

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Batna  
Faculté des Sciences  
Département de Physique

## THÈSE

Présentée par

ZERGUINE Salima

En vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

**Spécialité** : Physique Théorique

**Option** : Physique Nucléaire

Thème

**Approches algébriques  $sdg$ -IBM et  $sdg$ -IBFM et applications en spectroscopie nucléaire**

Soutenue le 28/04/2009  
Devant la Commission d'Examen

Président      Mr. S. Tobbeche, Maître de conférences, Université de Batna  
Rapporteurs   Mr. A. Bouldjedri, Professeur, Université de Batna  
                    Mr. P. Van Isacker, Chercheur CEA, GANIL Caen, France  
Examineurs   Mme F. Benrachi, Professeur, Université de Constantine  
                    Mr. N. Mebarki, Professeur, Université de Constantine  
                    Mr. K. Bencheikh, Professeur, Université de Sétif



# Remerciements

*Je* me dois tout d'abord de remercier le Ministère Algérien de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique d'avoir financé mon séjour au GANIL (Grand Accélérateur National d'Ions Lourds). Je voudrais également remercier la direction du GANIL de m'avoir accueillie au sein du laboratoire et veiller à ce que ma thèse se soit déroulée dans les meilleures conditions.

*J'*exprime ma profonde gratitude à Mr S. Tobbeche d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. J'adresse mes plus vifs remerciements à Mme F. Benrachi, Mr N. Mebarki et Mr K. Bencheikh pour l'intérêt que chacun a porté à mon travail et d'avoir accepté d'en être les examinateurs.

*Je* tiens à remercier Mr Bouldjedri de m'avoir mise sur la voie des méthodes algébriques. Je le remercie en particulier pour sa confiance et la grande liberté qu'il m'a accordée.

*Un* immense merci à Mr P. Van Isacker, mon directeur de thèse en France, pour sa grande compétence, sa disponibilité et sa gentillesse. J'ai énormément apprécié ses qualités de rigueur et d'honnêteté scientifiques. Je lui suis reconnaissante pour toutes les connaissances qu'il m'a transmises et j'espère pouvoir continuer à collaborer avec lui dans le futur.

*Les* mois passés au GANIL m'ont offert la chance de rencontrer beaucoup de personnes qui ont fait de mon séjour aussi serein qu'agréable.

*Je* remercie chaleureusement Gérard, Marek et Gilles. Les nombreuses discussions autour des repas de midi ont fait de ces moments autant de détente que d'échange.

*Je* tiens à remercier Navin ainsi que tous les thésards et post-docs du GANIL pour les '*Navinades*' qui m'ont beaucoup apporté.

*Je* voudrais remercier tous les services du GANIL qui ont aidé de près ou de loin à la réussite de mon travail. Mes premières pensées vont ainsi à M. Lion du Service de Documentation et N. Ménard du Service Informatique.

*Un* merci particulier à mon amie Carole pour tous ces moments agréables. Je te souhaite beaucoup de chance et une très bonne continuation.

*Je* voudrais avoir une pensée pour mes collègues de bureau Mirshod, Emmanuel et Praveen pour les discussions enrichissantes dans différents axes de physique nucléaire.

*J'*aimerais tout particulièrement remercier mes chères amies Zohra, Dounia, Ibtissem, Dinare, Naïma et Fatiha pour leur soutien et encouragement. Je Vous remercie d'être toujours si proches de moi même à des milliers de kilomètres.

*Un* très grand merci à mes sœurs Radia et Mimi et mes frères Tayeb et Mohammed pour leur amour, présence et encouragements.

*A mes très chers parents.*



*“There are two ways of spreading light :  
to be the candle or the mirror that re-  
flects it...The essence of taste is suitability.  
Divest the world of its prim and priggish  
implications, and see how it expresses the  
mysterious demand of the eye and mind for  
symmetry, harmony and order.”*

*-Edith Wharton-*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Le modèle des bosons en interaction</b>	<b>7</b>
1.1 Principe . . . . .	7
1.2 Algèbre $U(6)$ en IBM . . . . .	8
1.3 Sous-algèbres de $U(6)$ . . . . .	11
1.4 Classification des représentations de $U(6)$ . . . . .	13
1.5 Hamiltonien . . . . .	17
1.6 Symétries dynamiques . . . . .	20
1.6.1 Symétrie dynamique $U(5)$ : Limite vibrationnelle . . . . .	21
1.6.2 Symétrie dynamique $SU(3)$ : Limite rotationnelle . . . . .	22
1.6.3 Symétrie dynamique $O(6)$ : noyaux $\gamma$ -instables . . . . .	24
1.7 Aspect géométrique du modèle des bosons en interaction . . . . .	25
1.8 Fondement microscopique du modèle IBM . . . . .	28
<b>2 Modèle <i>sdg</i> des bosons en interaction</b>	<b>31</b>
2.1 Algèbre $U(15)$ . . . . .	32
2.1.1 Limites de couplage faible . . . . .	34
2.1.2 Limites de couplage fort . . . . .	35
2.2 Classification des représentations de $U(15)$ . . . . .	38
2.2.1 Limites de couplage faible . . . . .	39
2.2.2 Limites de couplage fort . . . . .	42
2.3 Hamiltonien . . . . .	46
2.3.1 Symétries dynamiques . . . . .	48
2.4 Transitions électromagnétiques en <i>sdg</i> -IBM . . . . .	55
2.4.1 Transitions $E2$ et $E4$ . . . . .	55
2.4.2 Transitions monopolaires électriques $E0$ . . . . .	58
2.5 Mélange de configurations en <i>sdg</i> -IBM . . . . .	60
2.5.1 Limite $SU(3)$ . . . . .	61
2.5.2 Limite $SU(5)$ . . . . .	63

2.5.3	Limite $O(15)$ . . . . .	64
2.5.4	Limite $SU(6)$ . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Hamiltonien et spectres d'énergie . . . . .	70
3.3	Transitions monopolaires électriques . . . . .	76
3.3.1	Systématique des transitions $E0$ dans les noyaux atomiques . . . . .	77
3.4	Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires . . . . .	80
3.4.1	Interprétation physique des paramètres $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	83
3.4.2	Application dans la région des terres rares . . . . .	85
3.5	Effet du boson $g$ sur les transitions $E0$ . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Limite classique du modèle <math>sdg</math>-IBM</b>	<b>97</b>
4.1	Paramétrisation des états cohérents en $sdg$ -IBM . . . . .	97
4.2	Limite classique du hamiltonien $sdg$ -IBM général . . . . .	100
4.3	Formes géométriques associées aux symétries dynamiques du $sdg$ -IBM	104
4.3.1	Limite $SU(3)$ . . . . .	104
4.3.2	Limite $SU(5)$ . . . . .	105
4.3.3	Limite $O(15)$ . . . . .	106
4.3.4	Limite $SU(6)$ . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Modèle <math>sdg</math>- des bosons en interaction couplé à un fermion</b>	<b>111</b>
5.1	Principe du modèle . . . . .	111
5.2	Algèbre $U^B(15) \otimes U^F(n)$ . . . . .	112
5.3	Classes de symétries dynamiques en IBFM . . . . .	113
5.4	Hamiltonien . . . . .	115
5.5	Symétries dynamiques en $sdg$ -IBFM . . . . .	116
5.5.1	Symétries associées à la limite $O^{BF}(15)$ . . . . .	117
5.5.2	Symétries associées à la limite $SU^{BF}(5)$ . . . . .	125
5.5.3	Symétries associées à la limite $SU^{BF}(3)$ . . . . .	135
5.5.4	Symétries associées à $SU^{BF}(6)$ . . . . .	141
	<b>Conclusion</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>



# Introduction

La résolution du problème nucléaire est rendue très complexe par le grand nombre de protons et de neutrons dont l'interaction est forte et de courte portée. C'est ainsi que l'étude de la structure des noyaux atomiques a constamment suscité le développement de modèles théoriques. En effet, ces approximations qui, par ailleurs, tirent profit des régularités pouvant caractériser les noyaux à basse énergie d'excitation, visent toutes à mieux décrire, comprendre et interpréter les résultats fournis par les mesures expérimentales ne cessant de s'amplifier en raison du développement de l'instrumentation nucléaire (détecteurs, accélérateurs et outils informatiques).

Le modèle 'macroscopique' de Bohr et Mottelson [1] a pu mettre en évidence le comportement collectif des nucléons à l'intérieur du noyau et a constitué un véritable tremplin vers la description des excitations nucléaires collectives. Parallèlement, le modèle en couches, en tant qu'approche 'microscopique' [2], porte l'accent sur le comportement individuel des nucléons mouvant dans un potentiel central moyen. Le succès de ce modèle s'étale sur une large catégorie de noyaux en particulier les noyaux légers ou ceux dont le nombre de nucléons actifs n'est pas appréciable. Le nombre de ces nucléons augmentant, la diagonalisation du hamiltonien du modèle devient très difficile voire impossible en raison de l'augmentation rapide de sa dimension. On peut dès lors concevoir que ces modèles, bien qu'ils soient différents dans leurs hypothèses et méthodologies, restent complémentaires dans la mesure où ils touchent à deux aspects différents de la structure nucléaire.

Une autre catégorie d'approches fondée par Elliott depuis le début des années 1950 [3] est connue sous le nom de méthodes algébriques. Ces approches qui puisent du pouvoir de la théorie des groupes (d'où l'appellation 'algébriques') ont été tout d'abord appliquées à quelques noyaux légers. Cependant, leur champ d'application en structure nucléaire s'est trouvé vite étendu dès la proposition du Modèle des Bosons en Interaction (Interacting Boson Model) par Arima et Iachello au milieu des années 1970 [4]. Ce modèle, noté IBM (où IBA pour 'Interacting Boson Approximation') est basé sur le concept de symétries dans la mesure où toutes les propriétés

du noyau sont étudiées en tenant compte des différentes symétries du système. Mise à part sa nature collective, ce modèle a été en outre étendu pour considérer explicitement les degrés de liberté fermioniques à travers les versions IBFM et IBFFM qui cherchent à décrire les propriétés des noyaux impair-pairs et impair-impairs respectivement.

Le modèle des bosons en interaction a été tout d'abord dévolu à l'étude des propriétés structurales des noyaux pair-pairs en termes de paires collectives de nucléons qu'on a baptisé bosons. Ainsi, la déformation quadripolaire de la surface nucléaire a été étudiée en introduisant deux types de bosons, monopolaire noté boson  $s$  et quadripolaire appelé boson  $d$ . Une caractéristique fort intéressante de cette approximation réside dans l'existence, dans des situations particulières, de solutions analytiques au problème des vecteurs et des valeurs propres.

En dépit de son succès à décrire et interpréter, dans une large mesure, les phénomènes nucléaires de caractère collectif, Feshbach a évoqué la question concernant la capacité du modèle à considérer, entre autres degrés de liberté, le degré de liberté hexadécapolaire [5, 6]. En effet, la structure de certains spectres d'énergie, en particulier l'observation à basse énergie d'excitation de bandes rotationnelles ne pouvant être interprétées dans le contexte de la version originale du modèle des bosons en interaction, a suscité l'introduction d'un troisième type de bosons de type hexadécapolaire noté boson  $g$ . Le modèle ainsi construit est noté  $sdg$ -IBM.

Ce travail de thèse s'intègre dans le cadre de cette dernière approximation et se structure comme suit. Nous commençons dans un premier temps par présenter une revue des différentes notions liées au modèle des bosons en interaction dans sa version la plus simple. Nous donnons ainsi sa réalisation algébrique, ses différentes symétries dynamiques ainsi que quelques exemples d'application de chacune d'entre elles en spectroscopie nucléaire. Nous parlons également brièvement des deux aspects géométrique et microscopique du modèle. Le second chapitre est consacré au développement du modèle  $sdg$ -IBM. Une démarche similaire à celle suivie dans le premier chapitre en ce qui concerne la présentation des différentes limites du modèle sera adoptée. La dérivation analytique des expressions donnant les éléments de matrice réduits de l'opérateur de transitions monopolaires sera également développée. Un accent particulier sera ainsi porté sur les noyaux sphériques et axialement déformés. Ces calculs trouveront leur application dans le troisième chapitre. Nous mènerons également au cours du chapitre 2 une analyse des fonctions d'onde correspondant au modèle  $sdg$ -IBM. Cette étude aura pour objectif de déterminer le mélange de configurations bosoniques aux différentes limites de couplage fort du

modèle et de mettre en évidence la contribution de chacun des bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  aux états nucléaires. Le troisième chapitre porte sur l'établissement d'une relation cohérente entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires. Cette étude, tout d'abord menée dans le cadre du modèle  $sd$ -IBM, est par la suite étendue pour mettre en évidence l'effet du boson  $g$  sur cette corrélation. Le quatrième chapitre traite de l'aspect géométrique du modèle  $sdg$ -IBM dans l'esprit de la limite classique de ce modèle. Finalement, nous développons le modèle  $sdg$ -IBM couplé à un fermion. Précisément, ce dernier chapitre sera destiné à la construction algébrique du modèle en développant ses différentes symétries dynamiques.



# Chapitre 1

## Le modèle des bosons en interaction

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter une revue du modèle des bosons en interaction dans sa formulation originale tout en portant un accent particulier sur son aspect algébrique.

### 1.1 Principe

Dans le modèle des bosons en interaction (IBM) [4, 7], seuls les nucléons de valence sont considérés responsables des excitations collectives dans le noyau. Ces nucléons sont traités en tant que paires appelées bosons. Dans sa formulation la plus simple consacrée essentiellement à décrire les propriétés collectives des noyaux pair-pairs et notée IBM-1, le modèle ne voit pas la nature de ces paires et traite les protons et les neutrons comme étant des particules identiques. De plus, les bosons ne peuvent occuper que des états de moments angulaires  $J = 0$  (boson  $s$ ) et  $J = 2$  (boson  $d$ ), ce dernier possède cinq sous-états possibles avec  $J_z = 0, \pm 1, \pm 2$ . Ainsi, les bosons  $s$  et  $d$  engendrent l'espace six-dimensionnel du modèle IBM-1 et forment les constituants de base du groupe de Lie de transformations unitaires  $U(6)$ .

L'introduction de ces deux types de bosons est doublement justifiée. D'abord, elle est liée à l'importance de l'interaction d'appariement entre deux nucléons identiques. Si l'on considère deux particules identiques occupant le même état  $j$  de configuration  $|j^2J\rangle$  et interagissant via une interaction résiduelle de courte portée, l'état fondamental correspondant est  $J^\pi = 0^+$  et le premier état excité est  $J^\pi = 2^+$ , ceci conformément aux calculs établis par le modèle en couches [8] et les modèles d'appariement [9, 10]. D'autre part, le fondement microscopique du modèle IBM est basé sur une troncature de l'espace de valence total du modèle en couches au sous-espace  $S - D$  construit à partir de corrélations des nucléons de valence en paires de moment angulaire  $J = 0$  (paire  $S$ ) ou  $J = 2$  (paire  $D$ ) [11].

Par ailleurs, Greiner et ses collaborateurs ont proposé, dans le cadre du modèle

géométrique [1], une approche dans laquelle le hamiltonien s'exprime sous forme d'un polynôme en fonction des variables collectives quadripolaires  $\alpha_{2\mu}$  (dont la variation implique un changement de la surface nucléaire comme va être expliqué plus loin) ainsi que leurs moments conjugués [12]. Ils ont montré que les fonctions d'ondes associées à un oscillateur harmonique en cinq dimensions constituent une base complète dans laquelle ce hamiltonien peut être diagonalisé. Cependant, bien que le nombre de phonons dans cette base (qui est essentiellement une base à phonons) peut varier de zéro à l'infini, il a été prouvé qu'une troncature à un nombre maximum  $N$  de ceux-ci constitue une bonne approximation. En outre, du fait que les phonons satisfont les mêmes relations de commutation que les bosons, les états qui leurs sont associés peuvent être considérés comme étant des états à  $N$ -bosons chacun a un moment angulaire  $J = 2$  (boson  $d$ ). Mais, compte tenu de la troncature qui implique une conservation du nombre total de bosons, il était nécessaire d'introduire, en plus des bosons  $d$ , un autre type de bosons de moment angulaire  $J = 0$  (boson  $s$ ).

## 1.2 Algèbre U(6) en IBM

Le formalisme approprié au modèle des bosons en interaction est celui de la deuxième quantification. L'algèbre  $u(6)$  est construite à partir des opérateurs bosoniques de création  $s^\dagger$ ,  $d_\mu^\dagger$  et d'annihilation  $s$  et  $d_\mu$ . Nous introduisons les opérateurs  $b_{lm}^\dagger$  et  $b_{lm}$  pour désigner les paires  $(s^\dagger, d_\mu^\dagger)$  et  $(s, d_\mu)$  respectivement avec  $l = 0$  ( $m = 0$ ) pour le boson  $s$  et  $l = 2$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) pour le boson  $d$ . Ces opérateurs obéissent aux relations de commutation de Bose données par

$$\begin{aligned} [b_{l,m}^\dagger, b_{l',m'}^\dagger] &= [b_{l,m}, b_{l',m'}] = 0, \\ [b_{l,m}, b_{l',m'}^\dagger] &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Les 36 générateurs de l'algèbre  $u(6)$  peuvent être exprimés en termes de produits bilinéaires des opérateurs  $b_i^\dagger$  et  $b_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) tels que

$$G_{i,j} = b_i^\dagger b_j. \quad (1.2)$$

Les générateurs (1.2) vérifient les relations de commutation

$$[G_{i,j}, G_{i',j'}] = G_{i,j'} \delta_{j,i'} - G_{i',j} \delta_{j',i}, \quad i, i', j, j' = 1, \dots, 6. \quad (1.3)$$

En examinant les propriétés tensorielles des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation nous constatons que, contrairement à  $b_{l,m}^\dagger$ , l'opérateur  $b_{l,m}$  ne se transforme pas comme un tenseur sphérique par rapport aux rotations. En effet, en prenant le conjugué hermitique de la transformation

$$\hat{R} b_{l,m}^\dagger \hat{R}^{-1} = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) b_{l,m'}^\dagger, \quad (1.4)$$

CHAPITRE 1 : Le modèle des bosons en interaction

où  $\hat{R}$  est l'opérateur associé aux transformations par rapport aux rotations,  $\mathcal{D}_{m'm}^{(l)}$  désignent les fonctions de Wigner et  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  sont les trois angles d'Euler, nous écrivons

$$\hat{R} b_{l,m} \hat{R}^{-1} = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^* b_{l,m'}. \quad (1.5)$$

En employant la propriété suivante des fonctions de Wigner

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^* = (-)^{m'-m} \mathcal{D}_{-m'-m}^{(l)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (1.6)$$

il s'en suit que

$$\hat{R} ((-)^{l+m} b_{l,-m}) \hat{R}^{-1} = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \left( (-)^{l+m'} b_{l,-m'} \right). \quad (1.7)$$

Ainsi, on peut remédier au caractère non tensoriel de l'opérateur  $b_{l,m}$  en définissant l'opérateur tensoriel sphérique

$$\tilde{b}_{l,m} = (-)^{l+m} b_{l,-m}. \quad (1.8)$$

Afin que les générateurs de l'algèbre  $u(6)$  définis par l'équation (1.2) soient également invariants par rapport aux rotations, il est plus convenable de les réécrire sous forme de produits tensoriels en fonction de  $b_{l,m}^\dagger$  et  $\tilde{b}_{l,m}$

$$G_\mu^{(\lambda)}(l, l') \equiv [b_{l,m}^\dagger \times \tilde{b}_{l',m'}]_\mu^{(\lambda)} = \sum_{mm'} \langle l m l' m' | \lambda \mu \rangle b_{l,m}^\dagger \tilde{b}_{l',m'}, \quad (1.9)$$

où  $\langle l m l' m' | \lambda \mu \rangle$  désigne le coefficient de Clebsch et Gordan,  $l, l' = 0, 2$  et  $\lambda = 0, \dots, 4$ . Les opérateurs  $b_{l,m}^\dagger$  et  $\tilde{b}_{l,m}$  sont ainsi couplés à un moment angulaire total  $\lambda$  de projection  $\mu$  sur l'axe  $z$ . Les générateurs  $G_\mu^{(\lambda)}(l, l')$  satisfont les relations de commutation

$$\begin{aligned} [G_\mu^{(\lambda)}(l, l'), G_{\mu'}^{(\lambda')}(l'', l''')] &= \sum_{\lambda'' \mu''} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda \mu \lambda' \mu' | \lambda'' \mu'' \rangle \\ &\times \left[ (-)^{\lambda''+l+l'''} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ l''' & l & l' \end{matrix} \right\} \delta_{l'l''} G_{\mu''}^{(\lambda'')}(l, l''') \right. \\ &\left. - (-)^{\lambda+\lambda'+l+l''} \left\{ \begin{matrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ l'' & l' & l \end{matrix} \right\} \delta_{l''l'''} G_{\mu''}^{(\lambda'')}(l'', l') \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

où le symbole  $\{ \dots \}$  dénote le coefficient  $6j$  de Racah [2]. En effet, sachant qu'un ensemble d'opérateurs  $\hat{X}$  vérifiant des relations de commutation de la forme

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{\kappa} C_{ij}^{\kappa} \hat{X}_{\kappa}, \quad (1.11)$$

ainsi que l'identité de Jacobi

$$[[\hat{X}_i, \hat{X}_j], \hat{X}_\kappa] + [[\hat{X}_j, \hat{X}_\kappa], \hat{X}_i] + [[\hat{X}_\kappa, \hat{X}_i], \hat{X}_j] = 0, \quad (1.12)$$

forment une algèbre de Lie avec des constantes de structure  $C_{ij}^\kappa$ , on peut vérifier que les relations de commutation (1.10) correspondent à celles de l'algèbre unitaire  $u(6)$ . Ses 36 générateurs s'écrivent explicitement en fonction de  $s^\dagger$ ,  $\tilde{s}$ ,  $d^\dagger$ ,  $\tilde{d}$

$$\begin{aligned} G_0^{(0)}(0, 0) &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)}, \\ G_0^{(0)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(0)}, \\ G_\mu^{(1)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)}, \\ G_\mu^{(2)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)}, \\ G_\mu^{(3)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(3)}, \\ G_\mu^{(4)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(4)}, \\ G_\mu^{(2)}(0, 2) &= [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)}, \\ G_\mu^{(2)}(2, 0) &= [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dorénavant, nous employerons des lettres majuscules pour désigner les groupes de transformation ainsi que les algèbres qui leurs sont associées.

La forme tensorielle (1.13) des générateurs de U(6) a l'avantage de pouvoir joindre une signification physique à la plupart d'entre eux. Les tenseurs d'ordre 0 et qui correspondent à  $l = 0$  et  $l = 2$  définissent respectivement les opérateurs nombres des bosons  $s$  et  $d$  tels que

$$\begin{aligned} G_0^{(0)}(0, 0) &= s^\dagger s = \hat{n}_s, \\ G_0^{(0)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(0)} = \sum_m \langle 2m \ 2 - m | 00 \rangle d_m^\dagger \tilde{d}_{-m} = \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{n}_d, \end{aligned} \quad (1.14)$$

ceux d'ordre 1 correspondent aux trois composantes de l'opérateur moment angulaire. À partir de la relation (1.10) nous avons

$$[G_0^{(1)}(2, 2), G_1^{(1)}(2, 2)] = \frac{1}{\sqrt{10}} G_1^{(1)}(2, 2). \quad (1.15)$$

En comparant cette dernière équation aux relations de commutation associées aux moments cinétiques

$$[\hat{L}_0, \hat{L}_\pm] = \pm \hat{L}_\pm, \quad (1.16)$$

nous obtenons

$$\hat{L}_\mu = \sqrt{10} [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)}. \quad (1.17)$$

L'opérateur nombre total défini par

$$\hat{N} = \hat{n}_s + \hat{n}_d, \quad (1.18)$$

commute avec tous les générateurs (1.13) ainsi que toute combinaison linéaire entre eux.

### 1.3 Sous-algèbres de U(6)

La recherche des différentes chaînes des sous-algèbres de U(6) part du fait que seules celles contenant le groupe de rotations en trois dimensions O(3) sont considérées. Ainsi, le nombre quantique  $L$  associé au moment angulaire figure dans toutes les représentations irréductibles de U(6). D'autre part, les générateurs appartenant à chacune de ces chaînes de sous-algèbres doivent satisfaire les relations de commutation associées à la même sous-algèbre de U(6).

Une première chaîne de sous-algèbres est obtenue en ne considérant parmi les générateurs de U(6) que ceux contenant le boson  $d$ , il s'agit des 25 générateurs  $G_\mu^{(\lambda)}(2, 2)$  avec  $\lambda = 0, \dots, 4$  dans (1.13). On peut vérifier que l'ensemble de ces générateurs satisfait les relations de commutation de l'algèbre U(5). D'autre part, les combinaisons antisymétriques des générateurs d'une algèbre unitaire U( $n$ ) vérifient les relations de commutation de l'algèbre O( $n$ ). Dans le cas de U(5), ce sont les 10 générateurs ayant  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  qui engendrent la sous-algèbre O(5). Finalement, O(3) est sous-algèbre de O(5) et est engendrée par le générateur moment angulaire donné par l'expression (1.17).

D'autres sous-algèbres de U(6) sont obtenues à partir de combinaisons linéaires des opérateurs (1.13). En considérant les 9 générateurs

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \hat{n}_s + \hat{n}_d, \\ \hat{L}_\mu &= \sqrt{10}[d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)}, \\ \hat{Q}_\mu &= [s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(2)} + \chi[d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)},\end{aligned}\tag{1.19}$$

et en utilisant les relations de commutation (1.10), nous pouvons montrer qu'ils forment les 9 générateurs associés à l'algèbre U(3). Cependant, comme l'opérateur nombre  $\hat{N}$  commute avec tous les générateurs de U(6), il peut être omis de (1.19). L'algèbre obtenue étant alors SU(3), elle possède O(3) comme sous-algèbre.

Pour fixer la valeur du coefficient  $\chi$  dans l'expression des opérateurs  $\hat{Q}_\mu$ , nous considérons le commutateur  $[\hat{Q}_\mu, \hat{Q}_{\mu'}]$  et nous faisons appel à l'équation (1.10)

$$\begin{aligned}[\hat{Q}_\mu, \hat{Q}_{\mu'}] &= \sum_{k\kappa} (1 - (-)^k) \langle 2\mu 2\mu' | 2 2 k\kappa \rangle [d^\dagger \times \tilde{d}]_\kappa^{(k)} \\ &\quad - \chi^2 \sum_{k\kappa} (1 - (-)^k) \cdot 5 \cdot \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\} \langle 2\mu 2\mu' | 2 2 k\kappa \rangle [d^\dagger \times \tilde{d}]_\kappa^{(k)}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Cette dernière équation est non nulle uniquement pour  $k = 1$  et  $k = 3$ . Cependant, seul le tenseur d'ordre 1 figure parmi les générateurs de SU(3) et correspond au générateur moment angulaire  $\hat{L}_\mu$ . Le terme associé à  $k = 3$  dans l'équation (1.20)

doit alors s'annuler nous menant à

$$1 - 5\chi^2 \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\} = 1 - 5 \cdot \chi^2 \cdot \frac{4}{35} = 0. \quad (1.21)$$

Nous obtenons alors pour le paramètre  $\chi$  les valeurs  $\chi = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

Il est important de noter ici que le groupe de symétrie SU(3) a été tout d'abord introduit par Elliott dans le cadre du modèle en couches où il a interprété le mouvement rotationnel du noyau à travers la force quadripolaire entre deux nucléons occupant une couche de l'oscillateur harmonique. Les générateurs de SU(3) de degré 2 ne sont ainsi que les cinq composantes du moment quadripolaire électrique donné par [13]

$$\hat{Q}_\mu^{(2)} = -\sqrt{\frac{2\pi}{5}} \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle 2lm | r^2 Y_{2\mu}(\theta, \phi) | 2l'm' \rangle b_{l,m}^\dagger b_{l',m'}, \quad (1.22)$$

où les états  $|2lm\rangle$  correspondent à des états simple-particule dans la couche  $sd$  de l'oscillateur harmonique. En modèle IBM-1, on choisit généralement d'exprimer le générateur  $\hat{Q}_\mu$  en considérant la valeur  $\chi = -\frac{\sqrt{7}}{2}$  qui correspond à un moment quadripolaire négatif de l'état  $2_1^+$ . Ce choix trouve sa justification dans le cadre du modèle géométrique appliqué aux noyaux déformés où la forme prolata s'avère la plus favorisée.

Une troisième chaîne de sous-algèbres de U(6) peut être obtenue simplement à partir de la réduction  $U(n) \supset O(n)$  avec  $n = 6$ . En effet, les 10 générateurs de O(5) vérifient avec les 5 générateurs  $[s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(2)}$  les relations de commutation de l'algèbre O(6), le groupe de rotations en six dimensions. Une autre sous-algèbre de U(6) ayant O(3) comme sous-algèbre est U(4). Cependant, SU(4) est isomorphe à O(6) et a été alors implicitement considérée.

On est ainsi arrivé à déterminer les trois et seules chaînes de sous-algèbres de U(6) contenant le groupe de rotation O(3)

$$U(6) \supset \begin{cases} U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2), & \text{(I)} \\ SU(3) \supset O(3) \supset O(2), & \text{(II)} \\ O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). & \text{(III)} \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans cette dernière équation, O(2) est une sous-algèbre de O(3) présentant les rotations bi-dimensionnelles autour de l'axe  $z$ . Dans le tableau 1.1, nous donnons le nombre de générateurs (ordre du groupe) correspondant à quelques algèbres de Lie auxquelles nous nous intéressons au cours de ce mémoire.

TAB. 1.1 – Nombre de générateurs associés à quelques algèbres de Lie

Algèbre	Ordre
$U(n)$	$n^2$
$SU(n)$	$n^2 - 1$
$O(n)$	$n(n - 1)/2$
$Sp(n)$	$n(n + 1)/2$

## 1.4 Classification des représentations de $U(6)$

Après avoir déterminé la structure sous-jacente de l'algèbre  $U(6)$ , nous sommes en mesure d'établir une classification de ses différentes représentations irréductibles. Cette procédure va nous servir, comme nous allons le constater plus loin, à construire une base dans laquelle le hamiltonien du modèle peut être diagonalisé. Chaque représentation irréductible (RI) est étiquetée par un ensemble de nombres quantiques entiers dont le nombre (rang de l'algèbre) est généralement déterminé en faisant appel aux tableaux de Young [14]. Nous donnons dans le tableau 1.2 le nombres de labels caractérisant les RI de quelques groupes de Lie et en particulier ceux rencontrés au cours de cette thèse. Comme on ne s'intéresse à présent qu'aux systèmes de bosons qui sont complètement symétriques, beaucoup de simplifications peuvent surgir quant aux RI associées aux chaînes (I)-(III).

TAB. 1.2 – Nombres de labels caractérisant les représentations irréductibles de quelques algèbres de Lie

Algèbre	Rang
$U(n)$	$n$
$SU(n)$	$n - 1$
$O(n)$ , $n$ pair	$n/2$
$O(n)$ , $n$ impair	$(n - 1)/2$
$Sp(n)$	$n/2$

### Chaîne (I)

Les RI à la limite  $U(5)$  sont étiquetées par les nombres quantiques [15]

$$\begin{array}{cccccc}
 U(6) & \supset & U(5) & \supset & O(5) & \supset & O(3) & \supset & O(2). \\
 [N] & & n_d & & v & & L & & M_L
 \end{array} \tag{1.24}$$

## 1.4 Classification des représentations de U(6)

Le symbole  $[N]$  indique une représentation complètement symétrique de U(6).  $N$  étant le nombre total de bosons, sa valeur est égale à la moitié du nombre de nucléons de valence. Il peut également compter la moitié du nombre des trous couplés à  $l = 0$  ou  $l = 2$  quand les nucléons occupent plus que la moitié de la couche de valence.

Les règles de sélection associées à la réduction  $U(n) \supset U(n-1)$  permettent de déduire les valeurs de  $n_d$  contenues dans  $N$

$$n_d = 0, 1, \dots, N. \quad (1.25)$$

Le nombre quantique  $v$  caractérisant la RI de l'algèbre O(5) est appelé nombre de séniorité et désigne le nombre de bosons  $d$  n'étant pas couplés à un moment angulaire zéro. Les valeurs de  $v$  sont déterminées à partir de la réduction  $U(5) \supset O(5)$  et sont données par

$$v = n_d, n_d - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0. \quad (1.26)$$

La décomposition de la représentation de O(5) vers celle de O(3) rencontre un problème de multiplicité. Cela équivaut à dire qu'une représentation  $v$  de O(5) peut contenir plusieurs états de même spin  $L$ . Un nombre quantique additionnel a été alors considéré et est noté  $n_\Delta$  [15]. Il a été défini comme étant le nombre de triplets de bosons couplés à un moment angulaire zéro. Cependant, il ne fait que caractériser les états (1.24) et ne va pas intervenir dans le spectre d'énergie. Pour obtenir les valeurs de  $L$  contenues dans une représentation  $n_d$  de U(5), nous procédons de la manière suivante. Nous écrivons tout d'abord

$$n_d = 2n_\beta + 3n_\Delta + \eta, \quad (1.27)$$

où  $n_\beta$  est le nombre de paires de bosons couplés à zéro et est défini par

$$n_\beta = \frac{1}{2}(n_d - v). \quad (1.28)$$

À partir des équations (1.26) et (1.28),  $n_\beta$  peut prendre les valeurs

$$n_\beta = 0, 1, \dots, \frac{n_d}{2} \text{ ou } \frac{n_d - 1}{2}. \quad (1.29)$$

Finalement, les valeurs de  $L$  sont données par

$$L = \eta, \eta + 1, \eta + 2, \dots, 2\eta - 2, 2\eta, \quad (1.30)$$

où l'on note l'absence de  $2\eta - 1$ , et celles de  $M_L$  sont  $-L \leq M_L \leq +L$ .

## Chaîne II

À la limite  $SU(3)$  [16], les RI sont étiquetées par les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccccc} U(6) & \supset & SU(3) & \supset & O(3) & \supset & O(2), \\ [N] & & (f_1, f_2) & & L & & M_L \end{array} \quad (1.31)$$

où deux nombres quantiques sont nécessaires pour libeller la RI de  $SU(3)$ . Cependant, au lieu de  $(f_1, f_2)$ , obtenus directement à partir des diagrammes de Young, on utilise habituellement la représentation d'Elliott  $(\lambda, \mu)$  liée à  $(f_1, f_2)$  par [13]

$$\lambda = f_1 - f_2, \quad \mu = f_2. \quad (1.32)$$

Ainsi, les valeurs de  $(\lambda, \mu)$  sont obtenues en utilisant les règles de multiplication des tableaux de Young correspondant aux représentations de  $U(6)$  et  $SU(3)$ . La technique utilisée en est la suivante. On considère tout d'abord la multiplication de deux représentations fondamentales [1] de  $U(6)$

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}. \quad (1.33)$$

Sachant qu'une représentation [1] de  $U(6)$  est de dimension 6 comme six états à une seule particule sont permis, la représentation  $SU(3)$  correspondante est  $(2,0)$  qui est également de dimension 6. Il s'en suit alors que

$$\square\square \otimes \square\square = \square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (1.34)$$

La représentation  $(4,0)$  est symétrique de même que  $(0,2)$  qui correspond à une représentation de deux trous. Les équations (1.33) et (1.34) nous mènent alors à conclure que ces deux représentations de  $SU(3)$  sont contenues dans la représentation symétrique [2] de  $U(6)$ . La représentation  $(2,1)$  est par conséquent contenue dans la représentation antisymétrique [1,1] de  $U(6)$  et est donc exclue de l'espace du modèle IBM-1. En généralisant cet algorithme, on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) = (2N, 0), (2N - 4, 2), (2N - 8, 4), \dots, & \left\{ \begin{array}{ll} (0, N) & N \text{ pair} \\ (2, N - 1) & N \text{ impair} \end{array} \right. , \\ (2N - 6, 0), (2N - 10, 2), (2N - 14, 4), \dots, & \left\{ \begin{array}{ll} (2, N - 4) & N \text{ pair} \\ (0, N - 3) & N \text{ impair} \end{array} \right. , \\ (2N - 12, 0), (2N - 16, 2), (2N - 20, 4), \dots, & \left\{ \begin{array}{ll} (0, N - 6) & N \text{ pair} \\ (2, N - 7) & N \text{ impair} \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (1.35)$$

## 1.4 Classification des représentations de U(6)

où  $(\lambda, \mu)$  sont toujours des entiers positifs. Pour déterminer les valeurs de  $L$  contenues dans une représentation  $(\lambda, \mu)$  de SU(3), nous serons de nouveau confrontés au problème de la multiplicité des représentations de O(3) contenues dans une même représentation de SU(3) et nous aurons besoin d'introduire un nombre quantique additif qu'on note par  $K$  et auquel on fait associer les valeurs [13]

$$K = \min \{ \lambda, \mu \}, \min \{ \lambda, \mu \} - 2, \dots, 0 \text{ ou } 1. \quad (1.36)$$

Les valeurs de  $L$  sont finalement déterminées à partir de celles de  $K$  telles que

$$L = K, K + 1, K + 2, \dots, K + \max \{ \lambda, \mu \}, \quad (1.37)$$

si  $K \neq 0$  et

$$L = \max \{ \lambda, \mu \}, \max \{ \lambda, \mu \} - 2, \dots, 0 \text{ ou } 1, \quad (1.38)$$

pour  $K = 0$ . Les valeurs de  $M_L$  sont toujours données par  $-L \leq M_L \leq +L$ .

La base d'Elliott, bien qu'elle offre une dérivation élégante des représentations à la limite SU(3), elle a aussi l'inconvénient de ne pas être orthogonale. Une autre base a été proposée par Vergados et est construite à partir de la base d'Elliott [17] en introduisant un nouvel ensemble de nombres quantiques  $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \dots, \tilde{\chi}_n$  vérifiant  $\tilde{\chi}_1 < \tilde{\chi}_2 < \dots < \tilde{\chi}_n$ . La base de Vergados est alors définie par

$$\begin{aligned} |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_1, L, M_L\rangle &= |(\lambda, \mu), K_1, L, M_L\rangle_0 \\ |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_2, L, M_L\rangle &= x_{21}|(\lambda, \mu), K_1, L, M_L\rangle + x_{22}|(\lambda, \mu), K_2, L, M_L\rangle \\ &\dots \\ |(\lambda, \mu), \tilde{\chi}_i, L, M_L\rangle &= \sum_{j=1}^i x_{ij}|(\lambda, \mu), K_j, L, M_L\rangle_0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

où  $K_1, K_2, \dots, K_n$  sont les nombres quantiques d'Elliott définis par l'équation (1.36) avec  $K_1 < K_2 < \dots < K_n$ . Les états  $|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle_0$  sont liés aux états  $|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle$  par

$$|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle_0 = i^{\lambda+2\mu}|(\lambda, \mu), K, L, M_L\rangle, \quad (1.40)$$

et les coefficients  $x_{ij}$  sont déterminés à partir de la relation

$$\langle (\lambda, \mu), \tilde{\chi}_i, L, M_L | (\lambda, \mu), \tilde{\chi}_j, L, M_L \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.41)$$

D'après leur définition, les valeurs des nombres quantiques de Vergados  $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \dots, \tilde{\chi}_n$  sont les mêmes que celles d'Elliott  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Ce sont plutôt les valeurs de  $L$  contenues dans chacune des représentations  $\tilde{\chi}_i$  qui sont différentes de celles contenues dans les représentations  $K_i$ . Les équations (1.37)-(1.39) indiquent que si une valeur de  $L$  apparaît une fois dans une représentation, elle sera associée à la

valeur la plus basse de  $\tilde{\chi}$ . Si l'on a deux valeurs de  $L$ , elles appartiendront aux deux valeurs de  $\tilde{\chi}$  les plus basses et ainsi de suite. Une exception est faite pour  $\tilde{\chi} = 0$  où les valeurs de  $L$  correspondantes sont paires pour  $\lambda$  pair et impaires pour  $\lambda$  impair. Dans ce schéma, la classification des états associés à la chaîne (II) devient

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U}(6) & \supset & \text{SU}(3) & \supset & \text{O}(3) & \supset & \text{O}(2). \\ [N] & & (\lambda, \mu) & & \tilde{\chi} & & L & & M_L \end{array} \quad (1.42)$$

### Chaîne (III)

À la limite  $\text{O}(6)$  [18], les représentations des sous-algèbres de  $\text{U}(6)$  sont classifiées en introduisant les labels

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U}(6) & \supset & \text{O}(6) & \supset & \text{O}(5) & \supset & \text{O}(3) & \supset & \text{O}(2). \\ [N] & & \sigma & & v & & L & & M_L \end{array} \quad (1.43)$$

La réduction  $\text{U}(6) \supset \text{O}(6)$  permet de déduire les valeurs de  $\sigma$  en fonction de  $N$  telles que

$$\sigma = N, N - 2, \dots, 0 \text{ ou } 1. \quad (1.44)$$

De même, les valeurs de  $v$  sont obtenues à partir des règles de sélection associées à la réduction  $\text{O}(n) \supset \text{O}(n - 1)$  et sont données par

$$v = \sigma, \sigma - 1, \dots, 0. \quad (1.45)$$

Les nombres quantiques  $v$ ,  $L$  et  $M_L$  ont la même signification que dans le cas de la chaîne (I) et obéissent par conséquent aux mêmes règles de réduction.

Il est intéressant de noter avant de clore cette section que chaque valeur de  $N$  correspond à un nombre bien déterminé d'états. C'est une caractéristique propre au modèle des bosons en interaction car, dans le cadre du modèle géométrique par exemple, le spectre peut s'étendre jusqu'à l'infini. C'est justement une autre propriété du modèle IBM qui émerge ici car, pour  $N \rightarrow \infty$ , on parle de sa limite classique qui constitue une contrepartie du modèle géométrique.

## 1.5 Hamiltonien

La construction du hamiltonien du modèle IBM part des hypothèses qu'il est invariant par rapport aux rotations et réflexions et qu'il doit être hermitique et conserve le nombre de bosons. Ainsi, l'expression générale du hamiltonien à un et à deux corps dans l'espace des bosons  $s$  et  $d$  s'écrit en deuxième quantification

$$\hat{H} = E_0 + \sum_l \epsilon_l \sqrt{2l + 1} [b_l^\dagger \times \tilde{b}_l]_0^{(0)} + \sum_{l'l''l'''} \frac{1}{2} u_{l'l''l'''}^{(L)} [[b_l^\dagger \times b_{l'}^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{b}_{l''} \times \tilde{b}_{l'''}]^{(L)}]_0^{(0)}. \quad (1.46)$$

Le hamiltonien (1.46) s'écrit explicitement en termes des bosons  $s$  et  $d$  sous la forme

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & E_0 + \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_d \hat{n}_d + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} c_L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(L)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)} + [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(2)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{2} v_0 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)} + [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(0)}]_0^{(0)} \\
 & + u_2 [[d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)}]_0^{(0)} + \frac{1}{2} u_0 [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)}]_0^{(0)}. \tag{1.47}
 \end{aligned}$$

Le hamiltonien (1.47) contient alors deux paramètres associés aux termes à un corps et sept paramètres liés aux interactions à deux corps.  $E_0$  est une constante représentant l'énergie de liaison du cœur et n'ayant pas d'effet sur le spectre d'énergie.

Il est important de noter qu'en plus de l'expression (1.47), plusieurs autres formes du hamiltonien IBM-1 peuvent être dérivées à partir de l'équation (1.46). Leurs réalisations et expressions sont explicitées dans la référence [19]. Nous nous contentons ici, pour une utilisation ultérieure, de donner l'expression dite multipolaire et qui s'écrit

$$\hat{H} = E'_0 + \epsilon_d \hat{n}_d + a_0 \hat{P}^\dagger \cdot \hat{P} + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + \kappa \hat{Q} \cdot \hat{Q} + a_3 \hat{T}_3 \cdot \hat{T}_3 + a_4 \hat{T}_4 \cdot \hat{T}_4, \tag{1.48}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \hat{n}_d &= \sqrt{5} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)}, \\
 \hat{P} &= \frac{1}{2} (\tilde{d} \cdot \tilde{d} - \tilde{s} \cdot \tilde{s}), \\
 \hat{L} &= \sqrt{10} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(1)}, \\
 \hat{Q} &= [d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)}, \\
 \hat{T}_3 &= [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)}, \\
 \hat{T}_4 &= [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)}. \tag{1.49}
 \end{aligned}$$

Le symbole  $\cdot$  dénote le produit scalaire de deux opérateurs tensoriels et est défini par [2]

$$\hat{T}^{(k)} \cdot \hat{U}^{(k)} = (-)^k \sqrt{2k+1} [\hat{T}^{(k)} \times \hat{U}^{(k)}]_0^{(0)} = \sum_{\mu} (-)^{\mu} \hat{T}_{\mu}^{(k)} \hat{U}_{-\mu}^{(k)}. \tag{1.50}$$

Le calcul des éléments de matrice du hamiltonien  $\hat{H}$  peut être effectué à travers une diagonalisation numérique dans une base appropriée. Ayant à notre disposition les états de base établis dans la section précédente, nous pouvons réaliser ce calcul en choisissant l'une des trois chaînes (I)-(III). Cependant, une caractéristique

fort intéressante du modèle IBM réside dans l'existence de solutions analytiques au problème de valeurs propres pouvant être obtenues pour des choix particuliers des paramètres du hamiltonien. Ainsi, nous profitons de l'avantage du modèle de pouvoir exprimer son hamiltonien en fonction des opérateurs invariants associés aux différentes sous-algèbres de  $U(6)$  figurant séparément dans les trois chaînes (I)-(III). Rappelons ici qu'un opérateur invariant appelé aussi Casimir d'une algèbre de Lie est l'opérateur qui commute avec tous les générateurs de cette algèbre. Le nombre d'opérateurs invariants, appelé rang de l'algèbre, est égal au nombre de labels caractérisant sa représentation irréductible. Puisqu'on a considéré, dans le hamiltonien (1.47), que les termes à un et à deux corps, seuls les opérateurs de Casimir du premier et du deuxième ordre interviennent dans son expression. Les opérateurs invariants correspondant aux différentes sous-algèbres de  $U(6)$  ont été explicitement calculés dans la référence [20]. Ils s'écrivent

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1(U(6)) &= \hat{N}, \\
\hat{C}_2(U(6)) &= \hat{N}(\hat{N} + 5), \\
\hat{C}_1(U(5)) &= \sum_m d_m^\dagger d_m = \hat{n}_d, \\
\hat{C}_2(U(5)) &= (d^\dagger \cdot \tilde{d})(d^\dagger \cdot \tilde{d}) + 4(d^\dagger \cdot \tilde{d}) = \hat{n}_d(\hat{n}_d + 4), \\
\hat{C}_2(O(5)) &= \hat{n}_d(\hat{n}_d + 3) - (d^\dagger \cdot d^\dagger)(\tilde{d} \cdot \tilde{d}), \\
\hat{C}_2(O(3)) &= \sum_\mu (-)^\mu \hat{L}_\mu \hat{L}_{-\mu} = 10 \sum_\mu (-)^\mu [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} \cdot [d^\dagger \times \tilde{d}]_{-\mu}^{(1)}, \\
\hat{C}_2(SU(3)) &= \frac{2}{3}[2\hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{3}{4}\hat{L} \cdot \hat{L}], \\
\hat{C}_2(O(6)) &= \hat{N}(\hat{N} + 4) - (d^\dagger \cdot d^\dagger + s^\dagger \cdot s^\dagger)(\tilde{d} \cdot \tilde{d} + \tilde{s} \cdot \tilde{s}). \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Notons que les opérateurs  $\hat{C}_2(U(6))$  et  $\hat{C}_2(U(5))$  sont des fonctions des opérateurs nombres  $\hat{N}$  et  $\hat{n}_d$  et correspondent par conséquent à des représentations irréductibles complètement symétriques.

Nous sommes à présent en mesure de réécrire le hamiltonien (1.47) sous forme d'une combinaison linéaire des opérateurs invariants du premier et du second ordre donnés par l'équation (1.51). Il s'écrit

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= e_0 + e_1 \hat{C}_1(U(6)) + e_2 \hat{C}_2(U(6)) + \epsilon \hat{C}_1(U(5)) + \alpha \hat{C}_2(U(5)) \\
&\quad + \zeta \hat{C}_1(U(6)) \hat{C}_1(U(5)) + \eta \hat{C}_2(O(6)) + \beta \hat{C}_2(O(5)) + \delta \hat{C}_2(SU(3)) \\
&\quad + \gamma \hat{C}_2(O(3)). \tag{1.52}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que, tout comme l'expression (1.47), le hamiltonien (1.52) contient dix paramètres indépendants qui ne sont que des combinaisons linéaires des paramètres dans l'équation (1.47). Cependant, les opérateurs de Casimir linéaire et

quadratique de  $U(6)$  ne dépendent que de  $N$  qui est constant dans un noyau donné. Ces termes sont désormais inclus dans l'énergie de liaison et ne seront plus considérés explicitement dans l'expression du hamiltonien. Notons également l'absence de l'opérateur invariant associé à l'algèbre  $O(2)$ . En effet, l'intérêt de cette algèbre n'apparaît que lorsque le noyau est soumis à un champ magnétique externe.

## 1.6 Symétries dynamiques

Le hamiltonien dans sa forme (1.52) n'est pas diagonal. Ceci est dû essentiellement au fait qu'un opérateur de Casimir n'est diagonal que dans la base irréductible de l'algèbre qui lui est associée (cf. tableau 1.3). Par conséquent, la dérivation analytique des valeurs propres de  $\hat{H}$  n'est possible que dans des situations particulières où il s'exprime en fonction des opérateurs invariants associés aux algèbres appartenant à l'une des trois chaînes (1.23). Dans ce cas précis, le hamiltonien aura la propriété de commuter avec tous les générateurs de l'algèbre en question. Nous parlons alors de la notion de symétries dynamiques du hamiltonien. Ainsi, trois symétries dynamiques sont présentes en IBM-1, chacune labellée par la première sous-algèbre de la chaîne correspondante.

TAB. 1.3 – Valeurs propres des opérateurs de Casimir linéaires et quadratiques associés à quelques algèbres de Lie. Tous les labels sont dénotés par  $f_i$ .

Algèbre	Labels	Ordre	$\langle \hat{C} \rangle$
$U(n)$	$[f_1, f_2, \dots, f_n]$	1	$\sum_{i=1}^n f_i = f$
		2	$\sum_{i=1}^n f_i(f_i + n + 1 - 2i)$
$SU(n)$	$[f_1, f_2, \dots, f_n = 0]$	2	$\sum_{i=1}^n (f_i - \frac{f}{n})(f_i - \frac{f}{n} + 2n - 2i)$
$SU(3)$	$(\lambda, \mu) = (f_1 - f_2, f_2)$	2	$\frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)$
$O(2n + 1)$	$(f_1, f_2, \dots, f_n)$	2	$\sum_{i=1}^n 2f_i(f_i + 2n + 1 - 2i)$
$O(2n)$	$(f_1, f_2, \dots, f_n)$	2	$\sum_{i=1}^n 2f_i(f_i + 2n - 2i)$
$Sp(2n)$	$(f_1, f_2, \dots, f_n)$	2	$\sum_{i=1}^n 2f_i(f_i + 2n + 2 - 2i)$

### 1.6.1 Symétrie dynamique U(5) : Limite vibrationnelle

Cette symétrie correspond à  $\eta = \delta = 0$ . Le hamiltonien correspondant s'écrit

$$\hat{H} = E_0 + \epsilon \hat{C}_1(\text{U}(5)) + \alpha \hat{C}_2(\text{U}(5)) + \zeta \hat{C}_1(\text{U}(6)) \hat{C}_1(\text{U}(5)) + \beta \hat{C}_2(\text{O}(5)) + \gamma \hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (1.53)$$

avec  $E_0 = e_0 + e_1 N + e_2 N^2$ . Le hamiltonien (1.53) est diagonal dans la base  $[[N]n_d v n_\Delta L M_L\rangle$ . Le développement analytique de l'expression de ces états a été détaillé dans la référence [20] et ne sera pas revu dans ce paragraphe. Cependant, on tient à souligner ici que les états  $[[N]n_d v n_\Delta L M_L\rangle$  constituent aussi une base orthogonale complète du hamiltonien général (1.47). Mais alors, une diagonalisation numérique est nécessaire pour calculer les valeurs propres des deux termes associés à  $\hat{C}_2(\text{O}(6))$  et  $\hat{C}_2(\text{SU}(3))$ . En utilisant le tableau 1.3, les valeurs propres du hamiltonien (1.53) s'écrivent

$$E_I(N, n_d, v, L) = E'_0 + \epsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) + 2\beta v(v + 3) + \gamma L(L + 1). \quad (1.54)$$

Les valeurs attribuées aux différents nombres quantiques figurant dans cette dernière équation ont été établies dans la section précédente. Notons que le nombre quantique  $n_\Delta$  n'a aucun effet sur les énergies d'excitation et son rôle s'achève à la construction des états propres du hamiltonien (1.53). Un spectre d'énergie typique à la limite U(5) est présenté sur le panneau à droite de la figure 1.1. Cette figure montre un triplet d'états de moments cinétiques  $L = 0, 2, 4$  correspondant à  $n_d = 2$  (deux phonons) et se situant à une énergie approximativement égale à  $2E_{2_1^+}$ . On peut également discerner un quintuplet de moments cinétiques  $L = 0, 2, 3, 4, 6$  (trois phonons) situé à  $3E_{2_1^+}$ . La structure du spectre d'énergie à la limite U(5) correspond ainsi à celle d'un vibreur anharmonique [21]. Ceci peut se confirmer en calculant les probabilités de transitions quadripolaires à cette limite. L'opérateur quadripolaire est défini par [19]

$$\hat{T}(E2) = q[d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)}, \quad (1.55)$$

où  $q$  est la charge effective du boson. La probabilité de transitions quadripolaires s'écrit

$$\begin{aligned} B(E2; L' = 2n_d + 2 \rightarrow L = 2n_d) &= \frac{1}{2L' + 1} \langle [N]n_d L \parallel \hat{T}(E2) \parallel [N]n_d + 1L' \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} q^2 (2N - L)(2L + 2), \end{aligned} \quad (1.56)$$

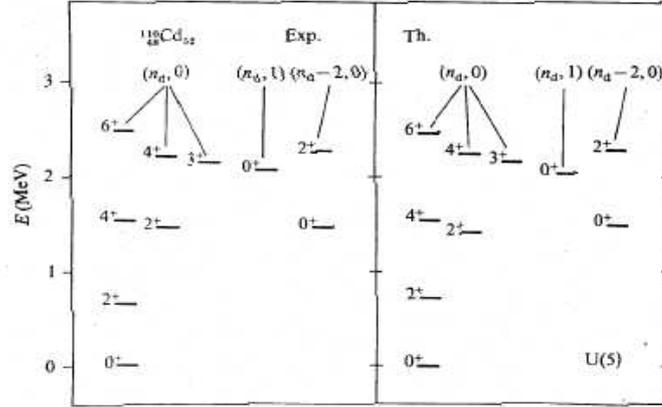
où  $\langle \parallel \parallel \rangle$  est l'élément de matrice réduit défini par [2]

$$\langle J'M' \parallel \hat{T}_{lm} \parallel JM \rangle = (-)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & l & J \\ -M' & m & M \end{pmatrix} \langle J' \parallel \hat{T}_l \parallel J \rangle, \quad (1.57)$$

où  $\hat{T}_{lm}$  est un opérateur tensoriel et le symbole entre parenthèses désigne le coefficient  $3j$  de Wigner. Notons que les transitions  $E2$  obéissent aux règles de sélection  $\Delta n_d = \pm 1$ ,  $\Delta v = \pm 1$ .

