

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Faculté des Sciences de L'ingénieur
Université El-Hadj Lakhdar- Batna



Département d'Electronique

Mémoire
**Présenté en Vue de L'obtention du Diplôme
De Magister En Electronique
Option: Robotique**

Par :
Nacer Hamadi
*Ingénieur d'Etat en Electronique
de l'Université de Batna*

Thème
**Modélisation d'un Véhicule
En Présence des Forces de Contact Roues/Sol**

Soutenu le :30/04/2009/ devant le jury composé de

Président	Dr. Slimane Nouredine	Maitre de conférences	Université de Batna
Rapporteur	Dr. Djamel Eddine Ameddah	Maitre de conférences	Université de Batna
Examineur	Dr. Chawki Mahfoudi	Maitre de conférences	Université d'Oum el Bouaghi
Examineur	Dr. Ahmed Louchene	Maitre de conférences	Université de Batna
Examineur	Dr. Assas Mekki	Maitre de conférences	Université de Batna

Modélisation d'un Véhicule En Présence des Forces de Contact Roues/Sol

Remerciements

Cette page est pour tous ceux qui ont contribué, de près et de loin, à la réalisation de l'ensemble des travaux de ce mémoire exposés ici.

Mes remerciements vont en premier lieu à **Djamel-Eddine Ameddah**, qui a suivi au quotidien l'avancée de mon travail. Sa disponibilité, ses conseils avisés, la pertinence de ses idées tout comme son goût communicatif et sa gentillesse ont été un soutien permanent.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers **Slimane Noureddine**, d'avoir accepté la présidence du jury, et envers **Chawki Mahfoudi** de l'université de **Oum El Bouaghi** d'avoir accepté de venir participer au jury, Merci également à **Louchen Ahmed** pour avoir accepté le rôle d'examineur ; merci aussi à **Assas Mekki** pour sa participation au jury.

C'est également ici pour moi l'occasion de remercier tous les enseignants, qui ont contribué à notre formation, aussi il m'est agréable de pouvoir exprimer ma sympathie à mes collègues : Fourar, Khemisti, Bouchouar, Azoui, Ghannem, Benchaloui et Alia de la promotion pour leurs encouragements et leur soutien moral pendant notre formation DEA.

Finalement, je tiens à remercier l'ensemble de ma famille pour son soutien durant cette formation, et Je tiens à remercier plus particulièrement mes parents, qui ont su sans cesse m'encourager (et parfois, dans les moments difficiles, me supporter) .

*à mes parents,
à mes frères et sœurs,
à ma femme et à mes deux petites enfants Aleâ et taha ,
à mes amis,
Je dédie ce mémoire.*

Table des figures

Figure	Description	page
1.1	Sous-système de l'automobile	5
1.2	Suspension Automobile "Mac-Pherson"	6
1.3	Convention de système d'axes du véhicule	9
1.4	Définition des forces et moments d'un véhicule	10
1.5	Angles de direction	13
1.6	Le modèle bicyclette	14
1.7	Le modèle en lacet d'Ackerman	15
1.8	Modèle bicyclette d'Ackerman	15
1.9	Représentation du modèle bicyclette à vitesse élevée	17
1.10	Comportement du pneu	18
1.11	Modèle à 2ddl pour le tangage et le pompage	20
2.1	Structures arborescentes ou bouclées	25
2.2	Description des différents types de structures de chaînes articulées	26
2.3	Articulations élémentaires prismatique ou rotoïde	27
2.4	Paramètres de Denavit-Hartenberg	29
2.5	Placement respectifs des repères \mathcal{R}_n et du point O_{n+1}	30
2.6	Définition des paramètres suivant <i>khalil-Kleinfinger</i>	32
2.7	Paramétrage par les angles d'Euler	34
2.8	Paramétrages par les angles Roulis-Tangage-Lacet	35
2.9	Représentation d'une contrainte holonomique	46
2.10	Contrainte non holonomique	47
3.1	Mécanisme à chaîne cinématique fermée	51
3.2	Définition des repères	51
3.3	Représentation arborescente du mécanisme	52
3.4	Monopède	64
3.5	structure arborescente du monopède	65
3.6	Structure dynamique d'un robot mobile à 2D	69
3.7	Représentation arborescente d'un robot mobile à 2D	69
4.1	Représentation fonctionnelle du véhicule	77
4.2	Structure dynamique simplifiée du véhicule	79
4.3	Définition des repères du mécanisme	81
4.4	Représentation arborescente du mécanisme de véhicule en 3D	82
4.5	Illustration des composantes dynamiques d'un pneu	91

Liste des symboles

F_T	Force du moteur du véhicule
$F_{aéro}$	Forces aérodynamiques
F_{rlt}	Forces de résistance au roulement
m	Masse du véhicule
g	Accélération de la pesanteur
ψ_x	Angle d'inclinaison du véhicule par rapport à la chaussée selon l'axe x
C_x	Coefficients adimensionnels de traînée
C_y	Coefficients adimensionnels de force latérale
C_z	Coefficients adimensionnels de portance
C_l	Coefficients adimensionnels de moment de roulis
C_m	Coefficients adimensionnels de moment de tangage
C_n	Coefficients adimensionnels de moment de lacet
S	la surface frontale du véhicule
L	L'empattement du véhicule
ρ	La densité de l'air
V	La vitesse relative du véhicule par rapport à l'air
W	Le poids du véhicule
f	Le coefficient de résistance au roulement
β_d	Angles de braquage de la roue avant droite
β_g	Angles de braquage de la roue avant gauche
β_b	Angle de braquage en mode bicyclette
R	Rayon de CIR du train arrière
R_f	Rayon de CIR plus décalage du train arrière
h	Largeur du véhicule
R_{cg}	Rayon de courbure du centre de masse
L_1	demis-empattement avant
L_2	demis-empattement arrière
β_{cg}	Angle de braquage du centre de masse du véhicule
Δ	L'écart du t trajectoire du train arrière
α_r	Angle de dérive du train arrière
α_f	Angle de dérive du train avant
F_{yf}	Force latéral du train avant.
F_{yr}	Force latéral du train arrière.

C_{af}	Coefficient de rigidité de la force latérale du train avant (N/deg).
C_{ar}	Coefficient de rigidité de la force latérale du train arrière (N/deg).
m_s	Masse suspendue
z	Translation débattement du CG du véhicule
z_f	Translation de débattement du train avant du véhicule
z_r	Translation de rebondissement du train arrière du véhicule
k_f	Raideur de la suspension avant.
k_r	Raideur de la suspension arrière.
I_y	Moment d'inertie en tangage
\ddot{z}	Accélération de pompage.
$\ddot{\theta}_t$	Accélération angulaire en tangage
$\omega_{n,z}$	Pulsation propre du pompage
$\omega_{n,\theta}$	Pulsation propre du tangage
dx	La variable de déplacement selon l'axe x.
dy	La variable de déplacement selon l'axe y.
dz	La variable de déplacement selon l'axe z.
$R_{i-1,i}$	La matrice de rotation entre les repères R_{i-1} et R_i
$H_{i-1,i}$	La matrice homogène entre les corps C_{i-1} et C_i
α_{i-1}	Angle algébrique entre les axes z_{i-1} et z_i , mesuré autour de l'axe x_{i-1}
a_{i-1}	Distance arithmétique de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_{i-1} et L_i mesurée le long de l'axe x_{i-1}
θ_i	Angle algébrique entre les axes x_{i-1} et x_i , mesuré autour de l'axe z_i ;
r_i	Distance algébrique du point O_i à la perpendiculaire, mesurée le long de l'axe z_i .
R_ϕ	Matrice de rotation suivant les angles d'Euler
iH_j	Matrice de transformation homogène suivant Khalil-Kleinfinger
θ_j	Angle algébrique entre les axes x_i et x_j , mesuré autour de l'axe z_j
r_k	Distance algébrique, mesurée le long de l'axe z_k à partir du l'axe x_i ,
α_j	Angle algébrique entre les axes z_i et z_j , mesuré autour de l'axe x_i ;
d_j	Distance algébrique, mesurée le long de l'axe x_i entre les axes z_i et z_j .
γ_i	Angle spécial pour les embranchements entre l'axe x_i' et x_i autour du l'axe z_i .
ε_i	Distance spéciale pour les embranchements entre l'axe x_i' et x_i mesurée le long Du l'axe z_i
ψ	Angle de précession.

θ	Angle de nutation..
φ	Angle de rotation propre.
θ_r	Angle de roulis.
θ_t	Angles de tangage.
θ_l	Angle de lacet.
${}^o\Omega_{on}$	Vecteur vitesse de rotation du repère lié à OT
${}^o v_{on}$	Les coordonnées de vecteur vitesse linéaire liée à OT
${}^0 z_{i-1}$	Les composantes du l'axe z de l'articulation i-1 par rapport au point O du repère de base.
${}^{i-1}O_n$	les coordonnées cartésiennes de OT par rapport au joint i-1
$R_{0,i-1}$	La matrice de rotation du joint i-1 par rapport à la base
${}^0 J_T(q)$	La matrice Jacobienne de OT par rapport au repère de la base
$S({}^0\Omega_T)$	La matrice antisymétrique des vitesses de rotation
Ω_z	Composante de la vitesse de rotation par rapport au l'axe z
Ω_y	Composante de la vitesse de rotation par rapport au l'axe y
Ω_x	Composante de la vitesse de rotation par rapport au l'axe x
R_{0T}	La matrice de rotation de OT/ au repère de base
T_i	Energie cinétique d'un corps/ au repère de base
T	Energies cinétique global
Γ	Vecteur des forces généralisées aux articulations
q_i	Vecteur des variables articulaires
Q_{nc}	Vecteur de forces non conservatrices
V	Vecteur d'énergie potentielle
M	La matrice d'inertie du système
C	La matrice des effets centrifuges et de Coriolis
G	La matrice des effets de la gravité
Γ_e	les forces généralisées dues au contact appliquées sur les articulations
z_1, z_2, z_3 et z_4	Débattement des quatre suspensions
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4	Les angles de rotation des quatre roues autour de l'axe de fusée
β_1 et β_2	Les angles de braquage gauche et droite des roues directrices
F_{0i}	Vecteur de forces tri-axial exprimé dans le repère lié à la roue i dont l'origine est fixée au centre de l'aire de contact
$J_i^T(q)$	La jacobienne du vecteur $X_i(q)$ par rapport au vecteur de coordonnées articulaires q.
F_{ci}	Les forces de tractions longitudinales
ψ_x, ψ_y, ψ_z	Angles d'inclinaison du véhicule par rapport à la chaussée selon trois axes

Γ_{ri}	Le couple de résistance à la rotation de la roue
Γ_{si}	Effort de débattement de la suspension
Γ_{kf}	Effort de frottement des articulations qi
Γ_b	Couple de braquage des roues directrices
r_{ei}	Le rayon de roulement effectif moyen de la roue i
K_r et K_z	Les coefficients de raideur et d'amortissement de la suspension.

TABLE DES MATIERES

Remerciements

Table des figures	i
Liste des symboles	ii
Table des matières	vi
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Le système véhicule et ses constituants.....	4
1. Sous-systèmes de l'automobile	4
1.1 Châssis	5
1.2 Le train roulant	6
1.2.1 Suspension	6
1.2.2 Direction.....	7
1.2.3 Roues et pneus	7
1.2.4 Le sous-système de freinage	8
2. Mouvements et caractéristiques d'un système véhicule rigide	8
2.1 Systèmes d'axes du véhicule	9
2.2 Masses de système véhicule	9
2.3 Définition des Forces du véhicule dans le système inertiel	10
2.4 Loi du mouvement longitudinal	11
2.4.1 Forces et moments aérodynamiques	11
2.4.2 Forces de résistance au roulement	12
2.5 Loi du mouvement en lacet	13
2.5.1 Définition des Angles	13
2.5.2 Hypothèses	14
2.5.3 Mouvement en lacet à faible vitesse	14
2.5.4 Mouvement en lacet à vitesse élevée	17
2.6 Mouvement en tangage	19
3 Conclusion	23
Chapitre 2 : Techniques de modélisation SMA	24
1. Concepts et conventions des mécanismes	24
1.1 Structure articulée	24
1.2 Description des chaînes cinématiques	25
1.3 Structures arborescentes	25
1.3.1 Structures sérielles et arborescentes	26
1.3.2 Structures bouclées	26
1.4 Hypothèses de modélisation des articulations	27
2. Modélisation d'un système mécanique articulé	28
2.1 Modèle géométrique (MGD)	28
2.1.1 Notations de Denavit-Hartenberg	29
2.1.2 Notations de Khalil-Kleinfinger	31

2.1.3	Notations des matrices de passages	33
a)	Angles d'Euler classiques	33
b)	Angles roulis, tangage et lacet	35
2.2	Modèle cinématique	36
2.2.1	Méthode de la loi de composition des vitesses	36
a)	Calcul des vitesses angulaires	36
b)	Calcul des vitesses linéaires	37
c)	Calcul du Jacobien direct	37
2.2.2	Méthode différentielle ou de calcul direct	37
a)	Définition de la matrice Jacobienne J.....	37
b)	Calcul des vitesses linéaires	38
c)	Calcul des vitesses angulaires	39
2.3	Modèle dynamique	39
2.3.1	Propriétés dynamiques des corps	39
2.3.2	Méthode de Lagrange	40
a)	calcul l'énergie cinétique	40
b)	Calcul l'énergie potentielle	41
c)	Calcul des éléments pour modèle dynamique	41
2.3.3	Méthode de Newton-Euler itérative	42
2.4	Interaction des mécanismes avec un environnement indéformable	44
2.4.1	Modèles de contact	44
a)	Ressort – Amortisseur	44
b)	Contact roues-sol	45
c)	Autres modèles de contact	46
2.4.2	types de contraintes	46
a)	Contraintes holonomiques	46
b)	Contraintes non holonomiques	46
2.4.3	Modèle dynamique lors d'un contact	47
3	Conclusion	48
Chapitre 3 : Application aux structures arborescentes		49
1.	Application à une chaîne cinématique fermée	51
1.1	Description du mécanisme	51
1.2	Fichier de définition	52
1.3	Modèle géométrique	54
1.4	Modèle cinématique	56
1.5	Modèle dynamique	60
2.	Application aux Monopèdes	64
2.1	Description	64
2.2	Fichier de définition	65
2.3	Calcul du modèle géométrique direct	66

2.4 Calcul du modèle cinématique direct	67
2.5 Calcul du modèle dynamique	67
3. Application à un robot mobile à 2D.....	68
3.1 Fichier de définition	70
3.2 Résultats des modèles	71
4. Conclusion	74
Chapitre 4 : Modélisation d'un véhicule	75
1. Conception d'un simulateur du véhicule	76
2. Hypothèses de base	78
3. Principe de Calcul	80
3.1 Paramètres du véhicule en 3D	80
3.2 Fichier de définition	83
3.3 Résultats de la modélisation	84
3.3.1 Calcul du modèle géométrique direct	84
3.3.2 Calcul du modèle cinématique direct	87
3.3.3 Calcul du modèle dynamique	88
3.4 Les forces extérieures	90
3.4.1 Forces de contact pneu/sol	90
a) Description dynamique d'un pneu	92
b) Modélisation des forces de contact pneu/sol	92
c) Plan de la chaussée parallèle au plan du repère de base.....	93
d) Plan de la chaussée non parallèle au plan du repère de base.....	94
e) Forces de la résistance au roulement	95
3.4.2 Résistance aérodynamique	96
3.4.3 Effets des suspensions	96
3.4.4 Effets des frottements	97
3.4.5 Angle volant et couple de braquage	97
4. Conclusion	98
Synthèse et perspective	99
Annexe A	101
Annexe B	103
Bibliographie	105

Introduction générale

En robotique les processus considérés sont principalement des systèmes mécatroniques qui se veulent des outils de plus en plus perfectionnés et de plus en plus autonomes, au service de l'homme pour la réalisation de tâche de plus en plus complexes [14]. Dans le passé, l'automobile était essentiellement composée de systèmes électriques et mécaniques jusqu'à ce que le véhicule devienne un outil indispensable pour la mobilité de l'homme. L'exigence de performance et les contraintes de sécurité, conjuguées avec les nouvelles technologies, ont imposé un niveau d'automatisation plus performant, plus rigoureux et plus fiable [4]. Ainsi les roboticiens et les automaticiens ont été de plus en plus impliqués dans le domaine.

Actuellement les véhicules terrestres sont équipés par des sous-systèmes électriques et électroniques. Dont la plupart de ces sous-systèmes sont désignés au confort de conduite et à la gestion du moteur [6], on peut citer par exemple le système antiblocage de roues ABS, le système de contrôle de la trajectoire ESP (Electronic Stability Program ou Programme électronique de stabilité), système de sûreté-approprié etc.... Il existe d'autres recherches sur des véhicules encore plus innovants : les « cybercars », des véhicules à conduite totalement automatisée, capable de se déplacer seuls dans un environnement urbain.

L'évolution des véhicules est due principalement à l'apparence de l'ordinateur qui a aidé les chercheurs à modéliser et à réaliser des simulateurs de calcul pour construire de nouvelles générations de véhicules. Le but de la modélisation et de la simulation dans la phase de conception est de donner un modèle mathématique complet du comportement réel d'un mécanisme qui n'est pas réalisable et d'observer l'effet de l'insertion d'un nouveau composant, fonctionnant en même temps que les autres sous-systèmes existants, sur le comportement dynamique du véhicule [26].

