REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE EL HADJ LAKHDAR - BATNA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE
Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
en Physique
Option : Physique de Rayonnement

THEME

Etude théorique de l'interaction d'un système a deux niveaux avec une onde électromagnétique par l'approche des intégrales de chemins

Présenté par :
M$^{elle.}$ HALIMI Farida

Devant le Jury :

Mr. BAHLOUL	**Derradji**	Pr	Université de Batna	Président
Mr. AOUACHRIA	**Mekki**	MCA	Université de Batna	Rapporteur
Mr. CHETOUANI	**Lyazid**	Pr	Université de Constantine	Examinateur
Mr. SID	**Abdelaziz**	MCA	Université de Batna	Examinateur
Mr. ZAIM	**Slimane**	MCA	Université de Batna	Examinateur

Année universitaire: 2010-2011

Remerciements

Je remercie avant tout DIEU tout puissant, pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études, afin je puisse en arrive là.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mon promoteur, Dr. AOUACHRIA M., pour avoir bien voulu m'encadrer, pour la documentation qu'il m'a procurée, pour ses précieux conseils, pour son suivi tout au long de la réalisation de ce mémoire. J'espère qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury :

-Mr. BAHLOUL D., professeur au département de physique, Batna.

-Mr. CHETOUANI L., professeur au département de physique, Constantine.

-Mr. SID A., maître de conférences du département de physique, Batna.

-Mr. ZAIM S., maître de conférences du département de physique, Batna.

Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude et mes remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury et pour avoir bien voulu évaluer ce travail.

Je remercie également mes très chers parents, ma grande mère, mes frères, qui m'ont soutenue le long de mes années d'études avec amour et patience et qui ont sacrifié de tout pour me voir heureuse et réussie.

J'adresse mes profonds remerciements à tous mes amis et particulièrement mon ami Ghanem, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction **2**

1 Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire **4**
1.1 Introduction . . . 4
1.2 Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique . . . 4
1.3 Propagateur dans la base des états cohérents bosonique . . . 9
1.4 Les états cohérents du moment angulaire . . . 10
1.5 Propagateur dans la base des états cohérents angulaires . . . 11

2 Atome à deux niveaux en interaction avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire **13**
2.1 Introduction . . . 13
2.2 Formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaires . . . 14
2.3 Calcul du propagateur . . . 16
2.4 Sommation des séries de perturabtion . . . 20
2.5 Fonctions d'onde . . . 22
2.6 Solution lorsque l'atome se trouve dans l'état fondamental a $t = 0$ . . . 23
2.6.1 Probabilite de transition . . . 24
2.6.2 Le cas de résonance . . . 26
2.6.3 Le cas de désaccord Strict . . . 28
2.7 Solution lorsque l'atome se trouve dans l'état excité a $t = 0$ . . . 28
2.7.1 Probabilite de transition . . . 29
2.7.2 Le cas de résonance . . . 30
2.7.3 Le cas de désaccord Strict . . . 31

3 Atome à deux niveaux instables en interaction avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire **32**
3.1 Introduction . . . 32
3.2 Formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents de spin . . . 33
3.3 Calcul le propagateur . . . 34
3.4 Sommation des séries de perturabtion . . . 38
3.5 Fonctions d'onde . . . 41

4 Le modéle de Jaynes cummings en présence de l'effet de Kerr non linéaire **43**
4.1 Introduction . . . 43
4.2 Formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents . . . 44
4.3 Calcul le propagateur . . . 45
4.4 Les fonctions d'onde et les énergies . . . 50
4.5 L'inversion de population atomique . . . 52

Conclusion générale **55**

Introduction générale

La représentation des intégrales de chemin d'un système quantique est très utile pour visualiser la dynamique quantique en termes de conceptions classiques. Cette formulation introduite par R. P. Feynman [1] pour quantifier des mouvements de systèmes au moyen d'integrales fonctionnelles, est utilisée au même titre que l'équation de Schrödinger et Heisenberg. Intervenant pratiquement dans tous les domaines de la physique et plus particulièrement en théorie quantique des champs. La conception essentiel dans cette approche est le propagateur qui (comme fonction de Green de l'équation de Schrödinger) contient toutes les informations sur le système. Ce propagateur étant une somme de contributions de tous les chemins, le principe de la superposition se manifeste déjà dans cette formulation, on peut dire sans exagérer qu'elle est concurrente à d'autre méthodes de quantification. Se basant essentiellement sur les notions simples et connus de la mécanique classique comme les chemins ou trajectoires, l'action, le lagrangien, ...elle permet de décrire de manière élégante l'évolution des systèmes.

Et depuis l'introduction des transformations spatio-temporelles dans le formalisme des intégrales de chemins ([2] , [3]), et surtout les corrections purment quantique, une classe de potentiels a été soulitionnée.

Cependant malgré le succés apparent de cette formulation théorique, du point de vue pratique il subsiste certains difficultés comme l'obtention de solutions de certains problèmes solubles par l'équation de Schrödinger.

En plus il restait le problème du spin dont la difficulté principale réside dans le fait que cette grandeur physique n'a pas d'analogue classique. Sa nature exclusivement discrète rend sa description difficile au moyen de chemins qui par essence sont continue.

Des modèles à cet effet, ont été élaborés, comme le modèle bosonique ou fermionique de Schwinger [4], et surtout l'introduction de variables anticommutantes dites de Grassmann et les variables angulaires [5] ont permis de contourner cette difficulté. Du point de vue pédagogique, des solutions pour des interactions combinant le spin et d'autre variables par l'équation de Schrödinger peuvent être trouvées dans des livres de mécanique quantique usuels. Par le formalisme des intégrales de chemin, il n'y a que quelques interactions de ce type qui ont été traités [6] en utilisant du modèle de Schwinger. Pour ce faire, il est nécessaire d'élargir l'espace de configuration habituelle et par voie de conséquence, l'espace des états cohérents (chapitre 1) peut être adéquat à cette étude. Comme on va le voir à travers cette thèse, l'utilisation des états cohérents est parfois nécessaire pour le calcul du propagateur si l'on doit formuler suivant l'idée de Feynman à savoir une somme sur les chemins possibles, ces chemins étant affectés d'un poids c'est à dire $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, $S = \int L dt$ c'est l'action du système.

Il existe plusieurs façons pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales de chemin. Nous utilisons la plus simple, la représentation avec les angles polaires [7]. Les variables angulaires (chapite 1) sont utilisé tout au long de cette thèse.

Le but de ce travail, à travers cette thèse, est d'utiliser le formalisme des intégrales de chemin dans la représentation des états cohérents de spin pour étudier le comportement d'un atome à deux niveaux d'énergie sous l'influence d'une onde électromagnétique classique de polarisation circulaire. Il est naturel pour décrire le mouvement de l'atome douée d'un spin $\frac{1}{2}$ par deux espaces, l'un des positions ou de configuration pour décrire le mouvement de l'atome suivant l'axe z et l'espace des états cohérents de spin, pour décrire le mouvement interne de l'atome. Les fonctions d'onde ainsi que les probabilités de transition sont déduites dans deux cas differents (chapitre 2) , (chapitre 3). Signalons que les calculs de ce deuxième chapitre et troisième chapitre ont été realises récemment par [8] , [9] en utilisant le modéle fermionique de Schwinger pour le spin, et ceux de l'article de ([10] , [11]) publié récemment en considérant l'équation de Schrödinger.

L'éxtension de ce traitement à une onde éléctromagnétique quantifier d'un seul mode dans une cavité en présence de l'effet de Kerr fait l'objet du quatrième chapitre. Les fonctions d'onde du spectre ainsi que les inversions de populations sont déduites. Signalons aussi que les calcules de ce dernier chapitre sont aussi basé sur l'article [12] en considérant l'équation de Schrödinger.

La procédure du traitment, comme il a été précisé avant nécessite l'utilisation de deux espaces l'un de configuration, l'autre des états cohérents, pour décrire le mouvement respectivement extérieur et intérieur de l'atome.

Pour les trois problèmes, nous avons retrouvé les mêmes résultats qui ont été obtenus en résolvant l'équation de Schrödinger.

Chapitre 1

Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire

1.1 Introduction

Les états cohérents $|Z\rangle$ de l'oscillateur harmonique ont été introduit pour la première fois par Schrödinger en 1926 en cherchant le minimum de la relation d'Heisenberg [13] . Ces états cohérents ont été généralisés par perelomov[14] et leurs introductions dans le formalisme des intégrales de chemins au moyen des états cohérents de type bosoniques ou fermioniques, et en fonctions des angles ont été faits par divers auteurs comme Klauder [15], Ohniki et Kashiwa, [16] et Klauder respectevemet[17] .

Les états cohérents sont utilisés dans les differents domaines de la physique particuliéremet en optique quantique[18] . Par exemple le champ produit par un laser et décrit par un états cohérent bosonique. Ils ont un nombre de propriétés intéressantes, et sont définis alternativement par :

i)états propres de l'opérateur d'annihilation a qui vérifient la relation de commutation $\left[a^{\dagger}, a\right] = 1$

ii)sont crées à partir de l'état de vide $|0\rangle$ par l'opérateur unitaire dit de déplacement D

iii)états pour lesquels l'incertitude de Heisenberg est minimale.

1.2 Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique

Considérons donc le problème aux valeurs propres de l'opérateur de destruction a

$$a\,|Z\rangle = Z\,|Z\rangle\,, \tag{1.1}$$

où z est un nomber complexe. L'adjoint de cette relation est

$$\langle Z|\, a^{\dagger} = Z^{*}\,\langle Z|\,. \tag{1.2}$$

Nous allons montrer l'existence des états $|Z\rangle$ en les construisant explicitement. Pour cela, nous multiplions (1.1) par $\langle n|$ état nombre :

$$\langle n\,|a|\,Z\rangle = Z\langle n\,|Z\rangle\,. \tag{1.3}$$

Par ailleurs, l'adjoint de la relation $a^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ et $\langle n|\,a = \sqrt{n+1}\,\langle n+1|$. Multipliant cette égalité par $|Z\rangle$ conduit à

$$\langle n\,|a|\,Z\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1\,|Z\rangle\,. \tag{1.4}$$

En égalant les membres de droite des deux dernière égalités, nous obtenons

$$\langle n \,|Z\rangle = \frac{Z}{\sqrt{n}}\langle n-1\,|Z\rangle = \frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\langle 0\,|Z\rangle\,. \tag{1.5}$$

En utilisant la décomposition de l'unité $1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$,on trouve

$$|Z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\,Z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\langle 0\,|Z\rangle\,, \tag{1.6}$$

ce qui conduit à

$$\langle Z\,|Z\rangle = \langle 0\,|Z\rangle \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\langle Z\,|n\rangle = \langle 0\,|Z\rangle \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\frac{(Z^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle z\,|0\rangle\,,$$

$$= |\langle 0\,|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|Z|^{2n}}{n!} = |\langle 0\,|Z\rangle|^2\, e^{|Z|^2}. \tag{1.7}$$

Puisque la norme est finie, sa valeur est arbitraire. Donc, nous faisons le chois

$$\langle 0\,|Z\rangle = \langle Z\,|0\rangle = e^{-|Z|^2/2}, \tag{1.8}$$

ce qui conduit à $\langle Z\,|Z\rangle = 1$. De cette manière, les états propres de l'opérateur de destruction a sont univoquemet definis comme

$$|Z\rangle = e^{-|Z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,. \tag{1.9}$$

On appelle *états cohérents* les états propre (1.9). L'expression (1.9) pour les l'état cohérent $|z\rangle$ résulte de l'action d'un opérateur agissant sur le vide. Pour ce travail,nous partons de la propriété

$$e^{Za^\dagger}\,|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle \tag{1.10}$$

Puisque $a\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$, on peut remplacer $|0\rangle$ par $e^{-z^*a}\,|0\rangle$ sans rien modifier .Donc

$$e^{-|Z|^2/2}e^{Za^\dagger}e^{-Z^*a}\,|0\rangle = e^{-|Z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = |Z\rangle\,. \tag{1.11}$$

Pour terminer cette dérivation, nous utilisons le théorème :

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{1.12}$$

pour tout couple d'operateurs A et B qui commutent avec leur commutateur. Ce théorème conduit au résultat

$$|Z\rangle = e^{Za^\dagger - Z^*a}\,|0\rangle = D\,(Z)\,|0\rangle\,, \tag{1.13}$$

qui exprime d'une manière compacte la relation entre le vide et un état cohérent en terme d'un opérateur unitaire de déplacement $D(Z)$. L'opérateur $D(Z)$ vérifie les propreiétés suivantes

$$D(Z)\,D^{\dagger}(Z) = D^{\dagger}(Z)\,D(Z) = 1, \qquad D^{\dagger}(Z) = D(-Z), \tag{1.14}$$

$$D(Z)\,D(Z') = \exp\left(\frac{ZZ'^{*} - Z^{*}Z'}{2}\right) D(Z+Z'), \tag{1.15}$$

d'ou

$$D(Z)\,D(Z') = \exp\left(ZZ'^{*} - Z^{*}Z'\right) D(Z')\,D(Z) \tag{1.16}$$

Il est facile de montrer que

$$[a, D(Z)] = ZD(Z), \qquad \left[a^{\dagger}, D(Z)\right] = Z^{*}D(Z)\ , \tag{1.17}$$

$$D^{\dagger}(Z)\,aD(Z) = a + Z, \qquad D^{\dagger}(Z)\,a^{\dagger}D(Z) = a^{\dagger} + Z^{*}, \tag{1.18}$$

pour cette raison, l'operateur $D(Z)$ est appelé opérateur de Déplacemet. Il reste une difficulté à sur monter,c'est celle de vérifier que les états cohérents forment une base orthonormée. Nous allons démontrer dans cette section que les états cohérents forment une base, mais d'une nature assez particulière car elle n'est pas orthogonale. Nous allons aussi voir qu'il est parfaitement possible de travailler avec une base qui ne bénéficie pas de cette propriété qui semble essentielle en mecanique quantique. Nous savons déjà que la definition (1.9) impliquent que les états cohérents sont normalisables, et nous avons fait le choix $\langle Z\,|Z\rangle = 1$. Considérons maintenant le produit scalaire de deux états cohérents

$$\langle Z\,|Z'\rangle = e^{-\left(|Z|^2+|Z'|^2\right)/2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{Z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{(Z')^{m}}{\sqrt{m!}} \langle n\,|m\rangle$$

$$= e^{-\left(|z|^2+|z'|^2\right)/2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(Z^{*}Z')^{n}}{n!} = e^{-\left(|Z|^2+|Z'|^2\right)/2} e^{Z^{*}Z'}, \tag{1.19}$$

et donc

$$|\langle Z\,|Z'\rangle|^{2} = \exp\left(-\,|Z-Z'|^{2}\right). \tag{1.20}$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux et ne peuvent donc pas former un ensemble de vecteurs linéairement idépendants. Par contre, il a une propriété essenstielle qui reste vérifié, à savoir l'existence d'une relation de fermuture ou décomposition de l'unité. Pour démontrer cela, nous avons

$$\frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\,d^{2}Z = \frac{1}{\pi}\int e^{-|Z|^{2}} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(Z)^{n}}{\sqrt{n!}} \frac{(Z^{*})^{m}}{\sqrt{m!}} |n\rangle\langle m|\,d^{2}Z$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_{0}^{+\infty} e^{-|Z|^{2}} |Z|^{n+m} |Z|\,d|Z| \int_{0}^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} 2\pi\delta_{n,m} \int_{0}^{+\infty} |Z|^{n+m+1} e^{-|Z|^{2}} d|Z|, \tag{1.21}$$

on pose $x = |Z|^2$ d'ou

$$\frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\, d^2Z = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\pi\delta_{n,m}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\pi\delta_{n,m}n! = \sum_{n}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1, \tag{1.22}$$

cette relation représente la relation de ferméture et tout état peut s'écrire dans la base des états cohérents

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \sum_n^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_n^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n |0\rangle = \psi\left(a^\dagger\right)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\,\psi\left(a^\dagger\right)|0\rangle\, d^2Z \\ &= \frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z\,|0\rangle\,\psi\left(Z^*\right) d^2Z,\end{aligned} \tag{1.23}$$

en utilisant la relation (1.8) ,ceci conduit à l'égalité

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2Z\psi\left(Z^*\right)e^{-|Z|^2/2}\,|Z\rangle\,. \tag{1.24}$$

En particulier, si $|\psi\rangle$ est l'état cohérent $|Z'\rangle$, on a

$$c_n = e^{-|Z'|^2/2}\frac{Z'^n}{\sqrt{n!}}, \tag{1.25}$$

$$\psi\left(Z^*\right) = \sum_n^{\infty} e^{-|Z'|^2/2}\frac{\left(Z'Z^*\right)^n}{n!}, \tag{1.26}$$

et donc

$$|Z'\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2Ze^{-\left(|Z|^2+|Z'|^2-2Z^*Z'\right)/2}\,|Z\rangle\,. \tag{1.27}$$

Ainsi la base des états cohérents est surcomplète puisque tout vecteur de la base peut être exprimé comme une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la base.