Finalement, on présente sur le panneau gauche de la figure 1.1 le spectre d'énergie du  $^{110}\text{Cd}$  comme un exemple de spectre d'énergie à la limite  $U(5)$ .

FIG. 1.1 – Spectre d'énergie calculé à la limite vibrationnelle  $U(5)$  pour  $N = 7$  (panneau gauche) comparé au spectre expérimental du  $^{110}\text{Cd}$  (panneau à droite)



### 1.6.2 Symétrie dynamique $SU(3)$ : Limite rotationnelle

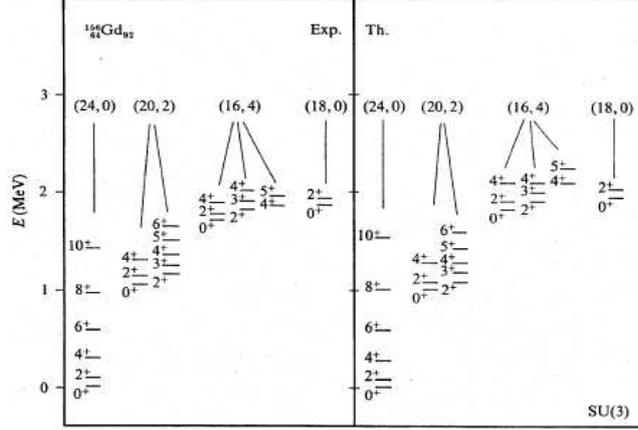
La symétrie  $SU(3)$  est obtenue à partir du hamiltonien (1.52) pour  $\epsilon = \alpha = \beta = \eta = 0$ . Le hamiltonien correspondant s'écrit

$$\hat{H}_{II} = E_0 + \delta \hat{C}_2(SU(3)) + \gamma \hat{C}_2(O(3)). \quad (1.58)$$

Ce hamiltonien est diagonal dans la base de Vergados définie par l'équation (1.39). Ses valeurs propres s'écrivent

$$E_{II}(N, \lambda, \mu, L) = E_0 + \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \gamma L(L + 1). \quad (1.59)$$

Un spectre typique à cette limite est présenté sur la figure 1.2. Nous remarquons que les états d'énergie se comportent comme  $L(L + 1)$ . De plus, le spectre possède une structure rotationnelle avec une bande fondamentale, une bande  $\beta$  ( $K = 0$ ) et une bande  $\gamma$  ( $K = 2$ ) bien discernables (voir chapitre 3 pour les définitions de ces bandes dans le cadre du modèle géométrique). Ces constatations nous conduisent à confronter le spectre à la limite  $SU(3)$  avec celui d'un rotateur axialement déformé [22]. Le

FIG. 1.2 – Spectre d'énergie calculé à la limite SU(3) pour  $N = 12$  comparé au spectre expérimental du  $^{156}\text{Gd}$ .


nombre quantique  $K$  est identique à celui considéré par le modèle géométrique et qui correspond à la projection du moment cinétique sur l'axe lié au noyau.

Contrairement à la limite U(5), deux modes collectifs sont possibles pour un noyau ayant la symétrie SU(3) car, en plus des vibrations quadripolaires, il a également la possibilité de tourner autour de l'axe perpendiculaire à son axe de symétrie. Un tel mouvement collectif est favorisé par le nombre relativement considérable de nucléons de valence dans ces noyaux. Une représentation  $K$  est ainsi associée à une bande rotationnelle tandis que différentes représentations  $(\lambda, \mu)$  décrivent des excitations collectives vibrationnelles. Sur la même figure 1.2, le spectre d'énergie du  $^{156}\text{Gd}$  est présenté comme un bon exemple d'un noyau ayant la symétrie SU(3).

L'opérateur de transitions quadripolaires à cette limite est donné par

$$\hat{T}(E2) = q([d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)}). \quad (1.60)$$

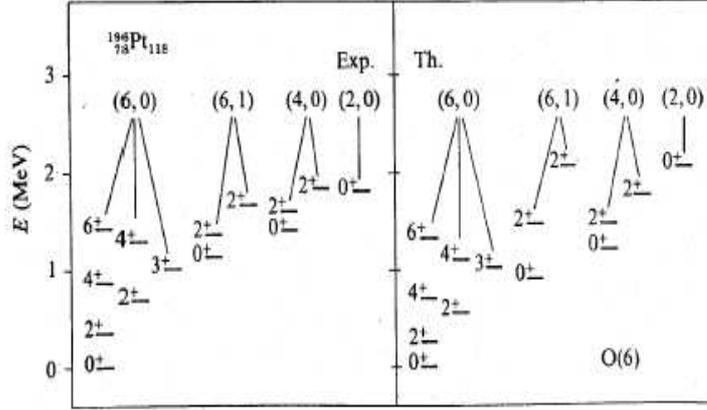
La probabilité de transitions quadripolaires dans la bande fondamentale  $(2N, 0)$  est donc

$$B(E2; L+2 \rightarrow L) = q^2 \frac{3}{4} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} (2N-L)(2N+L+3). \quad (1.61)$$

Celle dans la bande  $\beta$   $(2N-4, 2)$  est donnée par

$$\begin{aligned} B(E2; L+2 \rightarrow L) &= q^2 \frac{3}{4} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} \left[ 2N+L + \frac{1}{2} \frac{(L+3)(L+4)}{2(2N-2)^2 - (L+2)(L+3)} \right]^2 \\ &\times \left[ \frac{2(2N-2)^2 - (L+2)(L+3)}{2(2N-2)^2 - L(L+1)} \right] \left[ \frac{2N-2-L}{2N+1+L} \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

FIG. 1.3 – Spectre d'énergie calculé à la limite O(6) pour  $N = 6$  (panneau à droite) comparé au spectre expérimental du  $^{196}\text{Pt}$  (panneau à gauche).



L'opérateur  $\hat{T}(E2)$  est dans ce cas un générateur de l'algèbre SU(3). Par conséquent, les transitions entre des bandes ayant différentes représentations  $(\lambda, \mu)$  sont interdites.

### 1.6.3 Symétrie dynamique O(6) : noyaux $\gamma$ -instables

Un hamiltonien ayant la symétrie dynamique O(6) est obtenu pour  $\epsilon = \alpha = \delta = 0$  et s'écrit

$$\hat{H}_{III} = E_0 + \eta \hat{C}_2(\text{O}(6)) + \beta \hat{C}_2(\text{O}(5)) + \gamma \hat{C}_2(\text{O}(3)). \quad (1.63)$$

Les états propres du hamiltonien (1.63) sont notés  $|[N]\sigma v n_{\Delta} L M_L\rangle$ . Leur dérivation est également détaillée dans la référence [20]. Les valeurs propres du hamiltonien  $\hat{H}_{III}$  dans cette base sont données par

$$E_{III}(N, \sigma, v, L) = E_0 + 2\eta\sigma(\sigma + 4) + 2\beta v(v + 3) + \gamma L(L + 1). \quad (1.64)$$

Le panneau à droite de la figure 1.3 présente un spectre d'énergie typique à la limite O(6). À première vue, ce spectre est identique à celui correspondant à la limite U(5). Cependant, on remarque la brisure du triplet à deux phonons ( $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$ ) qui caractérise la limite U(5) car, comme le montre la figure 1.3, le  $0_2^+$  à la limite O(6) est relativement plus haut en énergie. En outre, le doublet ( $4^+$ ,  $2^+$ ) se situe à une énergie qui est approximativement égale à 2.5 fois celle du  $2_1^+$ . La contrepartie géométrique de la limite O(6) correspond au modèle du rotateur déformé asymétrique ( $\gamma$ -instable) de Wilets et Jean [23]. Le  $^{196}\text{Pt}$  présente un bon exemple de noyaux ayant la symétrie dynamique O(6). Son spectre à basses énergies d'excitation est présenté sur le panneau à gauche de la figure 1.3.

L'opérateur  $\hat{T}(E2)$  à cette limite s'écrit [19]

$$\hat{T}(E2) = q[s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)}. \quad (1.65)$$

Les valeurs de  $B(E2)$  calculées dans la bande fondamentale ( $\sigma = N$ ,  $n_\Delta = 0$  et  $L = 2v$ ) sont données par

$$\begin{aligned} B(E2; L+2 \rightarrow L) &= \frac{1}{2L+5} \langle [N]N v 0 L = 2v \parallel \hat{T}(E2) \parallel [N]N v + 1 0 L = 2v + 2 \rangle^2 \\ &= q^2 \frac{L+2}{8(L+5)} (2N-L)(2N+L+8). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Remarquons que les transitions quadripolaires à la limite O(6) vérifient les règles de sélection  $\Delta\sigma = 0$  et  $\Delta v = \pm 1$ .

## 1.7 Aspect géométrique du modèle des bosons en interaction

En plus de sa nature algébrique, le modèle des bosons en interaction possède également la propriété de pouvoir être associé d'un aspect géométrique. En fait, cette dernière caractéristique du modèle IBM découle principalement des propriétés des groupes de Lie dont la structure algébrique se joigne d'un espace topologique.

La mise en évidence de l'image géométrique du modèle IBM a été tout d'abord abordée par Ginocchio et Kirson [24], Dieperink, Scholten et Iachello [25] et Bohr et Mottelson [26] qui se sont inspirés des travaux de Gilmore et Feng [27, 28]. Dans leur approche, Gilmore et Feng ont introduit le concept d'états cohérents et ont utilisé un algorithme leur permettant de construire ce qu'on appelle 'la limite classique' d'une algèbre compacte de Lie. La projection de cet algorithme au modèle des bosons en interaction nécessite en premier lieu un choix approprié des variables géométriques. Par ailleurs, il a été établi que, pour un système quantique de  $N$  bosons décrit par une algèbre  $U(n)$ , on a besoin d'introduire  $(n-1)$  variables classiques. Dans le cas de l'algèbre  $U(6)$ , Dieperink, Scholten et Iachello [25] ont considéré un ensemble de cinq coordonnées réelles (ou complexes si l'on souhaite décrire les propriétés dynamiques du système)  $\alpha_\mu$ , avec  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ , en fonction desquelles les états quantiques du système, appelés états cohérents ou intrinsèques et notés  $|N, \alpha_\mu\rangle$  s'expriment sous la forme

$$|N, \alpha_\mu\rangle = \left( s^\dagger + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_\mu d_\mu^\dagger \right)^N |0\rangle. \quad (1.67)$$

## 1.7 Aspect géométrique du modèle des bosons en interaction

En faisant associer à chaque point  $\alpha$  un point de la surface d'un corps déformé dont le rayon est donné par

$$R = R_0 \left( 1 + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_\mu Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right), \quad (1.68)$$

nous pouvons établir le lien entre le modèle IBM et celui d'une goutte liquide. Cependant, il est plus convenable d'utiliser, au lieu des variables  $\alpha_\mu$ , les variables dites intrinsèques décrivant un corps d'une déformation quadripolaire et obtenues à partir de  $\alpha_\mu$  à travers la transformation

$$\alpha_\mu = \sum_{\mu'} a_{2\mu'} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^{(2)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (1.69)$$

où  $\mathcal{D}_{\mu\mu'}^{(2)}$  sont les fonctions de Wigner et  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  désignent les angles d'Euler déterminant l'orientation dans l'espace du système intrinsèque par rapport au système du laboratoire. Les variables  $a_{2\mu}$  sont définies en fonction des variables de Bohr par

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad a_{2\pm 1} = 0, \quad a_{22} = a_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (1.70)$$

Ainsi, l'état cohérent (1.67) s'écrit en fonction de  $\beta$  et  $\gamma$  sous la forme

$$|N; \beta, \gamma\rangle = [s^\dagger + \beta(\cos \gamma d_0^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (d_{+2}^\dagger + d_{-2}^\dagger))]^N |0\rangle. \quad (1.71)$$

L'énergie de surface correspondant à l'état fondamental du noyau peut être calculée en utilisant les états (1.71) et est obtenue à partir de la relation

$$E(N; \beta, \gamma) = \frac{\langle N; \beta, \gamma | \hat{H} | N; \beta, \gamma \rangle}{\langle N; \beta, \gamma | N; \beta, \gamma \rangle}. \quad (1.72)$$

En minimisant  $E(N; \beta, \gamma)$  par rapport aux variables  $\beta$  et  $\gamma$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0, \quad (1.73)$$

nous parviendrons à déterminer la forme d'équilibre associée à un hamiltonien bosonique  $\hat{H}$ . Ainsi, pour le hamiltonien IBM-1 le plus général donné par l'équation (1.47) nous avons [29]

$$\begin{aligned} E(N; \beta, \gamma) &= E_0 + \frac{N}{(1 + \beta^2)} (\epsilon_s + \epsilon_d \beta^2) \\ &+ \frac{N(N-1)}{(1 + \beta^2)} (a_1 \beta^4 + a_2 \beta^3 \cos 3\gamma + a_3 \beta^2 + \frac{1}{2} u_0), \end{aligned} \quad (1.74)$$

## CHAPITRE 1 : Le modèle des bosons en interaction

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{10}c_0 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{9}{35}c_4, \\ a_2 &= -\frac{2}{\sqrt{35}}v_2, \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(v_0 + u_2). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Cette dernière équation nous permet d'établir les propriétés géométriques des trois limites du modèle décrites par les chaînes de sous-algèbres (I), (II) et (III).

### Chaîne (I)

À partir de l'expression générale (1.47) du hamiltonien IBM-1 et l'équation (1.74), nous obtenons pour la limite U(5)

$$E_I(N; \beta, \gamma) = E_0 + \epsilon_d N \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} + a_1 N(N-1) \frac{\beta^4}{(1 + \beta^2)^2}. \quad (1.76)$$

L'expression (1.76) de l'énergie est indépendante de  $\gamma$  et possède un minimum à  $\beta_0 = 0$ . La forme du noyau correspond ainsi à celle d'une goutte sphérique.

### Chaîne (II)

Outre l'expression (1.58) du hamiltonien ayant la symétrie dynamique SU(3), une paramétrisation alternative d'usage fréquent dans la littérature est donnée par

$$\hat{H}_{II} = E_0 - 2\kappa \hat{Q} \cdot \hat{Q} - \kappa' \hat{L} \cdot \hat{L}, \quad (1.77)$$

où  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont liés aux paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  dans l'expression (1.58) par

$$\kappa = -\frac{2}{3}\delta, \quad \kappa' = -\frac{1}{2}\delta - 2\gamma. \quad (1.78)$$

L'énergie de surface dérivée à partir de ce hamiltonien s'écrit alors

$$\begin{aligned} E_{II}(N; \beta, \gamma) &= E_0 - 2\kappa \left[ \frac{N}{1 + \beta^2} \left( 5 + \frac{11}{4}\beta^2 \right) + \frac{N(N-1)}{(1 + \beta^2)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\beta^4}{2} + 2\sqrt{2}\beta^3 \cos 3\gamma + 4\beta^2 \right) \right] - \kappa' \frac{6N\beta^2}{1 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Ainsi, le minimum de l'expression (1.79) correspond à  $\gamma_0 = 0^\circ$  et  $\beta_0 \neq 0$  (pour  $N \rightarrow \infty$ , ce minimum est atteint à  $\beta_0 = \sqrt{2}$ ). Le noyau est alors de déformation axiale et de forme prolata. Il est cependant important de noter que pour une valeur de  $\chi = +\sqrt{7}/2$  dans l'expression de l'opérateur quadripolaire, l'énergie de surface (1.79) décrit un noyau d'une forme oblate ce qui correspond à un inversement du signe du moment quadripolaire correspondant à l'état  $2_1^+$  à la limite quantique.

### Chaîne (III)

Nous adoptons pour le hamiltonien à cette limite la paramétrisation

$$\hat{H}_{III} = E'_0 + A\hat{P}^\dagger \cdot \hat{P} + B\hat{C}_5 + C\hat{L} \cdot \hat{L}. \quad (1.80)$$

L'opérateur  $\hat{P}$  est défini par l'équation (1.49) et  $\hat{C}_5$  est donné en fonction de l'opérateur invariant de  $O(5)$  par

$$\hat{C}_5 = \frac{1}{12}C_2(O(5)). \quad (1.81)$$

Les paramètres  $E'_0$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont liés aux paramètres dans l'équation (1.64) par

$$A = -8\eta, \quad B = 12\beta, \quad C = \gamma, \quad E'_0 = E_0 - A\frac{1}{4}N(N+4). \quad (1.82)$$

L'expression de l'énergie de surface à la limite  $O(6)$  s'écrit alors

$$E_{III}(N; \beta, \gamma) = E'_0 + (2B + 6C)\frac{N\beta^2}{1 + \beta^2} + \frac{A}{4}N(N-1)\left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}\right)^2. \quad (1.83)$$

Cette expression est indépendante de  $\gamma$  et possède un minimum à  $\beta_0 \neq 0$  (ce minimum correspond à  $\beta_0 = 1$  pour  $N \rightarrow \infty$ ). Le noyau est ainsi déformé avec une instabilité- $\gamma$ .

## 1.8 Fondement microscopique du modèle IBM

En modèle des bosons en interaction, les bosons interviennent pour simuler des paires de nucléons dans l'espace de valence du modèle en couches. Ainsi, le modèle IBM n'est qu'une approximation du modèle en couches en terme d'une troncature de l'espace total de celui-ci à un espace réduit. Dans ce schéma, le boson  $s$ , qui a été tout d'abord introduit pour des raisons purement mathématiques, peut être muni d'une signification physique. Idem pour le nombre total de bosons  $N$  qui sera ainsi associé au nombre de paires de nucléons ou de trous de valence.

La formulation microscopique qui vise à justifier l'utilisation du concept de bosons pour décrire les propriétés collectives des noyaux commence par considérer un opérateur de création d'une paire de nucléons dans une configuration de moment angulaire  $J = 0$

$$A^\dagger = \frac{1}{2} \sum_m (-)^{j-m} a_{j,m}^\dagger a_{j,-m}^\dagger. \quad (1.84)$$

Étant donné que les fermions obéissent aux relations d'anticommuation

$$\begin{aligned} \{a_{j,m}, a_{j',m'}^\dagger\} &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \{a_{j,m}, a_{j',m'}\} &= \{a_{j,m}^\dagger, a_{j',m'}^\dagger\} = 0, \end{aligned} \quad (1.85)$$

il s'en suit que

$$[A, A^\dagger] = j + \frac{1}{2} - \hat{n}, \quad (1.86)$$

où  $\hat{n}$  désigne l'opérateur nombre de nucléons de valence. Pour  $\langle \hat{n} \rangle \ll j + \frac{1}{2}$ , les relations de commutation (1.85) tendent vers celles correspondant à des opérateurs bosoniques. Les paires de nucléons ainsi créées, appelées paires  $S$  et dont le nombre est  $n/2$ , constituent alors les contreparties des bosons  $s$  en modèle en couches. Cependant, seules les paires  $S$  ne suffisent pas pour décrire la structure des noyaux et on a besoin d'introduire des paires de plus hauts moments cinétiques. Dans les spectres à basses énergies d'excitation dans les noyaux pair-pairs, c'est l'état excité de moment angulaire  $J = 2$  qui est le plus bas. L'opérateur qui crée deux nucléons dans cet état s'écrit

$$A_{2M}^\dagger = \sum_{mm'} \langle jm, jm' | 2 M \rangle a_{j,m}^\dagger a_{j,m'}^\dagger. \quad (1.87)$$

Comme pour le boson  $s$ , la paire créée dans l'état  $J = 2$  peut être associée à un boson  $d$ . L'espace engendré par ces  $2N$  paires de fermions est construit à partir d'un ensemble d'états de la forme

$$|S^{N-v} D^v, J\rangle, \quad (1.88)$$

où  $v$  est le nombre des paires  $D$  couplées à un moment cinétique total  $J$ . À ce niveau, on est en mesure d'établir la correspondance

$$|S^{N-v} D^v, J\rangle \rightarrow [(d^\dagger)^v]^J [s^\dagger]^{N-v} |0\rangle, \quad (1.89)$$

où  $|0\rangle$  est l'état du vide bosonique,  $[s^\dagger]^{N-v}$  est l'opérateur de création de  $(N - v)$  bosons  $s$  et  $[(d^\dagger)^v]^J$  correspond à  $v$  bosons  $d$  couplés à un moment angulaire total  $J$ . Il faut cependant noter que les états fermioniques dans (1.89) ne sont pas nécessairement orthonormés et il est alors indispensable de les orthonormer avant de les projeter sur les états bosoniques.

Finalement, il est important de signaler avant de clore ce chapitre que, à travers la charte des nuclides, des situations où les noyaux obéissent *complètement* à l'une des trois symétries dynamiques  $U(5)$ ,  $SU(3)$  ou  $O(6)$  sont rarement rencontrées. En effet, des noyaux de caractère transitionnel sont de loin plus abondants et leur étude s'avère plus compliquée. Néanmoins, les différentes approches qui ont été développées dans cet axe se fondent dans leur majorité sur le concept de symétries dynamiques. De plus, le modèle IBM-1 dans sa simple version constitue une base sur laquelle d'autres extensions peuvent être construites. Celles-ci visent à décrire des situations plus réalistes et sont ajustées sur les propriétés collectives des noyaux.

Le chapitre suivant aura trait à l'étude de l'une des extensions du modèle IBM-1 qui est obtenue en introduisant un troisième type de bosons, le boson  $g$ .

## 1.8 Fondement microscopique du modèle IBM

## Chapitre 2

# Modèle *sdg* des bosons en interaction

Les excitations collectives de types quadripolaire ( $\lambda = 2$ ) et octupolaire ( $\lambda = 3$ ), où  $\lambda$  est la variable collective caractérisant la surface nucléaire [1], sont les plus observées à basses énergies d'excitation dans la majeure partie des régions de masses nucléaires. C'est ainsi qu'on peut discerner dans la plupart des spectres d'énergie des noyaux déformés une bande appelée  $\gamma$ -vibrationnelle se situant à basse énergie, se caractérisant par  $K^\pi = 2^+$  et présentant des vibrations quadripolaires à un seul phonon. Il s'en suit donc que la superposition de deux telles vibrations donne naissance à des bandes  $\gamma$ -vibrationnelles à deux phonons avec  $K^\pi = 0^+$  et  $K^\pi = 4^+$ . Cependant le caractère des bandes  $K_2^\pi = 4^+$  a constitué l'objet d'une longue controverse car, outre l'interprétation en terme de vibrations à deux phonons- $\gamma$ , de nombreuses études, en particulier celles munies sur les noyaux déformés dans la région des terres rares, ont opté pour une description de certaines de ces bandes ainsi que quelques bandes  $K^\pi = 3^+$  en terme de phonons hexadécapolaires ( $\lambda = 4$ ) [30–33]. En effet, diverses observations expérimentales ont révélé des déformations  $\beta_4$  qui sont raisonnablement importantes dans les terres rares pair-pairs et en particulier  $^{184-186}\text{W}$  [34] et  $^{186-192}\text{Os}$  [35]. Parallèlement, les amplitudes ainsi que les systématiques des transitions  $E4$  à partir des états  $4^+$  observées dans cette région de masse ont suscité une interprétation en terme de degrés de liberté hexadécapolaires [36–38].

En dépit de son succès à décrire dans une large mesure les propriétés collectives des noyaux pair-pairs, on reproche au modèle *sd*-IBM-1 de ne parvenir à expliquer ces phénomènes qu'en terme de doubles phonons quadripolaires. Afin de combler ce déficit du modèle IBM-1, on a proposé d'étendre son espace en introduisant, en plus des bosons *s* et *d*, un troisième type de bosons de moment angulaire  $l = 4$  appelé boson *g* [39]. Le modèle des bosons en interaction qui incorpore les trois bosons *s*, *d* et *g* est appelé *sdg*-IBM (ou *g*-IBM). Ces trois types de bosons donnent accès à 15 états à une particule (1+5+9) ce qui offre au modèle la symétrie de l'algèbre unitaire en 15 dimensions  $U(15)$ .

## 2.1 Algèbre U(15)

La construction de l'algèbre U(15) suit une démarche similaire à celle présentée au chapitre précédent en ce qui concerne l'algèbre U(6) dans la mesure où on fait toujours usage du formalisme de la seconde quantification. Ainsi, on considère l'ensemble des opérateurs bosoniques de création  $b_{l,m}^\dagger$  et d'annihilation  $b_{l,m}$  avec  $l = 0, 2, 4$  et  $m$  est sa projection sur l'axe  $z$ . Ces opérateurs vérifient les relations de commutation bosoniques usuelles données au chapitre 1 par l'équation (1.1). Si l'on utilise, au lieu de  $b_{l,m}^\dagger$  et  $b_{l,m}$ , la notation  $b_i^\dagger$  et  $b_j$  avec  $i, j = 1, \dots, 15$ , nous pouvons exprimer les 225 générateurs de U(15) sous forme de produits bilinéaires tels que

$$G_{i,j} = b_i^\dagger b_j. \quad (2.1)$$

Ces générateurs vérifient ainsi les relations de commutation

$$[G_{i,j}, G_{i',j'}] = G_{i,j'}\delta_{j,i'} - G_{i',j}\delta_{j',i}, \quad i, i', j, j' = 1, \dots, 15. \quad (2.2)$$

Cependant, et pour les mêmes raisons qu'on avait discutées au cours de la section 1.2, les générateurs de U(15) tels qu'ils sont présentés dans l'équation (2.1) ne forment pas des tenseurs sphériques et on a de nouveau besoin d'introduire les opérateurs d'annihilation modifiés définis par l'équation (1.8). Nous serons ainsi menés à réexprimer les générateurs de U(15) sous la forme couplée

$$G_\mu^{(\lambda)}(l, l') = [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\mu^{(\lambda)} = \sum_{mm'} \langle l m l' m' | \lambda \mu \rangle b_{l,m}^\dagger \tilde{b}_{l',m'}, \quad (2.3)$$

avec  $l, l' = 0, 2, 4$  et  $\lambda = 0, \dots, 8$ . On peut vérifier que les générateurs (2.3) satisfont les relations de commutation (1.10). Leurs formes s'écrivent explicitement en fonction des opérateurs bosoniques  $s^\dagger, \tilde{s}, d^\dagger, \tilde{d}, g^\dagger$  et  $\tilde{g}$

$$\begin{aligned} G_0^{(0)}(0, 0) &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} \\ G_\mu^{(2)}(0, 2) &= [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)} \\ G_\mu^{(4)}(0, 4) &= [s^\dagger \times \tilde{g}]_\mu^{(4)} \\ G_\mu^{(2)}(2, 0) &= [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(2)} \\ G_\mu^{(\lambda)}(2, 2) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(\lambda)}, \quad \lambda = 0, \dots, 4 \\ G_\mu^{(\lambda)}(2, 4) &= [d^\dagger \times \tilde{g}]_\mu^{(\lambda)}, \quad \lambda = 2, \dots, 6 \\ G_\mu^{(4)}(4, 0) &= [g^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(4)} \\ G_\mu^{(\lambda)}(4, 2) &= [g^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(\lambda)}, \quad \lambda = 2, \dots, 6 \\ G_\mu^{(\lambda)}(4, 4) &= [g^\dagger \times \tilde{g}]_\mu^{(\lambda)}, \quad \lambda = 0, \dots, 8. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les générateurs d'ordre 0 définissent les opérateurs nombres des bosons  $s, d$  et  $g$ . Ceux d'ordre 1 présentent les trois composantes du générateur moment angulaire et

## CHAPITRE 2 : Modèle $sdg$ des bosons en interaction

s'écrivent

$$\hat{L}_\mu^{(1)} = \sqrt{10}[[d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} + \sqrt{6}[g^\dagger \times \tilde{g}]_\mu^{(1)}]. \quad (2.5)$$

Tout comme le modèle  $sd$ -IBM, le système décrit par les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  doit également conserver l'invariance par rapport aux rotations. Ainsi, les différentes chaînes de sous-algèbres de  $U(15)$  sont construites sous la contrainte de devoir contenir le groupe de rotations tridimensionnelles  $O(3)$  dont l'algèbre est engendrée par les générateurs (2.5). En procédant ainsi, on constate que l'on a affaire à deux groupes de sous-algèbres. Le premier est obtenu en considérant différentes combinaisons des orbitales bosoniques à savoir  $(sd, g)$ ,  $(s, dg)$  et  $(sg, d)$  ce qui donne lieu aux trois sous-algèbres  $U(6) \otimes U(9)$ ,  $U(1) \otimes U(14)$  et  $U(10) \otimes U(5)$  respectivement. Les trois chaînes de sous-algèbres qui en découlent correspondent ainsi à des couplages faibles entre les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$ . Le deuxième groupe de sous-algèbres de  $U(15)$  correspond à un couplage fort entre les trois types de bosons. Deux premières sous-algèbres ont été étudiées par Sun *et al.* dans la référence [40] en commençant par considérer le cas général d'une algèbre  $SU(\Sigma(2l+1)) \equiv SU((n+1)(2n+1))$  avec  $l = 0, 2, 4, \dots, 2n$ . Ils ont montré que les sous-algèbres de  $SU((n+1)(2n+1))$  sont obtenues en considérant un ensemble de  $r$  *pseudo*-bosons ayant chacun un moment angulaire  $\tilde{l}$ . Ainsi, si l'ensemble de moments cinétiques généré par ces  $r$  bosons est  $l = 0, 2, 4, \dots, 2n$ , le groupe  $SU(2\tilde{l}+1)$  est contenu dans  $SU((n+1)(2n+1))$  et est engendré par les générateurs

$$C_\kappa^{\kappa'} = \sum_{l'l'} \sum_{mm'} \langle \tilde{l}^r l m | a_{l\kappa}^\dagger a_{\tilde{l}\kappa'} | \tilde{l}^r l' m' \rangle b_{l,m}^\dagger b_{l',m'}, \quad (2.6)$$

où  $a_{l\kappa}^\dagger$  et  $\tilde{a}_{\tilde{l}\kappa'}$  présentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation des *pseudo*-bosons. Les générateurs (2.6) vérifient les relations de commutation

$$[C_\kappa^{\kappa'}, C_\nu^{\nu'}] = C_\nu^{\nu'} \delta_{\nu\kappa'} - C_\nu^{\kappa'} \delta_{\kappa\nu'}, \quad (2.7)$$

qui correspondent bien à celles d'une algèbre  $SU(2\tilde{l}+1)$ . Ils peuvent également être exprimés sous la forme couplée

$$\hat{T}_\mu^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \sum_{l'l'} \langle \tilde{l}^r l | [a_l^\dagger \times a_{\tilde{l}}]_\mu^{(\lambda)} | \tilde{l}^r l' \rangle G_\mu^{(\lambda)}(l, l'). \quad (2.8)$$

Cette procédure nous fournit deux sous-algèbres possibles de  $SU((n+1)(2n+1))$ . La première correspond à  $\tilde{l} = 1$  et  $r = 2n$  et est donc l'algèbre  $SU(3)$ . La seconde correspond à  $\tilde{l} = n$  et  $r = 2$  et c'est  $SU(2n+1)$ . En se restreignant à  $n = 2$ , qui est le cas de l'algèbre  $U(15)$ , cette dernière algèbre correspond bel et bien à  $SU(5)$ . Par ailleurs, une autre sous-algèbre de  $U(15)$  est obtenue en supposant que les orbitales  $l = 0, 2$  et  $4$  sont les états accessibles pour deux *pseudo*-fermions ayant chacun un moment

angulaire  $\tilde{j} = \frac{5}{2}$ . La sous-algèbre qui en résulte est  $SU(2\tilde{j} + 1) \equiv SU(6)$ . Finalement, on peut déduire une dernière sous-algèbre de U(15) en partant simplement de la règle de branchement  $U(n) \supset O(n)$ , il s'agit donc de l'algèbre O(15). On conclue ainsi sur six sous-algèbres possibles de U(15). Cependant, l'algèbre  $U(5) \otimes U(10)$  ne correspond pas à une situation physique et ne va donc pas être détaillée ici.

Les deux paragraphes qui vont suivre présentent la structure algébrique de chacune des sous-algèbres de U(15) mentionnées ci-dessus tout en regardant séparément les limites de couplage faible et celles de couplage fort. L'accent sera ainsi porté sur la construction des chaînes de sous-algèbres ainsi que les générateurs qui leurs sont associés.

### 2.1.1 Limites de couplage faible

#### Limites $U(6) \otimes U(9)$

L'algèbre U(6) est construite à partir des bosons  $s$  et  $d$  et est engendrée par les générateurs  $G_\mu^{(\lambda)}(l, l')$  avec  $l, l' = 0, 2$  et  $\lambda = 0, \dots, 4$ . Elle correspond par conséquent à l'algèbre U(6) usuelle du modèle  $sd$ -IBM avec les mêmes chaînes de sous-algèbres. En ce qui concerne l'algèbre U(9), elle est générée par le boson  $g$  seul et a alors pour générateurs l'ensemble  $G_\mu^{(\lambda)}(4, 4)$  avec  $\lambda = 0, \dots, 8$ . Parmi ceux-ci, les générateurs de la sous-algèbre O(9) de U(9) sont déduits en ne considérant que les valeurs impaires de  $\lambda$ . L'algèbre O(3) est donc une sous-algèbre de O(9) et est obtenue pour  $\lambda = 1$ . Nous pouvons ainsi présenter la chaîne de sous-algèbres de U(15) à cette limite par le schéma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & U(9) & \rightarrow & O(9) & \text{-----} & \rightarrow & O_g(3) & \rightarrow & O(3) \\
 & \nearrow & & & & & & & \nearrow & \\
 U(15) & & \otimes & & U(5) & \rightarrow & & O(5) & \rightarrow & O_{sd}(3) \\
 & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
 & & U(6) & \rightarrow & O(6) & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & \nearrow & & \\
 & & & & SU(3) & \text{-----} & & & & 
 \end{array} \tag{2.9}$$

#### Limite $U(1) \otimes U(14)$

L'algèbre U(1) a pour unique générateur l'opérateur nombre des bosons  $s$ . La chaîne de sous-algèbres de U(15) à cette limite s'écrit

$$U(15) \supset U(14) \supset O(14) \supset O(5) \supset O(3) \tag{2.10}$$

## CHAPITRE 2 : Modèle $sdg$ des bosons en interaction

Les générateurs des sous-algèbres  $U(14)$  et  $O(14)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} U(14) & : \{ [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(\lambda=0,\dots,4)}, [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(\lambda=0,\dots,8)}, \frac{1}{\sqrt{2}} [d^\dagger \times \tilde{g} \pm (-)^\lambda g^\dagger \times \tilde{d}]^{(\lambda=2,\dots,6)} \}, \\ O(14) & : \{ [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(\lambda=1,3)}, [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(\lambda=1,3,5,7)}, \frac{1}{\sqrt{2}} [d^\dagger \times \tilde{g} \pm (-)^\lambda g^\dagger \times \tilde{d}]^{(\lambda=2,\dots,6)} \}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'algèbre  $O(5)$  quant à elle, est générée par le tenseur

$$\hat{Q}^{(3)} = \frac{4}{7} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)} - \frac{3}{14} \sqrt{11} [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(3)} - \frac{3}{14} \sqrt{10} [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)}, \quad (2.12)$$

ainsi que par le générateur moment cinétique défini par (2.5). Finalement, les générateurs de  $O(3)$  ne sont que les trois composantes de l'opérateur  $\hat{L}^{(1)}$ .

Nous constatons, d'après l'équation (2.11), que deux réalisations des sous-algèbres de  $U(14)$  sont possibles suivant que l'on choisisse un signe positif ou négatif dans les expressions des générateurs de  $O(14)$ . Cependant, bien que le choix du signe n'influe pas sur la structure de l'algèbre dans la mesure où les relations de commutation restent toujours préservées, nous sommes incités à choisir un signe négatif pour que  $O(5)$  soit une sous-algèbre de  $O(14)$ .

### 2.1.2 Limites de couplage fort

#### Limite $SU(3)$

La chaîne de sous-algèbres associée à cette limite est

$$U(15) \supset SU(3) \supset O(3). \quad (2.13)$$

Bien que l'algèbre  $SU(3)$  a été tout d'abord dérivée dans les travaux d'Elliott [13, 41], on retrouve dans la référence [40] une réalisation différente de celle-ci dans la mesure où elle a été développée dans le contexte du modèle des bosons en interaction. Ainsi, et pour  $\tilde{l} = 1$  dans l'équation (2.8), on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{l}^4 l + 2 \|[a_1^\dagger \times \tilde{a}_1]^{(2)}\| \tilde{l}^4 l \rangle & = \left[ \frac{(l+1)(l+2)(l+7)(4-l)}{2l+3} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \langle \tilde{l}^4 l \|[a_1^\dagger \times \tilde{a}_1]^{(2)}\| \tilde{l}^4 l \rangle & = 11 \left[ \frac{l(l+1)(2l+1)}{6(2l-1)(2l+3)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'où on arrive à exprimer les opérateurs quadripolaire et moment angulaire à cette limite par

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\mu^{(2)} &= \sum_{l=0}^2 \left\{ \left[ \frac{(l+1)(l+2)(l+7)(4-l)}{5(2l+3)} \right]^{\frac{1}{2}} [G_\mu^{(2)}(l, l+2) + G_\mu^{(2)}(l+2, l)] \right. \\ &\quad \left. + 7 \left[ \frac{(l+2)(l+3)(2l+5)}{30(2l+3)(2l+7)} \right]^{\frac{1}{2}} G_\mu^{(2)}(l+2, l+2) \right\}, \\ \hat{T}_\mu^{(1)} &= \sum_{l=2}^4 \left[ \frac{l(l+1)(2l+1)}{3} \right]^{\frac{1}{2}} G_\mu^{(1)}(l, l).\end{aligned}\quad (2.15)$$

L'opérateur moment quadripolaire s'écrit explicitement

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\mu^{(2)} &= \alpha 2\sqrt{\frac{14}{15}} [s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)} + \frac{11}{\sqrt{21}} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} \\ &\quad + \beta 6\sqrt{\frac{6}{35}} [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} + \sqrt{\frac{66}{7}} [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(2)},\end{aligned}\quad (2.16)$$

avec  $\alpha, \beta = \pm$  et le tenseur  $\hat{T}_\mu^{(1)}$  correspond au moment angulaire donné par l'équation (2.5).

### Limite SU(5)

La chaîne de sous-algèbres à cette limite s'écrit

$$U(15) \supset SU(5) \supset O(5) \supset O(3).\quad (2.17)$$

La dérivation des expressions des générateurs de SU(5) commence à partir de l'équation (2.8). Ainsi, on a besoin de définir tout d'abord les éléments de matrice

$$\langle \tilde{l}^2 l \| a_i^\dagger \| \tilde{l} \tilde{l} \rangle = \sqrt{2(2l+1)},\quad (2.18)$$

pour arriver à exprimer l'élément de matrice réduit dans (2.8) par

$$\langle \tilde{l}^2 l \| [a_i^\dagger \times \tilde{a}_i]^{(\lambda)} \| \tilde{l}^2 l' \rangle = 2(-)^{\lambda+\tilde{l}} \sqrt{(2\lambda+1)(2l+1)(2l'+1)} \begin{Bmatrix} \tilde{l} & \tilde{l} & \lambda \\ l' & l & \tilde{l} \end{Bmatrix}.\quad (2.19)$$

Les générateurs de SU(5) s'écrivent alors

$$\hat{T}_\mu^{(\lambda)} = \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \lambda \\ l' & l & 2 \end{Bmatrix} G_\mu^{(\lambda)}(l, l'), \quad \lambda = 1, \dots, 4.\quad (2.20)$$

## CHAPITRE 2 : Modèle *sdg* des bosons en interaction

Nous pouvons vérifier que ces générateurs satisfont les relations de commutation

$$\begin{aligned}
 [\hat{T}_\mu^{(\lambda)}, \hat{T}_{\mu'}^{(\lambda')}] &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda''\mu''} [(-)^{\lambda+\lambda'} - (-)^{\lambda''}] \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda\mu\lambda'\mu' | \lambda''\mu'' \rangle \\
 &\times \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\} \hat{T}_{\mu''}^{(\lambda'')}. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Les expressions explicites des tenseurs d'ordre 1 et 3 sont les mêmes que celles données par les équations (2.5) et (2.12). En ce qui concerne celles des générateurs d'ordre 2 et 4 elles s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \hat{T}^{(2)} &= \alpha\beta \frac{1}{\sqrt{5}} [s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)} - \frac{3}{14} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} + \alpha \frac{6}{7\sqrt{5}} [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} \\
 &\quad + \frac{3\sqrt{22}}{14} [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(2)}, \\
 \hat{T}^{(4)} &= \beta \frac{1}{\sqrt{5}} [s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)} + \frac{2}{7} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} + \alpha \frac{\sqrt{110}}{14} [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} \\
 &\quad + \frac{1}{14} \sqrt{\frac{143}{5}} [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(4)}, \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \beta = \pm$ . Par conséquent, tout comme le cas de l'algèbre  $U(14)$ , plusieurs réalisations équivalentes sont possibles pour l'algèbre  $SU(5)$  et qui laissent invariantes les relations de commutations entre ses générateurs.

Notons que parfois dans la littérature on parle plutôt de la sous-algèbre  $U(5)$  au lieu de  $SU(5)$ . Nous avons choisi de considérer  $SU(5)$  car le générateur d'ordre 0, qui est l'opérateur nombre total de bosons  $\hat{N}$ , commute avec tous les générateurs des sous-algèbres de  $U(15)$  incluant  $SU(5)$ .

### Limite $O(15)$

L'algèbre  $O(15)$  est associée à la séniorité généralisée en *sdg*-IBM. Ses 105 générateurs sont donnés par

$$\begin{aligned}
 O(15) : \quad &\left\{ [s^\dagger \times \tilde{d} + \alpha d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)}, [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(1,3)}, [s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)}, \right. \\
 &\left. [d^\dagger \times \tilde{g} + \beta g^\dagger \times \tilde{d}]^{(\lambda=2,\dots,6)}, [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(1,3,5,7)} \right\}, \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \beta = \pm$ . Il est clair d'après les équations (2.11) et (2.23) que  $O(14)$  est sous-algèbre de  $O(15)$  et elle contient à son tour les algèbres  $O(5)$  et  $O(3)$ . La chaîne de sous-algèbres à cette limite s'écrit

$$U(15) \supset O(15) \supset O(14) \supset O(5) \supset O(3). \tag{2.24}$$

Nous signalons que dans ce cas aussi on a affaire à plusieurs manières équivalentes de construire l'algèbre  $O(15)$  suivant que  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signe positif ou négatif.

### Limite SU(6)

Comme a été évoqué plus haut, cette limite est déduite à partir d'une configuration à deux fermions occupant une couche de moment cinétique  $\tilde{j} = \frac{5}{2}$ . Dans ce schéma, le groupe symplectique Sp(6) qui est un sous-groupe de SU(6), forme un groupe de symétrie du système. La chaîne de sous-algèbres de U(15) dans ce cas est alors

$$U(15) \supset SU(6) \supset Sp(6) \supset O(3). \quad (2.25)$$

L'expression générale définissant les générateurs de SU(6) est [42]

$$\hat{P}_\mu^{(\lambda)} = \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} (-)^{\lambda} \left\{ \begin{matrix} l & l' & \lambda \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{matrix} \right\} G_\mu^{(\lambda)}(l, l'), \quad (2.26)$$

avec  $l, l' = 0, 2, 4$ . Ainsi, ils s'écrivent explicitement

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}[s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)} + \frac{5\sqrt{6}}{42}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} - \frac{9\sqrt{2}}{28}[d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} \\ &\quad - \frac{\sqrt{33}}{14}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(2)}, \\ \hat{P}^{(3)} &= \frac{9\sqrt{2}}{28}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)} - \frac{5\sqrt{3}}{14}[d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)} + \frac{\sqrt{22}}{28}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(3)}, \\ \hat{P}^{(4)} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}[s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)} - \frac{3}{14}\sqrt{\frac{5}{2}}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} - \frac{1}{14}\sqrt{\frac{55}{3}}[d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{286}}{28}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(4)}, \\ \hat{P}^{(5)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{14}}[g^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{g}]^{(5)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(5)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'opérateur d'ordre 1 correspond à celui du moment cinétique donné par (2.5).

## 2.2 Classification des représentations de U(15)

La suite logique de l'établissement de la sous-structure de l'algèbre U(15) est de construire les états de base qui vont servir à la diagonalisation du hamiltonien du modèle. Bien que cette tâche est rendue aussi longue que compliquée par la multitude des sous-algèbres de U(15), elle est par ailleurs simplifiée par le fait que ces états sont totalement symétriques. La classification des représentations irréductibles de U(15) à chacune de ses limites fera l'objet de la présente section. Pour ce faire, nous allons de nouveau traiter séparément les limites de couplage faible et celles de couplage fort.

### 2.2.1 Limites de couplage faible

#### Limite $U(6) \otimes U(9)$

Étant complètement symétrique, la représentation irréductible  $[N]$  de  $U(15)$  se décompose en  $[n_{sd}] \otimes [n_g]$  de  $U(6) \otimes U(9)$  avec  $n_{sd} + n_g = N$  et  $N$  est le nombre total de bosons (particules ou trous). Comme l'algèbre  $U(6)$  correspond à celle du  $sd$ -IBM, la décomposition de la représentation irréductible qui lui est associée est la même que celle développée au chapitre 1. Pour ce qui est des représentations de  $U(9)$ , elles sont caractérisées par les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccccc} U(15) & \supset & U(9) & \supset & O(9) & \supset & O(3). \\ [N] & & n_g & & v_g & & n_\Delta, L \end{array} \quad (2.28)$$

Le nombre de bosons  $g$  contenus dans les  $N$  bosons est donné par

$$n_g = N, N - 1, N - 2, \dots, 0. \quad (2.29)$$

Les valeurs de  $v_g$  sont déduites à partir des règles de réduction correspondant à  $U(n) \supset O(n)$  et sont données par

$$v_g = n_g, n_g - 2, \dots, 0 \text{ ou } 1. \quad (2.30)$$

En décomposant  $O(9)$  vers  $O(3)$ , on rencontre le problème de la multiplicité des représentations de  $O(3)$  contenues dans une même représentation de  $O(9)$ , ce qui explique la présence du nombre quantique additif  $n_\Delta$  dans la chaîne (2.28). La démarche suivie pour obtenir les valeurs de  $L$  contenues dans une représentation  $v_g$  de  $O(9)$  a été établie par Kota *et al.* dans la référence [43]. Elle consiste à considérer tout d'abord un groupe  $U(n)$  avec  $n = \sum_{i=1}^k (2l_i + 1)$  tel que la décomposition de la représentation  $[1]$  de  $U(n)$  vers celles de  $O(3)$  donne les valeurs  $L = l_1, l_2, \dots, l_k$ . On suppose avoir le spectre à une particule généré par l'opérateur  $l_z$  de telle façon que chaque valeur propre  $m_i$  est  $d_i$  fois dégénérée. Par la suite, les  $N$  bosons seront distribués sur les orbitales  $l_z$  de toutes les manières possibles. Si cette distribution est notée  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , on a  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  et une valeur propre totale  $m = \sum_{i=1}^k n_i m_i$ . Ainsi, la dégénérescence de  $m$  est donnée par le produit

$$d(m) = \prod_{i=1}^k \binom{d_i + n_i - 1}{n_i}. \quad (2.31)$$

Il s'en suit que la dégénérescence des  $\sum_{i=1}^k l_z(i)$  valeurs propres  $m$  est

$$D(m) = \sum_{(n_1, \dots, n_k)} \prod_{i=1}^k \binom{d_i + n_i - 1}{n_i}. \quad (2.32)$$

## 2.2 Classification des représentations de U(15)

TAB. 2.1 – Les valeurs de  $L$  contenues dans quelques représentations  $v_g$  de O(9). L'exposant figurant en-dessus de quelques représentations présente la multiplicité de la représentation (nombre de fois qu'elle apparaît dans une représentation  $v_g$ ).

$v_g$	$L$
0	0
1	4
2	2, 4, 6, 8
3	0, 2, 3, 4, 5, 6 <sup>2</sup> , 7, 8, 9, 10, 12
4	0, 2 <sup>2</sup> , 3, 4 <sup>3</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>3</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8 <sup>3</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10 <sup>3</sup> , 11, 12 <sup>2</sup> , 13, 14, 16
5	0, 1, 2 <sup>3</sup> , 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>4</sup> , 5 <sup>4</sup> , 6 <sup>5</sup> , 7 <sup>4</sup> , 8 <sup>6</sup> , 9 <sup>4</sup> , 10 <sup>5</sup> , 11 <sup>4</sup> , 12 <sup>4</sup> , 13 <sup>3</sup> , 14 <sup>3</sup> , 15 <sup>2</sup> , 16 <sup>2</sup> , 17, 18, 20
6	0 <sup>2</sup> , 1, 2 <sup>4</sup> , 3 <sup>4</sup> , 4 <sup>7</sup> , 5 <sup>5</sup> , 6 <sup>9</sup> , 7 <sup>7</sup> , 8 <sup>9</sup> , 9 <sup>8</sup> , 10 <sup>9</sup> , 11 <sup>7</sup> , 12 <sup>9</sup> , 13 <sup>6</sup> , 14 <sup>7</sup> , 15 <sup>5</sup> , 16 <sup>5</sup> , 17 <sup>3</sup> , 18 <sup>4</sup> , 19 <sup>2</sup> , 20 <sup>2</sup> , 21, 22, 24

À partir de cette dernière équation, nous pouvons déduire la multiplicité d'une valeur de  $L$ , pour un nombre de bosons  $N$ , qui est donnée par la différence

$$D_N(L) = D(m = L) - D(m = L + 1). \quad (2.33)$$

Finalement, la règle de sélection (2.30) nous permet d'écrire

$$D_{v_g}(L) = D_{n_g=v_g}(L) - D_{n_g=v_g-2}(L). \quad (2.34)$$

Dans le tableau 2.1 sont données les valeurs de  $L$  contenues dans une représentation  $v_g$  pour  $v_g \leq 6$ .

### Limite U(1) $\otimes$ U(14)

Les états de base à cette limite sont étiquetés par les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U}(15) & \supset & \text{U}(14) & \supset & \text{O}(14) & \supset & \text{O}(5) & \supset & \text{O}(3). \\ [N] & & n_{dg} & & v_{dg} & & n_{\Delta}, (\tau_1, \tau_2) & & n'_{\Delta}, L \end{array} \quad (2.35)$$

Les réductions U(15)  $\supset$  U(14) et U(14)  $\supset$  O(14) sont données respectivement par

$$\begin{aligned} n_{dg} &= N, N - 1, N - 2, \dots, 0, \\ v_{dg} &= n_{dg}, n_{dg} - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

## CHAPITRE 2 : Modèle $sdg$ des bosons en interaction

La réduction  $O(14) \supset O(5)$  est plus compliquée et les algorithmes utilisés pour obtenir les représentations irréductibles de  $O(5)$  contenues dans celles de  $O(14)$  sont présentés dans les références [42, 43]. Nous ne les détaillerons pas dans ce paragraphe, mais nous signalons que le premier utilise les théorèmes de Littlewood [44] tandis que la deuxième méthode utilise les techniques de l'espace de poids. Ainsi on a pour  $v_{dg} \leq 2$

$$\begin{aligned} v_{dg} = 0 & : (\tau_1, \tau_2) = (0, 0), \\ v_{dg} = 1 & : (\tau_1, \tau_2) = (2, 0), \\ v_{dg} = 2 & : (\tau_1, \tau_2) = (4, 0), (2, 2), (2, 0), \end{aligned} \quad (2.37)$$

et pour  $v_{dg} \geq 3$  on a

$$(\tau_1, \tau_2) = (2v_{dg}, 0), (2v_{dg} - 2, 2), (2v_{dg} - 2, 0), (2v_{dg} - 3, 1), (2v_{dg} - 4, 4), \dots \quad (2.38)$$

Regardant maintenant la réduction  $O(5) \supset O(3)$ . Les techniques utilisées pour déduire les valeurs possibles de  $L$  contenues dans une représentation  $(\tau_1, \tau_2)$  sont diverses. Nous nous contentons ici de présenter brièvement la plus simple d'entre elles et qui fait usage des produits de Kronecker [44]. Ainsi, nous définissons le produit de Kronecker de deux représentations symétriques de  $O(5)$  par

$$(\tau, 0) \otimes (\tau', 0) = \sum_{k=0}^{\tau'} \sum_{r=0}^{\tau'-k} (\tau - \tau' + k + 2r, k), \quad (2.39)$$

et nous commençons par considérer le produit

$$(\tau_1, 0) \otimes (1, 0) = (\tau_1 + 1, 0) \oplus (\tau_1, 1) \oplus (\tau_1 - 1, 0). \quad (2.40)$$

Ayant à notre disposition les valeurs de  $L$  contenues dans  $(\tau_1 + 1, 0)$  et  $(\tau_1 - 1, 0)$  qui sont obtenues à partir de l'équation (1.30), il nous est tout à fait possible de déduire à partir de l'équation (2.40) celles contenues dans  $(\tau_1, 1)$ . Notons ici que la décomposition de  $(\tau_1, 1)$  en  $L$  a été déjà établie dans la référence [45] dans le cadre du modèle  $sd$ -IBM et est donnée par

$$\begin{aligned} L &= 2\tau_1 + 1, 2\tau_1, \dots, 3, \\ &\tau_1, \tau_1 - 1, \dots, 1, \quad (\tau_1 > 0) \\ &\tau_1 + 2, \tau_1 + 1, \dots, 5, \quad (\tau_1 > 2) \\ &\tau_1 + 3, \tau_1 + 2, \dots, 7, \quad (\tau_1 > 3) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

En considérant le produit

$$\begin{aligned} (\tau_1, 0) \otimes (2, 0) &= (\tau_1 + 2, 0) \oplus (\tau_1 + 1, 1) \oplus (\tau_1, 2) \oplus (\tau_1, 0) \\ &\oplus (\tau_1 - 1, 1) \oplus (\tau_1 - 1, 1) \oplus (\tau_1 - 2, 0), \end{aligned} \quad (2.42)$$

## 2.2 Classification des représentations de U(15)

TAB. 2.2 – Les valeurs de  $L$  contenues dans quelques représentations  $(\tau_1, \tau_2)$  de  $O(5)$ .

$(\tau_1, \tau_2)$	$L$
(1, 1)	1, 3
(2, 1)	1, 2, 3, 4, 5
(2, 2)	0, 2, 3, 4, 6
(3, 1)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4, 5 <sup>2</sup> , 6, 7
(3, 2)	1, 2 <sup>2</sup> , 3, 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6, 7, 8
(3, 3)	1, 3 <sup>2</sup> , 4, 5, 6, 7, 9
(4, 1)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8, 9
(4, 2)	0, 1, 2 <sup>2</sup> , 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>3</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>3</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8 <sup>2</sup> , 9, 10
(4, 3)	1, 2 <sup>2</sup> , 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>3</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8 <sup>2</sup> , 9, 10, 11
(4, 4)	0, 2, 3, 4 <sup>2</sup> , 5, 6 <sup>2</sup> , 7, 8, 9, 10, 12
(5, 1)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>3</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>3</sup> , 8 <sup>2</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10, 11
(5, 2)	0, 1, 2 <sup>2</sup> , 3 <sup>3</sup> , 4 <sup>3</sup> , 5 <sup>3</sup> , 6 <sup>4</sup> , 7 <sup>3</sup> , 8 <sup>3</sup> , 9 <sup>3</sup> , 10 <sup>2</sup> , 11, 12
(5, 3)	1 <sup>2</sup> , 2 <sup>2</sup> , 3 <sup>3</sup> , 4 <sup>3</sup> , 5 <sup>4</sup> , 6 <sup>3</sup> , 7 <sup>4</sup> , 8 <sup>3</sup> , 9 <sup>3</sup> , 10 <sup>2</sup> , 11 <sup>2</sup> , 12, 13
(5, 4)	1, 2 <sup>2</sup> , 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>3</sup> , 5 <sup>3</sup> , 6 <sup>3</sup> , 7 <sup>3</sup> , 8 <sup>3</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10 <sup>2</sup> , 11 <sup>2</sup> , 12, 13, 14
(5, 5)	1, 3 <sup>2</sup> , 4, 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8, 9 <sup>2</sup> , 10, 11, 12, 13, 15

et en utilisant les réductions  $(\tau_1, 0) \rightarrow L$  et  $(\tau_1, 1) \rightarrow L$ , nous pouvons déduire les valeurs de  $L$  contenues dans la représentation  $(\tau_1, 2)$  et ainsi de suite. Dans le tableau 2.2 nous présentons les valeurs de  $L$  contenues dans quelques représentations de  $O(5)$ .

