intensité Stokes, l'intensité pompe, le coefficient du gain Raman qui vaut environ $10^{-13} \text{ m.W}^{-1}$. Ainsi, en pompant une fibre optique à la fréquence ω_P , l'onde Stokes est générée à $\omega_S = \omega_P - \Omega$ et son intensité croît exponentiellement d'après la relation suivante:

$$I_S(t) = I_S(0) \exp(g_r \cdot I_P \cdot L) \quad (\text{I.109})$$

Où L est la longueur de propagation.

Le spectre de gain Raman dans la silice, a un maximum d'efficacité environ à $\Omega = 13.2 \text{ THZ}$ [1,2] (Figure I.22) qui s'étend sur une bande de plus de 40 THz.

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

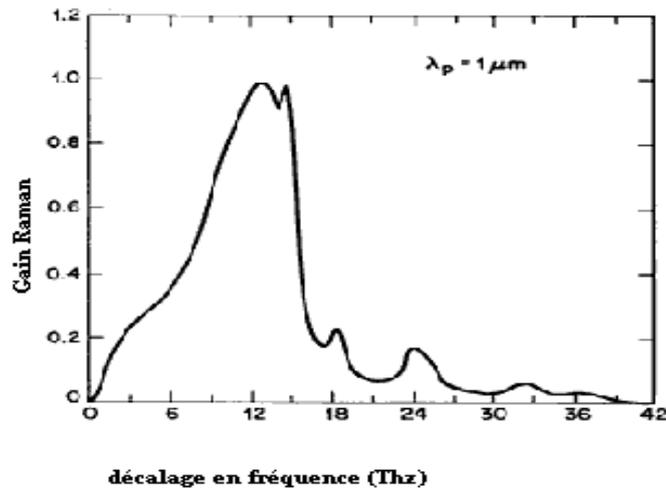


Figure I.22 : Profil spectral du gain Raman dans la silice à une longueur d'onde de pompe

$$\lambda_p = 1\mu m \quad (\text{d'après [2]})$$

I.6.5.b. Diffusion Brillouin stimulée

La diffusion Brillouin stimulée (SBS pour « *Stimulated Brillouin Scattering* ») est un processus non linéaire qui peut se produire dans les fibres optiques quand on applique un champ optique de spectre étroit. Ce processus est similaire à la diffusion Raman stimulée mais la diffusion Brillouin fait intervenir les phonons acoustiques au lieu des phonons optiques qui eux interviennent dans le cas du Raman. Une autre différence est que dans le cas de la diffusion Brillouin le décalage spectral de l'onde Stokes diffusée est de l'ordre de quelques GHz. De plus dans les fibres optiques il ne peut y avoir de diffusion Brillouin que dans la direction de contrapropagation à celle de la pompe par opposition à la diffusion Raman qui peut se produire dans les deux sens de propagation de la fibre.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

I.7. Conclusion

Ce chapitre est consacré à une étude détaillée sur les fibres optiques. Selon la dimension du cœur et la différence d'indices relativement à la longueur d'onde on a deux types de fibres optiques, monomode et multi-mode. Alors que, selon le profil d'indice de réfraction on a une fibre à saut d'indice et une fibre à gradient d'indice.

Une fibre optique multi-mode est une fibre dont le cœur où se propage la lumière a un diamètre grand devant la longueur d'onde. Dans ce cas, il est important de noter que la dispersion intermodale est le principal facteur limitatif des performances des fibres multi-mode. Pour éliminer la dispersion intermodale, on choisit les paramètres optogéométriques de la fibre (indice du cœur et de gaine, rayon du cœur, longueur d'onde de la lumière guidée) de façon à s'assurer qu'un seul mode puisse se propager dans la fibre. Dans ce cas on a une fibre monomode, dont le rayon du cœur est comparable à la longueur d'onde.

Pour décrire les fibres optiques monomodes il est nécessaire d'introduire les équations de Maxwell. Utilisant ces dernières, on peut trouver une équation caractéristique des modes où chaque valeur propre correspond à un mode de propagation. On a également démontré une condition pour qu'une fibre optique puisse supporter qu'un seul mode de propagation et aussi la longueur d'onde de coupure à partir de laquelle une fibre optique devient monomode.

Différents effets conduisent à une distorsion de l'impulsion qui se propage à l'intérieur d'une fibre optique. L'effet de la dispersion de la vitesse de groupe est dû à deux effets. Le premier est la dispersion du matériau, dite aussi dispersion chromatique, qui résulte de la variation de l'indice de réfraction du matériau en fonction de la longueur d'onde de l'onde lumineuse et le deuxième est la dispersion du guidage qui correspond à la variation de l'indice effectif d'un mode particulier en fonction de la longueur d'onde optique même si l'indice du matériau était constant.

En opérant à la longueur d'onde de zéro de dispersion λ_{ZD} , la dispersion de la vitesse de groupe est nulle. Cependant, à $\lambda = \lambda_{ZD}$, les impulsions optiques souffrent encore d'un élargissement à cause des effets dispersifs d'ordres supérieurs.

En réalité, les fibres optiques supportant un seul mode ne sont pas vraiment monomode. La cause est que les imperfections de fabrication produisent un cœur de forme elliptique. Il existe

aussi d'autres contraintes comme les variations de température, les étirements, les torsions. On a alors un milieu anisotrope où la fibre optique devient biréfringente.

Il existe un autre facteur limitatif connu sous le nom des pertes de la fibre. Cet effet conduit à la réduction de la puissance lumineuse du signal optique au niveau du récepteur.

Les pertes pour les longueurs d'onde correspondant au domaine ultraviolet sont liées essentiellement à la diffusion Rayleigh qui est un mécanisme fondamental qui survient des fluctuations microscopiques locales de la densité du matériau. Dans le domaine infrarouge l'atténuation est engendrée par l'absorption. L'absorption matérielle peut être divisée en deux catégories. Les pertes de l'absorption intrinsèques correspondent à l'absorption par la silice amorphe alors que l'absorption extrinsèque est en rapport avec les pertes causées par les impuretés dans la silice.

Les effets non linéaires qui se produisent dans les fibres optiques, tels que l'effet Kerr optique, la diffusion Raman stimulée, la diffusion Brillouin stimulée ainsi que le mélange à quatre ondes, sont causés par la susceptibilité non linéaire d'ordre trois $\chi^{(3)}$.

Chapitre II : Les effets solitoniques.

II.1. Introduction

Dans une fibre optique, lorsque l'effet de la dispersion des vitesses de groupe compense exactement l'effet Kerr [1,2,4,5], on a comme résultat la formation des solitons optiques.

C'est bien connu que ces solitons optiques, qui ont été prédits théoriquement par A. HASEGAWA et F. TAPPERT et ont été observés expérimentalement par L. MOLLENAUER et *al.*, ont devenus un bon candidat pour les systèmes de communications par fibre optique à longue distance et ultrarapide. La cause est que ces impulsions ont une propriété unique qui est le fait qu'ils peuvent se propager sur de longues distances sans changement de forme. Cependant, la propagation des solitons dans les fibres optiques biréfringentes a montré l'importance croissante à cause de leurs propriétés dynamiques intéressantes et leurs applications potentielles pour les technologies futures toutes-optiques [6,7,10,11-16].

Dans le cas du régime de dispersion anormale, le soliton qui se forme est connu sous le nom du soliton claire (*Bright Soliton*). Il existe d'autres types des solitons dépendant aux propriétés dispersive et non linéaire de la fibre optique tels les solitons sombres (Dark Solitons), les solitons managés en dispersion, les solitons bistables, et les solitons vectoriels.

-
- [1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.
 - [2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.
 - [4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, Optical Fiber Technology 10 (2004) 150–170.
 - [5] A. HASEGAWA & Y. KODAMA, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press Oxford, US, 1995.
 - [6] X. ZHANG & X. WANG, *Soliton propagation in birefringent optical fibers near the zero-dispersion wavelength*, optik 115, 2004, pp. 36-42.
 - [7] S. TRILLO & S. WABNITZ, *Polarized soliton instability and branching in birefringent fibers*, optics communications, 1989, volume 70, number 2, pages 166-172.
 - [10] I. M. UZUNOV & V.I. PULOV, *Vector solitary waves in strongly birefringent fibers with Raman scattering*, Physics Letters A, volume 372, Issue 15.7, April 2008. pages 2730-2733.
 - [11] S. TRILLO & S. WABNITZ, *Nonlinear modulation of coupled waves in birefringent optical fibers*, Physics Letters A 159, 1991, pages 252-256.
 - [12] M. F. MAHMOUD, W. W. ZACHARY & T. L. GILL, *Nonlinear pulse propagation in elliptically birefringent optical fibers*, Physica D 90, 1996, pages 271-279.
 - [13] R. OHHIRA, M. MATSUMOTO & A. HASEGAWA, *Effect of polarization orthogonalization in wavelength division multiplexing soliton transmission system*, Optics Communications 111, 1994, pages 39-42.
 - [14] A. HASEGAWA, *Effect of polarisation mode dispersion in optical soliton transmission in fibers*, Physica D 188, 2004, pages 241-246.
 - [15] W. CHEN, W. XU, Z. LIANG, A. LUO, H. CUI, D. HAN, L. CHEN & H. LU, *Enhanced soliton robustness to polarization mode dispersion by using degenerate four-wave mixing*, Optics and Laser Technology 39, 2007, pages 696-700.
 - [16] J. YANG & Y. TAN, *Fractal dependence of vector-soliton collision in birefringent fibers*, Physics Letters A 280, 2001, pages 129-138.

II.2. Solitons optique

II.2.a. Petit rappel historique sur les solitons optiques

L'onde solitaire a été observée en premier par l'ingénieur et scientifique écossais John Scott RUSSELL sur un canal non loin d'Édimbourg en 1834 [21]; il l'a appelé '*great wave of translation*', donc il y a maintenant 175 ans passés sur cette première observation. Alors qu'il montait à cheval le long de l'Union Canal, proche d'Edimbourg, il remarqua qu'une barge, en s'arrêtant soudainement, produisit une onde importante qui continua de se propager en amont, sans atténuation de sa forme, ni de sa vitesse. Il suivit ainsi cette onde, sur plusieurs kilomètres, l'onde qui remontait le courant en semblant ne pas vouloir faiblir. Il remarqua aussi que les ondes de forte amplitude se déplaçaient plus vite que celles d'amplitude faible. Ce phénomène décrit la propagation non linéaire d'une onde.

L'interprétation mathématique de ces phénomènes hydrodynamique sera faite dès 1895 par deux mathématiciens hollandais, KORTEWEG et DE VRIES, à travers une équation dite «KdV». Cette équation restera oubliée jusqu'en 1965, puis sera redécouverte par N. ZABUSKY et M. KRUSKAL. Ils découvriront que lors d'une collision entre deux solitons, l'enveloppe et la vitesse propre de deux solitons sont gardés après séparation. De plus quand deux solitons se rapprochent, ils se déforment graduellement, devenant un simple paquet d'ondes qui se redivise ensuite en deux solitons ayant conservé leur forme et leur vitesse.

En 1971, V. ZAKHAROV et A. SHABAT montrèrent la possibilité de l'existence du soliton dans un milieu non linéaire et dispersif.

En 1973, A. HASEGAWA et F. TAPPERT ont montré théoriquement la possibilité de la propagation des solitons dans les fibres optiques. A. HASEGAWA eut l'idée de compenser la dispersion à 1550 nm par l'effet Kerr grâce aux solitons.

En 1980, l'observation expérimentale des solitons par L. MOLLENAUER et *al.*

[21] P. G. DRAZIN & R. S. JOHNSON, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, 1989.

En 1982, l'apparition des fibres à gestion de dispersion à faible pertes. Dans la même période, l'amplification optique par effet Raman permettait d'envisager une transmission transatlantique sans répéteur. En 1986, L. MOLLENAUER proposa d'utiliser les solitons, pour lesquels la dispersion chromatique compense exactement les effets non linéaires.

La possibilité d'utiliser les solitons optiques pour les communications à longue distance a été démontrée en premier en 1988 dans une expérience dans lesquelles les pertes de la fibre ont été dédommagées en utilisant la technique d'amplification Raman. Depuis lors, un progrès rapide depuis 1990 a fait les solitons optiques à un candidat pratique pour les systèmes modernes par fibre optique [1].

II.2.b. Formation des solitons optiques

Une impulsion lumineuse est un paquet d'ondes électromagnétiques de spectre fini. Puisque toute fibre optique est un milieu dispersif, chacune composantes spectrales se propage avec une vitesse de groupe différente, et par conséquent, l'énergie de l'impulsion s'étend avec le temps le long de sa propagation.