Ce mémoire a pour but de présenter l'étude et la mise en œuvre d'une modélisation intitulée ; la modélisation d'un véhicule en présence des forces de contact roue/sol. Nous avons essayé d'utiliser une approche générique pour modéliser différents phénomènes relatifs au véhicule en utilisant le logiciel de calcul symbolique Maple.

La raison d'utiliser cette approche est la capacité de pouvoir réagir en cas de modification de la structure du système à modéliser et la facilité de vérification des modèles obtenus. En effet,

l'approche générique impose souvent de diviser le problème en éléments simples, donc d'avoir un ensemble d'algorithmes. Le fait d'avoir des éléments simples permet de valider chaque bloc aisément. Mais si chaque élément est validé cela ne signifie pas que l'ensemble est correct. La possibilité de pouvoir valider l'ensemble des algorithmes sur plusieurs autres cas, globalement plus simples, se révèle être un atout fondamental [31].

L'approche de la modélisation décrite dans ce mémoire a les objectifs suivants :

- La réduction du modèle du véhicule complexe a un niveau suffisant pour le calcul de la dynamique opérationnel du véhicule.
- Possibilité d'insertion de tous les paramètres et des efforts agissant sur le véhicule , pour avoir un comportement assez proche du système physique.
- L'obtention des algorithmes de génération des modèles mathématiques robustes, ainsi l'utilisant dans le langage de programmation générique pour valider ces algorithmes.
- L'obtention d'un modèle dynamique global du véhicule avec la possibilité d'ajouter des sous-systèmes couramment conçus, sans faire des modifications dans les noyaux des structures algorithmiques.

Organisation du mémoire

Le chapitre 1 vise à décrire le système véhicule et ses constituants ; on se base tout, d'abord ; à la description globale du véhicule et à la définition des principaux organes mécaniques d'un véhicule et leurs principes de fonctionnement, Nous fournissons ensuite les conventions à utiliser pour modéliser le véhicule tel que : la définition des axes, les forces et moments dans le système du véhicule et on explique également les lois du mouvement longitudinal, en lacet et en tangage.

Le chapitre 2 s'attache à la représentation des différentes topologies des structures mécaniques et des hypothèses de modélisation des chaînes cinématiques ainsi que la représentation mathématique des outils de modélisation des systèmes mécaniques articulés. Dans ce chapitre nous présenterons les différentes méthodes de modélisation et techniques utilisées pour générer les modèles géométriques et cinématiques directs qui déterminent les positions et les vitesses d'un système mécanique articulé décrit dans un espace connu. On terminera ce chapitre par la représentation des deux méthodes de représentation des mécanismes inspirées des outils de modélisations intégrées. De cette représentation nous en déduirons l'expression des énergies du mécanisme ainsi qu'un modèle dynamique et leur interaction avec l'environnement.

Ces outils symboliques ont été appliqués sur différents exemples qui seront détaillés dans le chapitre 3 et le Chapitre 4.

Le chapitre 3 présente différentes applications du générateur de modèles. Parmi celles-ci nous trouverons l'étude d'un mécanisme comportant une chaîne cinématique fermée, l'étude d'un monopède et un mécanisme d'un robot mobile à 2D.

Le chapitre 4 inclue la modélisation d'un véhicule routier à 3D. Dans ce chapitre on a présenté la génération de modèle géométrique, cinématique et dynamique du mécanisme du véhicule en utilisant les procédures de calcul représentées dans le chapitre 3. Nous présenterons dans ce chapitre, le calcul de systèmes d'équation global du modèle du véhicule en intégrant la plupart des variables dynamique et les forces qui réagie sur le système.

En conclusion, la synthèse des principaux résultats obtenus au cours de ces travaux de mémoire est présentée et les principales perspectives de recherche sur l'évolution et l'amélioration de la modélisation mise en place sont exposées.

Chapitre 1

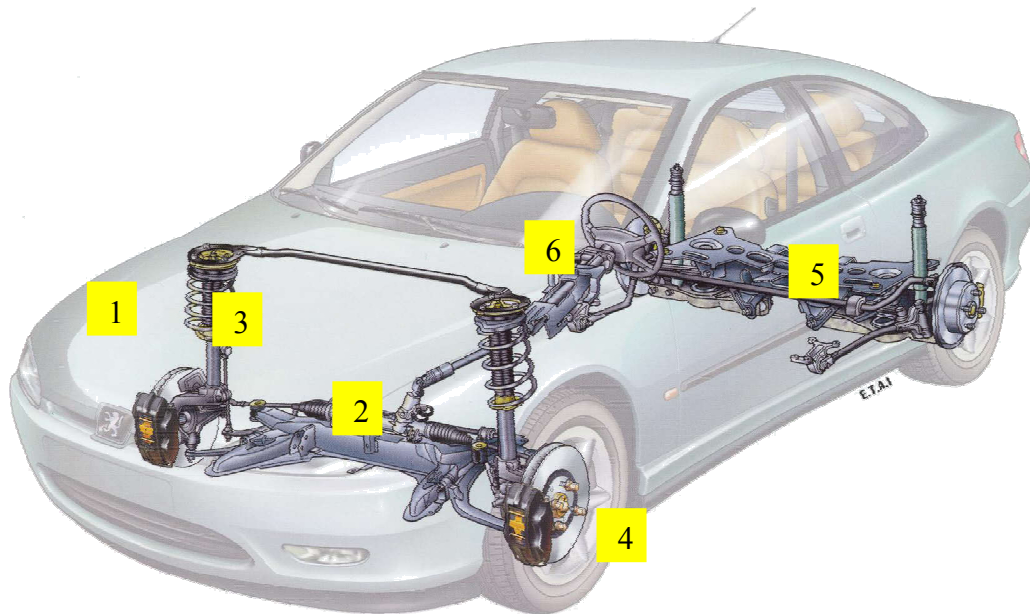
Le système véhicule et ses constituants

La fonction principale du véhicule d'un point de vue technique est de propulser en transformant l'énergie du carburant (chimique) en énergie mécanique, transformée en énergie cinétique par les roues motrices. Un véhicule à roues est un système intrinsèquement non linéaire de par sa cinématique et ses caractéristiques dynamiques (actionneurs, moteur thermique) ; de plus, et particulièrement en tout-terrain, il peut être soumis à de nombreuses perturbations, tels que des changements d'adhérence du terrain ou de pente, des coups de vent, etc. Le pilotage d'un tel système doit donc nécessairement avoir besoin, pour être performant, d'un mécanisme robuste et divers moyens de commande pour prendre ces non-linéarités et ces perturbations en considération.

Nous abordons ce travail par des notions ; des principaux organes mécaniques d'un véhicule à savoir : La masse suspendue, les trains avant et arrière, les suspensions, les roues, l'organe de direction. De plus ; on fournit les informations de base nécessaire pour comprendre l'architecture de véhicule tel que la définition des axes, les forces et moments dans le système du véhicule et on explique également les lois du mouvement longitudinal, en lacet et en tangage.

Sous-systèmes de l'automobile

Les sous-systèmes de l'automobile sont des dispositifs, avec un niveau élevé de complexité qui fournissent une représentation précise de la dynamique globale de véhicule. La Figure 1.1 illustre les différents sous-systèmes de l'automobile.



1. Châssis 2. Train avant 3. Suspensions + 1 barres anti-roulis
4. 4 roues 5. Train arrière 6. 1 colonne de direction

Figure 1.1 : Sous-système de l'automobile

1.1 Châssis

Un châssis est une structure généralement formée de poutres et de barres reliées soit par soudage soit par des éléments de liaison.

Ils existent différents types de châssis [1] [2] [3] :

- Châssis en échelle
- Châssis cruciforme
- Châssis avec tube de torsion
- Châssis tubulaire
- Châssis intégral ou monocoque

La fonction principale du Châssis est la fixation des composants (moteur, train roulant, chaîne de transmission, sièges, etc.). Il a un rôle de reprise:

- Des mouvements du moteur et des axes des roues
- De la transmission
- Des réactions des roues lors des accélérations et des freinages
- Des forces aérodynamiques

- Des chocs venant de la route transmis via la suspension
- la protection en cas d'accident.

1.2 Le train roulant

Le sous-système train roulant est composé des éléments de base suivants :

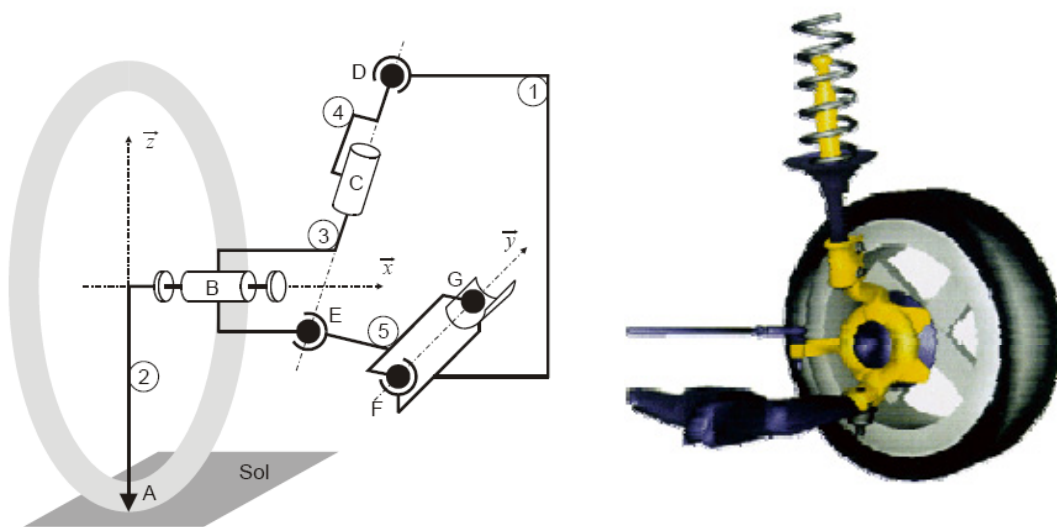
- Mécanisme de suspension
- Direction
- Roues
- Pneumatique
- Freins

1.2.1 Suspension

La suspension est un mécanisme permettant le mouvement de la roue pour suivre les irrégularités de la route tout en assurant son contrôle et son guidage et empêche la flexion et la torsion du châssis et les contraintes qui en résulteraient. La Figure 1.2 illustre le mécanisme de la suspension.

La suspension comprend les éléments suivants:

- L'essieu : ensemble des organes qui relient la roue au châssis à l'exception des éléments de direction et des dispositifs de suspension (Amortisseurs, ressorts, vérins, etc.)
- Les éléments élastiques et dissipatifs interposés entre le châssis et le train roulant (Amortisseurs hydrauliques, Ressorts hélicoïdaux, Joints flexibles).



1. Châssis. 2. Roue. 3. moyeu. 4. Ressort Amortisseur 5. Triangle inférieur

Figure 1.2 Suspension Automobile "Mac-Pherson"

Principe de fonctionnement : Le poids du véhicule crée une force verticale agissant de haut en bas qui appuie sur la tête des ressorts. Le ressort est interposé entre un point de la caisse et le bras de suspension de la roue pneumatique qui réalise le contact au sol. Dans le cas d'un contact irrégulier de la route ce dernier va communiquer à la roue des mouvements oscillatoires qui seront diminuées et transformées en chaleur par torsion ou flexion des ressorts. L'adhérence des pneus est assurée par la pression de contact maintenue par les ressorts.

1.2.2 Direction

Le système de direction permet de maintenir ou de modifier la trajectoire du véhicule en orientant les roues avec précision, sans effort important de la part du conducteur, et en conservant une tenue de route satisfaisante. Le train avant du véhicule est le système qui assure cette fonction, il a une géométrie qui doit permettre de:

- Limiter la transmission vers le volant des chocs de la route.
- Eviter les pertes d'adhérences en virage comme en ligne droite.
- Introduire un couple de rappel pour maintenir les roues en position de ligne droite.
- Eviter un braquage incontrôlé lors des débattements de suspension.
- Limiter les efforts à assurer pour effectuer le braquage.

Principe de fonctionnement : Le conducteur agit sur le volant, les roues avant pivotent ensembles sur un axe fictif appelé pivot (en restant sensiblement parallèle) entre elles grâce à un mécanisme comprenant une crémaillère et un boîtier.

1.2.3 Roues et pneus

Dans le système véhicule, les roues sont les éléments principaux, elles entrent dans le contrôle directionnel. Ainsi la tenue de route et le confort du véhicule. Toutes les forces de contrôle et de perturbations agissant sur le véhicule passent par les contacts roues-sol ceci revient à dire que la connaissance des phénomènes en jeu dans le contact roue-sol est indispensable à la compréhension de la dynamique du véhicule.

Le pneu a essentiellement trois fonctions:

- Supporter la charge verticale tout en assurant un premier amortissement des sollicitations venant de la route
- Développer des forces longitudinales permettant d'accélérer et de freiner
- Développer des forces latérales permettant de tourner le comportement du pneu dépend fortement:

- Des conditions d'opérations : vitesse, pression de gonflage, humidité de la route, nature du revêtement de la route, etc.
- Des caractéristiques constructives

1.2.4 Le sous-système de freinage

Les freins dans le système automobile ont pour mission de ralentir la vitesse du véhicule, de l'arrêter ou de le maintenir à l'arrêt en dissipant par frottement ou tout autre mécanisme l'énergie cinétique acquise par le véhicule.

Principe de fonctionnement : Un véhicule en mouvement a une certaine énergie cinétique proportionnelle à sa vitesse au carré et à sa masse ($\frac{1}{2} M V^2$). A l'action de freinage le système de commande reçoit de l'énergie sous diverses formes (assistance) mécaniques, hydrauliques, pneumatiques, électriques afin d'amplifier l'action. Chaque élément du frein transforme l'énergie en chaleur par frottement. En résultat la vitesse du véhicule doit être diminuée ou annulée.

2. Mouvements et caractéristiques d'un système véhicule rigide

L'étude du mouvement du véhicule est classiquement étudiée de 2 manières:

- Si on veut étudier la stabilité et les problèmes de contrôle du véhicule, on étudie les perturbations du mouvement établi du véhicule sous l'effet de commande ou de perturbations extérieures.
- Si on recherche la trajectoire réelle par rapport au sol, le mouvement du système local du véhicule est décrit par rapport au repère inertiel fixé au sol.

Pour l'étude du mouvement, il est courant de fixer un certain nombre de variables opérationnelles, par exemples la vitesse d'avancement, l'accélération / décélération longitudinale, la force de freinage / traction. Dans le cas de l'étude du système de référence du véhicule par rapport au système inertiel lié au sol .il est nécessaire de définir les composantes d'accélération [4] [5].

- Accélération longitudinale
- Accélération normale
- Accélération latérale
- Accélération centripète

2.1 Systèmes d'axes du véhicule

La figure 1.3 illustre deux conventions de systèmes d'axes du véhicule :

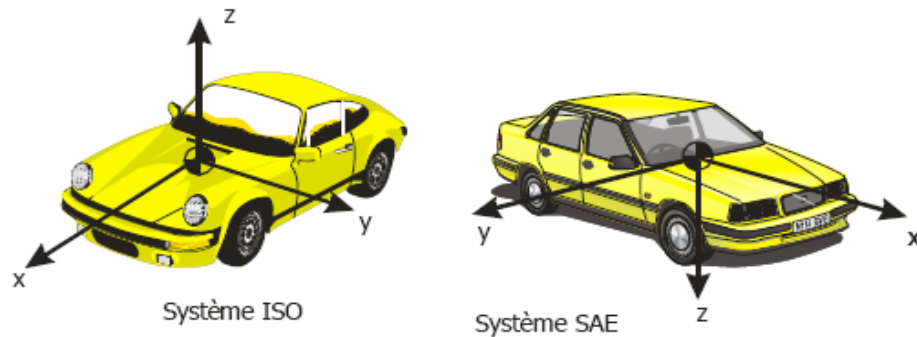


Figure 1.3 : Convention de système d'axes du véhicule

- Système d'axes du véhicule selon la convention ISO/DIN.
 - X selon la direction d'avance et le plan de symétrie du véhicule.
 - Y selon la direction latérale et à gauche du conducteur.
 - Z selon la verticale (vers le haut).
 - O, origine au centre de masse.
- Système d'axes du véhicule selon la convention **SAE** (Society of Automotive Engineers).
 - X selon la direction d'avance et le plan de symétrie du véhicule.
 - Y selon la direction latérale et à droite du conducteur.
 - Z selon la verticale (vers le bas).
 - O, origine au centre de masse.

2.2 Masses de système véhicule

Le système véhicule est caractérisé par deux types de masses :

Les masses non suspendues sont toutes les masses entre la route et les éléments élastiques (les roues ,les essieux, les freins s'ils sont attachés au roues). Elles doivent être faible vis-à-vis de la masse suspendue pour avoir un bon confort, réduire les débattements de suspension et maintenir une bonne adhérence.

L'amortissement du système doit être de l'ordre de 0,2 à 0,4 la valeur de l'amortissement critique. La raideur de la suspension est de préférence faible pour favoriser le confort et forte si on privilégie la tenue de route.

Les masses suspendues sont toutes les masses au dessus des éléments élastiques (la caisse, le moteur, etc. .).

2.3 Définition des Forces du véhicule dans le système inertiel

Les forces et les moments sont conventionnellement définis comme agissant sur le véhicule voir Figure1.4 [6].