### 2.2.2 Limites de couplage fort

#### Limite SU(3)

Les représentations irréductibles à cette limite sont classifiées par les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccc} U(15) \supset SU(3) \supset O(3). & & (2.43) \\ [N] & (\lambda, \mu) & K, L \end{array}$$

La réduction  $U(15) \supset SU(3)$  a été étudiée dans la référence [40] et sa dérivation repose sur la méthode des diagrammes élémentaires admissibles développée par Bargmann et Moshinsky dans la référence [46]. Les valeurs de  $(\lambda, \mu)$  contenues

CHAPITRE 2 : Modèle *sdg* des bosons en interaction

TAB. 2.3 – Décomposition des représentations  $[N]$  de  $U(15)$  vers  $(\lambda, \mu)$  de  $SU(3)$  pour  $N \leq 5$ .

$[N]$	$(\lambda, \mu)$								
[1]	(4, 0)								
[2]	(8, 0)	(4, 2)	(0, 4)						
[3]	(12, 0)	(8, 2)	(6, 3)	(4, 4)	(6, 0)	(3, 3)	(0, 6)	(2, 2)	(0, 0)
[4]	(16, 0)	(12, 2)	(10, 3)	$(8, 4)^2$	(10, 0)	(7, 3)	(8, 1)	$(4, 6)^2$	(5, 4)
	$(6, 2)^2$	(3, 5)	(4, 3)	(5, 1)	(0, 8)	$(2, 4)^2$	$(4, 0)^2$	(1, 3)	(0, 2)
[5]	(20, 0)	(16, 2)	(14, 3)	$(12, 4)^2$	(14, 0)	(10, 5)	(11, 3)	(12, 1)	$(8, 6)^2$
	(9, 4)	$(10, 2)^3$	(6, 7)	$(7, 5)^2$	$(8, 3)^2$	$(9, 1)^2$	$(4, 8)^2$	(5, 6)	$(6, 4)^4$
	(0, 10)	(1, 8)	$(2, 6)^3$	$(3, 4)^2$	$(4, 2)^4$	(1, 5)	(2, 3)	(3, 1)	$(0, 4)^2$
	$(2, 0)^2$								

dans la représentation complètement symétrique  $[N]$  de  $U(15)$  sont données dans le tableau 2.3 pour  $N \leq 5$ . Le cas correspondant à  $N \geq 5$  a été cité dans la référence [42] et est donné par

$$\begin{aligned}
 [N] \quad : \quad (\lambda, \mu) = & (4N, 0) \oplus (4N - 4, 2) \oplus (4N - 6, 3) \oplus (4N - 8, 4)^2 \\
 & \oplus (4N - 6, 0) \oplus (4N - 10, 5) \oplus (4N - 8, 1) \dots \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Cependant, il faut noter que cette réduction a été par ailleurs abordée à travers plusieurs travaux notamment ceux de Ratna Raju [47] et Goldfarb [48] qui ont employé des techniques reposant sur les tableaux de Young.

Finalement, les lois de décompositions associées à  $SU(3) \supset O(3)$  sont les mêmes que celles discutées au cours de la section 1.4 dans le cadre du modèle *sd*-IBM.

### Limite $SU(5)$

Les états propres à cette limite sont classifiés par les nombres quantiques

$$\begin{aligned}
 U(15) \supset SU(5) \supset O(5) \supset O(3). \\
 [N] \quad (n_1, \dots, n_4) \quad (\tau_1, \tau_2) \quad n_\Delta, L \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

La réduction  $U(15) \supset SU(5)$  a été développée dans la référence [40] en suivant une méthode similaire à celle utilisée dans la limite  $SU(3)$  dans la mesure où elle se base aussi sur les diagrammes élémentaires admissibles. Ainsi, les valeurs de

## 2.2 Classification des représentations de U(15)

$(n_1, n_2, n_3, n_4)$  contenues dans la représentation symétrique  $[N]$  de U(15) sont

$$[N] : (n_1, \dots, n_4) = \sum_{pqrs} (2N - 4p - 6q - 8r - 10s, 2p, 2q, 2r), \quad (2.46)$$

où  $p, q, r$  et  $s$  sont des entiers positifs vérifiant  $2p + 3q + 4r + 5s \leq N$ . Nous signalons ici que si l'on considère l'algèbre U(5) au lieu de SU(5), les représentations irréductibles de la première notées  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  sont simplement liées à  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  par  $n_1 = m_1 - m_2$ ,  $n_2 = m_2 - m_3$ ,  $n_3 = m_3 - m_4$  et  $n_4 = m_4 - m_5$ .

La réduction U(5)  $\supset$  O(5) a été étudiée dans la référence [42] en se basant sur le théorème de Littlewood [44]. Les règles de branchement correspondant aux décompositions de représentations de U(5) de la forme  $(m, 0, 0, 0, 0)$  et  $(m - 2, 2, 0, 0, 0)$  s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} (m, 0, 0, 0, 0) & : (\tau_1, \tau_2) = \sum_{r=0}^{[m/2]} (m - 2r, 0), \\ (m - 2, 2, 0, 0, 0) & : (\tau_1, \tau_2) = (m, 0) \oplus \sum_{r=1}^{[(m-2)/2]} (m - 2r, 0)^2 \oplus (m - 2[m/2], 0) \\ & \oplus \sum_{r=1}^{[(m-1)/2]} (m - 2r, 2) + \sum_{r=0}^{(m-2)/2} (m - 2r - 2, 4). \end{aligned} \quad (2.47)$$

où le symbole  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . La décomposition U(5)  $\supset$  O(5) pour des représentations de U(5) de la forme  $(m, 0, 0, 0, 0)$  et  $(m, 2, 0, 0, 0)$ ,  $(m, 4, 0, 0, 0)$  et  $(m, 2, 2, 0, 0)$  ont été tabulées dans la référence [40] et sont reportées dans le tableau 2.4. Finalement, la réduction de O(5) à O(3) a été discutée dans la section précédente.

### Limite O(15)

Les états de base à la limite O(15) sont étiquetés par les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccccc} \text{U}(15) & \supset & \text{O}(15) & \supset & \text{O}(14) & \supset & \text{O}(5) & \supset & \text{O}(3). \\ [N] & & v_{sdg} & & v_{dg} & & n_{\Delta}, (\tau_1, \tau_2) & & n'_{\Delta}, L \end{array} \quad (2.48)$$

Comme on a affaire à des représentations complètement symétriques, la représentation irréductible de O(15) n'est caractérisée que par un seul nombre quantique car tous les autres nombres sont nuls. Ainsi on a

$$v_{sdg} = N, N - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0. \quad (2.49)$$

Pour O(15)  $\supset$  O(14) on a

$$v_{dg} = v_{sdg}, v_{sdg} - 1, \dots, 0. \quad (2.50)$$

CHAPITRE 2 : Modèle *sdg* des bosons en interaction

TAB. 2.4 – Décompositions des représentations  $(m, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(m, 2, 0, 0, 0)$ ,  $(m, 4, 0, 0, 0)$  et  $(m, 2, 2, 0, 0)$  de  $U(5)$  vers  $(\tau_1, \tau_2)$  de  $O(5)$

$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$	$m$	$(\tau_1, \tau_2)$
$(m, 0, 0, 0, 0)$	pair	$(0, 0), (2, 0), \dots, (m, 0)$
	impair	$(1, 0), (3, 0), (5, 0), \dots, (m, 0)$
$(m, 2, 0, 0, 0)$	pair	$(0, 0), (2, 0)^2, (4, 0)^2, \dots, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(3, 1), (5, 1), \dots, (m-1, 1),$ $(2, 2), (4, 2), (6, 2), \dots, (m, 2)$
	impair	$(1, 0), (3, 0)^2, (5, 0)^2, \dots, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(2, 1), (4, 1), (6, 1), \dots, (m-1, 1),$ $(3, 2), (5, 2), (7, 2), \dots, (m, 2)$
$(m, 4, 0, 0, 0)$	pair	$(0, 0), (2, 0)^2, (4, 0)^2, \dots, (m-4, 0)^3, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(3, 1), (5, 1)^2, \dots, (m-3, 0)^2, (m-1, 0),$ $(2, 2), (4, 2)^2, (6, 2)^2, \dots, (m-2, 2)^2, (m, 2),$ $(5, 3), (7, 3), \dots, (m-1, 3),$ $(4, 4), (6, 4), (8, 4), \dots, (m, 4)$
	impair	$(1, 0), (3, 0)^2, (5, 0)^3, \dots, (m-4, 0)^3, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(2, 1), (4, 1)^2, (6, 1)^2, \dots, (m-3, 1)^2, (m-1, 1),$ $(3, 2), (5, 2)^2, (7, 2)^2, \dots, (m-2, 2)^2, (m, 2),$ $(4, 3), (6, 3), (8, 3)^2, \dots, (m-1, 3),$ $(5, 4), (7, 4), (9, 4), \dots, (m, 4)$
$(m, 2, 2, 0, 0)$	pair	$(0, 0), (2, 0)^2, (4, 0)^2, \dots, (m-4, 0)^2, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(3, 1), (5, 1), \dots, (m-3, 1), (m-1, 1),$ $(3, 2), (5, 2), \dots, (m-3, 2), (m-1, 2),$ $(2, 2)^2, (4, 2)^2, (6, 2)^2, \dots, (m-2, 2)^2, (m, 2)$
	impair	$(1, 0), (3, 0)^2, (5, 0)^2, \dots, (m-4, 0)^2, (m-2, 0)^2, (m, 0),$ $(2, 1), (4, 1), (6, 1), \dots, (m-3, 1), (m-1, 1),$ $(2, 2), (4, 2)^2, (6, 2)^2, \dots, (m-3, 2), (m-1, 2),$ $(2, 2), (4, 2), (6, 2), \dots, (m-3, 2), (m-1, 2),$ $(3, 2)^2, (5, 2)^2, (7, 2)^2, \dots, (m-2, 2)^2, (m, 2)$

Les réductions  $O(14) \supset O(5)$  et  $O(5) \supset O(3)$  ont été déjà discutées plus haut dans le paragraphe 2.2.1.

### Limite $SU(6)$

Les représentations irréductibles des sous-algèbres de  $U(15)$  dans ce cas sont classifiées selon les nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccccc} U(15) & \supset & SU(6) & \supset & Sp(6) & \supset & O(3). \\ [N] & & (f_1, \dots, f_5) & & \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle & & n_\Delta, L \end{array} \quad (2.51)$$

Les dérivations des règles de branchement associées aux réductions  $U(15) \supset SU(6)$  et  $SU(6) \supset Sp(6)$  se basent sur les techniques de l'espace de poids et sont présentées dans la référence [43]. Ces lois s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} [N] & : (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4, f'_5) = \sum_{jk} (0, j, 0, N - 2j - 3k, 0), \\ (0, \mu, 0, \nu, 0) & : \sum_{p=0}^{\min(\mu, \nu)} \sum_{q=0}^p \sum_{r=p-q}^{\mu+\nu-p-q} (q, r, q), \end{aligned} \quad (2.52)$$

où les représentations de Young correspondant à  $(f'_1, \dots, f'_5) \equiv (0, \mu, 0, \nu, 0)$  et  $(q, r, q)$  sont  $(f_1, \dots, f_5) = (\mu + \nu, \mu + \nu, \nu, \nu, 0)$  et  $\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle = \langle 2q + r, q + r, q \rangle$  respectivement. Finalement, la décomposition  $Sp(6) \supset O(3)$  n'obéit pas à une formule analytique mais elle a été toutefois calculée numériquement et tabulée [44]. Nous nous contentons ici de donner dans le tableau 2.5 les valeurs de  $L$  contenues dans quelques représentations  $\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$ .

## 2.3 Hamiltonien

Le hamiltonien général à un et à deux corps qui incorpore les degrés de liberté quadripolaires et hexadécapolaires se construit sous les mêmes contraintes que celles imposées au hamiltonien du *sd*-IBM. Cela veut dire qu'il doit préserver l'invariance

TAB. 2.5 – Décomposition de quelques représentations de  $Sp(6)$  vers celles de  $O(3)$ .

$\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$	$L$
$\langle 1, 1, 0 \rangle$	2, 4
$\langle 2, 2, 0 \rangle$	0, 2 <sup>2</sup> , 3, 4 <sup>2</sup> , 5, 6, 8
$\langle 3, 3, 0 \rangle$	0 <sup>2</sup> , 1, 2 <sup>3</sup> , 3 <sup>3</sup> , 4 <sup>5</sup> , 5 <sup>3</sup> , 6 <sup>5</sup> , 7 <sup>3</sup> , 8 <sup>3</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10 <sup>2</sup> , 12
$\langle 4, 4, 0 \rangle$	0 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> , 2 <sup>7</sup> , 3 <sup>5</sup> , 4 <sup>10</sup> , 5 <sup>8</sup> , 6 <sup>10</sup> , 7 <sup>8</sup> , 8 <sup>10</sup> , 9 <sup>6</sup> , 10 <sup>7</sup> , 11 <sup>4</sup> , 12 <sup>4</sup> , 13 <sup>2</sup> , 14 <sup>2</sup> , 16
$\langle 5, 5, 0 \rangle$	0 <sup>4</sup> , 1 <sup>4</sup> , 2 <sup>11</sup> , 3 <sup>11</sup> , 4 <sup>16</sup> , 5 <sup>16</sup> , 6 <sup>20</sup> , 7 <sup>17</sup> , 8 <sup>20</sup> , 9 <sup>16</sup> , 10 <sup>17</sup> , 11 <sup>13</sup> , 12 <sup>13</sup> , 13 <sup>8</sup> , 14 <sup>8</sup> , 15 <sup>5</sup> , 16 <sup>4</sup> , 17 <sup>2</sup> , 18 <sup>2</sup> , 20
$\langle 6, 6, 0 \rangle$	0 <sup>6</sup> , 1 <sup>7</sup> , 2 <sup>17</sup> , 3 <sup>19</sup> , 4 <sup>28</sup> , 5 <sup>26</sup> , 6 <sup>35</sup> , 7 <sup>32</sup> , 8 <sup>36</sup> , 9 <sup>33</sup> , 10 <sup>35</sup> , 11 <sup>28</sup> , 12 <sup>30</sup> , 13 <sup>23</sup> , 14 <sup>22</sup> , 15 <sup>16</sup> , 16 <sup>15</sup> , 17 <sup>9</sup> , 18 <sup>9</sup> , 19 <sup>5</sup> , 20 <sup>4</sup> , 21 <sup>2</sup> , 22 <sup>2</sup> , 24

par rapport aux rotations et conserver le nombre total de bosons. Il s'écrit [49]

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_d \hat{n}_d + \epsilon_g \hat{n}_g + \frac{1}{2} v_{ssss}^0 [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)}]^{(0)} \\
 & + \frac{1}{2} v_{ssdd}^0 [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(0)} + \text{c.h.}]^{(0)} + \frac{1}{2} v_{ssgg}^0 [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g}]^{(0)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + \sqrt{5} v_{sd sd}^2 [[s^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{s} \times \tilde{d}]^{(2)}]^{(0)} + \sqrt{\frac{5}{2}} v_{sd dd}^2 [[s^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(2)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + \sqrt{5} v_{sd dg}^2 [[s^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{g}]^{(2)} + \text{c.h.}]^{(0)} + \sqrt{\frac{5}{2}} v_{sd gg}^2 [[s^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g}]^{(2)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + 3v_{sg sg}^4 [[s^\dagger \times g^\dagger]^{(4)} \times [\tilde{s} \times \tilde{g}]^{(4)}]^{(0)} + \frac{3}{\sqrt{2}} v_{sg dd}^4 [[s^\dagger \times g^\dagger]^{(4)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(4)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + 3v_{sg dg}^4 [[s^\dagger \times g^\dagger]^{(4)} \times [\tilde{d} \times \tilde{g}]^{(4)} + \text{c.h.}]^{(0)} + \frac{3}{\sqrt{2}} v_{sg gg}^4 [[s^\dagger \times g^\dagger]^{(4)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g}]^{(4)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} v_{dd dd}^L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(L)}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=2,4} \sqrt{\frac{2L+1}{2}} v_{dd dg}^L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{g} + \text{c.h.}]^{(L)}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} v_{dd gg}^L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g}]^{(L)} + \text{c.h.}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=2}^6 \sqrt{2L+1} v_{dg dg}^L [[d^\dagger \times g^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{g}]^{(L)}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=2,4,6} \sqrt{2L+1} v_{dg gg}^L [[d^\dagger \times g^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g} + \text{c.h.}]^{(L)}]^{(0)} \\
 & + \sum_{L=0,2,4,6,8} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} v_{gg gg}^L [[g^\dagger \times g^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{g} \times \tilde{g}]^{(L)}]^{(0)}, \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

où c.h. désigne le conjugué hermitique. Le hamiltonien *sdg*-IBM dans sa forme (2.53) compte 35 paramètres libres dont 3 énergies à un boson notées  $\epsilon_s$ ,  $\epsilon_d$  et  $\epsilon_g$  et 32 interactions à deux corps  $v_{ll'lm}^L = \langle ll' | \hat{H}_2 | l''l''' \rangle$ . Tout comme le hamiltonien du *sd*-IBM, celui associé au modèle *sdg*-IBM peut également s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs de Casimir correspondant aux différentes sous-algèbres de  $U(15)$  présentées au cours des sections 2.1.1 et 2.1.2. Ainsi, son expression permet d'accéder à des solutions analytiques au problème de valeurs propres si l'on choisit d'annuler certains de ses paramètres de telle manière que le hamiltonien résultant n'implique que les invariants associés à l'une des sous-algèbres de  $U(15)$ . On parle alors de symétries dynamiques du hamiltonien *sdg*-IBM.

### 2.3.1 Symétries dynamiques

La mise en évidence des différentes symétries dynamiques du modèle *sdg*-IBM nécessite avant toute chose de connaître les expressions des opérateurs invariants des sous-algèbres de  $U(15)$ . Dans les paragraphes suivants, nous exposerons séparément les différentes symétries dynamiques du modèle tout en donnant les expressions des hamiltoniens, des opérateurs de Casimir ainsi que des énergies. Cette présentation s'inspire des références [43, 50]

#### Limite $U(6) \otimes U(9)$

Le hamiltonien associé à la limite  $U(6) \otimes U(9)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 = & E_0 + a_0 \hat{H}_{sd} + a_1 \hat{C}_1(U(9)) + a_2 \hat{C}_2(U(9)) + a_3 \hat{C}_1(U(6)) \hat{C}_1(U(9)) \\ & + a_4 \hat{C}_2(O(9)) + \gamma' \hat{C}_2(O_g(3)) + \gamma \hat{C}_2(O_{sdg}(3)), \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $E_0$  est une constante n'ayant de contribution qu'à l'énergie de liaison et elle n'a donc aucun effet sur le spectre d'énergie.  $\hat{H}_{sd}$  est le hamiltonien correspondant à l'une des trois limites du modèle *sd*-IBM et

$$\begin{aligned} \hat{C}_1(U(9)) &= \hat{n}_g, \\ \hat{C}_2(U(9)) &= \hat{n}_g(\hat{n}_g + 8), \\ \hat{C}_1(U(6)) &= \hat{n}_s + \hat{n}_d, \\ \hat{C}_2(O(9)) &= \hat{n}_g(\hat{n}_g + 7) - (g^\dagger \cdot g^\dagger)(\tilde{g} \cdot \tilde{g}), \\ \hat{C}_2(O(3)) &= \hat{L}^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

## CHAPITRE 2 : Modèle $sdg$ des bosons en interaction

La base propre au hamiltonien (2.54) notée  $[[N], n_{sd}, n_g, v_g, L_g, L]$  a été établie dans la section 2.2.1. Ses valeurs propres dans cette base s'écrivent

$$\begin{aligned}
 E_1(N, n_{sd}, n_g, v_g, L_g, L) = & E_0 + a_0 \langle H_{sd} \rangle + a_1 n_g + a_2 n_g (n_g + 8) + a_3 n_d n_g \\
 & + a_4 v_g (v_g + 7) + \gamma' L_g (L_g + 1) + \gamma L (L + 1).
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

Ainsi qu'on peut le constater d'après cette dernière équation, la structure du spectre d'énergie à la limite  $U(6) \otimes U(9)$  dépend essentiellement de celle offerte par le hamiltonien  $sd$ -IBM. En effet, le noyau étant décrit par cette limite est considéré comme un cœur ayant la symétrie de l'une des trois limites  $U(5)$ ,  $SU(3)$  ou  $O(6)$  du  $sd$ -IBM couplé à un nombre  $n_g$  de phonons hexadécapolaires.

### Limite $U(1) \otimes U(14)$

Le hamiltonien correspondant à cette limite s'écrit

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{II} = & E_0 + c_1 \hat{C}_1(U(15)) \hat{C}_1(U(14)) + c_2 \hat{C}_1(U(14)) + c_3 \hat{C}_2(U(14)) \\
 & + c_4 \hat{C}_2(O(14)) + c_5 \hat{C}_2(O(5)) + \gamma \hat{C}_2(O(3)),
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

avec

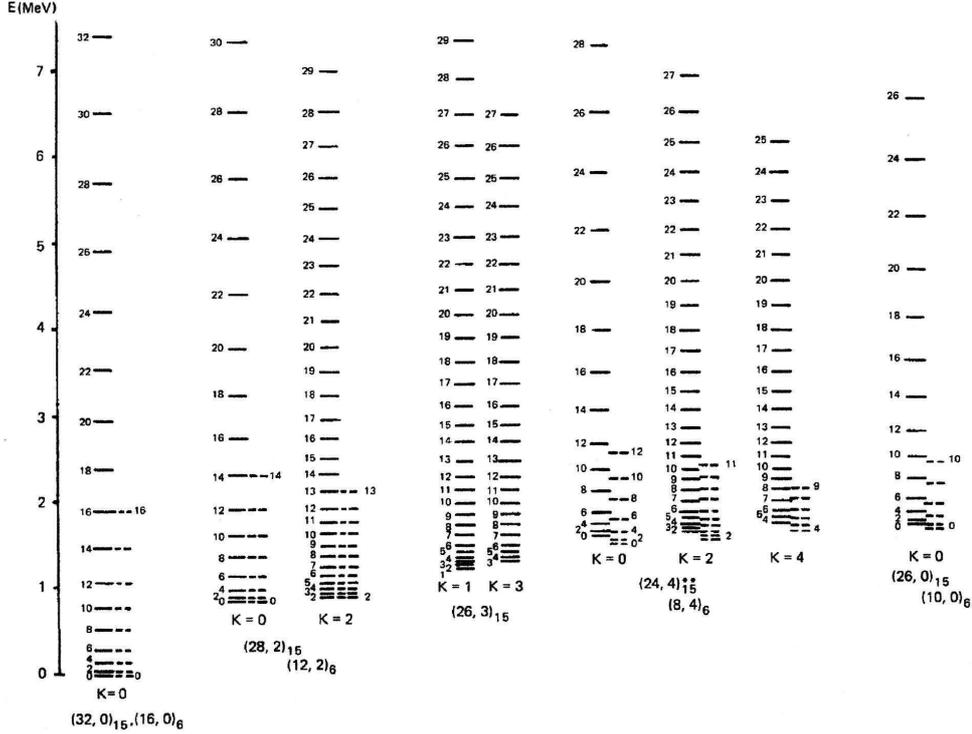
$$\begin{aligned}
 \hat{C}_1(U(15)) &= \hat{N}, \\
 \hat{C}_1(U(14)) &\equiv \hat{n}_{dg} = \hat{n}_d + \hat{n}_g, \\
 \hat{C}_2(U(14)) &= \hat{n}_{dg}(\hat{n}_{dg} + 13) \\
 \hat{C}_2(O(14)) &= \hat{n}_{dg}(\hat{n}_{dg} + 12) - (d^\dagger \cdot d^\dagger + g^\dagger \cdot g^\dagger)(\tilde{d} \cdot \tilde{d} + \tilde{g} \cdot \tilde{g}), \\
 \hat{C}_2(O(5)) &= 8 \left[ \frac{1}{40} \hat{L}^{(1)} \cdot \hat{L}^{(1)} + \hat{Q}^{(3)} \cdot \hat{Q}^{(3)} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Le hamiltonien (2.57) est diagonal dans la base  $[[N]n_{dg}v_{dg}(\tau_1, \tau_2)L]$  que nous avons présentée au cours de la section 2.2.1. Ses valeurs propres sont données par

$$\begin{aligned}
 E_{II}(N, n_{dg}, v_{dg}, (\tau_1, \tau_2), L) = & E_0 + c_1 N n_{dg} + c_2 n_{dg} + c_3 n_{dg} (n_{dg} + 13) \\
 & + c_4 v_{dg} (v_{dg} + 12) + c_5 [\tau_1 (\tau_1 + 3) + \tau_2 (\tau_2 + 1)] \\
 & + \gamma L (L + 1).
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

Le spectre d'énergie à cette limite correspond à celui d'un vibreur sphérique en 14 dimensions.

FIG. 2.1 – Spectre d'énergie typique à la limite SU(3) du modèle *sdg*-IBM présenté pour un nombre de bosons  $N = 8$  (traits pleins) comparé au spectre d'énergie ayant la symétrie SU(3) du modèle *sd*-IBM et tracé pour le même nombre de bosons (traits pointillés).



### Limite SU(3)

Le hamiltonien ayant la symétrie SU(3) s'écrit

$$\hat{H}_{\text{III}} = E_0 + \alpha \hat{C}_2(\text{SU}(3)) + \gamma \hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (2.60)$$

avec

$$\hat{C}_2(\text{SU}(3)) = \frac{3}{4} [\hat{Q}^{(2)} \cdot \hat{Q}^{(2)} + \hat{L}^{(1)} \cdot \hat{L}^{(1)}], \quad (2.61)$$

où l'opérateur  $\hat{Q}^{(2)}$  a été défini par l'équation (2.16). Les valeurs propres du hamiltonien (2.60) dans la base de Vergados  $[[N], (\lambda, \mu), \chi, L]$  sont données par

$$E(N, (\lambda, \mu), L) = E_0 + \alpha[\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)] + \gamma L(L + 1). \quad (2.62)$$

La figure 2.1 montre un exemple typique d'un spectre d'énergie à la limite SU(3). Les paramètres dans (2.62) sont choisis de telle manière que la représentation  $(4N, 0)$  corresponde à la bande fondamentale. Un examen attentif de la figure 2.1 nous incite à nous arrêter un moment sur les caractéristiques de la limite SU(3) du modèle *sdg*-IBM. Au vu de la structure du spectre d'énergie, on peut déjà distinguer la nature

rotationnelle des bandes engendrées par cette limite. D'autres remarques intéressantes mettant en évidence le rôle du boson  $g$  sont également à souligner à partir d'une simple comparaison entre les spectres d'énergie générés par les deux modèles *sd*- et *sdg*-IBM. Notons tout d'abord que, bien que les spectres d'énergies obtenus par les deux modèles pour les bandes fondamentales,  $\beta$  et  $\gamma$  sont exactement les mêmes à basses énergies d'excitation, plusieurs états sont générés à hautes énergies et apparaissent suite à l'introduction du boson  $g$ . Cette particularité qu'ajoute la symétrie  $U(15)$  au modèle des bosons en interaction lui rend plus proche du modèle de Bohr et Mottelson ainsi que des données expérimentales stipulant que les spectres d'énergie nucléaires peuvent contenir des états de hauts spins. De plus, il a été établi dans l'équation (2.44) qu'une représentation complètement symétrique de  $U(15)$  contient la représentation  $(\lambda, \mu) = (4N - 6, 4)$  de  $SU(3)$  ne figurant pas à la limite  $SU(3)$  du *sd*-IBM et donnant naissance à des bandes rotationnelles qui se caractérisent par des nombres quantiques  $K = 1$  et  $K = 3$ . Les états d'énergie engendrés par ces deux bandes respectives sont

$$\begin{aligned} K = 1 & : L = 1, 2, 3, \dots, 4N - 3, \\ K = 3 & : L = 3, 4, 5, \dots, 4N - 5. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Par ailleurs, la représentation redoublée  $(4N - 8, 4)$  engendre d'autres bandes se caractérisant par  $K^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$ . La figure 2.2 compare le spectre d'énergie mesuré expérimentalement pour le noyau déformé  $^{168}\text{Er}$  à celui obtenu à partir de l'équation (2.62) [51]. Outre ce noyau, cette limite a été également appliquée au  $^{176}\text{Hf}$  [52] et aux isotopes du W [53].

### Limite $SU(5)$

Cette symétrie est décrite par le hamiltonien

$$\hat{H}_{IV} = E_0 + A\hat{C}_2(SU(5)) + B\hat{C}_2(O(5)) + \gamma\hat{C}_2(O(3)), \quad (2.64)$$

avec

$$\hat{C}_2(SU(5)) = 10\left[\frac{1}{40}\hat{L}^{(1)} \cdot \hat{L}^{(1)} + \hat{T}^{(2)} \cdot \hat{T}^{(2)} + \hat{T}^{(3)} \cdot \hat{T}^{(3)} + \hat{T}^{(4)} \cdot \hat{T}^{(4)}\right]. \quad (2.65)$$

L'opérateur de Casimir du groupe  $O(5)$  a été donné par l'équation (2.58). Les valeurs propres du hamiltonien (2.64) dans la base  $[[N](n_1, \dots, n_4), (\tau_1, \tau_2), L]$  s'écrivent

$$\begin{aligned} & E(N, (n_1, \dots, n_4), (\tau_1, \tau_2), L) \\ & = E_0 + A \sum_{i=1}^4 \left(n_i - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 n_i\right) \left(n_i - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 n_i + 10 - 2i\right) \\ & + B[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \gamma L(L + 1). \end{aligned} \quad (2.66)$$

FIG. 2.2 – Spectre d'énergie du  $^{168}\text{Er}$  calculé à partir de (2.62) (traits pleins) comparé au spectre expérimental (traits en pointillés).

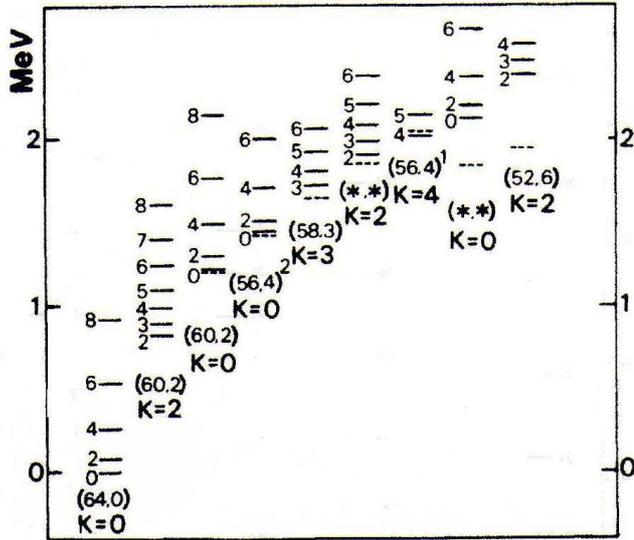
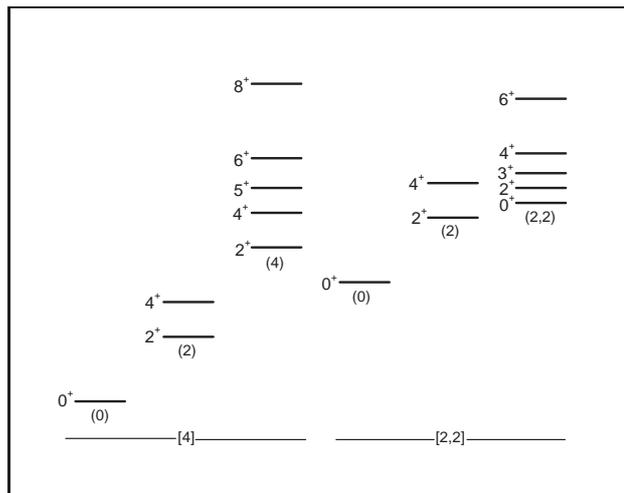


FIG. 2.3 – Un spectre d'énergie à la limite  $SU(5)$  du  $sdg$ -IBM présenté pour un nombre de bosons  $N = 2$ . Les nombres quantiques en dessous de chaque niveau d'énergie sont  $(\tau_1, \tau_2)$  caractérisant les représentations de  $O(5)$  et ceux en bas de la figure sont  $(n_1, n_2)$  correspondant à  $SU(5)$ . Pour  $N = 2$ ,  $n_3$  et  $n_4$  sont nuls. Le spectre est calculé à partir de (2.66) avec  $A = -0.8$ ,  $B = 1$  et  $\gamma = 0.5$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



Un spectre d'énergie typique à cette limite est présenté sur la figure 2.3. Comme va être détaillé plus loin, l'étude de la forme géométrique de la limite  $SU(5)$  indique qu'elle correspond à celle de noyaux rotationnels déformés tout comme la limite

SU(3). Cependant, comme le montre la figure 2.3, le spectre d'énergie ayant la symétrie SU(5) est nettement différent de celui associé à la limite SU(3) et ne peut donc pas être attribué à un rotateur rigide. Néanmoins cette limite peut être un bon candidat pour la description des états rotationnels superdéformés [54].

### Limite O(15)

Le hamiltonien associé à cette limite s'écrit

$$\hat{H}_V = E_0 + e_1 \hat{C}_2(\text{O}(15)) + e_2 \hat{C}_2(\text{O}(14)) + e_3 \hat{C}_2(\text{O}(5)) + \gamma \hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (2.67)$$

avec

$$\hat{C}_2(\text{O}(15)) = \hat{N}(\hat{N} + 14) - (s^\dagger \cdot s^\dagger + d^\dagger \cdot d^\dagger + g^\dagger \cdot g^\dagger)(\tilde{s} \cdot \tilde{s} + \tilde{d} \cdot \tilde{d} + \tilde{g} \cdot \tilde{g}). \quad (2.68)$$

Les expressions des opérateurs de Casimir correspondant aux algèbres O(14), O(5) et O(3) sont données par les équations (2.58) et (2.55). Le hamiltonien (2.67) est diagonal dans la base  $[[N], v_{sdg}, v_{dg}, n_\Delta, (\tau_1, \tau_2), L]$ . Ses valeurs propres sont données par

$$\begin{aligned} E(N, v_{sdg}, v_{dg}, (\tau_1, \tau_2), L) &= E_0 + e_1 v_{sdg}(v_{sdg} + 13) + e_2 v_{dg}(v_{dg} + 12) \\ &\quad + e_3 [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \gamma L(L + 1). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Un exemple d'un spectre d'énergie à cette limite est présenté sur la figure 2.4.

### Limite SU(6)

Le hamiltonien associé à cette limite est donné par

$$\hat{H}_{VI} = E_0 + v_1 \hat{C}_2(\text{SU}(6)) + v_2 \hat{C}_2(\text{Sp}(6)) + \gamma \hat{C}_2(\text{O}(3)). \quad (2.70)$$

Les expressions des opérateurs de Casimir dans (2.70) s'écrivent

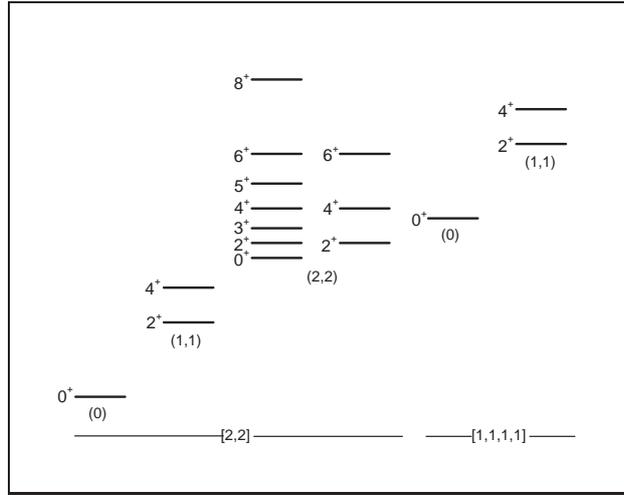
$$\begin{aligned} \hat{C}_2(\text{SU}(6)) &= 3\left[\frac{1}{70} \hat{L}^{(1)} \cdot \hat{L}^{(1)} + \hat{P}^{(2)} \cdot \hat{P}^{(2)} + \hat{P}^{(3)} \cdot \hat{P}^{(3)} + \hat{P}^{(4)} \cdot \hat{P}^{(4)} \right. \\ &\quad \left. + \hat{P}^{(5)} \cdot \hat{P}^{(5)}\right], \\ \hat{C}_2(\text{Sp}(6)) &= 4\left[\frac{1}{70} \hat{L}^{(1)} \cdot \hat{L}^{(1)} + \hat{P}^{(3)} \cdot \hat{P}^{(3)} + \hat{P}^{(5)} \cdot \hat{P}^{(5)}\right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Le hamiltonien (2.70) est diagonal dans la base  $[[N], (f_1, \dots, f_5), \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle, n_\Delta, L]$  avec des valeurs propres

$$\begin{aligned} E(N, (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5), \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle, L) \\ &= E_0 + v_1 \sum_{i=1}^6 (f_i - \frac{1}{6} \sum_i f_i) (f_i - \frac{1}{6} \sum_i f_i - 2i + 12) \\ &\quad + v_2 [\lambda_1(\lambda_1 + 6) + \lambda_2(\lambda_2 + 4) + \lambda_3(\lambda_3 + 2)] + \gamma L(L + 1). \end{aligned} \quad (2.72)$$



FIG. 2.5 – Spectre d'énergie associé à la limite SU(6) du modèle *sdg*-IBM présenté pour  $N = 2$ . Les nombres quantiques en dessous de chaque niveau d'énergie sont  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  caractérisant les représentations de Sp(6) avec  $\lambda_3 = 0$  pour  $N = 2$  et ceux en bas de la figure sont  $(f_1, f_2)$  correspondant à SU(6) avec  $f_3 = f_4 = f_5 = 0$  pour  $N = 2$ . Le spectre est calculé à partir de (2.72) avec  $v_1 = -4$ ,  $v_2 = 1$  et  $\gamma = 0.5$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



SU(3) et  $U(6) \otimes U(9)$ . Néanmoins, une autre manière de comprendre les caractéristiques des six limites du *sdg*-IBM est d'adopter le formalisme des états cohérents. Cette approche qui nous renseigne en particulier sur la forme géométrique portée par chacune des symétries dynamiques fera l'objet du chapitre 4.

## 2.4 Transitions électromagnétiques en *sdg*-IBM

### 2.4.1 Transitions $E2$ et $E4$

L'expression générale de l'opérateur de transitions quadripolaires en *sdg*-IBM est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{T}(E2) = & \alpha_{02}^{(2)} [s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}]^{(2)} + \alpha_{22}^{(2)} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} + \alpha_{24}^{(2)} [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} \\ & + \alpha_{44}^{(2)} [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $\alpha_{ij}^{(2)}$  présentent les charges effectives. L'opérateur (2.73) peut être également exprimé sous la forme

$$\hat{T}(E2) = e_2 [a \hat{T}(11) + b [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} + c [d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)} + d [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(2)}], \quad (2.74)$$

où  $\hat{T}(11)$  est le générateur associé à l'algèbre SU(3) et les paramètres  $e_2$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  peuvent être déterminés à partir d'un ajustement sur les données expérimentales.

## 2.4 Transitions électromagnétiques en $sdg$ -IBM

La dérivation analytique des probabilités de transitions  $B(E2; L + 2 \rightarrow L)$  dans la bande fondamentale à la limite  $SU(3)$  du  $sdg$ -IBM donne [56]

$$B(E2; L + 2 \rightarrow L) = \frac{15(L + 1)(L + 2)(4N - L)(4N + L + 3)}{56(2L + 3)(2L + 5)} \times (a + bM_{dd} + cM_{dg} + dM_{gg})^2, \quad (2.75)$$

avec

$$\begin{aligned} M_{dd} &= -\sqrt{\frac{8}{5}} \frac{(4N - L - 2)(4N + L + 1)(4N - 4)}{7(4N - 3)(4N - 2)(4N - 1)}, \\ M_{dg} &= \frac{24(4N - 4)(32N^2 - 36N + 10) + 2(184N - 135)L(L + 3)}{210(4N - 3)(4N - 2)(4N - 1)}, \\ M_{gg} &= -\frac{8(N - 1)(4(4N - 4)^2 - 16 + 3L(L + 3))}{21\sqrt{55}(4N - 3)(4N - 2)(4N - 1)}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

L'expression (2.75) a été ajustée sur les données expérimentales pour 33 noyaux déformés [56]. Les résultats ainsi obtenus ont été également comparés à ceux obtenus par le modèle  $sd$ -IBM et le modèle du rotateur rigide. On constate ainsi que l'introduction du boson  $g$  offre, d'une manière globale, une amélioration des résultats donnés par ces deux derniers modèles même si certains noyaux n'obéissent pas complètement à la limite  $SU(3)$  du modèle  $sdg$ -IBM. Une explication possible réside dans le fait qu'en  $sdg$ -IBM la valeur maximale que peut prendre le moment angulaire est  $L_{\max} = 4N$  contrairement au modèle  $sd$ -IBM où elle est de  $L_{\max} = 2N$ . Cela a pour conséquence de reproduire le comportement des  $B(E2)$  et en particulier le cutoff qui se produit à une valeur du moment angulaire  $L \approx \lambda/4$ , où  $\lambda$  est le nombre quantique caractérisant les représentations irréductibles de  $SU(3)$ . Notons ici que les valeurs de  $B(E2)$  dans quelques noyaux déformés augmentent avec  $L$  jusqu'à une valeur maximale correspondant à  $L_{\max} \approx \lambda/4$  puis diminuent de nouveau jusqu'à zéro auprès de  $L \approx \lambda$ . Ces effets sont appelés respectivement cut-off et fall-off. Dans  $^{236}\text{U}$  par exemple, bien qu'il n'y a pas de fall-off caractérisant  $B(E2)$  comme celle-ci continue à augmenter même pour  $L \approx 30$ , mais le modèle  $sdg$ -IBM réussit à bien reproduire le cut-off. Dans la référence [52], Wu a analysé les données expérimentales disponibles pour les noyaux  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{168}\text{Hf}$ ,  $^{170}\text{Hf}$  et  $^{164}\text{Yb}$  dans le cadre de la limite  $SU(3)$  du modèle  $sdg$ -IBM et l'accord entre les résultats qu'il a obtenus et l'expérience était très satisfaisant en comparaison avec ceux obtenus en ne considérant que les bosons  $s$  et  $d$ .

Les transitions hexadécapolaires constituent à leur tour un bon moyen pour mettre en évidence l'importance du boson  $g$  dans les noyaux atomiques. L'opérateur

## CHAPITRE 2 : Modèle $sdg$ des bosons en interaction

de transitions dans ce cas s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{T}(E4) = & \alpha_{04}^{(4)}[s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)} + \alpha_{22}^{(4)}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} + \alpha_{24}^{(4)}[d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} \\ & + \alpha_{44}^{(4)}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(4)}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

où  $\alpha_{uv}^{(4)}$  sont les charges effectives. Afin d'expliquer les données expérimentales concernant les probabilités de transitions  $B(E4; 0_1^+ \rightarrow 4_i^+)$  pour les noyaux  $^{192}\text{Os}$ ,  $^{194}\text{Pt}$ ,  $^{196}\text{Pt}$  et  $^{198}\text{Pt}$ , Todd Baker *et al.* [57] ont employé un opérateur hexadécapolaire de la forme (2.77) mais dans lequel ne figure pas le terme  $[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)}$  dont l'influence sur les transitions  $E4$  s'est avérée très faible. Leur calcul utilise un hamiltonien  $sd$ -IBM couplé à un boson  $g$ . Par ailleurs, les mêmes isotopes ont été analysés avec un grand succès par Devi et Kota [58, 59] en considérant un opérateur  $\hat{T}(E4)$  de la forme

$$\hat{T}(E4) = \zeta(\hat{I}^{(4)} + \eta\hat{Q}^{(4)}), \quad (2.78)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(4)} = & [s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)} + \frac{19\sqrt{5}}{28}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} - \frac{5\sqrt{11}}{14}[d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)} \\ & + \frac{3\sqrt{143}}{28}[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(4)}, \\ \hat{I}^{(4)} = & [s^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{s}]^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Le hamiltonien qu'ils ont employé est de la forme

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \epsilon_d \hat{n}_d + \epsilon_g \hat{n}_g + \alpha_1 \hat{H}(\text{SU}_{sdg}(3)) + \alpha_2 \hat{H}(\text{SU}_{sdg}(6)) + \alpha_3 \hat{H}(\text{O}_{sdg}(15)) \\ & + \alpha_4 \hat{H}(\text{O}_{sd}(6)) + \alpha_5 \hat{L}^2, \end{aligned} \quad (2.80)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{H}(\text{SU}_{sdg}(3)) &= -\hat{C}_2(\text{SU}_{sdg}(3)) + \frac{3}{4}\hat{L}^2, \\ \hat{H}(\text{SU}_{sdg}(6)) &= -\hat{C}_2(\text{SU}_{sdg}(6)) + \frac{1}{2}\hat{C}_2(\text{Sp}_{dg}(6)), \\ \hat{H}(\text{O}_{sdg}(15)) &= \hat{C}_2(\text{O}_{sdg}(15)) - \hat{C}_2(\text{O}_{dg}(14)), \\ \hat{H}(\text{O}_{sd}(6)) &= \hat{C}_2(\text{O}_{sd}(6)). \end{aligned} \quad (2.81)$$

$\hat{C}_2(\text{O}_{sd}(6))$  dans cette dernière équation a été défini au chapitre 1 par l'équation (1.51) et  $\alpha_2 = 0$  pour  $^{192}\text{Os}$  et  $^{194}\text{Pt}$ .

Mis à part les isotopes Os – Pt, plusieurs études des transitions  $E4$  ont confirmé l'importance du degré de liberté hexadécapolaire dans la région des terres rares et en particulier dans les isotopes  $^{150}\text{Nd}$  [60, 61],  $^{152,154}\text{Sm}$  [62] et  $^{156}\text{Gd}$  [33, 38].

### 2.4.2 Transitions monopolaires électriques $E0$

Nous proposons dans ce paragraphe d'établir un calcul analytique des probabilités de transitions monopolaires en *sdg*-IBM. Nous commençons alors par exprimer l'opérateur de transitions sous la forme

$$\hat{T}(E0) = \alpha[s^\dagger \times \tilde{s}]^{(0)} + \beta[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)} + \gamma[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(0)}, \quad (2.82)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres libres qui peuvent être déterminés à partir d'un ajustement sur les données expérimentales. Le nombre de paramètres de l'opérateur  $\hat{T}(E0)$  peut être réduit en tenant compte de la conservation du nombre total de bosons, d'où il vient

$$\hat{T}(E0) = \alpha' \hat{N} + \beta'[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)} + \gamma'[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(0)}, \quad (2.83)$$

avec

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{5}} - \alpha, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{3} - \alpha. \quad (2.84)$$

Le premier terme dans (2.83) ne contribue pas aux transitions  $E0$  et il nous reste donc de calculer les éléments de matrice de  $[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)}$  et  $[g^\dagger \times \tilde{g}]^{(0)}$ .

Pour une utilisation ultérieure (cf. chapitre 3) et en raison de n'avoir à notre disposition que les fonctions d'onde correspondant aux deux limites  $U(5) \otimes U(9)$  et  $SU(3)$ , nos calculs des éléments de matrice de  $\hat{T}(E0)$  seront en particulier limités à ces deux cas. Le cas de la limite  $U(5) \otimes U(9)$  est trivial comme les opérateurs nombres  $\hat{n}_d$  et  $\hat{n}_g$  sont diagonaux dans la base qui lui est associée. Par conséquent, leurs contributions aux transitions  $E0$  sont nulles

$$\langle \xi, L | \hat{n}_d | \xi', L \rangle = \langle \xi, L | \hat{n}_g | \xi', L \rangle = \delta_{\xi\xi'}, \quad (2.85)$$

où  $\xi$  et  $\xi'$  désignent chacun l'ensemble des nombres quantiques caractérisant les représentations irréductibles correspondant à la limite  $U(5) \otimes U(9)$ .

À la limite  $SU(3)$ , nous exprimons les éléments de matrice réduits d'un opérateur  $[b_l^\dagger \times \tilde{b}_l]^{(0)}$  en fonction de ceux de  $b_l^\dagger$  et  $\tilde{b}_l$  tels que

$$\begin{aligned} & \langle [N] (\lambda', \mu') L \parallel [b_l^\dagger \times \tilde{b}_l]^{(0)} \parallel [N] (\lambda, \mu) L \rangle \\ &= \sum_{(\lambda'', \mu'') L''} \langle [N] (\lambda', \mu') L \parallel b_l^\dagger \parallel [N-1] (\lambda'', \mu'') L'' \rangle \\ & \times \langle [N-1] (\lambda'', \mu'') L'' \parallel \tilde{b}_l \parallel [N] (\lambda, \mu) L \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} l & l & 0 \\ L & L & L'' \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

avec

$$\begin{aligned} & \langle [N] (\lambda, \mu) L \parallel b_l^\dagger \parallel [N-1] (\lambda', \mu') L' \rangle = \sqrt{2L+1} \langle [N] \parallel b_l^\dagger \parallel [N-1] \rangle \\ & \times \left\langle \begin{array}{cc|c} [N-1] & [1] & [N] \\ (\lambda', \mu') & (4, 0) & (\lambda, \mu) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda', \mu') & (4, 0) & (\lambda, \mu) \\ L' & l & L \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.87)$$

CHAPITRE 2 : Modèle *sdg* des bosons en interaction

et

$$\langle L \parallel \tilde{b}_l \parallel L' \rangle = (-)^{L-L'-l} \langle L' \parallel b_l^\dagger \parallel L \rangle. \quad (2.88)$$

On note ici que l'opérateur de création  $b_l^\dagger$  correspond à une représentation irréductible [1] de U(15) qui se décompose en une représentation (4,0) de SU(3). De même, l'opérateur d'annihilation  $\tilde{b}_l$  correspond à une représentation  $[\bar{1}]$  de U(15) qui se réduit à la représentation (0,4) de SU(3). Dans l'équation (2.87),  $\langle [N] \parallel b_l^\dagger \parallel [N-1] \rangle$  désigne l'élément de matrice réduit correspondant à l'algèbre U(15). Il est donné par

$$\langle [N] \parallel b_l^\dagger \parallel [N-1] \rangle = \sqrt{N}. \quad (2.89)$$

Les quantités  $\langle \begin{smallmatrix} [N-1] & [1] \\ (\lambda', \mu') & (4,0) \end{smallmatrix} \parallel \begin{smallmatrix} [N] \\ (\lambda, \mu) \end{smallmatrix} \rangle$  et  $\langle \begin{smallmatrix} (\lambda', \mu') & (4,0) \\ L' & l \end{smallmatrix} \parallel \begin{smallmatrix} (\lambda, \mu) \\ L \end{smallmatrix} \rangle$  sont respectivement les facteurs isoscalaires associés aux réductions U(15)  $\supset$  SU(3) et SU(3)  $\supset$  O(3). Ces facteurs sont calculés et tabulés dans les références [63] et [17, 64] respectivement. Nous obtenons alors pour les éléments de matrice réduits de chaque terme dans l'opérateur de transitions  $E0$  entre la bande- $\beta$  et la bande fondamentale

$$\begin{aligned} \langle [N] (4N, 0) L \parallel [a^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)} \parallel [N] (4N-4, 2) L \rangle &= \frac{1}{7(4N-5)(4N-1)} \\ &\times \left[ \frac{3(4N-L)(4N+L+1)}{10(4N-4)(4N-3)(4N-2)(8(2N-1)^2 - L(L+1))} \right]^{1/2} \\ &\times \left[ ((4N-4)(4N+6L-5) - 6L(L-2)) \frac{(4N+L+1)(4N+L-3)L(L-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right. \\ &+ ((4N-4)(4N-2) - 6L(L+1) + 9) \frac{2(4N+L-2)(4N+L-1)L(L+1)}{3(2L-1)(2L+3)} \\ &+ ((4N-4)(4N-6L-11) - 6L(L+4) - 18) \\ &\left. \times \frac{(4N-L-4)(4N-L-2)(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right], \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}
 \langle [N] (4N, 0) L \parallel [g^\dagger \times \tilde{g}]^{(0)} \parallel [N] (4N - 4, 2) L \rangle &= -\frac{1}{3(4N - 5)(4N - 1)} \\
 &\times \left[ \frac{3(4N - L)(4N + L + 1)(2L + 1)}{2(4N - 4)(4N - 3)(4N - 2)(8(2N - 1)^2 - L(L + 1))} \right]^{1/2} \\
 &\times \left[ \frac{(4N - L - 3)(4N + L - 5)(4N + L - 3)(4N + L - 1)(L - 3)(L - 2)(L - 1)L}{(2L - 5)(2L - 3)(2L - 1)(2L + 1)} \right. \\
 &+ 2((4N - 4)(8N - 2L - 3) + 2L(L - 2) - 7) \\
 &\times \frac{(4N + L - 3)(4N + L - 1)(L - 2)(L - 1)L(L + 1)}{7(2L - 5)(2L - 1)(2L + 1)(2L + 3)} \\
 &+ 18((4N - 4)(4N - 2) + L(L + 1) - 5) \\
 &\times \frac{(4N - L - 2)(4N + L - 1)(L - 1)L(L + 1)(L + 2)}{35(2L - 3)(2L - 1)(2L + 3)(2L + 5)} \\
 &+ 2((4N - 4)(8N + 2L - 1) + 2L(L + 4) - 1) \\
 &\times \frac{(4N - L - 4)(4N - L - 2)L(L + 1)(L + 2)(L + 3)}{7(2L - 1)(2L + 1)(2L + 3)(2L + 7)} \\
 &+ (4N + L - 2)(4N - L - 6)(4N - L - 4)(4N - L - 2) \\
 &\left. \times \frac{(L + 1)(L + 2)(L + 3)(L + 4)}{(2L + 1)(2L + 3)(2L + 5)(2L + 7)} \right]. \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

La probabilité de transition  $B(E0; L \rightarrow L)$  est obtenue à partir de la relation

$$B(E0; L \rightarrow L) = |\langle [N] (\lambda', \mu') L \parallel \hat{T}(E0) \parallel [N] (\lambda, \mu) L \rangle|^2. \tag{2.92}$$

## 2.5 Mélange de configurations en *sdg*-IBM

Cette section est consacrée à l'étude de la contribution de chacun des bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  aux états nucléaires à chacune des limites de couplage fort du modèle *sdg*-IBM [65]. En effet, comme leur nom l'indique, ces limites se caractérisent par un fort mélange entre les trois bosons et il sera intéressant de comprendre l'apport de chacun d'entre eux aux états constituant le spectre d'énergie. Pour ce faire, nous allons considérer le cas de deux bosons dont le spectre d'énergie est constitué par les états de moments angulaires  $J = 0^3, 2^4, 3, 4^4, 5, 6^2, 8$ . On peut déjà constater que l'état  $J = 8$  est complètement généré par le boson  $g$  tandis que les états  $J = 3$  et  $J = 5$  résultent d'une combinaison entre les bosons  $d$  et  $g$  et n'ont aucune composante  $s$ . Pour ce qui est des états  $J = 0, 2, 4, 6$ , l'étude du mélange de configurations

bosonique peut se faire en calculant les amplitudes des composantes des trois types de bosons dans les fonctions d'ondes correspondant à chaque limite. Ceci nous incite donc de diagonaliser le hamiltonien associé dans une base appropriée, ce qui revient à dire diagonaliser les opérateurs de Casimir en fonction desquels ce hamiltonien est écrit. Un choix convenable sera d'effectuer ce calcul dans la base associée à la limite vibrationnelle  $U(6) \otimes U(9) \sim U(1) \otimes U(5) \otimes U(9)$  dans laquelle les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  sont complètement découplés.