Lorsque la dispersion chromatique est négative ($D < 0$), on parle du régime de dispersion normal. Dans ce cas, les grandes longueurs d'onde (fréquences rouges) se propagent plus rapidement que les courtes longueurs d'onde (fréquences bleues). Au contraire, en régime de dispersion dit anormal, la dispersion chromatique est positive ($D > 0$). Les grandes longueurs d'onde se propagent plus lentement que les longueurs d'onde plus courtes. Dans les deux cas, l'impulsion subit un élargissement temporel de son enveloppe.

Le zéro de la dispersion chromatique d'une fibre monomode (SMF pour « *Single Mode Fiber* ») est autour de 1312 nm . Pour les longueurs d'onde inférieures à cette valeur, la dispersion est positive (régime normal). Elle est négative (régime anormal) pour les longueurs d'onde plus grandes [1]. Ces fibres ont une dispersion d'approximativement $20 \text{ ps}^2/\text{km}$ à la longueur d'onde près de 1550 nm [1].

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

En l'absence des effets non linéaires, la déformation de l'impulsion optique est causée essentiellement par la dispersion chromatique et elle peut être éliminée par la technique de la compensation de la dispersion. Cette technique peut être décrite de la manière suivante (Figure. II.1) :

L'impulsion qui commence au point a , peut retrouver complètement sa forme originale au point e . Cela peut être réalisée si la dispersion dans la région anormale (D pour $a < Z < b$ et $d \leq Z < e$) est l'opposée de celui dans la région de dispersion normale (D , pour $b \leq Z < d$), à condition que : $\overline{ab} + \overline{de} = \overline{bd}$. Cependant, si le plan de dispersion n'est pas symétrique, l'impulsion au point $Z = e$ ne peut pas se retourner la forme originale.

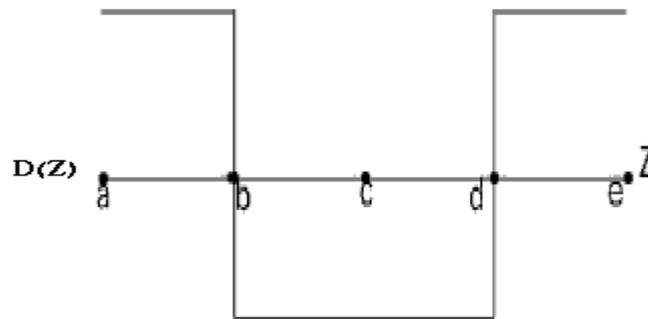


Figure. (II.1) : Plan de dispersion pour les systèmes managés en dispersion.

Donc, dans le cas linéaire (faible puissance), l'élargissement dispersif peut être éliminé par la compensation de la dispersion. Cependant, les effets non linéaires peuvent être encore la cause fondamentale pour la détérioration du signal optique surtout dans les systèmes de transmission à longue distance.

En réalité, La réponse du milieu optique n'est pas linéaire, car, l'indice de réfraction d'une fibre optique dépend de l'intensité du champ électrique (effet Kerr). Cette dépendance induit une variation de phase non linéaire. C'est ce qu'on appelle l'effet d'auto-modulation de phase. Cet effet non linéaire introduit un glissement de fréquence (*frequency chirp*).

Dans le régime de dispersion anormale, la direction du glissement de fréquence produit par l'effet d'auto-modulation de phase, est l'opposée à celui produit par la dispersion. Ceci indique que le glissement de fréquence induit par l'auto-modulation de phase peut compenser celui induit par la

dispersion chromatique. Ce processus mène à la formation des solitons optiques qui conserve la forme pendant la propagation.

II.3. Les effets solitoniques

Le soliton est une onde lumineuse initialement symétrique se propageant sans déformation de sa forme dans un milieu dispersif et non linéaire. En optique, le soliton est utilisé pour décrire une impulsion (soliton temporel) ou un faisceau (soliton spatial). Mathématiquement, le soliton peut être représenté par l'équation suivante [1,2]:

$$A(z=0, \tau) = N \cdot \text{sec} h(\tau) \quad (\text{II.1})$$

N est l'ordre du soliton qui est défini par [1,2]:

$$N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}} \quad (\text{II.2})$$

Où P_0 , L_D , L_{NL} sont respectivement la puissance crête de l'impulsion, la longueur de dispersion et la longueur non linéaire. Pour déterminer l'ordre du soliton, on prend toujours la valeur entière la plus proche.

Dans le cas où $L_D = L_{NL}$, c.-à-d., l'effet linéaire de la dispersion de vitesse de groupe est compensé par l'effet non linéaire d'auto-modulation de phase, on aura un soliton fondamental (ou d'ordre un). Alors, pour $N=1$, le soliton fondamental conserve sa forme au cours de la propagation.

En conséquence, la puissance crête nécessaire pour l'existence d'un soliton fondamental est :

$$P_0 = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}. \quad (\text{II.3})$$

[1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Les solitons d'ordre supérieur correspondent à $N \geq 2$. Ils peuvent être décrits comme plusieurs solitons fondamentaux se propageant de manière couplée et à la même vitesse de groupe.

Lors de sa propagation à l'intérieur d'une fibre optique, les solitons fondamentaux composant le soliton d'ordre supérieur entraînent des interactions périodiques. La figure II.2 montre l'évolution temporelle d'un soliton d'ordre trois en fonction de la longueur de propagation. L'évolution du soliton d'ordre trois peut présenter plusieurs pics où l'impulsion peut retrouver sa forme initiale de façon périodique.

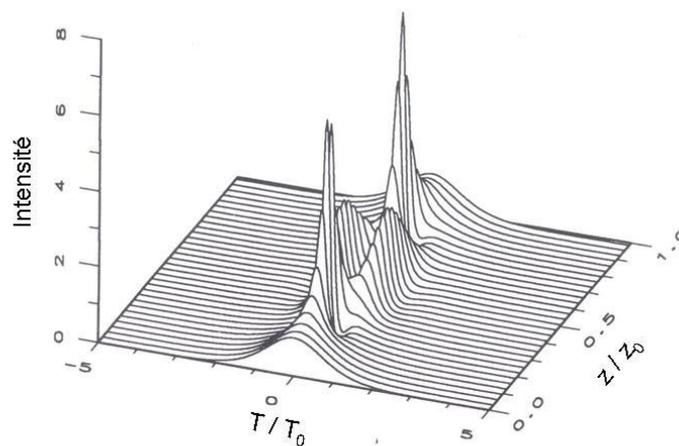


Figure II.2 : Evolution temporelle d'un soliton d'ordre trois en fonction de la longueur de propagation (d'après [2])

L'utilisation des solitons dans les fibres optiques peut présenter des avantages importants dans les liaisons transocéaniques à haut débit. Cependant, il existe d'autres effets conduisant à la perte de l'information même si le soliton optique est stable.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

II.3.a. La gigue temporelle de GORDON-HAUS

Le soliton optique est le meilleur choix comme un porteur de l'information dans les fibres optiques à cause de leur nature robuste. En raison de diverses perturbations qu'il subit en cours de sa propagation, il est instable par rapport à sa position, on a donc un processus de la gigue temporelle de GORDON-HAUS (*Timing jitter*). Les sources principales de la variation de la position du soliton sont les interactions entre solitons adjacents, le bruit d'amplification et la dispersion modale de polarisation. Ces effets limitent la bande passante des systèmes de transmission solitoniques.

La variation de la position du soliton optique provient de la variation de la longueur d'onde du soliton. Cette variation provoque une variation de la vitesse de propagation dans la fibre à travers la dispersion chromatique. En conséquence, on a une variation de la position du soliton (*random walk*).

Pour éviter la variation de la longueur d'onde du soliton optique dû à l'interaction, chaque deux solitons adjacents devraient être séparés d'une distance \geq six fois la largeur temporelle de l'impulsion) [4].

II.3.b. La fission soliton

Les solitons fondamentaux composant le soliton d'ordre supérieur voyagent ensemble et à la même vitesse de groupe. Sous l'effet d'une perturbation (due à l'effet d'auto-raïdissement de l'impulsion, à la diffusion Raman ou aux effets de dispersion d'ordres supérieurs), les vitesses de groupe des solitons fondamentaux sont changées. Par conséquent, on aura un processus de la fission soliton (*soliton breakup*) où le soliton d'ordre N éclate en un nombre N de solitons fondamentaux.

Dans le cas des impulsions ayant une largeur temporelle supérieure à 200 fs, le phénomène de fission soliton est dû à la diffusion Raman [].

[4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, Optical Fiber Technology 10 (2004) 150–170.

II.3.c. L'auto-décalage en fréquence des solitons

Les solitons ayant une durée typiquement inférieure à 100 fs se propageant dans une fibre optique possèdent une largeur spectrale supérieure au décalage Raman. Il en résulte un recouvrement entre le spectre de l'impulsion et le gain Raman qu'elle génère. Cette situation peut mener à un transfert d'énergie des grandes longueurs d'onde vers les longueurs d'onde courtes du spectre d'une même impulsion. Ce mécanisme appelé la diffusion Raman stimulée intra-impulsionnel.

La diffusion Raman stimulée intra-impulsionnel entraîne un décalage spectral du centre du spectre du soliton vers les grandes longueurs d'onde au cours de sa propagation dans la fibre optique. De plus, la modification de la longueur d'onde centrale du soliton mène à un changement de la vitesse de groupe et une modification des conditions de dispersion de celui-ci. Ce phénomène est connu sous le nom d'auto-décalage en fréquence des solitons (SSFS pour « *Soliton Self-Frequency Shift* »).

II.4. Dérivation de l'équation de Schrödinger non linéaire pour les fibres biréfringentes

Nous dérivons maintenant une équation de base décrivant la propagation d'une impulsion optique dans une fibre optique biréfringente. Ici nous supposons une petite biréfringence modale. Nous commençons par l'équation d'onde suivante [5] :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\chi} * \vec{E}) \quad (\text{II.4})$$

Ici \vec{E} correspond au champ électrique dans une fibre optique, $\vec{\chi}$ est le tenseur de susceptibilité qui inclut une réponse non linéaire, et $\vec{\chi} * \vec{E}$ indique l'intégrale de corrélation.

L'intégrale de corrélation est écrite comme suivant [5]:

$$\begin{aligned} \chi^* \vec{E} = \vec{P}_L(z, t) + \vec{P}_{NL}(z, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt_1 \chi^{(1)}(z, t - t_1) \cdot \vec{E}(z, t_1) \\ + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^t dt_3 \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \left\{ \vec{E}(z, t - t_1) \cdot \vec{E}(z, t - t_2) \right\} \vec{E}(z, t - t_3) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Où $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$ sont respectivement les portions linéaire et non linéaire du tenseur de la susceptibilité, qui dépendent des coordonnées spatiales dans la direction transverse des axes de la fibre.

Nous supposons que la susceptibilité du troisième ordre est une fonction scalaire et symétrique à toutes les variables. La susceptibilité du deuxième ordre est négligée pour une fibre optique qui est un verre centrosymétrique.

On écrit l'équation (II.4) de la forme suivante :

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^* \vec{E}) \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas d'une fibre optique ayant un indice de réfraction inhomogène, $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$.

Pour réduire l'équation (II.6), nous considérons les suppositions suivantes:

- ✓ Un mode quasi-monochromatique ;
- ✓ La fibre est monomode.
- ✓ Une petite biréfringence modale.

À cause de la petite biréfringence modale, nous écrivons le champ \vec{E} de la forme suivante :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(z,t) + \vec{E}_2(z,t) \quad (\text{II.7})$$

Où \vec{E}_1 et \vec{E}_2 représentent les deux modes de polarisation. Dans le cas d'une polarisation linéaire orthogonale, on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z,t) = \vec{E}_x(z,t)\hat{x} \\ \vec{E}_2(z,t) = \vec{E}_y(z,t)\hat{y} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Où \hat{x} et \hat{y} sont les vecteurs unités dans les directions x et y , choisis comme les directions de polarisation, et \vec{E}_x et \vec{E}_y sont les amplitudes de chacun des deux modes polarisés.