Etudions maintenant les propriétés physiques de ces états cohérents.

– La valeur moyenne du nombre de photons dans un états cohérent $|Z\rangle$

$$\langle n\rangle = \langle Z\left|a^\dagger a\right|Z\rangle = |Z|^2\,. \tag{1.28}$$

– La valeur moyenne de n^2dans ce même états

$$\langle n^2\rangle = \langle Z\left|a^\dagger a a^\dagger a\right|Z\rangle = \langle Z\left|a^\dagger a^\dagger a a + a^\dagger a\right|Z\rangle = |Z|^4 + |Z|^2 = \langle n\rangle^2 + \langle n\rangle. \tag{1.29}$$

– La variance d'un état cohérent

$$\Delta n = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle. \tag{1.30}$$

– La fluctuation du nombre de photons

$$f\left(n\right)=\frac{\langle n^{2}\rangle-\langle n\rangle^{2}}{\langle n\rangle^{2}}=\frac{1}{\langle n\rangle}. \tag{1.31}$$

Cette propriété est fondamentale : plus l'intensité associe à un état cohérent est élevée, plus les fluctuations autour de cette intensité sont petites. C'est de cette propriété que les états cohérents tirent leur nom. C'est aussi par le biais de cette propriété qu'une relation peut être établie entre les états cohérents et le champ produit par un laser qui est en bonne première approximation dans un état cohérent. La probabilité de trouver n photons dans l'état cohérent $|Z\rangle$ est donnée par la distribution de poison

$$P_{n}=\left|\langle n\left|Z\right\rangle\right|^{2}=\frac{\left|Z\right|^{2n}}{n!}e^{-\left|Z\right|^{2}}=\frac{\langle n\rangle^{n}}{n!}e^{-\langle n\rangle}. \tag{1.32}$$

Pour terminer cette section, nous allons évaluer les valeurs moyennes de la position et de l'impulstion dans l'état cohérent. Ces valeurs peuvent être obtenus en exprimant X et P en fonction de a et $a^{\dagger}$

$$X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^{\dagger}+a\right),\qquad P=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a^{\dagger}-a\right), \tag{1.33}$$

par un calcul simple en trouve

$$\langle X\rangle_{Z}=\langle Z\left|X\right|Z\rangle=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(Z+Z^{*}\right),\qquad \langle P\rangle_{Z}=\langle Z\left|P\right|Z\rangle=i\sqrt{2\hbar m\omega}\left(Z-Z^{*}\right), \tag{1.34}$$

$$\langle X^{2}\rangle_{Z}=\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(Z+Z^{*}\right)^{2}+1\right],\qquad \langle P^{2}\rangle_{Z}=\frac{\hbar m\omega}{2}\left[1-\left(Z-Z^{*}\right)^{2}\right], \tag{1.35}$$

et donc

$$\Delta X_{Z}=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}},\qquad \Delta X_{Z}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}. \tag{1.36}$$

On note que $\Delta X.\Delta P$ prend sa valeur minimale :

$$\Delta X_{Z}.\Delta P_{Z}=\frac{\hbar}{2}, \tag{1.37}$$

qui ce traduit par la relation

$$\langle Z\left|a^{\dagger}a\right|Z\rangle=\langle Z\left|a^{\dagger}\right|Z\rangle\langle Z\left|a\right|Z\rangle, \tag{1.38}$$

pour les états $|\psi\rangle\neq|Z\rangle$ qui diffèrent des états cohérents l'incertitude de Heiesberg s'écrit

$$\langle\psi\left|a^{\dagger}a\right|\psi\rangle\geq\langle\psi\left|a^{\dagger}\right|\psi\rangle\langle\psi\left|a\right|\psi\rangle. \tag{1.39}$$

1.3 Propagateur dans la base des états cohérents bosonique

L'amplitude de transition de l'états initial $|Z_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'états final $|Z_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'operateur d'évolution du temps

$$K\left(Z_f, Z_i; T\right) = \langle Z_f \mid \mathbf{U}\left(T, 0\right) \mid Z_i\rangle, \tag{1.40}$$

où

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. En peut écrire l'operateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}). \tag{1.41}$$

Nous introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, ...t_N$

$$\frac{1}{\pi}\int \left|Z_n\right\rangle \left\langle Z_n\right| d^2 Z_n = 1. \tag{1.42}$$

Le propagateur prend la forme

$$K\left(Z_f, Z_i; T\right) = \lim_{N\to\infty}\int .. \int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2 Z_n}{\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle Z_n\right| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\left|Z_{n-1}\right\rangle. \tag{1.43}$$

En evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.43) on premier ordre en ε

$$\begin{aligned}\left\langle Z_n\right| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\left|Z_{n-1}\right\rangle &\simeq \left\langle Z_n\right| 1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}H\left|Z_{n-1}\right\rangle \\ &= \left\langle Z_n \right| Z_{n-1}\rangle \left[1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle Z_n\right| H\left|Z_{n-1}\right\rangle}{\left\langle Z_n\right| Z_{n-1}\rangle}\right] \\ &\simeq \left\langle Z_n\right| Z_{n-1}\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}(Z_{n-1}, Z_n^*)},\end{aligned} \tag{1.44}$$

avec

$$\mathcal{H}\left(Z_{n-1}, Z_n^*\right) = \frac{\left\langle Z_n\right| H\left|Z_{n-1}\right\rangle}{\left\langle Z_n\right| Z_{n-1}\rangle}, \tag{1.45}$$

et le produit de deux états cohérents est donné par la relation (1.19) $\cdot$ Dans ce cas le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$K\left(Z_f, Z_i; T\right) = \lim_{N\to\infty}\int .. \int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2 Z_n}{\pi}\exp\left\{i\frac{\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{i}{2}\left(Z_n^*\frac{\Delta Z_n}{\varepsilon} - Z_n\frac{\Delta Z_n^*}{\varepsilon}\right) - \mathcal{H}\left(Z_{n-1}, Z_n^*\right)\right]\right\}. \tag{1.46}$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérénts bosonique

$$K(Z_f, Z_i; T) = \int \mathcal{D}Z \exp\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\left[\frac{i}{2}\left(Z^*\dot{Z} - Z\dot{Z}^*\right) - \mathcal{H}(Z, Z^*)\right]\right\}, \tag{1.47}$$

avec

$$\mathcal{D}Z = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2Z_n}{\pi}. \tag{1.48}$$

1.4 Les états cohérents du moment angulaire

Les états cohérents du moment angulaire peuvent être considérés comme les états quantiques associés au système classique dont le moment cinétique possède une direction déterminée. Dans la représentation associée aux états cohérents, tout élément diagonal d'un observable tend vers l'observable classique associée, lorsque le moment cinétique devient grand (limite classique). Par exemple, la valeur moyenne du moment dipolaire éléctrique dans un état cohérent possède les mêmes caractéristiques que le dipôle optique classique.

Ces états cohérents de moment angulaire minimsent les inégalités appropriée de même que les états cohérents bosonique faire pour les inégalités de Heisenberg. Ceux-ci concernent les inégalités du triplet d'opérateurs S_x ; S_y, S_z, à partir de $[S_x, S_y] = iS_z$ on obtient les inégalités pour le produit des variances calculées dans un état arbitraire $|\psi\rangle$.

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle(\Delta S_y)^2\rangle^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left|\langle S_z\rangle\right|, \tag{1.49}$$

avec

$$\Delta S_x = S_x - \langle S_x\rangle, \quad \Delta S_y = S_y - \langle S_y\rangle \quad \text{et} \quad \langle S_z\rangle = \langle\psi\left|S_z\right|\psi\rangle. \tag{1.50}$$

Lorsque $|\psi\rangle = |s, m\rangle$,avec $S_z\ |s, m\rangle = m\,|s, m\rangle$ on peut voir que :

$$|m| \leq s(s+1) - m^2. \tag{1.51}$$

L'égalité est atteinte lorsque la projection de S_z suivant le vecteur $\overrightarrow{k}$: $m = \pm s$ c'est-a-dire pour les états $\left|\overrightarrow{k}\right\rangle = |s, \pm s\rangle$.

L'état $|s, s\rangle$ sera considéré comme l'état quantique associé au système classique dont le moment angulaire pointe dans la direction Oz. Par la suite, l'état quantique associé à un moment angulaire classique pointant dans la direction $\overrightarrow{n}$ repérée par les angles (θ, φ) sera obtenu à l'aide de la rotation amenant Oz sur $\overrightarrow{n}$. On définira donc *l'état cohérent du moment angulaire* $|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle$, associé au vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$, par :

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z}e^{-i\theta S_y}\,|s, s\rangle \tag{1.52}$$

cet état est le résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $\left|\overrightarrow{k}\right\rangle = |s, s\rangle$.

Les états cohérents angulaires ne forment pas un ensemble orthonormé. Le produit scalaire de deux états cohérents angulaires

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}\right]^{2s}. \tag{1.53}$$

Les états cohérents angulaires $|\Omega\rangle$ forment un ensemble complet. On peut en effet montrer la relation de fermeture

$$\frac{2s+1}{4\pi}\int d\varphi d\cos(\theta)\,|\Omega\rangle\,\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{1.54}$$

Nous considérons maintenant un spin $s = 1/2$ décrit par les opérateurs de spin $S_i, i = (x, y, z)$ avec l'espace de Hilbert à deux dimensions engendré par exemple par les vecteur propre $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ de S_z. Pour chaque orientation dans l'espace réel caractérisé par un angle polaire θ et un angle azimutal φ on peut introduire un état cohérent de spin [7] .

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z}e^{-i\theta S_y}\,|\uparrow\rangle \tag{1.55}$$

Ces états ne sont pas orthogonales, mais constituent une base surcomplèt dans l'espace de Hilbert. Le produit scalaire de deux états cohérents de spin et le projection sont respectivement

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \tag{1.56}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi d\cos(\theta)\,|\Omega\rangle\,\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{1.57}$$

En outre, les éléments de matrice des opérateurs de spin prennent la forme suivante :

$$\langle\Omega|\,S_z\,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}\right], \tag{1.58}$$

$$\langle\Omega|\,S_x\,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right], \tag{1.59}$$

$$\langle\Omega|\,S_y\,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2i}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right]. \tag{1.60}$$

1.5 Propagateur dans la base des états cohérents angulaires

L'amplitude de tansition de l'état initial $|\Omega_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'état final $|\Omega_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution du temps

$$K(\Omega_f, \Omega_i; T) = \langle\Omega_f\,|\mathbf{U}(T, 0)|\,\Omega_i\rangle, \tag{1.61}$$

où

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T Hdt),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T=(N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N\to\infty$. En peut écrire l'opérateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\left(T,0\right)=\prod_{n=1}^{n=N+1}\mathbf{U}(t_n;t_{n-1}). \tag{1.62}$$

Introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1,t_2,....t_N$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_n d\cos(\theta_n)\left|\Omega_n\right\rangle\left\langle\Omega_n\right|=\mathbf{I}. \tag{1.63}$$

Le propagateur prend la forme

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=\lim_{N\to\infty}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t_n)}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle. \tag{1.64}$$

Evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.64) on premier ordre en ε

$$\begin{aligned}\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle&=\left\langle\Omega_n\right|1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle+O\left(\varepsilon^2\right)\\&=\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle\left[1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)\\&\simeq\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}(\Omega_{n-1},\Omega_n)},\end{aligned} \tag{1.65}$$

avec

$$\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1},\Omega_n\right)=\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle}. \tag{1.66}$$

le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\exp\left\{\sum_{n=1}^{N+1}\left[\log\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1},\Omega_n\right)\right]\right\} \tag{1.67}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle de Feyman

$$K=\int\mathcal{D}path\exp\left(iAction\left(path\right)\right), \tag{1.68}$$

il nous reste que les appliquer sur des système physiques quantiques en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressent.

Chapitre 2

Atome à deux niveaux en interaction avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons illustrer la téchinque des intégrales de chemins dans le calcul d'un propagateur d'un atome à deux niveaux en intéraction avec une onde éléctromagnétique polarisée circulairement. Initiallement notre atome possède une impulsion p_0 suivant la direction z. A un instant ultérieur, l'atome est soumis à une radiation d'une onde éléctromgnétique se propagant le long de l'axe z positif et dont le vecteur d'onde est k et la fréquence angulaire est ω_L. Cette onde éléctromagnétique est définie par :

$$\mathbf{E} = (A\cos(\omega_L t - kz), -A\sin(\omega_L t - kz), 0)\,, \tag{2.1}$$

A repésentant l'amplitude du champ $\mathbf{E}$. Cet atome à deux niveaux de masse m, de fréquence angulaire ω, a un moment dipolaire $\mathbf{D}$. La dynamique de l'atome en intéraction avec cette onde est décrite par l'hamiltonien :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \mathbf{V}, \tag{2.2}$$

$\frac{p^2}{2m}$ étant l'énergie cinétique associée au centre de masse de l'atome,le terme $\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$ décrit le mouvement interne de l'atome et $\mathbf{V}$ l'interaction entre le moment dipolaire de l'atome et le champ électromagnétique et qui s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$\widehat{\mathbf{V}} = -\mathbf{DE} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)} \\ -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

avec $DA = \hbar\frac{\Omega}{2}$. L'hamiltonien relatif au probléme de ce chapitre (2.2) a la forme suivante

$$H = H_0 + H_{int}, \tag{2.4}$$

avec

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \tag{2.5}$$

et

$$H_{int} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_-,$$

avec

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

étant les matrices de Pauli habituelles. Cet hamiltonien a ètè étudie récemment [10] en considérant l'équation de Schrödinger et par [8] en considerant les integrales du chemin dans la représentation des états cohérents fermioniques. Nous proposons dans ce chapitre de retrouver tous les résultats à savoir : a) les fonctions d'onde en utilisant le formalisme intégrale du chemins en combinant l'espace de configuration et la représentation des états cohérents de spin. b)les probabilités de transition en faisant intervenir le propagateur. c)discuter les résultats physiques. Passons d'abord à la construction du formalisme intégrale du chemins.