- Force longitudinale F_x : composante de la force selon l'axe d'avancement x
- Force latérale F_y : composante du vecteur force selon y
- Force Normale F_z : composante du vecteur force selon z
- Moment de roulis M_x : composante du moment tendant à faire tourner le véhicule positivement (règle du tire-bouchon) autour de l'axe x
- Moment de tangage M_y : composante du vecteur moment tendant à faire tourner le véhicule positivement autour de l'axe y
- Moment de lacet M_z : composante du vecteur moment tendant à faire tourner le véhicule positivement autour de son axe z

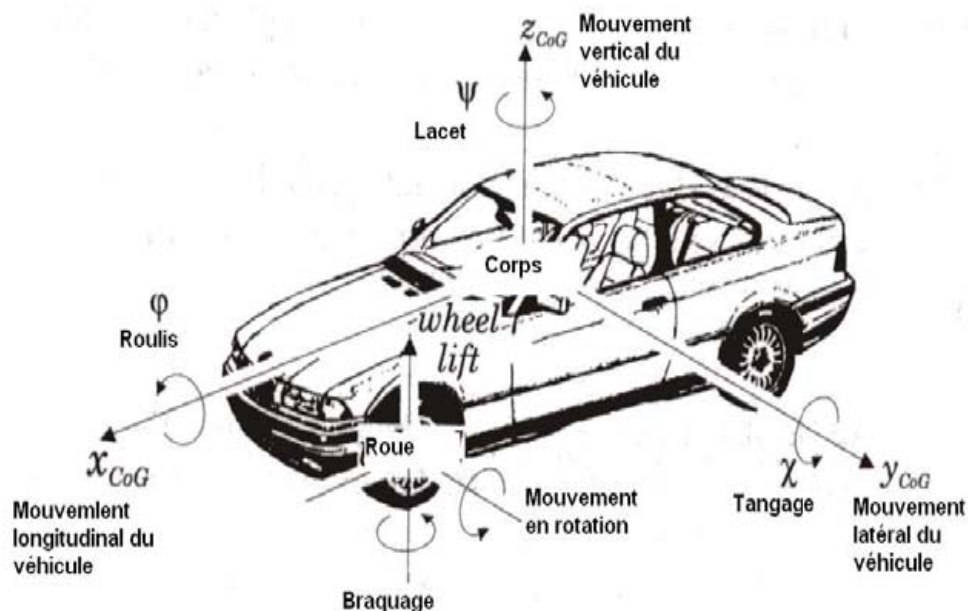


Figure1.4: Définition des forces et moments d'un véhicule

2.4 Loi du mouvement longitudinal

La loi du mouvement longitudinal s'écrit [4] [7] :

$$F_T = F_{aéro} + F_{rlt} + mg \sin \psi_x + m \frac{dv}{dt} \quad (1.1)$$

- La force du moteur F_T sert à vaincre les forces de résistance et à accélérer le véhicule
- On distingue 3 forces de résistances principales:
 - ✓ Les forces aérodynamiques $F_{aéro}$.
 - ✓ Les forces de résistance au roulement F_{rlt} .
 - ✓ Les forces de pente ($mg \sin \psi_x$).

Avec : m est la masse du véhicule, g est l'accélération de la pesanteur (9.81 m/s²),

$\frac{dv}{dt}$ Est l'accélération longitudinale du véhicule,

ψ_x Angle d'inclinaison du véhicule par rapport à la chaussée.

2.4.1 Forces et moments aérodynamiques

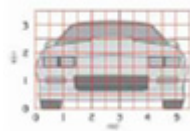
Les forces aérodynamiques sur les véhicules ont 2 origines [8]:

- **Traînée de forme** : la forme et la distribution de pression autour du corps
- **Traînée de viscosité** : les effets de viscosité dans les couches limites
notamment les forces et moments s'expriment en faisant appel aux coefficients adimensionnels de traînée (C_x), de force latérale (C_y), de portance (C_z), de moment de roulis (C_l), de tangage (C_m) et de lacet (C_n).

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_y$$

$$F_z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z$$



$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S L C_l$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S L C_m$$

$$N = \frac{1}{2} \rho V^2 S L C_n$$

Avec S la surface frontale, L l'empattement et ρ la densité de l'air, V la vitesse relative du véhicule par rapport à l'air.

L'estimation de la résistance aérodynamique est représentée par sa composante de traînée [26] dans l'expression est :

$$F_{aéro} = 1/2 \rho S C_x V^2 \quad \text{Ou} \quad S = khl \quad \text{et } k = 0.85 \quad (\text{Formule de Paul Frère})$$

$$S = 1.6 + 0.00056(m - 765)[m^2] \quad (\text{Formule de Wong})$$

Avec : h la hauteur du véhicule, l la largeur du véhicule, m la masse du véhicule

2.4.2 Forces de résistance au roulement

Pour un pneu qui roule librement, il est nécessaire d'appliquer un couple moteur pour contrebalancer le moment résistant qui provient du déplacement du centre de pression dans l'emprunte vers la partie avant.

Les forces de résistance au roulement recouvrent des effets provenant de différentes sources:

- ✓ le travail de déformation des pneumatiques
- ✓ le frottement des roulements
- ✓ le travail de la suspension
- ✓ les défauts d'alignements

De manière générale, les forces de résistance qui sont rassemblées sous le terme de forces de résistance au roulement ont en commun de pouvoir s'exprimer selon le modèle linéaire

$$R_{rl} = f(mg) = f_r W \quad (1.2)$$

Avec : W est le poids du véhicule.

Le coefficient f_r de résistance au roulement, rapport entre la force de résistance au roulement et la force normale, englobe toutes les propriétés et les phénomènes physiques compliqués et couplés qui existent entre le pneu et le sol

L'estimation de la résistance au roulement des pneus a une dépendance vis-à-vis du facteur vitesse [4]:

- ✓ Pour les basses vitesses:

$$f_r = 0.01 (1 + V / 100) \quad (V \text{ est la vitesse en mph})$$

✓ A haute vitesse :

$$f_r = f_0 + 3.24 f_s (V / 100)^{2.5} \quad (V \text{ est la vitesse en mph})$$

Avec f_0 : coefficient de base. , f_s : coefficient de vitesse

2.5 Loi du mouvement en lacet

2.5.1 Définition des Angles

Dans le système inertiel on peut définir les angles suivants illustré par la Figure 1.5 [5] :

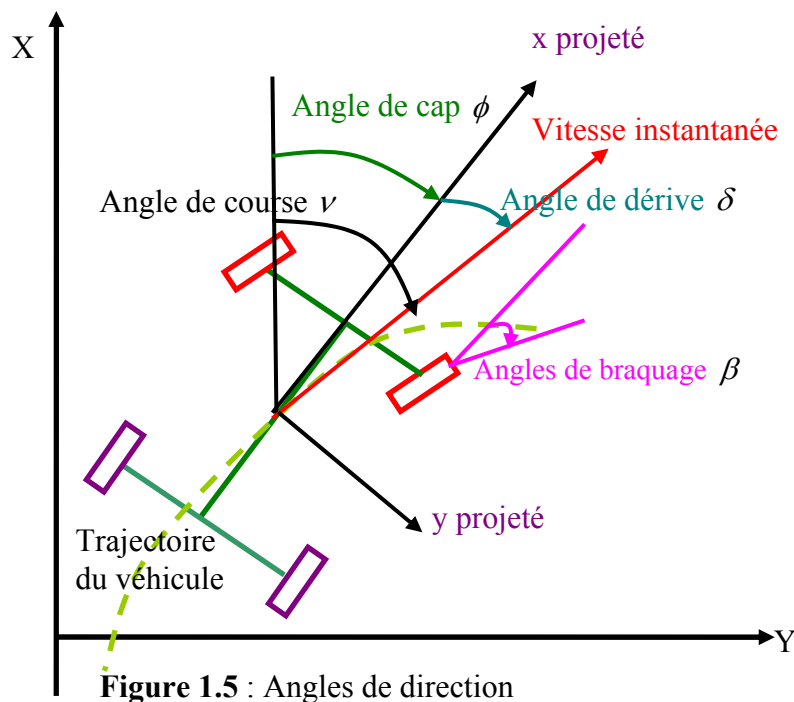


Figure 1.5 : Angles de direction

- Angles de cap (ϕ) : angle entre la direction x et X dans le plan du sol
- Angle de course (ν) : angle entre le vecteur vitesse instantanée du véhicule et l'axe X.
- Angle de dérive (δ) : angle entre l'axe x du véhicule et l'angle du vecteur vitesse instantanée.
- $\nu = \phi + \delta$
- L'angle de braquage (β) : est commandé par le conducteur via les roues directrices

2.5.2 Hypothèses:

- Possibilité de modéliser le véhicule sous la forme d'un modèle de type bicyclette
- Petits angles de braquage et de dérive
- Pas de mouvement de roulis ou de tangage
- Pneus en régime linéaire
- Vitesse d'avance V constante
- Pas d'effets aérodynamiques
- Contrôle en position
- Pas d'effet de souplesse de la suspension et du châssis

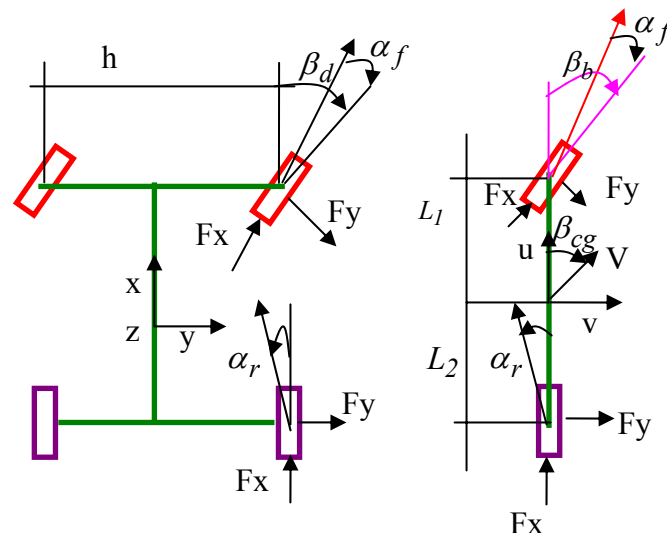


Figure 1.6 : Le modèle bicyclette

2.5.3 Mouvement en lacet à faible vitesse

Selon le modèle d'Ackerman [7] [9] illustrer sur la Figure 1.7, Les angles de braquage du train avant est donnée par :

$$\tan \beta_d = L / (R - h / 2)$$

$$\tan \beta_g = L / (R + h / 2)$$

$$\text{Alors } \cot \beta_g - \cot \beta_d = \frac{h}{L} \quad (1.3)$$

$$\text{Avec : } \beta_g \leq \beta_d$$

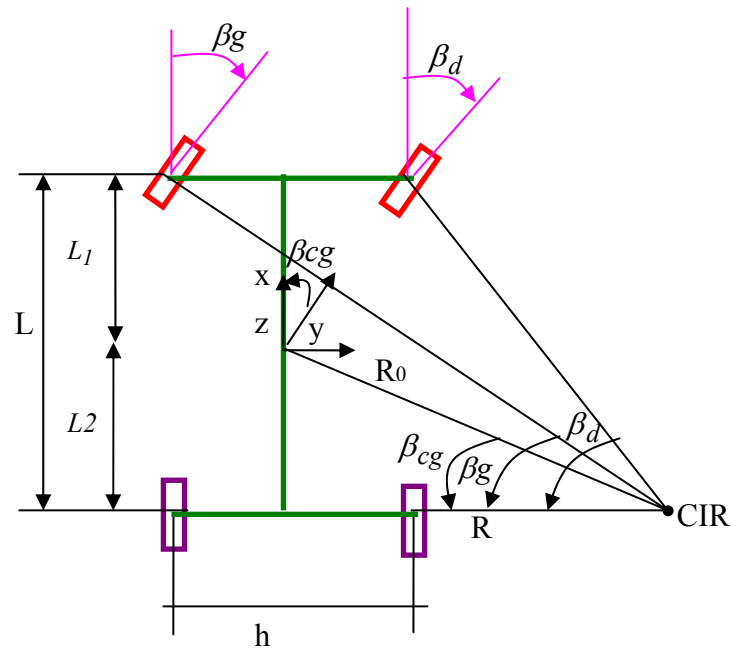


Figure 1.7 : Le modèle en lacet d'Ackerman

D'autre part le modèle bicyclette illustré sur la figure 1.8 donne :

- L'angle de braquage du train avant

$$\tan \beta_b = \frac{L}{R} \quad \text{Alors}$$

$$\cot \beta_b = \frac{\cot \beta_g + \cot \beta_d}{2} = \frac{R}{L} \quad (1.4)$$

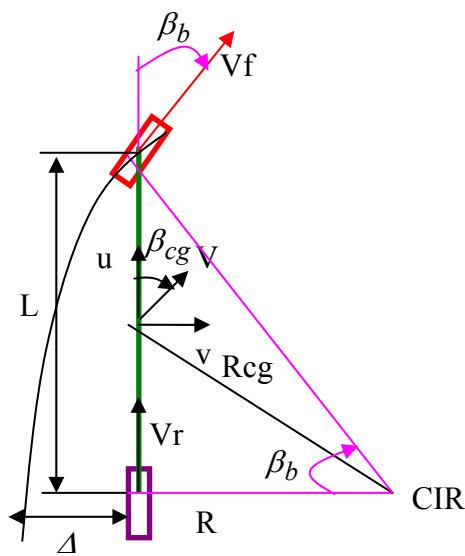


Figure 1.8 : Modèle bicyclette d'Ackerman

- Rayon de courbure du centre de masse

$$R_{cg} = \sqrt{L_2^2 + R^2} = \sqrt{L_2^2 + L^2 \cot^2 \beta_b}$$

$$R_{cg} = R \sqrt{1 + L_2^2 / R^2} \approx R(1 + L_2^2 / R^2) \approx R$$

- Relation entre la courbure et l'angle de braquage

$$R_{cg} \approx R \approx L \cot \beta_b \approx \frac{L}{\beta_b} \quad \text{avec} \quad \cot \beta_b = \frac{R}{L}$$

Alors on aura :

$$\beta_b = \frac{L}{R} \quad (1.5)$$

- Dérive du centre de masse

$$\beta_{cg} = \arctan\left(\frac{L_2}{R}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{L_2}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{L_2}{\sqrt{R^2 + L_2^2}}\right)$$

Alors :

$$\boxed{\beta_{cg} = \frac{L_2}{L} \beta_b} \quad (1.6)$$

- Le décalage de la trajectoire du train arrière

$$R_f = \sqrt{R^2 + L^2} \quad (1.7)$$

$$\Delta = R_f - R = R(\sqrt{1 + L^2 / R^2} - 1)$$

On a que : $\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + x/2 + \dots$

$$\boxed{\Delta = \frac{L^2}{2R}} \quad (1.8)$$

Avec :

β_d Angle de braquage de la roue avant droite.

β_g Angle de braquage de la roue avant gauche.

β_b Angle de braquage en mode bicyclette.

L Longueur de l'empattement du véhicule.

- R Rayon de CIR du train arrière.
 R_f Rayon de CIR plus décalage du train arrière.
 h Largeur du véhicule.
 R_{cg} Rayon de courbure du centre de masse.
 L_1 demis-empattement avant.
 L_2 demis-empattement arrière.
 β_{cg} Angle de braquage du centre de masse du véhicule.
 Δ L'écart du trajectoire du train arrière.

2.5.4 Mouvement en lacet à vitesse élevée

L'étude d'un mouvement du véhicule en lacet à vitesse élevée revient à étudier la rotation en lacet en régime stationnaire avec l'hypothèse de prendre en considération l'angle de dérive du train avant et arrière. La figure 1.9 illustre le mouvement en lacet d'un modèle bicyclette à vitesse élevée.

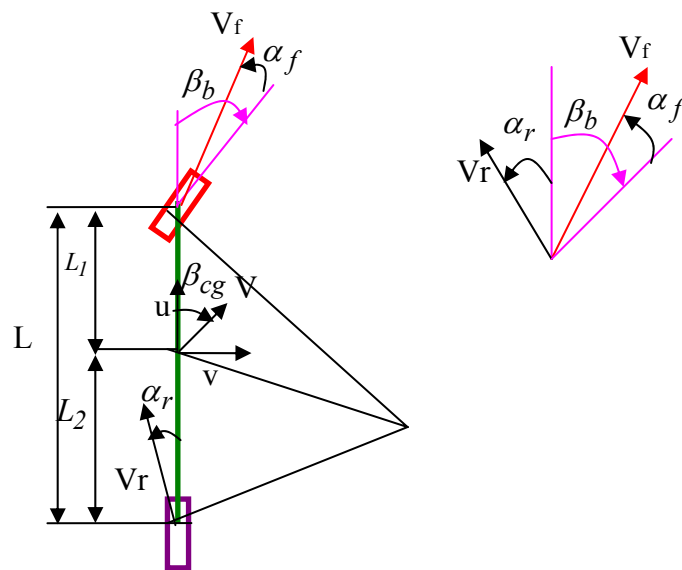


Figure 1.9 : Représentation du modèle bicyclette à vitesse élevée

A partir de la Figure 1.9 on peut déduire :

- Angle de braquage en fonction des angles de dérive [26].

$$B_b = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (1.9)$$

➤ Equations de comportement du pneu [7] (voir Figure 1.10)

$$\boxed{F_{yf} = C_{\alpha f} \alpha_f \quad F_{yr} = C_{\alpha r} \alpha_r} \quad (1.10)$$

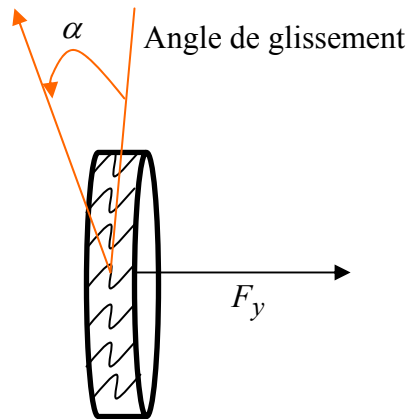


Figure 1.10 : Comportement du pneu

➤ Equations d'équilibre latéral et en rotation

$$F_{yf} \cos \beta_b + F_{yr} = m \frac{V^2}{R} \quad (1.11)$$

$$F_{yf} \cos \beta_b b + F_{yr} L_2 = 0 \quad (1.12)$$

Par hypothèse de petit angle :

$$F_{yf} = \frac{L_2}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (1.13)$$

$$F_{yr} = \frac{L_1}{L} m \frac{V^2}{R} \quad (1.14)$$

En utilisant les équations précédentes

$$F_{yf} = C_{\alpha f} \alpha_f = \frac{L_2}{L} m \frac{V^2}{R}$$

$$F_{yr} = C_{\alpha r} \alpha_r = \frac{L_1}{L} m \frac{V^2}{R}$$

On obtient

$$\boxed{\frac{\alpha_f}{\alpha_r} = \frac{L_2 C_{\alpha r}}{L_1 C_{\alpha f}}} \quad (1.15)$$

Angle de braquage en fonction de la vitesse et des raideurs en lacet.

$$\beta_b = \frac{L}{R} + \left(\frac{mL_2}{C_{af}} - \frac{mL_1}{C_{ar}L} \right) \frac{V^2}{R} \quad (1.16)$$

Avec :

α_r Angle de dérive du train arrière.