Nous définissons $\tilde{E}_a(\omega)$ pour $a = x$ ou y , $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$, et $\tilde{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ qui sont les transformées de Fourier de $\vec{E}_a(z,t)$, de $\tilde{\chi}^{(1)}(t)$, et de $\tilde{\chi}^{(3)}(t_1, t_2, t_3)$. Ils sont donnés par :

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_a(\omega) e^{i(k_a(\omega)z - \omega t)} d\omega \quad (\text{II.9})$$

$$\chi^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$\chi^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_3 \tilde{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} \quad (\text{II.11})$$

Où $k_a = k_a(\omega)$ est le vecteur d'onde du mode de polarisation polarisé suivant l'axe a . Pour une fibre biréfringente $k_x(\omega) \neq k_y(\omega)$.

La supposition quasi-monochromatique nous permet d'écrire le champ électrique \vec{E}_a de la forme suivante :

$$\vec{E}_a(z,t) = \Sigma_a(z,t) \exp[i(k_a(\omega)z - \omega_0 t)] + cc \quad (\text{II.12})$$

Où la fonction d'enveloppe $\Sigma_a(z,t)$ est la fonction lentement variable des deux variables z et t . Insérant l'équation (II.7) avec l'équation (II.8) et l'équation (II.12) dans l'équation (II.5), on voit que P_{NL} peut être donnée par :

$$P_{NL} \approx \left[\begin{array}{l} \gamma_x \left\{ \left(|\Sigma_x|^2 + e |\Sigma_y|^2 \right) \Sigma_x + f \Sigma_y^2 \Sigma_x^* e^{-2i\Delta k z} \right\} e^{i(k_x z - \omega_0 t)} \hat{x} \\ + \gamma_y \left\{ \left(|\Sigma_y|^2 + e |\Sigma_x|^2 \right) \Sigma_y + f \Sigma_x^2 \Sigma_y^* e^{-2i\Delta k z} \right\} e^{i(k_y z - \omega_0 t)} \hat{y} \\ + \{ \text{les champs avec la fréquence porteuse } 3\omega_0 \} + \text{le complexe conjugué} \end{array} \right] \quad (\text{II.13})$$

$$+ [\text{les ordres élevés}]$$

Où γ_x et γ_y sont les coefficients de Kerr, $\Delta k = k_x(\omega_0) - k_y(\omega_0)$ représente la biréfringence modale linéaire, et les termes $e = 2/3$ et $f = 1/3$.

Après quelques calculs de calculs, la partie linéaire P_L peut être donnée par [5]:

$$P_L = i \frac{\partial \Sigma_a}{\partial z} + k'_a \frac{\partial \Sigma_a}{\partial t} - \frac{1}{6} k_a''' \frac{\partial^3 \Sigma_a}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} \Sigma_a + \frac{1}{2} k_a'' \frac{\partial^2 \Sigma_a}{\partial t^2} \quad (\text{II.14})$$

Où $a = x$ ou y , et $k'_a = dk_a(\omega)/d\omega$, $k''_a = d^2 k_a(\omega)/d\omega^2$ et $k'''_a = d^3 k_a(\omega)/d\omega^3$.

Combinant les termes linéaires dans l'équation (II.14) et non linéaires dans l'équation (II.13) on obtient finalement :

$$i \frac{\partial \Sigma_x}{\partial z} + k'_x \frac{\partial \Sigma_x}{\partial t} - \frac{1}{6} k_x''' \frac{\partial^3 \Sigma_x}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} \Sigma_x + \frac{1}{2} k_x'' \frac{\partial^2 \Sigma_x}{\partial t^2} + \gamma_x \left(|\Sigma_x|^2 + e |\Sigma_y|^2 \right) \Sigma_x + f \Sigma_y^2 \Sigma_x^* e^{2i\Delta k z} = 0 \quad (\text{II.15.a})$$

$$i \frac{\partial \Sigma_y}{\partial z} + k'_y \frac{\partial \Sigma_y}{\partial t} - \frac{1}{6} k_y''' \frac{\partial^3 \Sigma_y}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} \Sigma_y + \frac{1}{2} k_y'' \frac{\partial^2 \Sigma_y}{\partial t^2} + \gamma_y \left(|\Sigma_y|^2 + e |\Sigma_x|^2 \right) \Sigma_y + f \Sigma_x^2 \Sigma_y^* e^{2i\Delta k z} = 0 \quad (\text{II.15.b})$$

Où $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ est le coefficient de Kerr.

Introduisant des variables nouvelles q_x et q_y de la manière suivante :

$$\Sigma_x = q_x e^{-\frac{i}{2}\Delta k z} \quad \text{et} \quad \Sigma_y = q_y e^{\frac{i}{2}\Delta k z} \quad (\text{II.16})$$

Le système des équations (II.15) devient :

$$i \frac{\partial q_x}{\partial z} + k'_x \frac{\partial q_x}{\partial t} - \frac{1}{6} k_x''' \frac{\partial^3 q_x}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} q_x + \frac{\Delta k}{2} q_x + \frac{1}{2} k_x'' \frac{\partial^2 q_x}{\partial t^2} + \gamma \left(|q_x|^2 + e |q_y|^2 \right) q_x + f q_y^2 q_x^* = 0 \quad (\text{II.17.a})$$

$$i \frac{\partial q_y}{\partial z} + k'_y \frac{\partial q_y}{\partial t} - \frac{1}{6} k_y''' \frac{\partial^3 q_y}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} q_y - \frac{\Delta k}{2} q_y + \frac{1}{2} k_y'' \frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2} + \gamma \left(|q_y|^2 + e |q_x|^2 \right) q_y + f q_x^2 q_y^* = 0 \quad (\text{II.17.b})$$

Nous réduisons maintenant le système d'équations (II.17) à une forme normalisée. Nous supposons que le régime de dispersion est anormale, c.-à-d. $k_x'' < 0$ et $k_y'' < 0$. Nous supposons aussi que la différence entre k_x'' et k_y'' est négligée, c.-à-d. $k_x'' = k_y'' \equiv k''$ et aussi $k_x''' = k_y''' \equiv k'''$. Les variables normalisées sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{z}{z_0} & z_0 &= \frac{t_0}{|k''|} \\ \tau &= \frac{1}{t_0} \left(t - v_{g0}^{-1} z \right) & v_{g0}^{-1} &= \frac{1}{2} (k_x' + k_y') \\ u &= \sqrt{\gamma z_0} q_x & v &= \sqrt{\gamma z_0} q_y \\ \sigma &= \frac{t_0}{2|k''|} (k_x' - k_y') & \mu &= \frac{t_0^2}{2|k''|} (k_x - k_y) \\ \beta_3 &= \frac{k''' z_0}{t_0^3} & \Gamma &= \frac{\alpha t_0^2}{2k''} \end{aligned}$$

Utilisant ces variables, le système des équations (II.20) devient :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \Gamma u + \mu u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \\ + (|u|^2 + e|v|^2) u + f v^2 u^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.18.a})$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \sigma \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} - \Gamma v - \mu v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \\ + (|v|^2 + e|u|^2) v + f u^2 v^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.18.b})$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $u(\zeta, \tau)$ et $v(\zeta, \tau)$ représentent les amplitudes normalisées des deux composantes du champ polarisées linéairement selon les axes lent et rapide, et σ , β_3 , Γ sont respectivement la différence des vitesses de groupe entre les deux modes de polarisation, le paramètre de dispersion de troisième ordre et les pertes de la fibre.

Nous notons, à partir du système des équations (II.15), que pour une Δk (ou μ) finie, les derniers termes dans les équations (II.15), qui contient les variations rapides de phase par rapport à z , peut être négligée utilisant la moyenne. Dans ce cas, le système d'équations (II.18) peut être réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + \Gamma u = i |u|^2 + \frac{2}{3} |v|^2 u \quad (\text{II.19.a}) \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \sigma \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} + \Gamma v = i |v|^2 + \frac{2}{3} |u|^2 v \quad (\text{II.19.b}) \end{array} \right.$$

Et est connu sous le nom du système d'équations de Schrödinger non linéaires couplées.

II.5. Méthode de la diffusion inverse :

La méthode de la diffusion inverse est utilisée en 1971 par V. ZAKHAROV et A. SHABAT pour résoudre l'équation de Schrödinger non linéaire.

Cette méthode est similaire à la transformé de Fourier utilisée communément pour résoudre les équations différentielles partielles linéaires. L'approche consiste à identifier un problème de diffusion approprié dont leur potentiel est la solution cherchée. Le champ incident à $\zeta = 0$ est utilisé pour trouver les données initiales de diffusion dont l'évolution le long de la distance ζ soit déterminée facilement en résolvant le problème de diffusion linéaire. Le champ propagé est reconstruit à partir les données de diffusion évolué. Les détails de la méthode de la diffusion inverse sont disponibles dans beaucoup de références [21]. On donne maintenant seulement une description brève de cette méthode analytique.

Si nous prenons, pour vous explique la méthode de la diffusion inverse, la forme standard de l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (\text{II.20})$$

[21] P. G. DRAZIN & R. S. JOHNSON, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, 1989.

Utilisant la méthode de la diffusion inverse, le problème de diffusion associé à l'équation (II.20) est [2] :

$$i \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + uv_2 = \zeta v_1 \quad (\text{II.21})$$

$$i \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + u^* v_1 = -\zeta v_2 \quad (\text{II.22})$$

Où v_1 et v_2 sont les amplitudes des deux ondes diffusées par le potentiel $u(\zeta, \tau)$. La valeur propre ζ joue un rôle semblable à celui joué par la fréquence dans l'analyse standard de Fourier, mais ζ peut prendre des valeurs complexes quand $u \neq 0$. Dans le cas de l'absence du potentiel ($u = 0$), on peut voir des équations (II.21) et (II.22) que v_1 et v_2 varient comme $\exp(\pm i\zeta\tau)$.

Les équations (II.21) et (II.22) sont résolues pour toutes les valeurs de ζ . Pour une forme initiale donné de $u(0, \tau)$ pour $\zeta = 0$, les équations (II.21) et (II.22) sont résolues pour obtenir les données de diffusion initiales. Le problème de la diffusion directe est caractérisé par un coefficient de réflexion $r(\zeta)$, qui joue un rôle analogue au coefficient de Fourier.

La formation des solitons correspond aux pôles de $r(\zeta)$ dans le plan complexe ζ . Donc, les données de diffusion initiale consistent en le coefficient de réflexion $r(\zeta)$, les pôles complexes ζ_j , et leurs restes c_j où $j=1$ à N (où N est l'ordre du soliton). Bien que le paramètre N ne soit pas nécessairement un nombre entier, la même notation est utilisée pour le nombre de pôles pour accentuer que ses valeurs entières déterminent le nombre de pôles.

L'évolution de la dispersion le long de la longueur de la fibre est déterminée en utilisant les techniques les plus connues. La solution désirée $u(\zeta, \tau)$ est reconstruite des données de la diffusion évoluées qui utilisent la méthode de la diffusion inverse. Ce pas est mathématiquement assez lourd parce qu'il exige la solution d'une équation intégrante linéaire compliqué.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

Cependant, dans le cas spécifique dans lequel $r(\zeta)$ soit nulle pour le potentiel initial $u(0, \tau)$, la solution $u(\zeta, \tau)$ peut être déterminé en résolvant un ensemble d'équations algébriques. Ce cas correspond à des solitons. L'ordre du soliton est caractérisé par le nombre N de pôles, ou les valeurs propres ζ_j ($j = 1 - N$). La solution générale peut être écrite comme :

$$u(\zeta, \tau) = -2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \psi_{2j}^* \quad (\text{II.23})$$

Où

$$\lambda_j = \sqrt{c_j} \exp(i\zeta_j \tau + i\zeta_j^2 \xi) \quad (\text{II.24})$$

ψ_{2j}^* est obtenu en résolvant l'ensemble des équations linéaires algébriques suivantes :

$$\psi_{1j} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_j \lambda_k^*}{\zeta_j - \zeta_k^*} \psi_{2k}^* = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\psi_{2j}^* - \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_j^* \lambda_k}{\zeta_j^* - \zeta_k} \psi_{1k} = \lambda_j^* \quad (\text{II.26})$$

Les valeurs propres ζ_j sont généralement complexes ($2\zeta_j = \delta_j + i\eta_j$). Physiquement, la partie réel δ_j produit une variation de la vitesse de groupe associée à la $j^{\text{ème}}$ composante du soliton. Pour que le $N^{\text{ème}}$ ordre du soliton reste ensemble, c'est nécessaire que toutes ses composantes voyagent à la même vitesse. Donc, toutes les valeurs propres ζ_j devrait s'allonger sur une ligne parallèle à l'axe imaginaire, c.-à-d., $\delta_j = \delta$ pour tout les j . Cette caractéristique simplifie considérablement la solution générale de l'équation (II.24).