2.2 Formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaires

Il existe plusieurs façons ([15] , [16]) pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales du chemins. Nous utilisons la plus simple [7] qui consiste à

- remplacer σ par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté suivant (θ, φ) :
- associer un état coherent $|\Omega\rangle$,

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle , \tag{2.7}$$

résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $|\uparrow\rangle$ et dont le produit scalaire et les projecteurs sont respectivement

$$\langle \Omega | \, \Omega' \rangle = \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) \, |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbf{I}. \tag{2.9}$$

avec $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$ et $S_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, ou σ_z, σ_y sont les matrices de pauli. Nous designe par z la variable réelle qui décrit la position de l'atome, avec le projecteur correspondant

$$\int |z\rangle \langle z| \, dz = 1, \tag{2.10}$$

- et (θ, φ) les variables polaires générer la dynamique du spin.
  Pour la déscription du système, nous allons considérer l'état quantique $|z; \theta, \varphi\rangle$, reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par la variable réelle z tandis que les variables angulaire (θ, φ) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initial $|z_i; \theta_i, \varphi_i\rangle$ à $t_i = 0$ vers l'état final $|z_f; \theta_f, \varphi_f\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit :

$$K(f, i, ; T) = \langle z_f, \theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{U}(T, 0) \mid z_i, \theta_i, \varphi_i \rangle, \tag{2.11}$$

  avec

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt), \tag{2.12}$$

et $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson . Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T=(N+1)\varepsilon$. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$\mathbf{U}(T,0)=\lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\right]^{N+1}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\mathbf{U}(t_n;t_{n-1})\ . \tag{2.13}$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \tag{2.14}$$

$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\langle z_n,\theta_n,\varphi_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\,|z_{n-1},\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle\,, \tag{2.15}$$

aprés l'action de H_{int} sur les états $|z_n\rangle$, on note que

$$\langle z_n,\theta_n,\varphi_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\,|z_{n-1},\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle=\langle z_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}\,|z_{n-1}\rangle\,\langle\theta_n,\varphi_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\,|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle\,, \tag{2.16}$$

et le propagateur devient séparable

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\langle z_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}\,|z_{n-1}\rangle\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N}d\varphi_n d\cos(\theta_n)$$

$$\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\langle\theta_n,\varphi_n|\,e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\,|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle\,, \tag{2.17}$$

avec

$$z_{N+1}=z_f,\quad,\quad z_0=z_i\quad\text{et}\quad\Omega_{N+1}=\Omega_f,\quad,\quad\Omega_0=\Omega_i. \tag{2.18}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle z_n\left|e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p^2}\right|z_{n-1}\rangle=\sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(z_n-z_{n-1}\right)^2),$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_z\,|\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{2.19}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_+\,|\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{2.20}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_-\,|\Omega'\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. \tag{2.21}$$

Le propagateur prend la forme discréte suivante

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2$$
$$\left\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}+\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right.$$
$$-\frac{i\varepsilon\omega}{2}\left[\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}-\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right]$$
$$+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp -i(\omega_L t_n-kz_n)\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}$$
$$\left.+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\left[+i(\omega_L t_{n-1}-kz_{n-1})\right]\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\right\}. \quad (2.22)$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressons. Procédons alors au calcul de $K\left(f,i,;T\right)$.

2.3 Calcul du propagateur

Pour intégrer il faut d'abord diagonaliser l'Hamiltonien. Pour cela Nous éliminons les termes $\exp\left[-i(\omega_L t_n-kz_n)\right]$ et $\exp\left[i(\omega_L t_n-kz_n)\right]$ à l'aide du changement des variables polaires suivants

$$\varphi_n=\varphi_n'-kz_n+\omega_L t_n. \quad (2.23)$$

Il est clair que la mesure reste inchangé

$$d\varphi_n d\cos(\theta_n)=d\varphi_n' d\cos(\theta_n), \quad (2.24)$$

et le propagateur prend la forme suivante

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n' d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}$$
$$\times\left\{(1-\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n'-\varphi_{n-1}')}\exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2-k\Delta z_n\right)\right.$$
$$+(1+\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n'-\varphi_{n-1}')}\exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2+k\Delta z_n\right)$$
$$+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n'+\varphi_{n-1}')}$$
$$\left.+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n'+\varphi_{n-1}')}\right\}, \quad (2.25)$$

avec

$$\Delta\omega=\omega-\omega_L, \quad (2.26)$$

on tenant compte du faite

$$\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \pm \frac{ik}{2}\Delta z_n = \frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n \pm \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon^2 k^2}{4m^2}\right], \tag{2.27}$$

alors le propagateur devient

$$\begin{aligned}K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int \prod_{n=1}^{n=N}dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}} \\ \left\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp+\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})(1-\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n - \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\right. \\ + \sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n-\varphi'_{n-1})}(1+\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n + \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right] \\ + \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n+\varphi'_{n-1})} \\ \left. + \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n+\varphi'_{n-1})}\right\},\end{aligned} \tag{2.28}$$

qui l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{aligned}K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int \prod_{n=1}^{n=N}dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}} \\ \times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{\frac{i\varphi'_n}{2}} & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i\varphi'_n}{2}}\end{pmatrix} R(z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.29}$$

avec

$$R(z_n,t_n) = \begin{pmatrix}(1-\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n - \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 & (1+\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n + \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

On intègre sur tous les angles (φ'_n, θ_n) utilisant.

$$\int_0^\pi d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2} = \int_0^\pi d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi e^{+im\varphi} = 2\pi\delta_{m,0}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int \prod_{n=1}^{n=N}dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}} \\ \times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}}\end{pmatrix}(-1)^N \prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1} R(z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.31}$$

introduisons maintenant l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\pm\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n\right]=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n\pm\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2, \tag{2.32}$$

d'ou le porpagateur devient

$$\begin{aligned}K(f,i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\right]e^{-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}}\\ &\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}}\end{pmatrix}\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}(-1)^N R(p_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.33}$$

la matrice R_n devient

$$R(p_n,t_n)=\begin{pmatrix}(1-\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)e^{-\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n} & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & (1+\frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)e^{+\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n}\end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

intégrons sur les N varibles z_n . Le propagateur devient

$$\begin{aligned}K(f,i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\prod_{n=1}^{n=N}(2\pi\hbar\delta(p_n-p_{n-1}))\\ &\times e^{-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}\sum\limits_{n=1}^{n=N+1}p_n^2}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_{n+1}z_{n+1}-p_1z_0)-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}\right]\\ &\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}}\end{pmatrix}\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}(-1)^N R(p_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

La présence de la distribution de Dirac dans (2.35) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement i. e :

$$p_1=p_2=\cdots=p_{N+1}=p. \tag{2.36}$$

Alors le propagateur (2.35) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}K &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp\left[\sum_{n=1}^{n=N+1}(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2)+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_0)\right]\exp\left(-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}\right)\\ &\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}}\end{pmatrix}R\,(p,T)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.37}$$

avec

$$R\,(p,T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}R(p,t_n), \tag{2.38}$$

tel que

$$R(p,t_n)=\begin{pmatrix}1-i\varepsilon(\frac{\Delta\omega}{2}+\frac{kp}{2m}) & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & 1+i\varepsilon(\frac{\Delta\omega}{2}+\frac{kp}{2m})\end{pmatrix}=e^{-i\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+i\varepsilon K(n), \tag{2.39}$$

avec

$$K(p,t_n)=\begin{pmatrix} 0 & u(p,t_n) \\ u(p,t_n) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

avec $\omega(p,t_n)=\frac{\Delta\omega}{2}+\frac{kp}{2m}$ et $u(p,t_n)=\frac{\Omega}{2}$.

Maintenant passons au calcul du produit des matrices suivantes [6] .

$$\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n))=e^{-i\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum\limits_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum\limits_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}$$
$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}+...$$
$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}...\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^Ne^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}$$
$$K(l_3)...e^{-i\sum\limits_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum\limits_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}. \tag{2.41}$$

A la limite $N\longrightarrow+\infty$:le produit devient

$$R(p,T)=e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z}+i\int_0^T ds_1e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2}ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$+...(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3...\int_0^{s_{N-1}}ds_Ne^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$K(s_2)e^{-i\int_{s_3}^{s_2}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_3)...K(s_{N-1})e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_N)e^{-i\int_0^{s_N}ds\omega(p,s)\sigma_z}+... \tag{2.42}$$

Un calcul simple nous montrons que les termes impaires respectivemet paires sont les éléments diagonaux respectevement antidiagonaux de R

$$R_{11}(p,T)=e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)}+\sum_{n=1}^{\infty}i^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3...\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n}\times$$
$$e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u(p(s_1),s_1)e^{+i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)}u(p(s_2),s_2)...e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}ds\omega(p,s)}u(p(s_{2n}),s_{2n})e^{-i\int_0^{s_{2n}}ds\omega(p,s)}, \tag{2.43}$$

et

$$R_{12}(p,T)=i\int_0^T ds_1e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u(p(s_1),s_1)R_{22}(p(s_1),s_1), \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} R_{22}(p,T) &= R_{11}^*(p,T), \\ R_{21}(p,T) &= -R_{12}^*(p,T), \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$R_{11}(p,T)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(i\frac{\Omega}{2})^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1}e^{-i\Delta s_2}ds_2...\int_0^{s_{2n-1}}e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}\right]e^{-i\frac{T\Delta}{2}} \tag{2.46}$$

avec

$$\Delta=2\omega(p,s). \tag{2.47}$$

2.4 Sommation des séries de perturabtion

Nous Evaluons $R_{11}(p,T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T [6]. Soit

$$R_{11}(q,T) = \int_0^{+\infty} dT e^{-qT} R_{11}(p,T), \tag{2.48}$$

où $R_{11}(p,T)$ s'écrit sous la forme

$$R_{11}(q,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(i\frac{\Omega}{2})^{2n} F(0,T)\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \tag{2.49}$$

Avec

$$F(0,T) = \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(0,s_1), \tag{2.50}$$

$$F_1(0,s_1) = \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 F_2(0,s_2), \tag{2.51}$$

et on obtient par itération

$$F_{2n-1}(0,s_{2n-1}) = \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}} ds_{2n}. \tag{2.52}$$

La tronsformation de Laplace de $F(0,T)$ est :

$$\widetilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} e^{-qT} F(0,T) dT = \int_0^{+\infty} dT e^{-qT} \int_0^T e^{i\Delta s_1} F_1(0,s_1) ds_1, \tag{2.53}$$

qui peut être réécrite comme

$$\widetilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} dT e^{-(q-i\Delta)T} \int_0^T e^{-i\Delta(T-s_1)} F_1(0,s_1) ds_1. \tag{2.54}$$

En utilisant le théorème de convolution, on obtient

$$\widetilde{F}(0,q) = \frac{1}{q}\widetilde{F}_1(0,q-i\Delta), \tag{2.55}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1(0,q-i\Delta) &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} F_1(0,T) dT \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} dT \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 F_2(0,s_2) = \frac{1}{q-i\Delta}\widetilde{F}_2(0,q).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Effectuant le même calcul pour tous les autres termes , on obtient

$$\widetilde{F}(0,q) = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{q(q-i\Delta)}\right]^n, \tag{2.57}$$

$$\widetilde{F}(0,T) = \int_0^{+\infty} e^{+qT} F(0,q)dq. \tag{2.58}$$

Insérant ce résultat dans $R_{11}(p,T)$ et effectuant la somme, on obtient

$$R_{11}(p,T) = \left[1 + \int_0^{+\infty}\left[\frac{q-i\Delta}{q(q-i\Delta)+\frac{\Omega^2}{4}} - \frac{1}{q}\right] e^{+qT}dq\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \tag{2.59}$$

Ce résultat est valable pour $\mid \frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{q(q-i\Delta)} \mid < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour ou cette condition est vérifiée.

On integre sur q on trouve l'expression de

$$R_{11}(p,T) = \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \qquad \text{avec} \qquad \Omega' = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}. \tag{2.60}$$

Par un calcul identique, on touve les autre éléments de la matrice les resultats suivants.

$$R_{12}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega' T, \tag{2.61}$$

$$R_{21}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega' T, \tag{2.62}$$

$$R_{22}(p,T) = \cos\Omega' T + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega' T. \tag{2.63}$$

Substituant ce résultat dans l'équation le propagateur prend finalement la forme

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] \\ &\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} R(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

avec

$$R(p,T) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \\ -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & \cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Retournons aux anciennes variables angulaires , nous obtenons

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] \\ &\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{S}(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

ou les éléments de la matrice **S** est donné par

$$\mathbf{S}_{11}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T - kz_i), \tag{2.67}$$

$$\mathbf{S}_{22}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp -\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T - kz_i), \tag{2.68}$$

$$\mathbf{S}_{12}(p,T) = -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T + kz_i), \tag{2.69}$$

$$\mathbf{S}_{21}(p,T) = -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp -\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T + kz_i). \tag{2.70}$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K\left(y_f, \Omega_f, y_i, \Omega_i; T\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(y_f, \theta_f + 2n\pi, y_i, \varphi_f + 4n\pi,\ \theta_i, \varphi_i; T\right) \\ &= K(f, i; T), \end{aligned}$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

2.5 Fonctions d'onde

Calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, en prenant a titre d'exmple le calcul de l'élement de la matrice $K_{11}\left(z_f, z_i, T\right)$ où

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \langle\uparrow| K(f, i; T) |\uparrow\rangle . \tag{2.71}$$

Iintroduisant ici les relations de fermetures suivantes

$$\int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle\Omega_f\right| = 1, \quad \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) \left|\Omega_i\right\rangle \Omega_i \,|= 1, \tag{2.72}$$

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) <\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle\Omega_f\right| K(f, i; T) \left|\Omega_i\right\rangle \left\langle\Omega_i \right|\uparrow\rangle , \tag{2.73}$$

avec

$$<\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \left\langle\Omega_i\right| \uparrow>= \cos\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{2.74}$$

on a donc :

$$K_{11}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{11}(p, T), \tag{2.75}$$

de même on trouve pour les autres éléments des formules analogues :

$$K_{12}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{12}(p, T), \tag{2.76}$$

$$K_{21}(f,i,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]\mathbf{S}_{21}(p,T), \tag{2.77}$$

$$K_{22}(f,i,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]\mathbf{S}_{22}(p,T). \tag{2.78}$$

Le résultat se met sous la forme matricielle suivante :

$$K(f,i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]\mathbf{S}(p,T). \tag{2.79}$$

Déduisant la fonction d'onde à l'instant T à partir de l'état initial par l'intermédiaire de l'équation d'évolution :

$$\Psi(z,T)=\begin{pmatrix}\Psi_1(z,T)\\ \Psi_2(z,T)\end{pmatrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}K(z,y;T)\Psi(y,0)dy. \tag{2.80}$$

Ce résultat sont en accord avec ceux obtenus dans la référence ([10] , [9]). Considérant alors les deux cas suivants :

-l'état fondamental

-l'état éxcité

et voyant comment ces états changent par suite de l'intéraction avec l'onde électromagnétique.