On commence alors par écrire l'expression générale d'un opérateur de Casimir du second ordre d'une algèbre  $G$  sous la forme

$$\hat{C}_2(G) = \sum_{kr} a_{kr} \left( \sum_{l_1 l_2} \alpha_{l_1 l_2}^{kr} (b_{l_1}^\dagger \times \tilde{b}_{l_2})^{(k)} \right) \cdot \left( \sum_{l_3 l_4} \alpha_{l_3 l_4}^{kr} (b_{l_3}^\dagger \times \tilde{b}_{l_4})^{(k)} \right), \quad (2.93)$$

où les coefficients  $a_{kr}$  et  $\alpha_{ll'}^{kr}$  sont spécifiques pour chacune des sous-algèbres de  $U(15)$  et ont été explicitement donnés au cours de la section 2.1.2. L'indice  $k$  présente la multipolarité des générateurs et  $r$  est un nombre quantique additif qui sert à distinguer les générateurs ayant la même multipolarité. Il s'en suit alors que les éléments de matrice des opérateurs (2.93) entre des états à deux bosons  $||l'; L\rangle$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \langle l_1 l_2; L | \hat{C}_2(G) | l_3 l_4; L \rangle &= [f_{l_1}(G) + f_{l_2}(G)] \delta_{l_1 l_3} \delta_{l_2 l_4} + \frac{2}{\sqrt{(1 + \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_3 l_4})}} \\ &\times \sum_{kr} a_{kr} (2k + 1) \left[ (-)^L \alpha_{l_1 l_3}^{kr} \alpha_{l_2 l_4}^{kr} \begin{Bmatrix} l_1 & l_3 & k \\ l_4 & l_2 & L \end{Bmatrix} + \alpha_{l_2 l_3}^{kr} \alpha_{l_1 l_4}^{kr} \begin{Bmatrix} l_2 & l_3 & k \\ l_4 & l_1 & L \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Dans cette dernière équation, on désigne par  $f_l(G)$  l'élément de matrice correspondant à la partie à un corps de l'opérateur  $\hat{C}_2(G)$ . Ses valeurs pour les différentes sous-algèbres de  $U(15)$  sont présentées dans le tableau 2.6.

### 2.5.1 Limite $SU(3)$

Les amplitudes des composantes de chacun des bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  sont présentées sur la figure 2.6. Cette figure indique que les trois états  $0^+$  ont quasiment la même composante  $s$  qui est comprise entre 35% et 40%. La composante  $d^2$  est par contre maximum pour le  $0^+$  fondamental (59%) dont la contribution du boson  $g$  est très faible. Cette situation est inversée dans le cas du  $0_2^+$  où domine le boson  $g$  à 59%. La contribution de  $d^2$  et  $g^2$  au  $0_3^+$  est la même et est à environ 38%. Contrairement aux états  $0_1^+$  et  $2_1^+$ , le  $4_1^+$  est dominé par la composante  $g^2$  à 46%. Les états  $6^+$  dans le spectre à deux bosons n'ont évidemment aucune composante  $s$  et sont alors des combinaison de  $dg$  et  $g^2$ .

## 2.5 Mélange de configurations en *sdg*-IBM

TAB. 2.6 – Valeurs des coefficients  $f_l(G)$  pour chacune des sous-algèbres de  $U(15)$ .

$G$	$l = 0$		$l = 2$		$l = 4$	
	label	$f_l(G)$	label	$f_l(G)$	label	$f_l(G)$
SO(15)	(1)	14	(1)	14	(1)	14
SO(14)	(0)	0	(1)	13	(1)	13
SO(5)	(0)	0	(2)	10	(2)	10
SU(5)	[2]	28	[2]	28	[2]	28
SU(6)	[1, 1]	7	[1, 1]	7	[1, 1]	7
Sp(6)	{0}	0	{1, 1}	12	{1, 1}	12
SU(3)	(4, 0)	28	(4, 0)	28	(4, 0)	28
SO(3)	(0)	0	(2)	6	(4)	20

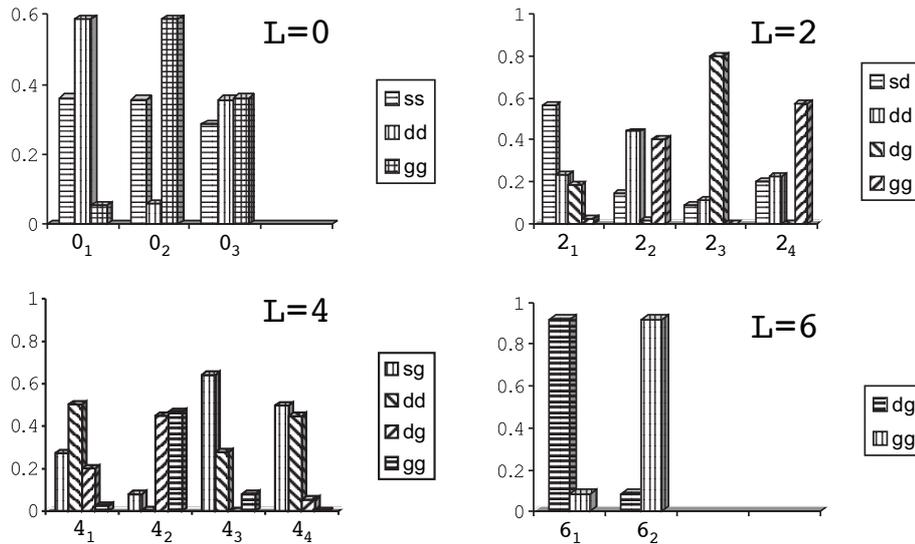


FIG. 2.6 – Amplitudes des composantes des états à deux bosons à la limite  $SU(3)$  du modèle *sdg* IBM.

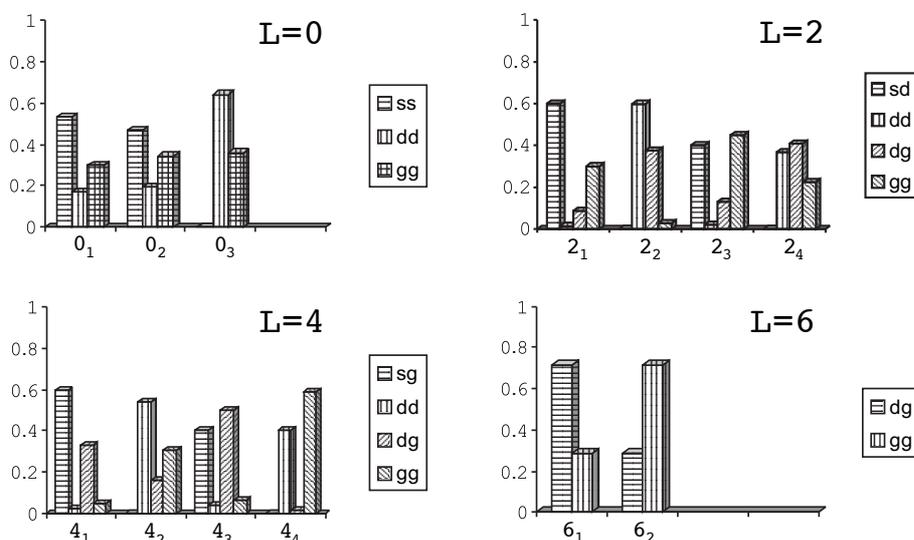


FIG. 2.7 – Amplitudes des composantes des états à deux bosons à la limite  $SU(5)$  du modèle  $sdg$  IBM.

### 2.5.2 Limite $SU(5)$

L'analyse des fonctions d'onde à cette limite est présentée sur la figure 2.7. On remarque à première vue que le  $0^+$  fondamental comme le premier  $0^+$  excité sont dominés par le boson  $s$  et ont une composante  $d^2$  relativement faible. Mais dans les trois états  $0^+$ , la contribution de la composante  $g^2$  est importante et elle est de l'ordre de 35 à 40% et cela indépendamment des valeurs et des signes des paramètres du hamiltonien associé à cette limite. On note également que les deux états  $2_1^+$  et  $2_3^+$  n'ont aucune composante  $d^2$  tandis que les états  $2_2^+$  et  $2_4^+$  ne possèdent aucune composante  $sd$ . Ceci semble bizarre en particulier en tenant en compte la contribution non négligeable des composantes  $dg$  et  $g^2$  dans ces états. De même, on remarque qu'aucun des états  $4^+$  n'est dominé, comme prévu, par la configuration  $sg + d^2$ . On peut donc comprendre, sur la base de ces caractéristiques des états générés à la limite  $SU(5)$ , la limitation du champ de son application en spectroscopie nucléaire. Néanmoins, l'analyse des fonctions d'onde à cette limite peut nous renseigner sur les signes des paramètres dans l'expression de son hamiltonien. On prédit alors un signe positif pour le paramètre  $B$  dans l'expression (2.66) car un choix différent nous conduira vers un fondamental différent de  $0^+$ . Par contre, on a associé un signe négatif au paramètre  $A$  pour que les états  $0_1^+$  et  $2_1^+$  soient majoritairement dominés par les configurations  $s^2 + d^2$  et  $sd + d^2$  respectivement.

## 2.5 Mélange de configurations en $sdg$ -IBM

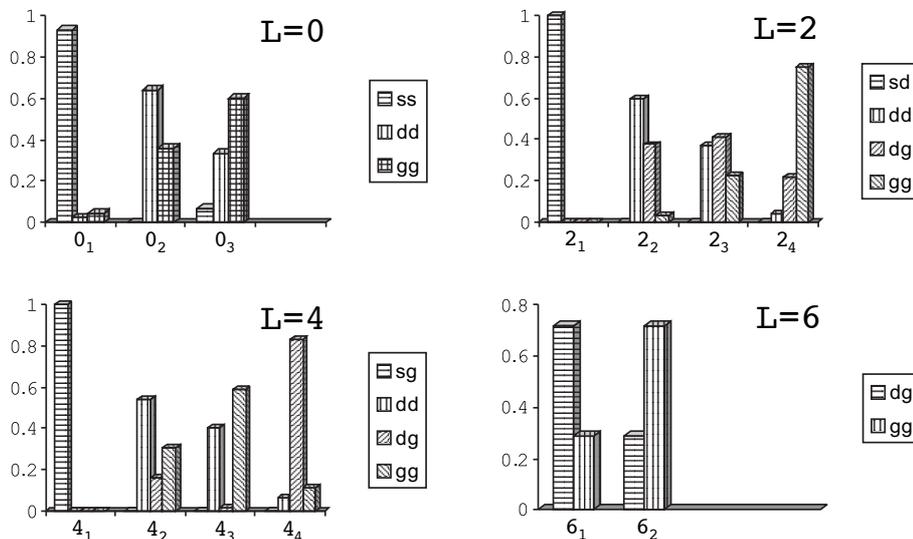


FIG. 2.8 – Amplitudes des composantes des états à deux bosons à la limite  $O(15)$  du modèle  $sdg$  IBM.

### 2.5.3 Limite $O(15)$

En examinant la figure 2.8, on note tout de suite la différence des caractéristiques de cette limite en comparaison avec  $SU(3)$  et  $SU(5)$ . Tout d'abord, les états  $0^+$  n'ont plus des contributions identiques du boson  $s$ . Le  $0^+$  fondamental est à 98% dominé par la composante  $s^2$ . Cette composante est pratiquement nulle dans le premier  $0^+$  excité. Ce dernier est majoritairement  $d^2$  avec une contribution moins importante de  $g^2$ . La même remarque concerne le  $0_3^+$  mais en inversant les fractions de  $d^2$  et  $g^2$ . L'état  $2_1^+$  est purement  $sd$  et le  $4_1^+$  est purement  $sg$ . Ceci est en partie une conséquence de la paramétrisation du hamiltonien  $O(15)$ . En effet, les valeurs et les signes de ses paramètres sont choisis de telle sorte que l'on obtient un  $0^+$  fondamental dominé par la composante  $s^2$  et un état  $2_1^+$  dominé par la configuration  $sd$ . Pour  $N = 2$ , ces conditions nous mènent à  $e_1 < 0$ ,  $e_2 > 0$  et  $28e_2 + 16e_3 > 0$ . Notons de plus que le mélange entre les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  est faible à basse énergie et devient plus important aux énergies relativement hautes ce qui place la limite  $O(15)$  dans une position intermédiaire entre les limites déformées  $SU(3)$  et  $SU(5)$  et la limite vibrationnelle  $U(1) \otimes U(5) \otimes U(9)$ .

### 2.5.4 Limite $SU(6)$

Les résultats du calcul des amplitudes des composantes des états à cette limite sont présentés sur la figure 2.9. De nouveau, on choisit les paramètres du hamiltonien tels que le  $0_1^+$  soit majoritairement  $s^2$ . Mais alors on obtient pour les états

CHAPITRE 2 : Modèle  $sdg$  des bosons en interaction

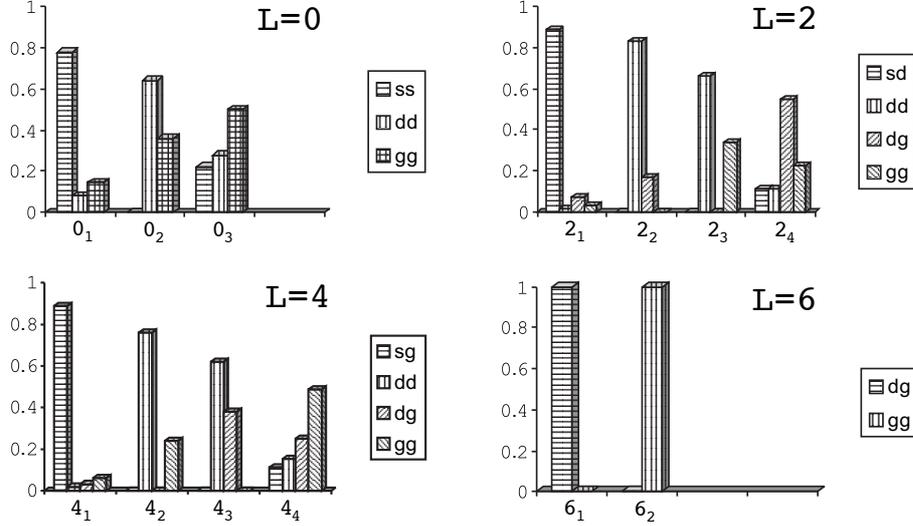


FIG. 2.9 – Amplitudes des composantes des états à deux bosons à la limite  $SU(6)$  du modèle  $sdg$  IBM.

$2^+$  des mélanges de configurations qui ne sont pas tout à fait réalistes. L'état  $2_1^+$  est dominé par la configuration  $sd$  avec des contributions très faibles des autres composantes. Par contre, les états  $2_2^+$  et  $2_3^+$  sont prédominés par  $d^2$  avec une contribution nulle de  $sd$ . De même, les mélanges entre les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  dans les états  $4^+$  semblent également bizarre comme le premier  $4^+$  est purement  $sg$  tandis que le  $4_2^+$  est prédominés par la composante  $d^2$  avec un faible mélange avec  $g^2$ . Cette caractéristique des mélanges entre les bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  à cette limite peut être expliquée si l'on regarde l'expression du hamiltonien qui lui correspond (cf. équation (2.70)). La symétrie  $SU(6)$  étant brisée par celle de  $Sp(6)$  qui n'implique que des mélanges entre les bosons  $d$  et  $g$ , on constate que le boson  $s$  n'intervient qu'à un seul état dans chaque multiplet de  $SU(6)$ .

Notons enfin que pour les limites de couplages faibles on peut avoir un mélange fort entre les bosons  $s$  et  $d$  et que ceux-ci soient découplés du boson  $g$ . C'est le cas de la limite  $U(6) \otimes U(9)$ . L'étude du mélange de configurations à cette limite qui correspond à une situation réaliste est la même que celle établie dans le modèle  $sd$ -IBM [19]. Comme a été signalé plus haut, la limite  $U(5) \otimes U(10)$  implique un mélange fort entre les bosons  $s$  et  $g$  et n'a donc aucune signification physique. Pour ce qui est de la limite  $U(1) \otimes U(14)$  le mélange est fort entre les bosons  $d$  et  $g$  et il peut y avoir des applications de cette limite aux noyaux atomiques. Cependant,  $U(14)$  a pour sous-algèbre  $O(14)$  qui est également sous-algèbre de  $O(15)$ . On peut alors prévoir, pour les états de moment cinétique  $L \neq 0$ , des mélanges entre les bosons  $d$  et  $g$  identiques à ceux étudiés ci-dessus à la limite  $O(15)$ .

## 2.5 Mélange de configurations en *sdg*-IBM

# Chapitre 3

## Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

### 3.1 Introduction

Le concept de transitions de phases doit son origine à la physique de la matière condensée où il a été introduit pour étudier les caractéristiques des systèmes à plusieurs corps. Précisément, les transitions de phases sont associées à un changement qualitatif voire brutal des propriétés structurales du système en fonction d'un paramètre dit de contrôle (température, pression, champs magnétique, spin du système,...). Ce changement brusque de certaines observables caractérisant le système, généralement appelées paramètres d'ordre, est atteint à une valeur du paramètre de contrôle appelée point critique [66].

Bien que ces différentes notions ont été tout d'abord appliquées à des systèmes infinis, elles sont également projetées à des systèmes à un nombre fini de corps parfois appelés mésoscopiques [67] tels que les noyaux atomiques, les molécules ou les polymères finis. De telles applications sont appuyées par l'existence, dans ces systèmes, de transitions brutales entre deux formes ou configurations géométriques différentes.

Dans les noyaux atomiques, une transition de phase peut avoir lieu à l'état fondamental ou à basses énergies d'excitation pour des valeurs particulières de  $N$  et de  $Z$ . Cependant, il est très important de noter qu'on ne parle pas d'une transition de phase quand il s'agit d'*un seul* noyau car c'est une propriété qui caractérise toute

une région de masse. De plus, les transitions de phase auxquelles nous nous intéressons au cours de ce chapitre prennent place à une température  $T = 0$  et sont dites transitions de phase quantiques [68, 69].

De nombreuses approches ont été élaborées dans le but de mettre en évidence le phénomène de transitions de phase dans les noyaux atomiques en particulier dans le cadre du modèle géométrique (CGM) [1] et le modèle des bosons en interaction [19]. En modèle collectif, trois approches ont été développées séparément par Iachello et portent sur l'étude des transitions de phase en utilisant un hamiltonien de Bohr et en introduisant la notion de symétries critiques (relativement au but de ces approches de décrire les noyaux au point de la transition dit critique). La première, notée E(5), consiste à décrire la transition entre un vibreur sphérique et un noyau déformé  $\gamma$ -instable [70]. La seconde est appelée X(5) et est consacrée à étudier la transition d'un vibreur sphérique à un rotateur axial déformé [71]. La troisième méthode, notée Y(5), porte sur l'étude du point critique lors d'une transition entre des noyaux axialement déformés et ceux d'une déformation triaxiale [72].

En modèle IBM, les techniques utilisées sont diverses. Une première méthode utilisée dans cet axe consiste à considérer un hamiltonien schématique à deux paramètres et fait appel au formalisme Q-consistent [73, 74]. Les deux paramètres du hamiltonien sont souvent traités comme des paramètres de contrôle dont la variation permet de déterminer le cas échéant le point de transition entre deux limites du modèle. Une seconde approche repose sur la théorie des catastrophes élaborée par Gilmore [68]. Elle consiste à calculer la limite classique du hamiltonien du modèle IBM en utilisant la méthode des états cohérents [25, 75]. La minimisation du potentiel ainsi obtenu par rapport aux variables de surface  $\beta_2$  et  $\gamma_2$  permet de déterminer d'une manière rigoureuse les différentes formes d'équilibre associées au potentiel considéré. D'autre part, cette approche offre la possibilité de déterminer l'ordre de la transition (une transition de phase est dite d'ordre zéro si  $V_{min}$  est discontinu au point critique, du premier ordre si  $\frac{\partial V_{min}}{\partial \eta}$  ( $\eta$  étant le paramètre de contrôle) est discontinu et elle est du second ordre si  $\frac{\partial^2 V_{min}}{\partial \eta^2}$  est discontinu).

En évoquant les différentes approches consacrées à l'étude du phénomène de transitions de phase dans les noyaux, on sera mené à poser la question : comment une transition de phase peut elle être identifiée à travers une région de masse donnée ?

En fait, plusieurs observables, parfois considérées comme des paramètres d'ordre, peuvent changer leur comportement d'une manière brutale auprès du point critique. Dans les spectres d'énergie, notamment ceux associés aux noyaux lourds, c'est le rapport  $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$  qui en est le premier indicateur. Ses valeurs évoluent de  $R_{4/2} = 2.0$  dans les noyaux sphériques à  $R_{4/2} = 3.33$  dans un rotateur rigide ou  $R_{4/2} = 2.5$  dans un noyau déformé  $\gamma$ -instable. Une étude systématique de ce rapport peut alors montrer une augmentation rapide au point de la transition

### CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

sphérique-à-déformée. D'autres rapports d'énergies comme  $E(0_2^+)/E(2_1^+)$  qui mesure la déformation du premier état  $0^+$  excité et  $E(2_\gamma^+)/E(2_1^+)$ , où  $2_\gamma^+$  est le membre du multiplet à deux phonons dans les noyaux sphériques et est le premier état de la bande quasi- $\gamma$  dans les noyaux rotationnels, peuvent également jouer le même rôle que  $R_{4/2}$ .

Par ailleurs, une transition de phase implique un réarrangement des nucléons constituant le noyau puisqu'une configuration géométrique différente deviendra énergétiquement favorisée. Seulement, ce sont surtout les nucléons de valence qui participent à ce mouvement collectif qui aura pour effet de modifier l'énergie les reliant au noyau. Ce changement brutal de l'énergie de liaison des noyaux en fonction de leur déformation est fréquemment illustré dans les noyaux pair-pairs en considérant l'énergie de séparation de deux neutrons  $S_{2n}$  (qui est définie par la différence des énergies de liaisons entre deux noyaux successifs). L'effet de la déformation sur la masse nucléaire nous renseigne à son tour sur l'occurrence d'une transition de phase à travers une région de masse [76].

Les transitions électriques sont également très utiles quant au discernement d'une transition de phase. Citons par exemple l'étude des rapports de probabilités de transitions quadripolaires  $B(E2)$  dans les isotopes du  ${}_{62}\text{Sm}$  qui a montré un changement brusque du comportement au point de la transition [77]. Par ailleurs, il a été montré aussi bien expérimentalement que théoriquement que les plus importantes transitions monopolaires électriques  $E0$  sont associées aux noyaux qui possèdent un mélange de deux configurations géométriques différentes [78, 79]. De plus, les deux modèles GCM et *sd*-IBM prédisent des transitions  $E0$  rapides dans les noyaux bien déformés [1, 80].

Comment les transitions monopolaires peuvent-elles être connectées à la forme du noyau ? Quel est leur comportement vis-à-vis de la déformation nucléaire ? La réponse à ces questions constitue l'objectif principal du présent chapitre. Une manière de procéder est d'établir une relation consistante entre les transitions  $E0$  et les rayons nucléaires qui sont directement liés à la forme du noyau. Notre étude sera menée dans le cadre du modèle IBM-1. Nous choisissons pour nos applications les isotopes pair-pairs dans la région des terres rares de  $Z = 58$  à  $Z = 74$ . Ces noyaux ont la propriété de changer de forme de sphérique à déformée. Ce changement étant abrupte dans la plupart des chaînes considérées, témoigne de l'existence d'une transition de phase.

Nous commençons par établir un calcul systématique des spectres d'énergie des différents isotopes. Les fonctions d'onde obtenues par la diagonalisation du hamiltonien nous serviront par la suite à calculer simultanément les rayons nucléaires et les transitions  $E0$ .

## 3.2 Hamiltonien et spectres d'énergie

Comme vient d'être évoqué, notre étude sera menée systématiquement à travers la région des terres rares où seuls les isotopes pair-pairs seront considérés. Une première étape consiste à choisir une expression adéquate du hamiltonien. Mc Cutchan *et al.* [81] ont étudié quelques propriétés des noyaux dans cette région en utilisant un hamiltonien simplifié à deux paramètres. Des procédures alternatives ont été suivies par Castaños *et al.* [82], Gómez *et al.* [83] et García-Ramos *et al.* [84] en choisissant un hamiltonien IBM-1 général. Nous allons adopter ici cette dernière approche et écrire notre hamiltonien à un et à deux corps sous la forme

$$\hat{H} = \epsilon_d \hat{n}_d + a_0 \hat{P}^\dagger \cdot \hat{P} + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + a_2 \hat{Q} \cdot \hat{Q} + a_3 \hat{T}_3 \cdot \hat{T}_3 + a_4 \hat{T}_4 \cdot \hat{T}_4. \quad (3.1)$$

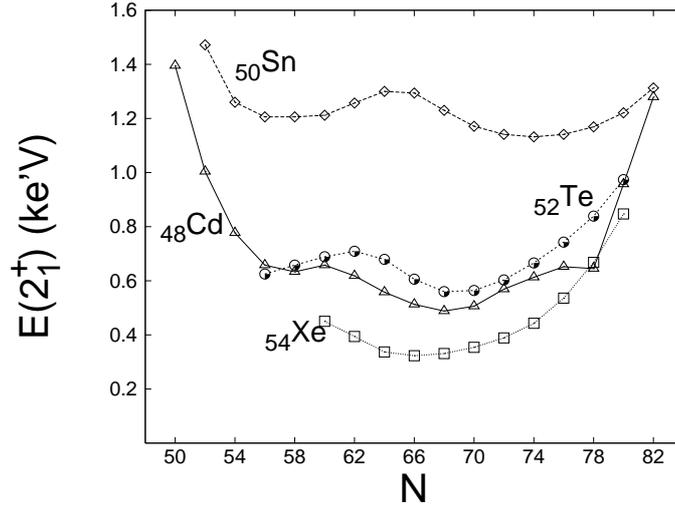
Les différents opérateurs figurant dans l'expression (3.1) ont été définis au chapitre 1 et sont donnés par l'équation (1.49). Les six paramètres du hamiltonien sont déterminés à partir d'une minimisation des moindres carrés des différents spectres d'énergie. Ces paramètres peuvent être calculés pour chacun des noyaux considérés. Une autre façon de procéder est de fixer tous les paramètres dans (3.1) et laisser varier  $\epsilon_d$  pour chaque isotope, c'est la procédure suivie par García-Ramos *et al.* dans la référence [84]. Nous choisissons dans notre fit de fixer tous les paramètres du hamiltonien pour la même série d'isotopes. Le paramètre  $\chi$  dans l'opérateur quadripolaire  $\hat{Q}$  a peu d'influence sur les résultats du fit et est alors fixé à  $-\sqrt{7}/2$  pour tous les noyaux. Dans le paramètre  $a_2$ , nous introduisons une dépendance linéaire de la quantité  $N_\nu N_\pi / (N_\nu + N_\pi)$  où  $N_\nu$  ( $N_\pi$ ) est la moitié du nombre de neutrons (protons) de valence. Ce rapport a été proposé par Casten *et al.* pour désigner le nombre d'interactions neutrons-protons par nucléon de valence [85, 86]. La dépendance de ce rapport se justifie par le rôle non négligeable que joue l'interaction neutron-proton dans l'espace de valence vis-à-vis de la déformation. Ceci peut être illustré d'une façon assez simple en considérant l'énergie du premier état excité  $2_1^+$  dans les noyaux pair-pairs et en faisant appel aux résultats cités dans la référence [87] pour la région de Sn. Dans les isotopes de  $_{50}\text{Sn}$  n'ayant pas de protons de valence, l'énergie du  $2_1^+$  reste quasiment stable dans toute la région  $N = 50 - 82$ . Dans les noyaux voisins  $_{48}\text{Cd}$ ,  $_{52}\text{Te}$ ,  $_{54}\text{Xe}$  ayant au moins deux protons de valence,  $E(2_1^+)$  diminue considérablement dès l'ajout des premiers neutrons de valence (cf. figure 3.1). Ceci ne peut être interprété qu'en termes de la corrélation entre les protons et les neutrons dans l'espace de valence. Nous nous permettons alors de décomposer le paramètre  $a_2$  en deux termes en l'écrivant

$$a_2 = a'_2 + \frac{N_\nu N_\pi}{N_\nu + N_\pi} a''_2. \quad (3.2)$$

L'ajustement sur les spectres expérimentaux considère les états à basses énergies des bandes fondamentale, quasi- $\beta$  et quasi- $\gamma$  dans les chaînes d'isotopes pair-pairs du

CHAPITRE 3 : Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

FIG. 3.1 – Évolution de l'énergie de l'état  $2_1^+$  en fonction du nombre de neutrons dans la région de Sn montrant l'importance de l'interaction neutron-proton dans l'espace de valence.



TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres du hamiltonien (3.1) et de l'écart type  $\sigma$  pour chaque série d'isotopes données en keV.

Isotopes	$\epsilon_d$	$a_0$	$a_1$	$a'_2$	$a''_2$	$a_3$	$a_4$	$\sigma$
$^{142-152}_{58}\text{Ce}$	1517.0	67.7	-8.6	-26.5	-2.2	-185.8	-113.1	81
$^{144-152}_{60}\text{Nd}$	1731.9	56.8	-15.8	-20.2	0.6	-87.1	-224.9	126
$^{148-160}_{62}\text{Sm}$	1050.5	-7.7	-6.4	7.5	-11.0	-63.9	-87.2	131
$^{150-162}_{64}\text{Gd}$	1870.6	69.1	-15.4	-8.6	-1.7	-54.5	-229.5	115
$^{152-164}_{66}\text{Dy}$	1887.0	75.6	-12.3	-8.8	-0.7	-53.5	-219.1	97
$^{154-170}_{68}\text{Er}$	1693.3	101.5	-9.7	-6.5	-0.9	-43.6	-208.1	71
$^{156-176}_{70}\text{Yb}$	882.4	54.1	-1.8	6.9	-4.9	-9.4	-71.7	91
$^{162-182}_{72}\text{Hf}$	1099.1	66.7	-7.7	-6.3	-0.5	-37.0	-135.4	114
$^{164-190}_{74}\text{W}$	1068.4	73.0	-3.8	-7.0	-0.5	-5.7	-136.7	103

$^{58}\text{Ce}$  au  $^{74}\text{W}$ . Les valeurs obtenues pour les paramètres du hamiltonien ainsi que celles de l'écart type  $\sigma$  pour chaque série sont présentées dans le tableau 3.1. Une difficulté que nous avons rencontrée réside dans le choix des niveaux d'énergie à inclure dans l'ajustement. Ceci ne concerne pas la bande fondamentale et la bande quasi- $\gamma$  qui sont facilement identifiables dans un noyau déformé (ici la bande  $\gamma$  correspond à la bande  $K^\pi = 2^+$  la plus basse en énergie contenant une séquence

### 3.2 Hamiltonien et spectres d'énergie

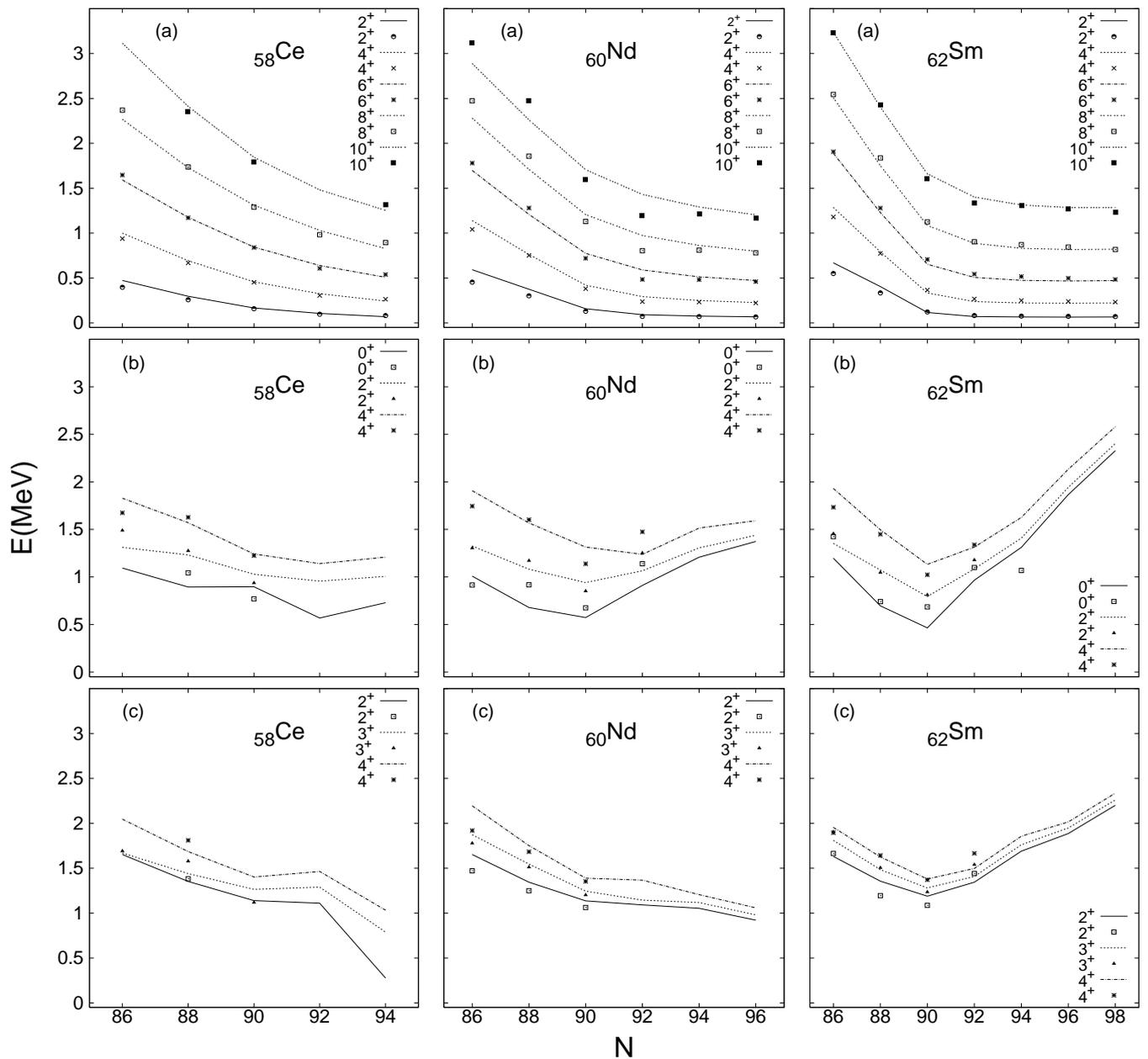
de spins pairs et impairs). Par contre, une confusion entre la bande- $\beta$  et une bande excitée  $K^\pi = 0^+$  à deux quasi-particules est très envisageable. Pour éviter une telle confusion, nous nous sommes laissés guidés, comme il va être expliqué plus loin, par les transitions  $E0$  pour déterminer la bande  $\beta$ -vibrationnelle. Celle-ci ne correspond pas nécessairement à la première bande  $K^\pi = 0^+$ . C'est notamment le cas du  $^{158}\text{Gd}$ ,  $^{178}\text{Hf}$ ,  $^{166}\text{Er}$  ainsi que quelques isotopes lourds de l'ytterbium.

Sur la figure 3.2, nous présentons les spectres d'énergie associés à tous les noyaux dans les chaînes d'isotopes du Ce au W. Cette figure montre une concordance satisfaisante entre les énergies théoriques et expérimentales. D'autre part, l'observation du comportement des niveaux d'énergie correspondant à chacune des bandes présentées en fonction du nombre de neutrons nous informe quant à l'existence d'une transition de phase de sphérique-à-déformée dans les séries étudiées. Dans la bande fondamentale, nous remarquons que les énergies d'excitation sont relativement élevées dans tous les isotopes légers puis diminuent brutalement dès l'ajout de la première paire de neutrons de valence pour se stabiliser à partir de  $N = 90$ . En examinant le rapport  $R_{4/2}$ , nous constatons qu'il est de  $R_{4/2} \approx 2$  pour les isotopes légers et il est de  $R_{4/2} \approx 3.33$  pour  $N \geq 90$  en passant par une valeur transitionnelle de  $R_{4/2} \approx 2.5$  indiquant que la transition d'un vibreur sphérique à un rotateur bien déformé passe par une région où les deux configurations peuvent exister simultanément. La même conclusion peut être tirée à partir des niveaux d'énergie correspondant à la bande quasi- $\beta$ . D'une importance particulière sont les énergies des états  $0^+$  excités. Celles-ci sont plus élevées dans les isotopes légers et sont minimales pour  $N = 90$ . L'étude du comportement de ces états a constitué l'objectif de nombreuses investigations toutes réunies autour du croisement des deux configurations sphérique et déformée au point de la transition de phase [81, 104, 105]. Ceci a été confirmé très récemment par Meyer *et al.* lors d'un examen de la densité des niveaux  $0^+$  à basse énergie dans la région des terres rares [106, 107]. Ils ont montré que cette densité se maximise à  $N = 90$ . La 'compression' des états  $0^+$  à ce point peut alors induire une quasi-dégénérescence et donc une coexistence des minima sphérique et déformé.

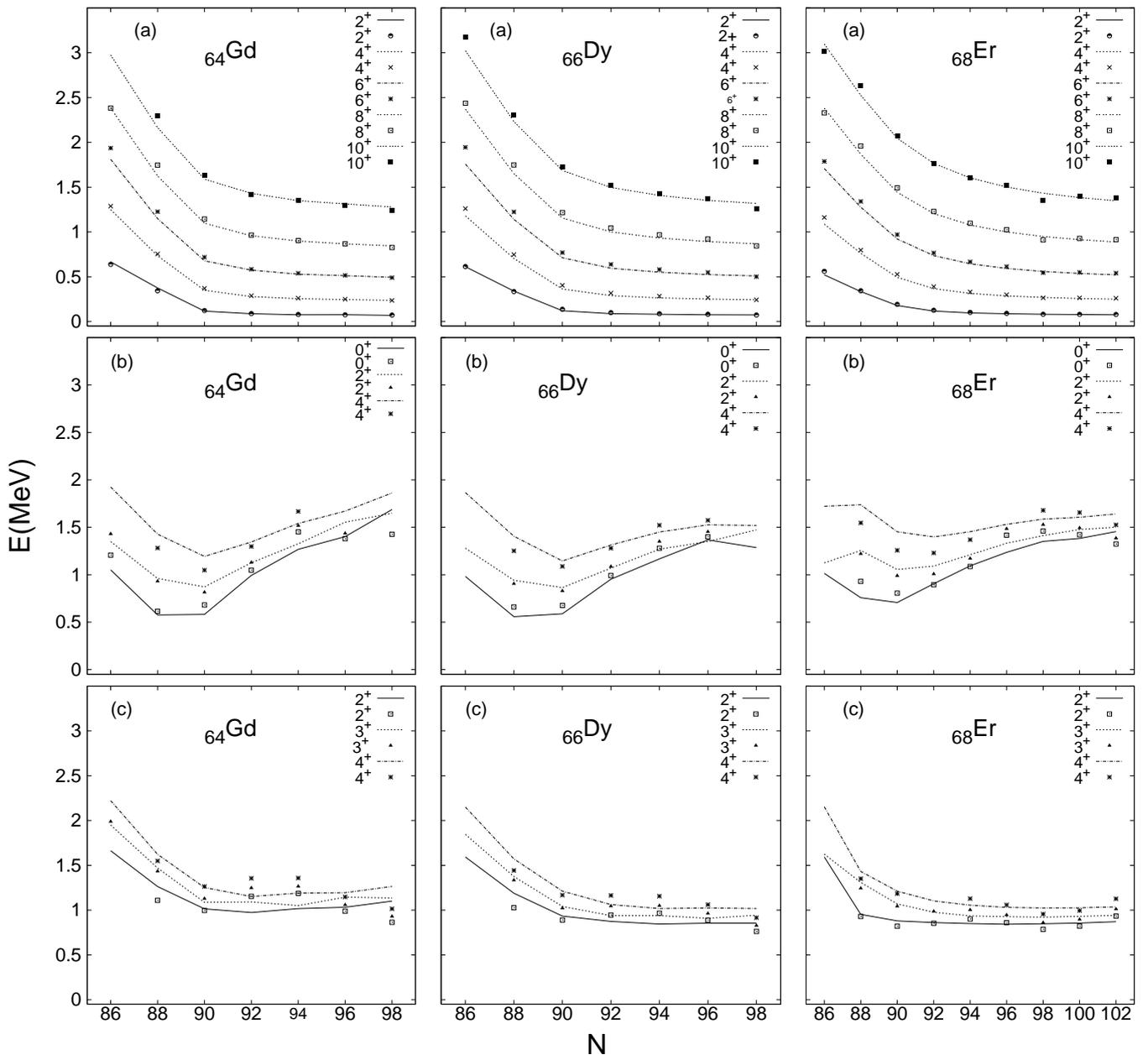
Notons pour clore cette section que, malgré le bon accord entre les spectres d'énergie expérimentaux et ceux calculés à partir du hamiltonien (3.1) et qui peut être constaté à partir des valeurs de  $\sigma$  qui sont de l'ordre de 100 keV, les fluctuations dans les valeurs des paramètres du hamiltonien sont tout de même considérables. En effet, ceci est dû à la grande corrélation entre les paramètres qui est sensible au moindre changement dans les énergies ajustées. Cependant, l'étude systématique des paramètres du hamiltonien n'est pas parmi les objectifs de notre travail car notre but principal est de reproduire la transition de phase sphérique-à-déformée dans les terres rares. D'autre part, les fonctions d'onde établies lors de la diagonalisation du

CHAPITRE 3 : Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

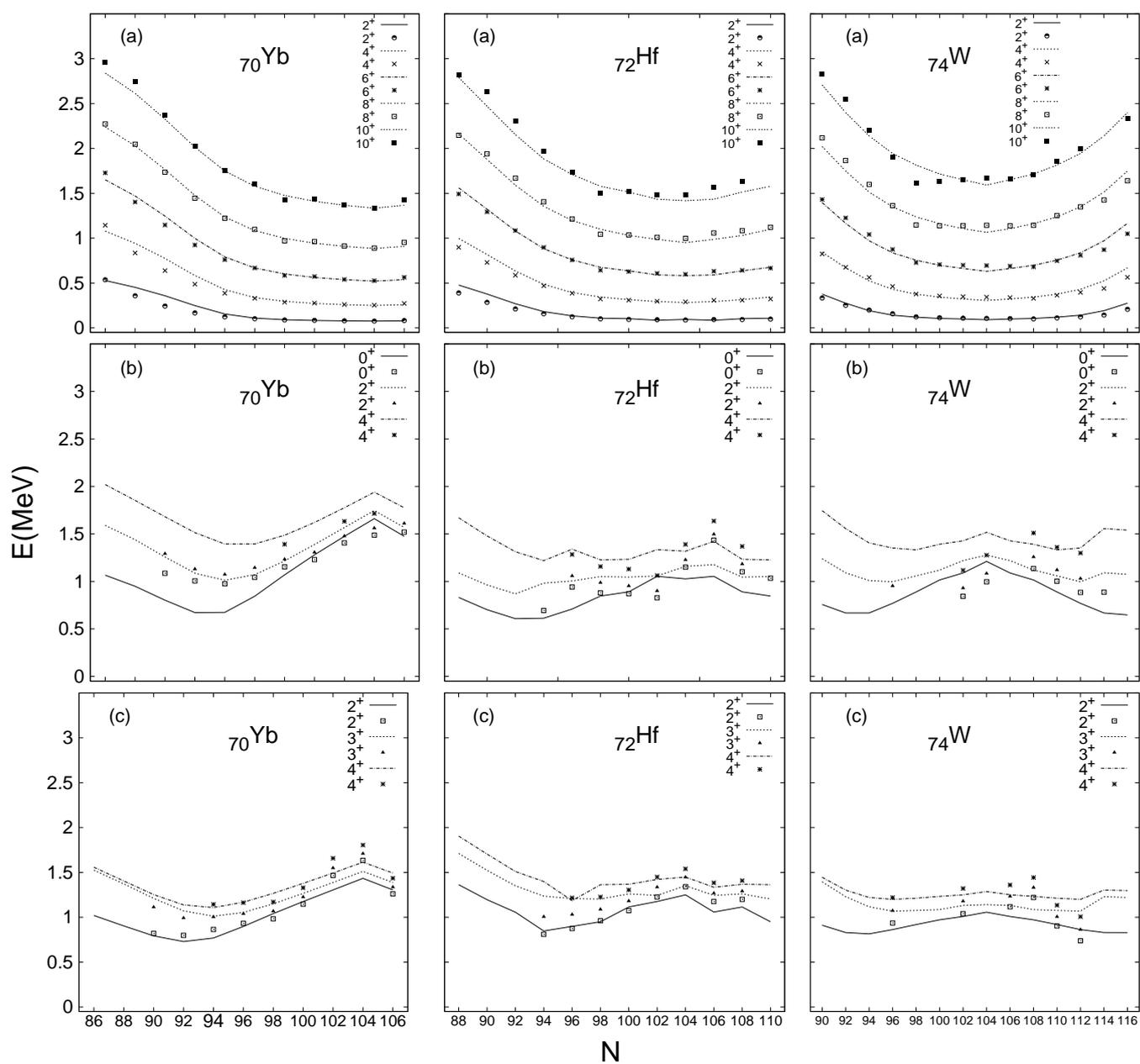
FIG. 3.2 – Spectres d'énergie calculés et expérimentaux associés aux isotopes pairs dans la région des terres rares du  $^{58}\text{Ce}$  au  $^{74}\text{W}$  (a) pour la bande fondamentale (b) pour la bande  $\beta$ -vibrationnelle et (c) pour la bande  $\gamma$ -vibrationnelle. Les données expérimentales sont prises des références [88–103]



### 3.2 Hamiltonien et spectres d'énergie



CHAPITRE 3 : Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques



hamiltonien 3.1 vont nous servir dans les sections suivantes dans le calcul des rayons nucléaires et les transitions  $E0$ .

### 3.3 Transitions monopolaires électriques

Les transitions monopolaires électriques  $E0$  connectent les niveaux d'énergies de mêmes spin et parité ( $J^\pi \rightarrow J^\pi$ ). Elles résultent de l'interaction coulombienne entre les électrons atomiques et les protons du noyau. Cependant, ce couplage n'est possible que si les électrons sentent un changement du moment monopolaire à l'extérieur du volume nucléaire. Généralement, ce changement arrive à la suite d'une variation de la distribution de charges à l'intérieur du noyau. Ainsi les transitions  $E0$  résultent majoritairement d'un processus de conversion interne. Un processus de création d'une paire électron-positron peut également donner lieu à une transition  $E0$  dans le cas où l'énergie de celle-ci est supérieure à 1022 kéV ( $2m_0c^2$ ). Finalement, les transitions  $E0$  peuvent accompagner l'émission de deux photons mais c'est un mode de désexcitation d'une moindre probabilité. Une remarque à souligner ici est que, par conservation du moment angulaire, les transitions monopolaires sont interdites via l'émission d'un seul photon.

L'opérateur de transitions  $E0$  est défini par l'expression [108]

$$\hat{T}(E0) = \sum_{k=1}^A e_k r_k^2, \quad (3.3)$$

où  $e_k$  désigne la charge effective du nucléon. Notons que la sommation parcourt *tous* les nucléons. La probabilité totale de la transition  $E0$  est donnée par

$$W(E0) = \sum_j W_j(E0) = \rho^2(J_i^\pi \rightarrow J_f^\pi) \sum_j \Omega_j(Z, k), \quad (3.4)$$

où  $j$  désigne l'orbitale atomique K, L, M, ...  $\Omega_j$  s'appellent facteurs électroniques et sont des fonctions du nombre atomique  $Z$  et de l'énergie de la transition  $k$  (en unité  $m_0c^2$ ). Puisque ces facteurs sont par définition indépendants de la structure nucléaire [109], toute l'information la concernant est véhiculée par la quantité sans dimension  $\rho(E0)$  appelée force de la transition monopolaire et définie par [109]

$$\rho(E0) = \frac{\langle f | \hat{T}(E0) | i \rangle}{eR_0^2}, \quad (3.5)$$

où  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  sont respectivement l'état initial et final de la transition et  $R = r_0 A^{1/3}$  avec  $r_0 = 1.2$  fm. Comme le signe de  $\rho(E0)$  ne peut être déterminé, le carré  $\rho^2(E0)$  est plutôt utilisé.

### 3.3.1 Systématique des transitions $E0$ dans les noyaux atomiques

L'objectif de ce paragraphe consiste à présenter une estimation des transitions monopolaires dans les noyaux sphériques et déformés séparément. Cette étude a été menée dans le cadre du modèle géométrique à travers l'approche du vibreur quadripolaire et celle du rotateur déformé que nous allons présenter succinctement au cours de cette section.

Dans le cadre du modèle géométrique de Bohr et Mottelson [1], la description des transitions  $E0$  part du fait qu'elles sont sensibles aux variations de la forme de la distribution de charges dans le noyau. Ainsi, on définit le moment monopolaire par l'expression

$$M(E0) = \int r^2 \rho_{\text{el}}(r) dr, \quad (3.6)$$

où  $\rho_{\text{el}}(r)$  est la densité radiale de charges dans le noyau. Elle est supposée continue, homogène et varier en fonction de la surface nucléaire. Celle-ci est paramétrisée en fonction des variables collectives multipolaires  $\alpha_{\lambda\mu}$  telle que

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda \geq 2, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 2, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right], \quad (3.7)$$

où  $R_0$  est le rayon de la distribution sphérique.  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$  sont absents de l'expression (3.7) car ils présentent respectivement l'incompressibilité du volume du noyau et la translation de son centre de masse et ne contribuent pas ainsi aux oscillations de la surface nucléaire. Le développement de  $\rho_{\text{el}}(r)$  en puissances de  $\alpha_{\lambda\mu}$  s'écrit [1]

$$\begin{aligned} \rho_{\text{el}}(r) &= \rho_0(r) \\ &- R_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \left( \sum \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* - \frac{1}{4\pi} \sum |\alpha_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} (r - R_0) R_0 \left( \sum \alpha_{\lambda\mu} \nabla Y_{\lambda\mu}^* \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} R_0^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial r^2} \left( \sum \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right) + \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\rho_0(r) \equiv \rho(r, \alpha_{\lambda\mu} = 0)$  est la distribution de charge associée à une forme sphérique.

Dans une première approximation on ne considère que la déformation quadripolaire qui est le mode d'oscillation le plus dominant autour d'un système sphérique et qui correspond à  $\lambda = 2$  ( $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ ). Pour arriver à mieux décrire la géométrie du noyau, on définit, sous la contrainte de l'invariance de la relation (3.7) par rapport aux rotations, un nouveau système de coordonnées dites intrinsèques, liées au corps déformé et définies au chapitre 1 par l'équation (1.70). En introduisant ces variables

### 3.3 Transitions monopolaires électriques

dans l'équation (3.7) l'équation de surface devient

$$R(\theta') = R_0 \left[ 1 + \beta_2 Y_{20}(\theta') + \frac{1}{4\pi} \beta_2^2 \right]. \quad (3.9)$$

Au deuxième ordre du développement en puissance de  $\alpha_{2\mu}$  les équations (3.6) et (3.8) donnent

$$M(E0) = \frac{3}{5} Z e R_0^2 \left( 1 + \frac{5}{4\pi} \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 \right), \quad (3.10)$$

avec  $\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \beta_2^2$ .

#### Transitions $E0$ dans un vibrateur sphérique

Afin de décrire les transitions monopolaires dans un vibrateur quadripolaire, on introduit un ensemble d'opérateurs de création et d'annihilation qui ont chacun pour fonction de créer ou d'annihiler un seul phonon dans un état de moment angulaire 2 et de projection  $\mu$  sur l'axe  $z$ . Ces opérateurs sont notés  $b_{\mu}^{\dagger}$  et  $b_{\mu}$  respectivement et sont liés à  $\alpha_{2\mu}$  par [110]

$$\alpha_{2\mu} = \left( \frac{\hbar}{2B\omega} \right)^{1/2} (b_{\mu} + (-)^{\mu} b_{\mu}^{\dagger}), \quad (3.11)$$

où  $B\omega^2 = C$  définit la tension effective de surface. À cause de la dépendance quadratique de  $M(E0)$  de  $\alpha_{2\mu}$ , les transitions  $E0$  obéissent à la règle de sélection  $\Delta n = 0, \pm 2$  où  $n$  présente le nombre de phonons de l'oscillateur harmonique.

Par ailleurs et du point de vue modèle en couches, les transitions monopolaires dans un état à une seule particule ( $|l, j\rangle \rightarrow |l, j\rangle$ ) sont strictement interdites car elles obéissent à la règle de sélection  $\Delta \mathcal{N} = \pm 2$  ( $\mathcal{N}$  désigne le nombre quantique principal associé à l'oscillateur harmonique du modèle en couches) ce qui implique une énergie d'excitation de l'ordre de  $2\hbar\omega \simeq 20$  MéV. Par contre, à basses énergies d'excitation, les transitions  $E0$  peuvent être issues des corrélations d'appariement entre des états à deux particules (voir équation (3.21)). Ainsi, en considérant un mélange des fonctions d'onde de deux orbitales successives ( $\Delta \mathcal{N} = 1$ ) dans le potentiel de l'oscillateur harmonique on obtient une quantité appelée unité effective à une seule particule (SPU) et qui a été proposée par Bohr et Mottelson [1] dans le but d'avoir une estimation d'un 'seuil' pour les transitions  $E0$  à basses énergies d'excitation. La force de transition qui lui correspond est donnée par

$$\rho_{\text{SPU}}^2 \simeq 0.5 A^{-2/3}. \quad (3.12)$$

Dans un vibrateur sphérique, les transitions  $E0$  entre les états  $|n, L\rangle$ , où  $L$  est le moment cinétique collectif, dans les deux cas  $\Delta n = 0$  et  $\Delta n = \pm 2$  sont obtenues à

CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

partir des équations (3.10) et (3.11) et s'écrivent

$$\begin{aligned} \langle n, L | M(E0) | n, L \rangle &= \left( n + \frac{5}{2} \right) \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \frac{\hbar\omega}{C}, \\ \langle n, L | M(E0) | n-2, L \rangle &= \sum_{L'} \langle n, L \| b^+ \| n-1, L \rangle \langle n-1, L' \| b^+ \| n-2, L \rangle \\ &\times \left[ \frac{(-)^{L+L'}}{2\sqrt{2L+1}} \right] \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \frac{\hbar\omega}{C}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il s'en suit alors que la force monopolaire entre l'état  $0_2^+$  à deux phonons et l'état fondamental à zéro phonons est

$$\rho_{v.s}^2(E0) = \frac{5}{2} \left( \frac{\hbar\omega}{C} \frac{3}{4\pi} Z \right)^2. \quad (3.14)$$

En introduisant la quantité  $\beta_{\text{rms}}^2$  liée à la probabilité de transitions quadripolaires  $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  dans le modèle de l'oscillateur harmonique par

$$\beta_{\text{rms}} = \frac{[B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)]^{1/2}}{\left(\frac{3}{4\pi} Z e R_0^2\right)}, \quad (3.15)$$

on obtient

$$\rho_{v.s}^2(E0) = \frac{2}{5} \left[ \frac{3}{4\pi} \right]^2 Z^2 \beta_{\text{rms}}^2. \quad (3.16)$$

Cette dernière équation nous donne une estimation de  $\rho_{v.s}^2(E0)$  généralement très proche ou inférieure à 1SPU dans un noyau vibrationnel sphérique.