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un petit rappel sur les solitons optique. La formation de ces derniers est le résultat d'une balance entre la dispersion de groupe et l'effet Kerr. Acause de leur nature robuste, l'utilisation des solitons dans les fibres optiques peut présenter des avantages importants dans les liaisons transocéaniques à haut débit. Cependant, il existe d'autre effet conduisant à la perte de l'information même si le soliton optique est stable. Ces effets sont : la

gigue temporelle de GORDON-HAUS (*Timing jitter*), la fission soliton, et l'auto-décalage en fréquence des solitons.

Nous avons aussi dérivé un système des équations de Schrödinger non linéaires couplées dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre. L'existence des termes couplés est le résultat de la biréfringence de la fibre optique.

Finalement, nous avons fait une petite description de la méthode de diffusion inverse qui est utilisée pour résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger non linéaire.

Chapitre III : Applications numériques.

III. 1. Introduction :

Pour trouver des solutions numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), beaucoup de méthodes sont utilisées. Cette équation est une équation non linéaire différentielle de dérivées partielles qui ne donnent pas généralement des solutions analytiques, sauf pour quelques cas spécifiques pour lesquelles la méthode de diffusion inverse (ISM pour «*inverse scattering method*») [2] peut être utilisée ou d'autres méthodes analytiques qui demandent une armature mathématique puissantes. Par conséquent, l'approche numérique est souvent nécessaire pour une compréhension des effets non linéaires dans les fibres optiques. Un grand nombre de méthodes numériques peuvent être utilisées pour ce but telles que la méthode spectrale, les méthodes des éléments finis, la méthode de Fourier à pas divisés et les méthodes des différences finies.

La « méthode de Fourier à pas divisés » ou « *Split-Step Fourier Method* » est utilisée communément pour étudier les phénomènes non linéaires dans les fibres optiques mais elle prend un temps considérable lors de son utilisation pour les systèmes à multiplexage en longueur d'onde (WDM pour «*Wavelength Division Multiplexing Systems*»). Par ailleurs, plusieurs méthodes de différences finies ont été utilisées pour résoudre les équations NLS. L'une de ces méthodes couramment utilisées, est le schéma de CRANK-NICOLSON.

Nous présentons ici une nouvelle méthode appelée '*semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization (OSPD)*', utilisée dans la référence [8] pour les solitons scalaire. Notre travail consiste donc à généraliser cette méthode pour le cas des solitons vectoriels, étudier sa stabilité et montrer que cette méthode est mieux adaptée et plus efficace pour ce type d'équations. Dans notre étude, cette méthode est utilisée pour chercher des solutions numériques du système des équations de Schrödinger non linéaires d'ordre supérieur couplées (CNLS) qui décrit la propagation des impulsions optiques dans les fibres optiques biréfringentes.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[8] ZHENLI XU, JINGSON HE & HOUDE HAN, *Semi-implicit operator splitting Padé method for higher-order nonlinear Schrodinger equations*, Applied Mathematics and computation , 2006, Vol 179, Issue 2, pp. 596-605.

Cette méthode présente plusieurs avantages comparativement aux méthodes similaires telles que la méthode de CRANK-NICOLSON :

- Elle nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide par rapport à la méthode de Crank-Nicholson.
- Elle occupe moins de mémoire.
- Elle est mieux adaptée pour les termes de dérivées d'ordres supérieurs décrivant les effets de la dispersion.

Nos simulations numériques du système d'équations de Schrödinger non linéaires d'ordre supérieur couplées sont faites en utilisant une comparaison entre la méthode de Padé et la méthode de CRANK-NICOLSON du deuxième ordre.

III.2. Illustration de la méthode de Padé

Le système d'équations de Schrödinger non linéaires d'ordre supérieur couplées, dans le cas de la présence de la dispersion du troisième ordre, est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + \Gamma u = i |u|^2 + \frac{2}{3} |v|^2 u \quad (\text{III.1.a}) \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \sigma \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} + \Gamma v = i |v|^2 + \frac{2}{3} |u|^2 v \quad (\text{III.1.b}) \end{array} \right.$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $u(\zeta, \tau)$ et $v(\zeta, \tau)$ représentent les amplitudes normalisées des composantes du champ polarisées linéairement le long les axes x et y , et σ , β_3 , Γ sont respectivement la différence de vitesse de groupe entre les deux modes de polarisation, le paramètre de dispersion du troisième ordre et les pertes de la fibre.

Ces équations peuvent être écrites sous la forme vectorielle suivante:

$$\partial_\varsigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \partial_\tau \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \partial_{\tau\tau} + \frac{1}{6} \beta_3 \partial_{\tau\tau\tau} + \Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} |u|^2 + \frac{2}{3}|v|^2 & 0 \\ 0 & |v|^2 + \frac{2}{3}|u|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Examinant d'abord le principe de la méthode de Padé '*semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization (OSPD)*'.

On se propose donc de résoudre le système (III.2) en divisant chaque équation en deux sous-problèmes. Ceci est faisable en séparant la partie linéaire de la partie non linéaire dans les membres de droite du système d'équations. Ensuite on procède à résoudre séparément les deux sous-problèmes de façon alternée pour chaque pas de calcul. Lors de chaque pas de calcul on utilise le résultat de chaque sous-problème comme condition initiale pour l'autre. L'approximation de Padé, appliquée ici pour la partie linéaire, est bien adaptée aux termes des dérivés temporelles d'ordres supérieurs décrivant les différents ordres de la dispersion. Nous résolvons la partie non linéaire en utilisant la méthode de RUNGE-KUTTA du quatrième ordre.

Dans ce cas, le système d'équations de Schrödinger non linéaire couplées peut être écrit sous la forme suivante :

$$\partial_\varsigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{L}_u + \hat{N}_u) & 0 \\ 0 & (\hat{L}_v + \hat{N}_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Où \hat{L}_u , \hat{L}_v sont les opérateurs linéaires et \hat{N}_u , \hat{N}_v sont les opérateurs non linéaires. Ces opérateurs sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{L}_u = -\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \Gamma \\ \hat{N}_u = i \left(|u|^2 + \frac{2}{3} |v|^2 \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.4.a})$$

$$(\text{III.4.b})$$

$$\begin{cases} \hat{L}_v = \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \Gamma & \text{(III.4.c)} \\ \hat{N}_v = i \left(|v|^2 + \frac{2}{3} |u|^2 \right) & \text{(III.4.d)} \end{cases}$$

III.2.a. Le schéma de Padé pour l'équation linéaire

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la méthode de Padé est appliquée pour la partie linéaire. Considérons donc les équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{L}_u & 0 \\ 0 & \hat{L}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \partial_\zeta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \left(\frac{i}{2} \partial_{\tau\tau} + \frac{1}{6} \beta_3 \partial_{\tau\tau\tau} + \Gamma \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{(III.5)}$$

Dans l'intervalle de calcul $[\tau_i, \tau_f]$, on choisit le pas du temps $k = \Delta\tau$ avec $k = \frac{\tau_f - \tau_i}{N_\tau}$ où N_τ est un entier positif, et le pas spatial $h = \Delta\zeta$. On peut définir aussi les points de la grille de la façon suivante:

$$\tau_n = \tau_i + nk \text{ et } \zeta^j = jh \text{ avec } n = 0, 1, \dots, N_\tau \text{ et } j = 0, 1, 2, \dots$$

De même, on dénote $u(\zeta^j, \tau_n)$ par u_n^j et $v(\zeta^j, \tau_n)$ par v_n^j .

Les opérateurs d'incrément \hat{E} et de décrément \hat{E}^{-1} sont définis comme [8]:

$$\begin{cases} \hat{E} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \\ \hat{E}^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{(III.6)}$$

Pour trouver le schéma de Padé, on utilise les opérateurs de différences centrale et moyenne suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu} = \frac{\hat{E}^{1/2} + \hat{E}^{-1/2}}{2} \\ \bar{\mu} = \frac{\hat{E} + \hat{E}^{-1}}{2} \\ \hat{\delta} = \frac{\hat{E}^{1/2} - \hat{E}^{-1/2}}{\Delta\tau} \\ \bar{\delta} = \frac{\hat{E} - \hat{E}^{-1}}{2\Delta\tau} \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

L'approximation de Padé pour les dérivées temporelles du premier, du deuxième et du troisième ordre est donnée par [8] :

$$(I + \bar{\mu}) \frac{\partial}{\partial\tau} \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} = (\bar{\delta} + \bar{\mu}\bar{\delta}) \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$$(I + \bar{\mu}) \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3} \hat{\delta}^2 + \frac{4}{3} \bar{\delta}^2 \right) \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$(I + \bar{\mu}) \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} = 2\hat{\mu}\hat{\delta}^3 \begin{pmatrix} u(z, nk) \\ v(z, nk) \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Il faut noter que la précision des approximations (III.8), (III.9) et (III.10) est du quatrième ordre $O((\Delta\tau)^4)$. En faisant une discrétisation du quatrième ordre dans le temps de l'équation (III.5) et en utilisant la règle de mi-point en espace, on trouve directement le schéma de Padé dont l'erreur est de l'ordre de $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^4)$:

$$(I + \bar{\mu}) \begin{pmatrix} u_n^{j+1} - u_n^j \\ v_n^{j+1} - v_n^j \end{pmatrix} = \Delta\zeta \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma(\bar{\delta} + \bar{\mu}\bar{\delta}) & 0 \\ 0 & \sigma(\bar{\delta} + \bar{\mu}\bar{\delta}) \end{pmatrix} + \left(\frac{i}{2} \left(\frac{1}{3} \hat{\delta}^2 + \frac{2}{3} \bar{\delta}^2 \right) + \frac{\beta_3}{6} \mu \hat{\delta}^3 + (I + \bar{\mu})\Gamma \right) \right] \begin{pmatrix} u_n^{j+1} + u_n^j \\ v_n^{j+1} + v_n^j \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Bien sûr nous devons résoudre un système algébrique linéaire.

Si l'équation linéaire (III.5) est discretisée en utilisant un schéma de différences centrales du deuxième ordre dans l'espace, nous obtenons le schéma suivant de Crank-Nicolson du deuxième ordre :

$$\begin{pmatrix} u_n^{j+1} - u_n^j \\ v_n^{j+1} - v_n^j \end{pmatrix} = \Delta\zeta \left(\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} \end{pmatrix} \bar{\delta} + \left(\frac{i}{4} \hat{\delta}^2 + \frac{\beta}{12} \mu \hat{\delta}^3 + \frac{\Gamma}{2} \right) \right) \begin{pmatrix} u_n^{j+1} + u_n^j \\ v_n^{j+1} + v_n^j \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Ce schéma a une erreur de l'ordre de $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^2)$.

Les différences centrales du quatrième ordre dans l'espace nous donnent le schéma de Crank-Nicolson du quatrième ordre :

$$\begin{pmatrix} u_n^{j+1} - u_n^j \\ v_n^{j+1} - v_n^j \end{pmatrix} = \Delta\zeta \left(\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} \end{pmatrix} \bar{\delta} + \begin{pmatrix} \frac{i}{6} (4\hat{\delta}^2 - \bar{\delta}^2) + \frac{\Gamma}{2} + \\ \frac{1}{8(\Delta t)^2} (-13\bar{\delta} + 16\bar{\mu}\bar{\delta} - 3\tilde{\delta}) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_n^{j+1} + u_n^j \\ v_n^{j+1} + v_n^j \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Où $\tilde{\delta} = \frac{1}{6\Delta\tau} (E^3 - E^{-3})$. L'erreur du schéma de Crank-Nicolson du quatrième ordre est de l'ordre de $O((\Delta\zeta)^2 + (\Delta\tau)^4)$, mais la matrice est sept diagonales. Nous pouvons conclure que ce schéma prend plus de mémoire et de temps du microprocesseur (CPU). Par conséquent, le schéma de Padé (III.11) est meilleur. Ceci sera aussi montré dans la suite avec nos résultats numériques.