2.6 Solution lorsque l'atome se trouve dans l'état fondamental a $t=0$

Nous supposons que à l'instant $t=0$ l'atome se trouve dans l'état fondamental c'est à dire :

$$\Psi(z,0)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p_0z}\end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

$$\Psi(z,T)=\begin{pmatrix}\Psi_1(z,T)\\ \Psi_2(z,T)\end{pmatrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}K(z,y;T)\Psi(y,0)dy, \tag{2.82}$$

par un calcul simple on trouve

$$\Psi(z,T)=\begin{pmatrix}\Psi_1(z,T)\\ \Psi_2(z,T)\end{pmatrix}, \tag{2.83}$$

avec

$$\Psi_1(z,T)=\frac{\Omega}{4\beta(p_0)\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\exp i\left[(p_0+\hbar k)z-E_1'(p_0)T\right]/\hbar-\exp i\left[(p_0+\hbar k)z-E_1(p_0)T\right]/\hbar\right\},$$

$$\Psi_2(z,T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}2\beta(p_0)}\left\{\left[\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)\right]\exp i\left[p_0z-E_2(p_0)T\right]/\hbar\right. \tag{2.84}$$

$$\left.-\left[\varepsilon(p_0)-\beta(p_0)\right]\exp i\left[p_0z-E_2'(p_0)T\right]/\hbar\right\} \tag{2.85}$$

et les niveaux d'énergies par suit de l'intéraction :

$$\left\{\begin{array}{r}E_1(p_0)=\frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m}+\frac{1}{2}\hbar\omega_L-\frac{1}{2}\Delta e_0+\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2},\\ E_1^{'}(p_0)=\frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m}+\frac{1}{2}\hbar\omega_L-\frac{1}{2}\Delta e_0-\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2},\\ E_2(p_0)=\frac{p_0^2}{2m}-\frac{1}{2}\hbar\omega_L+\frac{1}{2}\Delta e_0+\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2},\\ E_2^{'}(p_0)=\frac{p_0^2}{2m}-\frac{1}{2}\hbar\omega_L+\frac{1}{2}\Delta e_0-\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2},\end{array}\right. \tag{2.86}$$

avec

$$\Delta e_{_0} = \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m}-\frac{p_0^2}{2m}, \qquad \beta(p_0)=\frac{1}{2\hbar}\left[\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2}\right] \tag{2.87}$$

$$\text{et} \quad \varepsilon(p_0) = -\frac{1}{2\hbar}\left(\Delta e_{_0}+\hbar\Delta\omega\right). \tag{2.88}$$

L'interprétation physique est simple : les deux fonctions d'onde $\Psi_1(z,T)$, $\Psi_2(z,T)$,contiennent deux ondes planes dont l'impulsion de l'atome est la même mais leurs énergies sont différentes.Si l'atome est dans l'état fondamental, leur impulsion est toujours égale à p_0 mais son énergie est égale soit $E_2(p_0)$ ou $E_2^{'}(p_0)$. Si l'atome est dans l'état excité son impulsion est toujours égale à p_0+hk mais son énergie est égale soit $E_1(p_0)$ où $E_1^{'}(p_0)$. et la différence ΔE entre ces deux niveaux est égale à :

$$\Delta E = E_1(p_0)-E_1^{'}(p_0)=E_2(p_0)-E_2^{'}(p_0)=\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2}. \tag{2.89}$$

2.6.1 Probabilite de transition

a)**La probabilité de transition de l'état fondamental vers l'état excité est donné par :**

$$P_1(t)=\left|\langle f|\ \Psi(t)\rangle\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f|\ z\rangle\ \langle z|\,\Psi(t)\rangle\,dz\right|^2 \tag{2.90}$$

$$P_1(t)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f|\ z\rangle\,\langle z|\,U\,|y\rangle\,\langle y|\ \Psi(,0)>dzdy\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f|\ z\rangle\,K(z,y;T)\,\langle y|\ \Psi(y,0)dzdy\right|^2$$

$$=\left|\int\Psi_f^{\dagger}(z)\Psi(z,t)dz\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}p'z},0\right)\begin{pmatrix}\Psi_1(z,T)\\ \Psi_2(z,T)\end{pmatrix}dz\right|^2$$

$$P_1(t)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}p'z}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(p_0+\hbar k)z}\frac{\Omega}{2\beta(p_0)}\sin\frac{T}{2\hbar}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2}dz\right|^2. \tag{2.91}$$

Vu les divergences, qui apparaissent dans le calcul de la probabilité de transition, dues à la présence de l'onde plane, il est préférable de passer à une boite fictive dont les dimensions sont finies comme suit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ikx}\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \qquad \text{où} \qquad L\gg \qquad \text{et} \qquad n=\text{entier} \quad k\longrightarrow\frac{2\pi n}{L}, \tag{2.92}$$

son application à notre cas se traduit par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}p'z}\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i\frac{2\pi n}{L}z} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(p_0+\hbar k)z}\longrightarrow e^{i\frac{2\pi m}{L}z}\frac{1}{\sqrt{L}}, \tag{2.93}$$

où nous avons fait le changement suivant :

$$\frac{p^{'}}{\hbar} \longrightarrow \frac{2\pi n}{L} \qquad \text{et} \qquad \frac{p_0+\hbar k}{\hbar} \longrightarrow \frac{2\pi m}{L}. \tag{2.94}$$

Alors la probabilité de transition devient :

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= \left| \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}z} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi m}{L}z} dz \frac{\Omega}{2\beta(p_0)} \sin\frac{T}{2\hbar}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2} \right|^2, \\
&= \left| \int_0^L \frac{1}{L} e^{i\frac{2\pi}{L}(m-n)z} dz \frac{\Omega}{2\beta(p_0)} \sin\frac{T}{2\hbar}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2} \right|^2, \\
&= \frac{1}{L^2} \left| L\delta_{n,m} \frac{\Omega}{2\beta(p_0)} \sin\frac{T}{2\hbar}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2} \right|^2, \\
&= \delta_{n,m}\delta_{n,m} \left|F(m)\right|^2 = \delta_{n,m}\delta_{n,n} \left|F(m)\right|^2 = \delta_{n,m} \left|F(m)\right|^2,
\end{aligned} \tag{2.95}$$

où

$$F(m) = \frac{\Omega}{2\beta(p_0)} \sin\frac{T}{2\hbar}\sqrt{(\Delta e_0+\hbar\Delta\omega)^2+\hbar^2\Omega^2}. \tag{2.96}$$

Si n différent de m la probabilité de transition est nulle, tandis que si $n=m$ implique que $p^{'}=p_0+\hbar k$ la probabilité pour que l'atome possède l'impulsion $p_0+\hbar k$ prend la forme suivante :

$$P_1(t) = \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p_0)} \sin^2\beta(p_0)T. \tag{2.97}$$

b)**La probabilité pour que l'atome reste dans l'état fondamental est donné par**

$$\begin{aligned}
P_2(t) = \left|\langle i|\,\Psi(t)\rangle\right|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \langle i|\,z\rangle\,\langle z|\,\Psi(t)\rangle\,dz \right|^2 \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(0, e^{-\frac{i}{\hbar}p^{'}z}\right) \begin{pmatrix} \Psi_1(z,T) \\ \Psi_2(z,T) \end{pmatrix} dz \right|^2,
\end{aligned}$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p^{'}z} \cdot \frac{1}{2\beta\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_0 z} \frac{1}{2} \left[[\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)]\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2(p_0)T} - [\beta(p_0)-\varepsilon(p_0)]\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{'}(p_0)T} \right] dz \right|^2. \tag{2.98}$$

Un calcul similaire au précédent donne :

$$P_2(t) = 1 - \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p_0)} \sin^2\beta(p_0)T. \tag{2.99}$$

Il est clair que $P_1+P_2=1$ ce qui montre que la probabilité totale est conservée.

La valeure moyenne de l'énérgie et de la quanitité de mouvement et donneé par l' équation suivant :

$$\overline{P} = (p_0 + \hbar k)P_1 + p_0 P_2 = p_0 + \frac{\Omega^2 \hbar k}{4\beta^2(p)} \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.100}$$

$$\bar{E}_k = \frac{(p_0 + \hbar k)^2}{2m} P_1 + \frac{p_0^2}{2m} P_2 = \frac{p_0^2}{2m} + \Delta e_{p_0} \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p)} \sin^2(\beta(p_0)t). \tag{2.101}$$

Generalement $\overline{P} \neq p_0$ et $\bar{E}_k \neq \frac{p_0^2}{2m}$ excepte pour $T = n\pi/\beta(p_0)$ $(n = 0, 1, 2...)$. Pendant ces périodes, l'atome est toujours dans son état fondamontale, et donc $\overline{P} = p_0$ et $\bar{E}_k = \frac{p_0^2}{2m}$.

On pose $\Delta\overline{P} = \overline{P} - p_0$ et $\Delta\bar{E}_k = \bar{E}_k - \frac{p_0^2}{2m}$.

$$\overline{\Delta p} = \frac{\Omega^2}{4\beta_0^2} \hbar k \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.102}$$

$$\overline{\Delta E} = \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p)} \Delta e_{p_0} \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.103}$$

$\overline{\Delta p}$ et $\overline{\Delta E}$ sont les valeur moyenne de l'impulsion et de l'énergie cinétique de l'atome acquiert du champs électromagnétiques respectivement.

Il est clair que $\overline{\Delta p} \geq 0$.Donc si $p_0 > 0$, alors $\overline{P} > p_0$,et l'impulsion et, par conséquent, l'énergie cinétique de l'atome augmente. Si $p_0 < 0$, alors $\left|\overline{P}\right| < |p_0|$ et l'impulsion et, par conséquent, l'énergie cinétique de l'atome diminue.

Le changement de la l'mpulsion de l'atome est due à l'action de l'onde éléctromagnétique sur l'atome.en utilisant Le théorème d'Ehrenfest, la valeur moyenne de la force exercée sur l'atome par l'onde électromagnétique est obtenue comme suit

$$\overline{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{\Delta p}) = \frac{\Omega^2}{4\beta(p_0)} \hbar k \sin 2\beta(p_0)t. \tag{2.104}$$

La valeur moyenne de $\overline{F}$ peut prendre des valeurs positives ou négatives. Les valeurs positives de $\overline{F}$ montrent que la valeure moyenne de l'mpulstion de l'atome augmente avec t, et les valeurs négatives de $\overline{F}$ montrent que la valeure moyenne de l'mpulstion de l'atome diminue avec t. On a démontre que si $p_0 > 0$, alors $\overline{P} > p_0$ et quand $p_0 < 0$, alors $\left|\overline{P}\right| < |p_0|$. Cela montre que la direction de la valeur moyenne de l'mpulstion de l'atome acquiert de l'onde électromagnétique est la même que la direction de propagation de l'onde électromagnétique, l'action des ondes électromagnétiques sur l'atome montre la propriété d'expulser.

2.6.2 Le cas de résonance

La probabilité P_1, d'aprés l'expréssion (2.97) , dépend de la fréquence de l'onde élèctromagnétique et atteint son maximum à un instant donné lorsque :

$$\Delta e_0 + \hbar \Delta\omega = 0, \tag{2.105}$$

on dit qu'il y a résonance. En vertu de la condition de résonance on a :$\beta(p_0) = \frac{\Omega}{2}$, $\varepsilon(p_0) - \beta(p_0) = -\frac{\Omega}{2}$, et $\varepsilon(p_0) + \beta(p_0) = \frac{\Omega}{2}$.Ainsi, les fonctions d'onde de l'atome ont une forme plus simple

$$\Psi_1(z,T) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\hbar}}(\left\{-e^{-i[(p_0+\hbar k)z - E_1(p_0)T]/\hbar} + e^{+i\left[(p_0+\hbar k)z - E'_1(p_0)T\right]/\hbar}\right\}, \tag{2.106}$$

$$\Psi_2(z,T) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\hbar}}(\left\{e^{+i[p_0 z - E_2(p_0)T]/\hbar} + e^{+i\left[p_0 z - E'_2(p_0)T\right]/\hbar}\right\}, \tag{2.107}$$

où

$$\begin{aligned} E_1(p_0) &= \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E'_1(p_0) &= \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} + \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E_2(p_0) &= \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E_2(p_0) &= \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\Omega}{2}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Ils sont les niveaux d'énergies divisé. La différence d'énergie entre les niveaux de division est

$$\Delta E = \hbar\Omega. \tag{2.109}$$

Comme Ω est dépendant de l'amplitude du champ électrique, la répartition des niveaux représente en fait une sorte d'effet Stark.

En vertu de la condition de résonance, les probabilités de la quantité de mouvement $p_0 + \hbar k$ et p_0 à l'instant t sont

$$p_1 = \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad p_2 = \cos^2(\frac{\Omega}{2}t), \tag{2.110}$$

et La valeure moyenne de l'energie et la quanitité de mouvement et donneé par

$$\bar{p} = p_0 + \hbar k \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad \bar{E}_k = \frac{p_0^2}{2m} + \Delta e_{p_0} \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \tag{2.111}$$

les valeurs moyennes de l'impulsion et de l'énergie cinétique de l'atome acquiert du champs électromagnétiques sont respectivement.

$$\overline{\Delta p} = \hbar k \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad \overline{\Delta E} = \Delta e_{p_0} \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \tag{2.112}$$

la valeur moyenne de la force exercée sur l'atome par l'onde électromagnétique

$$\overline{F} = \frac{\Omega\hbar k}{2} \sin\Omega t. \tag{2.113}$$

En vertu de la condition de résonance, le changement de l'énergie et de l'mpulsion entre l'atome et l'onde électromagnétique serait effectivement complete, puisque quand $T = (2n+1)\pi/\Omega$ $(n = 0, 1, 2...)$, l'atome doit passer à son état excité à partir de son état fondamental, et la valeur moyenne de l'impulsion de l'atome acquiert auprès d'une onde électromagnétique atteint son maximum $\hbar k$.

2.6.3 Le cas de désaccord Strict

Si la fréquence de l'onde èlèctromagnétique vérifiée

$$|\Delta e_0 + \hbar\Delta\omega| \gg \hbar\Omega, \tag{2.114}$$

alors la probabilité de transition $P_1 \to 0$; on dit qu'on a un désaccordement "Strict detuning"

et dans ce cas $\frac{\Omega}{\beta(p_0)} \simeq 0$,$[\varepsilon(p_0) + \beta(p_0)] \simeq -2\beta(p_0)$ et $[\varepsilon(p_0) - \beta(p_0)] \simeq 0$. Ainsi, les fonctions d'onde de l'atome serait simplifiées sous forme de :

$$\Psi_1(z_f, T) \simeq 0, \qquad \Psi_2(z, T) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{+i\left[p_0 z - E_2''(p_0)T\right]/\hbar}, \tag{2.115}$$

où

$$E_2''(p_0) = \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{\hbar\omega}{2}, \tag{2.116}$$

qui est simplement l'énergie totale de l'atome avant qu'il ne soit irradié par l'onde électromagnétique. L'équation (2.115) ne sont que les fonctions d'onde de l'atome avant qu'il ne soit irradiée par l'onde électromagnétique, et ainsi nous concluons que dans le cas de désaccord, l'atome n'est pas influencée par l'onde électromagnétique.

2.7 Solution lorsque l'atome se trouve dans l'état excité a $t = 0$

Supposons nous que à l'instant $t = 0$ l'atome se trouve dans l'état excité c'est à dire :

$$\Psi(z, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 + \hbar k)z} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.117}$$

par un calcule identique à celui du (2.82)on trouve

$$\Psi(z, T) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z, T) \\ \Psi_2(z, T) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, y; T)\Psi(y, 0)dy, \tag{2.118}$$

avec

$$\Psi_1(z, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{2\beta(p_0)} \left\{ - \left[+\varepsilon(p_0) - \beta(p_0)\right] e^{+i[(p_0+\hbar k)z - E_1(p_0)T]/\hbar} \right.$$
$$\left. + \left[\varepsilon(p_0) + \beta(p_0)\right] e^{+i\left[(p_0+\hbar k)z - E_1'(p_0)T\right]/\hbar} \right\}, \tag{2.119}$$

$$\Psi_2(z, T) = \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi\hbar}4\beta(p_0)} \left[-e^{i\left[p_0 z_f - E_2(p_0)T\right]/\hbar} + e^{i\left[p_0 z_f - E_2'(p_0)T\right]/\hbar} \right], \tag{2.120}$$

avec $E_1(p_0), E_1'(p_0), E_2(p_0), E_2'(p_0)$ sont les même que (2.80) .