### Transitions $E0$ dans un rotateur quadripolaire déformé

Les oscillations collectives de la surface dans les noyaux bien déformés peuvent être regardées en tant que faibles vibrations autour d'une forme d'équilibre bien déformée. Dans ce schéma, les modes vibrationnels intrinsèques d'un noyau pair-pair déformé paraissent comme une superposition de différents modes rotationnels. Chaque vibration est caractérisée par un nombre quantique intrinsèque  $\lambda$  et sa projection  $K$  sur l'axe de symétrie lié au noyau. Ainsi, les spectres d'énergie collectifs dans les noyaux déformés sont généralement marqués par l'existence à basse énergie de deux bandes excitées se caractérisant par  $K^\pi = 0^+$  et  $K^\pi = 2^+$  et appelées respectivement bandes  $\beta$ - et  $\gamma$ -vibrationnelles. La description de la géométrie des noyaux dans ce cas s'effectue dans le cadre du modèle de rotation-vibration en faisant appel à l'équation de surface (3.7), en considérant toujours une déformation quadripolaire et en introduisant les paramètres intrinsèques définis par l'équation (1.70). La variable  $a_{20}$  correspond à une élongation perpendiculaire à l'axe de symétrie et conserve

### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

ainsi la symétrie axiale du noyau. Ce type de déformations quadripolaires est appelé vibration- $\beta$ . Par contre, les paramètres  $a_{2\pm 2}$  correspondent à des élongations parallèles à l'axe de symétrie et définissent des vibrations appelées vibrations- $\gamma$ .

Dans la référence [110], Reiner a calculé les éléments de matrice de  $\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \beta_2^2$  entre des états de la forme  $|JMK, n_{\gamma}, n_{\beta}\rangle$  (avec  $n_{\beta}$  et  $n_{\gamma}$  désignant les nombres de quanta vibrationnels associés aux bandes  $\beta$ - et  $\gamma$ - vibrationnelles respectivement). Ses calculs résultent sur une force de transition

$$\rho^2(E0; n_{\beta} = 0 \rightarrow n_{\beta} = 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2\pi} \right)^2 Z^2 \beta_0^2 \frac{\hbar\omega}{C}, \quad (3.17)$$

où  $\beta_0$  est la déformation autour de la forme d'équilibre. La transition ( $E0; n_{\beta} = 2 \rightarrow n_{\beta} = 0$ ) est aussi permise mais est extrêmement improbable. Les calculs de Reiner ont également associé aux transitions monopolaires dans un rotateur déformé les règles de sélection  $\Delta J = 0$ ,  $\Delta K = 0$  et  $\Delta n_{\gamma} = 0$ . Il s'en suit alors que seule la bande  $\beta$ -vibrationnelle peut être connectée à la bande fondamentale via des transitions  $E0$  et que celles-ci sont strictement interdites entre la bande  $\gamma$  et la bande fondamentale. De plus, les valeurs de  $\rho^2(E0)$  entre la bande  $\beta$  et la bande fondamentale se sont avérées supérieures à 1SPU dans la majorité des noyaux pair-pairs déformés dans lesquels des transitions  $E0$  ont été observées.

## 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

Dans certains noyaux dont le nombre de protons s'approche d'une couche fermée, l'ajout de neutrons a pour effet de modifier la distribution de charges à l'intérieur du noyau. On peut donc admettre que les neutrons de valence sont dotés de charges effectives et qu'ils sont ainsi en mesure de polariser le cœur de protons.

Pour un noyau donné, les expressions définissant les rayons carrés moyens de masse et de charge d'un état  $|s\rangle$  sont données respectivement par

$$\langle r^2 \rangle_s^{\text{masse}} = \frac{1}{A} \langle s | \sum_{k=1}^A r_k^2 | s \rangle, \quad \langle r^2 \rangle_s^{\text{charge}} = \frac{1}{Z} \langle s | \sum_{k=1}^Z r_k^2 | s \rangle, \quad (3.18)$$

et peuvent être combinées en une seule expression telle que

$$\langle r^2 \rangle_s \equiv \langle s | \hat{T}(r^2) | s \rangle = \frac{1}{\sum_k e_k} \langle s | \sum_{k=1}^A e_k r_k^2 | s \rangle, \quad (3.19)$$

où  $\hat{T}(r^2)$  désigne l'opérateur associé au carré moyen du rayon nucléaire. L'hypothèse principale de notre approche est de considérer *la même charge effective dans les*

CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

opérateurs  $\hat{T}(r^2)$  et  $\hat{T}(E0)$  [111]. Les équations (3.3) et (3.19) nous permettent alors d'écrire

$$\hat{T}(E0) = (e_n N + e_p Z) \hat{T}(r^2), \quad (3.20)$$

où  $e_n$  ( $e_p$ ) est la charge effective du neutron (proton).

Par ailleurs, la relation entre les transitions  $E0$  et les rayons nucléaires peut être illustrée en terme du modèle en couches en supposant que les états initial et final de la transition sont des mélanges orthogonaux de deux configurations à deux particules  $|(j_1)^2; J\rangle$  et  $|(j_2)^2; J\rangle$ . Il vient alors que

$$\begin{aligned} |i\rangle &= a|(j_1)^2; J\rangle + b|(j_2)^2; J\rangle, \\ |f\rangle &= -b|(j_1)^2; J\rangle + a|(j_2)^2; J\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

À partir des équations (3.19) et (3.21), la transition  $E0$  entre les deux états  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  peut être exprimée par

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{T}(E0) | i \rangle &= ab \left( \langle (j_2)^2; J | \sum_{k=1}^A e_k r_k^2 | (j_2)^2; J \rangle - \langle (j_1)^2; J | \sum_{k=1}^A e_k r_k^2 | (j_1)^2; J \rangle \right) \\ &= ab(e_n N + e_p Z) (\langle r^2 \rangle_2 - \langle r^2 \rangle_1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

En projetant l'expression (3.19) au modèle IBM-1, nous écrivons l'opérateur  $\hat{T}(r^2)$  sous-forme d'une combinaison linéaire des générateurs scalaires de l'algèbre  $U(6)$  telle que [19]

$$\hat{T}(r^2) = \langle r^2 \rangle_c + \tilde{\alpha} [s^\dagger \times \tilde{s}]^{(0)} + \tilde{\beta} [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(0)}, \quad (3.23)$$

où  $\langle r^2 \rangle_c$  est le carré moyen du rayon du cœur. La conservation du nombre total de bosons en modèle IBM permet de réécrire la relation (3.23)

$$\hat{T}(r^2) = \langle r^2 \rangle_c + \alpha \hat{N}_b + \beta \hat{n}_d, \quad (3.24)$$

avec  $\alpha = \tilde{\alpha}$ ,  $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{5}} - \tilde{\alpha}$  et  $N_b$  est le nombre total de bosons (la notation  $N_b$  est utilisée ici pour ne pas confondre avec le nombre de neutrons  $N$ ). Notons que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont en unité de longueur ( $\text{fm}^2$ ).

À partir des relations (3.20) et (3.24), l'opérateur  $\hat{T}(E0)$  s'écrit en IBM

$$\hat{T}(E0) = (e_n N + e_p Z) (\langle r^2 \rangle_c + \alpha \hat{N}_b + \beta \hat{n}_d). \quad (3.25)$$

Comme les états initial et final dans une transition  $E0$  sont différents, les termes  $\langle r^2 \rangle_c$  et  $\alpha \hat{N}_b$  ne contribuent pas aux transitions et peuvent être omis de l'équation (3.25). Ainsi nous exprimons l'opérateur  $\hat{T}(E0)$

$$\hat{T}(E0) = (e_n N + e_p Z) \beta \hat{n}_d. \quad (3.26)$$

### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

Le comportement des rayons nucléaires en fonction du nombre de neutrons ajoutés peut être mieux visualisé si l'on considère deux autres quantités obtenues directement à partir des rayons et appelées déplacements isotopes et déplacements isomères. Les premiers mesurent la différence en rayons entre deux isotopes successifs. Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'aux noyaux pair-pairs, on définit le déplacement isotope à partir de l'équation (3.24) par

$$\Delta \langle r^2 \rangle^{(A)} = |\alpha| + \beta \left( \langle \hat{n}_d \rangle_{0_1^+}^{(A+2)} - \langle \hat{n}_d \rangle_{0_1^+}^{(A)} \right). \quad (3.27)$$

La valeur absolue de  $\alpha$  est introduite pour avoir une augmentation des rayons carrés moyens en fonction de  $A$  dans le cas où les bosons sont considérés comme étant des paires de trous (au-delà du milieu de la couche). Les déplacements isomères mesurent, pour un noyau donné, la différence en rayons entre un état excité (généralement  $2_1^+$  dans les noyaux pair-pairs) et l'état fondamental. Ils s'écrivent à partir de l'équation (3.24)

$$\delta \langle r^2 \rangle^{(A)} = \beta \left( \langle \hat{n}_d \rangle_{2_1^+}^{(A)} - \langle \hat{n}_d \rangle_{0_1^+}^{(A)} \right). \quad (3.28)$$

Il est très important de noter à ce niveau qu'une étude alternative de la relation des transitions  $E0$  aux rayons de charge a été proposée par Wood *et al.* dans la référence [79]. Cependant, leur approche est consacrée à l'étude des noyaux où deux configurations géométriques différentes coexistent et se mélangent. Ainsi, on commence par considérer un noyau d'une déformation quadripolaire axiale. Sa surface est décrite par l'équation

$$R = R_0 (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta)). \quad (3.29)$$

Le rayon carré moyen est exprimé alors en fonction de la déformation  $\beta_2$  par

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} Z e R_0^2 \left( 1 + \frac{5}{4\pi} \beta_2^2 \right). \quad (3.30)$$

Si  $|0_1^+\rangle$  et  $|0_2^+\rangle$  représentent deux états associés à deux différentes formes d'équilibre, les états initial et final de la transition qui sont des mélanges orthogonaux de  $|0_1^+\rangle$  et  $|0_2^+\rangle$  s'écrivent

$$\begin{aligned} |0_i^+\rangle &= a|0_1^+\rangle + b|0_2^+\rangle, \\ |0_f^+\rangle &= -b|0_1^+\rangle + a|0_2^+\rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ainsi, la force de la transition  $\rho(E0)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \rho(E0) &= \frac{1}{eR_0^2} [ab \left( \langle 0_1^+ | \hat{T}(E0) | 0_1^+ \rangle - \langle 0_2^+ | \hat{T}(E0) | 0_2^+ \rangle \right) \\ &\quad + (a^2 - b^2) \langle 0_2^+ | \hat{T}(E0) | 0_1^+ \rangle]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

### CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

Les deux premiers termes présentent les éléments de matrice diagonaux de  $\hat{T}(E0)$  et le troisième est associé aux éléments de matrice non-diagonaux. Ce dernier s'annule dans le cas d'un mélange maximum ( $a^2 = b^2 = 0.5$ ). Il est également négligé dans le cas où les fonctions d'onde correspondent à des déformations très différentes. Les équations (3.10) et (3.32) donnent alors

$$\rho^2(E0) = \left(\frac{3}{4\pi}Z\right)^2 a^2(1-a^2)[\Delta(\beta^2)]^2. \quad (3.33)$$

La variation du rayon carré moyen entre les deux configurations données par (3.31) est obtenue à partir de l'équation (3.30) et s'écrit

$$\Delta\langle r^2 \rangle = \frac{3}{4\pi}R_0^2\Delta(\beta^2). \quad (3.34)$$

Finalement, les équations (3.33) et (3.34) permettent d'exprimer  $\rho^2(E0)$  en terme du déplacement isotope  $\Delta\langle r^2 \rangle$  tel que

$$\rho^2(E0) = \frac{Z^2}{R_0^4}a^2(1-a^2) [\Delta\langle r^2 \rangle]^2. \quad (3.35)$$

Notons que cette dernière expression montre que  $\rho^2(E0)$  est très faible pour un faible mélange et s'annule dans les noyaux n'ayant pas de mélange entre deux formes coexistantes de différentes déformations.

#### 3.4.1 Interprétation physique des paramètres $\alpha$ et $\beta$

Dans les équations (3.24) et (3.26) définissant respectivement le rayon du noyau et les transitions  $E0$  en IBM-1,  $\alpha$  et  $\beta$  ont été introduits comme étant des paramètres libres pouvant être déterminés à partir d'un fit aux données expérimentales. Ainsi, leur signification physique n'est évidemment pas très apparente. Néanmoins, il nous est tout à fait possible de comprendre leur relation à la géométrie du noyau en les projetant au modèle de Bohr et Mottelson [112].

Si l'on considère que la densité de charge est définie par l'expression

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right) \right]^{-1}, \quad (3.36)$$

où  $\rho_0$  est la densité au centre du noyau, le moment radial de  $\rho$  s'écrit alors

$$\langle r^n \rangle = \frac{\int \rho(r)r^n d\tau}{\int \rho(r)d\tau} \approx \frac{3}{n+3}R_0^n \left[ 1 + \frac{n(n+5)}{6}\pi^2 \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + \dots \right], \quad (3.37)$$

### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

d'où on peut exprimer le rayon de charge pour un noyau sphérique en fonction du nombre de nucléons par

$$\langle r^2 \rangle^{(A)} \approx \frac{3}{5} r_0^2 A^{\frac{2}{3}}, \quad (3.38)$$

où  $r_0 = 1.2$  fm. L'équation (3.24) montre que le terme associé au paramètre  $\alpha$  augmente aussi en fonction du nombre de nucléons. Ceci nous permet alors de confronter ce paramètre au déplacement isotope dit 'standard' [1] déduit à partir de l'équation (3.38) ce qui nous donne

$$|\alpha| \approx \delta \langle r^2 \rangle_{\text{std}}^{(A)} \approx \frac{3}{5} r_0^2 ((A+2)^{(2/3)} - A^{(2/3)}) \approx \frac{4}{5} r_0^2 A^{-1/3}. \quad (3.39)$$

Pour les noyaux dans la région de masse  $A \sim 150 - 180$ , la valeur de  $|\alpha|$  peut être estimée à  $|\alpha| \approx 0.2$  fm<sup>2</sup>.

Par ailleurs, pour un noyau de déformation quadripolaire, le rayon carré moyen s'écrit en fonction du paramètre de déformation  $\beta_2$  sous la forme

$$\langle r^2 \rangle_{\text{def}}^{(A)} \approx \frac{5}{4\pi} \beta_2^2 \langle r^2 \rangle_{\text{std}}^{(A)}. \quad (3.40)$$

Dans la référence [113], Ginocchio et Kirson ont établi une relation approximative entre les paramètres de déformation quadripolaire  $\beta_2$  et  $\bar{\beta}_2$  en modèle géométrique et en modèle IBM respectivement. Elle est donnée par

$$\beta_2 \approx \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{N_b}{A} \bar{\beta}_2. \quad (3.41)$$

Dans l'équation (3.24), la contribution de la déformation au rayon nucléaire est exprimée par le terme associé au paramètre  $\beta$ . Ainsi, en utilisant les équations (3.38), (3.40) et (3.41) on obtient

$$\beta \frac{\bar{\beta}_2^2}{1 + \bar{\beta}_2^2} N_b \approx \frac{4}{3} r_0^2 N_b^2 A^{-4/3} \bar{\beta}_2^2. \quad (3.42)$$

Cette expression nous permet non seulement de relier le paramètre  $\beta$  à la géométrie du noyau mais aussi d'en avoir une estimation préliminaire dans les deux cas où les noyaux sont faiblement ou fortement déformés. Ces cas correspondent respectivement à  $\bar{\beta}_2 \ll 1$  ou  $\bar{\beta}_2 \approx \sqrt{2}$ , ce qui donne

$$\beta_{\text{faible}} \approx \frac{4}{3} r_0^2 N_b A^{-4/3}, \quad \beta_{\text{forte}} \approx 4 r_0^2 N_b A^{-4/3}. \quad (3.43)$$

Ainsi, pour  $A \sim 150 - 180$  et pour une valeur typique du nombre de bosons  $N_b \sim 10$ , les valeurs de  $\beta$  sont comprises entre 0.025 et 0.075 fm<sup>2</sup>.

### 3.4.2 Application dans la région des terres rares

Nous proposons dans ce paragraphe d'établir une analyse systématique des isotopes pair-pairs dans la région des terres rares du  $_{58}\text{Ce}$  au  $_{74}\text{W}$  [111, 114]. Une caractéristique commune à toutes les chaînes d'isotopes dans cette région réside dans l'existence d'un changement plus ou moins abrupte de la forme des noyaux de sphérique-à-déformée. Cette étude a pour nous l'intérêt de pouvoir tester les expressions élaborées ci-dessus en ce qui concerne la corrélation entre les rayons nucléaires et les transitions monopolaires.

Tout d'abord, les paramètres  $\langle r^2 \rangle_c$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont ajustés aux rayons de charge expérimentaux. Les éléments de matrices  $\langle \hat{n}_d \rangle_{0_1^+}$  nécessaires pour calculer le rayon carré moyen (voir équation (3.24)) sont obtenus au préalable à partir de l'ajustement des spectres d'énergie. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi obtenus sont inclus dans l'équation (3.27) pour calculer les déplacements isotopes. Ceux-ci sont très sensibles à la transition de phase de sphérique-à-déformée, comme on va le constater plus loin (figure 3.4), ce qui nous offre une manière intéressante de tester les valeurs des paramètres obtenues ci-dessus. D'après l'équation (3.28), les déplacements isomères ne dépendent que du paramètre  $\beta$ . Bien qu'on ne dispose ici que de peu de données expérimentales, le calcul des déplacements isomères constitue une deuxième façon de fixer la valeur de ce paramètre.

Cette démarche nous a conduit à un paramètre  $\langle r^2 \rangle_c$  différent pour chaque série d'isotopes, des valeurs absolues de  $\alpha$  comprises entre 0.1 et 0.2 fm<sup>2</sup> (conformément aux prédictions établies à partir de l'équation (3.39)) et un paramètre  $\beta$  fixé à une valeur de 0.035 fm<sup>2</sup> pour tous les noyaux. Les valeurs obtenues pour  $\langle r^2 \rangle_c$  et  $\alpha$  sont données dans le tableau 3.2. Les rayons carrés moyens, les déplacements isotopes et les déplacements isomères calculés sont comparés aux données expérimentales et sont présentés sur les figures 3.3 et 3.4 et le tableau 3.3 respectivement. Finalement, nous sommes en mesure de calculer les valeurs de  $\rho^2(E0)$  en introduisant la valeur de  $\beta$  précédemment obtenue dans l'équation (3.26). Dans le tableau 3.4, nous plaçons les résultats de nos calculs en les comparant aux valeurs expérimentales disponibles dans la région des terres rares.  $J$  désigne le moment cinétique des états initial et final de la transition,  $K$  est sa projection sur l'axe de symétrie et  $K_i^\pi$  représente la  $i$ ème bande  $K^\pi = 0^+$ . Il faut insister ici sur le fait que, pour déterminer la bande  $\beta$ -vibrationnelle, on a pas nécessairement considéré la première bande excitée  $K^\pi = 0^+$  mais plutôt celle où d'importantes transitions  $E0$  sont observées. Pour les isotopes dont les  $\rho^2(E0)$  expérimentaux ne sont pas connus, la bande  $\beta$ -vibrationnelle est déterminée en suivant la même systématique des énergies ajustées.

Au vu des résultats présentés ci-dessus, plusieurs remarques sont à souligner. Notons tout d'abord que l'accord entre les résultats obtenus par notre modèle et ceux donnés par l'expérience peut être jugé satisfaisant. D'après les figures 3.3 et 3.4,

### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

TAB. 3.2 – Valeurs des paramètres  $\langle r^2 \rangle_c$  et  $\alpha$  (équation (3.24)) obtenues pour les isotopes pair-pairs du  $^{58}\text{Ce}$  au  $^{74}\text{W}$  données en  $\text{fm}^2$ .

Isotope	$\langle r^2 \rangle_c$	$ \alpha $
$^{58}\text{Ce}$	22.8704	0.230
$^{60}\text{Nd}$	22.8714	0.260
$^{62}\text{Sm}$	23.0224	0.260
$^{64}\text{Gd}$	24.8306	0.100
$^{66}\text{Dy}$	24.5120	0.110
$^{68}\text{Er}$	25.0566	0.150
$^{70}\text{Yb}$	25.1475	0.150
$^{72}\text{Hf}$	26.2840	0.100
$^{74}\text{W}$	26.1664	0.073

TAB. 3.3 – Déplacements isomères expérimentaux et calculés (en  $10^{-3} \text{ fm}^2$ ) pour les chaînes d'isotopes du  $^{58}\text{Ce}$  au  $^{74}\text{W}$ .

Isotope	$\delta\langle r^2 \rangle$		
	Théorie	Expérience	Référence
$^{152}\text{Sm}$	26.9	12.6(8)	[120]
$^{154}\text{Sm}$	6.0	0.8(4)	[120]
$^{154}\text{Gd}$	21	20(4)	[121]
$^{156}\text{Gd}$	3.2	4.3(3.7)	[121]
$^{158}\text{Gd}$	2.4	0.30(3.3)	[121]
$^{160}\text{Gd}$	0.8	-2.1(3.2)	[121]
$^{170}\text{Yb}$	3.8	1.2(7)	[120]
$^{172}\text{Yb}$	2.8	0.4(2)	[120]
$^{174}\text{Yb}$	2.4	-0.45(27)	[120]
$^{176}\text{Yb}$	3.0	-0.2(1)	[120]
$^{182}\text{W}$	4.5	-0.2(1)	[120]
$^{184}\text{W}$	6.4	0.16(10)	[120]
$^{186}\text{W}$	3.8	0.14(8)	[120]

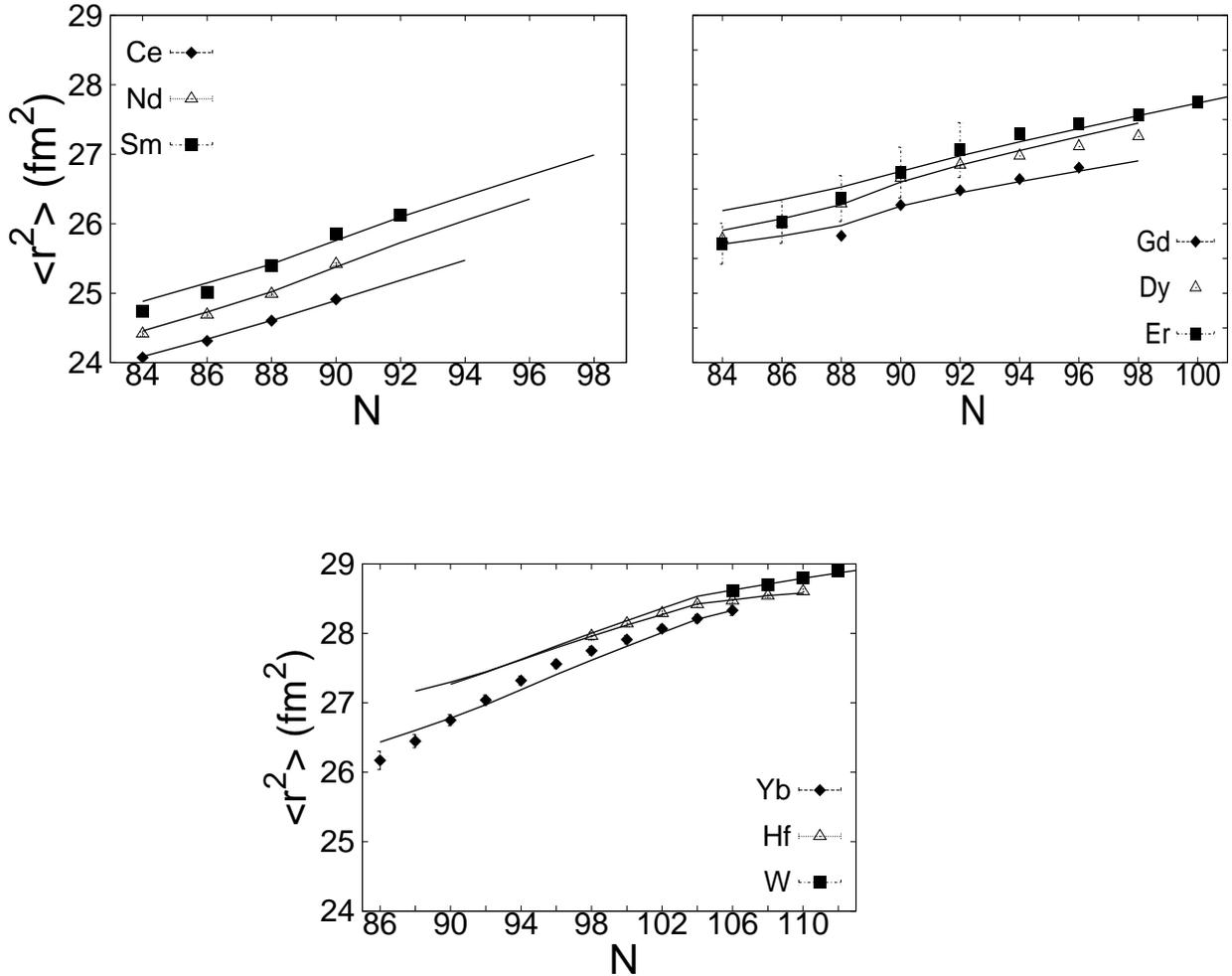
CHAPITRE 3 : Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

TAB. 3.4 – Valeurs calculées de  $\rho^2(E0)$  comparées aux données expérimentales. Les données sur les transitions  $0^+ \rightarrow 0^+$  sont prises de la réf. [122] à l'exception du  $^{154}\text{Sm}$  [123]. Pour les transitions entre des états de spins différents de zéro les données sont prises de la réf. [79] excepté la transition  $4_2^+ \rightarrow 4_1^+$  dans le  $^{152}\text{Sm}$  [124].

Isotope	Transition	$J, K_i^\pi$	$\rho^2(E0) \times 10^3$	
			Théorie	Expérience
$^{150}\text{Sm}$	740 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	6	18(2)
	1046 $\rightarrow$ 334	$2, 0_2^+$	13	100(40)
$^{152}\text{Sm}$	685 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	48	51(5)
	811 $\rightarrow$ 122	$2, 0_2^+$	38	69(6)
	1023 $\rightarrow$ 366	$4, 0_2^+$	26	88(14)
	1083 $\rightarrow$ 0	$0, 0_3^+$	1.9	0.7(4)
	1083 $\rightarrow$ 685	$0, 0_3^+$	42	22(9)
$^{154}\text{Sm}$	1099 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	45	96(42)
$^{152}\text{Gd}$	615 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	63	63(14)
	931 $\rightarrow$ 344	$2, 0_2^+$	72	35(3)
$^{154}\text{Gd}$	681 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	93	89(17)
	815 $\rightarrow$ 123	$2, 0_2^+$	73	74(9)
$^{156}\text{Gd}$	1049 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	58	42(20)
	1129 $\rightarrow$ 89	$2, 0_2^+$	54	55(5)
$^{158}\text{Gd}$	1452 $\rightarrow$ 0	$0, 0_3^+$	41	35(12)
	1517 $\rightarrow$ 79	$2, 0_3^+$	46	17(3)
$^{158}\text{Dy}$	1086 $\rightarrow$ 99	$2, 0_2^+$	65	27(12)
$^{160}\text{Dy}$	1350 $\rightarrow$ 87	$2, 0_2^+$	51	17(4)
$^{162}\text{Er}$	1171 $\rightarrow$ 102	$2, 0_2^+$	60	630(460)
$^{164}\text{Er}$	1484 $\rightarrow$ 91	$2, 0_3^+$	46	90(50)
$^{166}\text{Er}$	1460 $\rightarrow$ 0	$0, 0_2^+$	27	2.0(10)
$^{170}\text{Yb}$	1229 $\rightarrow$ 0	$0, 0_3^+$	73	27(5)
$^{172}\text{Yb}$	1405 $\rightarrow$ 0	$0, 0_3^+$	76	0.20(3)
	1477 $\rightarrow$ 79	$2, 0_3^+$	74	$\leq 0.013$
$^{174}\text{Hf}$	900 $\rightarrow$ 91	$2, 0_2^+$	57	27(13)
$^{176}\text{Hf}$	1227 $\rightarrow$ 89	$2, 0_2^+$	19	52(9)
$^{178}\text{Hf}$	1496 $\rightarrow$ 93	$2, 0_3^+$	57	14(3)
$^{182}\text{W}$	1257 $\rightarrow$ 100	$2, 0_2^+$	70	3.5(3)
$^{184}\text{W}$	1121 $\rightarrow$ 111	$2, 0_2^+$	69	2.6(5)

### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

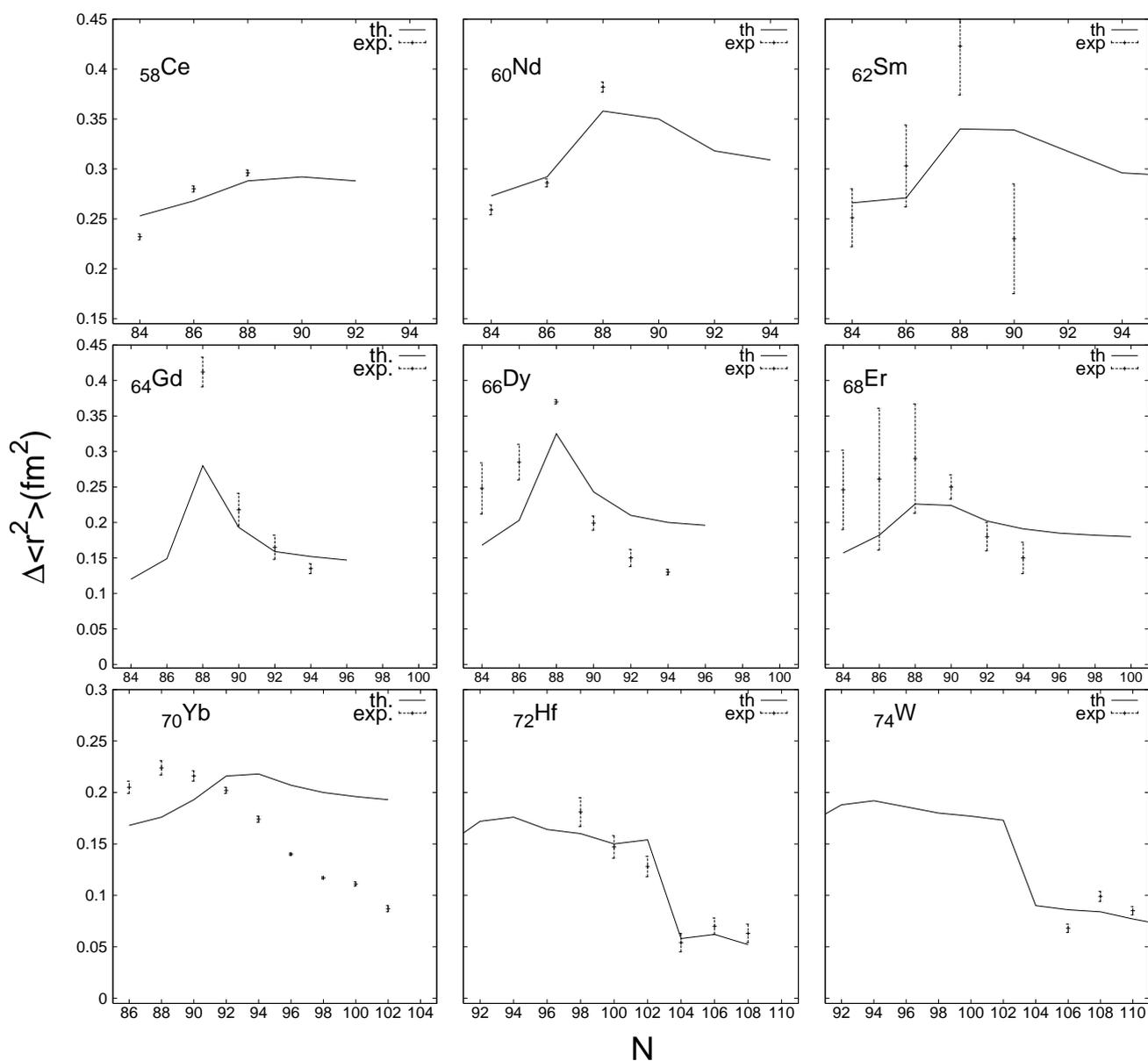
FIG. 3.3 – Rayons carrés moyens des isotopes pair-pairs du  $_{58}\text{Ce}$  au  $_{74}\text{W}$  calculés à partir de l'équation (3.24) comparés aux données expérimentales [115].



les rayons de charge ainsi que les pics dans les déplacements isotopes sont très bien reproduits pour toutes les séries d'isotopes à l'exception de quelques isotopes de l'ytterbium. La même remarque en rapport avec la qualité du calcul peut être faite à partir du tableau 3.4 pour les valeurs de  $\rho^2(E0)$ . Un très bon accord est notamment observé pour les isotopes du Sm, Gd et Dy. Cependant, on note également quelques exceptions qui concernent en particulier les noyaux bien déformés  $^{166}\text{Er}$ ,  $^{172}\text{Yb}$  et  $^{182-184}\text{W}$ . Une première explication possible est que les  $\rho^2(E0)$  expérimentales figurant dans le tableau 3.4 ne correspondent pas à des transitions de la bande  $\beta$ -vibrationnelle et que celles-ci ne sont pas encore mesurées. Une autre raison du désaccord entre le modèle et l'expérience peut être liée au modèle lui-même. L'ap-

CHAPITRE 3 : Corrélation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

FIG. 3.4 – Déplacements isotopes expérimentaux et calculés (en fm<sup>2</sup>) pour les chaînes d'isotopes du <sup>58</sup>Ce au <sup>74</sup>W. Les valeurs expérimentales sont extraites de la réf. [116] pour Ce, réf. [117] pour Nd, Sm, Dy, Er et Yb, réf. [118] pour Gd, réf. [115] pour Hf et réf. [119] pour W.



### 3.4 Relation entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires

proche suivie jusqu'ici peut être insuffisante pour décrire ces noyaux et une extension du modèle est alors recommandée. Cette discussion fera l'objet de la section suivante.

Une autre remarque fort intéressante est à souligner à partir de la figure 3.4. Les pics dans les déplacements isotopes sont particulièrement observés pour  $N = 90$ , i.e. pour la différence en rayons carrés moyens entre  $N = 90$  et  $N = 88$ . De plus, ces pics sont plus importants dans les noyaux Sm, Gd et Dy. Leur hauteur diminue en dessous de  $Z = 62$  pour les noyaux Ce et Nd et en dessus de  $Z = 66$  pour les isotopes de Er, Yb, Hf et W. L'interprétation de cette caractéristique des déplacements isotopes dans les terres rares est directement liée au changement brutal de la déformation des noyaux en fonction du nombre de neutrons. En terme du modèle en couches déformé, cette transition de phase à  $N = 90$  s'explique comme une conséquence de l'effet de couches à  $Z = 64$  quand les protons et les neutrons commencent à occuper simultanément les mêmes orbitales de Nilsson [125]. Qualitativement, le recouvrement entre les orbitales de protons et de neutrons est d'autant plus important que leurs inclinaisons par rapport à l'axe de symétrie soient les mêmes. C'est notamment le cas dans les noyaux  $^{152}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$  et  $^{156}\text{Dy}$  où la probabilité d'occupation pour la dernière paire de protons est maximum pour la couche intruse  $1h_{11/2}$ . Ainsi, sous l'effet de l'interaction neutron-proton la dernière paire de neutrons se place dans la couche  $1h_{9/2}$  dont le recouvrement est maximum avec la couche  $1h_{11/2}$  ce qui entraîne un changement brutal de la déformation dans ces noyaux avec un maximum à  $Z = 64$ . Pour  $Z \geq 66$ , les paires de protons occupent déjà la couche  $1h_{11/2}$  ce qui va ralentir l'effet de la déformation à  $N = 90$ . Pour  $N \geq 92$ , les protons occupant l'orbitale de Nilsson  $\frac{11}{2}^-$  [505] ont plutôt tendance à interagir avec les neutrons de la couche  $\frac{13}{2}^+$  [606], les noyaux sont alors d'ores et déjà bien déformés [126].

Comme vient d'être évoqué, le pic observé dans les déplacements isotopes n'est qu'une signature d'un changement abrupte de la déformation à l'état fondamental caractérisant les noyaux dans la région de masse  $A \sim 150$ . Par ailleurs, la probabilité de transitions monopolaires entre l'état  $0^+$  fondamental et un quelconque autre état  $0^+$  excité est très faible dans un vibreur sphérique. Cependant, comme le montre le tableau 3.4, d'importantes forces de transitions  $E0$  entre la bande fondamentale et la bande  $\beta$ -vibrationnelle sont associées aux noyaux déformés. Cette évolution de  $\rho^2(E0)$  nous incite alors à prévoir une augmentation rapide au point de la transition sphérique-à-déformée.

Une étude du comportement de  $\rho^2(E0)$  dans la région de la transition dans les terres rares et dans la région de masse  $A \sim 100$  a été menée par von Brentano *et al.* [80] dans le cadre du modèle *sd*-IBM-1. Ils ont montré que les valeurs de  $\rho^2(E0)$  bien qu'elles diminuent légèrement au-delà du point de la transition, restent tout de même importantes dans tous les noyaux déformés. Leur résultat vient confirmer celui établi par Bohr et Mattelson dans leur modèle géométrique [1]. Mais cette

conclusion se généralise-t-elle *absolument à tous* les noyaux déformés ? La discussion des limites de cette prédiction, et donc celles du modèle *sd*-IBM en ce qui concerne les transitions *E0*, fera l'objet de la section suivante. Nous proposons alors d'étendre l'espace du modèle en introduisant un troisième type de bosons (boson *g*) et de réétudier le comportement des transitions *E0* dans le cadre du modèle *sdg*-IBM.

### 3.5 Effet du boson *g* sur les transitions *E0*

Le paragraphe suivant aura trait à discuter l'influence du boson *g* sur l'attitude des transitions *E0* ainsi que leur corrélation aux rayons nucléaires. Pour ce faire, nous considérons une transition de phase sphérique-à-déformée décrite en termes du modèle *sdg*-IBM par une transition entre les deux limites  $U(5) \otimes U(9)$  et  $SU(3)$  [127]. Nous utilisons un hamiltonien schématique de la forme

$$\hat{H} = \epsilon_d \hat{n}_d + \epsilon_g \hat{n}_g - \kappa \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (3.44)$$

où  $\hat{Q}_\mu$  est l'opérateur quadripolaire associé à la limite  $SU(3)$  du modèle *sdg*-IBM et qui a été défini au chapitre 2 par l'équation (2.16). L'expression (3.44) du hamiltonien peut être réécrite en introduisant une nouvelle paramétrisation en termes de  $\lambda$  et  $\eta$  pouvant être considérés comme des paramètres de contrôle et étant liés à  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_g$  et  $\kappa$  par

$$\lambda = \frac{\epsilon_g}{\epsilon_d}, \quad \kappa = \frac{\eta}{4N_b(1-\eta)}. \quad (3.45)$$

Ainsi, le hamiltonien (3.44) devient

$$\hat{H} = c \left[ (1-\eta)(\hat{n}_d + \lambda \hat{n}_g) - \frac{\eta}{4N_b} \hat{Q} \cdot \hat{Q} \right], \quad (3.46)$$

où  $c$  est un facteur d'échelle. Cette dernière expression a pour nous un double intérêt car elle nous offre à la fois une forme plus simplifiée pour le hamiltonien avec seulement deux paramètres et une description adéquate de la transition de phase. L'équation (3.46) montre que la limite  $U(5) \otimes U(9)$  est obtenue pour  $\eta = 0$  tandis que la limite  $SU(3)$  correspond à  $\eta = 1$ . On croise alors le point de la transition (point critique) en faisant varier le paramètre  $\eta$  de 0 à 1.

En analogie avec le modèle *sd*-IBM, l'opérateur associé au rayon carré s'écrit en *sdg*-IBM sous la forme

$$\hat{T}(r^2) = \langle r^2 \rangle_c + \alpha \hat{N}_b + \beta \hat{n}_d + \gamma \hat{n}_g. \quad (3.47)$$

De même, nous écrivons l'opérateur  $\hat{T}(E0)$  sous la forme

$$\hat{T}(E0) = (e_n N + e_p Z)(\beta \hat{n}_d + \gamma \hat{n}_g), \quad (3.48)$$

### 3.5 Effet du boson $g$ sur les transitions $E0$

où l'on a omis les termes en  $\langle r^2 \rangle_c$  et  $\alpha$  n'ayant pas de contribution aux transitions  $E0$ .

Les éléments de matrice diagonaux des opérateurs nombres  $\hat{n}_s$ ,  $\hat{n}_d$  et  $\hat{n}_g$  dans la bande fondamentale à la limite  $U(5) \otimes U(9)$  s'écrivent pour  $J = 0$

$$\langle 0_1^+ | \hat{n}_s | 0_1^+ \rangle = N_b \delta_{i1}, \quad \langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle = \langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_1^+ \rangle = 0. \quad (3.49)$$

À la limite  $SU(3)$ , la dérivation des éléments de matrice diagonaux des opérateurs nombres suit la même démarche que celle présentée dans la section 2.4.2 dans le calcul des éléments de matrice de l'opérateur de transitions monopolaires. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \langle [N_b] (4N_b, 0) L \parallel \hat{n}_s \parallel [N_b] (4N_b, 0) L \rangle &= \\ \sqrt{2L+1} \left[ \frac{(4N_b - L - 2)(4N_b - L)(4N_b + L - 1)(4N_b + L + 1)}{20(4N_b - 3)(4N_b - 2)(4N_b - 1)} \right], \\ \langle [N_b] (4N_b, 0) L \parallel \hat{n}_d \parallel [N_b] (4N_b, 0) L \rangle &= \\ \sqrt{2L+1} \left[ \frac{(4N_b - L)(4N_b + L + 1)(32N_b^2 - 48N_b + L^2 + L + 16)}{28(2N_b - 1)(4N_b - 3)(4N_b - 1)} \right], \\ \langle [N_b] (4N_b, 0) L \parallel \hat{n}_g \parallel [N_b] (4N_b, 0) L \rangle &= \sqrt{2L+1} \\ &\times \left[ \frac{512N_b(N_b - 1)(2N_b - 3)(2N_b - 1) + 3L(L + 1)(64N_b(2N_b - 3) + L^2 + L + 58)}{280(2N_b - 1)(4N_b - 3)(4N_b - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pour  $J = 0$  et à partir de la relation (1.57), les éléments de matrice (3.50) se réduisent à

$$\begin{aligned} \langle 0_1^+ | \hat{n}_s | 0_1^+ \rangle &= \frac{N_b(4N_b + 1)}{5(4N_b - 3)}, \\ \langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle &= \frac{16(N_b - 1)N_b(4N_b + 1)}{7(4N_b - 3)(4N_b - 1)}, \\ \langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_1^+ \rangle &= \frac{64(N_b - 1)N_b(2N_b - 3)}{35(4N_b - 3)(4N_b - 1)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les éléments de matrice de ces opérateurs ont été également établis pour la transition entre la bande fondamentale et la bande  $\beta$ -vibrationnelle au cours de la section 2.4.2. Ils s'écrivent pour  $J = 0$

$$\langle 0_1^+ | \hat{n}_s | 0_2^+ \rangle = \langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_2^+ \rangle = \langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_2^+ \rangle = 0, \quad (3.52)$$

CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

TAB. 3.5 – Éléments de matrice  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle$  et  $\langle 0_2^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle$  à la limite classique de la limite SU(3) en *sd*-IBM et en *sdg*-IBM.

	$\langle 0_1^+   \hat{n}_l   0_1^+ \rangle$			$\langle 0_1^+   \hat{n}_l   0_2^+ \rangle$		
	$l = 0$	$l = 2$	$l = 4$	$l = 0$	$l = 2$	$l = 4$
<i>sd</i> -IBM	$\frac{1}{3}N_b$	$\frac{2}{3}N_b$	—	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{N_b}{2}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{N_b}{2}}$	—
<i>sdg</i> -IBM	$\frac{1}{5}N_b$	$\frac{4}{7}N_b$	$\frac{8}{35}N_b$	$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{N_b}{3}}$	$\frac{2}{7}\sqrt{\frac{N_b}{3}}$	$-\frac{24}{35}\sqrt{\frac{N_b}{3}}$

à la limite  $U(5) \otimes U(9)$  et

$$\begin{aligned}
 \langle 0_1^+ | \hat{n}_s | 0_2^+ \rangle &= \frac{4}{5} \left[ \frac{2(N_b - 1)N_b(2N_b - 1)(4N_b + 1)}{3(4N_b - 5)^2(4N_b - 3)} \right]^{1/2}, \\
 \langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_2^+ \rangle &= \frac{4}{7} \left[ \frac{2(N_b - 1)N_b(2N_b - 1)(4N_b - 13)^2(4N_b + 1)}{3(4N_b - 5)^2(4N_b - 3)(4N_b - 1)^2} \right]^{1/2}, \\
 \langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_2^+ \rangle &= -\frac{96}{35} \left[ \frac{2(N_b - 1)N_b(2N_b - 3)^2(2N_b - 1)(4N_b + 1)}{3(4N_b - 5)^2(4N_b - 3)(4N_b - 1)^2} \right]^{1/2},
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

à la limite SU(3).

Dans le tableau 3.5, nous présentons, à la limite classique ( $N_b \rightarrow \infty$ ), une comparaison des résultats cités ci-dessus à la limite SU(3) avec les mêmes éléments de matrice calculés en *sd*-IBM. En ce qui concerne les éléments de matrice diagonaux des opérateurs  $\hat{n}_l$ , nous remarquons une contribution plus importante du boson *d* aussi bien en *sd*-IBM qu'en *sdg*-IBM. Cependant, dans ce dernier modèle, les éléments de matrice associés au boson *g* sont beaucoup moins importants. Ceci peut être interprété en terme d'un très faible apport du boson *g*, et alors de la déformation hexadécapolaire, aux rayons nucléaires. Par ailleurs, les contributions positives des déformations quadripolaires et hexadécapolaires, reflétées dans le comportement des éléments de matrice de  $\hat{n}_d$  et  $\hat{n}_g$  à l'état fondamental, nous permettent de prévoir des valeurs positives pour les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  dans l'équation (3.47). Par contre, les valeurs relativement faibles de  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_1^+ \rangle$  rendent difficile la détermination du paramètre  $\gamma$  à partir des rayons carrés moyens.

D'autre part, au vu des éléments de matrice  $\langle 0_2^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle$ , nous remarquons en premier lieu qu'en *sd*-IBM, seuls les éléments de matrice de l'opérateur  $\hat{n}_d$  interviennent dans les transitions  $0_2^+ \rightarrow 0_1^+$ . Ceci conformément à ce qui a été déjà établi dans la section précédente où nos calculs nous ont conduit, pour les noyaux déformés, à des

### 3.5 Effet du boson $g$ sur les transitions $E0$

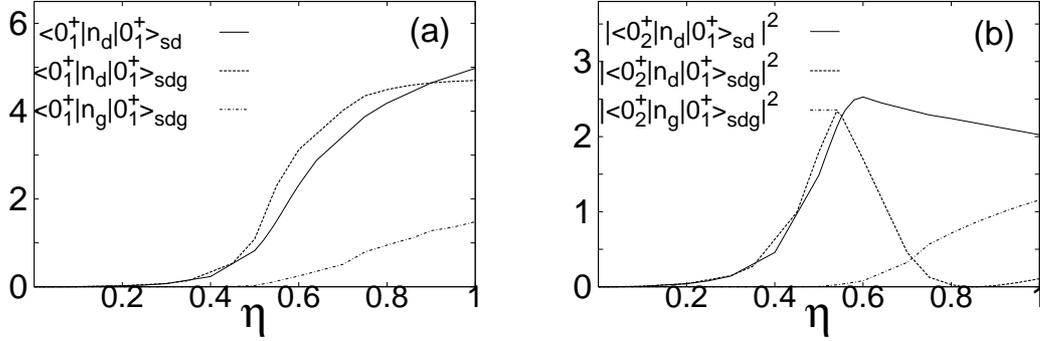


FIG. 3.5 – Éléments de matrice a)  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle$  et b)  $|\langle 0_1^+ | \hat{n}_l | 0_2^+ \rangle|^2$  pour  $l = 2$  et  $l = 4$  dans la région de transition de phase sphérique-à-déformée en  $sd$ -IBM et  $sdg$ -IBM avec  $\lambda = 1.5$ . Le nombre de bosons est fixé à  $N_b = 8$ .

valeurs très importantes de  $\rho^2(E0)$  en ce qui concerne les transitions de la bande  $\beta$ -vibrationnelle à la bande fondamentale. Cependant, cette constatation ne s'étend pas au modèle  $sdg$ -IBM. Comme on peut le voir dans le tableau 3.5, les éléments de matrice  $\langle 0_2^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle$  et  $\langle 0_2^+ | \hat{n}_g | 0_1^+ \rangle$  en  $sdg$ -IBM sont de valeurs comparables mais de signes opposés ce qui indique l'effet non négligeable du boson  $g$  sur les transitions monopolaires.

Les mêmes remarques peuvent être rétablies en observant le comportement des éléments de matrice  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle$  et  $\langle 0_2^+ | \hat{n}_l | 0_1^+ \rangle^2$  dans la région de transition de phases sphérique-à-déformée. Les fonctions d'onde nécessaires pour ce calcul sont obtenues à partir de la diagonalisation du hamiltonien (3.46) en utilisant le code numérique `ArbModel` [128]. Nous faisons varier le paramètre  $\eta$  de 0 à 1 et nous fixons le paramètre  $\lambda$  défini dans l'équation (3.45) à  $\lambda = 1.5$ . Les résultats ainsi obtenus sont présentés sur la figure 3.5. Sur la même figure, nous présentons également, à titre de comparaison, les éléments de matrice de l'opérateur  $\hat{n}_d$  à l'état fondamental calculés en  $sd$ -IBM où l'on a utilisé un hamiltonien schématique représentant la transition entre les deux limites  $U(5)$  (sphérique) et  $SU(3)$  (déformée). Ce hamiltonien s'écrit [74]

$$\hat{H} = c \left[ (1 - \eta) \hat{n}_d - \frac{\eta}{4N_b} \hat{Q}_{sd} \cdot \hat{Q}_{sd} \right], \quad (3.54)$$

où  $\hat{Q}_{sd}$  est l'opérateur quadripolaire en  $sd$ -IBM défini dans l'équation (1.49). La limite  $U(5)$  correspond à  $\eta = 0$  et la limite  $SU(3)$  est obtenue pour  $\eta = 1$ . La figure 3.5a montre que les éléments de matrice  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle$  sont tout d'abord très faibles dans les noyaux sphériques puis augmentent abruptement au point de la transition sphérique-à-déformée qui correspond à  $\eta_c \simeq 0.5$ . Cette figure confirme la dominance de la déformation quadripolaire dans les rayons nucléaires et montre

### CHAPITRE 3 : Corrélacion entre les transitions monopolaires et les rayons nucléaires dans les noyaux atomiques

une évolution quasiment identique de  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle$  en *sd*- et *sdg*-IBM en fonction du paramètre  $\eta$ . Cependant, on peut remarquer sur la même figure la contribution médiocre du boson *g* aux rayons de charge ce qui est en parfait accord avec les résultats du tableau 3.5.

Regardons maintenant la figure 3.5b où sont présentés les éléments de matrice  $|\langle 0_1^+ | \hat{n}_l | 0_2^+ \rangle|^2$  établis aux deux modèles *sd*- et *sdg*-IBM de la même façon que  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_1^+ \rangle$ . Notons tout d'abord que, jusqu'au point de la transition de phase,  $|\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_2^+ \rangle|^2$  en *sd*- et en *sdg*-IBM se comportent de la même manière, i.e, valeurs très faibles puis augmentation rapide à  $\eta \simeq 0.5$ . Par contre, aucune contribution aux transitions  $E0(0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$  n'est apportée par le boson *g* dans le domaine  $0 \leq \eta \leq 0.5$ . Au-delà du point de la transition de phase, bien que les éléments de matrice associés au boson *d* restent importants en *sd*-IBM, la figure 3.5b montre une diminution forte et immédiate de ceux-ci en *sdg*-IBM jusqu'à ce que leurs valeurs touchent à zéro pour  $\eta \approx 0.8$ . Par ailleurs, nous remarquons que  $|\langle 0_1^+ | \hat{n}_g | 0_2^+ \rangle|^2$  croient rapidement au point critique  $\eta_c \approx 0.5$  pour devenir nettement supérieurs à  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_2^+ \rangle^2$  pour  $\eta \approx 0.7$ . Cette dominance, qui a été déjà prédite par les calculs analytiques présentés ci-dessus, s'explique par le changement de signe de  $\langle 0_1^+ | \hat{n}_d | 0_2^+ \rangle$  avant d'atteindre sa valeur à la limite SU(3) du *sdg*-IBM. Nous pouvons inférer alors que la déformation hexadécapolaire, bien qu'elle soit d'un effet négligeable sur les rayons nucléaires, peut avoir une forte influence sur le comportement des transitions monopolaires dans les noyaux déformés.

### 3.5 Effet du boson $g$ sur les transitions $E0$

# Chapitre 4

## Limite classique du modèle *sdg*-IBM

Nous avons abordé au cours du premier chapitre le point concernant les propriétés géométriques du modèle des bosons en interaction et nous avons montré comment cela peut-il servir pour déterminer les formes d'équilibre associées à chacune des symétries dynamiques du modèle. Nous adoptons dans ce chapitre le même formalisme des états cohérents pour construire la limite classique du modèle *sdg*-IBM et mettre en évidence les formes géométriques correspondant à ces différentes limites en utilisant un état cohérent général.