α_f Angle de dérive du train avant.

F_{yf} Force latéral du train avant.

F_{yr} Force latéral du train arrière.

m Masse du véhicule.

V vitesse d'avancement.

C_{af} Coefficient de rigidité de la force latérale du train avant (N/deg).

C_{ar} Coefficient de rigidité de la force latérale du train arrière (N/deg).

L Longueur de l'empattement du véhicule.

2.6 Mouvement en tangage

L'importance de ce mouvement a poussé le chercheur **Maurie Olley (1930)**, à émettre 4 recommandations pour concevoir des voitures avec un bon confort et une bonne tenue de route (tout au moins pour les basses fréquences) [4][7]. Celles-ci proviennent de l'expérimentation sur une voiture à inertie giratoire variable. Elles restent jusqu'à aujourd'hui des règles de bonne pratique pour concevoir des voitures modernes.

Règle 1: La suspension avant doit avoir une raideur (taux de tenue de route) 30% plus faible que la suspension arrière, autrement dit le centre de raideur doit être au moins à 6,5% de l'empattement derrière le CG.

Règle 2: Les fréquences de pompage et de tangage doivent être proches l'une de l'autre. La fréquence de pompage doit être inférieure à 1.2 fois la fréquence de tangage. Pour des Plus hauts rapports, il y a des saccades d'interférences résultants de la superposition des deux mouvements

Règle 3: Aucune fréquence ne doit être plus grande que 1.3 Hz, ce qui signifie que la déflexion statique effective du véhicule ne doit pas dépasser 6 pouces

Règle 4: La fréquence de roulis devrait être approximativement égale aux fréquences de tangage et de pompage.

Le comportement en termes de fréquences de pompe / tangage et de centre de mouvement peut être facilement extrait d'un modèle simple à 2 degrés de liberté [26] illustrer sur la figure 1.11 pour le quel on suppose :

- ✓ Raideur de suspension et des pneus considérées ensemble.
- ✓ Amortissement de suspension et des pneus négligés.
- ✓ Masse non suspendue négligée

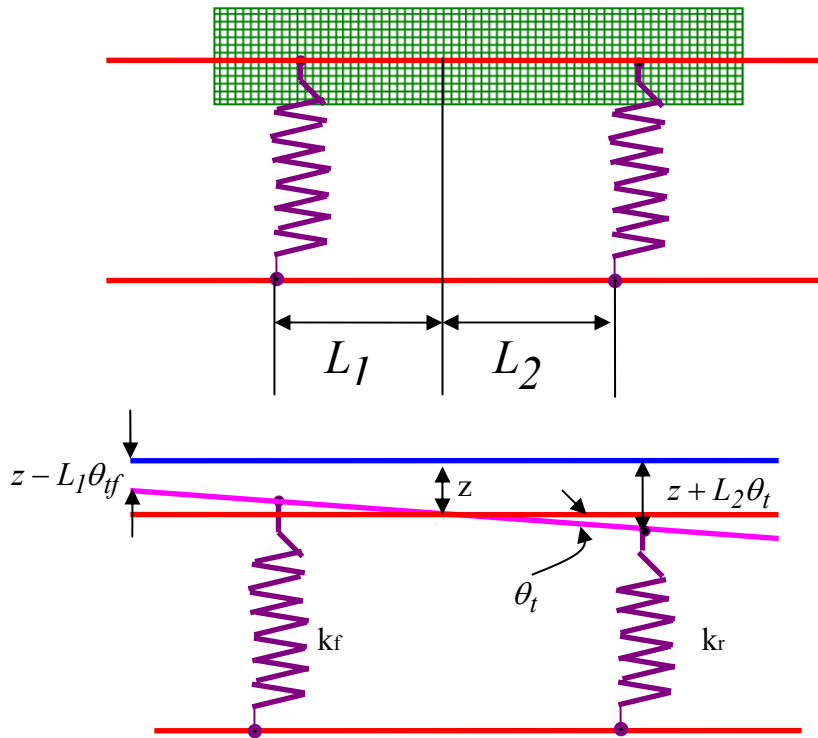


Figure 1.11 : Modèle à 2ddl pour le tangage et le pompe

➤ Equations du mouvement :

$$m_s \ddot{z} + k_f (z - L_1 \theta_t - z_f) + k_r (z + L_2 \theta_t - z_r) = 0 \quad (1.17)$$

$$I_y \ddot{\theta}_t - k_f L_1 (z - L_1 \theta_t - z_f) + k_r L_2 (z + L_2 \theta_t - z_r) = 0 \quad (1.18)$$

Posons :

$$D_1 = \frac{I}{m_s}(k_f + k_r)$$

$$D_2 = \frac{I}{m_s}(k_r L_2 - k_f L_1)$$

$$D_3 = \frac{I}{I_y}(k_f L_1^2 + k_r L_2^2) = \frac{I}{m_s r_y^2}(k_f L_1^2 + k_r L_2^2)$$

telque: $I_y = m_s r_y^2 = m_s L_1 L_2$

Alors Les équations s'écrivent :

$$\ddot{z} + D_1 z + D_2 \theta_t = 0 \quad (1.19)$$

$$\ddot{\theta}_t + D_3 \theta_t + \frac{D_2}{r_y^2} z = 0 \quad (1.20)$$

➤ Fréquences propres naturelles en pompage et en tangage

✓ Pour $D_2 = 0 \Leftrightarrow k_r L_2 = k_f L_1$ système découplées

Alors on aura :

$$\omega_{n,z} = \sqrt{D_1} = \sqrt{\frac{k_f + k_r}{m_s}} \quad (1.21)$$

$$\omega_{n,\theta} = \sqrt{D_3} = \sqrt{\frac{k_f L_1^2 + k_r L_2^2}{I_y}} \quad (1.22)$$

✓ Pour $D_2 \neq 0$ système couplées

Soit :

$$z = Z \cos \omega_n t$$

$$\theta_t = \Theta \cos \omega_n t \quad \text{Alors}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$(D_1 - \omega_n^2)Z + D_2 \Theta = 0 \quad (1.23)$$

$$\left(\frac{D_2}{r_y^2} \right) Z + (D_3 - \omega_n^2) \Theta = 0 \quad (1.24)$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\omega_n^4 - (D_1 + D_3)\omega_n^2 + (D_1 D_3 - \frac{D_2^2}{r_y^2}) = 0 \quad (1.25)$$

✓ On tire alors les 2 fréquences propres naturelles des mouvements couplé en pompage et en tangage

$$\omega_{n1}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad (1.26)$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad (1.27)$$

➤ Le rapport entre les amplitudes des mouvements de pompage et de tangage.

$$\left. \frac{Z}{\Theta} \right|_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \quad (1.28)$$

$$\left. \frac{Z}{\Theta} \right|_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} \quad (1.29)$$

Avec :

- m_s Masse suspendue.
- z Variable de débattement du CG du véhicule
- z_f Variable de débattement du train avant du véhicule
- z_r Variable de débattement du train arrière du véhicule
- θ_t Angle de rotation en tangage.
- k_f Raideur de la suspension avant.
- k_r Raideur de la suspension arrière.
- I_y Moment d'inertie en tangage.
- \ddot{z} Accélération de pompage.
- $\ddot{\theta}_t$ Accélération angulaire en tangage.
- $\omega_{n,z}$ Pulsation propre du pompage
- $\omega_{n,\theta}$ Pulsation propre du tangage.

3 Conclusion

Un véhicule est un système mécanique complexe muni de capteurs et d'actionneurs dont la modélisation et représentation des mouvements peuvent se faire grâce aux outils utilisés classiquement en robotique. La maîtrise de ces mouvements n'est pas une chose évidente car ce système est l'objet de sollicitations du conducteur d'une part et de l'environnement d'autre part, sachant que les échanges d'énergie et les interactions ne se font ni dans des conditions simples, ni invariantes, ni connues ni maîtrisables.

La dynamique d'un véhicule est composée d'une partie mécanique passive et certaines parties actives et électromécaniques sont conçues de manière adaptée, par les constructeurs, de façon à préserver la stabilité du véhicule et sa contrôlabilité.

Chapitre 2

Techniques de modélisation SMA

L'étude des systèmes multi-corps n'est pas une discipline nouvelle. Elle date en fait du 17^e siècle, époque à laquelle vivait Isaac Newton. Euler, d'Alembert et Lagrange y ont grandement contribué au 18^e siècle. Mais, c'est avec l'avènement de la robotique et de l'informatique à la fin du 20^e siècle que l'étude de la dynamique des systèmes multi-corps a réellement pris son essor et est devenue une discipline à part entière dans le domaine de la mécanique.

La conception mathématique d'un système multi-corps est basée sur l'obtention des équations qui représentent le comportement du système étudié. Afin d'écrire ces équations, il est tout d'abord nécessaire de se donner un jeu de variables qui permet de décrire la configuration, ou l'état, du système : ce sont les coordonnées généralisées. Différents choix de coordonnées sont possibles. Selon les coordonnées choisies, on peut alors utiliser différentes méthodes, ou formalismes pour écrire les équations permettant d'étudier le comportement du système. Dans le cas des systèmes multi-corps, ces équations concernent les mouvements des corps qui sont soumis aux lois de la mécanique.

Ce chapitre est consacré plus précisément à la représentation des modèles mathématiques directs (géométrie et cinématique) qui détermine les positions et les vitesses généralisées lorsque le système mécanique est soumis aux forces articulaires dans une configuration connue, ainsi on représente les méthodes les plus utilisées pour calculer le modèle dynamique des mécanismes articulés et on discute sur l'interaction des mécanismes avec un environnement indéformable en donnant la forme du modèle dynamique lors d'un contact.

1. Concepts et conventions des mécanismes

1.1 Structure articulée

Une structure articulée est un système composé de plusieurs parties rigides ou flexibles, appelées des corps, qui sont reliés entre eux par des articulations. On distingue souvent ces systèmes selon leur structure. Celle-ci peut être de type arborescente ou ouverte, lorsque sa topologie peut être représentée par un arbre, ou bien de type bouclée ou fermée, lorsque le graphe topologique contient des cycles [10].

La Figure 2.1 illustre les deux types de topologie, ouverte ou fermée.

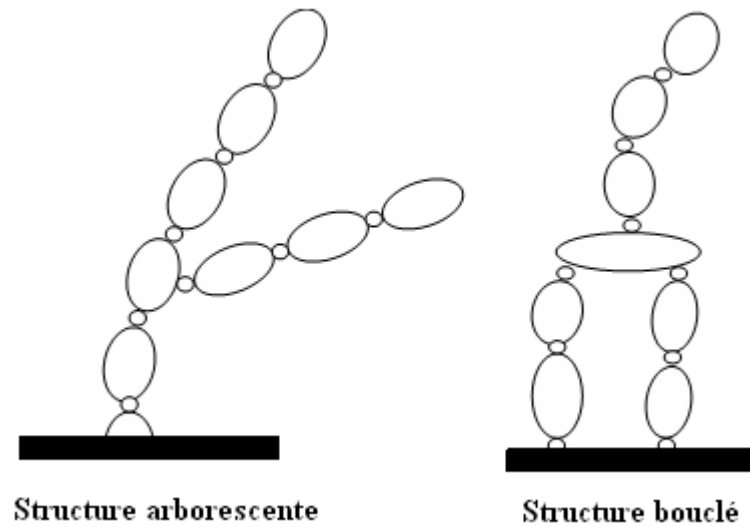


Figure 2.1 : Structures arborescentes ou bouclées

1.2 Description des chaînes cinématiques

Une chaîne cinématique ou un chemin est un ensemble de plusieurs corps consécutifs rencontrés lorsqu'on parcourt la structure de la base vers une extrémité. Le nombre de corps et d'articulations est identique. On représente une articulation physique à plusieurs degrés de liberté par une séquence équivalente d'articulations élémentaires à un degré de liberté et de corps fictifs.

On reliera toujours au moins un corps du système réel à une base inertielle qui sert de référence, généralement le sol, pour la plupart des applications terrestres. Les articulations sont des éléments physiques tels que des charnières, des glissières, des rotules. Elles ne sont pas considérées comme des corps dans la modélisation du système, mais seulement comme des éléments de connexion entre deux corps.

La topologie choisie pour la modélisation des systèmes mécaniques articulés pour nos travaux représentés dans ce mémoire est la structure arborescente décrite par la suite.

1.3 Structures arborescentes

C'est une représentation d'un mécanisme articulé sous forme d'un graphe qui prend la structure d'un arbre, cet arbre est une collection de nœuds, tous issus d'une même racine. Chaque nœud possède un seul parent. Les structures arborescentes peuvent coder toute chaîne articulée avec des contraintes additionnelles pour les boucles [11]. Les avantages de cette structure sont :

- conserver une grande simplicité au niveau de la description (un seul paramètre est utile pour identifier le parent de chaque lien),
- avoir un algorithme unique pour traiter la cinématique de toutes les catégories de chaînes articulées.

La Figure 2.2 montre comment sont représentées des structures sérielles, arborescentes ou bouclées par des arbres.

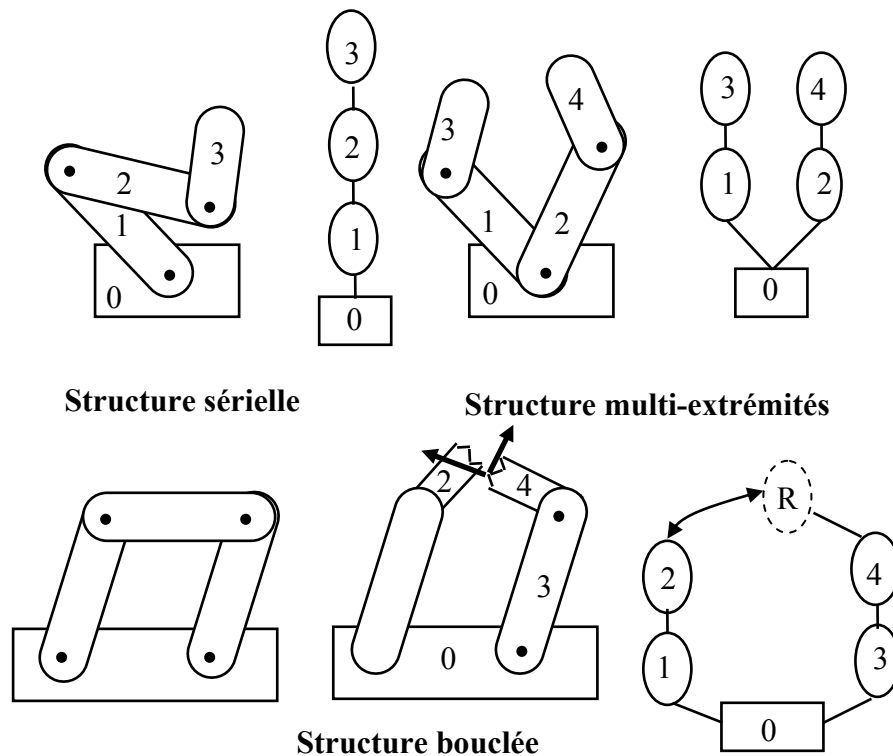


Figure 2.2 : Description des différents types de structures de chaînes articulées

1.3.1 Structures sérielles et arborescentes :-

Une structure sérielle avec un seul organe terminal est simplement codée par un arbre à une seule branche dont la racine est le sol. Une structure comprenant plusieurs organes terminaux est, codée par un arbre contenant autant de branches que la structure contient de chaînes. Les différents embranchements ne partent pas nécessairement de la racine mais peuvent avoir lieu depuis n'importe quel lien.

1.3.2 Structures bouclées :-

Une structure comportant des boucles est aussi représentée par un arbre: chaque boucle est divisée en deux branches et une contrainte est ajoutée entre la terminaison de ces deux branches pour indiquer qu'elles forment une boucle.