L'interprétation physique est simple : les deux fonction d'onde $\Psi_1(z, T)$, $\Psi_2(z, T)$,contiennent deux ondes planes dont l'impulsion de l'atome est la même mais leurs énergies sont différentes.Si l'atome est dans l'état fondamental, leur impulsion est toujours égale à p_0 mais son énergie est égale soit $E_2(p_0)$ ou $E_2^{'}(p_0)$. Si l'atome est dans l'état excité son impulsion est toujours égale à $p_0 + hk$ mais son énergie est égale soit $E_1(p_0)$ où $E_1^{'}(p_0)$. Ces relation entre l'impultion et l'energie sont les même que dans le premier cas.

2.7.1 Probabilite de transition

a)**La probabilité de transition de l'état excité vers l'état fondamental est donné par :**

$$P_2(t)_{i\longleftarrow f} = |\langle i|\ \Psi(t)\rangle|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \langle i|\ z\rangle\ \langle z|\ \Psi(t)\rangle\ dz\right|^2,$$
$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p'z}\right) \begin{pmatrix} \Psi_1(z,T) \\ \Psi_2(z,T) \end{pmatrix} dz\right|^2.$$

Par un calcul similaire au précédent on trouve :

$$P_2(t) = \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p_0)} \sin^2\beta(p_0)T. \tag{2.121}$$

b)**La probabilité pour que l'atome reste dans l'état éxcite est donnée par :**

$$P_1(t)_{f\longleftarrow f} = |\langle f|\ \Psi(t)\rangle|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \langle f|\ z\rangle\ \langle z|\ \Psi(t)\rangle\ dz\right|^2, \tag{2.122}$$
$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p'z}, 0\right) \begin{pmatrix} \Psi_1(z,T) \\ \Psi_2(z,T) \end{pmatrix} dz\right|^2.$$

Un calcul similaire au précédent donne :

$$P_1(t) = 1 - \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p_0)} \sin^2\beta(p_0)T. \tag{2.123}$$

La valeur moyenne de l'énérgie et de la quanitité de mouvement et donneé par

$$\overline{P} = p_0 + \hbar k - \frac{\Omega^2\hbar k}{4\beta^2(p)} \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.124}$$

$$\bar{E}_k = \frac{(p_0 + \hbar k)^2}{2m} - \Delta e_{p_0} \frac{\Omega^2}{4\beta^2(p)} \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.125}$$

les valeurs moyennes de l'impulsion et de l'énergie cinétique de l'atome acquiert du champs électromagnétiques respectivement.

$$\overline{\Delta p} = -\frac{\Omega^2}{4\beta_0^2}\hbar k \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.126}$$

$$\overline{\Delta E}_k = -\frac{\Omega^2}{4\beta^2(p)}\Delta e_{p_0} \sin^2(\beta(p_0)t), \tag{2.127}$$

Si $p_0 > 0$,et l'impulsion et, par conséquent, l'énergie cinétique de l'atome diminue. Par contre si $p_0 < 0$, l'impulsion et, par conséquent, l'énergie cinétique de l'atome augment.

La valeur moyenne de la force exercée sur l'atome par l'onde éléctromagnétique est obtenue comme

$$\overline{F} = -\frac{\Omega^2}{4\beta(p_0)}\hbar k \sin 2\beta(p_0)t. \tag{2.128}$$

Maintenant, la direction de la valeur moyenne de l'impulsion de l'atome acquiert de l'onde électromagnétique est inverse à la direction de propagation de l'onde électromagnétique, et donc l'action de l'onde électromagnétique sur l'atome montre la propriété de piégeage.

2.7.2 Le cas de résonance

La probabilité P_2, d'aprés l'expréssion (2.122), dépend de la fréquence de l'onde élèctromagnétique et atteint son maximum à un instant donné T lorsque :

$$\Delta e_0 + \hbar\Delta\omega = 0, \tag{2.129}$$

on dit qu'il y a résonance. En vertu de la condition de résonance on a $\beta(p_0) = \frac{\Omega}{2}$. Ainsi, les fonctions d'onde de l'atome ont une forme plus simple

$$\Psi_1(z,T) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ e^{+i[(p_0+\hbar k)z - E_1(p_0)T]/\hbar} + e^{+i\left[(p_0+\hbar k)z - E_1'(p_0)T\right]/\hbar} \right\}, \tag{2.130}$$

$$\Psi_2(z,T) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\hbar}} (\left\{ -e^{+i[p_0 z - E_2(p_0)T]/\hbar} + e^{+i\left[p_0 z - E_2'(p_0)T\right]/\hbar} \right\}, \tag{2.131}$$

où

$$\begin{aligned} E_1(p_0) &= \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E_1'(p_0) &= \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} + \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E_2(p_0) &= \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{2}, \\ E_2(p_0) &= \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\Omega}{2}. \end{aligned} \tag{2.132}$$

En vertu de la condition de résonance, les probabilités de la quantité de mouvement $p_0 + \hbar k$ et p_0 à l'instant t sont

$$p_1 = \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad p_2 = \cos^2(\frac{\Omega}{2}t), \tag{2.133}$$

et La valeure moyenne de l'energie et la quanitité de mouvement et donneé par

$$\bar{p} = p_0 + \hbar k - \hbar k \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad \bar{E}_k = \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} - \Delta e_{p_0}\sin^2(\frac{\Omega}{2}t). \tag{2.134}$$

Les valeurs moyennes de l'impulsion et de l'énergie cinétique de l'atome acquiert du champs électromagnétiques sont respectivement.

$$\overline{\Delta p} = -\hbar k \sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \qquad \overline{\Delta E} = -\Delta e_{p_0}\sin^2(\frac{\Omega}{2}t), \tag{2.135}$$

la valeur moyenne de la force exercée sur l'atome par l'onde électromagnétique et donné par

$$\overline{F} = -\frac{\Omega\hbar k}{2}\sin\Omega t.$$

Même phénomène, le changement de l'énergie et de l'impulsion entre l'atome et l'onde électromagnétique serait effectivement complete,

2.7.3 Le cas de désaccord Strict

Si la fréquence de l'onde élèctromagnétique vérifié

$$|\Delta e_0 + \hbar\Delta\omega| \gg \hbar\Omega, \tag{2.136}$$

alors la probabilité de transition $P_2 \to 0$;on dit qu'on a un désaccordement "Strict detuning"

Ainsi, les fonctions d'onde de l'atome serait simplifiée sous forme de

$$\Psi_2(z,T) \simeq 0, \qquad \Psi_2(z,T) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{+i\left[(p_0+\hbar k)z - E_1^{''}(p_0)T\right]/\hbar}, \tag{2.137}$$

où

$$E_1^{''}(p_0) = \frac{(p_0+\hbar k)^2}{2m} + \frac{\hbar\omega}{2}, \tag{2.138}$$

qui est simplement l'énergie totale de l'atome dans l'états excité avant qu'il ne soit irradié par l'onde électromagnétique. L'equation (2.137) ne représente que les fonctions d'onde de l'atome avant qu'il ne soit irradiée par le ondes électromagnétiques, et ainsi ne concluant que dans le cas de désaccord, l'atome n'est pas influencée par l'onde électromagnétique.

Chapitre 3

Atome à deux niveaux instables en interaction avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire

3.1 Introduction

Ce chapitre, est consacré, à l'étude du comportement d'un atome à deux niveaux instables en interaction avec onde éléctomagnétique polarisée circulairement par le formalisme des integrales de chemin.

Cet atome à deux niveaux a une masse m,une fréquence angulaire ω, et un moment dipolaire $\mathbf{D}$. La dynamique de l'atome avec cette onde est décrite par l'hamiltonien :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\sigma_z - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}I - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_-. \tag{3.1}$$

Nous avons noté $\gamma_+ = \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_- = \gamma_1 - \gamma_2$ avec $\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}$, où, τ_1 et τ_2 sont les durées de vie des deux niveaux de l'atome.

L'hamiltonien relatif au probléme de ce chapitre (3) a la forme suivante.

$$H = H_0 + H_{int} \tag{3.2}$$

avec

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}I \tag{3.3}$$

et

$$H_{int} = \frac{1}{2}\hbar(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\sigma_z - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_-,$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Etant les matrices de Pauli habituelles. Cet hamiltonien a été étudie récemment [11] en considérant l'équation de Schrödinger et par [9] en considerant les integrales de chemins dans la representation des etats coherents fermioniques. Nous proposons dans ce chapitre de retrouver tous les résultats à savoir :

les fonctions d'onde en utilisant le formalisme intégrale de chemins en combinant l'espace de configuration et la représentation des états cohérents des spin.

Passons d'abord à la construction du formalisme intégrale de chemins.

3.2 Formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents de spin

Par la même méthode souligner plus haut dans les chapitres (2) et (3) , pour la description du système, nous allons considérés l'état quantique $|z; \theta, \varphi\rangle$, reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par la variable réelle z tandis que les variables angulaire (θ, φ) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initial$|z_i; \theta_i, \varphi_i\rangle$ à $t_i = 0$ vers l'état final $|z_f; \theta_f, \varphi_f\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit :

$$K(f, i, ; T) = \langle z_f, \theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{U}(T, 0) \mid z_i, \theta_i, \varphi_i\rangle, \tag{3.5}$$

avec

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt), \tag{3.6}$$

et $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson.

Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N + 1)\varepsilon$. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$\mathbf{U}(T; 0) = \lim_{N\to\infty} \left[e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\right]^{N+1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}) \ . \tag{3.7}$$

– Introduisons les relations de fermetures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \frac{1}{2\pi} \int \prod_{n=1}^{N} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ &\times \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle z_n, \theta_n, \varphi_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} |z_{n-1}, \theta_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle , \end{aligned} \tag{3.8}$$

aprés l'action de H_{int} sur les états $|z_n\rangle$ on note que :

$$\langle z_n, \theta_n, \varphi_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} |z_{n-1}, \theta_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle = \langle z_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} |z_{n-1}\rangle \langle \theta_n, \varphi_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} |\theta_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle , \tag{3.9}$$

et le propagateur devient séparable :

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle z_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} |z_{n-1}\rangle \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi} \int \prod_{n=1}^{N} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ &\times \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle \theta_n, \varphi_n| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}(z_{n-1})} |\theta_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle , \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec :

$$z_{N+1} = z_{f,} \quad , \quad z_0 = z_i \quad \text{et} \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f, \quad , \quad \Omega_0 = \Omega_i. \tag{3.11}$$

En tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned}
\langle z_n \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p^2} \right| z_{n-1}\rangle &= \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(z_n - z_{n-1}\right)^2), && (3.12)\\
\langle\Omega|\,\sigma_z\,|\Omega'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, && (3.13)\\
\langle\Omega|\,\sigma_+\,|\Omega'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, && (3.14)\\
\langle\Omega|\,\sigma_-\,|\Omega'\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. && (3.15)
\end{aligned}$$

Le propagateur prend la forme discrete suivante :

$$\begin{aligned}
K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2\\
e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\left\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} + \sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right.\\
-\frac{i\varepsilon}{2}(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\left[\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} - \sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right]\\
+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp -i(\omega_L t_n - kz_n)\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\\
\left.+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\left[+i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})\right]\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\right\}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéresessent. Procédons alors au calcul de $K\,(f,i,;T)$.

3.3 Calcul le propagateur

Pour intégrer il faut d'abord diagonaliser l'Hamiltonien. Pour cela éliminons les terms $\exp\left[-i(\omega_L t_n - kz_n)\right]$ et $\exp\left[i(\omega_L t_n - kz_n)\right]$ à l'aide du changement des variables polaires suivant :

$$\varphi_n = \varphi'_n - kz_n + \omega_L t_n. \quad (3.17)$$

Il est clair que la mesure reste inchangé

$$d\varphi_n d\cos(\theta_n) = d\varphi'_n d\cos(\theta_n), \quad (3.18)$$

et le propagateur prend la forme suivante :

$$K(f,i;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi'_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} (\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1}$$
$$\times \left\{ (1 - \frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)) \cos\frac{\theta_n}{2} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})} \exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 - k\Delta z_n\right)\right.$$
$$+ (1 + \frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)) \sin\frac{\theta_n}{2} \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})} \exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 + k\Delta z_n\right)$$
$$+ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \cos\frac{\theta_n}{2} \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}$$
$$\left. + \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \sin\frac{\theta_n}{2} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}\right\}. \quad (3.19)$$

Avec

$$\omega - \omega_L = \Delta\omega \quad (3.20)$$

on tenant compte du faite

$$\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \pm \frac{ik}{2}\Delta z_n = \frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n \pm \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon^2 k^2}{4m^2}\right], \quad (3.21)$$

alors le propagateur devient

$$K(f,i;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} (\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}$$
$$\left\{ \cos\frac{\theta_n}{2} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} \exp + \frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1}) \left[1 - \frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)\right] \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n - \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\right.$$
$$+ \sin\frac{\theta_n}{2} \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)\right] \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n + \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]$$
$$+ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \cos\frac{\theta_n}{2} \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}$$
$$\left. + \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \sin\frac{\theta_n}{2} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}\right\}, \quad (3.22)$$

on peut écrire le propagateur sous forme matricielle

$$K(f,i;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} (\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n$$
$$\times \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{\frac{i\varphi'_n}{2}} & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i\varphi'_n}{2}} \end{pmatrix} R(z_n,t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

avec

$$R(z_n,t_n)=\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n-\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 & e^{\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n+\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Nous intégrons la forme précédent (3.23) sur toutes les variables angulaires θ_n et φ'_n utilisant :

$$\int_0^\pi d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=\int_0^\pi d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=-1, \tag{3.25}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{+im\varphi}=2\pi\delta_{m,0}. \tag{3.26}$$

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K(f,i;T)=e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}$$

$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}}\end{pmatrix}(-1)^N\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}R(z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}}\end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Introduisons maintenant l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\pm\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n\right]=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}}\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n\pm\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right], \tag{3.28}$$

ou' le propagateur devient

$$\begin{aligned}K(f,i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\right]e^{-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}}\\ &\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_n}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}}\end{pmatrix}\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}(-1)^NR(p_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.29}$$

la matrice R_n devient

$$R(p_n,t_n)=\begin{pmatrix}(1-\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right))\exp(-\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n) & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & (1+\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right))\exp(+\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n)\end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

Intégrons sur les N variables z_n . Le propagateur devient

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\prod_{n=1}^{n=N}(2\pi\hbar\delta(p_n-p_{n-1}))\exp(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}\sum_{n=1}^{n=N+1}p_n^2)$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_{n+1}z_{n+1}-p_1z_0)-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}\right]\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}$$

$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}}\end{pmatrix}(-1)^N R(p_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}}\end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