### 4.1 Paramétrisation des états cohérents en *sdg*-IBM

Nous avons mentionné dans notre introduction à la limite classique du modèle IBM (section 1.7) que la dérivation de l'expression de l'état cohérent part du choix de variables collectives convenables. C'est ainsi qu'on a choisi d'exprimer ces états de telle sorte qu'on arrive à avoir une parfaite correspondance entre les paramètres qui y apparaissent et ceux caractérisant la surface du noyau. Celle-ci s'écrit dans le référentiel intrinsèque

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right). \quad (4.1)$$

Le nombre de ces paramètres se réduit en imposant au noyau l'invariance par rapport aux réflexions qui implique que

$$a_{\lambda\mu} = a_{\lambda-\mu}. \quad (4.2)$$

Si l'on considère, en plus de la condition (4.2), la symétrie par rapport au plan  $(x, z)$ , on obtient

$$a_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{pour } \mu \text{ impair}. \quad (4.3)$$

#### 4.1 Paramétrisation des états cohérents en *sdg*-IBM

De plus, la symétrie par rapport au plan  $(x, y)$  donne avec l'équation (4.3)

$$a_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ impair.} \quad (4.4)$$

Pour ce qui est d'une déformation hexadécapolaire se joignant à une déformation quadripolaire, la surface nucléaire s'écrit

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi) = & R_0 [1 + a_{20}Y_{20}(\theta, \phi) + a_{22}(Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi)) + a_{40}Y_{40}(\theta, \phi) \\ & + a_{42}(Y_{42}(\theta, \phi) + Y_{4-2}(\theta, \phi)) + a_{44}(Y_{44}(\theta, \phi) + Y_{4-4}(\theta, \phi))]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les paramètres quadripolaires sont les mêmes que ceux employés au préalable dans le modèle *sd*-IBM et présentés par l'équation (1.70). Par ailleurs, il existe deux méthodes différentes qui ont été utilisées afin de fixer les paramètres hexadécapolaires dans (4.5). La première, proposée par Nazarewicz et Rozmej dans la référence [129], repose sur la théorie de Caylay-Hamilton stipulant que tout tenseur symétrique d'ordre  $\lambda$  peut être construit à partir du tenseur d'ordre 2. Ils ont ainsi défini les deux quantités scalaires

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \sqrt{5}[aa]^{(0)} = \beta^2, \\ \xi_3 &= -\sqrt{\frac{35}{2}}[[aa]^{(2)}a]^{(0)} = \beta^3 \cos 3\gamma, \end{aligned} \quad (4.6)$$

et le tenseur d'ordre 2

$$\sigma = -[aa]^{(2)}, \quad (4.7)$$

où  $a$  dans ces deux dernières équations désigne  $a_{2\mu}$  et

$$[aa]_{\mu}^{(\lambda)} = \sum_{\mu_1\mu_2} \langle \lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2 | \lambda\mu \rangle a_{\lambda_1\mu_1} a_{\lambda_2\mu_2}. \quad (4.8)$$

Le tenseur hexadécapolaire le plus général s'écrit alors en fonction de la déformation quadripolaire dans le référentiel intrinsèque

$$a_{4\mu} = h_1(\xi_2, \xi_3)[aa]_{\mu}^{(4)} + h_2(\xi_2, \xi_3)[a\sigma]_{\mu}^{(4)} + h_3(\xi_2, \xi_3)[\sigma\sigma]_{\mu}^{(4)}, \quad (4.9)$$

où  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  sont des fonctions des paramètres  $\xi_2$  et  $\xi_3$ . Cette dernière expression mène à

$$\begin{aligned} a_{40} &= \frac{1}{6} \left[ \beta_4^{[A]}(5 \cos^2 \gamma + 1) + \beta_4^{[B]}(5 \cos^2 2\gamma + 1) + \beta_4^{[C]}(7 \cos^2 \gamma - 4)2 \cos \gamma \right], \\ a_{42} &= a_{4-2} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{15}{2}} \left[ \beta_4^{[A]} \sin 2\gamma - \beta_4^{[B]} \sin 4\gamma - \beta_4^{[C]} \sin \gamma \right], \\ a_{44} &= a_{4-4} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{35}{2}} \left[ \beta_4^{[A]} \sin^2 \gamma + \beta_4^{[B]} \sin^2 2\gamma - \beta_4^{[C]} \sin 2\gamma \sin \gamma \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

## CHAPITRE 4 : Limite classique du modèle *sdg*-IBM

On peut ainsi choisir d'utiliser l'une des trois paramétrisations

$$\begin{aligned}
 \text{[A]} \quad & \beta_2, \gamma, \beta_4^{[\text{A}]}, \quad \beta_4^{[\text{B}]} = \beta_4^{[\text{C}]} = 0, \\
 \text{[B]} \quad & \beta_2, \gamma, \beta_4^{[\text{B}]}, \quad \beta_4^{[\text{A}]} = \beta_4^{[\text{C}]} = 0, \\
 \text{[C]} \quad & \beta_2, \gamma, \beta_4^{[\text{C}]}, \quad \beta_4^{[\text{A}]} = \beta_4^{[\text{B}]} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dans chacun des cas [A], [B] et [C],  $\gamma = 0^\circ$  et  $\gamma = 60^\circ$  correspondent à une déformation hexadécapolaire axiale.

Dans la référence [127], Devi et Kota ont employé la paramétrisation de Nazarewicz et Rozmej pour exprimer l'état cohérent normalisé du modèle *sdg*-IBM sous la forme

$$\begin{aligned}
 |N; \beta_2, \beta_4; \gamma\rangle &= \sqrt{\frac{1}{N!(1 + \beta_2^2 + \beta_4^2)^N}} \\
 &\times [s^\dagger + \beta_2[\cos \gamma d_0^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger)] \\
 &+ \frac{1}{6} \beta_4 [(5 \cos^2 \gamma + 1) g_0^\dagger + \sqrt{\frac{15}{2}} \sin 2\gamma (g_2^\dagger + g_{-2}^\dagger) \\
 &+ \sqrt{\frac{35}{2}} \sin^2 \gamma (g_4^\dagger + g_{-4}^\dagger)]^N |0\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

avec  $\beta_2 \geq 0$ ,  $-\infty \leq \beta_4 \leq +\infty$  et  $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ . Ainsi qu'on peut le constater d'après l'équation (4.12), l'état cohérent du *sdg*-IBM se réduit à celui du *sd*-IBM donné au chapitre 1 par l'équation (1.67) lorsque  $\beta_4 = 0$ .

Une paramétrisation plus générale de la déformation hexadécapolaire a été proposée par Rohoziński et Sobiczewski dans la référence [130]. Cette paramétrisation est une généralisation de celle présentée ci-dessus dans la mesure où les formes axiales et non-axiales sont étudiées tout en considérant que les paramètres quadripolaires et hexadécapolaires sont construits de manières complètement indépendantes. Nous nous contentons ici de présenter les expressions obtenues dans [130] pour les paramètres hexadécapolaires dans (4.5) sans aller dans les détails de leur dérivation :

$$\begin{aligned}
 a_{40} &= \beta_4 \left( \sqrt{\frac{7}{12}} \cos \delta_4 + \sqrt{\frac{5}{12}} \sin \delta_4 \cos \gamma_4 \right), \\
 a_{42} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta_4 \sin \delta_4 \sin \gamma_4, \\
 a_{44} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_4 \left( \sqrt{\frac{5}{12}} \cos \delta_4 - \sqrt{\frac{7}{12}} \sin \delta_4 \cos \gamma_4 \right).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Les paramètres  $\delta_4$  et  $\gamma_4$  dans cette dernière équation décrivent la non-axialité de la forme hexadécapolaire et constituent une généralisation du paramètre  $\gamma$  dans (4.10)

## 4.2 Limite classique du hamiltonien $sdg$ -IBM général

qui sera noté dorénavant par  $\gamma_2$ . Plus précisément,  $\gamma_4$  joue le même rôle que  $\gamma_2$  dans la mesure où il détermine la contribution de la déformation hexadécapolaire aux longueurs des demi-axes de la surface nucléaire. Cependant,  $\delta_4$  mesure la concavité ou la convexité des quadrants de la forme hexadécapolaire. Les domaines de variation de  $\gamma_4$  et  $\delta_4$  sont respectivement  $0^\circ \leq \gamma_4 \leq 60^\circ$  et  $0^\circ \leq \delta_4 \leq 180^\circ$ . Le paramètre  $\beta_4$ , mesurant la déformation hexadécapolaire totale, est analogue au paramètre de déformation quadripolaire  $\beta_2$  et porte la même signification que celui introduit dans l'équation (4.10) [131]. Cependant, dans la paramétrisation (4.13), le paramètre  $\beta_4$  ne peut être que positif.

D'après l'équation (4.13), la forme hexadécapolaire ayant une symétrie axiale par rapport à l'axe  $z$  est obtenue pour  $a_{42} = a_{44} = 0$  et correspond à

$$\gamma_4 = 0^\circ, \quad \delta_4 = \delta_4^0, \quad (4.14)$$

avec  $\cos \delta_4^0 = \sqrt{\frac{7}{12}}$ .

En partant des deux équations (4.5) et (4.13), nous sommes tout à fait en mesure d'exprimer l'état cohérent le plus général du modèle  $sdg$ -IBM sous la forme

$$\begin{aligned} & |N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4\rangle \\ & \propto [s^\dagger + \beta_2[\cos \gamma_2 d_0^\dagger + \frac{\sin \gamma_2}{\sqrt{2}}(d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger)] + \frac{1}{\sqrt{12}}\beta_4[(\sqrt{7} \cos \delta_4 + \sqrt{5} \sin \delta_4 \cos \gamma_4)g_0^\dagger \\ & - \sqrt{6} \sin \delta_4 \sin \gamma_4(g_2^\dagger + g_{-2}^\dagger) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} \cos \delta_4 - \sqrt{7} \sin \delta_4 \cos \gamma_4)(g_4^\dagger + g_{-4}^\dagger)]]^N |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Notons que pour  $\beta_4 = 0$  on obtient l'état cohérent correspondant au modèle  $sd$ -IBM.

## 4.2 Limite classique du hamiltonien $sdg$ -IBM général

La dérivation de la limite classique du hamiltonien du modèle  $sdg$ -IBM nous renseigne sur la forme géométrique qui lui est associée. Afin d'établir ce calcul, nous suivons une démarche similaire à celle développée dans la référence [29] dans le contexte du  $sd$ -IBM et que nous avons introduite dans le premier chapitre. Seulement, la situation ici est rendue plus complexe par le nombre considérable de paramètres dans l'état cohérent (4.15) ainsi que par le grand nombre de termes dans le hamiltonien général du  $sdg$ -IBM.

Nous commençons par considérer le hamiltonien général donné au chapitre 2 par l'équation (2.53). Ses valeurs propres entre les états (4.15) sont définies par

$$E(N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4) = \frac{\langle N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 | \hat{H} | N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 \rangle}{\langle N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 | N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 \rangle}. \quad (4.16)$$

CHAPITRE 4 : Limite classique du modèle *sdg*-IBM

L'expression du terme à un corps est donnée par les trois premiers termes de (2.53). Celle associée aux termes d'interaction à deux corps a pour expression générale

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= \sum_{l_1 \leq l_2} \sum_{l'_1 \leq l'_2} \sum_{LM} \sqrt{\frac{2L+1}{(1+\delta_{l_1 l_2})(1+\delta_{l'_1 l'_2})}} v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^L [[b_{l_1}^\dagger \times b_{l_2}^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{b}_{l'_1} \times \tilde{b}_{l'_2}]^{(L)}]^{(0)} \\
&= \sum_{l_1 \leq l_2} \sum_{l'_1 \leq l'_2} \sum_{LM} \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{l_1 l_2})(1+\delta_{l'_1 l'_2})}} v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^L \\
&\quad \times (-)^{L-M} (-)^{l'_1+l'_2-L} (-)^{l'_1-m'_1} (-)^{l'_2-m'_2} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | LM \rangle \langle l'_1 m'_1 l'_2 m'_2 | L-M \rangle \\
&\quad \times b_{l_1 m_1}^\dagger b_{l_2 m_2}^\dagger b_{l'_2 - m'_2} b_{l'_1 - m'_1}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Si  $f(b)$  est un polynôme en  $b_i^\dagger$  et  $b_i$ , il vérifie avec ceux-ci les relations de commutation

$$\begin{aligned}
[b_i, f(b)] &= \frac{\partial}{\partial b_i^\dagger} f(b), \\
[f(b), b_i^\dagger] &= \frac{\partial}{\partial b_i} f(b). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

En employant cette dernière équation, nous obtenons pour les valeurs propres du terme à un corps

$$\langle \hat{H}_1 \rangle = \frac{N}{1 + \beta_2^2 + \beta_4^2} (\epsilon_s + \epsilon_d \beta_2^2 + \epsilon_g \beta_4^2). \tag{4.19}$$

Pour ce qui est des valeurs propres de  $\hat{H}_2$ , nous arrivons à

$$\begin{aligned}
&\langle N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 | \hat{H}_2 | N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 \rangle \\
&= \langle N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 | \sum_{l_1 \leq l_2} \sum_{l'_1 \leq l'_2} \sum_{LM} \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_{l_1 l_2})(1+\delta_{l'_1 l'_2})}} v_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^L \\
&\quad \times (-)^{L-M} (-)^{l'_1+l'_2-L} (-)^{l'_1-m'_1} (-)^{l'_2-m'_2} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | LM \rangle \langle l'_1 m'_1 l'_2 m'_2 | L-M \rangle \\
&\quad \times \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial b_{l_1 m_1}}} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial b_{l_2 m_2}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial b_{l'_2 - m'_2}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial b_{l'_1 - m'_1}}} | N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4 \rangle, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

où le vecteur en dessus de  $\frac{\partial}{\partial b_{l_i m_i}^\dagger}$  ( $\frac{\partial}{\partial b_{l_i m_i}}$ ) indique le sens de la dérivation. En calculant explicitement les valeurs propres de tous les termes dans  $\hat{H}_2$ , nous serons conduits à

## 4.2 Limite classique du hamiltonien $sdg$ -IBM général

écrire l'expression générale de l'énergie de surface qui lui est associée sous la forme

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H}_2 \rangle = & \frac{N(N-1)}{(1+\beta_2^2+\beta_4^2)^2} \left[ \frac{1}{2} v_{ssss}^0 + \beta_2^2 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} v_{ssdd}^0 + v_{sdsd}^2 \right) + \beta_4^2 \left( \frac{1}{3} v_{ssgg}^0 + v_{sgsg}^4 \right) \right. \\
& - \frac{2}{\sqrt{7}} \beta_2^3 \cos 3\gamma_2 v_{sddd}^2 + \beta_2^4 \left( \frac{1}{10} v_{dddd}^0 + \frac{1}{7} v_{dddd}^2 + \frac{9}{35} v_{dddd}^4 \right) \\
& + \beta_2^2 \beta_4 \left( \sqrt{\frac{7}{5}} \cos \delta_4 + \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \sin \delta_4 \right) \left( \sqrt{\frac{10}{21}} v_{sddg}^2 + \sqrt{\frac{3}{7}} v_{sgdd}^4 \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{11}} \beta_2 \beta_4^2 \left( \sin 2\delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4) - \frac{1}{\sqrt{35}} (1 - \cos 2\delta_4) \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) \right) \\
& \times \left( 2\sqrt{10} v_{sdgg}^2 + 4v_{sgdg}^4 \right) \\
& + \beta_4^3 \left( 4\sqrt{\frac{3}{143}} (\cos \delta_4 + 4\sqrt{\frac{5}{63}} \cos 3\gamma_4 \sin^3 \delta_4) + \frac{2}{\sqrt{429}} \cos 3\delta_4 \right) v_{sggg}^4 \\
& - \beta_2^3 \beta_4 \left( \frac{1}{\sqrt{35}} \cos \delta_4 \cos 3\gamma_2 + \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \sin \delta_4 \right) \\
& \times \left( \sqrt{\frac{10}{3}} v_{dddg}^2 + 2\sqrt{\frac{15}{11}} v_{dddg}^4 \right) \\
& + \beta_2^2 \beta_4^2 \left( \frac{1}{3\sqrt{5}} v_{ddgg}^0 + \frac{1}{7} \left( 1 + \frac{1}{6} \cos 2\delta_4 + \frac{\sqrt{35}}{6} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) v_{ddgg}^2 \right) \\
& + \frac{4}{15} \beta_2^2 \beta_4^2 \sin^2(\gamma_2 - \gamma_4) \sin^2 \delta_4 v_{dgdg}^3 \\
& + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{11}} \beta_2^2 \beta_4^2 \left( \sqrt{\frac{5}{7}} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) - \frac{2}{7} \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) \sin^2 \delta_4 \right) v_{ddgg}^2 \\
& + \sqrt{\frac{5}{143}} \beta_2^2 \beta_4^2 \left( \frac{1}{5} (1 + 6 \cos^2 \delta_4) + \frac{8}{7} \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) \sin^2 \delta_4 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{35}} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) v_{ddgg}^4 \\
& + \frac{1}{11} \beta_2 \beta_4^2 \left( \frac{2}{35} (43 + 27 \cos^2 \delta_4) + 2 \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) \sin^2 \delta_4 \right. \\
& \left. - \frac{8}{\sqrt{35}} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) v_{dgdg}^4 \\
& + \frac{2}{165} \beta_2^2 \beta_4^2 \left( (24 + \cos^2 \delta_4) - 4 \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) \sin^2 \delta_4 \right. \\
& \left. + \frac{5\sqrt{35}}{2} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) v_{dgdg}^6
\end{aligned}$$

CHAPITRE 4 : Limite classique du modèle *sdg*-IBM

$$\begin{aligned}
& -\beta_2\beta_4^3 \left( (8 \cos^2 \delta_4 - 1) \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \sin \delta_4 + \frac{14}{\sqrt{35}} \sin \delta_4 \sin 2\delta_4 \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) \right) \\
& \times \left( \frac{4}{21} \sqrt{\frac{5}{33}} v_{dggg}^2 + \frac{12}{77} \sqrt{\frac{3}{13}} v_{dggg}^4 + \frac{4}{33} \sqrt{\frac{10}{3}} v_{dggg}^6 \right) \\
& + \frac{1}{18} \beta_4^4 v_{gggg}^0 + \frac{8}{77} \beta_4^4 \sin^2 \delta_4 \left( 2 + \frac{17}{9} \cos 2\delta_4 - \frac{\sqrt{35}}{9} \sin 2\delta_4 \cos 3\gamma_4 \right) v_{gggg}^2 \\
& + \frac{4}{3003} \beta_4^4 \left( \frac{1}{4} (16 \cos^2 \delta_4 + 259) + 17 \cos 4\delta_4 + 2\sqrt{35} \sin 2\delta_4 \cos 3\gamma_4 \right. \\
& \left. - \sqrt{35} \sin 4\delta_4 \cos 3\gamma_4 \right) v_{gggg}^4 \\
& + \frac{2}{495} \beta_4^4 \left( 29 + 4 \cos^2 \delta_4 + 17 \cos 4\delta_4 + 20\sqrt{\frac{7}{5}} \sin 2\delta_4 \sin^2 \delta_4 \cos 3\gamma_4 \right) v_{gggg}^6 \\
& + \frac{16}{6435} \beta_4^4 \left( \frac{1161}{16} - 4 \cos^2 \delta_4 - 17 \cos 4\delta_4 - 20\sqrt{\frac{7}{5}} \sin 2\delta_4 \sin^2 \delta_4 \cos 3\gamma_4 \right) v_{gggg}^8 \\
& + \frac{1}{6} \beta_2^2 \beta_4^2 \left( 1 - \frac{2}{5} \cos^2 \delta_4 - \sqrt{\frac{7}{5}} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) v_{dgdg}^5 \Big]. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

On pourra alors établir les formes d'équilibre correspondant au hamiltonien *sdg*-IBM général en minimisant la fonctionnelle de l'énergie de surface par rapport aux cinq variables la caractérisant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \beta_2} &= 0, & \frac{\partial E}{\partial \beta_4} &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial \gamma_2} &= 0, & \frac{\partial E}{\partial \gamma_4} &= 0, & \frac{\partial E}{\partial \delta_4} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

On note à ce niveau que les résultats ci-dessus obtenus en ce qui concerne la dérivation de la limite classique du hamiltonien *sdg*-IBM peuvent nous servir quant à la détermination des formes géométriques correspondant aux différentes symétries dynamiques du modèle. Il est cependant important de signaler qu'une analyse de ce genre a été par ailleurs effectuée par Devi et Kota dans la référence [127] en utilisant l'état cohérent (4.12). Nous proposons dans le paragraphe suivant de généraliser cette étude en employant l'état cohérent le plus général (4.15). Notons également qu'une autre perspective intéressante de l'établissement de la limite classique du *sdg*-IBM consiste à construire le schéma de transitions entre les différentes limites du modèle. Le but sera ainsi de décrire des cas intermédiaires correspondant à des situations plus réalistes.

### 4.3 Formes géométriques associées aux symétries dynamiques du *sdg*-IBM

Le calcul des formes d'équilibre associées à chacune des symétries dynamiques du modèle *sdg*-IBM se fait en considérant le hamiltonien qui lui correspond et qui a été donné dans chaque cas au cours de la section 2.3.1 puis en calculant sa limite classique de la manière expliquée plus haut. En utilisant les équations (4.16) et (4.22), nous pouvons déduire les valeurs des paramètres correspondant aux formes d'équilibre de chaque limite.

#### 4.3.1 Limite SU(3)

Nous exprimons le hamiltonien à cette limite sous la forme

$$\hat{H}_{\text{SU}(3)} = -a\hat{Q}^{(2)} \cdot \hat{Q}^{(2)} + b\hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (4.23)$$

où l'opérateur quadripolaire  $\hat{Q}^{(2)}$  est défini par l'équation (2.16). Nous obtenons pour l'énergie de surface à la limite SU(3) l'expression

$$\begin{aligned} E_{\text{SU}(3)}(N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4) &= -\frac{aN(N-1)}{(1+\beta_2^2+\beta_4^2)^2} \left[ \frac{448}{15}\beta_2^2 + \frac{64\sqrt{6}}{5} \left( \cos \delta_4 + \sqrt{\frac{5}{7}} \sin \delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) \beta_2^2\beta_4 \right. \\ &+ \frac{352\sqrt{35}}{105} \cos 3\gamma_2\beta_2^3 + \frac{64\sqrt{35}}{105} \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) \sin^2 \delta_4\beta_2\beta_4^2 \\ &+ \frac{64}{3} \sin 2\delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4)\beta_2\beta_4^2 + \frac{1744\sqrt{35}}{735} \sin 2\delta_4 \sin(2\gamma_2 + \gamma_4)\beta_2^2\beta_4^2 \\ &+ \left( \frac{2016}{245} - \frac{352}{147} \sin^2 \delta_4 \left( \frac{54}{55} + \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) \right) \right) \beta_2^2\beta_4^2 \\ &+ \frac{176\sqrt{6}}{49} \left( \frac{\sqrt{35}}{5} \cos \delta_4 \cos 3\gamma_2 + \sin \delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \right) \beta_2^3\beta_4 + \frac{484}{147}\beta_2^4 \\ &+ \frac{64\sqrt{6}}{49} \left( \frac{\sqrt{35}}{5} \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4)(\cos \delta_4 - \cos 3\delta_4) + \cos(\gamma_2 - \gamma_4)(\sin \delta_4 + 2 \sin 3\delta_4) \right) \beta_2\beta_4^3 \\ &\left. + \frac{576}{147}\beta_4^4 - \frac{32}{147} \left( \cos 2\delta_4(1 + 17 \cos 2\delta_4) + \sqrt{35} \sin 2\delta_4 \cos 3\gamma_4(1 - \cos 2\delta_4) \right) \beta_4^4 \right]. \quad (4.24) \end{aligned}$$

En minimisant la fonction (4.24) nous obtenons pour les valeurs d'équilibre des variables  $\beta_2, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4, \delta_4$

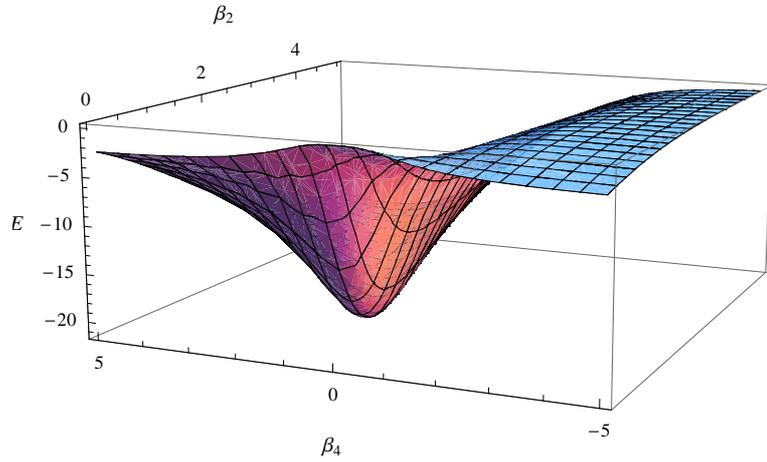
$$\beta_2^0 = \sqrt{\frac{20}{7}}, \quad \beta_4^0 = \sqrt{\frac{8}{7}}, \quad \cos \delta_4^0 = \sqrt{\frac{7}{12}}, \quad \gamma_2^0 = \gamma_4^0 = 0^\circ. \quad (4.25)$$

## CHAPITRE 4 : Limite classique du modèle *sdg*-IBM

avec  $E_{\text{SU}(3)}(N; \beta_2^0, \beta_4^0; \gamma_2^0, \gamma_4^0, \delta_4^0) = -\frac{64}{3}aN(N-1)$ .

Au vu des valeurs des paramètres dans (4.25), il est clair que le noyau à cette limite est axialement déformé.

FIG. 4.1 – Énergie de surface  $E \equiv E(N; \beta_2, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4, \delta_4)/(aN(N-1))$  associée à la limite SU(3) du modèle *sdg*-IBM et présentée pour  $\gamma_2 = \gamma_4 = 0^\circ$  et  $\cos \delta_4 = \sqrt{\frac{7}{12}}$ . Le paramètre  $a$  dans (4.24) est choisi positif.



### 4.3.2 Limite SU(5)

Nous exprimons le hamiltonien à cette limite sous la forme

$$\hat{H}_{\text{SU}(5)} = -\frac{80}{3}a \left[ \hat{T}^{(2)} \cdot \hat{T}^{(2)} + \hat{T}^{(4)} \cdot \hat{T}^{(4)} \right] + b \hat{C}_2(\text{O}(5)) + c \hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (4.26)$$

où les générateurs figurant dans (4.26) sont définis dans la section 2.1.2. L'énergie de surface dérivée à partir de ce hamiltonien et calculée en utilisant la relation (4.16)

### 4.3 Formes géométriques associées aux symétries dynamiques du $sdg$ -IBM

est donnée par

$$\begin{aligned}
& E_{\text{SU}(5)}(N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4) \\
&= -\frac{16aN(N-1)}{3(1+\beta_2^2+\beta_4^2)^2} \left[ 4\beta_2^2 + \frac{6}{7}\sqrt{\frac{10}{7}}\beta_2^3 \cos 3\gamma_2 + \frac{27}{98}\beta_2^4 \right. \\
&+ \frac{12\sqrt{6}}{7} \left( \cos \delta_4 + \sqrt{\frac{5}{7}} \sin \delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) \beta_2^2 \beta_4 \\
&- \frac{12\sqrt{2}}{7} \left( \sqrt{\frac{20}{7}} \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) \sin^2 \delta_4 + 5 \sin 2\delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \right) \beta_2 \beta_4^2 \\
&- \frac{4}{7}\sqrt{\frac{15}{7}} \left( \cos \delta_4 \cos 3\gamma_2 + \sqrt{\frac{5}{7}} \sin \delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \right) \beta_2^3 \beta_4 \\
&+ \frac{1}{49} \left( 238 + 24 \sin^2 \delta_4 (5 \cos(2(\gamma_2 - \gamma_4)) - 2) - \frac{12\sqrt{35}}{7} \sin 2\delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) \beta_2^2 \beta_4^2 \\
&- \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{7}} \left( \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) (\cos \delta_4 - \cos 3\delta_4) + \sqrt{\frac{5}{7}} \cos(\gamma_2 - \gamma_4) (\sin \delta_4 + 2 \sin 3\delta_4) \right) \beta_2 \beta_4^3 \\
&+ \frac{1}{147} \left( 269 - 8 \cos 2\delta_4 (1 - 17 \cos 2\delta_4) - 4\sqrt{35} \sin 2\delta_4 \cos 3\gamma_4 (2 - \cos 2\delta_4) \right) \beta_4^4 \\
&+ \left. \frac{2\sqrt{6}}{7} \left( 2 \cos 4\delta_4 - \frac{1}{3} \cos 3\delta_4 + 2\sqrt{\frac{5}{7}} \sin \delta_4 \cos 3\gamma_4 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}} \sin 3\delta_4 \cos 3\gamma_4 \right) \beta_4^3 \right]. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

La minimisation de la fonction (4.27) par rapport aux variables de surface résulte sur les valeurs d'équilibre

$$\beta_2^0 = \sqrt{\frac{10}{7}}, \quad \beta_4^0 = \sqrt{\frac{18}{7}}, \quad \cos \delta_4^0 = \sqrt{\frac{7}{12}}, \quad \gamma_2^0 = \gamma_4^0 = 60^\circ. \tag{4.28}$$

L'énergie minimum obtenue à partir de ces valeurs est

$$E_{\text{SU}(5)}(N; \beta_2^0, \beta_4^0; \gamma_2^0, \gamma_4^0, \delta_4^0) = -\frac{64}{3}aN(N-1). \tag{4.29}$$

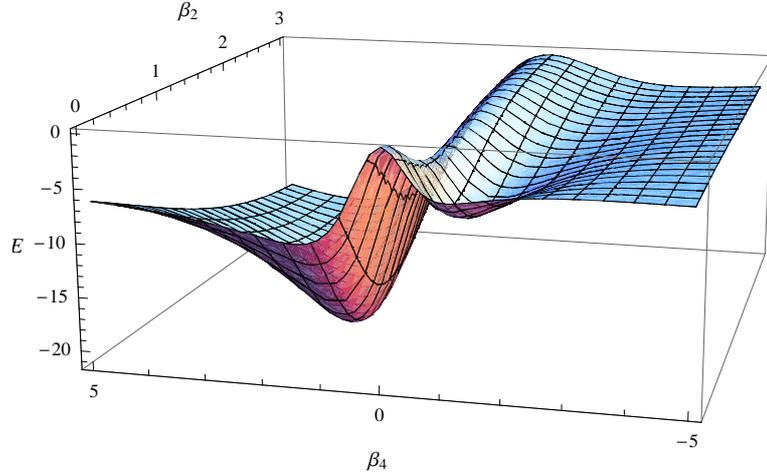
Les valeurs d'équilibre obtenues pour les paramètres  $\gamma_2$ ,  $\gamma_4$  et  $\delta_4$  indiquent que le noyau à la limite SU(5) est également de déformation axiale.

#### 4.3.3 Limite O(15)

L'expression du hamiltonien correspondant à cette limite est donnée par

$$\hat{H}_{\text{O}(15)} = -\frac{64}{3}a(\hat{I}^{(2)} \cdot \hat{I}^{(2)} + \hat{I}^{(4)} \cdot \hat{I}^{(4)}) + b\hat{C}_2(\text{O}(14)) + c\hat{C}_2(\text{O}(5)) + d\hat{C}_2(\text{O}(3)), \tag{4.30}$$

FIG. 4.2 – Énergie de surface  $E \equiv E(N; \beta_2, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4, \delta_4)/(aN(N-1))$  correspondant à la limite SU(5) du modèle *sdg*-IBM et présentée pour  $\gamma_2 = \gamma_4 = 60^\circ$  et  $\cos \delta_4 = \sqrt{\frac{7}{12}}$ . Le paramètre  $a$  dans (4.27) est choisi positif.



où  $\hat{I}^{(2)}$  et  $\hat{I}^{(4)}$  sont les opérateurs quadripolaire et hexadécapolaire associés à l'algèbre O(15) et définis par l'équation (2.23). Les opérateurs de Casimir correspondant aux algèbres O(14) et O(5) sont donnés par (2.58). L'énergie de surface s'écrit dans ce cas

$$E_{O(15)}(N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4) = -\frac{256}{3}aN(N-1)\frac{(\beta_2^2 + \beta_4^2)}{(1 + \beta_2^2 + \beta_4^2)^2}. \quad (4.31)$$

En minimisant l'expression (4.31) nous obtenons pour les variables de surface

$$(\beta_2^0)^2 + (\beta_4^0)^2 = 1, \quad 0^\circ \leq \gamma_2^0 \leq 60^\circ, \quad 0^\circ \leq \gamma_4^0 \leq 60^\circ, \quad 0^\circ \leq \delta_4^0 \leq 180^\circ, \quad (4.32)$$

avec un minimum  $E_{O(15)}(N; \beta_2^0, \beta_4^0; \gamma_2^0, \gamma_4^0, \delta_4^0) = -\frac{64}{3}aN(N-1)$ .

On peut constater d'après l'équation (4.31), qui n'est fonction que de  $\beta_2$  et  $\beta_4$ , qu'un noyau ayant la symétrie O(15) est instable en triaxialité.

#### 4.3.4 Limite SU(6)

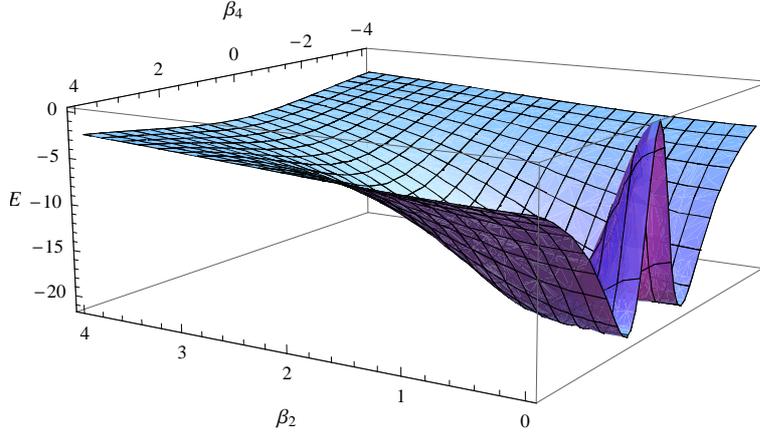
On écrit le hamiltonien à cette limite

$$\hat{H}_{SU(6)} = -64a(\hat{P}^{(2)} \cdot \hat{P}^{(2)} + \hat{P}^{(4)} \cdot \hat{P}^{(4)}) + b\hat{C}_2(\text{Sp}(6)) + c\hat{C}_2(\text{O}(3)), \quad (4.33)$$

où les expressions des générateurs  $\hat{P}^{(2)}$  et  $\hat{P}^{(4)}$  sont données au chapitre 2 par l'équation (2.27) tandis que l'opérateur de Casimir correspondant à l'algèbre Sp(6) est

### 4.3 Formes géométriques associées aux symétries dynamiques du *sdg*-IBM

FIG. 4.3 – Énergie de surface  $E \equiv E(N; \beta_2, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4, \delta_4)/(aN(N-1))$  correspondant à la limite  $O(15)$  du modèle *sdg*-IBM. Le paramètre  $a$  dans (4.31) est choisi positif.



donné par (2.71). L'énergie de surface à cette limite s'écrit

$$\begin{aligned}
 E_{\text{SU}(6)}(N; \beta_2, \beta_4; \gamma_2, \gamma_4, \delta_4) &= -\frac{64aN(N-1)}{(1+\beta_2^2+\beta_4^2)^2} \left[ \frac{2}{3}\beta_2^2 + \frac{10}{21}\sqrt{\frac{2}{7}}\beta_2^3 \cos 3\gamma_2 + \frac{1}{12}\beta_2^4 \right. \\
 &+ \frac{9\sqrt{2}}{14} \left( \cos \delta_4 + \sqrt{\frac{5}{7}} \sin \delta_4 \cos(2\gamma_2 + \gamma_4) \right) \beta_2^2 \beta_4 \\
 &+ \frac{2\sqrt{2}}{7} \left( \frac{2}{\sqrt{7}} \cos(\gamma_2 + 2\gamma_4) \sin^2 \delta_4 - \sqrt{5} \sin 2\delta_4 \cos(\gamma_2 - \gamma_4) \right) \beta_2 \beta_4^2 + \frac{1}{6}\beta_2^2 \beta_4^2 \\
 &\left. + \frac{2}{3}\beta_4^2 - \left( \frac{2\sqrt{2}}{7}(\cos \delta_4 + \frac{1}{3} \cos 3\delta_4) + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{10}{7}} \cos 3\gamma_4(\sin \delta_4 - \frac{1}{3} \sin 3\delta_4) \right) \beta_4^3 + \frac{1}{12}\beta_4^4 \right]
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

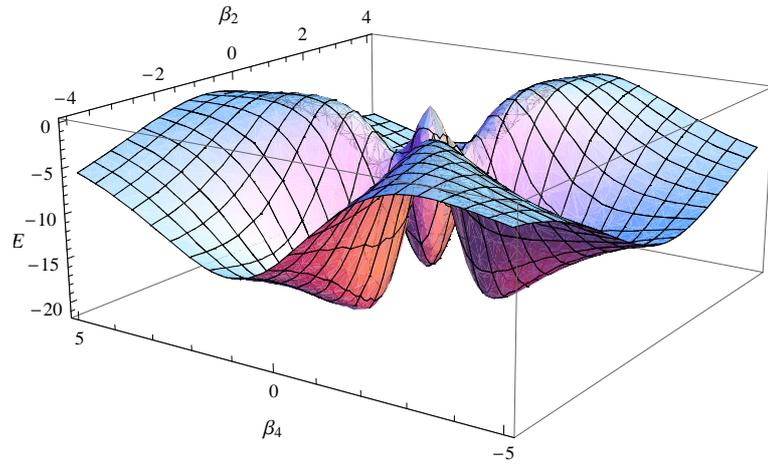
Les valeurs des paramètres minimisant la fonction (4.34) sont

$$\begin{aligned}
 \beta_2^0 &= \sqrt{\frac{25}{14}}, & \beta_4^0 &= \sqrt{\frac{3}{14}}, & \cos \delta_4^0 &= \sqrt{\frac{7}{12}}, & \gamma_2^0 &= \gamma_4^0 = 0^\circ, \\
 \beta_2^0 &= \sqrt{\frac{8}{7}}, & \beta_4^0 &= \sqrt{\frac{6}{7}}, & \cos \delta_4^0 &= -\sqrt{\frac{7}{12}}, & \gamma_2^0 &= \gamma_4^0 = 60^\circ,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

avec  $E_{\text{SU}(6)}(N; \beta_2^0, \beta_4^0; \gamma_2^0, \gamma_4^0, \delta_4^0) = -\frac{64}{3}aN(N-1)$ . Ainsi, les minimia dégénérés indiquent la non-stabilité du noyau à la limite  $\text{SU}(6)$  comme une multitude de

## CHAPITRE 4 : Limite classique du modèle $sdg$ -IBM

FIG. 4.4 – Énergie de surface  $E \equiv E(N; \beta_2, \beta_4, \gamma_2, \gamma_4, \delta_4)/(aN(N-1))$  correspondant à la limite  $SU(6)$  du modèle  $sdg$ -IBM et présentée pour  $\gamma_2 = \gamma_4 = 60^\circ$  et  $\cos \delta_4 = \sqrt{\frac{7}{12}}$ . Le paramètre  $a$  dans (4.34) est choisi positif.



paramètres donne la même énergie minimum. Cependant, le noyau dans ce cas n'est pas aussi instable que celui décrit par la limite  $O(15)$  dont l'énergie de surface est complètement indépendante de  $\gamma_2$ ,  $\gamma_4$  et  $\delta_4$ .

### 4.3 Formes géométriques associées aux symétries dynamiques du *sdg*-IBM

# Chapitre 5

## Modèle *sdg*- des bosons en interaction couplé à un fermion

Ce chapitre propose d'établir une extension du modèle *sdg*-IBM aux noyaux impair-pairs que nous appellerons *sdg*-IBFM. Notre intérêt sera particulièrement dirigé vers l'étude de la structure algébrique du modèle et le développement de ses différentes symétries dynamiques.

### 5.1 Principe du modèle

En modèle *sdg*-IBFM, le noyau impair-pair est considéré comme un noyau pair-pair couplé à un nucléon célibataire (proton ou neutron). Ce noyau, généralement appelé noyau cœur, est décrit en terme d'un ensemble de  $N$  bosons pouvant accéder à des états de moments angulaires  $L = 0$  (boson  $s$ ),  $L = 2$  (boson  $d$ ) ou  $L = 4$  (boson  $g$ ). Ainsi, les degrés de liberté collectifs (bosons) génèrent le groupe de Lie  $U(15)$  et sont alors décrits par le modèle *sdg*-IBM développé au cours du chapitre 2. Le nucléon célibataire est lié à ce noyau par une interaction boson-fermion et peut occuper un ou plusieurs états à une particule. Par conséquent, la structure algébrique du modèle *sdg*-IBFM diffère d'un noyau à autre car elle dépend du nombre de ces orbites et en particulier de leurs moments angulaires  $j = j_1, j_2, \dots$  déterminés à partir du modèle en couches. L'algèbre correspondant au modèle est donc la somme directe des deux algèbres bosonique  $U(15)$  et fermionique  $U(n)$ , avec  $n = \sum_i (2j_i + 1)$  et  $i = 1, 2, 3, \dots$ , et est notée  $U^B(15) \otimes U^F(n)$ . Les exposants B et F sont utilisés pour labeller les algèbres bosoniques et fermioniques respectivement.

## 5.2 Algèbre $U^B(15) \otimes U^F(n)$

En analogie avec le modèle *sd*-IBFM [132, 133], nous introduisons, en plus des opérateurs de création et d'annihilation bosoniques  $b_{l,m}^\dagger$  et  $b_{l,m}$  respectivement, les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques  $a_{j,m}^\dagger$  et  $a_{j,m}$  respectivement, où  $j$  est le moment cinétique de l'orbitale occupée par le fermion et  $m$  est sa composante- $z$ . Les opérateurs fermioniques vérifient les relations d'anticommutation

$$\begin{aligned} \{a_{j,m}, a_{j',m'}\} &= \{a_{j,m}^\dagger, a_{j',m'}^\dagger\} = 0, \\ \{a_{j,m}, a_{j',m'}^\dagger\} &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Par construction, les opérateurs bosoniques et fermioniques sont supposés satisfaire les relations de commutation

$$[a_{j,m}^\dagger, b_{l,m'}] = [a_{j,m}, b_{l,m'}^\dagger] = [a_{j,m}^\dagger, b_{l,m'}] = [a_{j,m}, b_{l,m'}^\dagger] = 0. \quad (5.2)$$

Dans ce qui suit nous utiliserons un seul indice  $i$  au lieu des deux indices  $j, m$  dans la notation des opérateurs  $a_{j,m}^\dagger$  et  $a_{j,m}$ .

Pour construire l'algèbre  $U(n)$ , considérons l'ensemble de produits bilinéaires des opérateurs fermioniques  $a_i^\dagger$  et  $a_i$  tel que

$$A_{ij} = a_i^\dagger a_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Les opérateurs  $A_{ij}$  vérifient les relations de commutation

$$[A_{ij}, A_{i'j'}] = A_{ij'} \delta_{ji'} - A_{i'j} \delta_{ij'}, \quad (5.4)$$

et constituent ainsi les générateurs de l'algèbre  $U(n)$ . Cependant, ces générateurs doivent être invariants par rapport aux rotations et il est donc plus convenable de les exprimer sous la forme tensorielle

$$A_\mu^{(\lambda)}(j, j') = [a_j^\dagger \times \tilde{a}_{j'}]_\mu^{(\lambda)}, \quad (5.5)$$

avec  $\tilde{a}_{j,m} = (-)^{j-m} a_{j,-m}$ . On peut montrer que les générateurs (5.5) vérifient les relations de commutation

$$\begin{aligned} [A_\mu^{(\lambda)}(j, j'), A_{\mu'}^{(\lambda')}(j'', j''')] &= - \sum_{\lambda'' \mu''} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda \mu \lambda' \mu' | \lambda'' \mu'' \rangle \\ &\times \left[ (-)^{\lambda''+j+j'''} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ j'''' & j & j' \end{Bmatrix} \delta_{j'j''} A_{\mu''}^{(\lambda'')}(j, j''') \right. \\ &\left. - (-)^{\lambda+\lambda'+j'+j''} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ j'' & j' & j \end{Bmatrix} \delta_{jj''} A_{\mu''}^{(\lambda'')}(j'', j') \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dans le cas particulier où  $j = j' = j'' = j'''$ , la relation (5.6) se réduit à

$$\begin{aligned}
 [A_{\mu}^{(\lambda)}(j, j), A_{\mu'}^{(\lambda')}(j, j)] &= \sum_{\lambda''\mu''} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda\mu \lambda'\mu' | \lambda''\mu'' \rangle \\
 &\times [(-)^{\lambda+\lambda'} - (-)^{\lambda''}] \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ j & j & j \end{array} \right\} A_{\mu''}^{(\lambda'')}(j, j).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Les sous-algèbres de  $U^B(15)$  ont été développées au cours du chapitre 2 aux différentes limites du modèle *sdg*-IBM,  $U(9) \otimes U(6)$ ,  $U(1) \otimes U(14)$ ,  $SU(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $O(15)$  et  $SU(6)$ . Cependant, la sous-structure de l'algèbre fermionique  $U^F(n)$  dépend des moments angulaires des orbitales occupées par le nucléon célibataire. Ses chaînes de sous-algèbres sont construites sous la contrainte qu'elles doivent contenir le groupe de rotations  $SU^F(2)$ . Ainsi, l'algèbre associée aux rotations tridimensionnelles  $O(3) \approx SU(2)$ , où le symbole  $\approx$  dénote l'isomorphisme entre les algèbres  $O(3)$  et  $SU(2)$ , est toujours un élément présent dans les chaînes de sous-algèbres de  $U^B(15) \otimes U^F(n)$ . Le moment angulaire total  $J$  du système couplé, qui est un demi-entier, est par conséquent un bon nombre quantique. Ainsi, la forme générale de ces chaînes est

$$U^B(15) \otimes U^F(n) \supset G \supset SU^{BF}(2), \tag{5.8}$$

où  $G$  dénote l'ensemble de sous-algèbres de  $U^B(15) \otimes U^F(n)$  qui satisfont la chaîne (5.8). Il est clair d'après cette dernière expression qu'il est possible d'étendre le concept de symétries dynamiques aux systèmes impairs. Étant donné que le fermion solitaire peut occuper une ou plusieurs orbites, deux différentes classes de symétries de Bose-Fermi, que l'on note respectivement BF-1 et BF-2, sont alors discernables.

## 5.3 Classes de symétries dynamiques en IBFM

### Classe de symétries BF-1

Cette classe de symétries apparaît quand l'une des sous-algèbres bosoniques est isomorphe à une sous-algèbre fermionique et qu'elles peuvent se joindre en une algèbre spinor. Généralement, ce type de symétries prend place quand le nucléon impair occupe une seule orbite  $j$ . Un exemple de symétries spinors est celui correspondant à un cœur ayant la symétrie  $O^B(6)$  du *sd*-IBM couplé à un fermion de moment angulaire  $j = \frac{3}{2}$ . Étant donné que  $O^B(6) \approx SU^F(4)$ , ces deux algèbres se combinent en une algèbre  $Spin^{BF}(6)$ . Ce type de symétries a été discuté dans les références [134, 135] où il a été appliqué aux noyaux  $^{191}\text{Ir}$  et  $^{193}\text{Ir}$ .

Il est important de souligner que les algèbres spinors sont isomorphes à des algèbres orthogonales dont les représentations irréductibles sont caractérisées par des demi-entiers [14].

### Classe de symétries BF-2

Ce type de symétries apparaît dans le cas où le fermion peut occuper plusieurs orbitales (2 ou plus) et est obtenu de la manière suivante [136] : l'algèbre  $U^F(n)$  est décomposée en deux parties ; ceci en considérant que le moment angulaire  $j$  est formé par le couplage d'un moment angulaire pseudo-orbital  $k$  entier et d'un pseudo-spin  $s$  demi-entier. L'exemple le plus simple de telles symétries est celui d'un fermion occupant les états  $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ . Dans ce cas,  $j$  est décomposé en un moment pseudo-orbital  $k = 1$  et un pseudo-spin  $s = \frac{1}{2}$ . Dans le cas général, l'algèbre  $U^F(n)$  s'écrit

$$U^F(n) \supset U_k^F(n_k) \otimes U_s^F(n_s), \quad (5.9)$$

avec  $n = \sum_i (2j_i + 1)$ ,  $n_k = \sum_i (2k_i + 1)$  et  $n_s = \sum_i (2s_i + 1)$ . Les générateurs des algèbres  $U_k^F(n_k)$  et  $U_s^F(n_s)$  sont obtenus par une transformation du couplage  $j - j$  au couplage  $k - s$  et sont exprimés respectivement par [137]

$$\begin{aligned} K_\mu^{(\lambda)}(k, k') &= - \sum_s \sum_{jj'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} (-)^{j'+\lambda+k+s} \begin{Bmatrix} j & j' & \lambda \\ k' & k & s \end{Bmatrix} A_\mu^{(\lambda)}(j, j'), \\ S_\mu^{(\lambda)}(s, s') &= \sum_k \sum_{jj'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} (-)^{s'+\lambda+j+k} \begin{Bmatrix} s & s' & \lambda \\ j' & j & k \end{Bmatrix} A_\mu^{(\lambda)}(j, j'). \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'ensemble des générateurs (5.10) vérifie les relations de commutation

$$\begin{aligned} [K_\mu^{(\lambda)}(k, k'), K_{\mu'}^{(\lambda')}(k'', k''')] &= \sum_{\lambda'' \mu''} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda \mu \lambda' \mu' | \lambda'' \mu'' \rangle \\ &\times \left[ (-)^{\lambda''+k+k'''} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ k''' & k & k' \end{Bmatrix} \delta_{k'k''} K_{\mu''}^{(\lambda'')} (k, k''') \right. \\ &\left. - (-)^{\lambda+\lambda'+k'+k''} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ k'' & k' & k \end{Bmatrix} \delta_{kk'''} K_{\mu''}^{(\lambda'')} (k'', k) \right], \\ [S_\mu^{(\lambda)}(s, s'), S_{\mu'}^{(\lambda')}(s'', s''')] &= \sum_{\lambda'' \mu''} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \langle \lambda \mu \lambda' \mu' | \lambda'' \mu'' \rangle (-)^{s+s'+s''+s'''} \\ &\times \left[ (-)^{\lambda''} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ s''' & s & s' \end{Bmatrix} \delta_{s's''} S_{\mu''}^{(\lambda'')} (s, s''') \right. \\ &\left. - (-)^{\lambda+\lambda'} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ s'' & s' & s \end{Bmatrix} \delta_{ss'''} S_{\mu''}^{(\lambda'')} (s'', s') \right], \\ [K_\mu^{(\lambda)}(k, k'), S_{\mu'}^{(\lambda')}(s, s')] &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dans une chaîne de sous-algèbres de  $U^B(15) \otimes U^F(n)$ , la partie pseudo-orbitale sera combinée à sa contrepartie bosonique pour former une algèbre de Bose-Fermi. Ainsi,

les générateurs de cette dernière algèbre sont obtenus par l'addition des générateurs bosoniques et pseudo-orbitaux de telle manière que les générateurs obtenus vérifient les relations de commutation de l'algèbre couplée.

## 5.4 Hamiltonien

L'expression générale du hamiltonien du *sdg*-IBFM est bâtie sur l'hypothèse que les nombres de bosons et de fermions doivent être séparément conservés et que ce hamiltonien doit être hermitique et scalaire par rapport aux transformations par rotations. Elle s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F + \hat{V}_{BF}, \quad (5.12)$$

où  $\hat{H}_B$  est le hamiltonien bosonique décrivant le cœur pair-pair. Il est donné au chapitre 2 par l'équation (2.53).  $\hat{H}_F$  est le hamiltonien fermionique et est défini par

$$\begin{aligned} \hat{H}_F = & E'_0 + \sum_j \eta_j \sqrt{2j+1} [a_j^\dagger \times \tilde{a}_j]_0^{(0)} \\ & + \sum_\lambda \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} v_{j_1 j_2 j_3 j_4}^\lambda [[a_{j_1}^\dagger \times a_{j_2}^\dagger]^{(\lambda)} \times [\tilde{a}_{j_3} \times \tilde{a}_{j_4}]^{(\lambda)}]_0^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

et  $\hat{V}^{BF}$  décrit l'interaction boson-fermion et s'écrit

$$\hat{V}^{BF} = \sum_\lambda \sum_{l_1 j_1 l_2 j_2} w_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{(\lambda)} [[b_{l_1}^\dagger \times a_{j_1}^\dagger]^{(\lambda)} \times [\tilde{b}_{l_2} \times \tilde{a}_{j_2}]^{(\lambda)}]_0^{(0)}. \quad (5.14)$$

Dans les équations (5.13) et (5.14),  $E'_0$  est une constante, les paramètres  $\eta_j$  présentent les énergies à un fermion,  $v_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{(\lambda)}$  définissent les interactions entre deux fermions et  $w_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{(\lambda)}$  désignent les éléments de matrice correspondant à l'interaction boson-fermion et sont donnés par

$$w_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{(\lambda)} = \langle b_{l_1} a_{j_1}; \lambda | \hat{V}_{BF} | b_{l_2} a_{j_2}; \lambda \rangle. \quad (5.15)$$

La condition d'hermiticité imposée au hamiltonien ( $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ ) a pour conséquence de réduire le nombre de ses paramètres libres car elle implique que  $w_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{(\lambda)} = w_{l_2 j_2 l_1 j_1}^{(\lambda)}$ . Il est également important de signaler que dans les noyaux impair-pairs un seul nucléon est supposé interagir avec le système à  $N$  bosons. Par conséquent, le terme d'interaction à deux corps dans la formule de  $\hat{H}_F$  devient insignifiant.

L'équation (5.14) est en fait la forme la plus générale de l'interaction boson-fermion qui est habituellement utilisée dans le modèle IBFM. Cependant, elle n'est pas d'une grande utilité vu le grand nombre de paramètres libres qu'elle contient. Pour cette raison, on a proposé, en *sd*-IBFM, une forme plus simple pour  $\hat{V}_{BF}$  en se basant sur des approximations microscopiques [132, 138]. Dans ce qui suit, nous

## 5.5 Symétries dynamiques en $sdg$ -IBFM

allons adopter cette même approche mais en l'étendant au modèle  $sdg$ -IBFM. La nouvelle expression de  $\hat{V}_{\text{BF}}$  est obtenue pour un choix particulier des paramètres  $w_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{(\lambda)}$  dans l'équation (5.14) et contiendra trois termes. Le premier est un terme monopolaire et est donné par

$$\hat{V}_{\text{BF}}^{\text{mon}} = \sum_j A_j [(d^\dagger \times \tilde{d}) + \alpha(g^\dagger \times \tilde{g})]_0^{(0)} \times [a_j^\dagger \times \tilde{a}_j]_0^{(0)}]_0^{(0)}. \quad (5.16)$$

Le deuxième étant quadripolaire, il s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{BF}}^{\text{quadr}} = & \sum_{jj'} \Gamma_{jj'} [(s^\dagger \times \tilde{d} + d^\dagger \times \tilde{s}) + \chi(d^\dagger \times \tilde{d}) + \beta(d^\dagger \times \tilde{g} + g^\dagger \times \tilde{d}) \\ & + \delta(g^\dagger \times \tilde{g})]^{(2)} \times [a_j^\dagger \times \tilde{a}_{j'}]^{(2)}]^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le dernier est un terme d'échange et est donné par

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{BF}}^{\text{ch}} = & \sum_{jj'j''} \left( \Lambda_{jj'}^{j''}(d) : [[d^\dagger \times \tilde{a}_j]^{(j'')} \times [\tilde{d} \times a_{j'}^\dagger]^{(j'')}]^{(0)} : \right. \\ & \left. + \Lambda_{jj'}^{j''}(g) : [[g^\dagger \times \tilde{a}_j]^{(j'')} \times [\tilde{g} \times a_{j'}^\dagger]^{(j'')}]^{(0)} : \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

où le symbole  $(: \dots :)$  dénote l'ordre normal des opérateurs bosoniques et fermioniques. Ce dernier terme interprète le fait qu'un boson est formé par la corrélation de deux fermions. Ainsi, on prend en considération l'interaction entre le nucléon célibataire et l'un des nucléons composant les bosons  $d$  ou  $g$ .