1.4 Hypothèses de modélisation des articulations

Les corps sont généralement reliés entre eux par des éléments mécaniques tels que des glissières, des rotules, des paliers, des charnières, etc. Les mouvements relatifs des corps ainsi reliés seront différents selon la nature de ces éléments mécaniques, chacun offrant un nombre de degrés de liberté propre. Plutôt que de proposer une librairie contenant tous les types d'articulations physiques existantes ou imaginables, nous proposons de modéliser les articulations complexes en combinant successivement plusieurs articulations élémentaires. Deux articulations à un degré de liberté sont proposées ; l'une prismatique, l'autre rotoïde. Elles sont illustrées sur la Figure 2.3 et correspondent respectivement à des mouvements relatifs en translation ou en rotation. Les variables représentant le mouvement relatif sont utilisées comme coordonnées généralisées, notées q pour l'écriture des équations décrivant le mouvement des corps [10].

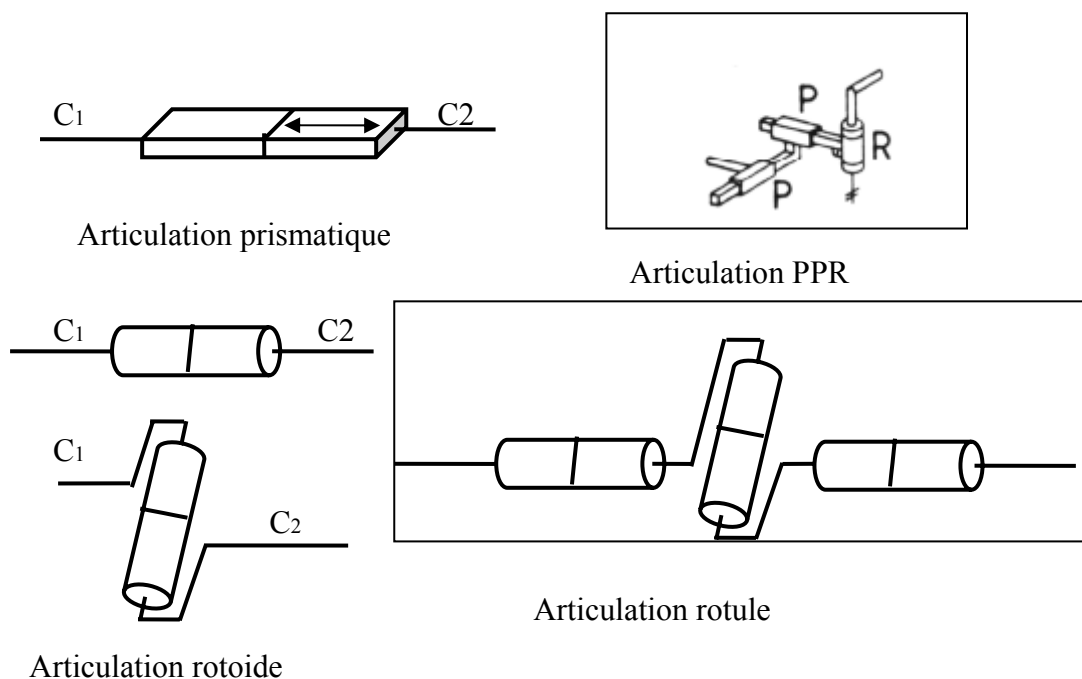


Figure 2.3 : Articulations élémentaires prismatique ou rotoïde

2. Modélisation d'un système mécanique articulé

Un solide S est un ensemble de points dont les distances mutuelles restent invariables à tout instant. A tout solide nous pouvons associer un repère orthonormé \mathcal{R}_S lié à ce solide. R est défini par un point du solide et 3 vecteurs : $\mathcal{R}_S = (O_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ par rapport à ce repère chaque point du solide est fixe. Tout point de ce solide peut servir d'origine à ce repère. Ce repère définit entièrement la position de ce solide.

mouvement

Un mouvement peut être défini entre deux repères dès que l'on peut écrire une relation dépendante du temps entre ces deux repères.

Propriétés

Le mouvement instantané entre deux repères est décomposable en deux mouvements purs : une translation et une rotation. La rotation pure est un mouvement tel qu'il existe un ensemble de points d'un solide associé à ce repère tel que ces points sont fixes. La translation pure est un mouvement tel que l'orientation des vecteurs d'un repère par rapport à l'autre reste inchangée.

Modélisation

La modélisation d'un système mécanique est une interface qui permet de masquer le problème mathématique à l'utilisateur pour manipuler de manière interactive un système et de donner un modèle mathématique complet du comportement réel d'un mécanisme non réalisable. Ce modèle doit s'approcher au plus près de la réalité du système. D'une part et d'autre part, il doit rester assez simple pour pouvoir être traité en temps utile par les ressources de calculs disponibles. Parmi les plus courantes représentations simplifiées nous pouvons citer :

2.1 Modèle géométrique (MGD)

La première interrogation face à un robot est "comment calculer sa position". Ce qui a pris l'essor du modèle géométrique car il apporte une représentation globale du comportement d'un robot. La relation de liaison entre chaque corps peut être définie par une matrice de passage dont au moins une des composantes est dépendante du temps, de même un point d'un corps peut être défini par une matrice de passage entre la liaison du corps et ce point. Ainsi donc, le modèle géométrique s'obtient par un simple produit entre les matrices de passage successives entre la référence général et le point d'intérêt sur le corps du mécanisme. Le mouvement instantané entre deux repères peut être décomposé en un mouvement de translation et un mouvement de rotation pur. Ainsi pour définir le mouvement d'un repère (R_2) par rapport au repère (R_1), on calcule la matrice de passage homogène

$$H_{2/I} = \begin{bmatrix} & & dx \\ & R_\phi & dy \\ & & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Avec : R_ϕ est une matrice de rotation,

dx , dy , dz sont les variables de déplacement selon trois axes.

Plusieurs méthodes de notation existent pour définir la position d'un repère par rapport à un autre, deux sont principalement utilisées en robotique :

- Les paramétrages de Denavit-Hartenberg basés sur les articulations
- Les matrices de passages homogènes basés sur la translation et la rotation

La translation peut être définie par un vecteur de 3 paramètres. La rotation, elle, peut-être définie selon plusieurs méthodes : parmi les plus courantes nous pouvons citer :

- Les angles d'Euler.
- Les paramètres de Rodrigues.
- Le quaternion unitaire.
- Les angles de Roulis - Tangage - Lacet.

2.1.1 Notations de Denavit-Hartenberg

La technique la plus répandue pour décrire la géométrie des chaînes cinématiques sérielles consiste à utiliser les paramètres de Denavit-Hartenberg [12] [13] [14]. On associe au i -ème corps le repère $\mathcal{R}_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$, avec $i = 0, 1, \dots, n$. Pour placer les repères \mathcal{R}_1 à \mathcal{R}_{n-1} selon la règle des paramètres de Denavit-Hartenberg, il convient de suivre les règles suivantes (voir Figure 2.4), pour $i = 2, 3, \dots, n$:

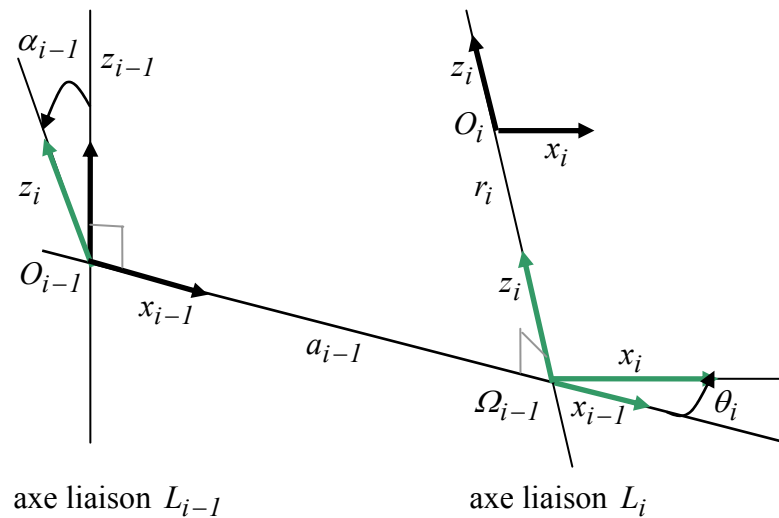


Figure 2.4 : Paramètres de Denavit-Hartenberg

- O_{i-1} est le pied de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_{i-1} et L_i , situé sur L_{i-1} . Si les axes des liaisons sont parallèles, il faut choisir arbitrairement une perpendiculaire commune ;
- x_{i-1} est le vecteur unitaire de cette perpendiculaire commune, orienté de L_{i-1} vers L_i . Si les axes des deux liaisons sont concourants ou confondus, l'orientation est arbitraire (règle avant, droite, haut) ;
- z_{i-1} est un vecteur unitaire de l'axe de la liaison L_{i-1} , librement orienté. On privilégie généralement les débattements positifs pour les liaisons prismatiques et on symétrise généralement par rapport à 0 le débattement des liaisons rotoides ;
- y_{i-1} est tel que le repère \mathcal{R}_{i-1} soit orthonormé direct.

Ensuite, le repère \mathcal{R}_0 est défini librement en suivant des considérations de simplicité. De même, le point O_n est choisi de façon à annuler un maximum de paramètres. Un point O_{n+1} est associé à l'Organe Terminal, selon des critères opérationnels : typiquement, si la chaîne est équipée d'une pince, le point O_{n+1} représentera le centre de ses mors. On choisit alors enfin \mathcal{R}_n de sorte que le point O_{n+1} se situe dans le plan $\mathcal{R}_l = (O_n, x_n, z_n)$ conformément à la Figure 2.5.

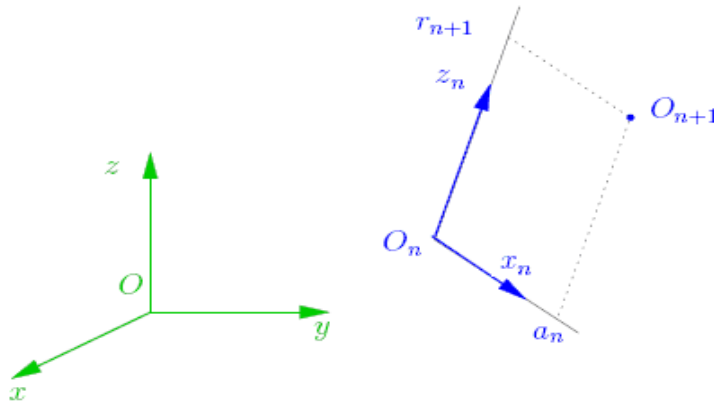


Figure 2.5 : placement respectifs des repères \mathcal{R}_n et du point O_{n+1}

Les repères étant choisis, la situation du repère d'un corps respectivement à celle du repère du corps suivant peut être définie conformément à la figure 2.1. Les paramètres α_{i-1} , a_{i-1} , θ_i et r_i , avec $i = 1, 2, \dots, n$, placés sur cette figure sont appelés paramètres de Denavit-Hartenberg. Textuellement, on peut les définir comme suit :

- α_{i-1} : angle algébrique entre z_{i-1} et z_i , mesuré autour de x_{i-1} ;
- a_{i-1} : distance arithmétique de la perpendiculaire commune aux axes des liaisons L_{i-1} et L_i mesurée le long de x_{i-1} ;
- θ_i : angle algébrique entre x_{i-1} et x_i , mesuré autour de z_i ;
- r_i : distance algébrique du point O_i à la perpendiculaire, mesurée le long de z_i .

Conformément au paramétrage de Denavit-Hartenberg, la matrice homogène entre les corps C_{i-1} et C_i est donc :

$$H_{i-1,i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(x_{i-1}, \alpha_{i-1})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translation de } \alpha_{i-1} x_{i-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(z_i, \theta_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Translation } r_i, z_i} \quad (2.1)$$

Soit :

$$H_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos\alpha_{i-1}\sin\theta_i & \cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i & -\sin\alpha_{i-1} & -r_i\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\alpha_{i-1}\sin\theta_i & \sin\alpha_{i-1}\cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & r_i\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Qui prend la forme :

$$H_{i-1,i} = \begin{pmatrix} R_{i-1,i} & P_{i-1,i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où $R_{i-1,i}$ représente la rotation entre les repères R_{i-1} et R_i et $P_{i-1,i}$ la translation entre ces mêmes repères.

2.1.2 Notations de Khalil-Kleinfinger

La notation de Khalil-Kleinfinger [12] est conçue pour la description des chaînes cinématiques sérielles, arborescentes ou bouclées. Cette notation utilise un repère par lien, mais

utilise six paramètres (donc deux de plus que Denavit-Hartenberg) pour la modélisation de chaque lien. Comme les autres méthodes, deux paramètres représentent les variables articulaires (prismatique ou rotoïde) du lien. Les quatre autres permettent la description de la géométrie du lien. En fait dans la plupart des cas, seulement deux paramètres fixes sont nécessaires (les deux autres restant nuls) et la notation se rapproche de celle de Denavit-Hartenberg, avec toutefois une meilleure cohérence dans l'attribution des indices. Dans les cas complexes et aux embranchements, les deux paramètres fixes supplémentaires sont utilisés. Selon la notation Khalil-Kleinfinger l'emplacement des repères d'une structure avec embranchement (voir Figure 2. 6). Se fait comme suit :

- z_j axe de l'articulation j supportant le corps j .
- x_j axe du corps j perpendiculaire aux axes z_j et z_{j+1} .
- x_i axe du corps i perpendiculaire aux axes z_i et z_k .

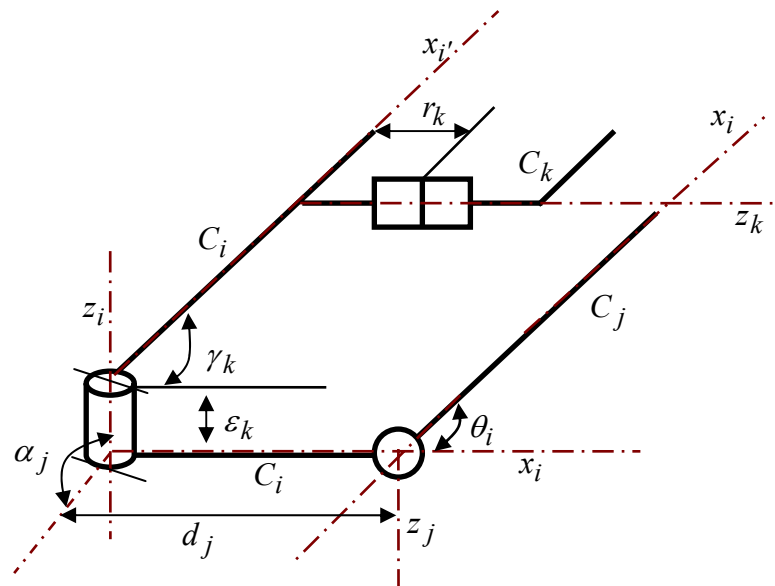


Figure 2.6 : Définition des paramètres suivant *khalil-Kleinfinger*

La Figure 2.3 montre l'emploi des paramètres selon la notation de khalil-Kleinfinger de $\theta_j, r_k, \alpha_j, d_j, \gamma_i, \epsilon_i$ qu'on peut le définir comme suit :

- θ_j angle algébrique entre x_i et x_j , mesuré autour de z_j ;
- r_k distance algébrique, mesurée le long de z_k à partir du l'axe x_i' .
- α_j angle algébrique entre z_i et z_j , mesuré autour de x_i ;

- d_j distance algébrique, mesurée le long de x_i entre z_i et z_j .
- γ_i angle spécial pour les embranchements entre l'axe x_i' et x_i autour du z_i .
- ε_i distance spéciale pour les embranchements entre l'axe x_i' et x_i mesurée le long de z_i

La matrice de transformation associée à la modélisation Kleinfinger-Khalil permettant de passer du repère R_i du lien i au repère R_j du lien j est alors obtenue par composition des transformations liées aux six paramètres:

$${}^iH_j = R(z_j, \gamma_j) \cdot T(z_j, \varepsilon_j) \cdot R(x_{j-1}, \alpha_j) \cdot T(x_{j-1}, d_j) \cdot R(z_j, \theta_j) \cdot T(z_j, r_j) \quad (2.3)$$

D'une manière général $R(u, q)$ étant la matrice représentant une rotation d'un angle q autour de l'axe u et $T(v, t)$ étant la matrice représentant une translation d'une distance t le long de l'axe v . d'où la matrice de transformation [13] se donne :

$${}^iH_j = \begin{pmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j + r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + \varepsilon_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Avec :

$$C\alpha_j = \cos \alpha_j \quad C\theta_j = \cos \theta_j \quad C\gamma_j = \cos \gamma_j$$

$$S\alpha_j = \sin \alpha_j \quad S\theta_j = \sin \theta_j \quad S\gamma_j = \sin \gamma_j$$

2.1.3 Notations des matrices de passages

Les matrices de passages basés sur la translation et la rotation permettent de décrire le résultat d'un mouvement amenant le solide d'une situation initiale à une situation finale. L'orientation d'un solide dans l'espace est la donnée d'une base attachée à un solide en rotation détermine de manière unique son orientation dans l'espace. Différentes représentations peuvent être utilisées dans les principales sont :

a) Angles d'Euler classiques

Les angles d'Euler classiques permettent de décrire l'orientation d'un solide par trois rotations successives. Conformément à la figure 2.4, il s'agit des rotations $R(z, \psi)$, $R(x_{\psi}, \theta)$ et enfin $R(z_{\theta}, \varphi)$ où x_{ψ} et z_{θ} sont déduits des vecteurs du repère de base

Conformément à la figure 2.7. Les angles ψ , θ et φ sont connus respectivement sous les termes de précession, nutation et rotation propre.