La présence de la distribution de Dirac dans (2.31) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement i. e :

$$p_1=p_2=\cdots=p_{N+1}=p. \quad (3.32)$$

Alors le propagateur (3.31) prend la forme suivante :

$$K=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp\left[\sum_{n=1}^{n=N+1}(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2)+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_0)\right]\times\exp\left(-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}\right)$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}}\end{pmatrix}R\left(p,T\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}}\end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

avec

$$R\left(p,T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}R(p,t_n), \quad (3.34)$$

tel que

$$R(p,t_n)=\begin{pmatrix}1-i\varepsilon(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{kp}{2m}) & \frac{i\varepsilon\Omega}{2}\\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & 1+i\varepsilon(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{kp}{2m})\end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$R(p,t_n)=e^{-i\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+i\varepsilon K(n),$$

avec

$$K(n)=\begin{pmatrix}0 & u(n)\\ u(n) & 0\end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

et

$$\omega(n)=\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{kp}{2m},\qquad u(n)=\frac{\Omega}{2}, \quad (3.37)$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrice suivant L. Chetouani et all[6] .

$$\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n))=e^{-i\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2e^{-i\sum_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}+\ldots$$

$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}\ldots\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^N e^{-i\sum_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}$$

$$K(l_3)\ldots e^{-i\sum_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}. \quad (3.38)$$

A la limite $N \longrightarrow +\infty$:le produit devient

$$R(p,T) = e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z} + i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_0^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$+ (i)^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_2) e^{-i\int_0^{s_2} ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$+ ...(i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 ... \int_0^{s_{N-1}} ds_N e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$K(s_2) e^{-i\int_{s_3}^{s_2} ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_3) ... K(s_{N-1}) e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}} ds\omega(p,s)\sigma_z} K(s_N) e^{-i\int_0^{s_N} ds\omega(p,s)\sigma_z} + ... \quad (3.39)$$

Un calcul simple nous montre que les termes impaires respectivemet paires sont les élément diagonaux respectevement antidiagonaux de de R

$$R_{11}(p,T) = e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} \times$$
$$e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)} u(p(s_1), s_1) e^{+i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)} u(p(s_2), s_2) ... e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\omega(p,s)} u(p(s_{2n}), s_{2n}) e^{-i\int_0^{s_{2n}} ds\omega(p,s)}, \quad (3.40)$$

et

$$R_{12}(p,T) = i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)} u(p(s_1), s_1) R_{22}(p(s_1), s_1), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} R_{22}(p,T) &= R_{11}^*(p,T), \\ R_{21}(p,T) &= -R_{12}^*(p,T), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$R_{11}(p,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i\frac{\Omega}{2})^{2n} \int_0^T e^{i\Delta s_1} ds_1 \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}} ds_{2n}\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}, \quad (3.43)$$

avec

$$\Delta = 2\omega(n,s). \quad (3.44)$$
$$\omega(n,s) = \frac{\Delta\omega}{2} - \frac{i\gamma_-}{4} + \frac{kp}{2m} \quad (3.45)$$

3.4 Sommation des séries de perturabtion

Evaluons $R_{11}(p,T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T [6]. Soit

$$R_{11}(q,T) = \int_0^{+\infty} dT e^{-qT} R_{11}(p,T), \quad (3.46)$$

où $R_{11}(q,T)$ s'écrit sous la forme :

$$R_{11}(q,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i\frac{\Omega}{2})^{2n} F(0,T)\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \quad (3.47)$$

Avec

$$F(0,T)=\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1}F_1(0,s_1), \tag{3.48}$$

$$F_1(0,s_1)=\int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2F_2(0,s_2), \tag{3.49}$$

et on obtient par itération

$$F_{2n-1}(0,s_{2n-1})=\int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}. \tag{3.50}$$

La tronsformation de Laplace de $F(0,T)$ est :

$$\widetilde{F}(0,q)=\int_0^{+\infty} e^{-qT}F(0,T)dT=\int_0^{+\infty} dTe^{-qT}\int_0^T e^{i\Delta s_1}F_1(0,s_1)ds_1, \tag{3.51}$$

Qui peut être récrite comme

$$\widetilde{F}(0,q)=\int_0^{+\infty} dTe^{-(q-i\Delta)T}\int_0^T e^{-i\Delta(T-s_1)}F_1(0,s_1)ds_1. \tag{3.52}$$

En utilisant la théorème de convolution, on obtient

$$\widetilde{F}(0,q)=\frac{1}{q}\widetilde{F_1}(0,q-i\Delta), \tag{3.53}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{F_1}(0,q-i\Delta) &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T}F_1(0,T)dT\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T}dT\int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2F_2(0,s_2)=\frac{1}{q-i\Delta}\widetilde{F}_2(0,q).\end{aligned} \tag{3.54}$$

Effectuons le même calcul pour tous les autres termes , on obtient

$$\widetilde{F}(0,q)=\frac{1}{q}\left[\frac{1}{q(q-i\Delta)}\right]^n, \tag{3.55}$$

$$\widetilde{F}(0,T)=\int_0^{+\infty} e^{+qT}F(0,q)dq. \tag{3.56}$$

Insérons ce résultat dans $R_{11}(q,T)$ et effectuons la somme, on obtient

$$R_{11}(q,T)=\left[1+\int_0^{+\infty}\left[\frac{q-i\Delta}{q(q-i\Delta)+\frac{\Omega^2}{4}}-\frac{1}{q}\right]e^{+qT}dq\right]e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \tag{3.57}$$

Ce résultat est valable pour $\mid \frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{q(q-i\Delta)} \mid < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour ou cette condition est vérifiée.

On integer sur q on trouve l'expression de

$$R_{11}(p,T) = \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \qquad \text{avec} \qquad \Omega' = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}}. \tag{3.58}$$

Par un calcul identique, on trouve les autres éléments du matrice les resultats suivants :

$$R_{12}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \tag{3.59}$$

$$R_{21}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \tag{3.60}$$

$$R_{22}(p,T) = \cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T). \tag{3.61}$$

Substitouns ce résultat dans l'equation le propagateur prend finalement la forme :

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} R(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}\exp(+\frac{i\varphi'_i}{2}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

avec

$$R(p,T) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \\ -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & \cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Retournons aux anciennes variables angilaire , nous obtenons :

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{S}(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

où les éléments de matrice $\mathbf{S}$ est donné par :

$$\mathbf{S}_{11}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp(\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T - kz_i)), \tag{3.65}$$

$$\mathbf{S}_{22}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp(-\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T - kz_i)), \tag{3.66}$$

$$\mathbf{S}_{12}(p,T) = -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp(\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T + kz_i)), \tag{3.67}$$

$$\mathbf{S}_{21}(p,T) = -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp(-\frac{i}{2}(kz_f - \omega_l T + kz_i)). \tag{3.68}$$

3.5 Fonctions d'onde

Calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, en prend comme éxmple le calcul de l'élement de matrice $K_{11}\left(z_f, z_i, T\right)$ où

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \langle\uparrow| K(f,i;T)\left|\uparrow\right\rangle . \tag{3.69}$$

Introduisons ici les relations de fermetures suivantes :

$$\int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle\Omega_f\right| = 1, \quad \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) \left|\Omega_i\right\rangle \Omega_i \mid= 1, \tag{3.70}$$

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) <\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle\Omega_f\right| K(f,i;T) \left|\Omega_i\right\rangle \left\langle\Omega_i \left|\uparrow\right.\right\rangle , \tag{3.71}$$

avec

$$<\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \left\langle\Omega_i\right| \uparrow>= \cos\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{3.72}$$

on a donc :

$$K_{11}(f,i,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \mathbf{S}_{11}(p,T), \tag{3.73}$$

De même on trouve pour les autres éléments des formules analogues :

$$K_{12}(f,i,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \mathbf{S}_{12}(p,T), \tag{3.74}$$

$$K_{21}(f,i,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \mathbf{S}_{21}(p,T), \tag{3.75}$$

$$K_{22}(f,i,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \mathbf{S}_{22}(p,T). \tag{3.76}$$

Le résultat se met sous la forme matricielle suivante :

$$K(f,i;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \mathbf{S}(p,T). \tag{3.77}$$

Déduisons la fonction d'onde à l'instant T à partir de l'état initial par l'intermédiaire de l'équation d'évolution :

$$\Psi(z,T) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z,T) \\ \Psi_2(z,T) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z,y;T)\Psi(y,0)dy, \tag{3.78}$$

$$\Psi(z_i, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ipz_i}{\hbar}} \delta(p - p_0) dz_i \tag{3.79}$$

$$\Psi(z_i, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip_0 z_i}{\hbar}} \tag{3.80}$$

$$\Psi(z_f,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ e^{\frac{ip_0z_i}{\hbar}}\end{pmatrix}dz_i \tag{3.81}$$

par une calcul simple en trouve

$$\Psi_1(z_f,T)=\frac{\Omega}{4\sqrt{2\pi\hbar}\beta(p_0)}\left\{-\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[(p_0+\hbar k)z-E_1^+(p_0)T\right]\right]+\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[(p_0+\hbar k)z-E_1^-(p_0)T\right]\right]\right\} \tag{3.82}$$

$$\Psi_2(z_f,T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\begin{array}{c}(\frac{\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)}{2\beta(p_0)})\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_0z-E_2^+(p_0)T\right]\right]\\ -(\frac{-\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)}{2\beta(p_0)})\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_0z-E_2^-(p_0)T\right]\right]\end{array}\right\} \tag{3.83}$$

$$\varepsilon(p_0)=-\frac{(\frac{E_-}{\hbar}+\Delta\omega-\frac{i\gamma_-}{2})}{2},\quad \omega_1^{\pm}(p)=\alpha_1(p)\pm\beta(p)\ \text{ et }\omega_2^{\pm}(p)=\alpha_2(p)\pm\beta(p) \tag{3.84}$$

$$E_1^{\pm}=\hbar\omega_1^{\pm}(p),\quad E_2^{\pm}=\hbar\omega_2^{\pm}(p) \tag{3.85}$$

.

$$\alpha_1(p)=\alpha_2(p)+\omega_l=\frac{(\frac{E_+}{\hbar}+\omega_l-\frac{i\gamma_+}{2})}{2} \tag{3.86}$$

$$E_{\pm}=\frac{(p+\hbar k)^2}{2m}\pm\frac{p^2}{2m},\quad \beta(p)=\sqrt{\varepsilon^2(p)+\frac{\Omega^2}{4}} \tag{3.87}$$

les résultats concordent exactement avec l'article [11] .

Chapitre 4

Le modéle de Jaynes cummings en présence de l'effet de Kerr non linéaire

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier par l'approche intégrale de chemin, le modéle de Jaynes cummings [12]en présence de l'effet de Kerr nonlinéaire.

Le calcul des fonctions d'ondes et les energies ainsi que l'inversion de population nécessite la connaissance du propagateur $K(f, i; T)$ que nous proposons de déterminer par l'approche intégrale de chemin en utilisant le formalisme des états cohérents : l'une par rapport au spin et l'autre relative à la l'operateur de création et d'annihilation associés au champ électromagnétique. Nous proposons dans ce chapitre de considérer par l'approche path integral l'Hamiltonian suivant [12] .

$$\widehat{H}_{eff} = H_0 + H_1, \tag{4.1}$$

avec

$$H_0 = \omega_c \widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \chi \widehat{a}^{\dagger 2} \widehat{a}^2, \tag{4.2}$$

et

$$H_1 = \frac{1}{2}\omega_a \widehat{\sigma}_z + \lambda \left[\widehat{a}\widehat{\sigma}_+ + \widehat{a}^\dagger \widehat{\sigma}_- \right], \tag{4.3}$$

avec

- $\widehat{a}^\dagger, \widehat{a}$ sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation du champ de la cavité.
- λ est la constante de couplage entre l'atome et le champ.
- ω_c est la fréquence du champ.
- ω_a est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome.
- $\widehat{\sigma}_+$, $\widehat{\sigma}_-$, $\widehat{\sigma}_z$ sont les matrices de Pauli habituelles.
- et χ est la partie dispersive non linéaire du 3^{eme} ordre de l'effet de Kerr [12].

Notons que ce Hamiltonian a été étudiée récemment par résolution directe de l'équation de Schrödinger [12]. Lorsque l'effet de Kerr sont absent comme dans le modèle de Jaynes-Cumming [19], qui décrit la dynamique d'un atome à deux niveaux en interaction avec un champ électromagnétique quantifié à un mode, le traitement par le formalisme intégrale de chemins a été effectué par [21]. Ce modèle a été encore généralisé : atome à plusieurs niveaux et avec plusieurs photons, couplage dépendant du temps, photon médiateur remplacé par deux photons dégénérés.

4.2 Formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents

Passons maintenant à la description du système au moyen des intégrales de chemin en considérant l'état quantique $|Z;\theta,\varphi\rangle$, où Z et les angles polaire (θ,φ) sont les variables relatives au champ et au spin.

L'amplitude de transition de l'état initial $|Z_i;\theta_i,\varphi_i\rangle$ à $t_i=0$ vers l'état final $|Z_f;\theta_f,\varphi_f\rangle$ à $t_f=T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution :

$$K(f,i;T)=\langle Z_f;\theta_f,\varphi_f\mid \mathbf{T}_D\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T \widehat{H}_{eff}dt)\mid Z_i;\theta_i,\varphi_i\rangle \tag{4.4}$$

où $\mathbf{T}_{\mathrm{D}}$ est l'opérateur chronologique de Dyson.

Pour passer à la représentation path-integral, subdivisons d'abord l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε, instants intermédiaires,en utilisant au préalable la formule bien connue de Trotter et introduisons ensuite les projecteurs suivant ces instants intermédiaires N répartie régulièrement entre 0 et T. Alors le propagateur prend la forme suivante :

$$K\left(f,i,;T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d^2Z_n}{\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\langle Z_n|\,e^{-i\varepsilon H_0}\,|Z_{n-1}\rangle \tag{4.5}$$

$$\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left[<\Omega_n\,|\Omega_{n-1}\rangle-i\varepsilon\,\langle\Omega_n|\,H_1\,|\Omega_{n-1}\rangle\right] \tag{4.6}$$

avec

$$Z_{N+1}=Z_f,\quad \text{et}\qquad Z_0=Z_i;\quad \Omega_{N+1}=\Omega_f,\quad \text{et}\qquad \Omega_0=\Omega_i \tag{4.7}$$

Il est facile de voir que les éléments de matrice suivant ce calculent

$$\langle\Omega|\,\sigma_z\,|\Omega'\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \tag{4.8}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_+\,|\Omega'\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\quad \text{et}\quad \langle\Omega|\,\sigma_-\,|\Omega'\rangle=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} \tag{4.9}$$

et le propagateur relatif à notre problème a la forme d'une intégrale de chemin de Feynmann :

$$\begin{aligned}K\left(f,i,;T\right)&=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d^2Z_n}{\pi}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\\ &\times\exp\left\{\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[\frac{1}{2}\left(Z_n\Delta Z_n^*-Z_n^*\Delta Z_n\right)-i\varepsilon\omega_c Z_n^*Z_{n-1}-i\varepsilon\chi Z_n^{*2}Z_{n-1}^2-\frac{|Z_n|^2+|Z_{n-1}|^2}{2}\right.\right.\\ &\left.\left.+\ \log<\Omega_n\,|\Omega_{n-1}\rangle-i\varepsilon\frac{\langle\Omega_n|\,H_1\,|\Omega_{n-1}\rangle}{\langle\Omega_n|\,\Omega_{n-1}>}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéresessent. Procédons alors au calcul de $K\left(f,i,;T\right)$.