## 5.5 Symétries dynamiques en $sdg$ -IBFM

Les sections suivantes auront pour objectif principal d'offrir une résolution analytique au problème des valeurs propres du hamiltonien du modèle  $sdg$ -IBFM. Ainsi, comme pour la majorité des modèles des bosons en interaction, nous adoptons la technique d'exprimer son hamiltonien sous forme d'une combinaison linéaire des opérateurs invariants du premier et du second ordre des sous-algèbres de  $U^{\text{B}}(15) \otimes U^{\text{F}}(n)$ . Une question qui vient se poser est alors : comment les degrés de liberté bosoniques et fermioniques peuvent-ils être couplés de telle sorte que le hamiltonien  $sdg$ -IBFM aurait la symétrie dynamique de l'une des sous-algèbres de  $U^{\text{B}}(15) \otimes U^{\text{F}}(n)$ ? Afin de répondre à cette question, notre point de départ sera de construire les différentes chaînes des sous-algèbres de notre système de Bose-Fermi. Pour ce faire, on va étudier séparément chacune des symétries dynamiques associées aux modèle  $sdg$ -IBM couplé à un fermion pouvant s'installer sur une ou plusieurs orbites nucléaires. Le point en commun entre toutes les symétries considérées est le fait que les chaînes de sous-algèbres qui leurs sont associées commencent toutes par l'algèbre

couplée  $U^B(15) \otimes U^F(n)$  et se terminent par l'algèbre  $SU^{BF}(2)$  dont l'opérateur de Casimir est proportionnel à  $\hat{J}^2$  où  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{j}$  est le vecteur somme des moments angulaires bosonique et fermionique. La structure algébrique de  $U^B(15)$  étant déjà connue, il nous reste donc d'établir celle de  $U^F(n)$  et de déterminer, parmi toutes les orbitales possibles  $j_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), celles dont le couplage au système bosonique donne naissance à une symétrie dynamique du système BF. Une fois ces symétries sont déterminées, il nous sera possible de discuter les autres propriétés physiques du système telles que le hamiltonien, les états de base, le spectre d'énergie, ...etc.

La représentation irréductible de  $U^B(15)$  est complètement symétrique et est caractérisée par le nombre de bosons  $N_b$  noté simplement par  $N$ . Celle de  $U^F(n)$  est antisymétrique et se caractérise par le nombre de fermions  $N_F$  (en IBFM,  $N_F = 1$ ). Le problème consiste par la suite à déterminer les représentations des sous-algèbres  $G$  en partant du produit des représentations de  $U^B(15)$  et  $U^F(n)$ . Les états de base correspondant à chacune des limites du modèle sont étiquetés par l'ensemble des nombres quantiques caractérisant les représentations irréductibles des sous-algèbres appartenant à la chaîne considérée.

Suivant les valeurs de  $j$ , plusieurs symétries de Bose-Fermi peuvent apparaître pour chacune des limites de  $U^B(15) \otimes U^F(n)$  et pour chacune de ces symétries le couplage des algèbres bosoniques et fermioniques peut être effectué à des niveaux différents. Ceci offre au modèle une structure algébrique qui est à la fois très riche et très compliquée.

### 5.5.1 Symétries associées à la limite $O^{BF}(15)$

Cette limite correspond à un noyau pair-pair ayant la symétrie dynamique  $O(15)$  du modèle *sdg*-IBM couplé à un nucléon pouvant occuper les orbites  $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$ . L'algèbre fermionique engendrée par ces moments cinétiques est  $U^F(30)$  et peut être décomposée en une partie pseudo-orbitale avec  $k = 0, 2, 4$  et une partie pseudo-spin avec  $s = 1/2$ . La chaîne de sous-algèbres correspondante s'écrit

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{U}^{\text{B}}(15) & & \otimes & & \text{U}^{\text{F}}(30) & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \downarrow & \searrow & & & \text{U}_k^{\text{F}}(15) & \otimes & \text{U}_s^{\text{F}}(2) \\
 \downarrow & & & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{O}^{\text{B}}(15) & & \text{U}^{\text{BF}}(15) & & \text{O}_k^{\text{F}}(15) & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{O}^{\text{B}}(14) & & \text{O}^{\text{BF}}(14) & & \text{O}_k^{\text{F}}(14) & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{O}^{\text{B}}(5) & & \text{O}^{\text{BF}}(5) & & \text{O}_k^{\text{F}}(5) & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{O}^{\text{B}}(3) & & \text{O}^{\text{BF}}(3) & & \text{O}_k^{\text{F}}(3) & & \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \\
 & & & \searrow & & \swarrow & \\
 & & & & \text{Spin}^{\text{BF}}(3) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{Spin}^{\text{BF}}(2) & & 
 \end{array} \tag{5.19}$$

Ainsi qu'on peut le voir d'après l'équation (5.19), les algèbres bosoniques et fermioniques peuvent se joindre à des niveaux différents. Cependant, nous ne détaillerons ici que le cas correspondant au couplage au niveau des algèbres  $\text{U}^{\text{B}}(15)$  et  $\text{U}_k^{\text{F}}(15)$ . Les générateurs  $K_\mu^{(\lambda)}(k, k')$  associés à l'algèbre pseudo-orbitale  $\text{U}_k^{\text{F}}(15)$  sont obtenus à partir de l'équation (5.10). Leurs expressions en fonction des opérateurs fermioniques  $A_\mu^{(\lambda)}(j, j')$  sont données dans le tableau 5.1. Sur le même tableau on présente les expressions des générateurs de l'algèbre pseudo-spin  $S_\mu^{(\lambda)}(1/2, 1/2)$  obtenus à partir de la même équation (5.10).

Les générateurs des algèbres couplées sont obtenus en additionnant les algèbres bosoniques et fermioniques tels que

$$G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)}(l, l') = G_{\mu, \text{B}}^{(\lambda)}(l, l') + K_\mu^{(\lambda)}(l, l'), \tag{5.20}$$

avec  $l, l' = 0, 2, 4$ . Notons que les générateurs bosoniques et fermioniques dans cette dernière équation vérifient les mêmes relations de commutation et la sommation se fait alors directement. Pour les algèbres de Bose-Fermi figurant dans

CHAPITRE 5 : Modèle  $sdg$ - des bosons en interaction couplé à un fermion

TAB. 5.1 – Les générateurs associés aux algèbres fermioniques pseudo-orbitales et pseudo-spin exprimés en fonction des opérateurs fermioniques  $A_\mu^{(\lambda)}(j, j')$ . Les opérateurs ayant des coefficients nuls ne sont pas mentionnés dans le tableau.

$(j, j')$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$
$K^{(0)}(0, 0)$	$-\sqrt{2}$									
$K^{(0)}(2, 2)$							$-\frac{2}{\sqrt{5}}$			
$K^{(1)}(2, 2)$							$-\frac{3\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$		
$K^{(2)}(0, 2)$		$-\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{6}{5}}$							
$K^{(2)}(2, 0)$						$\sqrt{\frac{4}{5}}$				
$K^{(2)}(2, 2)$							$-\frac{\sqrt{14}}{5}$	$\frac{\sqrt{6}}{5}$		
$K^{(2)}(4, 2)$								$-\frac{2}{\sqrt{5}}$		
$K^{(3)}(2, 2)$							$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}$		
$K^{(3)}(4, 2)$								$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	
$K^{(4)}(2, 2)$								$\sqrt{\frac{4}{5}}$		
$K^{(4)}(4, 0)$				$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{10}}{3}$					
$K^{(4)}(4, 2)$									$-\sqrt{\frac{22}{45}}$	$\sqrt{\frac{14}{45}}$
$K^{(5)}(4, 2)$									$-\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$
$K^{(6)}(4, 2)$										$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$S^{(0)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1						$\sqrt{2}$			
$S^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1						$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{8}{5}}$		

5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

$(j, j')$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$			$-\sqrt{\frac{6}{5}}$							
$K^{(0)}(4, 4)$									$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	
$K^{(1)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	$-\frac{2\sqrt{7}}{5}$							
$K^{(1)}(4, 4)$									$-\frac{\sqrt{70}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$
$K^{(2)}(2, 0)$	$-\sqrt{\frac{6}{5}}$									
$K^{(2)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{6}}{5}$	$-\frac{2\sqrt{6}}{5}$							
$K^{(2)}(2, 4)$							$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{3\sqrt{5}}$		
$K^{(2)}(4, 2)$				$-\sqrt{\frac{4}{45}}$	$-\frac{\sqrt{10}}{3}$					
$K^{(2)}(4, 4)$		$-\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$						$-\sqrt{\frac{22}{27}}$	$\sqrt{\frac{2}{27}}$
$K^{(3)}(2, 2)$		$-\frac{2\sqrt{3}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{5}$							
$K^{(3)}(2, 4)$							$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$		
$K^{(3)}(4, 2)$				$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\sqrt{\frac{44}{45}}$					
$K^{(3)}(4, 4)$									$-\sqrt{\frac{20}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$K^{(4)}(0, 4)$						$\frac{2\sqrt{2}}{3}$				
$K^{(4)}(2, 4)$	$-\sqrt{\frac{22}{45}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$								
$K^{(4)}(4, 2)$				$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$					
$K^{(4)}(4, 4)$									$-\frac{2\sqrt{13}}{9}$	$\frac{2\sqrt{5}}{9}$
$K^{(5)}(2, 4)$							$-\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{28}{45}}$		
$K^{(5)}(4, 2)$				$-\sqrt{\frac{28}{45}}$	$-\sqrt{\frac{26}{45}}$					
$K^{(5)}(4, 4)$									$-\sqrt{\frac{14}{27}}$	$\sqrt{\frac{10}{27}}$
$K^{(6)}(2, 4)$								$\sqrt{\frac{8}{9}}$		
$K^{(6)}(4, 2)$				$-\sqrt{\frac{8}{9}}$	$-\sqrt{\frac{14}{45}}$					
$K^{(6)}(4, 4)$									$-\sqrt{\frac{10}{27}}$	$\sqrt{\frac{4}{27}}$
$K^{(7)}(4, 4)$									$-\frac{4}{9}$	$\sqrt{\frac{56}{81}}$
$K^{(8)}(4, 4)$										$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$S^{(0)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$			$\sqrt{3}$						2	
$S^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$		$-\sqrt{\frac{8}{5}}$	$\sqrt{\frac{7}{5}}$						$-\sqrt{\frac{28}{27}}$	$\sqrt{\frac{80}{27}}$

CHAPITRE 5 : Modèle  $sdg$ - des bosons en interaction couplé à un fermion

$(j, j')$	$(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$
$K^{(0)}(4, 4)$					$-\frac{\sqrt{10}}{3}$
$K^{(1)}(4, 4)$				$-\frac{\sqrt{2}}{9}$	$-\frac{2\sqrt{22}}{9}$
$K^{(2)}(2, 4)$			$-\frac{\sqrt{10}}{3}$		
$K^{(2)}(4, 4)$				$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{28}{27}}$
$K^{(3)}(2, 4)$		$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{44}{45}}$		
$K^{(3)}(4, 4)$				$-\sqrt{\frac{4}{27}}$	$-\sqrt{\frac{26}{27}}$
$K^{(4)}(0, 4)$	$-\frac{\sqrt{10}}{3}$				
$K^{(4)}(2, 4)$		$-\sqrt{\frac{14}{45}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$		
$K^{(4)}(4, 4)$				$-\frac{2\sqrt{5}}{9}$	$-\frac{\sqrt{70}}{9}$
$K^{(5)}(2, 4)$			$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{26}{45}}$	
$K^{(5)}(4, 4)$				$-\sqrt{\frac{10}{27}}$	$-\sqrt{\frac{20}{27}}$
$K^{(6)}(2, 4)$		$-\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{14}{45}}$		
$K^{(6)}(4, 4)$				$-\sqrt{\frac{14}{27}}$	$-\sqrt{\frac{16}{27}}$
$K^{(7)}(4, 4)$				$-\sqrt{\frac{56}{81}}$	$-\sqrt{\frac{34}{81}}$
$K^{(8)}(4, 4)$				$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$
$S^{(0)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$					$\sqrt{5}$
$S^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$				$-\sqrt{\frac{80}{27}}$	$\sqrt{\frac{55}{27}}$

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

l'équation (5.19), nous écrivons

$$\begin{aligned}
\text{U}^{\text{BF}}(15) &: \left\{ G_{\mu,\text{BF}}^{(\lambda)}(l, l'), \lambda = 0, \dots, 8 \text{ et } l, l' = 0, 2, 4 \right\}, \\
\text{O}^{\text{BF}}(15) &: \left\{ G_{\mu,\text{BF}}^{(1,3)}(2, 2), G_{\mu,\text{BF}}^{(1,3,5,7)}(4, 4), G_{\mu,\text{BF}}^{(2)}(0, 2) + G_{\mu,\text{BF}}^{(2)}(2, 0), \right. \\
&\quad \left. G_{\mu,\text{BF}}^{(4)}(0, 4) + G_{\mu,\text{BF}}^{(4)}(4, 0), [G_{\mu,\text{BF}}^{(\lambda)}(2, 4) + G_{\mu,\text{BF}}^{(\lambda)}(4, 2)]_{\lambda=2,\dots,6} \right\}, \\
\text{O}^{\text{BF}}(14) &: \left\{ G_{\mu,\text{BF}}^{(1,3)}(2, 2), G_{\mu,\text{BF}}^{(1,3,5,7)}(4, 4), [G_{\mu,\text{BF}}^{(\lambda)}(2, 4) + G_{\mu,\text{BF}}^{(\lambda)}(4, 2)]_{\lambda=2,\dots,6} \right\}, \\
\text{O}^{\text{BF}}(5) &: \left\{ G_{\mu,\text{BF}}^{(1,3)} \right\}, \\
\text{O}^{\text{BF}}(3) &: \left\{ G_{\mu,\text{BF}}^{(1)} \right\}, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
G_{\mu,\text{BF}}^{(1)} &= \hat{L}^{(1)} + \sqrt{10}K^{(1)}(l, l), \\
G_{\mu,\text{BF}}^{(3)} &= \hat{Q}^{(3)} + K^{(3)}(l, l'), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

où  $\hat{L}_\mu^{(1)}$  et  $\hat{Q}_\mu^{(3)}$  donnés respectivement par les équations (2.5) et (2.12) et  $l, l' = 2, 4$ . Finalement, les générateurs de l'algèbre  $\text{Spin}^{\text{BF}}(3)$  sont obtenus en additionnant les générateurs de  $\text{O}^{\text{BF}}(3)$  et ceux de  $\text{SU}^{\text{F}}(2)$ . Ces derniers, définis par l'équation (5.10) avec  $\lambda = 1$ , doivent vérifier les relations de commutation associées aux moments cinétiques. Si l'on considère par exemple la relation

$$[S_+^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), S_-^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] = -\sqrt{2}S_0^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \tag{5.23}$$

nous parviendrons à exprimer les générateurs de  $\text{Spin}^{\text{BF}}(3)$  sous la forme

$$\hat{J}_\mu^{(1)} = G_{\mu,\text{BF}}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_\mu^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \tag{5.24}$$

Le hamiltonien associé à cette limite s'exprime en fonction des opérateurs invariants des différentes sous-algèbres figurant dans la chaîne (5.19)

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{O}^{\text{BF}}(15)} &= E_{01} + e_1\hat{C}_1(\text{U}^{\text{BF}}(15)) + e_2\hat{C}_2(\text{U}^{\text{BF}}(15)) + e_3\hat{C}_2(\text{O}^{\text{BF}}(15)) \\
&\quad + e_4\hat{C}_2(\text{O}^{\text{BF}}(14)) + e_5\hat{C}_2(\text{O}^{\text{BF}}(5)) + \gamma'\hat{C}_2(\text{O}^{\text{BF}}(3)) \\
&\quad + \gamma\hat{C}_2(\text{Spin}^{\text{BF}}(3)). \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Les opérateurs de Casimir associés aux différentes algèbres couplées dans (5.25)

CHAPITRE 5 : Modèle *sdg*- des bosons en interaction couplé à un fermion

s'écrivent en termes des générateurs couplés

$$\begin{aligned}
\hat{C}_2(\mathbf{U}^{\text{BF}}(15)) &= G_{\text{BF}}^{(0)}(0,0) \cdot G_{\text{BF}}^{(0)}(0,0) + \sum_{\lambda=0}^4 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^8 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) + G_{\text{BF}}^{(2)}(0,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(2)}(2,0) \\
&\quad + G_{\text{BF}}^{(2)}(2,0) \cdot G_{\text{BF}}^{(2)}(0,2) + G_{\text{BF}}^{(4)}(0,4) \cdot G_{\text{BF}}^{(4)}(4,0) \\
&\quad + G_{\text{BF}}^{(4)}(4,0) \cdot G_{\text{BF}}^{(4)}(0,4) + \sum_{\lambda=2}^6 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,4) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,2) \\
&\quad + \sum_{\lambda=2}^6 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,4), \\
\hat{C}_2(\mathbf{O}^{\text{BF}}(15)) &= 2 \sum_{\lambda=1,3} G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) + 2 \sum_{\lambda=1,3,5,7} G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) \\
&\quad + \left( G_{\text{BF}}^{(2)}(0,2) + G_{\text{BF}}^{(2)}(2,0) \right) \cdot \left( G_{\text{BF}}^{(2)}(0,2) + G_{\text{BF}}^{(2)}(2,0) \right) \\
&\quad + \left( G_{\text{BF}}^{(4)}(0,4) + G_{\text{BF}}^{(4)}(4,0) \right) \cdot \left( G_{\text{BF}}^{(4)}(0,4) + G_{\text{BF}}^{(4)}(4,0) \right) \\
&\quad + \sum_{\lambda=2}^6 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,4), \\
\hat{C}_2(\mathbf{O}^{\text{BF}}(14)) &= 2 \sum_{\lambda=1,3} G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,2) + 2 \sum_{\lambda=1,3,5,7} G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,4) \\
&\quad + \sum_{\lambda=2}^6 G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(4,2) \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}(2,4), \\
\hat{C}_2(\mathbf{O}^{\text{BF}}(5)) &= 2 \sum_{\lambda=1,3} G_{\text{BF}}^{(\lambda)} \cdot G_{\text{BF}}^{(\lambda)}, \\
\hat{C}_2(\mathbf{O}^{\text{BF}}(3)) &= G_{\text{BF}}^{(1)} \cdot G_{\text{BF}}^{(1)}, \\
\hat{C}_2(\mathbf{Spin}^{\text{BF}}(3)) &= \hat{J}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(1)}, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

avec  $\hat{J}^{(1)}$  donné par l'équation (5.24).

La base propre à ce hamiltonien est classifiée en fonction des nombres quantiques

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

caractérisant les représentations irréductibles des algèbres dans (5.19) et s'écrit

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}^{\text{F}}(30) \supset \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}_k^{\text{F}}(15) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N] \quad \quad \quad \{1\} \quad \quad \quad [1] \\
 \text{U}^{\text{BF}}(15) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{O}^{\text{BF}}(15) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{O}^{\text{BF}}(14) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N_1, N_2] \quad \quad \quad (v_1, v_2) \quad \quad \quad (v_{dg}, v'_{dg}) \\
 \text{O}^{\text{BF}}(5) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{O}^{\text{BF}}(3) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{Spin}^{\text{BF}}(3) \\
 (\tau_1, \tau_2) \quad \quad \quad n_{\Delta}, L \quad \quad \quad S = \frac{1}{2} \quad \quad \quad J
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \tag{5.27}$$

Les valeurs associées aux nombres quantiques  $[N_1, N_2]$  sont  $[N + 1, 0]$  et  $[N, 1]$  et sont obtenues à partir du produit direct des représentations de  $\text{U}^{\text{B}}(15)$  et  $\text{U}^{\text{F}}(15)$ . Les valeurs de  $(v_1, v_2)$  contenues dans ces deux représentations sont

$$\begin{array}{l}
 [N + 1, 0] : (v_1, v_2) = (N + 1, 0), (N - 1, 0), \dots, (0, 0) \text{ ou } (1, 0), \\
 [N, 1] : (v_1, v_2) = (N, 1), (N - 1, 0), (N - 2, 1) \dots, (1, 0) \text{ ou } (1, 1).
 \end{array}
 \tag{5.28}$$

La décomposition des représentations de  $\text{O}^{\text{BF}}(15)$  en celles de  $\text{O}^{\text{BF}}(14)$  donne

$$\begin{array}{l}
 (v_1, 0) : (v_{dg}, v'_{dg}) = (v_1, 0), (v_1 - 1, 0), \dots, (0, 0), \\
 (v_1, 1) : (v_{dg}, v'_{dg}) = (v_1, 0), (v_1 - 1, 0), \dots, (1, 0), \\
 \quad \quad \quad (v_1, 1), (v_1 - 1, 1), \dots, (1, 1).
 \end{array}
 \tag{5.29}$$

Les réductions des représentations complètement symétriques de  $\text{O}(14)$  vers  $\text{O}(5)$  ont été présentées dans le chapitre 2. Pour ce qui est des décompositions des représentations anti-symétriques, une manière de procéder est d'employer un algorithme qui repose sur les résultats obtenus dans le cas ci-mentionné et qui utilise les produits de Kronecker [44]. Cette méthode a été développée dans la section 2.2.1 en ce qui concerne la décomposition de  $\text{O}(5)$  vers  $\text{O}(3)$  et ne sera pas revue ici. Cette même démarche peut être suivie pour obtenir les représentations de  $\text{O}^{\text{BF}}(5)$  contenues dans celles de  $\text{O}^{\text{BF}}(14)$ . Pour ce dernier cas, nous nous contentons de présenter dans le tableau 5.2 les résultats obtenus pour quelques représentations  $(\tau_1, \tau_2)$  de  $\text{O}^{\text{BF}}(5)$  contenues dans  $(v_{dg}, 1)$  de  $\text{O}^{\text{BF}}(14)$ .

Finalement, comme  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  et  $S = 1/2$ , les valeurs de  $J$  sont  $J = L \pm 1/2$  si  $L \neq 0$  et  $J = 1/2$  si  $L = 0$ .

Le hamiltonien (5.25) est diagonal dans la base (5.27). Ses valeurs propres

TAB. 5.2 – Décomposition de quelques représentations  $(v_{dg}, 1)$  de  $O^{BF}(14)$  en celles de  $O^{BF}(5)$ . L'exposant figurant en-dessus de quelques représentations présente la multiplicité de la représentation (nombre de fois qu'elle apparaît dans une représentation  $(v_{dg}, 1)$ ).

$(v_{dg}, 1)$	$(\tau_1, \tau_2)$
(1, 1)	(1, 1), (3, 1)
(2, 1)	(1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 1) <sup>2</sup> , (3, 2), (4, 0), (4, 2), (5, 1)
(3, 1)	(1, 1) <sup>2</sup> , (2, 0) <sup>3</sup> , (2, 1) <sup>2</sup> , (2, 2) <sup>2</sup> , (3, 1) <sup>5</sup> , (3, 2) <sup>2</sup> , (3, 3), (4, 0) <sup>2</sup> , (4, 1) <sup>2</sup> , (4, 2) <sup>3</sup> , (4, 3), (5, 1) <sup>2</sup> , (5, 2), (5, 3), (6, 0), (6, 2), (7, 1)
(4, 1)	(1, 1) <sup>3</sup> , (2, 0) <sup>4</sup> , (2, 1) <sup>3</sup> , (2, 2) <sup>4</sup> , (3, 0), (3, 1) <sup>8</sup> , (3, 2) <sup>7</sup> , (3, 3) <sup>4</sup> , (4, 0) <sup>5</sup> , (4, 1) <sup>5</sup> , (4, 2) <sup>8</sup> , (4, 3) <sup>3</sup> , (4, 4) <sup>2</sup> , (5, 1) <sup>7</sup> , (5, 2) <sup>4</sup> , (5, 3) <sup>4</sup> , (5, 4), (6, 0) <sup>3</sup> , (6, 1) <sup>2</sup> , (6, 2) <sup>4</sup> , (6, 3), (6, 4), (7, 1) <sup>3</sup> , (7, 2), (7, 3), (8, 0), (8, 2), (9, 1)

s'écrivent

$$\begin{aligned}
 E(N, [N_1, N_2], (v_1, v_2), (v_{dg}, v'_{dg}), (\tau_1, \tau_2), L, J) \\
 = E_{01} + e_1(N_1 + N_2) + e_2[N_1(N_1 + 14) + N_2(N_2 + 12)] \\
 + e_3[v_1(v_1 + 13) + v_2(v_2 + 11)] + e_4[v_{dg}(v_{dg} + 12) + v'_{dg}(v'_{dg} + 10)] \\
 + e_5[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \gamma'L(L + 1) + \gamma'J(J + 1).
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

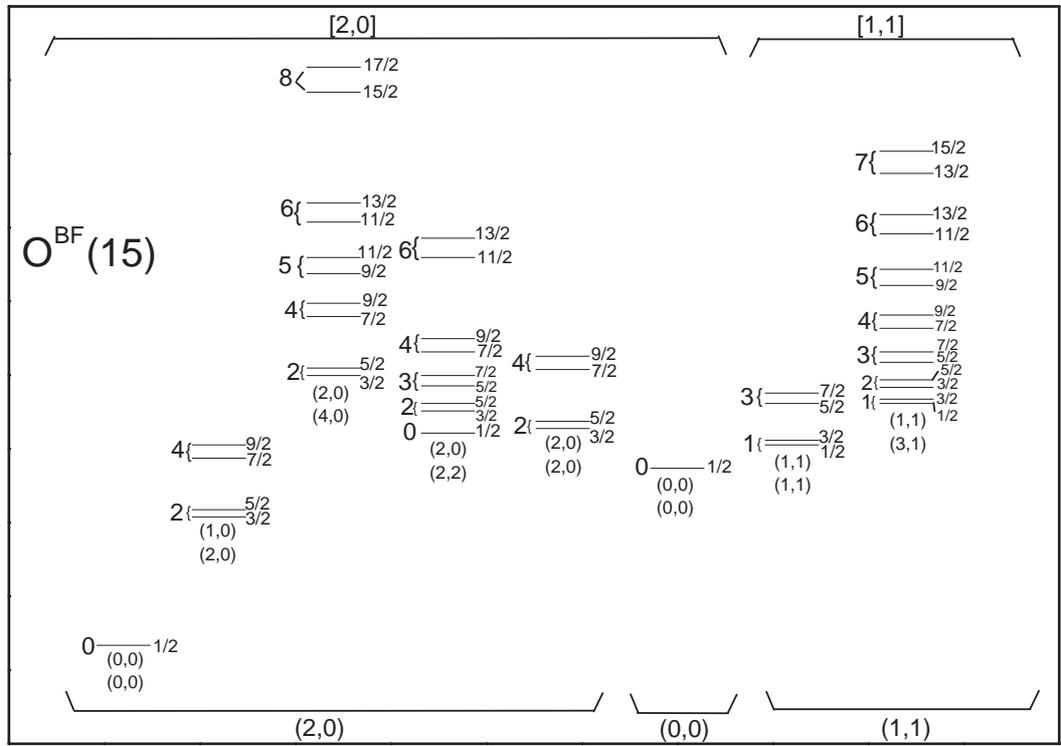
Comme  $N_1 + N_2 = N + 1$  est constant pour un noyau donné, le terme associé à l'opérateur de Casimir du premier ordre de  $U^{BF}(15)$  sera désormais inclu dans l'énergie de liaison. Un spectre typique à la limite  $O^{BF}(15)$  pour un nombre de bosons  $N = 1$  est présenté sur la figure 5.1.

### 5.5.2 Symétries associées à la limite $SU^{BF}(5)$

Nous discuterons au cours de cette section les symétries de Bose-Fermi qui peuvent surgir quand un noyau pair-pair ayant la symétrie dynamique  $SU(5)$  du modèle  $sdg$ -IBM est couplé à un nucléon impair. Un intérêt particulier sera porté aux deux cas où ce dernier occupe les orbitales de moments angulaires  $1/2, 3/2, 5/2, 7/2$  ou  $1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$  engendrant les algèbres fermioniques  $U^F(20)$  et  $U^F(30)$  respectivement. Les symétries associées sont notées respectivement  $SU_I^{BF}(5)$  et  $SU_{II}^{BF}(5)$  et correspondent à un couplage fort entre les degrés de liberté bosoniques et fermioniques. Bien évidemment, plusieurs autres orbitales peuvent également être occupées par le fermion. Cependant, toutes les symétries qui en résultent correspondent à un

## 5.5 Symétries dynamiques en $sdg$ -IBFM

FIG. 5.1 – Spectre typique à la limite  $O^{BF}(15)$  pour un nombre de bosons  $N = 1$ . Les états d'énergie sont étiquetés par le nombre quantique  $L$  (à gauche), le nombre quantique  $J$  (à droite), les nombres quantiques figurant en dessous de chaque état sont respectivement  $(v_{dg}, v'_{dg})$  associés à  $O^{BF}(14)$  et  $(\tau_1, \tau_2)$  associés à  $O^{BF}(5)$ . Les nombres quantiques en haut et en bas de la figure sont respectivement  $[N_1, N_2]$  caractérisant les représentations de  $U^{BF}(15)$  et  $(v_1, v_2)$  caractérisant les représentations de  $O^{BF}(15)$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



couplage entre les degrés de liberté bosoniques et fermioniques au niveau de  $O^{BF}(3)$  et ne vont pas donc être détaillées ici.

### Symétrie $SU_I^{BF}(5)$

L'algèbre fermionique  $U^F(20)$  peut être décomposée en une partie pseudo-orbitale avec  $k = 2$  et une algèbre pseudo-spin avec  $s = 3/2$  engendrant respectivement les

CHAPITRE 5 : Modèle *sdg*- des bosons en interaction couplé à un fermion

algèbres  $U_k^F(5)$  et  $U_s^F(4)$ . La chaîne de sous-algèbres de  $U^B(15) \otimes U^F(20)$  s'écrit

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(15) & & \otimes & & U^F(20) \\
 | & & & & \downarrow \\
 | & & & & U_k^F(5) \quad \otimes \quad U_s^F(4) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \quad \downarrow \\
 SU^B(5) & & & & SU_k^F(5) \quad \downarrow \quad SU_s^F(4) \\
 \downarrow \quad \searrow & & & \swarrow & \downarrow \\
 O^B(5) & & SU^{BF}(5) & & O_k^F(5) \quad \downarrow \quad Sp_s^F(4) \\
 \downarrow \quad \searrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 O^B(3) & & O^{BF}(5) & & O_k^F(3) \quad \downarrow \\
 & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 & & O^{BF}(3) & & SU_s^F(2) \\
 & & & \searrow & \\
 & & & Spin^{BF}(3) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & Spin^{BF}(2) & 
 \end{array} \tag{5.31}$$

Les générateurs des algèbres pseudo-orbitale et pseudo-spin sont obtenus à partir de l'équation (5.10) pour  $j, j' = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, k = 2$  et  $s = 3/2$  et sont présentés dans le tableau 5.3.

Les générateurs de l'algèbre  $SU_k^{BF}(5)$  sont obtenus en sommant les algèbres bosoniques et fermioniques et s'écrivent

$$G_{\mu, BF}^{(\lambda)} = G_{\mu, B}^{(\lambda)} + K_{\mu}^{(\lambda)}(2, 2), \tag{5.32}$$

avec  $\lambda = 1, \dots, 4$ . Finalement, les générateurs de  $Spin^{BF}(3)$  s'écrivent

$$\hat{J}_{\mu}^{(1)} = \hat{L}_{\mu, BF}^{(1)} + \sqrt{5} S_{\mu}^{(1)}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right). \tag{5.33}$$

Le coefficient  $\sqrt{5}$  vient du fait que les opérateurs  $S_{\mu}^{(1)}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  ne vérifient pas les mêmes relations de commutation que les opérateurs moments angulaires.

Le hamiltonien à cette limite s'exprime en fonction des opérateurs invariants associés aux algèbres couplées figurant dans l'équation (5.31). Il s'écrit

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{SU^{BF}(5)} &= E_{0I} + e'_1 \hat{C}_2(SU^B(5)) + e'_2 \hat{C}_2(SU^{BF}(5)) + e_5 \hat{C}_2(O^{BF}(5)) \\
 &\quad + \gamma' \hat{C}_2(O^{BF}(3)) + \gamma \hat{C}_2(Spin^{BF}(3)).
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Ses états propres sont classifiés en fonction des nombres quantiques associés aux

5.5 Symétries dynamiques en  $sdg$ -IBFM

 TAB. 5.3 – Générateurs des algèbres  $SU_k^F(5)$  ( $k = 2$ ) et  $SU_s^F(4)$  ( $s = 3/2$ ) donnés en fonction des opérateurs fermioniques  $A_\mu^{(\lambda)}(j, j')$ .

$(j, j')$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$					$-\sqrt{\frac{4}{5}}$		
$K^{(1)}(2, 2)$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$			$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\frac{\sqrt{8}}{5}$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$	
$K^{(2)}(2, 2)$		$\frac{\sqrt{7}}{5}$	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$		$-\frac{\sqrt{7}}{5}$		$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{16}{175}}$
$K^{(3)}(2, 2)$			$-\sqrt{\frac{12}{35}}$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$		$\frac{\sqrt{8}}{5}$	$\sqrt{\frac{24}{175}}$	$-\sqrt{\frac{12}{35}}$
$K^{(4)}(2, 2)$				$\sqrt{\frac{2}{5}}$			$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	$-\sqrt{\frac{4}{7}}$
$S^{(0)}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$					1		
$S^{(1)}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$			$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{14}}{5}$	
$(j, j')$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$			$-\sqrt{\frac{6}{5}}$					$-\sqrt{\frac{8}{5}}$
$K^{(1)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{7}}{5}$	$-\frac{11\sqrt{7}}{35}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$			$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	$-\sqrt{\frac{48}{35}}$
$K^{(2)}(2, 2)$	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\frac{\sqrt{6}}{7}$	$\frac{18\sqrt{2}}{35}$		$-\frac{4\sqrt{7}}{35}$	$-\frac{18\sqrt{2}}{35}$	$-\frac{4\sqrt{3}}{7}$
$K^{(3)}(2, 2)$	$-\sqrt{\frac{12}{35}}$	$-\sqrt{\frac{24}{175}}$	$\frac{6\sqrt{2}}{35}$	$\sqrt{\frac{162}{245}}$	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$	$-\sqrt{\frac{12}{35}}$	$-\sqrt{\frac{162}{245}}$	$-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{33}{5}}$
$K^{(4)}(2, 2)$		$\sqrt{\frac{8}{35}}$	$\frac{8}{7}\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{\sqrt{22}}{7}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{7}}$	$-\frac{\sqrt{22}}{7}$	$-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{11}{5}}$
$S^{(0)}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$			$\sqrt{\frac{3}{2}}$					$\sqrt{2}$
$S^{(1)}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$-\frac{\sqrt{14}}{5}$	$\frac{13\sqrt{14}}{70}$	$\sqrt{\frac{16}{35}}$			$-\sqrt{\frac{16}{35}}$	$\sqrt{\frac{54}{35}}$	

différentes sous-algèbres de  $U^B(15) \otimes U^F(20)$  et sont donnés par

$$\left. \begin{array}{l}
 U^B(15) \otimes U^F(20) \supset U^B(15) \otimes U_k^F(5) \otimes U_s^F(4) \supset \\
 [N] \quad \quad \quad \{1\} \quad \quad \quad [1] \quad \quad \quad [1] \\
 \left. \begin{array}{l}
 SU^B(5) \otimes SU_k^F(5) \otimes U_s^F(4) \supset SU^{BF}(5) \otimes SU_s^F(4) \supset \\
 (n_1^B, \dots, n_4^B) \quad [1] \quad \quad \quad (n_1, \dots, n_4)
 \end{array} \right\} \\
 O^{BF}(5) \otimes SU_s^F(2) \supset O^{BF}(3) \otimes SU_s^F(2) \supset Spin^{BF}(3) \\
 (\tau_1, \tau_2) \quad \quad \quad n_\Delta, L \quad \quad \quad S = 3/2 \quad \quad \quad J
 \end{array} \right\} \quad (5.35)$$

Les valeurs propres du hamiltonien (5.34) dans la base (5.35) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 E([N], (n_1^B, \dots, n_4^B), (n_1, \dots, n_4), (\tau_1, \tau_2), L, J) \\
 = E_{0I} + e'_1 \sum_{i=1}^4 (n_i^B - \frac{1}{5} \sum n_i^B) (n_i^B - \frac{1}{5} \sum n_i^B + 10 - 2i) \\
 + e'_2 \sum_{i=1}^4 (n_i - \frac{1}{5} \sum n_i) (n_i - \frac{1}{5} \sum n_i + 10 - 2i) + e_5 [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] \\
 + \gamma' L(L + 1) + \gamma J(J + 1), \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 (f_i - \frac{1}{5} \sum f_i) (f_i - \frac{1}{5} \sum f_i + 10 - 2i) \\
 = \frac{2}{5} [2(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2) + 5(2f_1 + f_2 - f_4) \\
 - (f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_1 f_4 + f_2 f_3 + f_2 f_4 + f_3 f_4)]. \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

Un spectre d'énergie typique à la limite  $SU_I^{BF}(5)$  est présenté sur la figure 5.2.

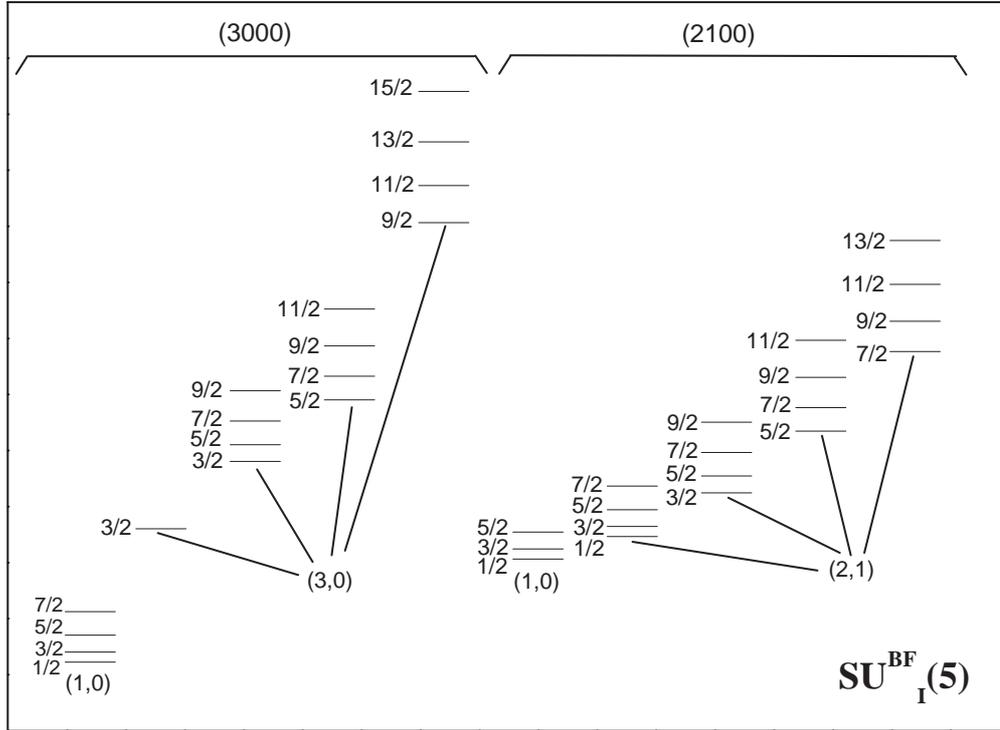
### Symétrie $SU_{II}^{BF}(5)$

La chaîne de sous-algèbres dans ce cas s'écrit

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(15) & & \otimes & & U^F(30) \\
 | & & & & \downarrow \\
 | & & & & U_k^F(15) \quad \otimes \quad U_s^F(2) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 SU^B(5) & & & & SU_k^F(5) \\
 \downarrow \quad \searrow & & & \swarrow & \downarrow \\
 O^B(5) & & SU^{BF}(5) & & O_k^F(5) \\
 \downarrow \quad \searrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 O^B(3) & & O^{BF}(5) & & O_k^F(3) \\
 & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 & & O^{BF}(3) & & SU_s^F(2) \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & Spin^{BF}(3) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & Spin^{BF}(2)
 \end{array} \tag{5.38}$$

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

FIG. 5.2 – Spectre typique à la limite  $SU_I^{\text{BF}}(5)$  pour un nombre de bosons  $N = 1$ . Les états d'énergie sont étiquetés par le nombre quantique  $J$  (à gauche), les nombres  $(\tau_1, \tau_2)$  associés à  $O^{\text{BF}}(5)$  (en dessous). Les nombres quantiques en haut de la figure sont  $(n_1, \dots, n_4)$  caractérisant  $SU^{\text{BF}}(5)$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



Les générateurs des algèbres fermioniques sont donnés dans le tableau 5.1. Ceux correspondant aux algèbres couplées dans la chaîne (5.38) sont donnés par l'équation (5.21) excepté ceux de  $SU^{\text{BF}}(5)$  qui s'écrivent

$$G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)} = G_{\mu, \text{B}}^{(\lambda)} + K_{\mu}^{(\lambda)}(l, l'), \quad (5.39)$$

avec  $l, l' = 0, 2, 4$  et  $\lambda = 1, \dots, 4$ .

L'expression du hamiltonien à cette limite s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SU_I^{\text{BF}}(5)} = & E_{0II} + e_2 \hat{C}_2(U^{\text{BF}}(15)) + e'_2 \hat{C}_2(SU^{\text{BF}}(5)) + e_5 \hat{C}_2(O^{\text{BF}}(5)) \\ & + \gamma' \hat{C}_2(O^{\text{BF}}(3)) + \gamma \hat{C}_2(\text{Spin}^{\text{BF}}(3)). \end{aligned} \quad (5.40)$$

CHAPITRE 5 : Modèle *sdg*- des bosons en interaction couplé à un fermion

Les états propres de ce hamiltonien sont étiquetés par les nombres quantiques qui caractérisent les algèbres dans la chaîne (5.38)

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}^{\text{F}}(30) \supset \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}_k^{\text{F}}(15) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N] \quad \quad \quad \{1\} \quad \quad \quad [1] \\
 \left| \begin{array}{l}
 \text{U}^{\text{BF}}(15) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{SU}^{\text{BF}}(5) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N_1, N_2] \quad \quad \quad (n_1, \dots, n_4) \\
 \text{O}^{\text{BF}}(5) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{O}^{\text{BF}}(3) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{Spin}^{\text{BF}}(3) \\
 (\tau_1, \tau_2) \quad \quad \quad n_{\Delta}, L \quad \quad S = 1/2 \quad \quad J
 \end{array} \right\}. \quad (5.41)
 \end{array} \right.$$

Comme dans le cas de la symétrie  $\text{O}^{\text{BF}}(15)$ , les valeurs possibles pour  $[N_1, N_2]$  sont  $[N + 1, 0]$  et  $[N, 1]$ . En ce qui concerne la réduction  $\text{U}^{\text{BF}}(15) \supset \text{SU}^{\text{BF}}(5)$ , on peut utiliser un algorithme similaire à celui présenté au préalable pour la réduction  $\text{O}(5) \supset \text{O}(3)$ . Ainsi, nous considérons tout d'abord le produit de Kronecker de deux représentations symétriques de  $\text{U}(15)$ . Soit par exemple

$$[1] \otimes [1] = [2] \oplus [1, 1]. \quad (5.42)$$

Sachant que la représentation  $[1]$  de  $\text{U}(15)$  se décompose vers  $(2)$  de  $\text{SU}(5)$ , nous considérons alors le produit direct des deux représentations  $(2)$  de  $\text{SU}(5)$  qui s'écrit

$$(2) \otimes (2) = (4) \oplus (31) \oplus (22). \quad (5.43)$$

La représentation symétrique  $[2]$  de  $\text{U}(15)$ , dans l'équation (5.42), se décompose vers les représentations  $(4)$  et  $(22)$  de  $\text{SU}(5)$ . Il s'en suit alors que la représentation de  $\text{SU}(5)$  contenues dans la représentation antisymétrique  $[1, 1]$  de  $\text{U}(15)$  est  $(31)$ . La même procédure peut être suivie pour obtenir toutes les représentations irréductibles de  $\text{SU}^{\text{BF}}(5)$  contenues dans celles de  $\text{U}^{\text{BF}}(15)$ . Bien qu'elle soit aisément maniable, cette technique a l'inconvénient d'être longue et de ne pas pouvoir être généralisée par une seule expression analytique. Dans le tableau 5.4, nous donnons, jusqu'à  $N = 4$ , quelques représentations de  $\text{SU}^{\text{BF}}(5)$  contenues dans des représentations  $[N, 1]$  de  $\text{U}^{\text{BF}}(15)$ . Finalement, la réduction  $\text{O}^{\text{BF}}(5) \supset \text{O}^{\text{BF}}(3)$  est la même que celle présentée dans la section 5.5.1.

Les valeurs propres du hamiltonien (5.40) dans la base (5.41) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 E(N, [N_1, N_2], (n_1, \dots, n_4), (\tau_1, \tau_2), L, J) \\
 = E_{0II} + e_2[N_1(N_1 + 14) + N_2(N_2 + 12)] \\
 + e'_2 \sum_{i=1}^4 (n_i - \frac{\sum n_i}{5})(n_i - \frac{\sum n_i}{5} + 10 - 2k) \\
 + e_5[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \gamma' L(L + 1) + \gamma J(J + 1), \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

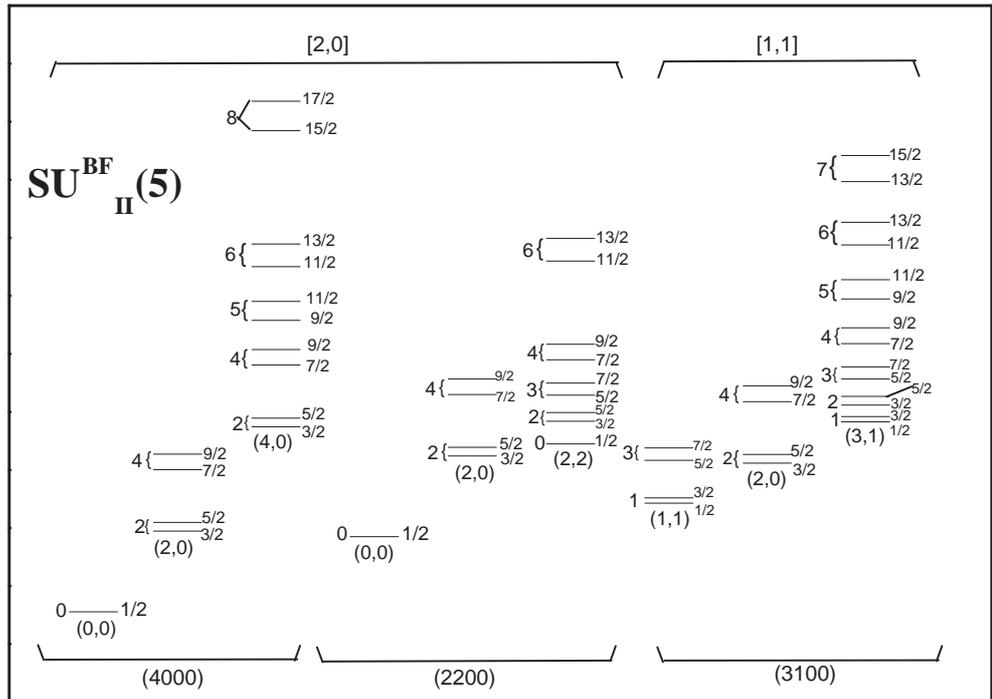
TAB. 5.4 – Décomposition de quelques représentations  $[N, 1]$  de  $U^{\text{BF}}(15)$  vers celles de  $SU^{\text{BF}}(5)$ .

$[N, 1]$	$(n_1 n_2 n_3 n_4)$
[1, 1]	(3100)
[2, 1]	(5100), (4200), (3210)
[3, 1]	(7100), (6200), (5300), (5210), (4310), (4220), (3300)
[4, 1]	(9100), (8200), (7300), (7210), (6400), (6310), (6220), (5410), (5320), (5221), (442), (4321), (4222), (2111)

Sur la figure 5.3, nous présentons un exemple d'un spectre ayant la symétrie  $SU_{II}^{\text{BF}}(5)$  pour un nombre de bosons  $N = 1$ .

Notons avant de clore cette section, qu'une autre factorisation de l'algèbre  $U^{\text{F}}(30)$  donnant naissance à une symétrie  $SU^{\text{BF}}(5)$  est également possible et est obtenue pour  $k = 2$  et  $s = 5/2$ . Les algèbres pseudo-orbitale et pseudo-spin correspondantes sont respectivement  $U_k^{\text{F}}(5)$  et  $U_s^{\text{F}}(6)$ . Mais, comme la discussion de cette symétrie est très similaire à celle des symétries  $SU_{II}^{\text{BF}}(5)$ , elle ne sera pas détaillée ici. Néanmoins, nous nous contentons de présenter dans le tableau 5.5 les générateurs associés à  $U_k^{\text{F}}(5)$  et  $U_s^{\text{F}}(6)$ .

FIG. 5.3 – Spectre typique à la limite  $SU_{II}^{BF}(5)$  pour un nombre de bosons  $N = 1$ . Les états d'énergie sont labellés par le nombre quantique  $L$  (à gauche), le nombre quantique  $J$  (à droite), les nombres  $(\tau_1, \tau_2)$  associés à  $O^{BF}(5)$  (en dessous). Les nombres quantiques en haut et en bas de la figure sont respectivement  $[N_1, N_2]$  caractérisant  $U^{BF}(15)$  et  $(n_1, \dots, n_4)$  associés à  $SU^{BF}(5)$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



TAB. 5.5 – Générateurs associés aux algèbres fermioniques  $U_k^F(5)$  et  $U_s^F(6)$  donnés en fonction des opérateurs fermioniques  $A_{\mu}^{(\lambda)}(j, j')$ .

$(j, j')$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$						$-\sqrt{\frac{4}{5}}$			
$K^{(1)}(2, 2)$	$\sqrt{\frac{4}{45}}$	$\sqrt{\frac{14}{45}}$				$\sqrt{\frac{14}{45}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{15}$	$\frac{\sqrt{12}}{5}$		
$K^{(2)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	$-\frac{\sqrt{8}}{5}$			$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{12\sqrt{3}}{35}$	
$K^{(3)}(2, 2)$			$\sqrt{\frac{2}{35}}$	$\sqrt{\frac{12}{35}}$			$-\frac{6\sqrt{2}}{35}$	$-\frac{13\sqrt{2}}{35}$	$-\sqrt{\frac{64}{245}}$	$\frac{\sqrt{10}}{7}$
$K^{(4)}(2, 2)$				$-\sqrt{\frac{4}{135}}$	$-\sqrt{\frac{10}{27}}$			$\sqrt{\frac{6}{245}}$	$\frac{16}{21\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{110}{189}}$
$S^{(0)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$						$\sqrt{\frac{2}{3}}$			
$S^{(1)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$\sqrt{\frac{7}{45}}$	$\sqrt{\frac{8}{45}}$				$-\sqrt{\frac{8}{45}}$	$\frac{13}{15}\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{48}{175}}$		
$(j, j')$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$			$-\sqrt{\frac{6}{5}}$						$-\sqrt{\frac{8}{5}}$	
$K^{(1)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{12}}{5}$	$-\sqrt{\frac{36}{245}}$	$\sqrt{\frac{18}{35}}$				$-\sqrt{\frac{18}{35}}$	$-\frac{26}{3\sqrt{105}}$	$\sqrt{\frac{10}{27}}$
$K^{(2)}(2, 2)$	$-\frac{\sqrt{8}}{5}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{\sqrt{6}}{7}$	$\frac{17\sqrt{2}}{35}$	$-\frac{\sqrt{10}}{7}$		$-\frac{12\sqrt{3}}{35}$	$-\frac{17\sqrt{2}}{35}$	$-\sqrt{\frac{4}{147}}$	$\sqrt{\frac{110}{147}}$
$K^{(3)}(2, 2)$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$	$\frac{13\sqrt{2}}{35}$	$\frac{27}{35\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{2}{245}}$	$-\sqrt{\frac{55}{98}}$	$-\sqrt{\frac{12}{35}}$	$-\sqrt{\frac{64}{245}}$	$-\sqrt{\frac{2}{245}}$	$\frac{4}{7}\sqrt{\frac{11}{15}}$	$\sqrt{\frac{110}{147}}$
$K^{(4)}(2, 2)$		$-\sqrt{\frac{6}{245}}$	$-\frac{9}{7\sqrt{10}}$	$-\frac{\sqrt{22}}{7}$	$-\sqrt{\frac{55}{98}}$	$\sqrt{\frac{4}{135}}$	$\frac{16}{21\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{22}}{7}$	$\frac{32}{63}\sqrt{\frac{11}{5}}$	$\frac{\sqrt{1430}}{63}$
$S^{(0)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$			1						$\sqrt{\frac{4}{3}}$	
$S^{(1)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$		$-\sqrt{\frac{48}{175}}$	$\frac{23}{35}$	$\sqrt{\frac{72}{245}}$				$-\sqrt{\frac{72}{245}}$	$\frac{74}{21\sqrt{15}}$	$\sqrt{\frac{40}{189}}$

$(j, j')$	$(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$	$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$
$K^{(0)}(2, 2)$					$-\sqrt{2}$
$K^{(1)}(2, 2)$				$-\sqrt{\frac{10}{27}}$	$-\sqrt{\frac{44}{27}}$
$K^{(2)}(2, 2)$			$-\frac{\sqrt{10}}{7}$	$-\sqrt{\frac{110}{147}}$	$-\sqrt{\frac{22}{21}}$
$K^{(3)}(2, 2)$		$-\frac{\sqrt{10}}{7}$	$-\sqrt{\frac{55}{98}}$	$-\sqrt{\frac{110}{147}}$	$-\sqrt{\frac{143}{294}}$
$K^{(4)}(2, 2)$	$-\sqrt{\frac{10}{27}}$	$-\sqrt{\frac{110}{189}}$	$-\sqrt{\frac{55}{98}}$	$-\sqrt{\frac{1430}{63}}$	$-\sqrt{\frac{143}{1134}}$
$S^{(0)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$					$\sqrt{\frac{5}{3}}$
$S^{(1)}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$				$-\sqrt{\frac{40}{189}}$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{11}{21}}$

### 5.5.3 Symétries associées à la limite $SU^{\text{BF}}(3)$

Notre étude des symétries de Bose-Fermi associées à la limite  $SU(3)$  sera menée en suivant une procédure similaire à celle présentée par Bijker et Kota dans la référence [139] dans le cadre du modèle *sd*-IBFM. Ainsi, on considère que le noyau cœur ayant la symétrie  $SU(3)$  du *sdg*-IBM est couplé à un nucléon pouvant s'asseoir sur toutes les orbites à une particule  $j = 1/2, 3/2, \dots, n+1/2$ . L'algèbre fermionique dans ce cas est  $U^{\text{F}}(m) \approx U^{\text{F}}(m/2) \otimes U^{\text{F}}(2)$ , où  $U^{\text{F}}(m/2)$  et  $U^{\text{F}}(2)$  désignent respectivement les parties pseudo-orbitale et pseudo-spin de  $U^{\text{F}}(m)$  avec  $k = n, n-2, \dots, 0$  ou  $1$ ,  $s = 1/2$  et  $m = (n+1)(n+2)$ .  $n$  peut être regardé comme étant le nombre quantique caractérisant l'oscillateur harmonique engendrant l'espace du nucléon célibataire. La chaîne de sous-algèbres correspondant à cette limite s'écrit

$$\begin{array}{ccccc}
 U^{\text{B}}(15) & & \otimes & & U^{\text{F}}(m) \\
 | & & & & \downarrow \\
 | & & & & U^{\text{F}}_k(m/2) \otimes U^{\text{F}}_s(2) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 SU^{\text{B}}(3) & & & & SU^{\text{F}}_k(3) \\
 \downarrow \searrow & & & \swarrow & \downarrow \\
 O^{\text{B}}(3) & & SU^{\text{BF}}(3) & & O^{\text{F}}_k(3) \\
 \searrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 & & O^{\text{BF}}(3) & & SU^{\text{F}}_s(2) \\
 & & \searrow & \swarrow & \\
 & & & & \text{Spin}^{\text{BF}}(3) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \text{Spin}^{\text{BF}}(2)
 \end{array} \tag{5.45}$$

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

Dans ce cas, l'algèbre  $SU^F(3)$  est engendrée par les cinq composantes de l'opérateur quadripolaire et les trois composantes de l'opérateur moment angulaire. Ces générateurs ont été donnés par Elliott [13] et s'écrivent

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{F,\mu}^{(2)} &= \sum_{l,l'} q_{l,l'}(n) K_{\mu}^{(2)}(l,l'), \\ \hat{L}_{F,\mu}^{(1)} &= \sum_l \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}} K_{\mu}^{(1)}(l,l),\end{aligned}\tag{5.46}$$

avec  $l, l' = n, n-2, \dots, 1$  ou  $0$  et

$$\begin{aligned}q_{l,l}(n) &= -(2n+3) \left[ \frac{l(l+1)(2l+1)}{40(2l-1)(2l+3)} \right]^{1/2}, \\ q_{l,l+2}(n) &= q_{l+2,l}(n) = \left[ \frac{3(l+1)(l+2)(n-l)(n+l+3)}{20(2l+3)} \right]^{1/2}.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Les opérateurs  $K_{\mu}^{(\lambda)}(l,l')$  sont toujours obtenus à partir de l'équation (5.10) et s'expriment en fonction des opérateurs fermioniques  $A_{\mu}^{(\lambda)}(j,j')$ . L'algèbre  $SU^{BF}(3)$  est alors obtenue en combinant les générateurs (5.46) et leurs contreparties bosoniques données au chapitre 2 par les équations (2.16) et (2.5) respectivement. On écrit

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{\mu,BF}^{(2)} &= \hat{Q}_{\mu,B}^{(2)} + \hat{Q}_{\mu,F}^{(2)}, \\ \hat{L}_{\mu,BF}^{(1)} &= \hat{L}_{\mu,B}^{(1)} + \hat{L}_{\mu,F}^{(1)}.\end{aligned}\tag{5.48}$$

Finalement, l'algèbre  $Spin^{BF}(3)$  est engendrée par les générateurs  $\hat{J}^{(1)}$  donnés par l'équation (5.24).