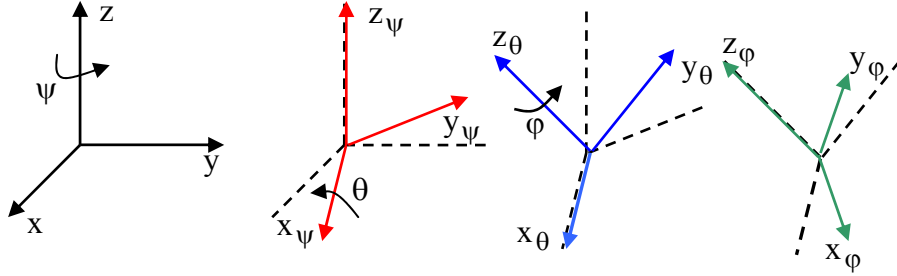


Figure 2.7 : Paramétrage par les angles d'Euler

Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un repère ayant tourné [12], [15] :

$$R_{\phi} = R(z, \psi) R(x_{\psi}, \theta) R(z_{\theta}, \varphi).$$

Sous forme développée :

$$R_{\phi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Finalement la matrice de rotation est :

$$R_{\phi} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La transformation inverse permet d'établir les angles d'Euler à partir des cosinus directeurs :

➤ Si $Z_z \neq \pm 1$:

$$\psi = a \tan 2(z_x, -z_y),$$

$$\theta = a \cos z_z,$$

$$\varphi = a \tan 2(x_z, y_z).$$

➤ Si $Z_z = \pm 1$:

$$\theta = \pi(1 - z_z)/2,$$

$\psi + z_z \varphi = a \tan 2(y_x, x_x)$, alors ψ et φ sont indéterminés.

b) Angles roulis, tangage et lacet

Pour cette représentation, la littérature donne de nombreuses définitions [15] [16] [17]. Ces angles, très utilisés par les anglo-saxons et donc par les industriels, portent les noms de roll, pitch et yaw en anglais. Il s'agit en fait d'angles d'Euler non classiques en cela que les rotations s'effectuent autour d'axes fixes. Nous adoptons la définition de [15] : les rotations successives, conformément à la Figure 2.8, sont $\mathfrak{R}(x, \theta_r)$, $\mathfrak{R}(y, \theta_t)$ puis $\mathfrak{R}(z, \theta_l)$. Les angles θ_r , θ_t et θ_l sont respectivement désignés sous les noms d'angles de roulis, tangage et lacet.

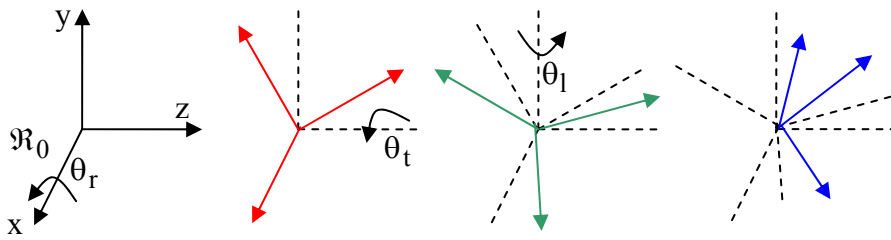


Figure 2.8 : Paramétrages par les angles Roulis-Tangage-Lacet

Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un axe du repère fixe \mathfrak{R}_0 . La matrice des rotations successives est donnée par :

$$R_\phi = \mathfrak{R}(x, \theta_r) \mathfrak{R}(y, \theta_t) \mathfrak{R}(z, \theta_l) \quad (2.7)$$

Sous formes développée :

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta_l & -\sin \theta_l & 0 \\ \sin \theta_l & \cos \theta_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_t & 0 & \sin \theta_t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_t & 0 & \cos \theta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ 0 & \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Finalement la matrice de rotation est :

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta_l \cos \theta_t & -\sin \theta_l \cos \theta_r + \cos \theta_l \sin \theta_t \sin \theta_r & \sin \theta_l \sin \theta_r + \cos \theta_l \sin \theta_t \cos \theta_r \\ \sin \theta_l \cos \theta_t & \cos \theta_l \cos \theta_r + \sin \theta_l \sin \theta_t \sin \theta_r & -\cos \theta_l \sin \theta_r + \sin \theta_l \sin \theta_t \cos \theta_r \\ -\sin \theta_t & \cos \theta_t \sin \theta_r & \cos \theta_t \cos \theta_r \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La transformation inverse permet d'établir les angles d'Euler à partir des cosinus directeurs :

$$\triangleright \text{ Si } \theta_t \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_l = a \tan 2(x_y, x_x).$$

$$\theta_t = a \tan 2(-x_z, \sqrt{x_x^2 + x_y^2}).$$

$$\theta_r = a \tan 2(y_z, z_z)$$

$$\triangleright \text{ Si } \theta_t = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_l - \text{signe}(\theta_t)\theta_r = a \tan 2(z_y, z_z),$$

Ou

$$\theta_l - \text{signe}(\theta_t)\theta_r = -a \tan 2(y_x, y_y),$$

Alors θ_l et θ_r sont indéterminés.

2.2 Modèle cinématique

Le modèle cinématique est un modèle des vitesses. Il exprime les relations entre les vitesses articulaires de chaque joint et les vitesses cartésiennes d'un point de la chaîne cinématique. Si on considère une chaîne cinématique série possédant n articulations et dont les variables articulaires sont notées q_1 à q_n et $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, le vecteur des coordonnées articulaires. Les coordonnées du vecteur vitesse linéaire ${}^0v_{on}$ et du vecteur vitesse de rotation ${}^0\Omega_{on}$ du repère lié à l'organe terminal exprimé dans le repère de base sont calculé en utilisant les méthodes suivantes [14] :

2.2.1 Méthode de la loi de composition des vitesses

a) Calcul des vitesses angulaires

la vitesse angulaire d'un organe terminal est donnée (en appliquant la loi de composition des vitesses) par :

$${}^0\Omega_{on} = {}^0\Omega_{01} + {}^0\Omega_{12} + \dots + {}^0\Omega_{n-1,n} = \sum_{i=1}^n {}^0\Omega_{i-1,i}$$

(2.10)

Si l'axe q_i est prismatique : ${}^0\Omega_{i-1,i} = 0$.

Si l'axe i est rotoïde. : ${}^0\Omega_{i-1,i} = {}^0z_{i-1} \dot{q}_i$

Avec : ${}^0z_{i-1}$ est les composantes de l'axe z de l'articulation i-1 par rapport au point O du repère de base.

b) Calcul des vitesses linéaires

De la même manière la vitesse linéaire de OT est donnée par :

$${}^0v_{on} = {}^0v_{on}^{O_n} = {}^0v_{01}^{O_n} + {}^0v_{12}^{O_n} + \dots + {}^0v_{n-1,n}^{O_n} = \sum_{i=1}^n {}^0v_{i-1,i}^{O_n} \quad (2.11)$$

Si l'axe q_i est prismatique : ${}^0v_{i-1,i}^{O_n} = {}^0z_{i-1} \dot{q}_i$

Si l'axe i est rotoïde : ${}^0v_{i-1,i}^{O_n} = {}^0\Omega_{i-1,i} \wedge {}^0(O_{i-1}O_n)$.

Dans ce cas, on a aussi : ${}^0v_{i-1,i}^{O_n} = \dot{q}_i {}^0z_{i-1} \wedge (R_{0,i-1} {}^{i-1}O_n)$

Avec :

$R_{0,i-1}$ est la matrice de rotation du joint i-1 par rapport à la base,

${}^{i-1}O_n$ est les coordonnées cartésiennes de OT par rapport au joint i-1.

c) Calcul du Jacobien direct

À partir de a) et b) le Jacobien J est obtenu systématiquement avec la seule connaissance du modèle géométrique direct et sans calculer de dérivée partielle.

$$J = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_n]$$

$$\text{Avec : } J_i = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ si l'axe i est prismatique,}$$

$$\text{et } J_i = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \wedge (R_{0,i-1} {}^{i-1}O_n) \\ {}^0z_{i-1} \end{bmatrix} \text{ si l'axe i est rotoïde.}$$

2.2.2 Méthode différentielle ou de calcul direct

a) Définition de la matrice Jacobienne J

La matrice Jacobienne représente un opérateur permettant de lier les vitesses des corps d'une chaîne mécanique exprimée dans différents espaces vectoriels. Considérons le modèle géométrique d'une chaîne cinématique possédant m degrés de liberté évoluant dans un espace à n dimensions (m et n indépendants) tel que :

$$y = f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_m(q_1, \dots, q_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La matrice jacobienne est alors définie comme suit :

$$\mathbf{J}(x) = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Grace a la loi de la chaine on a :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \dot{x} \quad (2.14)$$

b) Calcul des vitesses linéaires

si le modèle géométrique est donnée par :

$${}^0_H(q) = \begin{pmatrix} {}^0_R(q) & {}^0_P(q) \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

La vitesse linéaire d'un OT sera alors liée à la vitesse des articulations par la relation suivante :

$${}^0V_T = {}^0J_T(q) \dot{q} \quad (2.16)$$

Où la matrice jacobienne est donnée par :

$${}^0J_T(q) = \frac{\partial {}^0P_T(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_z}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

c) Calcul des vitesses angulaires

On applique la loi de propagation de vitesse :

$$S({}^0\Omega_T) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} R_{0T} \cdot R_{0T}^T. \quad (2.18)$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} R_{0T} \cdot R_{0T}^T = \frac{\partial R_{0T}}{\partial q_1} \dot{q}_1 \cdot R_{0T}^T + \frac{\partial R_{0T}}{\partial q_2} \dot{q}_2 \cdot R_{0T}^T + \dots + \frac{\partial R_{0T}}{\partial q_n} \dot{q}_n \cdot R_{0T}^T \quad (2.19)$$

Avec :

$\Omega_z, \Omega_y, \Omega_x$ les composantes des vitesses de rotations par rapport aux trois axes (x,y,z).

R_{0T} est la matrice de rotation de OT/ au repère de base.

2.3 Modèle dynamique

Le modèle dynamique exprime les équations du mouvement de mécanismes articulés, qui permettent d'établir les relations entre les couples (forces exercées par les actionneurs) et les situations des articulations. Cette section est consacrée à la définition des différentes propriétés dynamiques des corps et les méthodes les plus utilisées pour le calcul des éléments du modèle dynamique [18] [19].

2.3.1 Propriétés dynamiques des corps

Nous définirons un corps comme un solide matériel ayant des propriétés géométriques et dynamiques :

- **La masse (m)** est une propriété de la matière, elle s'exprime en kilogramme (kg). Le kilogramme est défini par la masse du prototype international, cylindre en platine iridié du Pavillon de Breteuil à Sèvres (France), seule unité encore définie par un étalon.

Une masse m d'un corps S peut-être calculée de la manière suivante :

$$m = \int_S dm \quad \text{dm étant l'élément différentiel de masse.}$$

- **Le Centre d'inertie** est le point G défini par $[x_g, y_g, z_g]$ dans le repère utilisé avec :

$$x_g = \frac{1}{m} \int_S x \cdot dm.$$

$$y_g = \frac{1}{m} \int_S y \cdot dm.$$

$$z_g = \frac{1}{m} \int_S z \cdot dm.$$

- **Le tenseur d'inertie** caractérise la répartition massique d'un corps : il est mis en évidence lors d'un mouvement de rotation. Le tenseur d'inertie défini par rapport à un repère R peut être exprimé sous la forme d'une matrice 3x3 :

$$I_R = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int_S xy \, dm$$

$$I_{yz} = \int_S yz \, dm$$

$$I_{xz} = \int_S xz \, dm$$

En résumé nous avons 10 paramètres dynamiques indépendants pour un corps :

$$m, x_g, y_g, z_g, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$$

2.3.2 Méthode de Lagrange

a) calcul l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un corps S par rapport à R_0 peut s'écrire :

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_{ci}^T I_i \omega_{ci} \quad (2.20)$$

L'énergie du système complet est la somme des énergies cinétiques de chaque corps :

$$T = \sum_i T_i \quad (2.21)$$

Il est donc nécessaire de calculer la vitesse linéaire du centre d'inertie v_G et la vitesse de rotation ω du corps S . La position du centre d'inertie du corps S dans le repère de base s'obtient de la même manière que la position de l'effecteur avec le modèle géométrique direct. Sa vitesse v_G évaluée avec une dérivation de cette position par rapport au temps. Le vecteur vitesse de rotation du repère associé à S par rapport à son père, projeté dans le repère père est déduit de son vecteur de rotation par une dérivation.

b) Calcul l'énergie potentielle

L'énergie potentielle du corps S (V_s) par rapport à R_0 , si le vecteur de l'accélération de la pesanteur \vec{g} est dans le sens opposé du vecteur z_0 du repère R_0 , est définie par :

$$V_i = -m_i g z \quad (2.22)$$

Avec m_i la masse du corps S , g la valeur de l'accélération de la pesanteur, et z la hauteur entre le centre de gravité du solide S et O_0 (origine du repère R_0).

L'énergie potentielle du système complet est la somme des énergies potentielles de Chaque corps :

$$V = \sum_S V_i \quad (2.23)$$

c) Calcul des éléments pour le modèle dynamique

Les énergies cinétique et potentielle par différentiation permettent d'obtenir les équations du mouvement du système. selon le principe de Hamilton la dynamique du système est obtenue Si l'équations de Lagrange.[20] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q = 0 \quad (2.24)$$

$$Q = -\frac{dV}{dq} + \Gamma + Q_{nc} \quad (2.25)$$

Avec :

Γ : Vecteur des forces généralisées aux articulations

q_i : Vecteur des variables articulaires.

Q_{nc} : Vecteur de forces non conservatrices

V : vecteur d'énergie potentielle.

Ce modèle dynamique peut se réécrire sous la forme suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(\dot{q}) = \Gamma$$

Avec :

M la matrice d'inertie du système

C la matrice des effets centrifuges et de Coriolis

G les effets de la gravité

La matrice d'inertie est directement liée à l'expression de l'énergie cinétique par la relation suivante :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.26)$$

La matrice d'inertie étant symétrique, nous avons une seule solution pour déterminer Chaque élément de cette matrice.

Pour pouvoir utiliser certaines propriétés utilisées en commande des systèmes mécaniques, le vecteur $C(q, \dot{q})\dot{q}$ doit être présenté sous cette forme, et la matrice C doit respecter la relation :

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})\dot{q} \quad (2.27)$$

Tel que : N soit antisymétrique.

Une solution pour déterminer C est d'utiliser les symboles de Christoffel de la première espèce [25]. Celle-ci est directement mise en œuvre dans les langages de calcul symbolique par :

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{i,j}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{i,k}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{j,k}}{\partial q_i} \right) \frac{q_k}{2} \quad (2.28)$$

Le vecteur des effets de gravité G est calculé symboliquement par le gradient de l'énergie Potentielle par rapport au vecteur q :

$$G = \nabla V(q) . \quad (2.29)$$

2.3.3 Méthode de Newton-Euler itérative

Une autre méthode est la formulation Newton-Euler qui donne directement le modèle dynamique [21][22][23]. De plus, elle est très performante du point de vue des calculs à effectuer, ce qui permet de pouvoir l'utiliser directement en ligne, (le temps de calcul croissant linéairement avec le nombre de degrés de liberté). Celle-ci impose par rapport à la méthode précédente d'avoir un seul corps pour chacun des repères.

$$F_i = m_i r_i''$$

$$N_i = J_i \omega_i' + \omega_i \times (J_i \cdot \omega_i)$$

$$f_i = F_i + f_{i+1}$$

$$n_i = n_{i+1} + N_i + (P_i^* + S_i) \times F_i + P_i \times f_{i+1}$$

$$r_i'' = \omega_i' \times S_i + \omega_i \times (\omega_i \times S_i) + P_i''$$

➤ pour une articulation rotoïde :

$$\omega_i = \omega_{i-1} + z_{i-1} q_i'$$

$$\omega_i' = \omega_{i-1}' + z_{i-1} q_i'' + \omega_{i-1} \times z_{i-1} q_i'$$

$$p_i'' = \omega_i' \times P_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times P_i^*) + P_i''$$

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot n_i$$

➤ pour une articulation prismatique :

$$\omega_i = \omega_{i-1}$$

$$\omega_i' = \omega_{i-1}'$$

$$p_i'' = z_{i-1} q_i'' + \omega_i' \times P_i^* + 2 \omega_i \times (z_{i-1} q_i') + \omega_i \times (\omega_i \times P_i^*) + P_{i-1}''$$

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot f_i$$

Avec :

P_i La position de l'origine du repère lié au corps i dans R_0

P_i^* La position de l'origine du repère lié au corps i par rapport au repère associé au corps i-1

P_{i-1}'' Dérivée seconde de P_i

S_i La position du centre de gravité du corps i

ω_i vitesse angulaire du corps i

ω_i' Accélération angulaire du bras i

r_i'' Accélération linéaire du centre de gravité du corps i

F_i Force totale exercée sur le corps i

N_i moment total exercé sur le corps i

f_i force exercée sur le corps i par le corps i-1

n_i moment exercé sur le corps i par le corps $i-1$

τ_i force généralisée exercée par l'actionneur i

q_i coordonnées généralisées de l'articulation i

J_i matrice d'inertie du bras i par rapport à son centre de masse

Cet algorithme est initialisé par $\omega'_0 = \omega_0 = 0$ et $P''_0 = [0 \ 0 \ 9.8]^T$. Une première itération, du repère de base vers le repère de l'effecteur, est mise en œuvre pour déterminer les vitesses et accélérations de chaque corps $(\omega_i, \omega'_i, P''_{i-1}, r''_{i-1})$. Une seconde itération, du repère de l'effecteur vers la base, détermine les forces généralisées exercées par les actionneurs (τ_i) .