4.3 Calcul le propagateur

Notons que (4.10) s'écrit sous forme suivante

$$K\left(f,i,;T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d^2Z_n}{\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left\langle Z_n\right|e^{-i\varepsilon H_0}\left|Z_{n-1}\right\rangle\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}$$

$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}R(Z_n,n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix}\tag{4.11}$$

avec

$$R(Z_n;n)=e^{-i\varepsilon\frac{1}{2}\omega_a\sigma_z}+i\varepsilon\begin{pmatrix}0 & -\lambda Z_n\\ -\lambda Z_n^* & 0\end{pmatrix},\tag{4.12}$$

Intégrons sur toutes les variables angulaires θ_n et φ_n utilisant[20] :

$$\int_0^{\pi}d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=\int_0^{\pi}d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=-1,\tag{4.13}$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi e^{+im\varphi}=2\pi\delta_{m,0},.\tag{4.14}$$

On obtient

$$K^Z\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{pmatrix}\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{\substack{n=1\\ \leftarrow}}^{N}(-1)^N R(Z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix}.\tag{4.15}$$

Développons le produit (de type matriciel 2×2) figurant dans l'expression (4.15) suivant [6], nous trouvons alors une série

$$R(Z,T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{\substack{n=1\\ \leftarrow}}^{N+1}\left[(-1)^n R(Z_n,t_n)\right]$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^{N+1}\Big[e^{-i\int_0^T ds\omega\sigma_z}+i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1}ds\omega\sigma_z}:\\
&+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega\sigma_z}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2}ds\omega\sigma_z}+\cdots+\\
&+i^{N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_N}ds_{N+1}e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega\sigma_z}\\
&\times K(s_2)e^{-i\int_{s_2}^{s_3}ds\omega\sigma_z}K(s_3)\times\cdots\times K(s_N)e^{-i\int_{s_{N+1}}^{s_N}ds\omega\sigma_z}K(s_{N+1})+\cdots\Big]
\end{aligned}\tag{4.16}$$

de type de dyson
Ses éléments de matrice sont respectivement les suivants :

$$\mathcal{R}_{11}(Z,T) = e^{-i\int_0^T ds\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\lambda)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$
$$\left.\times\, e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega} Z_1 e^{+i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega} Z_2^* \times\cdots\times e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\omega} Z_{2n}^* e^{-i\int_0^{s_{2n}} ds\omega}\right]$$
$$= \mathcal{R}_{22}^*(Z,T) \tag{4.17}$$

$$\mathcal{R}_{12}(Z,T) = -i\lambda\int_0^T ds_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega dt} Z_1 \mathcal{R}_{11}^*(Z,s_1) \tag{4.18}$$
$$= -\mathcal{R}_{21}^*(Z,T)\,.$$

On peut voir alors que (4.15) est une série :

$$K^Z(\Omega_f,\Omega_i;T) =$$

$$\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left[e^{-i\int_0^T ds\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\lambda)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$
$$\left.\times\, e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds} Z_1 e^{+\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds} Z_2^* \times\cdots\times Z_{2n}^* \times e^{-\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n}}\omega ds}\right]$$
$$+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left[e^{+i\int_0^T ds\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\lambda)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$
$$\left.\times\, e^{\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds} Z_1^* e^{-\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds} Z_2 \times\cdots\times Z_{2n} e^{\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n}}\omega ds}\right]$$
$$-\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\lambda)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1}\right.$$
$$\left.\times\, e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds} Z_1 e^{+\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds} Z_2^* \times\cdots\times Z_{2n+1} e^{+\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n+1}}\omega ds}\right]$$
$$-\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\lambda)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1}\right.$$
$$\left.\times e^{\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds} Z_1^* e^{-\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds} Z_2^* \times\cdots\times Z_{2n+1} e^{-\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n+1}}\omega ds}\right] \tag{4.19}$$

qui peut être rearrangé en l'exprimant (4.19) sous la forme d'une somme de 4 termes :

$$K(Z_f,\Omega_f,Z_i,\Omega_i;T) = K_{11}(f,i;T) + K_{22}(f,i;T) + K_{12}(f,i;T) + K_{21}(f,i;T) \tag{4.20}$$

Le premier terme de (4.20) par exemple s'écrit :

$$K_{11}(f,i;T) =$$

$$\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left\{K_0^+\left(Z_f,Z_i;T\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\lambda)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n}\right.\right.$$

$$\times\int\frac{d^2Z_1}{\pi}\int\frac{d^2Z_2}{\pi}\times\cdots\times\int\frac{d^2Z_{2n}}{\pi}K_0^+\left(Z_f,Z_1;T-s_1\right)Z_1$$

$$\left.\left.\times\ K_0^-\left(Z_1,Z_2;s_1-s_2\right)Z_2^*K_0^+\left(Z_2,Z_3;s_2-s_3\right)\times\cdots\times Z_{2n}^*K_0^+\left(Z_{2n},Z_i;s_{2n}\right)\right]\right\}. \tag{4.21}$$

avec :

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\int\mathcal{D}Z^*\mathcal{D}Z\exp\left\{i\int_{s'}^{s''}dt\left[\frac{i}{2}\left(Z^*\dot{Z}-Z\dot{Z^*}\right)-\omega_cZ^*Z-\chi Z^{*2}Z^2\mp\frac{1}{2}\omega_a\right]\right\} \tag{4.22}$$

Il est naturel d'abord de traiter le terme $Z^{2*}Z^2$ figurant dans (4.22) comme perturbation. Pour cela développons l'exponentielle du terme perturbatif.

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\left\{K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\chi)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{n-1}}ds_n\right.\right.$$

$$\times\int\frac{d^2Z_1}{\pi}\int\frac{d^2Z_2}{\pi}\cdots\int\frac{d^2Z_n}{\pi}K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z_1;T-s_1\right)Z_1^{*2}Z_1^2$$

$$\left.\left.\times\ K_{00}^{\pm}\left(Z_1,Z_2;s_1-s_2\right)Z_2^{*2}Z_2^2\times\cdots\times Z_n^{*2}Z_n^2K_{00}^{\pm}\left(Z_n,Z';s_n\right)\right]\right\}, \tag{4.23}$$

avec

$$K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z''^*Z'\right)^k}{k!}\exp\left(-\frac{\left|Z''\right|^2+\left|Z'\right|^2}{2}\right)\exp(-i\left(k\omega_c\pm\frac{1}{2}\omega_a\right)\left(s''-s'\right)) \tag{4.24}$$

Effectuons les intégration grâce à la formule :

$$\int\frac{dZ^*dZ}{\pi}Z^{*m}Z^ne^{-Z^*Z}=\delta_{nm}\sqrt{m!}\sqrt{n!}. \tag{4.25}$$

Il vient alors

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=$$

$$K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\right)^n\int_{s'}^{s''}ds_1\int_{s'}^{s_1}ds_2\cdots\int_{s'}^{s_{n-1}}ds_n\right]. \tag{4.26}$$

Comme

$$\exp\left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\left(s''-s'\right)\right)=\exp\left[-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\int_{s'}^{s''}ds\right]$$

$$= 1 + [-i\chi(k+2)(k+1)] \int_{s'}^{s''} ds_1 + [-i\chi(k+2)(k+1)]^2 \int_{s'}^{s''} ds_1 \int_{s'}^{s''} ds_1 + \cdots +$$

$$+ (-i\chi(k+2)(k+1))^n \int_{s'}^{s''} ds_1 \int_{s'}^{s_1} ds_2 \cdots \int_{s'}^{s_{n-1}} ds_n + \cdots, \tag{4.27}$$

d'où

$$K_0^{\pm}(Z'', Z'; s''-s') = K_{00}^{\pm}(Z'', Z'; s''-s') \exp(-i\chi(k+2)(k+1)(s''-s')). \tag{4.28}$$

Reportons (4.28) dans (4.23)

$$K_0^{\pm}(Z'', Z'; s''-s') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z''^{*}Z')^k}{k!} \exp\left(-\frac{|Z''|^2 + |Z'|^2}{2}\right)$$

$$\times \exp\left(-i\left[\chi(k+2)(k+1) + k\omega_c \pm \frac{1}{2}\omega_a\right](s''-s')\right) \tag{4.29}$$

et utilisons la formule (4.29) pour simplifier encore les calcules.

Alors (4.21) devient :

$$K_{11}(f, i; T) = \cos\frac{\theta_f}{2} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_f - \varphi_i)} \exp\left(-\frac{|Z_f|^2 + |Z_i|^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{Z_f^{*k} Z_i^k}{k!}\right.$$

$$\times \exp\left(-i\left[\chi\left(k^2 + 3k + 2\right) + k\omega_c + \frac{1}{2}\omega_a\right] T\right)$$

$$\left.\times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\varpi_{01}^2\right]^n \int_0^T ds_1 e^{i\Delta_1 s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta_1 s_2} \cdots \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta_1 s_{2n}} ds_n\right]\right\} \tag{4.30}$$

avec

$$\varpi_{01}^2 = \lambda^2(k+1), \qquad \Delta_1 = \omega_a - \omega_c - 2\chi(k+2) \tag{4.31}$$

Cette dernière expréssion (4.30) peut s'écrire sous forme plus simple :

$$F(0, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\varpi_{01}^2\right)^n \int_0^T ds_1 e^{i\Delta_1 s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta_1 s_2} \cdots \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{-i\Delta_1 s_{2n}}\right] \tag{4.32}$$

et pasons à la transformée de Laplace tout en lui appliquant la théorème de convolution

$$\widetilde{F}(0, p) = \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F(0, T) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\varpi_{01}^2}{p(p - i\Delta_1)}\right]^n. \tag{4.33}$$

Le résultat est encore une série qui ici simplement égale à :

$$\widetilde{F}(p) = \frac{p - i\Delta_1}{p(p - i\Delta_1) + \varpi_{01}^2} - \frac{1}{p}. \tag{4.34}$$

En prenant sa trnsformation inverse de Laplace de (4.34), alors (4.30) a une forme plus simple :

$$K_{11}(f,i;T)=\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\left(\cos\Omega_1T-i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\sin\Omega_1T\right)e^{-i\eta_1T}. \tag{4.35}$$

Avec

$$\eta_1=\chi\left(k^2+3k+2\right)+k\omega_c-\frac{1}{2}\omega_c-\frac{1}{2}\chi(2k+3)+\frac{1}{2}\chi, \tag{4.36}$$

et

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4}+\varpi_{01}^2}. \tag{4.37}$$

Un calcul similaire nous permet alors d'obtenir les autres éléments de (4.20). Il sont les suivantes :

$$K_{12}(f,i;T)=-i\lambda\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$
$$\times Z_f^*\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}, \tag{4.38}$$

$$K_{21}(f,i;T)=-i\lambda\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$
$$\times Z_i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}, \tag{4.39}$$

$$K_{22}(f,i;T)=\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\left(\cos\Omega_2T+i\frac{\Delta_2}{2\Omega_2}\sin\Omega_2T\right)e^{-i\eta_2T} \tag{4.40}$$

avec

$$\eta_2=\chi(k^2+3k+2)+k\omega_c+\frac{1}{2}\omega_c+\frac{1}{2}\omega_c+\frac{1}{2}\chi(2k+3)-\frac{1}{2}\chi, \tag{4.41}$$

où

$$\Delta_2=-\omega_a+\omega_c-2\chi(k+1), \tag{4.42}$$

et

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{\Delta_2^2}{4}+\varpi_{10}^2}. \tag{4.43}$$

Le propagateur (4.20) relatif au cas particulier est finalement :

$$K\left(Z_f,\Omega_f,Z_i,\Omega_i;T\right)=\exp\left(-\frac{\left|Z_f\right|^2+\left|Z_i\right|^2}{2}\right)\times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\left[\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos\Omega_1T-i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\sin\Omega_1T\right)e^{-i\eta_1T}\right.\right.$$
$$+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos\Omega_2T+i\frac{\Delta_2}{2\Omega_2}\sin\Omega_2T\right)e^{-i\eta_2T}$$
$$-i\lambda\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}Z_f^*\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}$$
$$\left.\left.-i\lambda\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}Z_i\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}\right]\right\}. \tag{4.44}$$

Notre probléme est ainsi résolu.
Nous pouvons alors determiner les énergies ainsi que les fonctions d'onde correspondes

4.4 Les fonctions d'onde et les énergies

Pour cela, passons à la représentation habituelle pour le spin avec les projections sur l'axe oz étant m_f et m_i.

$$K_s\left(Z_f,m_f,Z_i,m_i;T\right)=\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i$$
$$<m_f\left|\Omega_f\right\rangle K\left(Z_f,\Omega_f;Z_f,\Omega_i;T\right)\left\langle\Omega_i\right|m_i>. \tag{4.45}$$

Avec

$$<m_f\left|\theta_f,\varphi_f\right\rangle=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_f)!\,(s-m_f)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_f}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_f}e^{-im_f\varphi_f}, \tag{4.46}$$

et

$$\left\langle\theta_i,\varphi_i\right|m_i>=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!\,(s-m_i)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_i}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_i}e^{+im_i\varphi_i}, \tag{4.47}$$

Si l'on fixe l'état initial de l'atome d'être$|m_i>=|\downarrow>$, et l'état final d'être $|m_f>=|\uparrow>$,on obtient,

$$<\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle=\cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f},\qquad\text{et}\qquad\left\langle\Omega_i\right|\uparrow>=\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\ , \tag{4.48}$$

Après intégration sur les coordonnées polaires, on obtient par exemple

$$K_{\uparrow\uparrow}\left(Z_f,Z_i;T\right)=e^{-\frac{\left|z_f\right|^2+\left|z_i\right|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^*Z_i\right)^k}{k!}\left(\cos\Omega_1T-i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\sin\Omega_1T\right)e^{-i\eta_1T}. \tag{4.49}$$

Avec les calcules similaire pour les autres éléments, le propagateur est donné par :

$$K_{\uparrow\downarrow}(Z_f, Z_i; T) = -i\lambda Z_f^* e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} \frac{\sin \Omega_1 T}{\Omega_1} e^{-i\eta_1 T}, \tag{4.50}$$

$$K_{\downarrow\uparrow}(Z_f, Z_i; T) = -i\lambda Z_i e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} \frac{\sin \Omega_1 T}{\Omega_1} e^{-i\eta_1 T}, \tag{4.51}$$

$$K_{\downarrow\downarrow}(Z_f, Z_i; T) = e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} \left(\cos \Omega_2 T + i\frac{\Delta_2}{2\Omega_2} \sin \Omega_2 T\right) e^{-i\eta_2 T}, \tag{4.52}$$

où nous avons noté l'amplitude de transition $K(Z_f, \uparrow, Z_i, \uparrow; T)$par $K_{\uparrow\uparrow}(Z_f, Z_i; T)$.