III.2.b. Méthod de RUNGE-KUTTA du quatrième ordre (RK4) pour les équations non linéaires

Considérons les équations non linéaires suivantes :

$$\partial_{\zeta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \left(|u|^2 + \frac{2}{3}|v|^2 \right) & 0 \\ 0 & \left(|v|^2 + \frac{2}{3}|u|^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Pour résoudre ces équations, on utilise la méthode (RK4). Cette méthode est employée comme suit:

$$\begin{cases} u_n^{j+1} = u_n^j + \frac{\Delta\zeta}{6} (k_{u1} + k_{u2} + k_{u3} + k_{u4}) & (\text{III.15.a}) \\ v_n^{j+1} = v_n^j + \frac{\Delta\zeta}{6} (k_{v1} + k_{v2} + k_{v3} + k_{v4}) & (\text{III.15.b}) \end{cases}$$

Où $n = 0, 1, \dots, N_t$, et :

$$\begin{aligned} k_{u1} &= R_u(u_n^j, v_n^j) \\ k_{v1} &= R_v(v_n^j, u_n^j) \\ k_{u2} &= R_u\left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{u1}, v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{v1}\right) \\ k_{v2} &= R_v\left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{v1}, u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{u1}\right) \\ k_{u3} &= R_u\left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{u2}, v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{v2}\right) \\ k_{v3} &= R_v\left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{v2}, u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)k_{u2}\right) \\ k_{u3} &= R_u\left(u_n^j + (\Delta\zeta)k_{u3}, v_n^j + (\Delta\zeta)k_{v3}\right) \\ k_{v3} &= R_v\left(v_n^j + (\Delta\zeta)k_{v3}, u_n^j + (\Delta\zeta)k_{u3}\right) \end{aligned}$$

Où $R_u(u)$ et $R_v(v)$ sont les discrétisations du membre de droit de l'équation (III.14).

III.3. Analyse de la stabilité linéaire

Nous analysons maintenant la stabilité linéaire qui est nécessaire pour comprendre la condition de restriction du pas d'espace $\Delta\zeta$.

Premièrement, nous définissons les constantes $\tilde{u} = \max(|u(0,t)|)$ et $\tilde{v} = \max(|v(0,t)|)$. L'équation non linéaire (III.5) peut être linéarisé à :

$$\partial_{\zeta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \left(c_u + \frac{2}{3} c_v \right) & 0 \\ 0 & \left(c_v + \frac{2}{3} c_u \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Où $c_u = \tilde{u}^2$ et $c_v = \tilde{v}^2$.

Nous considérons l'effet monomode de Fourier [8] :

$$u_n^j = g^j e^{in\xi} \quad (\text{III.17.a})$$

$$v_n^j = g^j e^{in\xi} \quad (\text{III.17.b})$$

Où ξ est un nombre réel arbitraire, g est le facteur d'amplification et $n = 0, 1, \dots, N_{\tau}$.

Nous faisons une discrétisation du côté droit de l'équation (III.17), nous trouvons:

$$\tilde{R}_u(u_n^j) = \hat{A}_u u_n^j \quad (\text{III.18.a})$$

$$\tilde{R}_v(v_n^j) = \hat{A}_v v_n^j \quad (\text{III.18.b})$$

Avec :

$$\hat{A}_u = i \left[c_u + \frac{2}{3} c_v \right] \quad (\text{III.19.a})$$

$$\hat{A}_v = i \left[c_v + \frac{2}{3} c_u \right] \quad (\text{III.19.b})$$

Remplaçant l'équation (III.18.a) dans l'équation (III.15.a) et l'équation (III.18.b) dans l'équation (III.15.b), on obtient :

$$u_n^{j+1} = g_u^j e^{in\xi_u} = u_n^j + \frac{\Delta\zeta}{6} \left(\begin{array}{l} R_u(u_n^j, v_n^j) \\ + R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right) \\ + R_u \left(\begin{array}{l} u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right), \\ v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right) \end{array} \right) \\ + R_u \left(\begin{array}{l} u_n^j + (\Delta\zeta)R_u \left(\begin{array}{l} u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right), \\ v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right) \end{array} \right), \\ v_n^j + (\Delta\zeta)R_v \left(\begin{array}{l} v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right), \\ u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta) + R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$v_n^{j+1} = g_v^j e^{in\xi_v} = v_n^j + \frac{\Delta\zeta}{6} \left(\begin{array}{l} R_v(v_n^j, u_n^j) \\ + R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right) \\ + R_v \left(\begin{array}{l} v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right), \\ u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta) + R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right) \end{array} \right) \\ + R_v \left(\begin{array}{l} v_n^j + (\Delta\zeta)R_v \left(\begin{array}{l} v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right), \\ u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta) + R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right) \end{array} \right), \\ u_n^j + (\Delta\zeta)R_u \left(\begin{array}{l} u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u \left(u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j), v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j) \right), \\ v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v \left(v_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_v(v_n^j, u_n^j), u_n^j + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)R_u(u_n^j, v_n^j) \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Pour $n = 0, 1, \dots, N_i$ et après calculs nous obtenons :

$$g_u = 1 + (\Delta\zeta)\hat{A}_u + \frac{1}{2}((\Delta\zeta)\hat{A}_u)^2 + \frac{1}{6}((\Delta\zeta)\hat{A}_u)^3 + \frac{1}{24}((\Delta\zeta)\hat{A}_u)^4 \quad (\text{III.20.a})$$

$$g_v = 1 + (\Delta\zeta)\hat{A}_v + \frac{1}{2}((\Delta\zeta)\hat{A}_v)^2 + \frac{1}{6}((\Delta\zeta)\hat{A}_v)^3 + \frac{1}{24}((\Delta\zeta)\hat{A}_v)^4 \quad (\text{III.20.b})$$

Nous pouvons trouver la condition de la stabilité des schémas (III.15.a) et (III.15.b) en utilisant la condition de Von Neumann qui est donnée par :

$$g_u \leq 1 + O(\Delta\zeta) \quad (\text{III.21.a})$$

$$g_v \leq 1 + O(\Delta\zeta) \quad (\text{III.21.b})$$

Les équations (III.22.a) et (III.22.b) nous donnent :

$$\left| 1 + \frac{1}{2}((\Delta\zeta)\hat{A}_u) + \frac{1}{6}((\Delta\zeta)\hat{A}_u)^2 + \frac{1}{24}((\Delta\zeta)\hat{A}_u)^3 \right| \leq 0 \quad (\text{III.22.a})$$

$$\left| 1 + \frac{1}{2}((\Delta\zeta)\hat{A}_v) + \frac{1}{6}((\Delta\zeta)\hat{A}_v)^2 + \frac{1}{24}((\Delta\zeta)\hat{A}_v)^3 \right| \leq 0 \quad (\text{III.22.b})$$

Nous posons $x = (\Delta\zeta)\hat{A}_u$ et $y = (\Delta\zeta)\hat{A}_v$, et nous cherchons la solution des deux équations suivantes :

$$X = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \quad (\text{III.23.a})$$

$$Y = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{24}y^3 \quad (\text{III.23.b})$$

Ces deux équations sont similaires. Pour les résoudre, on peut les écrire sous la forme suivante :

$$aT_i^3 + bT_i^2 + cT_i + d = 0 \quad (\text{III.24})$$

Où $T_i = x$ ou y , $a = 1/24$, $b = 1/6$, $c = 1/2$, et $d = 1$.

Pour résoudre cette équation cubique, nous pouvons utiliser la méthode de Cardan. On définit le discriminant :

$$\Delta = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2 < 0 \quad (\text{III.25})$$

Alors l'équation (III.25) a une racine réelle et deux racines complexes.

Pour que les deux équations (III.24.a) et (III.24.b) soient inférieures ou égales à zéro, il faut que :

$$|(\Delta\zeta)\hat{A}_u| \leq |-2\sqrt{2}| \quad (\text{III.26.a})$$

$$|(\Delta\zeta)\hat{A}_v| \leq |-2\sqrt{2}| \quad (\text{III.26.b})$$

Cela mène à la condition CFL :

$$h \leq \frac{2\sqrt{2}}{|c_u| + \frac{2}{3}|c_v|} \quad (\text{III.27.a})$$

$$h \leq \frac{2\sqrt{2}}{|c_v| + \frac{2}{3}|c_u|} \quad (\text{III.27.b})$$

III.4. Résultats numériques

III.4.a. Les conditions initiales

L'évolution des impulsions optiques le long d'une fibre optique biréfringente est simulée par l'utilisation de la méthode d'OSPD. Premièrement, nous donnons les conditions initiales suivantes [2,5,6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\zeta = 0, \tau) = N \cos \theta / \cosh \tau \\ v(\zeta = 0, \tau) = N \sin \theta / \cosh \tau \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.28.a)} \\ \text{(III.28.b)} \end{array}$$

Où N est l'ordre du soliton et l'angle θ représente l'angle de la polarisation du soliton par rapport à l'axe de la polarisation de la fibre.

III.4.b. Les conditions aux limites:

Comme nous disons précédemment, pour que la solution du système des équations SNLC soit absolument déterminée, il est nécessaire de définir, en plus des conditions initiales des conditions aux limites.

Les conditions aux limites utilisées dans nos simulations numériques sont des conditions aux limites périodiques. Dans ce cas, $u(\zeta, \tau)$ au temps initial et final sont égales, et même chose pour $v(\zeta, \tau)$ (figure III.1).

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

[5] A. HASEGAWA & Y. KODAMA, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press Oxford, US, 1995.

[6] X. ZHANG & X. WANG, *Soliton propagation in birefringent optical fibers near the zero-dispersion wavelength*, *optik* 115, 2004, pp. 36-42.

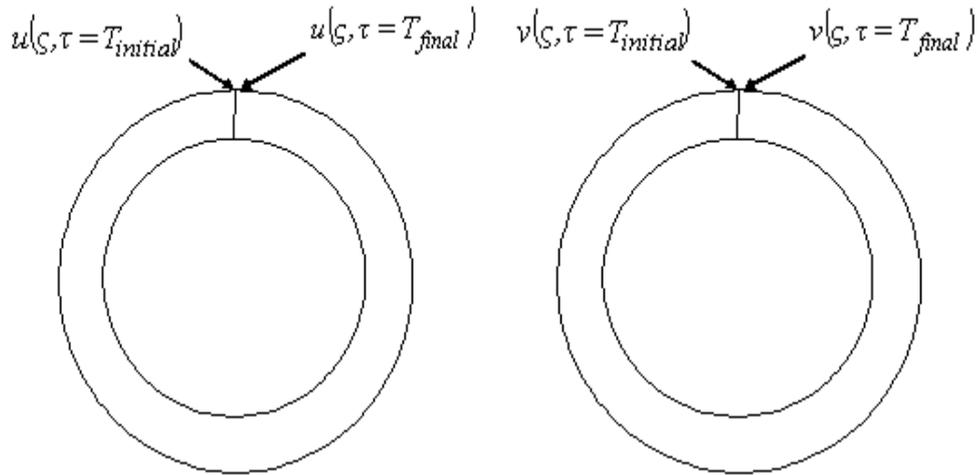


Figure (III.1) : Schéma décrivant les conditions aux limites périodiques.

III.4.c. La dispersion du troisième ordre comme une petite perturbation

La dispersion chromatique est une des causes qui induisent un élargissement des impulsions optiques se propageant à l'intérieur d'une fibre optique. Pour une longueur d'onde de zéro de dispersion $\lambda = \lambda_{ZD}$, la dispersion chromatique est nulle. Cependant, l'élargissement des impulsions optiques peut cependant se produire. La cause est la présence des effets dispersifs d'ordres supérieurs comme la dispersion de troisième ordre.

Pour des impulsions ultra-courtes (la largeur $T_0 < 1ps$) [2], il est nécessaire d'introduire le terme β_3 de la dispersion du troisième ordre même si $\beta_2 \neq 0$. Dans ce cas, l'effet de la dispersion du troisième ordre sur les solitons optiques est faible et peut être traité comme une perturbation.

Pour les deux cas suivants, nous allons examiner l'évolution des solitons vectoriels sous l'effet de la dispersion du troisième ordre.

[2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, fourth edition, US, 2007.

III.4.b.1. Premier cas : les amplitudes égales $\theta = 45^0$

Comme on a dit précédemment, l'angle θ est défini comme l'angle de l'entrée de la polarisation dans la fibre optique.

Quand $\theta = 45^0$, les deux modes de polarisation ont la même puissance. Deux cas sont possibles, le premier est $\beta_3 = 0$ et le deuxième est $\beta_3 \neq 0$.

Dans le cas de l'absence de la dispersion de troisième ordre, c.-à-d. $\beta_3 = 0$, la figure (III.2) montre l'évolution des deux composantes de polarisation avec les paramètres $\sigma = 0.5, \beta_3 = 0.0, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0$.