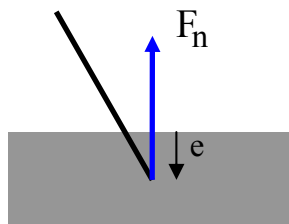
2.4 Interaction des mécanismes avec un environnement indéformable

Nous pouvons diviser le problème de la modélisation d'un contact entre un mécanisme et son environnement en deux parties : la première serait le modèle du contact et leur type de contrainte, c'est à dire la détermination des efforts exercés sur un des points du mécanisme, la seconde comment cette force agit sur le mécanisme. Pour la première partie nous allons présenter les deux types de contrainte des modèles de contact. La seconde partie détaillera les modifications du modèle dynamique du mécanisme apportées par l'ajout d'efforts extérieurs. Par hypothèse, nous considérerons uniquement le contact du mécanisme avec un obstacle plan. Mais la méthode est généralisable lorsque l'environnement est de forme complexe. En effet, nous pouvons décomposer l'environnement en portion de plan ou en un ensemble de surface. Dans le cas d'une surface, avec la plus part des modèles de contact, nous devons déterminer la normale et le plan tangent à cette surface.

2.4.1 Modèles de contact

a) Ressort – Amortisseur

Ce modèle de contact exprime une force normale F_n à la surface de contact. Cette force est proportionnelle à l'enfoncement (e) du point considéré dans la surface.



Nous pouvons exprimer ce modèle ressort - amortisseur par la relation suivante :

$$\begin{cases} F_n = K_r e + K_a \dot{e} & \text{si } e > 0 \\ F_n = 0 & \text{si } e \leq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Avec K_r le coefficient de raideur

K_a le coefficient d'amortissement

Cependant le modèle du ressort n'est pas forcément réaliste car l'enfoncement dépend linéairement de la force exercée. Et en général la raideur n'est pas une fonction linéaire de l'enfoncement, Cependant le modèle ressort permet de tester avec efficacité les lois de commande comprenant une adaptation d'impédance. La partie amortissement, lors de l'impact ($\dot{e} \neq 0$), provoque une discontinuité dans la force d'interaction, et ce phénomène ne peut être physiquement justifié.

b) Contact roues-sol

Le modèle du contact roues-sol détermine les principales conditions du mouvement qui définissent le roulement ou le glissement. En fonctionnement normal, la roue d'un véhicule tourne en adhérant sur le sol, comme elle peut glisser et perdre son adhérence. A partir de ce fonctionnement on peut déduire les conditions de propulsion donnant les limites dans lesquelles doit se situer la force de propulsion. Ainsi on définit les deux grandeurs physiques suivantes : la résistance au roulement et la résistance au glissement. La force de propulsion F_p qui doit être appliquée pour que la voiture démarre sans glisser, doit être comprise entre la force de résistance au glissement F_{rg} et la force de résistance au roulement F_{rr} telle que :

$$F_{rr} < F_p < F_{rg}$$

Avec :

$$\begin{cases} F_{rr} = P_t \lambda_1 \\ F_{rg} = P_m \lambda_2 \end{cases}$$

(2.31)

Sachant que P_t est le poids total du véhicule, λ_1 est le coefficient de frottement qui dépend de la nature du sol, de l'état du bandage et de la pression de gonflage du pneumatique et de la vitesse de déplacement, P_m est le poids supportée par les roues motrices soumises à l'effort et λ_2 est le coefficient de frottement au glissement qui est fonction du bandage du pneumatique et de l'état du sol.

c) Autres modèles de contact

Parmi les autres modèles de contact, nous pouvons citer les modèles de contact distribués. Pour les modèles d'impacts et de chocs nous pouvons aussi considérer ceux utilisant la conservation de la quantité de mouvement.

2.4.2 types de contraintes

a) Contraintes holonomiques

Les contraintes holonomiques limitent le mouvement des articulations d'une structure articulée dans son espace de travail. Un ensemble de m contraintes holonomiques peut toujours s'exprimer sous la forme suivante

$g(q) = 0$. Où g est une fonction différentiable de dimension m .

La figure 2.9 illustre l'exemple d'une contrainte holonomique agissant sur un bras manipulateur à 3ddl, où la fonction $g(q)$ est donnée par :

$$g(q) = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 + 2ab \cos(q_1) + 2a.c \cos(q_2 + q_3) + 2b.c \cos(q_3) = 0 \quad (2.32)$$

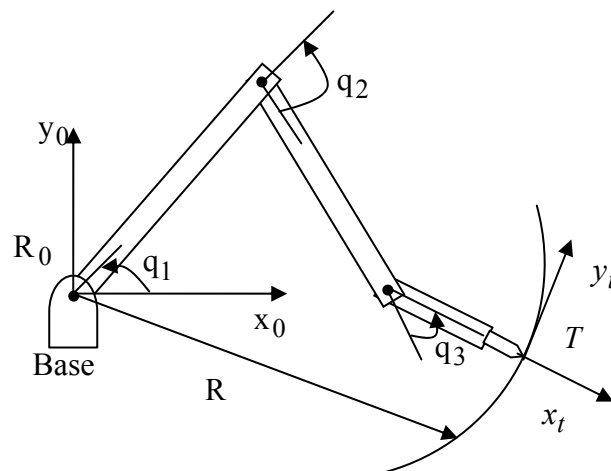


Figure 2.9 : Représentation d'une contrainte holonomique

Avec :

a, b et c les longueurs des segments,

q_1, q_2, q_3 les variables articulaires.

b) Contraintes non holonomiques

L'existence de contraintes non holonomes implique que le système ne peut pas effectuer certains mouvements instantanément [24]. Par exemple, dans le cas de la roue, il ne peut y avoir

de translation instantanée parallèlement à l'axe de la roue. Un tel déplacement nécessitera des manœuvres. De même, comme on le sait bien, une voiture ne peut se garer facilement sans effectuer de créneaux.

Un système de configuration q soumis à des contraintes non holonomiques sur les vitesses, peut être regroupées sous la forme (pfaffienne) $A^T(q)\dot{q} = 0$.

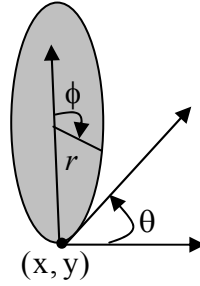


Figure 2.10 : Contrainte non holonomique

La figure 2.10 illustre l'exemple de contraintes non holonomiques de la roue en contact avec le sol. Dans cet exemple les contraintes non holonomiques sont données par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} - r \cos(\theta) \dot{\phi} \\ \dot{y} - r \sin(\theta) \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r \cos(\theta) \dot{\phi} \\ 0 & 1 & 0 & -r \sin(\theta) \dot{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A(q) \dot{q} = 0 \quad (2.33)$$

2.4.3 Modèle dynamique lors d'un contact

Lors d'un contact, des forces extérieures s'exercent sur le mécanisme. Elles peuvent être introduites dans le modèle dynamique par l'ajout d'un couple supplémentaire aux couples des actionneurs [25]. Le modèle dynamique peut donc être écrit sous la forme suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(\dot{q}) + V(\dot{q}) = \Gamma + \Gamma_e \quad (2.34)$$

Avec Γ_e les forces généralisées dues au contact appliquées sur les articulations.

Cependant les forces extérieures, dues au contact, s'exerçant sur le mécanisme sont exprimées dans le repère de base dans un espace cartésien et non dans l'espace articulaire. La relation suivante permet d'exprimer la force de contact F_e dans l'espace articulaire en un point X du mécanisme dont la position $X(q)$ est calculée dans le repère de base R_0 :

$$\Gamma_e = J^T(q)F_e \quad (2.35)$$

$$\text{Avec } J(q) = \frac{\partial X(q)}{\partial q} \quad (2.36)$$

d'où :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(\dot{q}) + V(\dot{q}) = \Gamma + J^T(q)F_e \quad (2.37)$$

Dans le cas de multiples points de contact nous pouvons écrire :

$$\Gamma_e = \sum_i \Gamma_e = \sum_i J_i^T(q)F_i = \begin{bmatrix} J_1^T & J_2^T & \dots & J_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Le calcul symbolique de J est obtenu en deux étapes la première est le calcul de $X(q)$. Cette étape utilise le modèle géométrique décrit précédemment. La seconde étape est l'utilisation de la fonction calculant la Jacobienne d'un vecteur de fonction ($X(q)$) par rapport à un vecteur de paramètre (q).

3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu différents types de modélisation d'un mécanisme articulé tel que : la modélisation géométrique, cinématique et la modélisation dynamique. La modélisation dynamique est la plus utilisée actuellement dans la plus part des recherches dans le domaine de la robotique. Elle sert à étudier les forces nécessaires pour provoquer le mouvement que ce soit : l'accélération à partir du point de repos, maintenir la vitesse constante et la décélération jusqu'à l'arrêt du robot. Ce qui mène à dire que la simulation du modèle dynamique peut être utilisée pour la commande en position, vitesse et accélération du robot en suivant une trajectoire donnée (consigne).

Chapitre 3

Application aux structures arborescentes

Nous avons développé des algorithmes en calcul symbolique « Maple », qui sert à générer des modèles géométriques, cinématiques et dynamiques des systèmes mécaniques articulés. On a basé sur les points cités par la suite, pour le choix des méthodes de calcul mathématique utilisées pour générer ces modèles:

- Possibilité d'écrire les équations des modèles sous l'environnement Maple.
- Utilisation des méthodes de calcul les plus répandues aux systèmes, sans passer par les techniques de convention.
- Utilisation des méthodes de calcul les plus utilisées dans l'environnement industriel.
- Utilisation des méthodes de calcul les plus utilisées par les chercheurs dans le domaine de la robotique.

Pour définir nos repères, nous avons choisi, après analyse, une structure de données Arborescente définie dans le chapitre 2. Dans cette structure chaque élément de donnée est défini par rapport à un élément père de même nature et unique. Nous utilisons la notion de liaison cinématique entre les différents corps, dans chaque corps a au moins une liaison avec un des autres corps, ces liaisons ont au minimum 1 D.D.L., généralement une liaison prismatique ou une liaison pivot, ces liaisons peuvent être motorisées ou non. Pour définir le mouvement d'un corps par rapport à un autre, nous avons choisi, les matrices de passage basées sur la translation et la rotation. Le calcul de modèle géométrique est obtenu, en calculant la matrice de passage homogène de l'organe terminal par rapport au repère de base définie dans le chapitre 2. Dans la définition d'un repère R_I par rapport à son père R_0 est défini de la manière suivante [30] :

$$R_I = (R_0, [dx, dy, dz]^T, [\theta_r, \theta_t, \theta_l]^T).$$

Le vecteur $[dx, dy, dz]$ définit la translation selon \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} .

Le vecteur $[\theta_r, \theta_t, \theta_l]$ définit la rotation autour des axes $(O, \vec{x}), (O, \vec{y})$ et (O, \vec{z}) .

Cependant l'ordre des rotations a ici une importance. Pour éviter toute confusion, nous avons décidé de ne rentrer qu'un seul angle par repère, ce qui permet d'une part de bien noter les angles successifs et donc de minimiser le taux d'erreur lors de l'entrée des paramètres, et d'autre part d'avoir un repère pour chacun des angles dépendants du temps. Ce choix de notation est donc équivalent aux angles de Roulis - Tangage - Lacet.

Le modèle cinématique ou les coordonnées de vecteur vitesses linéaire et de vecteur vitesses angulaire du repère lié à l'organe terminal exprimé dans le repère de base, sont calculées en utilisant les méthodes directes. Pour le vecteur de vitesses linéaire on a utilisé la formule $V = J.\dot{q}$ Avec ; V est le vecteur de vitesses linéaires, J est le Jacobien, \dot{q} est le vecteur (nx1) de vitesses articulaires. Ainsi pour le vecteur de vitesses angulaire on a utilisé la méthode de la matrice anti-symétrique.

Pour la génération du modèle dynamique, Nous avons utilisé la méthode de Lagrange ce qui nous facilite le calcul de la matrice d'inertie, la matrice des effets de Coriolis et centrifuge et la matrice des effets de la gravité.

L'utilisation des algorithmes des langages de calcul symbolique, nécessite de définir une syntaxe afin de déterminer précisément l'ensemble des paramètres appartenant aux corps et aux repères. Nous avons choisi de la définir en utilisant directement la syntaxe du langage Maple [30], celle ci nous permet d'utiliser des noms de variable explicites. Donc, les noms des variables définissant les repères et les corps peuvent directement porter leurs propres noms.

Nous avons opté pour centraliser tous les paramètres principaux dans un seul fichier : le fichier de définition. Nous avons choisi de diviser en plusieurs parties le fichier de définition. Les quatre parties principales sont :

- la définition des liaisons,
- la définition des corps,
- la définition des points du mécanisme sur lesquels peuvent être appliqués des forces extérieures,
- la définition des variables dérivables par rapport au temps.

1. Application à une chaîne cinématique fermée

1.1 Description du mécanisme

Soit le mécanisme avec une chaîne cinématique fermée [31] illustré sur la Figure 3.1 qui sera ouverte au niveau de l'une de ces deux liaisons rotoïdes (voir figure 3.3). Les positions des repères, ainsi que les principaux paramètres de ce mécanisme, sont définis sur la Figure 3.2.

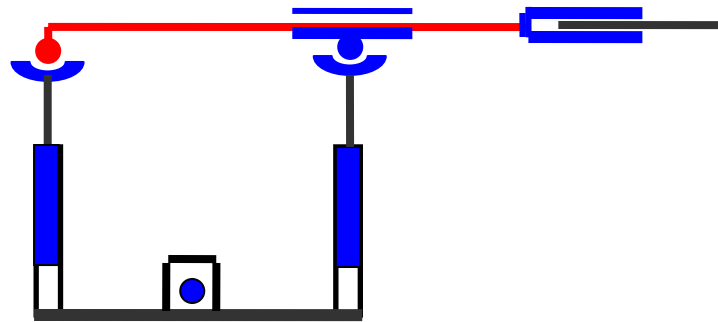


Figure 3.1 : Mécanisme à chaîne cinématique fermée

Nous pouvons décomposer ce mécanisme en un ensemble de corps indépendants dont les mouvements sont définis par des variables articulaires. Nous pouvons aussi définir un ensemble de repère lié à ce mécanisme.

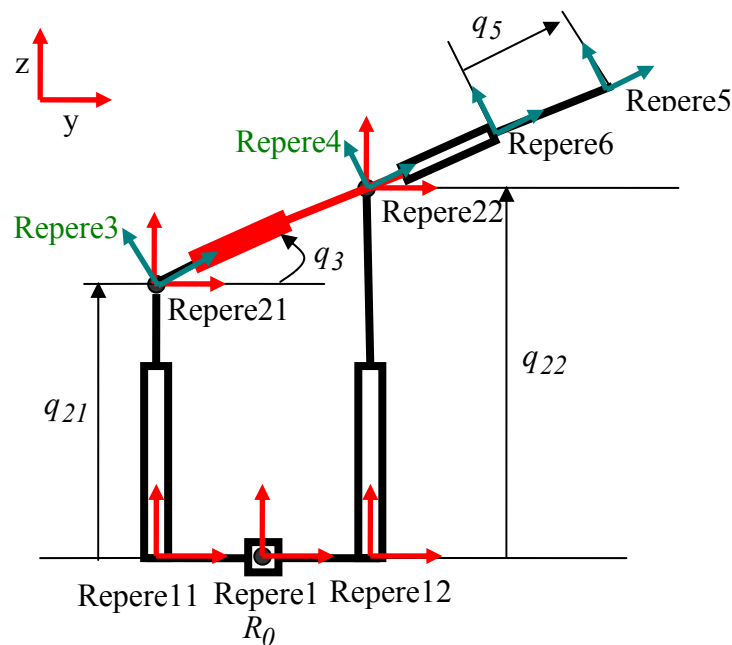


Figure 3.2 : Définition des repères

La Figure 3.3 montre la décomposition du mécanisme de la Figure 3.1 dans un graphe de corps et de repères définis dans la Figure 3.2. Chaque corps est relié à un repère par un arc double. Les repères sont reliés entre eux par des arcs simples. Les repères forment la structure arborescente [32][33].

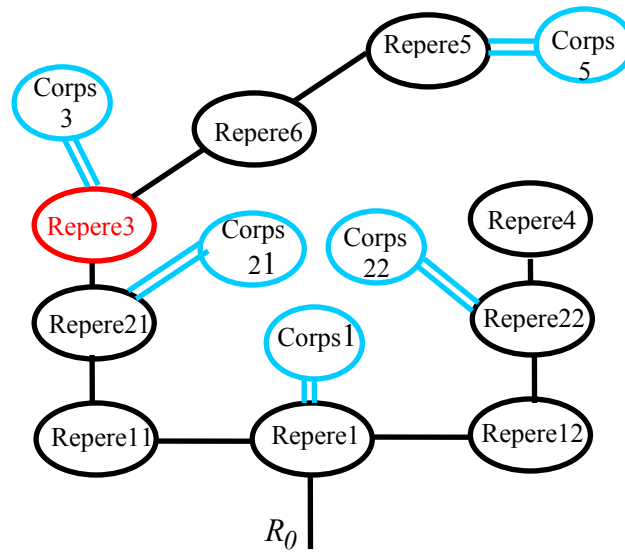


Figure 3.3 : Représentation arborescente du mécanisme

1.2 Fichier de définition

Le fichier de définition définit l'ensemble du mécanisme. Nous pouvons décrire le fichier de définition en détaillant les quatre parties exposées précédemment [27].