Afin d'extraire les fonctions d'onde ainsi que le spectre d'énergie, il est plus approprié de passer à la base$|l >$ où l est le nombre d'occupation. La relation avec $|Z >$ est :

$$|Z\rangle = \exp\left(-\frac{|Z|^2}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Z^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle, \tag{4.53}$$

L'operateur d'evolution

$$e^{-i\widehat{H}_{eff}T} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\uparrow\uparrow} & \Lambda_{\uparrow\downarrow} \\ \Lambda_{\downarrow\uparrow} & \Lambda_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

est une (2x2) de type matriciel. Sa relation avec $K(Z_f, Z_i; T)$ est

$$e^{-i\widehat{H}_{eff}T} = \int \frac{d^2 Z_f}{\pi} \frac{d^2 Z_i}{\pi} |Z_f\rangle K(Z_f; Z_i; T) \langle Z_i|. \tag{4.55}$$

Après l'intégration, les éléments de matrice (opérateur) d'évolution par rapport à notre problème, sont les suivants :

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \int \frac{d^2 Z_f}{\pi} \frac{d^2 Z_i}{\pi} |Z_f\rangle K_{\uparrow\uparrow} \langle Z_i|. \tag{4.56}$$

En substituant l'éxpression de $K_{\uparrow\uparrow}$ (4.49) et $|Z\rangle$ (4.53) dans (4.56) on trouve

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \int \frac{d^2 Z_f}{\pi} \frac{d^2 Z_i}{\pi} \exp\left[-\frac{|Z_f|^2}{2}\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Z_f^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \exp\left[-\frac{|Z_f|^2 + |Z_i|^2}{2}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{Z_f^* Z_i}{k!})^k$$

$$\times \left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1} \sin(\Omega_1 T)\right] e^{-i\eta_1 T} \exp\left[-\frac{|Z_i|^2}{2}\right] \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{Z_f^{*l'}}{\sqrt{l'!}} \langle l'|, \tag{4.57}$$

par integration sur Z en utilisant la relation (4.25) et aprés un calcule simple l'éxpression (4.57) devient

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\eta_k T} \left(\cos \Omega_1 T - i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1} \sin \Omega_1 T\right) |k\rangle \langle k|. \tag{4.58}$$

Avec les calcules similaire pour les autres éléments

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow} = -i\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{(k+1)} e^{-i\eta_k T} \frac{\sin \Omega_1 T}{\Omega_1} |k+1\rangle \langle k| \, , , \tag{4.59}$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow} = -i\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}} e^{-i\eta_k T} \frac{\sin \Omega_1 T}{\Omega_1} |k\rangle \langle k+1| \, , \tag{4.60}$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\eta_k T} \left(\cos \Omega_1 T + i \frac{\Delta_1}{2\Omega_1} \sin \Omega_1 T \right) |k+1\rangle \langle k+1| \, . \tag{4.61}$$

Nous pouvons alors voir après cette décomposition, que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes sont respectivement :

$$E_k^{\pm} = \eta_1 \mp \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} + \varpi_{10}^2}, \tag{4.62}$$

$$|E_k^+\rangle = \frac{1}{R(k)} \left[\frac{\Delta_1}{2} [1 + r(k)] \, |k, +\rangle + \lambda \sqrt{\frac{k+1}{k}} \, |k+1, -\rangle \right], \tag{4.63}$$

$$|E_k^-\rangle = \frac{1}{R(k)} \left[-\frac{\Delta_1}{2} [1 + r(k)] \, |k+1, -\rangle + \lambda \sqrt{\frac{k+1}{k}} \, |k, +\rangle \right], \tag{4.64}$$

avec

$$r(k) = \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2}{\Delta_1^2} \frac{k+1}{k}} \quad , \quad R(k) = \frac{\Delta_1}{2.} \sqrt{2r(k) \, [1 + r(k)]}, \tag{4.65}$$

et

$$|k, +\rangle = \begin{pmatrix} |k\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |k+1, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |k+1\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

4.5 L'inversion de population atomique

Enfin, nous pouvons déterminer la probabilité de trouver l'atome dans l'état R qui est définie par le module de l'amplitude de transition.

$$P_{RS}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2 Z_f \, |K_{RS}(Z_f; Z_i; T)|^2 \, . \tag{4.67}$$

En supposant par exemple que à $T = 0$, l'atome est dans son état fondamental $S = |\downarrow>$ et à $t = T$ dans les Etats $R = |\uparrow>$, l'inversion de population atomique est donc une différence de deux probabilités :

$$W_1(T) = [P \downarrow\uparrow - P \downarrow\downarrow] \, , \tag{4.68}$$

$$p_{\downarrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi} \int d^2 Z_f \, |K_{\downarrow\uparrow}(Z_f; Z_i; T)|^2 \tag{4.69}$$

$$p_{\downarrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi}\int d^2Z_f \exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_f^*Z_i}{k!})^k(-i\lambda Z_i\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1T)e^{-i\eta_1T})$$

$$\times(i\lambda Z_i^*\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1T)e^{+i\eta_1T})\exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_i^*Z_f}{k!})^k$$

$$p_{\downarrow\uparrow}(T) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{|Z_i|^{2k+2}}{k!})\exp\left[-|Z_i|^2\right]\lambda^2\frac{\sin^2(\Omega_1T)}{\Omega_1^2} \tag{4.70}$$

en remplace k par $k+1$ et donne :

$$p_{\downarrow\uparrow}(T) = \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k\times|Z_i|^{2k}}{k!})\exp\left[-|Z_i|^2\right]\frac{\sin^2(\Omega_2T)}{\Omega_2^2} \tag{4.71}$$

$$p_{\downarrow\downarrow}(T) = \frac{1}{\pi}\int d^2Z_f\left|K_{\downarrow\downarrow}(Z_f;Z_i;T)\right|^2$$

$$p_{\downarrow\downarrow}(T) = \frac{1}{\pi}\int d^2Z_f \exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_f^*Z_i}{k!})^k$$

$$\times(\cos(\Omega_2T)+\frac{i\Delta_2}{2\Omega_2}\sin(\Omega_2T))e^{-i\eta_2T}\exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_i^*Z_f}{k!})^k$$

$$\times(\cos(\Omega_2T)-\frac{i\Delta_2}{2\Omega_2}\sin(\Omega_2T))e^{+i\eta_2T}$$

$$p_{\downarrow\downarrow}(T) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{|Z_i|^{2k}}{k!})\exp\left[-|Z_i|^2\right]((\cos^2(\Omega_2T)+\frac{\Delta_2^2}{2\Omega_2^2}\sin^2(\Omega_2T)) \tag{4.72}$$

$$W_1(T) = [P\downarrow\uparrow - P\downarrow\downarrow]$$

donc on a :

$$W_1(T) = -e^{-|Z_i|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|Z_i|^{2k}}{k!}\left(\cos 2\Omega_2T+\frac{\Delta_2^2}{2\Omega_2^2}\sin^2\Omega_2T\right). \tag{4.73}$$

Au contraire, lorsque l'atome est dans un état excité $|\uparrow>$ pour l'état initial S et à $t=T$, pour l'état final $R=|\downarrow>$, l'inversion de population atomique est donné par :

$$W_2(T) = [P_{\uparrow\uparrow} - P\uparrow\downarrow] \tag{4.74}$$

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi}\int d^2Z_f\left|K_{\uparrow\uparrow}(Z_f;Z_i;T)\right|^2 \tag{4.75}$$

$$P_{\uparrow\uparrow}(T) = \frac{1}{\pi}\int d^2Z_f \exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_f^*Z_i}{k!})^k(\cos(\Omega_1T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1T))e^{-i\eta_1T}$$

$$\times \exp\left[-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_i^* Z_f}{k!})^k(\cos(\Omega_1 T)+\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T))e^{+i\eta_1 T}$$

$$P_{\uparrow\uparrow}(T)=e^{-|Z_i|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|Z_i|^{2k}}{k!}(\cos(\Omega_1 T)+\frac{\Delta_1^2}{4\Omega_1^2}\sin^2(\Omega_1 T)) \tag{4.76}$$

$$P\uparrow\downarrow(T)=\frac{1}{\pi}\int d^2 Z_f\,|K_{\uparrow\downarrow}(Z_f;Z_i;T)|^2$$

$$P\uparrow\downarrow(T)=e^{-|Z_i|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|Z_i|^{2k}}{k!}(k+1)\lambda^2\frac{\sin^2(\Omega_1 T)}{\Omega_1^2} \tag{4.77}$$

$W_2(T)$ prend la forme suivante :

$$W_2(T)=e^{-|Z_i|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|Z_i|^{2k}}{k!}\left(\cos 2\Omega_1 T+\frac{\Delta_1^2}{2\Omega_1^2}\sin^2\Omega_1 T\right). \tag{4.78}$$

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons montré l'éfficacité et la simplicité avec lesquelles l'approche integrale de chemins traite des problèmes de mécanique quantique non-relativiste et de l'optique quantique tel un atome à deux niveaux en intéraction avec une onde électromagnétique classique de polarisation circulaire et le modèle de Jaynes Cummings avec une cavité non linéaire de Kerr.

Les matrices de Pauli $\overrightarrow{\sigma}$ représentants les deux niveaux de l'atome ont été remplacées par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ orienté suivant les.angels polaires (θ, φ) et le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs aux spin, nous avont pu élaboré un formalisme intégrale de chemin en représentation états cohérents du spin.

Le calcule est basé sur l'amplitude de transition qui a été exprimée d'abord sous la forme standard $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, telle que formulée par Feynman, ou $S = \int Ldt$ est l'action décrivant les mouvements extérieurs (centre de masse) et intérieur de l'atome.

Le problème essentiel renctonré dans cette thèse à travers les trois exemples traités est le calcul d'integrale. Il est parfois plus commode de travailler dans l'espace des phase ce qui permet de simplifier les calculs via certaines transformations.

Dans les chapitres 2 et 3 et par le biais d'une première rotation sur l'angle azimutal nous avons pus intégrer sur les varaibles extériure (z, p). De ce fait, l'expression explicite et exacte de l'amplitude de transition a été obtenue suivant la méthode des perturbations sous forme de série, qui dans ces cas, ont put être sommées exactement.

Les fonctions d'onde et le spectre correspondants ont été déduits en appliquant les principes de la mécanique quantique. Les différentes probabilités de transition ont été calculées et quelques resultats physiques interpretés. Les résultats concordent exactement avec ceux de la littérature [9].

Dans le chapitre 4, nous avons étudié par le formalisme des intégrales de chemins, le modèle de Jaynes Cummings avec une cavité non linéaire de Kerr. La représentation des états $|\theta, \varphi\rangle$ qui utilise les angles et les états cohérents $|Z\rangle$ pour décrire le champs quantifieé a été utilisé.

Pour la determination du propagateur, nous avons utilisé la méthode de perturbation et donné le propagateur sous forme de séries. Ces séries on pu être sommés exactement dans ce cas.

Ce qui nous a permet d'obtenir les fonctions d'onde et le spectre correspondants ainsi que l'inversion atomique de population relatif au modèle .

En franchissant ce cap important de la compréhension des mouvements d'un atome à deux niveaux, nous visons l'explication de nombreux phénomènes physique où le spin joue un rôle essentiel.

En conclusion nous pouvons affirmer qu'à travèrs cette étude, malgré quelques difficultés, que l'intégrale de chemins put être un outil de travail trés puissant et élégant une fois maitrisé et par lequel on pourrait franchir les domaines de la physique les plus ardus.

Bibliographie

[1] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path integrals, (McGraw-Hill, New York 1965).

[2] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum mechanics, Statistics and polymer Physics (Word Scientific, Singapor, 1990).

[3] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, (Springer-Verlag Berlin 1998).

[4] J. Schwinger, Quantum Theory of angular Momentum,edited by L.Biedenharn and H.von Dam (Academic Press, New York, 1965).

[5] Coherent states, edited by J. R. Klauder and B. Skagerstam(Word Scientific, Singapore, 1985).

[6] T. Boudjedaa, A..Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann, J. Math.Phys.36,1602 (1995).
Kh. Nouicer, L. Chetouani, Phys. Lett. A 281, 218 (2001).
Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Phys. Scrip. 64, 19 (2001).
Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 51, 865 (2001).

[7] A. Alscher, H. Grabert, J. Phys. A. 32, 4907 (1999).

[8] M. Aouachria, Sciences et Technologie-N018, 19 (2002).

[9] Gao-Jian, Shi-Lun Zhou, Sheng-Mei Ao, Zhao-Yang Zeng, Phys. Rev. A 55, 2945 (1997).

[10] M. Aouachria, L. Chetouani, Chinese. J. Phys. 40, 496 (2002). M. Aouachria, Chinese. J. Phys at press (2011).

[11] Z. Y. Zeng, G. J. Zeng, L. M. Kuang, L. D. Zhang, Phys. Lett. A 261, 316 (1999).

[12] V. Buzek and I. Jex, Opt. Commun. 78, 425 (1990). A. Joshi, S. V. Lawande, Phys. Rev. A 48**,** 2276 (1993). A. Joshi, R. R. Puri, Phys. Rev. A **45**, 5056 (1992).

[13] F. Steiner. DESY Preprint, DESY 87-146, October (1987).

[14] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986), A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. 26, 22 (1972).

[15] J. Klauder, Ann. Phys. (NY)11, 123 (1960).

[16] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).

[17] J. R. Klauder, Phys. Rev. D 19, 2349 (1979).

[18] A. Inomata, H. Kuratsuji, C.C. Gerry Path Integrals Methodes and their Applications (Word Scientific, Singapore, 1992).

[19] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).

[20] M. Aouachria, L. Chetouani, Can. J. Phys. 87, 389 (2009).

[21] T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani, T. F. Hammann, Phys. Scr. **54**, 225 (1996).

ملخص

في هذه الرسالة ثلاث مسائل تخص التفاعلات ذات الصنف سبين-حقل تم علاجها في إطار نظرية التكامل على المسالك لـ Feynman.

يتعلق الأمر بذرة ذات مستويين من الطاقة في حالة حركة و الخاضعة لـ

1. **فعل موجة كهرومغناطيسية كلاسيكية مستقطبة دائرا.**
2. **فعل موجة كهرومغناطيسية كلاسيكية مستقطبة دائرا و الاضمحلال.**

وفي الأخير حالة أخرى كوانتية صرفة و يتعلق الأمر بنموذج Jaynes Cummings بأخذ بعين الاعتبار و جود فعل Kerr المرتبط بالفجوة .

الحساب يعتمدا أساسا على سعة الانتقال التي قمنا بكتابة عبارتها أولا على الشكل النظامي $\int D(path)\exp(i/\hbar)S(path)$ حيث $S(path)$ **الفعل الذي يصف الحركة الخارجية (مركز الثقل) والداخلية للذرة.**

لدراسة هذه الحالات قمنا بتعويض الشعاع $\vec{\sigma}$ **الموافق للف الذاتي بشعاع وحدة** $\vec{n}$ **اتجاهه معرف بالزوايا** (θ,φ) **ووصف الحقل المكمم بالحالة المتلاحمة** $|Z\rangle$**.**

باستعمال طريقة نظرية الاضطرابات في تقريب التكامل على المسالك قمنا بحساب المنتشرات على شكل سلاسل من الحدود هذه السلاسل في هذه الحالات تمكننا من جمعها بدقة.

الخصائص الفيزيائية مثل الدوال الموجية ومستويات الطاقة وكذالك قلب السكانية حسبت بدقة في جميع المسائل المعتبرة.

نتائجنا هي أيضا في اتفاق جيد مع تلك التي تعطى من قبل مؤلفين آخرين من خلال حل المعادلة Schrödinger

الكلمات المفتاحية النكاملات على المسالك – الحالات المتلاحمة – الدوال الموجية –قلب السكانية.

Abstract

The aim of this work is devoted to the wave functions. This fact, there are several methods to obtain these functions, such as: algebraic methods, the Schrodinger equation, the path integral.

In our study, we are interested in path integral method. the principle of this method is based on the propagator is expressed as a series, to solve it, we will use the Laplace transformation and the theory of convolution and after we derive the energy spectrum with the functions of waves and the corresponding population inversion.

Résumé

Le but de ce travail est consacré aux fonctions d'ondes. A cette effet, il ya plusieurs méthode pour obtenir ces fonctions, telle que: la méthode Algébrique, l'équation de Schrödinger; les intégrales de chemins.

Dans notre étude, on s'intéresse à la méthode des intégrales de chemins. le principe de cette méthode est basé sur le propagateur qui s'exprime sous forme de séries, pour résoudre ce dernier, on va utilisé la transformation de la place et la théorie de convolution et après nous déduisons le spectre d'énergie avec les fonctions d'ondes correspondante et l'inversion de population.