Le hamiltonien ayant la symétrie dynamique  $SU^{BF}(3)$  s'écrit

$$\hat{H}_{SU^{BF}(3)} = E_{03} + \delta \hat{C}_2(SU^B(3)) + \delta' \hat{C}_2(SU^{BF}(3)) + \gamma \hat{C}_2(O^{BF}(3)) + \gamma' \hat{C}_2(Spin^{BF}(3)),\tag{5.49}$$

où l'opérateur de Casimir de l'algèbre  $SU^B(3)$  a été donné au chapitre 2 par l'équation (2.61),

$$\begin{aligned}\hat{C}_2(SU^{BF}(3)) &= \frac{2}{3} \left[ 2\hat{Q}_{BF}^{(2)} \cdot \hat{Q}_{BF}^{(2)} + \frac{3}{4} \hat{L}_{BF}^{(1)} \cdot \hat{L}_{BF}^{(1)} \right], \\ \hat{C}_2(O^{BF}(3)) &= \hat{L}_{BF}^{(1)} \cdot \hat{L}_{BF}^{(1)},\end{aligned}\tag{5.50}$$

et  $\hat{C}_2(Spin^{BF}(3))$  est donné par l'équation (5.26). Les états propres de ce hamiltonien

sont donnés par

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}^{\text{F}}(m) \supset \text{U}^{\text{B}}(15) \otimes \text{U}_k^{\text{F}}(m/2) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N] \qquad \qquad \{1\} \qquad \qquad \qquad [1] \\
 \text{SU}^{\text{B}}(3) \otimes \text{SU}_k^{\text{F}}(3) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{SU}^{\text{BF}}(3) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 (\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}}) \qquad (\lambda_{\text{F}}, \mu_{\text{F}}) \qquad \qquad \qquad (\lambda, \mu) \\
 \text{O}^{\text{BF}}(3) \otimes \text{SU}_s^{\text{F}}(2) \supset \text{Spin}^{\text{BF}}(3) \\
 L \qquad \qquad S = 1/2 \qquad \qquad J
 \end{array} \right\}. \quad (5.51)
 \end{array}$$

Les nombres quantiques caractérisant les représentations irréductibles de  $\text{SU}^{\text{B}}(3)$  sont obtenus à partir des règles de branchement associées à la réduction  $\text{U}^{\text{B}}(15) \supset \text{SU}^{\text{B}}(3)$  et ont été discutés au cours du chapitre 2. D'autre part, la représentation [1] de l'algèbre  $\text{U}^{\text{F}}((n+1)(n+2)/2)$  se décompose vers la représentation symétrique  $(n, 0)$  de  $\text{SU}^{\text{F}}(3)$ . Il nous reste alors de déterminer les représentations irréductibles associées à  $\text{SU}^{\text{BF}}(3)$ . Celles-ci sont obtenues en employant le produit de Kronecker

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}}) \otimes (n, 0) = \oplus \sum_{r,s} (\lambda_{\text{B}} + n - 2r - s, \mu_{\text{B}} + r - s), \quad (5.52)$$

avec  $r = 0, 1, \dots, \min(\lambda_{\text{B}}, n)$  et  $s = 0, 1, \dots, \min(n-r, \mu_{\text{B}})$ . La réduction  $\text{SU}^{\text{BF}}(3) \supset \text{O}^{\text{BF}}(3)$  suit les mêmes règles de réduction que celles données au chapitre 1 par les équations (1.36) - (1.40). Finalement, les valeurs de  $J$  sont  $J = L \pm 1/2$  excepté pour  $L = 0$  où  $J$  prend seulement la valeur  $J = 1/2$ . L'expression de l'énergie est donc

$$\begin{aligned}
 E(N, (\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}}), (\lambda, \mu), L, J) &= E_{03} + \delta C(\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}}) + \delta' C(\lambda, \mu) + \gamma L(L+1) \\
 &\quad + \gamma' J(J+1), \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

avec

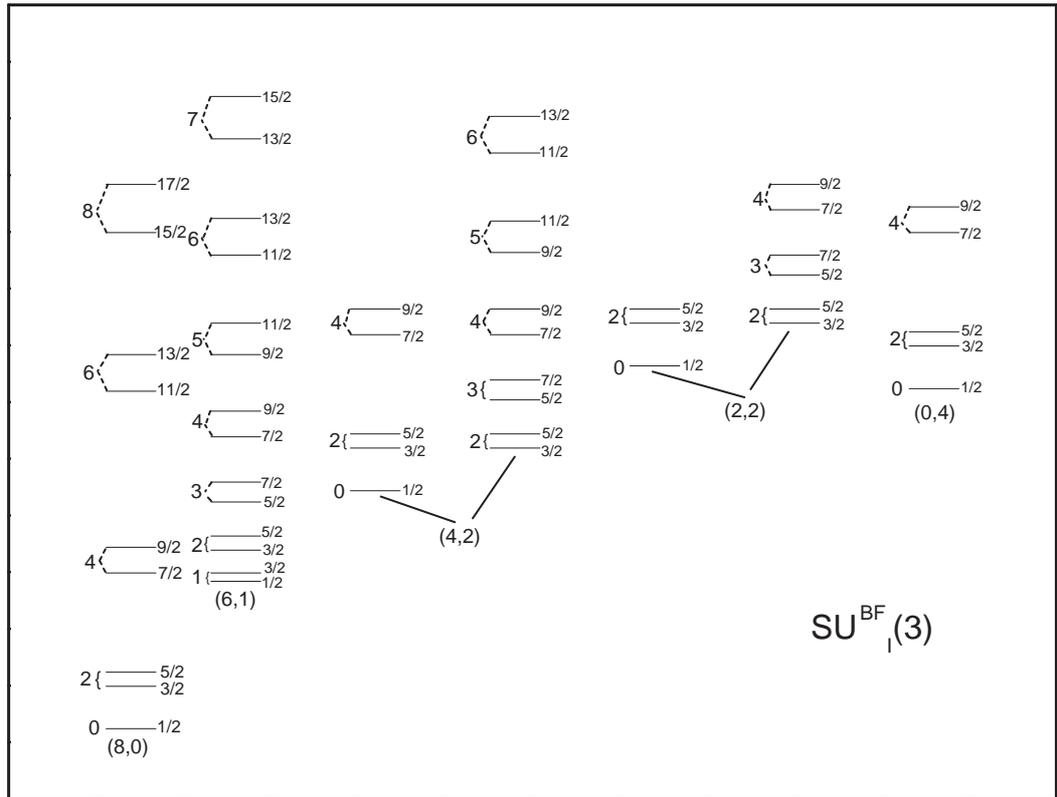
$$C(\lambda, \mu) = \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu). \quad (5.54)$$

Notons que les opérateurs de Casimir de  $\text{U}^{\text{B}}(15)$ ,  $\text{U}^{\text{F}}(m/2)$  et  $\text{SU}^{\text{F}}(3)$  ainsi que leurs valeurs propres n'apparaissent pas dans les équations (5.49) et (5.53) car ils ne font que contribuer à l'énergie de liaison et n'influent pas sur les énergies d'excitation. Un spectre typique à cette limite est présenté sur la figure 5.4.

Notons que, pour les symétries associées à  $\text{SU}(3)$ , le cas où le fermion occupe les orbites  $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$  est d'une importance particulière en *sdg*-IBFM. L'algèbre fermionique étant  $\text{U}^{\text{F}}(30) \supset \text{U}_k^{\text{F}}(15) \otimes \text{U}_s^{\text{F}}(2)$ , le couplage des degrés de liberté bosoniques et fermioniques peut également s'établir à une étape antérieure au niveau de  $\text{U}(15)$ . Les états de base seront étiquetés par les mêmes nombres quantiques figurant dans (5.51) plus ceux associés à  $\text{U}^{\text{BF}}(15)$ ,  $[N_1, N_2]$ , et excepté ceux

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

FIG. 5.4 – Un spectre typique ayant la symétrie dynamique  $SU_I^{\text{BF}}(3) \otimes U_s^{\text{F}}(2)$  correspondant à  $N = 1$ . Les états sont labellés par les nombres quantiques  $L$  (à gauche),  $J$  (à droite) et  $(\lambda, \mu)$  (en dessous). Les énergies sont en unité arbitraire.



appartenant à  $SU^{\text{B}}(3)$ ,  $(\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}})$ . Les représentations de  $SU^{\text{BF}}(3)$  contenues dans une représentation  $[N, 1]$  de  $U^{\text{BF}}(15)$  sont obtenues en soustrayant les représentations de  $SU(3)$  contenues dans la représentation symétriques  $[N + 1, 0]$  de  $U^{\text{BF}}(15)$  de toutes les représentations possibles de  $SU(3)$  obtenues à partir du produit de Kronecker  $(\lambda_{\text{B}}, \mu_{\text{B}}) \otimes (4, 0)$  calculé en utilisant (5.52), où  $(4, 0)$  est la représentation de  $SU^{\text{F}}(3)$  contenue dans la représentation  $[1]$  de  $U_k^{\text{F}}(15)$ . Pour ce qui est du hamiltonien, c'est l'opérateur de Casimir du second ordre de  $U^{\text{BF}}(15)$  qui va y intervenir en plus des autres termes dans l'équation (5.49). Seulement, dans ce cas, l'opérateur invariant

CHAPITRE 5 : Modèle *sdg*- des bosons en interaction couplé à un fermion

de  $SU^B(3)$  ne figure pas dans l'expression du hamiltonien. Nous écrivons

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SU_{II}(3)} &= E'_{03} + e_2 \hat{C}_2(U^{BF}(15)) + \delta' \hat{C}_2(SU^{BF}(3)) + \gamma \hat{C}_2(O^{BF}(3)) \\ &\quad + \gamma' \hat{C}_2(\text{Spin}^{BF}(3)). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Étant diagonal dans la base  $|N, [N_1, N_2], \chi, L, J\rangle$ , ses valeurs propres sont

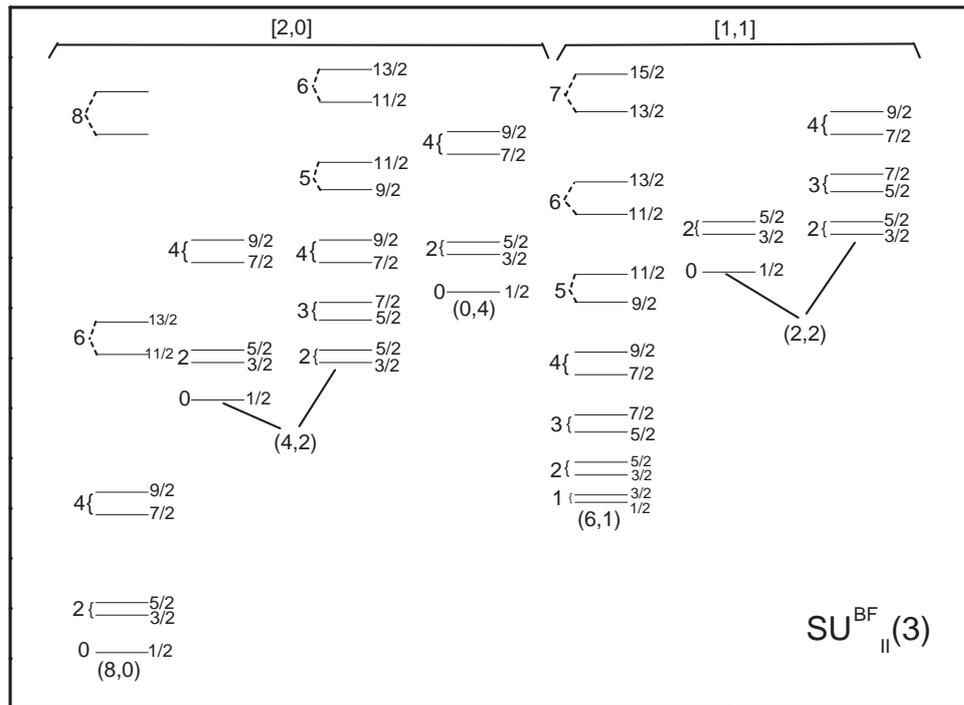
$$\begin{aligned} E(N, [N_1, N_2], \chi, L, J) &= E'_{03} + e_2 [N_1(N_1 + 14) + N_2(N_2 + 12)] + \delta' C(\lambda, \mu) \\ &\quad + \gamma L(L + 1) + \gamma' J(J + 1), \end{aligned} \quad (5.56)$$

avec  $C(\lambda, \mu)$  défini par l'équation (5.54). La symétrie ainsi obtenue va être notée  $SU_{II}^{BF}(3) \otimes U_s^F(2)$  et la première est dorénavant dénotée par  $SU_I^{BF}(3) \otimes U_s^F(2)$ . Il faut noter ici que l'opérateur  $\hat{C}_2(U^{BF}(15))$  peut être interprété, en analogie avec le modèle *sd*-IBM [140], comme étant associé à l'interaction d'échange dans le hamiltonien IBFM. Son rôle est également lié à l'ajustement de la position de la surface de Fermi dans le potentiel déformé.

Dans la référence [49], Devi et Kota ont montré que l'une et l'autre des symétries  $SU_{I,II}^{BF}(3) \otimes U_s^F(2)$  peuvent être appliquées aux noyaux ayant un nombre pair de neutrons ou de protons dans la couche 82–126. Cependant, seule la symétrie  $SU_I^{BF}(3)$  est appropriée aux noyaux de nombre impair de protons dans la couche 50 – 82 et aux noyaux de nombre impair de neutrons dans la couche 126 – 184. Un exemple d'application de  $SU_I^{BF}(3) \otimes U_s^F(2)$  est le noyau  $^{185}\text{W}$  [42]. Un choix judicieux des paramètres  $e_2$  et  $\delta'$  (une valeur négative pour le paramètre  $\delta'$  contre une faible valeur positive pour  $e_2$ ) permet alors de reproduire la position de la bande caractérisée par la représentation irréductible  $(4N + 2, 1)$  qui se situe à basse énergie par rapport à celle caractérisée par  $(4N + 4, 0)$ . Le spectre d'énergie ainsi obtenu a été confronté à celui obtenu par la limite  $U^B(6) \otimes U^F(12)$ - $SU^{BF}(3)$  en *sd*-IBFM. L'élargissement de l'espace du modèle *sd*-IBM par l'introduction du boson *g* permet de considérer, dans l'espace du fermion célibataire, les deux orbites  $h_{9/2}$  et  $f_{7/2}$  (en plus de  $f_{5/2}$ ,  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ ) qui ont été par ailleurs prédites par le modèle de Nilsson qui leur associe des amplitudes non nulles. Dans la référence [42], on a montré, en comparant les amplitudes des états simple particule aux limites  $SU(3)$  des deux modèles *sd*- et *sdg*-IBM à celles obtenues par le modèle de Nilsson pour le noyau  $^{185}\text{W}$ , que le boson *g* a très peu d'influence sur la bande fondamentale qui est bien reproduite par le modèle *sd*-IBFM. Par contre, son rôle s'avère important en ce qui concerne la description des bandes excitées se situant à 1 – 2 MéV de la bande fondamentale.

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

FIG. 5.5 – Spectre d'énergie calculé à la limite  $SU_{II}^{BF}(3) \otimes U^F(2)$  du *sdg*-IBFM pour  $N = 1$ . Les états sont étiquetés par les nombres quantiques  $L$  (à gauche),  $J$  (à droite) et  $(\lambda, \mu)$  (en dessous). Les nombres quantiques figurant en haut de la figure sont  $[N_1, N_2]$  associés à  $U^{BF}(15)$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



### 5.5.4 Symétries associées à $SU^{BF}(6)$

Nous discutons ici les deux cas correspondant respectivement au couplage d'un cœur ayant la symétrie  $SU^B(6)$  du *sdg*-IBM couplé à un nucléon occupant l'orbite  $j = 5/2$  ou la couche  $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$ . Les deux symétries de Bose-Fermi qui en ressortent seront appelées respectivement  $SU_I^{BF}(6)$  et  $SU_{II}^{BF}(6)$ .

#### Symétrie $SU_I^{BF}(6)$

La chaîne de sous-algèbres correspondante est

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(15) & & \otimes & & U^F(6) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 SU^B(6) & & & & SU^F(6) \\
 \downarrow \quad \searrow & & & & \swarrow \quad \downarrow \\
 Sp^B(6) & & SU^{BF}(6) & & Sp^F(6) \\
 \downarrow \quad \searrow & & \downarrow & & \swarrow \quad \downarrow \\
 O^B(3) & & Sp^{BF}(6) & & SU^F(2) \\
 & & \downarrow & & \\
 & & Spin^{BF}(3) & & 
 \end{array} \tag{5.57}$$

Contrairement à toutes les symétries étudiées jusque là, la symétrie  $SU_I^{BF}(6)$  est de type BF-1. Les 36 générateurs engendrant l'algèbre  $U^F(6)$  s'écrivent simplement

$$A_{\mu}^{(\lambda)}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(\lambda)}, \tag{5.58}$$

avec  $\lambda = 0, \dots, 5$ . Les générateurs de  $SU^F(6)$  sont alors obtenus à partir de (5.58) en omettant celui correspondant à  $\lambda = 0$ . Ceux de  $Sp^F(6)$  correspondent à  $\lambda = 1, 3, 5$ . Finalement, les trois générateurs de  $SU^F(2)$  sont associés à  $\lambda = 1$ . Les algèbres de Bose-Fermi sont obtenues en sommant les générateurs bosoniques, donnés par l'équation (2.27) et les générateurs fermioniques et s'écrivent

$$\begin{aligned}
 G_{\mu, BF}^{(5)} &= \hat{P}_{\mu, B}^{(5)} + \alpha_1 [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(5)}, \\
 G_{\mu, BF}^{(4)} &= \hat{P}_{\mu, B}^{(4)} + \alpha_2 [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(4)}, \\
 G_{\mu, BF}^{(3)} &= \hat{P}_{\mu, B}^{(3)} + \alpha_3 [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(3)}, \\
 G_{\mu, BF}^{(2)} &= \hat{P}_{\mu, B}^{(2)} + \alpha_4 [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(2)}, \\
 G_{\mu, BF}^{(1)} &= \hat{P}_{\mu, B}^{(1)} + \alpha_5 [a_{5/2}^{\dagger} \times \tilde{a}_{5/2}]_{\mu}^{(1)}.
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

Le hamiltonien associé à cette limite s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SU}^{\text{BF}}(6)} &= E_{04} + e_6 \hat{C}_2(\text{SU}^{\text{B}}(6)) + e_7 \hat{C}_2(\text{SU}^{\text{BF}}(6)) + e_8 \hat{C}_2(\text{Sp}^{\text{BF}}(6)) \\ &\quad + \gamma' \hat{C}_2(\text{Spin}^{\text{BF}}(3)), \end{aligned} \quad (5.60)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{C}_2(\text{SU}^{\text{BF}}(6)) &= \sum_{\lambda=1}^5 G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)} \cdot G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)}, \\ \hat{C}_2(\text{Sp}^{\text{BF}}(6)) &= 2 \sum_{\lambda=1,3,5} G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)} \cdot G_{\mu, \text{BF}}^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Les états propres au hamiltonien (5.60) s'écrivent

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \text{U}^{\text{B}}(15) & \otimes & \text{U}^{\text{F}}(6) & \supset & \text{SU}^{\text{B}}(6) & \otimes & \text{SU}^{\text{F}}(6) \supset \text{SU}^{\text{BF}}(6) \supset \\ \left[ \begin{array}{ccc} [N] & \{1\} & (n'_1, \dots, n'_5) \\ \text{Sp}^{\text{BF}}(6) \supset \text{Spin}^{\text{BF}}(3) \end{array} \right. & & & & & & \left. (n_1, \dots, n_5) \right\}. \\ \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle & & & & & & J \end{array} \right\}. \quad (5.62)$$

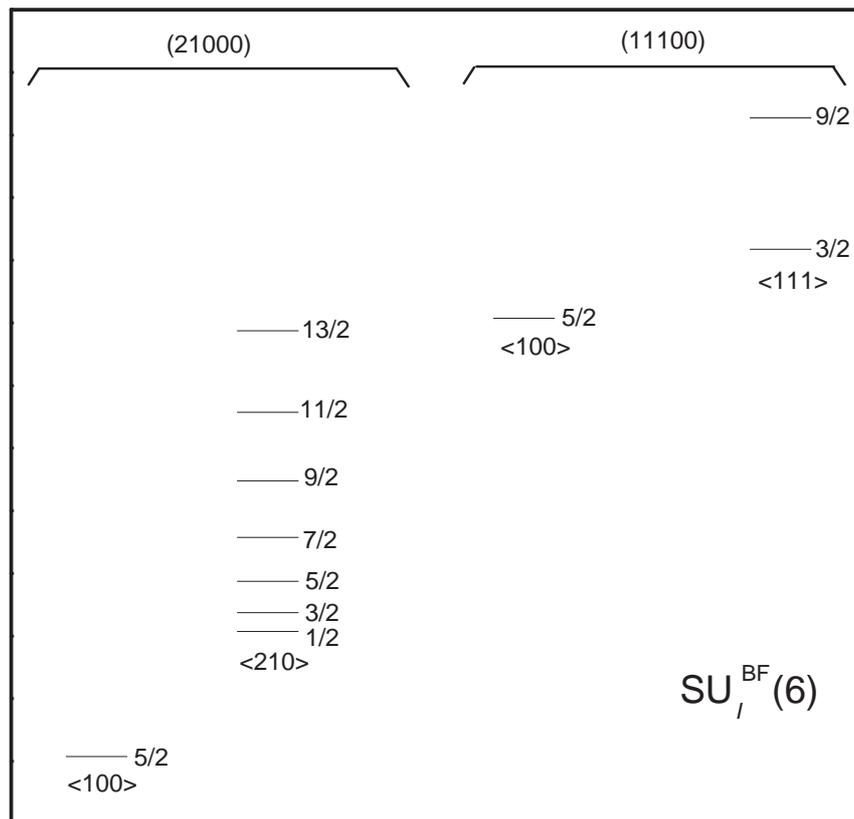
Les valeurs de  $(n'_1, \dots, n'_5)$  contenues dans la représentation symétrique  $[N]$  de  $\text{U}^{\text{B}}(15)$  ont été données dans le chapitre 2 par l'équation (2.52). Les représentations irréductibles de  $\text{SU}^{\text{BF}}(6)$  sont obtenues à partir du produit direct des représentations de  $\text{SU}^{\text{B}}(6)$  et  $\text{SU}^{\text{F}}(6)$

$$\begin{aligned} (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) &= (n'_1, n'_2, n'_3, n'_4, n'_5) \otimes (1, 0, 0, 0, 0) \\ &= (n'_1 + 1, n'_2, n'_3, n'_4, n'_5) \oplus (n'_1, n'_2 + 1, n'_3, n'_4, n'_5) \oplus \dots \end{aligned} \quad (5.63)$$

avec  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq n_5$ . Les valeurs propres du hamiltonien (5.60) sont

$$\begin{aligned} &E(N, (n'_1, \dots, n'_5), (n_1, \dots, n_5), \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle, L, J) \\ &= E_{04} + e_6 \sum_{i=1}^5 (n'_i - \frac{\sum n'_i}{6})(n'_i - \frac{\sum n'_i}{6} + 12 - 2i) \\ &\quad + e_7 \sum_{i=1}^5 (n_i - \frac{\sum n_i}{6})(n_i - \frac{\sum n_i}{6} + 12 - 2i) \\ &\quad + e_8 [\lambda_1(\lambda_1 + 6) + \lambda_2(\lambda_2 + 4) + \lambda_3(\lambda_3 + 2)] + \gamma' J(J + 1). \end{aligned} \quad (5.64)$$

FIG. 5.6 – Un spectre d'énergie calculé à la limite  $SU_I^{BF}(6)$  du modèle *sdg*-IBFM pour  $N = 1$ . Les états d'énergie sont étiquetés par le nombre quantique  $J$  (à droite) et par  $\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$  (en dessous). Les nombres quantiques figurant en haut de la figure représentent ceux caractérisant les représentations irréductibles de  $SU^{BF}(6)$ . Les énergies sont en unité arbitraire.



**Symétrie**  $SU_{II}^{\text{BF}}(6)$ 

La chaîne de sous-algèbres dans ce cas s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
 U^{\text{B}}(15) & & \otimes & & U^{\text{F}}(30) & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \downarrow & \searrow & & & U_k^{\text{F}}(15) & \otimes & U_s^{\text{F}}(2) \\
 \downarrow & & & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 SU^{\text{B}}(6) & & U^{\text{BF}}(15) & & SU_k^{\text{F}}(6) & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 Sp^{\text{B}}(6) & & SU^{\text{BF}}(6) & & Sp_k^{\text{F}}(6) & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 O^{\text{B}}(3) & & Sp^{\text{BF}}(6) & & O_k^{\text{F}}(3) & & \downarrow \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \downarrow \\
 & & O^{\text{BF}}(3) & & & & SU_s^{\text{F}}(2) \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & & Spin^{\text{BF}}(3) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & Spin^{\text{BF}}(2) & & 
 \end{array} \tag{5.65}$$

La structure algébrique de la chaîne (5.65) est différente de celle associée à la limite  $SU_I^{\text{BF}}(6)$  car ici on a affaire à une symétrie de type BF-2 et les algèbres bosoniques et fermioniques se joignent au niveau de  $U(15)$ . Les générateurs de Bose-Fermi sont des sommes des générateurs bosoniques et fermioniques. Ces derniers sont obtenus à partir de l'équation (5.10) et sont donnés explicitement dans le tableau 5.1.

Le hamiltonien ayant la symétrie  $SU_{II}^{\text{BF}}(6)$  s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{SU_{II}^{\text{BF}}(6)} = & E'_{04} + e_2 \hat{C}_2(U^{\text{BF}}(15)) + e_7 \hat{C}_2(SU^{\text{BF}}(6)) + e_8 \hat{C}_2(Sp^{\text{BF}}(6)) \\
 & + \gamma \hat{C}_2(O^{\text{BF}}(3)) + \gamma' \hat{C}_2(Spin^{\text{BF}}(3)), \tag{5.66}
 \end{aligned}$$

et ses vecteurs propres s'écrivent

$$\left. \begin{array}{l}
 U^{\text{B}}(15) \otimes U^{\text{F}}(30) \supset U^{\text{B}}(15) \otimes U_k^{\text{F}}(15) \otimes U_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N] \quad \quad \quad \{1\} \quad \quad \quad [1] \\
 U^{\text{BF}}(15) \otimes U_s^{\text{F}}(2) \supset SU^{\text{BF}}(6) \otimes U_s^{\text{F}}(2) \supset Sp^{\text{BF}}(6) \otimes U_s^{\text{F}}(2) \supset \\
 [N_1, N_2] \quad \quad \quad (n_1, \dots, n_5) \quad \quad \quad \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle \\
 O^{\text{BF}}(3) \otimes SU_s^{\text{F}}(2) \supset Spin^{\text{BF}}(3) \\
 n_{\Delta}, L \quad \quad S = 1/2 \quad \quad J
 \end{array} \right\} \tag{5.67}$$

TAB. 5.6 – Les valeurs de quelques représentations  $(n_1, \dots, n_5)$  de  $SU^{\text{BF}}(6)$  contenues dans des représentations  $[N, 1]$  de  $U^{\text{BF}}(15)$ 

$[N, 1]$	$(n_1 n_2 n_3 n_4 n_5)$
$[1, 1]$	(21100)
$[2, 1]$	(32100), (2211), (21111)
$[3, 1]$	(43100), (33110), (3221), (32111), (22211), (11000)
$[4, 1]$	(54100), (44110), (43210), (43111), (33220) <sup>2</sup> , (33211), (32221), (22110), (21111), (00000)
$[5, 1]$	(65100), (55110), (54210), (54111), (44211), (44221), (44220), (43320) (43221), (33330), (33321), (32100), (22110), (21111)

où  $[N_1, N_2]$  prennent les valeurs  $[N + 1, 0]$  ou  $[N, 1]$ . La décomposition des représentations symétriques de  $U(15)$  en celles de  $SU(6)$  étant déjà connues, nous pouvons déterminer les représentations de  $SU^{\text{BF}}(6)$  contenues dans une représentation  $[N, 1]$  de  $U^{\text{BF}}(15)$  en utilisant les produits de Kronecker correspondant aux algèbres unitaires. Quelques décompositions de  $[N_1, N_2]$  vers  $(n_1, \dots, n_5)$  sont données dans le tableau 5.6. Les autres réductions dans (5.67) ont été traitées au cours de la section précédente. L'expression de l'énergie à cette limite est

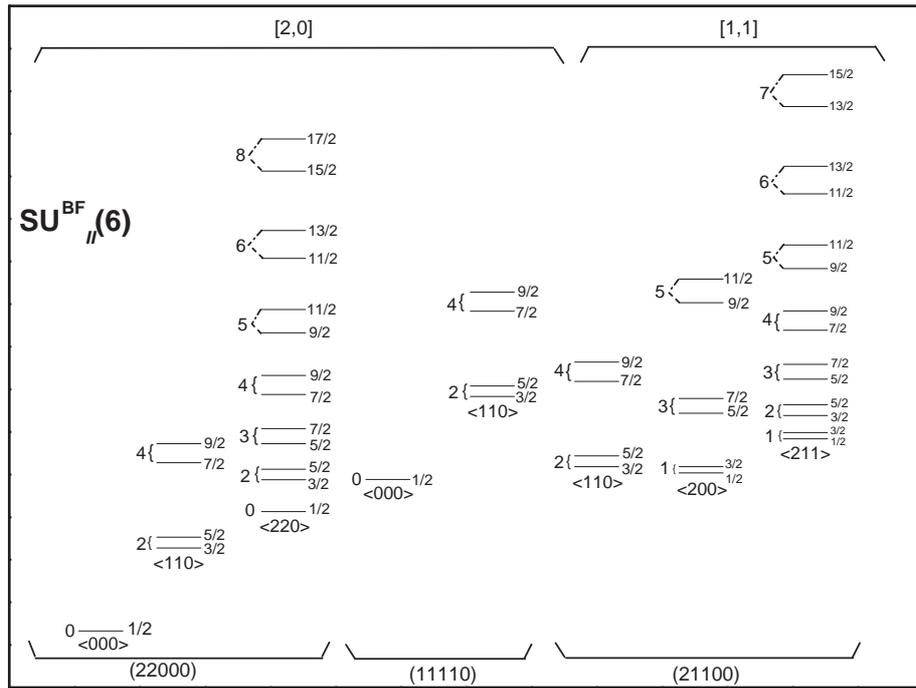
$$\begin{aligned}
 E(N, [N_1, N_2], (n_1, \dots, n_5), \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle, L, J) \\
 = E'_{04} + e_1[N_1(N_1 + 14) + N_2(N_2 + 12)] \\
 + e_7 \sum_{i=1}^5 (n_i - \frac{\sum n_i}{6})(n_i - \frac{\sum n_i}{6} + 12 - 2i) \\
 + e_8[\lambda_1(\lambda_1 + 6) + \lambda_2(\lambda_2 + 4) + \lambda_3(\lambda_3 + 2) + \gamma L(L + 1) + \gamma' J(J + 1)].
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

Un spectre d'énergie typique ayant la symétrie  $SU_{II}^{\text{BF}}(6)$  est présenté sur la figure 5.7.

Finalement, l'étude des symétries associées aux limites de couplage faible  $U^{\text{BF}}(14) \otimes U^{\text{F}}(2)$  et  $U^{\text{BF}}(6) \otimes U^{\text{BF}}(9) \otimes U^{\text{F}}(2)$  suit une démarche très proche de celle développée dans la référence [141] en ce qui concerne les symétries associées à  $U^{\text{BF}}(5) \otimes U^{\text{F}}(2)$  et ne nous ne la détailleront pas donc ici. Cependant, on note que les règles de branchement correspondant aux deux symétries ont été dans leur majorité citées dans les sections précédentes.

## 5.5 Symétries dynamiques en *sdg*-IBFM

FIG. 5.7 – Un spectre d'énergie calculé à la limite  $SU_{II}^{BF}(6)$  du modèle *sdg*-IBFM pour  $N = 1$ . Les états d'énergie sont étiquetés par le nombre quantique  $L$  (à gauche), par  $J$  (à droite) et par  $\langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$  (en dessous). Les nombres quantiques figurant en haut et en bas de la figure représentent ceux caractérisant les représentations irréductibles de  $U^{BF}(15)$  et  $SU^{BF}(6)$  respectivement. Les énergies sont en unité arbitraire.



# Conclusion

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude des propriétés structurales du noyau atomique dans le contexte du modèle des bosons en interaction. Précisément, nous nous sommes intéressés à la déformation nucléaire de caractère hexadécapolaire en considérant les trois types de bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$ .

Nous avons, dans un premier temps, porté notre intérêt aux noyaux pair-pairs auxquels s'applique le modèle  $sdg$ -IBM. Nous avons tout d'abord développé les expressions analytiques correspondant aux éléments de matrice réduits de l'opérateur de transitions monopolaires. Mais alors, parmi les six limites du modèle, nous n'avons considéré que les symétries dynamiques  $U(5) \otimes U(9)$  et  $SU(3)$  décrivant respectivement les noyaux sphériques et de déformation axiale. Ce choix est d'une part soutenu par l'intérêt de ces deux configurations en particulier pour nos applications ultérieures (chapitre 3) et d'autre part par le fait d'avoir à notre disposition le bagage mathématique nécessaire à l'établissement de telles dérivations (coefficients de Clebsch et Gordan et facteurs isoscalaires). En outre, le calcul des amplitudes des composantes des bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$  dans les fonctions d'onde correspondant aux limites de couplage fort nous a renseigné sur la contribution de chacun d'entre eux aux états nucléaires à chaque limite ainsi que sur l'étendu du champ d'application de chacune d'entre elles. Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion que la limite  $SU(5)$  peut avoir une application dans les noyaux de déformation hexadécapolaire importante du fait que le boson  $g$  possède ici la composante la plus importante à l'état fondamental. On est également arrivé à conclure sur le fait que les deux limites  $O(15)$  et  $SU(6)$  peuvent être appliquées à des noyaux  $\gamma$ -instables dont la déformation hexadécapolaire est considérable.

Le troisième chapitre porte en lui un intérêt triple car il a traité à la fois trois points importants pour la compréhension des transitions  $E0$  avec toute l'information qu'elles peuvent fournir quant à la structure et en particulier la forme du noyau.

- La connexion à la déformation nucléaire a été mise en évidence à travers une relation consistante liant les transitions  $E0$  aux rayons nucléaires dont la varia-

tion implique directement un changement de la forme du noyau. Cette relation est indépendante de tout modèle, valable pour toutes les régions de masse et construite sous la simple hypothèse de considérer les mêmes charges effectives dans les opérateurs décrivant les deux observables respectives.

- Une analyse systématique qui a été menée à travers les noyaux pair-pairs dans la région des terres rares ( $Z \sim 58 - 74$ ) a pu à la fois confirmer la robustesse de la corrélation ci-dessus mentionnée et offrir une interprétation alternative au comportement des transitions monopolaires. En effet, outre le mélange de configurations, les vibrations  $\beta$  peuvent également donner lieu à de fortes transitions  $E0$ . Cette étude a bien réussi à reproduire les données expérimentales dans la majeure partie des noyaux considérés sans avoir besoin de considérer un quelconque mélange ou coexistence de formes.
- En dépit de son succès, cette approche a échoué tout de même à décrire les isotopes  $^{172}\text{Yb}$ ,  $^{182-184}\text{W}$ . En ce qui concerne l'ytterbium, cette discordance peut être liée au fait que les transitions  $E0$  mesurées ne soient pas produites par la bande  $\beta$ -vibrationnelle. Pour les deux isotopes du tungstène, le rôle de la déformation hexadécapolaire est loin d'être négligeable et on a pu montrer que ce degré de liberté bien qu'il a une faible influence sur les rayons nucléaires, peut avoir un effet important sur les transitions monopolaires.

Nous avons également proposé d'étudier les formes géométriques associées aux différentes symétries dynamiques du modèle  $sdg$ -IBM en tirant profit de l'avantage des groupes de Lie de pouvoir être en outre associés de structure topologique. La démarche à suivre était alors de construire la limite classique du hamiltonien général du modèle. Mais avant cela, il nous a fallu paramétriser les états cohérents dans l'espace engendré par les trois types de bosons  $s$ ,  $d$  et  $g$ . Nous avons donc choisi de considérer le cas le plus général dans lequel toutes les orientations possibles du noyau sont tenues en considération. En minimisant le hamiltonien correspondant à chacune des symétries du modèle par rapport aux paramètres de déformations nous sommes arrivés à conclure sur le fait que les deux limites  $U(14)$  et  $U(5) \otimes U(9)$  correspondent à des formes sphériques, que les noyaux décrits par les deux limites  $SU(6)$  et  $O(15)$  sont  $\gamma$ -instables et que les limites  $SU(5)$  et  $SU(3)$  sont bel et bien associées à des déformations axiales du noyau. Cette étude peut éventuellement être utilisée pour déterminer l'espace de phases en ce qui concerne les noyaux où la déformation hexadécapolaire est importante.

Finalement, nous avons développé une extension du modèle  $sdg$ -IBM aux noyaux de masses impaires. Le noyau a été ainsi considéré comme un cœur pair-pair décrit par l'une des symétries dynamiques du modèle  $sdg$ -IBM couplé à un proton

ou un neutron célibataire pouvant s'installer sur une couche de moment angulaire  $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ . Le système possède ainsi la symétrie de l'algèbre de Bose-Fermi  $U^B(15) \otimes U^F(n)$ . Nous avons en particulier construit le schéma de classification des représentations irréductibles à chacune des limites de couplage fort et de couplage faible. Nous avons par la suite déterminé le hamiltonien correspondant à ces différentes symétries dynamiques et déduit le spectre d'énergie qui lui est associé.



# Bibliographie

- [1] A. Bohr and B. R. Mottelson. *Nuclear Structure . II Nuclear Deformations*. Benjamin : New York, 1975.
- [2] A. de Shalit and I. Talmi. *Nuclear Shell Theory*. Academic Press, 1963.
- [3] J. P. Elliott. *Proc. Roy. Soc.*, **A218** :345, 1953.
- [4] A. Arima and F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **35** :1069, 1975.
- [5] F. Iachello (Editeur). *Interacting bosons in nuclear physics*. (New York : Plenum), 1979.
- [6] F. Iachello (Editeur). *Interacting Bose-Fermi systems in nuclei*. (New York : Plenum), 1981.
- [7] F. Iachello and A. Arima. *Phys. Lett.*, **B53** :309, 1974.
- [8] A. de Shalit and H. Feshbach. *Theoretical Nuclear Physics, Vol. I*. Wiley, New York), 1974.
- [9] A. K. Kerman. *Ann. Phys.*, **12** :300, 1961.
- [10] I. Talmi. Collective bands in nuclei. In *Progress in Particle and Nuclear Physics*, volume **9**, 1983.
- [11] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, and I. Talmi. *Phys. Lett.*, **66B** :205, 1977.
- [12] G. Gneus and W. Greiner. *Nucl. Phys. A*, **171** :449, 1971.
- [13] J. P. Elliott. *Proc. R. Soc. London*, **245** :128, 1958.
- [14] B. G. Wybourne. *Classical Groups for Physicists*. Wiley, New York, 1974.
- [15] A. Arima and F. Iachello. *Ann. Phys.*, **99** :253, 1976.
- [16] A. Arima and F. Iachello. *Ann. Phys.*, **111** :201, 1978.

- [17] J. D. Vergados. *Nucl. Phys. A*, **111** :681, 1968.
- [18] A. Arima and F. Iachello. *Ann. Phys.*, **123** :468, 1979.
- [19] F. Iachello and A. Arima. *The Interacting Boson Model*. Cambridge University Press : Cambridge, 1987.
- [20] A. Frank and P. Van Isacker. *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics*. Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [21] D. N. Brink, A. F. R. Toledo Piza, and A. K. Kerman. *Phys. Lett.*, **19** :413, 1965.
- [22] A. S. Davidov and G. F. Filippov. *Nucl. Phys.*, **8** :237, 1958.
- [23] J. Vojta and M. Jean. *Phys. Rev*, **102** :788, 1956.
- [24] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson. *Phys. Rev. Lett.*, **44** :1744, 1980.
- [25] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, and F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **44** :1747, 1980.
- [26] A. Bohr and B. R. Mottelson. *Phys. Scr.*, **22** :468, 1980.
- [27] R. Gilmore and D. H. Feng. *Phys. Lett. B*, **76** :26, 1978.
- [28] R. Gilmore and D. H. Feng. *Nucl. Phys. A*, **301** :189, 1978.
- [29] P. Van Isacker and Jin-Quan Chen. *Phys. Rev. C*, **24** :684, 1981.
- [30] D. G. Burke. *Phys. Rev. Lett.*, **73** :1899, 1994.
- [31] D. G. Burke, J. C. Waddington, and O. P. Jolly. *Nucl. Phys.*, **A688** :716, 2001.
- [32] P. Van Isacker, K. Heyde, M. Waroquier, and G. Wenes. *Phys. Lett.*, **B104** :5, 1981.
- [33] P. Van Isacker, K. Heyde, M. Waroquier, and G. Wenes. *Nucl. Phys.*, **A380** :383, 1982.
- [34] I. Y. Lee, J. X. Saladin, C. Baktash, J. E. Holden, and J. O'Brien. *Phys. Rev. Lett.*, **33** :383, 1974.
- [35] F. Todd Baker *et al.* *Nucl. Phys. A*, **258** :43, 1976.
- [36] F. Todd Baker. *Phys. Rev.*, **C32** :1430, 1985.

- [37] D. G. Burke, M. A. M. Shailabuddin, and R. N. Boyd. *Phys. Lett. B*, **78** :48, 1978.
- [38] P. B. Goldhoorn, M. N. Harakeh, Y. Iwazaki, L. W. Put, F. Zwarts, and P. Van Isacker. *Phys. Lett. B*, **103** :291, 1981.
- [39] H. Feshbach. *Interacting Bosons in Nuclear Physics*. F. Iachello (Plenum), 1979.
- [40] Sun Hong Zhou, M. Moshinsky, A. Frank, and P. Van Isacker. *Kinam*, **5** :135, 1983.
- [41] J. P. Elliott. *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A245** :562, 1958.
- [42] V. K. B. Kota. *Phys. Rev. C*, **33** :1228, 1986.
- [43] V. K. B. Kota, J. Van der Jeugt, H. De Meyer, and G. Vanden Berghe. *J. Math. Phys.*, **28** :1644, 1987.
- [44] B. G. Wybourne. *Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy*. Wiley-Interscience, New York, 1970.
- [45] P. Van Isacker, A. Frank, and Hong-Zhou Sun. *Ann. Phys.*, **157** :183, 1984.
- [46] V. Bargmann and M. Moshinsky. *Nucl. Phys.*, **23** :177, 1961.
- [47] R.D. Ratna Raju. *Phys. Rev.*, **C23** :518, 1981.
- [48] L.J.B. Goldfarb. *Phys. Lett. B*, **104** :103, 1982.
- [49] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *Pramana - J. Phys.*, **39** :413, 1992.
- [50] W.K.B. Kota. *Table of group representations for the six limiting symmetries in gIBM*. PRL Technical Note (1986), TN-86-54.
- [51] Y. Akiyama N. Yoshinaga and A. Arima. *Phys. Rev. Lett.*, **56** :1116, 1986.
- [52] H. C. Wu. *Phys. Lett. B*, **110** :1, 1982.
- [53] M. Suguna *et al.* *Pramana*, **17** :381, 1981.
- [54] Yu xin Liu. *Phys. Rev. C*, **58** :237, 1998.
- [55] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **17** :465, 1991.
- [56] G. L. Long, W. L. Zhang, H. Y. Ji, and J. F. Gao. *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **24** :2133, 1998.

- [57] F. Todd Baker, A. Sethi, V. Penumetcha, G. T. Emery, W. P. Jones, M. A. Grimm, and M. L. Whiten. *Phys. Rev. C*, **32** :2212, 1985.
- [58] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *Proc. Symp. Nucl. Phys. B*, **34** :47, 1991.
- [59] Y. D. Devi and W. K. B. Kota. *sdg-IBM description of  $E4$  Matrix elements in  $\gamma$ -unstable Pt-Os isotopes*. Physical Research Laboratory report (1992), PRL-TH-92/14.
- [60] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *Phys. Rev. C*, **48** :461, 1993.
- [61] H. C. Wu, A. E. L. Dieperink, O. Scholten, M. N. Harakeh, R. De Leo, M. Pignatelli, and I. Morisson. *Phys. Rev. C*, **38** :1638, 1988.
- [62] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *Phys. Rev. C*, **45** :2238, 1992.
- [63] H. C. Wu, A. E. L. Dieperink, and S. Pittel. *Phys. Rev. C*, **34** :703, 1986.
- [64] G. L. Long, J. Y. Zhang, and W. L. Zhang. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **31** :7821, 1998.
- [65] A. Bouldjedri, P. Van Isacker, and S. Zerguine. *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **31** :1329, 2005.
- [66] M. Vojta. *Rep. Prog. Phys.*, **66** :2069, 2003.
- [67] F. Iachello and N. V. Zamfir. *Phys. Rev. Lett.*, **92** :212501, 2004.
- [68] R. Gilmore. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. Wiley and Sons Inc. (NY), 1981.
- [69] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 1951.
- [70] F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **85** :3580, 2000.
- [71] F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **87** :052502, 2001.
- [72] F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **91** :132502, 2003.
- [73] P. O. Lipas, P. Toivonen, and D. D. Warner. *Phys. Lett. B*, **155** :295, 1985.
- [74] D. D. Warner and R. F. Casten. *Phys. Rev. C*, **28** :1798, 1983.
- [75] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson. *Phys. Rev. Lett.*, **44** :1744, 1980.

- [76] R. C. Barber, H. E. Duckworth, B. G. Hogg, J. D. Macdougall, W. McLatchie, and P. Van Rookhuyzen. *Phys. Rev. Lett.*, **12** :597, 1964.
- [77] O. Scholten. *The Interacting Boson Approximation Model and Applications*. PhD thesis, Michigan State University, 1980.
- [78] K. Heyde and R. A. Meyer. *Phys. Rev. C*, **37** :2170, 1988.
- [79] J. L. Wood, E. F. Zganjar, C. De Coster, and K. Heyde. *Nucl. Phys. A*, **651** :323, 1999.
- [80] P. von Brentano, V. Werner, R. F. Casten, C. Sholl, E. A. Mc Cutchen, R. Krucken, and J. Jolie. *Phys. Rev. Lett.*, **93** :152502, 2004.
- [81] E. A. Mc Cutchan, N. V. Zamfir, and R. F. Casten. *Phys. Rev. C*, **69** :064306, 2004.
- [82] O. Castaños, P. Federman, A. Frank, and S. Pittel. *Nucl. Phys. A*, **379** :61, 1982.
- [83] A. Gómez, O. Castaños, and A. Frank. *Nucl. Phys. A*, **589** :267, 1995.
- [84] J. E. Garcia-Ramos, J. M. Arias, J. Barca, and A. Frank. *Phys. Rev. C*, **68** :024307, 2003.
- [85] R. F. Casten. *Nucl. Phys. A*, **443** :1, 1985.
- [86] R. F. Casten, D. S. Brenner, and P. E. Haustein. *Phys. Rev. Lett*, **58** :658, 1987.
- [87] R. F. Casten. *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **34** :R285, 2007.
- [88] J. K. Tuli. *Nucl. Data Sheets*, **89** :641, 2000.
- [89] A. A. Sonzogni. *Nucl. Data Sheets*, **93** :599, 2001.
- [90] L. K. Peker and J. K.Tuli. *Nucl. Data Sheets*, **82** :187, 1997.
- [91] M. R. Bhat. *Nucl. Data Sheets*, **89** :797, 2000.
- [92] A. Artna-Cohen. *Nucl. Data Sheets*, **79** :1, 1996.
- [93] C. W. Reich and R. G. Helmer. *Nucl. Data Sheets*, **85**, 1998.
- [94] C. W. Reich. *Nucl. Data Sheets*, **99** :753, 2003.
- [95] R. G. Helmer. *Nucl. Data Sheets*, **101** :325, 2004.

- [96] C. W. Reich. *Nucl. Data Sheets*, **105** :557, 2005.
- [97] C. W. Reich. *Nucl. Data Sheets*, **108** :1807, 2007.
- [98] B. Singh. *Nucl. Data Sheets*, **93** :243, 2001.
- [99] E. N. Shurshikov. *Nucl. Data Sheets*, **67** :45, 1992.
- [100] V. S. Shirley. *Nucl. Data Sheets*, **71** :261, 1994.
- [101] C. M. Baglin. *Nucl. Data Sheets*, **96** :611, 2002.
- [102] B. Singh. *Nucl. Data Sheets*, **75** :199, 1995.
- [103] E. Browne and H. Junde. *Nucl. Data Sheets*, **87** :15, 1999.
- [104] N. V. Zamfir, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie. *Phys. Rev. C*, **66** :021304, 2002.
- [105] P. Cejnar and J. Jolie. *Phys. Rev. E*, **61** :6237, 2000.
- [106] D. A. Meyer *et al.* *Phys. Lett. B*, **638** :44, 2006.
- [107] D. A. Meyer *et al.* *Phys. Rev. C*, **74** :044309, 2006.
- [108] J. Kantele. *in Heavy Ions and Nuclear Structure, Proc. of the XIV Summer School, Mikolajki*. B. Sikora and Z. Wilhelmi (Hrawood : New York), 1984.
- [109] E. L. Church and J. Weneser. *Phys. Rev.*, **103** :1035, 1956.
- [110] A. S. Reiner. *Nucl. Phys.*, **27** :115, 1961.
- [111] S. Zerguine, P. Van Isacker, A. Bouldjedri, and S. Heinze. *Phys. Rev. Lett.*, **101** :022502, 2008.
- [112] A. Bohr and B. R. Mottelson. *Nuclear Structure. I Single-Particle Motion*. Benjamin : New York, 1969.
- [113] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson. *Nucl. Phys. A*, **350** :31, 1980.
- [114] S. Zerguine *et al.* (*to be published*).
- [115] I. Angeli. *At. Data Nucl. Data Tables*, **87** :185, 2004.
- [116] B. Cheal *et al.* *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.*, **29** :2479, 2003.
- [117] E. Otten. *in Treatise on Heavy-Ion Science*. D. A. Bromley, Vol. 8 (Plenum : New York), 1989.

- [118] J. Frick *et al.* *At. Data Nucl. Data Tables*, **60** :177, 1995.
- [119] W. G. Jin. *Phys. Rev. A*, **49** :762, 1994.
- [120] G. M. Kalvius and G. K. Shenoy. *At. Data Nucl. Data Tables*, **14** :639, 1974.
- [121] D. B. Laubacher *et al.* *Phys. Rev. C*, **27** :1772, 1983.
- [122] T. Kibedi and R. H. Spear. *At. Data Nucl. Data Tables*, **89** :77, 2005.
- [123] K. Wimmer *et al.* arXiv :0802.2514[nucl-ex].
- [124] W. D. Kulp *et al.* arXiv :0706.4129[nucl-ex].
- [125] J. B. Gupta. *Phys. Rev. C*, **47** :1489, 1993.
- [126] Y. Oktem, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and D. S. Brenner. *Phys. Rev. C*, **74** :027304, 2006.
- [127] Y. D. Devi and V. K. B. Kota. *Z. Phys. A. - Atomic Nuclei*, **337** :15, 1990.
- [128] S. Heinze. Programme `ArbModel`, Université de Koln (unpublished).
- [129] W. Nazarewicz and P. Rozmej. *Nucl. Phys. A*, **369** :396, 1981.
- [130] S. G. Rohoziński and A. Sobiczewski. *Acta. Phys. Pol. B*, **12** :1001, 1981.
- [131] S. G. Rohoziński. *Phys. Rev. C*, **56** :165, 1997.
- [132] F. Iachello and O. Scholten. *Phys. Rev. Lett.*, **43** :679, 1979.
- [133] F. Iachello. *Nucl. Phys. A*, **347** :51, 1980.
- [134] F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.*, **44** :772, 1980.
- [135] F. Iachello and S. Kuyucak. *Ann. Phys. (NY)*, **136** :19, 1981.
- [136] A. B. Balantekin, I. Bars, R. Bijker, and F. Iachello. *Phys. Rev. C*, **27** :1761, 1983.
- [137] R. Bijker and V. K. B. Kota. *Ann. Phys. (NY)*, **156** :110, 1984.
- [138] O. Scholten and A. E. L. Dieperink. *Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei*. Iachello ed., Plenum Press, New York, 1981.
- [139] V. K. B. Kota R. Bijker. *Ann. Phys.*, **187** :148, 1988.
- [140] O. Scholten and D. D. Warner. *Phys. Lett.*, **142B** :315, 1984.

- [141] F. Iachello and P. Van Isacker. *The Interacting Boson-Fermion Model*. Cambridge University Press, 1991.

# Abstract

This thesis concerns the study of hexadecapole properties in the atomic nuclei in the framework of the *sdg*-interacting boson model (*sdg*-IBM). We first study the configuration mixing in the *sdg*-IBM. Our aim was to determine the contribution of each type of the three bosons to the nuclear states. Particular emphasis was then given to electric monopole transitions. A consistent and general correlation between  $E0$  transitions and nuclear radii was established. To test its robustness, this relation was applied systematically to even-even isotopes in the rare earth region from Ce to W at first in the context of the *sd*-IBM then by introducing the  $g$  boson. This study has shown that the effect of the hexadecapole deformation, although small on nuclear radii, is important on  $E0$  transitions. Moreover, the study of the geometric shapes associated with each of the dynamical symmetries of the *sdg*-IBM model has shown that they correspond two by two to the three limits of the *sd*-IBM. The development of the classical limit of the most general *sdg*-IBM hamiltonian is a good prospect for establishing the phase diagram of the model. Finally, an extension of the *sdg*-IBM model to the odd mass nuclei was also developed. The  $U^B(15) \otimes U^F(n)$  algebra was constructed. This algebra exhibits a very rich sub-structure given rise to a considerable amount of dynamical symmetries to the *sdg*-IBFM model.