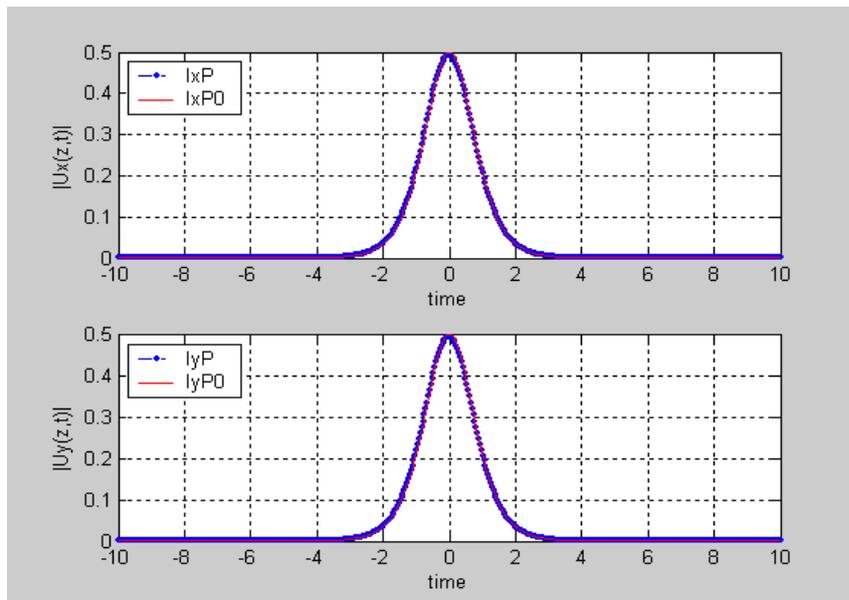


Figure (III.2) : Évolution des deux composantes du soliton du premier ordre dans le cas de l'absence de la dispersion du troisième ordre pour les paramètres suivants :

$$\theta = 45^0, \sigma = 0.5, \beta_3 = 0, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0.$$

Ligne simple est la condition initial, et en en gras pour $L= 500*L_D$

Nous constatons que les emplacements ultimes des deux impulsions sont dans le point zéro et l'évolution des deux modes de polarisation est faite d'une manière très stable.

Nous analysons maintenant l'évolution des deux composantes de polarisation avec la distance le long de la fibre dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre, c.-à-d. $\beta_3 \neq 0$. La figure (III.3) montre l'évolution des deux composantes avec les paramètres suivantes : $\sigma = 0.5, \beta_3 = 0.3, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0$.

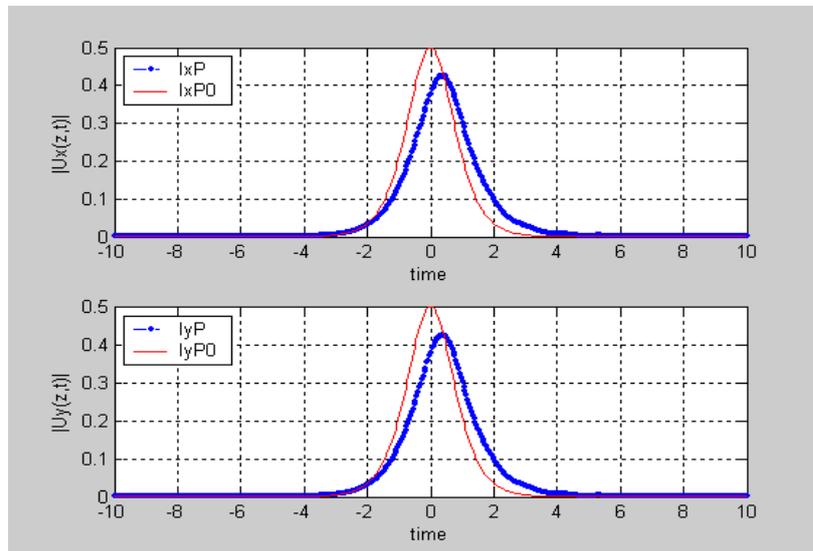


Figure (III.3) : Évolution des deux composantes du soliton du premier ordre dans le cas de la présence de la dispersion du troisième ordre pour les paramètres suivants:

$$\theta = 45^0, \sigma = 0.5, \beta_3 = 0.3, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0.$$

Ligne simple est la condition initial, et en en gras pour $L = 10 * L_D$

Dû à l'effet de la dispersion du troisième ordre, l'évolution des deux composantes de la polarisation s'effectue d'une manière différente. Nous constatons une augmentation de la largeur des impulsions le long de la propagation, en même temps il y a un déplacement léger du centre des solitons.

La figure (III.4) montre l'évolution en détail des deux impulsions avec la distance le long de la fibre. Dans cette figure, le déplacement des localisations maximales des impulsions est visible clairement.

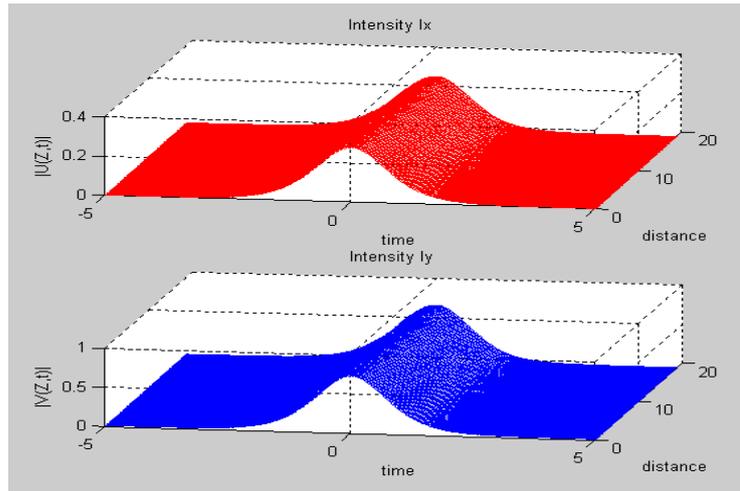
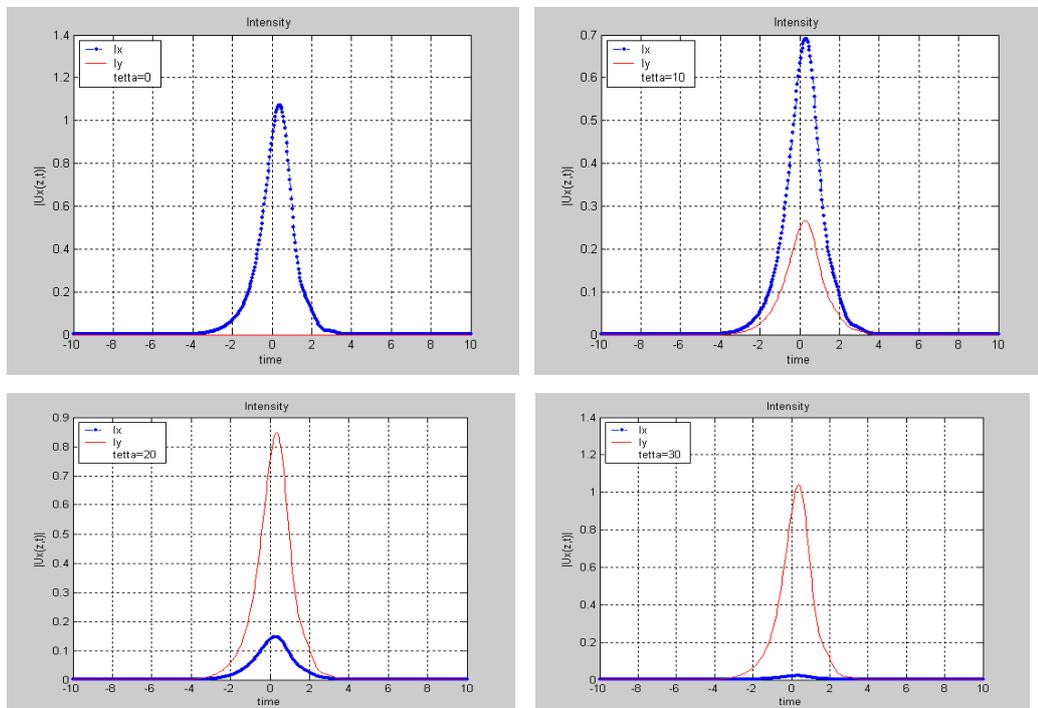


Figure (III.4) : Les détails de l'évolution des deux composantes de la polarisation avec la distance le long de la fibre.

La figure supérieure est la composante u , et la figure inférieure est la composante v

Maintenant, nous comparons les détails de l'évolution des impulsions avec la distance le long de la fibre pour les différentes valeurs de θ .



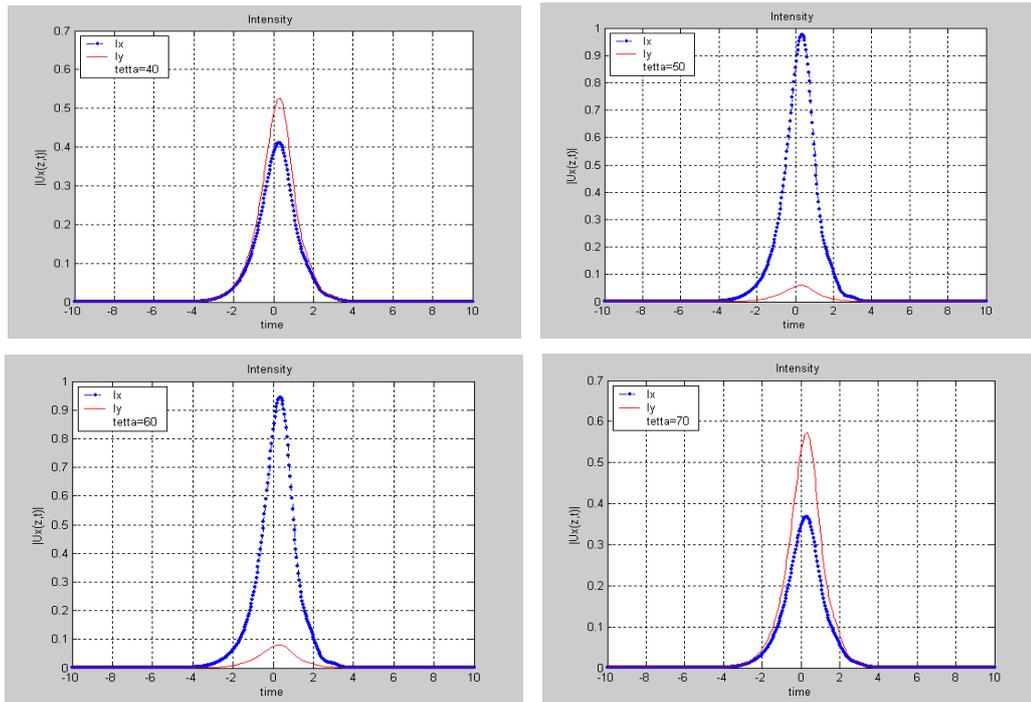


Figure (III.5) : Les détails de la structure des impulsions pour les paramètres suivants :

$\sigma = 0.5, \beta_3 = 0.3, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0$, et pour différentes valeurs de θ .

Ligne simple est la composante u , et en en gras la composante v

Nous constatons que les amplitudes des deux composantes de polarisation sont varient avec la variation de l'angle d'entrée de la polarisation dans la fibre optique.

III.4.b.2. Le deuxième cas : des amplitudes inégales $\theta = 30^0$

Pour $\theta = 30^0$, nous montrons l'évolution des deux composantes de la polarisation, dans le cas de l'absence de la dispersion du troisième ordre, avec les paramètres suivants :

$\theta = 30^0, \sigma = 0.5, \beta_3 = 0.0, N = 2, \text{ et } \Gamma = 0$ qui est mentionnée sur la figure (III.6).

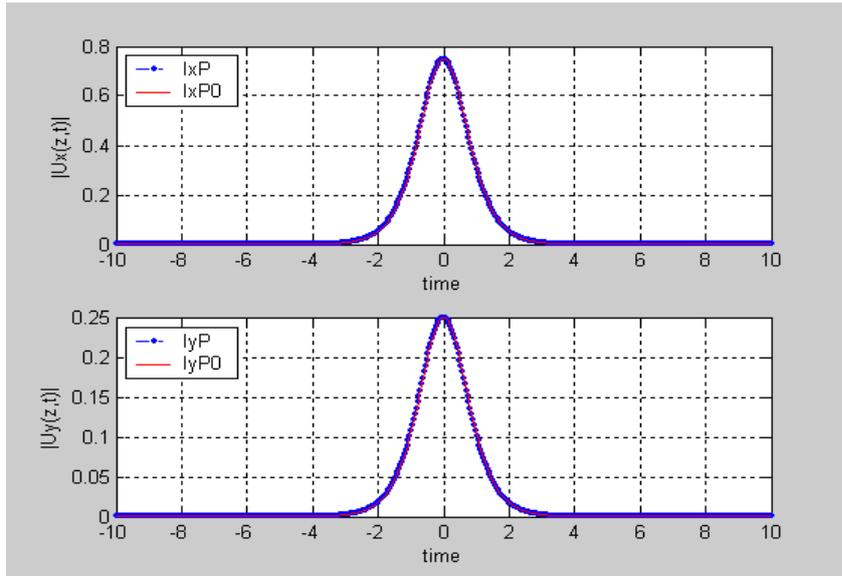


Figure (III.6) : Evolution des deux composantes de polarisation pour les paramètres suivants:

$$\theta = 30^0, \sigma = 0.5, \beta_3 = 0.0, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0.$$

Ligne simple est la condition initial, et en en gras pour $L = 500 * L_D$

Nous remarquons que les locations maximales sont dans le point zéro.

Dû à l'effet de la dispersion du troisième ordre, les emplacements ultimes ne sont pas dans le point zéro (Figure (III.7.a)). Pour $N=2$, il a été trouvé qu'un soliton ou plus émerge de l'impulsion initiale (Figure (III.7.b)).

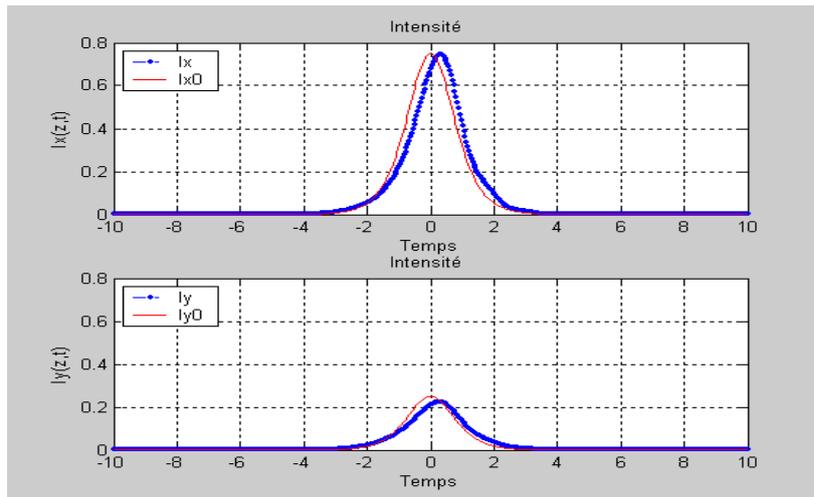


Figure (III.7.a) : Evolution des deux composantes de polarisation pour les paramètres suivants :

$$\theta = 30^0, \sigma = 0.5, \beta_3 = 0.6, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0.$$

Ligne simple est la condition initial, et en en gras pour $L = 10 * L_D$

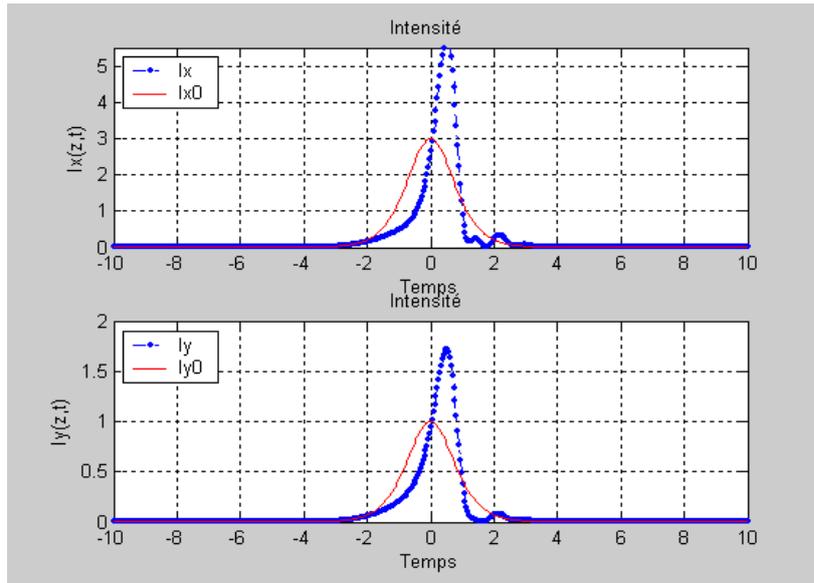


Figure (III.7.b) : Evolution des deux composantes du soliton du deuxième ordre pour les paramètres suivantes : $\theta = 30^0$, $\sigma = 0.5$, $\beta_3 = 0.6$, $N = 2$, et $\Gamma = 0$.
Ligne simple est la condition initial, et en en gras pour $L = 10 * L_D$

Dans la figure suivante, l'évolution des deux impulsions avec la distance le long de la fibre est donnée en détail.

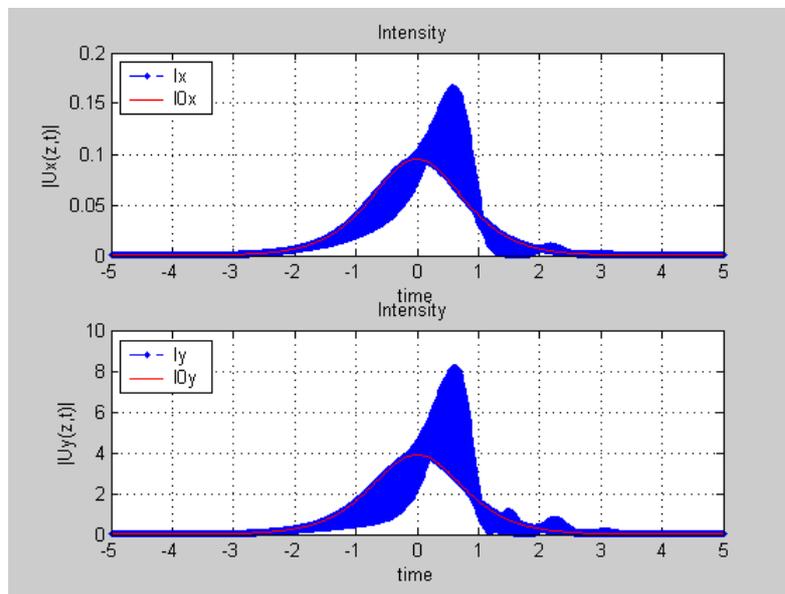


Figure (III.8) : Les détails de l'évolution des deux composantes de la polarisation avec la distance le long de la fibre.

La figure supérieure est la composante u , et la figure inférieure est la composante v

Nous comparons aussi les détails de l'évolution des impulsions avec la distance le long de la fibre pour les différentes valeurs de θ .

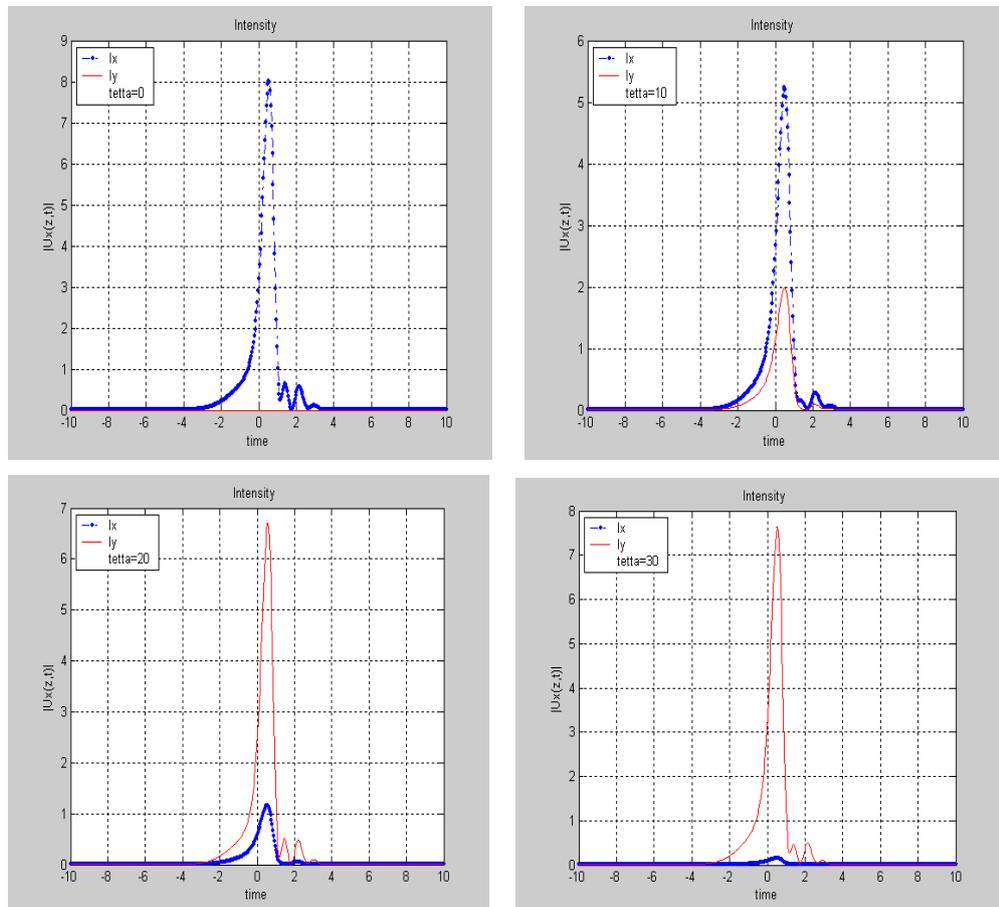


Figure (III.9) : Les détails de la structure des impulsions pour les paramètres suivantes :

$\sigma = 0.5, \beta_3 = 0.6, N = 1, \text{ et } \Gamma = 0$, pour différentes valeurs de θ .

Ligne simple est la composante u , et en en gras la composante v

Nous remarquons ici que les amplitudes des deux composantes de polarisation sont varient avec la variation de l'angle d'entrée de la polarisation dans la fibre optique.

III.5. Comparaison de temps de calcul entre la méthode Padé et de CRANK-NICOLSON

Nous donnons maintenant une comparaison des temps de calcul entre la méthode de Padé et celle de CRANK-NICOLSON pour différentes valeurs de $\Delta\zeta$ et $\Delta\tau$. Le tableau (III.1) montre le rapport

entre τ_P , le temps de calcul de la méthode de Padé, et τ_C , le temps de calcul de la méthode de CRANK-NICOLSON.

Les pas $\Delta\zeta$ et $\Delta\tau$	$(\Delta\zeta, \Delta\tau) = \frac{2}{1000}, \frac{2}{100}$	$(\Delta\zeta, \Delta\tau) = \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}$	$(\Delta\zeta, \Delta\tau) = \frac{2}{3000}, \frac{2}{300}$
Le rapport $\frac{\tau_P}{\tau_C}$	0.85	0.81	0.83

Tableau (III.1) : Comparaison du rapport des temps de calcul τ_P et τ_C pour différentes valeurs de $\Delta\zeta$ et $\Delta\tau$.

Par cette comparaison, nous constatons que le temps de calcul utilisant la méthode de Padé est inférieur du temps de calcul de CRANK-NICOLSON. Nous pouvons conclure que la méthode de Padé est meilleure.

III.6. Calcul de la quantité conservée Q

Pour tester l'ordre d'exactitude numérique de la méthode de Padé, il est important de calculer la quantité conservée donnée par la relation suivante [8]:

$$Q_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\zeta, \tau)|^2 d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(III.18.a)} \\ \text{(III.18.b)} \end{array} \right.$$

L'intégrale numérique est évaluée en utilisant la règle de Simpson.

[8] ZHENLI. XU, JINGSON HE & HOUDE HAN, *Semi-implicit operator splitting Padé method for higher-order nonlinear Schrodinger equations*, Applied Mathematics and computation , 2006, Vol 179, Issue 2, pp. 596-605.

Il faut noter que les quantités conservées Q_u et Q_v sont une mesure important pour les schémas numériques. Pour que la solution numérique soit stable, il faut que les quantités Q_u et Q_v soient des constantes pendant le temps de calcul.

La figure (III.10) illustre la quantité conservée pour les deux composantes de polarisation u et v. Dans le cas où $\theta = 45^0$, les valeurs exactes des quantités conservées sont : $Q_u = Q_v = 1$. Tandis que, dans le cas où $\theta = 30^0$, les valeurs exactes des quantités conservées sont : $Q_u = 6$ et $Q_v = 2$.

III.7. Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une méthode dite '*semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization*'. Cette méthode est utilisée pour résoudre numériquement le système d'équations de Schrödinger non linéaires couplées (CNLS) qui gouvernent la propagation des solitons vectoriels dans les fibres optiques biréfringentes.

La méthode d'OSPD a beaucoup d'avantages comparativement à la méthode de Crank-Nicholson. Elle est mieux adaptée pour les termes de dérivées supérieures décrivant les effets de la dispersion d'ordres supérieurs, elle consomme moins de mémoire, et elle nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide.

Dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre nous avons deux cas :

Le premier cas concerne les amplitudes des impulsions égales. Nous remarquons une augmentation de la largeur des impulsions le long de la propagation en même temps il y a un changement léger du centre de deux composantes de polarisation.

Quand les amplitudes sont inégales, les emplacements ultimes ne sont pas dans le point zéro. Il a été trouvé aussi qu'un soliton ou plus émerge de l'impulsion initiale.

Après une comparaison entre le temps de calcul de la méthode de Padé avec celle de Crank-Nicolson, pour différentes valeurs de $\Delta\zeta$ et $\Delta\tau$, nous pouvons constater que le temps de calcul utilisant la méthode de Padé est inférieur au temps de calcul de Crank-Nicolson. Alors, nous

pouvons conclure que la méthode de Padé nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide par rapport à la méthode de Crank-Nicholson.

Conclusion et Interprétations

Conclusion et Interprétations

C'est sûr que le système le plus attirant à l'heure actuelle est le transfert de l'information par la lumière se propageant dans une fibre optique en silice. Lors de la propagation d'une impulsion lumineuse dans une fibre optique en silice, il existe deux effets conduisant à sa distorsion : la dispersion chromatique et l'effet Kerr. Ces deux effets limitent la capacité des lignes de transmission optique. Par contre, la dispersion chromatique équilibre exactement la non linéarité Kerr et on aura donc la formation d'un soliton optique qui se propage sans déformation de son profil.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé une méthode dite '*semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization*' pour résoudre numériquement le système d'équations de Schrödinger non linéaires couplées (CNLS) en présence de la dispersion de troisième ordre. Cette méthode est stable quand la condition CFL est satisfaite. Elle a beaucoup d'avantage comparativement à la méthode de Crank-Nicholson. Elle est mieux adaptée pour les termes de dérivées supérieures décrivant les effets de la dispersion d'ordres supérieurs, et elle nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide.

Une description simple de la propagation des impulsions optiques dans les fibres optiques ignore l'effet de la polarisation du champ électrique. Dans ce cas la propagation des impulsions est décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire (ESNL) en traitant le champ électrique de l'onde comme étant une quantité scalaire. Cependant, dans le cas des fibres optiques biréfringentes il faut tenir compte de la dynamique de l'état de polarisation de l'onde lumineuse. Le champ électrique de l'onde est alors une grandeur vectorielle. On a alors affaire à la propagation des solitons vectoriels dans les fibres biréfringentes. La propagation des solitons vectoriels a montré leur importance croissante à cause de leurs propriétés dynamiques intéressantes et de leurs applications potentielles pour les technologies futures toutes-optiques.

Nos simulations numériques du système d'équations SNLC d'ordre supérieur sont faites en utilisant une comparaison entre la méthode de Padé et la méthode de Crank-Nicolson du deuxième ordre.

Nous avons montré que la dispersion de troisième ordre a des effets différents sur les deux composantes de la polarisation.

Quand les amplitudes des deux modes de polarisation sont égales, ces deux impulsions évoluent d'une manière différente due à l'effet de la dispersion du troisième ordre. Dans le cas de l'absence de la dispersion de troisième ordre, nous constatons que les emplacements ultimes des deux impulsions sont dans le point zéro et l'évolution des deux modes de polarisation est faite d'une manière très stable.

Dans le cas de la présence de la dispersion du troisième ordre, aussi nous constatons une augmentation de la largeur des impulsions le long de la propagation en même temps il y a un changement léger du centre de deux composantes de polarisation.

Quand les amplitudes sont inégales, et dans le cas de l'absence de la dispersion du troisième ordre, nous remarquons que les localisations maximales sont dans le point zéro. Dû à l'effet de la dispersion du troisième ordre, les emplacements ultimes ne sont pas dans le point zéro. Il a été trouvé aussi qu'un soliton ou plus émerge de l'impulsion initiale.

Nous avons donné aussi une comparaison des temps de calcul entre la méthode de Padé et celle de Crank-Nicolson pour différentes valeurs de $\Delta\zeta$ et $\Delta\tau$. Par cette comparaison, nous constatons que le temps de calcul utilisant la méthode de Padé est inférieur du temps de calcul de Crank-Nicolson. Nous pouvons conclure que la méthode de Padé meilleure.

On a montré également par quelques exemples que la méthode de Padé présente beaucoup d'avantages comparativement à la méthode de Crank-Nicolson parce qu'elle est mieux adaptée pour les termes de dérivées d'ordres supérieurs décrivant les effets de la dispersion, elle nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide par rapport à la méthode de Crank-Nicolson, et elle occupe moins de mémoire.

Pour terminer, nous allons vous donner une idée sur les suites de ce travail.

Nous avons étudié numériquement la propagation des solitons vectoriels dans une fibre optique biréfringente dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre utilisant la méthode de Padé.

Nous pouvons cependant étudier dans la suite la propagation des solitons vectoriels sous l'effet de la dispersion du quatrième ordre, comme effet linéaire, et aussi sous l'effet Raman, comme effet non linéaire avec des impulsions de durée de plus en plus faible.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] G. P. AGRAWAL, *Fiber-Optic Communications Systems*, Third Edition, 2002.
- [2] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Fourth edition, US, 2007.
- [3] G. P. AGRAWAL, *Applications of nonlinear fiber optics*, Academic Press, 2001.
- [4] A. HASEGAWA, *Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review*, *Optical Fiber Technology* 10 (2004) 150–170.
- [5] A. HASEGAWA & Y. KODAMA, *Solitons in optical communications*, Clarendon Press Oxford, US, 1995.
- [6] X. ZHANG & X. WANG, *Soliton propagation in birefringent optical fibers near the zero-dispersion wavelength*, *optik* 115, 2004, 36-42.
- [7] S. TRILLO & S. WABNITZ, *Polarized soliton instability and branching in birefringent fibers*, *optics communications*, 1989, volume 70, number 2, 166-172.
- [8] ZHENLI XU, JINGSON HE & HOUDE HAN, *Semi-implicit operator splitting Padé method for higher-order nonlinear Schrodinger equations*, *Applied Mathematics and computation* , 2006, Vol 179, Issue 2, 596-605.
- [9] G. V. SIMAEYS, *Instabilité, solitons et solhiatons, une approche expérimentale de la dynamique non linéaire en fibres optiques*, Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 2002-2003, 86-90.
- [10] I. M. UZUNOV & V.I. PULOV, *Vector solitary waves in strongly birefringent fibers with Raman scattering*, *Physics Letters A*, volume 372, Issue 15.7, April 2008. 2730-2733.
- [11] S. TRILLO & S. WABNITZ, *Nonlinear modulation of coupled waves in birefringent optical fibers*, *Phys. Lett. A* 159, 1991, pages 252-256.
- [12] M. F. MAHMOUD, W. W. ZACHARY & T. L. GILL, *Nonlinear pulse propagation in elliptically birefringent optical fibers*, *Physica D* 90, 1996, pages 271-279.
- [13] R. OHHIRA, M. MATSUMOTO & A. HASEGAWA, *Effect of polarization orthogonalization in wavelength division multiplexing soliton transmission system*, *Optics Communications* 111, 1994, 39-42.
- [14] A. HASEGAWA, *Effect of polarisation mode dispersion in optical soliton transmission in fibers*, *Physica D* 188, 2004, 241-246.
- [15] W. CHEN, W. XU, Z. LIANG, A. LUO, H. CUI, D. HAN, L. CHEN & H. LU, *Enhanced soliton robustness to polarization mode dispersion by using degenerate four-wave mixing*, *Optics and Laser Technology* 39, 2007, 696-700.
- [16] J. YANG & Y. TAN, *Fractal dependence of vector-soliton collision in birefringent fibers*, *Phys. Lett. A* 280, 2001, 129-138.

- [17] F. J. DIAZ-OTERO, P. CHAMORRO-POSADA & J.C. GARCIA-ESCARTIN, *Dispersion-Managed soliton interactions in the presence of third-order dispersion*, Caol 2005, 2005, 153-155.
- [18] M. G. BANAEI & J. F. YOUNG, *High-order soliton break up in sub-picosecond pulse propagation through photonic crystal fibers*, 2005 Conference on Lasers and Electro-Optics; 2005, 965-967.
- [19] T. S. YANG & W. L. KATH, *Radiation loss of dispersion-managed solitons in optical fibers*, Physica D 149, 2001, 80-94.
- [20] P. KAEWPLUNG, T & VIJITRMEKTHONG, *Ideal Soliton transmission in lossy optical fiber*, ISCIT 2004, 2004, 884-889.
- [21] P. G. DRAZIN & R. S. JOHNSON, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, 1989.
- [22] K. PORSEZIAN , A. HASEGAWA , V.N. SERKIN, T.L. BELYAEV & R. GANAPATHY, *Dispersion and nonlinear management for femtosecond optical solitons*, Phys. Lett. A 361 (2007) 504–508.

Résumé :

Ce mémoire présente une étude essentiellement numérique de la propagation des solitons vectoriels dans les fibres optiques biréfringentes.

La première partie du mémoire concerne des notions de base sur les fibres optiques, une présentation des équations de Maxwell, et une dérivation d'une équation décrivant les modes à l'intérieur d'une fibre optique ainsi que une condition pour la propagation monomode. Nous avons également décrit les effets non linéaires dans une fibre optique, et nous avons présenté un petit rappel sur les solitons optiques et comment ils se forment dans un milieu dispersif et non linéaire. La dérivation de l'équation de Schrödinger non linéaire pour les fibres optiques biréfringentes en tenant en compte les effets d'ordres supérieurs est aussi faite. Finalement, nous avons fait une description de la méthode de diffusion inverse qui est utilisée pour résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger non linéaire.

La deuxième partie est consacrée aux simulations numériques du système des équations SNLC, dans le cas de la présence de la dispersion de troisième ordre, en utilisant la méthode d'OSPD. Cette méthode a beaucoup d'avantages comparant à la méthode de Crank-Nicholson. Elle est mieux adaptée pour les termes de dérivées supérieures décrivant les effets de la dispersion d'ordres supérieurs, elle occupe moins de mémoire, et elle nous donne de bons résultats avec un temps de calcul plus rapide.

Mots clés : Fibres Optiques Biréfringentes, Solitons Vectoriels, Operator Splitting Padé Method, Le Système des Équations de Schrödinger Non Linéaires d'Ordres Supérieurs Couplées, Dispersion du Troisième Ordre.

Abstract:

This thesis deals with a mainly numerical study of the propagation of vector solitons in birefringent optical fibers.

The first part of the memory concerns some fundamental concepts on optical fibers, a presentation of Maxwell equations, and a derivation of an equation describing the modes inside an optical fiber as well as a condition for the single-mode propagation. We have also described the nonlinear effects in optical fiber, and we have presented a small recall on the optical solitons and how they form themselves in a dispersive and nonlinear medium. The derivation of nonlinear Schrödinger equation for birefringent optical fibers, while holding in account the higher order effects, is also made. Finally, we made a description of inverse scattering method that is used to solve the nonlinear Schrödinger equation analytically.

The second part is dedicated to the numerical simulations of the CHNLS equations, in the case of the presence of the third order dispersion, with using semi-implicit finite difference operator splitting Padé discretization (OSPD). This method is proven to be more efficient using higher order time derivatives, describing the effects of the higher order dispersion, and shows many advantages compared to its comparable Crank Nicolson method. It is more rapid and consumes less memory.

Key words: Birefringent Optical Fibers, Vector Solitons, Operator Splitting Padé Method, Coupled Higher-Order Nonlinear Schrodinger Equations, Third Order Dispersion.