1. La première partie définit l'ensemble des repères dans une table. Le repère de base, ici R_0 , n'est pas défini. Prenons par exemple le repère Repere1 : dans la table Repere1 est une structure, dont le premier élément est un nom de variable correspondant au repère dans lequel est défini Repere1, ensuite vient un vecteur traduisant une translation entre les deux repères, ensuite un vecteur traduisant la rotation. Pour les repères, nous disposons d'une structure arborescente car plusieurs repères peuvent avoir un même repère de référence. Il est à noter aussi que la définition des repères est utilisée aussi pour la représentation graphique du système mécanique.

2. La seconde partie est la définition des corps (eux aussi définis dans une table, de la même manière que les repères). Les corps sont définis par rapport à un repère. Le corps Corps1 par exemple est défini par rapport au repère Repere1, le second paramètre du corps est la masse du solide $m1$, le troisième est la matrice d'inertie définie dans le repère du corps Repere1, le quatrième paramètre est la position du centre d'inertie définie aussi par rapport à ce repère.

3. La troisième partie de ce fichier est la définition des points sur lesquels peuvent être appliqués des forces extérieures, ici nous n'avons qu'un seul point sur lequel nous exercerons des forces extérieures Repere5, nous pouvons noter que ce point est défini par un repère.

4. La dernière partie du fichier est la définition des variables dérivables par rapport au temps. (dans cet exemple, ce sont toutes des variables articulaires). Ces variables doivent toutes appartenir aux éléments définissant les repères. Ces variables sont regroupées dans un vecteur appelé q . Toutes les autres variables utilisées pour la définition des repères et des corps seront considérées constantes.

A partir de ces définitions, nous pouvons définir le fichier de définition suivant :

DEFINITIONS DE LA STRUCTURE DUMECANISME

1- DEFINITION DES LIAISONS DE MECANISME

```
liaison_véhicule:=table([
  Repere1=( $[R0, \text{vector}([q1, 0, 0]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere11=( $[Repere1, \text{vector}([0, -R2, 0]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere12=( $[Repere1, \text{vector}([0, R2, 0]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere21=( $[Repere11, \text{vector}([0, 0, q21]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere22=( $[Repere12, \text{vector}([0, 0, q22]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere3=( $[Repere21, \text{vector}([0, 0, 0]), \text{vector}([q3, 0, 0])]$ ),
  Repere4=( $[Repere22, \text{vector}([0, 0, 0]), \text{vector}([q3, 0, 0])]$ ),
  Repere5=( $[Repere6, \text{vector}([0, q5, 0]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ ),
  Repere6=( $[Repere3, \text{vector}([0, 3*R2, 0]), \text{vector}([0, 0, 0])]$ )
]);
```

2-DEFINITION DE L'ENSEMBLES DU CORPS DE MECANISME

```

Repere_corps:=table([
    Repere1=( [corps1,m1,
matrix([[XX1,XY1,XZ1],[XY1,YY1,ZY1],[XZ1,YZ1,ZZ1]]),
Vector([xG1,yG1,zG1,1]))),
    Repere21= ([ corps21,m2,
matrix([[XX2,XY2,XZ2],[XY2,YY2,ZY2],[XZ2,YZ2,ZZ2]]),
Vector([xG2,yG2,zG2,1]))),
    Repere22=( [corps22,m2,
matrix([[XX2,XY2,XZ2],[XY2,YY2,ZY2],[XZ2,YZ2,ZZ2]]),
Vector([xG2,yG2,zG2,1]))),
    Repere3=( [corps3,m3,
matrix([[XX3,XY3,XZ3],[XY3,YY3,ZY3],[XZ3,YZ3,ZZ3]]),
Vector([xG3,yG3,zG3,1]))),
    Repere5=( [corps5,m5,
matrix([[XX5,XY5,XZ5],[XY5,YY5,ZY5],[XZ5,YZ5,ZZ5]]),
Vector([xG5,yG5,zG5,1]))
]);

```

3. DEFINITION DES POINT DE CONTACTS

PointEnContact:=[Repere5];

4. DEFINITION DES VARIABLES DERIVABLES PAR RAPPORT AU TEMPS

```

q:=vector([q1,q21,q22,q3,q5]);
ql:=convert(q,list) ;
qp:=vector ([q1p, q21p, q22p ,q3p, q5p]);
qpT:=convert (qp, Vector [column]);
qpl:=convert(qp ,list) ;
qs:=Vector([q1s, q21s, q22s, q3s, q5s]);
qsl:=convert(qs, list);

```

1.3 Modèle géométrique

Pour projeter chaque repère d'un organe terminal dans le repère sol R_0 . Une première procédure est nécessaire [29], consiste à trouver le chemin qui mène de R_0 à R_{OT} . Le parcours d'un chemin peut-être effectué avec la structure algorithmique suivante :

- 1- *Debut*
- 2- *Déclarations des deux variables (**Beg**, **effect**), avec leurs initialisations respectivement par R_0 et R_{OT} (repère de l'organe terminal) .*
- 3- *Définition des deux registres de sauvegardes (R et ch), on les initialise par le variable **effect** .*
- 4- *Si le contenu du registre R est différent du repère de base R_0 affecté au variable **Beg***
 R = Le repere_pere du repere_courant stocké dans la table liaison_véhicule .
 ch = ensemble des repères entre le repère_père du repere_courant et le repère de l'effecteur.
Finsi.
- 5- *renvoi ch*
- 6- *Fin*

Pour le présent exemple les chemins de passage aux organes terminaux sont obtenue en initialisant à chaque fois la variable **Beg** ; par le repère *Repere1* et **effect** ; par le repère de l'OT on obtient :

Chcorps5 := Repere1, Repere11, Repere21, Repere3, Repere6, Repere5.

Chcorps22 := Repere1, Repere12, Repere22.

Nous pouvons ensuite calculer la matrice de passage homogène du repère i par rapport à son repère père, en utilisant la procédure récursive suivante:

Homog ()

***H** : matrice de (4x4)*

***Pass** : Matrice diagonal de (4x4)*

Pour repere_courant dans ch faire

dx = Le déplacement du repere_courant suivant l'axe x sauvegardé dans la table liaison_véhicule.

dy = Le déplacement du repere_courant suivant l'axe y sauvegardé dans la table liaison_véhicule.

dz = Le déplacement du repere_courant suivant l'axe z sauvegardé dans la table liaison_véhicule.

rx = L'angle de rotation du **repere_courant** autour de l'axe **x** sauvegardé dans la table **liaison_véhicule**.

ry = L'angle de rotation du **repere_courant** autour de l'axe **y** sauvegardé dans la table **liaison_véhicule**.

rz = L'angle de rotation du **repere_courant** autour de l'axe **z** sauvegardé dans la table **liaison_véhicule**.

H=évaluation de la matrice de passage homogène (**M**) entre deux repères successives
Défini selon la méthode (roulis-tangage-lacet), en affectant aux variables de déplacement et de rotations les valeurs du **repere_courant**

pass= **pass*** **H**

finpour
renvoi pass

fin Homog

Le résultat de la fonction pour notre exemple est :

- la matrice de passage homogène entre repere5 et R0.

$$corps5\,pass := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q1 \\ 0 & \cos(q3) & -\sin(q3) & \cos(q3)*q5 + 3*\cos(q3)*R2 - R2 \\ 0 & \sin(q3) & \cos(q3) & \sin(q3)*q5 + 3*\sin(q3)*R2 + q21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- la matrice de passage homogène entre repere22 et R0.

$$corps22\,pass := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q1 \\ 0 & 1 & 0 & R2 \\ 0 & 0 & 1 & q22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Modèle cinématique

Le modèle cinématique est défini par le torseur cinématique :

$${}^0C_n = \begin{bmatrix} {}^0\mathcal{G}_n \\ {}^0\Omega_n \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q}$$

Avec :

0C_n Torseur cinématique du repère lié à l'organe terminal « R_n » par rapport au repère de base R_0 .

${}^0\mathcal{G}_n$ Vecteur vitesse linéaire du repère lié à OT « R_n » par rapport au repère de

base R_0 .

${}^0\Omega_n$ Vecteur vitesse de rotation de « R_n » par rapport à R_0 .

J Jacobien direct.

Nous utilisons la procédure algorithmique suivante pour le calcul de vecteur vitesse linéaire de chaque OT.

PROCEDURE DE CALCUL DE LA VITESSE LINEAIRE

Cinematiquelineaire(X_corps , $X_lineaire$)

X_corps = l'organe terminal

$X_lineaire$ = La matrice de passage de l'organe terminal par rapport à la base

T_x = La composante (1,4) de la matrice $X_lineaire$

T_y = la composante (2,4) de la matrice $X_lineaire$

T_z = la composante (3,4) de la matrice $X_lineaire$

J_v = la matrice Jacobienne de dimension (3xnbre des paramètres)

ql = la liste des variables articulaires

$c=1$

/*Première ligne de la matrice jacobienne*/

Pour **variable_courant** dans ql Faire

$J_v[1.c]$ = la dérivé de T_x par rapport à la **variable_courante**.

$C = c+1$

Finpour

/* Deuxième ligne de la matrice jacobienne*/

Pour **variable_courant** dans ql Faire

$J_v[2.c]$ = la dérivé de T_y par rapport à la **variable_courante**.

$C = c+1$

Finpour

/*troisième ligne de la matrice jacobienne*/

Pour **variable_courant** dans ql Faire

$J_v[3.c]$ = la dérivé de T_z par rapport à la **variable_courante**.

$C = c+1$

Finpour

/* l'évaluation de la Matrice jacobienne globale*/

$J_v[X_corps]$ = l'évaluation de la matrice J_v

/* calcul des composantes de vitesse linéaire*/

V = vecteur colonne(3x1)

V = la matrice jacobienne multiplié par le vecteur transposé des dérivés des variables articulaires

Renvoi

finCinematiquelineaire

De la même manière le vecteur vitesse de rotation est calculé en utilisant la procédure suivante :

PROCEDURE DE CALCUL DE LA VITESSE ANGULAIRE

cinématique angulaire (X_{corps} , $X_{\text{angulaire}}$)

X_{corps} = l'organe terminal

$X_{\text{angulaire}}$ = La matrice de passage de l'organe terminal par rapport à la base

$R = X_{\text{angulaire}}$

nv = le nombre des variables articulaires

Pour i de 1 jusqu'à nv Faire

$dR[qpl[i]]$ = dérivé de R par rapport $qpl[i]$

finpour

$dR0i$ = matrice de (3×3)

dRG = matrice de (3×3)

Pour i de 1 jusqu'à nv Faire

$dR0i$ = Evaluation de la matrice $dR[qpl[i]]$

$dRG = dRG + dR0i$ multiplier par la dérivé de la variable dérivable courante

finpour

/* calcul de la matrice inverse de $R0i$ */

R_{inv} = la matrice inverse de R

/* conclure les composantes de vitesse angulaire */

$ASW = dRG \cdot R_{inv}$ /* ASW la matrice Anti-symétrique */

$Wx = ASW[3.2]$

$Wy = ASW[1.3]$

$Wz = ASW[2.1]$

/* calcul la jacobienne des vitesses angulaires */

k = nombre des variables articulaires

Jw = la matrice jacobienne de $(3 \times k)$

$C = 1$

Pour **variable_courante** dans qpl Faire

$Jw[1, C]$ = dérivé de Wx par rapport à la variable courante

$C = C + 1$;

Finpour

$C = 1$

Pour **variable_courante** dans qpl Faire

$Jw[2, C]$ = dérivé de Wy par rapport à la variable courante

$C = C + 1$;

Finpour

```

C=1
Pour variable_courante dans ql Faire
Jw[3,c]=dérivé de Wz par rapport a la variable courante
C=c+1 ;
Finpour

JW[X_corps]=Evaluation de la matrice Jw

/* calcul des composantes de vitesse angulaire

W=vecteur colonne(3x1)
W:= matrice JW[X_corps] multiplié par le vecteur des dérivés des variables
dérivables transposé

renvoi
fincinematiqueangulaire

```

Les résultats obtenus pour les deux OT (Corps5, Corps22) de notre exemple est :

- Le torseur cinématique du Corps5.

$$v_{corps5} = \begin{bmatrix} q1p \\ -q3p * \sin(q3) * q5 - 3 * q3p * \sin(q3) * R2 + \cos(q3) * q5p \\ q21p + q3p * \cos(q3) * q5 + 3 * q3p * \cos(q3) * R2 + \sin(q3) * q5p \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{corps5} = \begin{bmatrix} q3p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Le torseur cinématique du Corps 22.

$$v_{corps22} = \begin{bmatrix} q1p \\ 0 \\ q22p \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{corps22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.5 Modèle dynamique

Nous avons utilisé le formalisme de Lagrange basé sur le calcul de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système complet pour obtenir le modèle dynamique, le calcul de l'énergie cinétique ou potentielle du système, nécessite de calculer la position du centre d'inertie de chaque corps dans le repère de base, se calcul peuvent être établie par la procédure récursive suivante :

PROCEDURE DE CALCUL DES CENTRES DE GRAVITE

centrgravite()

Mathom=Matrice (4x4):

Matpass =Matrice diagonal (4x4)

REF : repère du corps sélectionné

OG =vecteur(4x4) initialize a zero

OG:=quatrième élément dans la table Repere_corps de chaque repère qui présente un corps du système ;

Matpass_G [REF]:=la matrisse de passage du courant corps (**X_pass**) multiplié par le vecteur du centre de gravité par rapport à son repère propre (**OG**);

renvoi **Matpass_G[REF]**;

fin centrgravite

Avec : **X_pass** est la matrice de passage des corps du système obtenu avec le modèle géométrique direct,

OG est le vecteur de centre de gravité par rapport à son repère propre.

En suite on peut calculer l'énergie cinétique linéaire de chaque corps du système en utilisant la procédure récursive suivante :

PROCEDURE DE CALCUL DES ENERGIES D'UN MECANISME

EP=0

G =Vecteur d'accélération de la pesanteur

nb =nombre des variables articulaires

peres=la listes des repères pères

Pour **repere_courat** dans **peres** Faire

Pour **variable_courante** de 1 jusqu'au **nb** faire

V1=**V1**+dérivé de la **première composante** de la matrice passage du centre de gravité du **repere_courant**, par rapport a la **variable_courante**

Multiplié par la dérivé de la **variable_courante**

Fin pour

Pour **variable_courante** de 1 jusqu'au **nb** faire

V2=**V2**+dérivé de la **deuxième composante** de la matrice de passage du centre de gravité du **repere_courant**, par rapport à la **variable_courante**

Multiplier par la dérivé de la **variable_courante**

Fin pour

Pour **variable_courante** de 1 jusqu'au **nb** faire

V2=**V2**+dérivé de la **troisième composante** de la matrice de passage du centre de gravité du **repere_courant**, par rapport à la **variable_courante**

Multiplier par la dérivé de la **variable_courante**

finpour

Vitesse du repère courant(**V**)= Vecteur composé des vitesse (**V1,V2,V3**):

TV= vitesse transposé de (**V**)

ECv du corps courant=1/2*la masse du corps courant **multiplier** par le terme (**TV.V**)

L'énergie potentiel du corps courant **EP**=la masse du corps courant **multiplier** par le vecteur d'accélération de pesanteur **multiplier** par la matrice de passage du centre de gravité du **repere_courant**

finpour

Pour notre exemple les résultats des énergies cinétiques du système sont :

- Energie cinétique du corps1.

$$T_{corps1} := \frac{1}{2} m1 \cdot q1p^2$$

- Energie cinétique du corps21.

$$T_{21} := \frac{1}{2} m2 \cdot q1p^2 + \frac{1}{2} m2 \cdot q21p^2$$

- Energie cinétique du corps22.

$$T_{22} := \frac{1}{2} m2 \cdot q1p^2 + \frac{1}{2} m2 \cdot q22p^2$$

- Energie cinétique du corps3

$$T_{corps3} := \frac{1}{2} m3 q1p^2 + \frac{1}{2} m3 q3p^2 yG3^2 + \frac{1}{2} m3 q3p^2 zG3^2 + \frac{1}{2} m3 q21p^2 + m3 q21p q3p \cos(q3) yG3 - m3 q21p q3p \sin(q3) zG3 + \frac{1}{2} q3p^2 XX3$$

➤ Energie cinétique du corps5

$$\begin{aligned}
 T_{corps5} := & \frac{9}{2} m5 q3 p^2 R2^2 + \frac{1}{2} m5 q3 p^2 q5^2 + \frac{1}{2} m5 q3 p^2 zG5^2 + \frac{1}{2} m5 q3 p^2 yG5^2 \\
 & + \frac{1}{2} m5 q5 p^2 + \frac{1}{2} m5 q1 p^2 + \frac{1}{2} m5 q21 p^2 + m5 q21 p \sin(q3) q5p \\
 & + m5 q21 p q3p \cos(q3) yG5 - m5 q21 p q3p \sin(q3) zG5 + m5 q21 p q3p \cos(q3) q5 \\
 & + 3m5 q21 p q3p \cos(q3) R2 + 3m5 q3 p^2 yG5 R2 - m5 q3 p zG5 q5p \\
 & + 3m5 q3 p^2 q5 R2 + m5 q3 p^2 yG5 q5 + \frac{1}{2} q3 p^2 XX5
 \end{aligned}$$

On conclusion :

➤ Energie cinétique global du mécanisme est :

$$\begin{aligned}
 T_{mecanisme} := & \left(\frac{1}{2} m3 + \frac{1}{2} m2 + \frac{1}{2} m5 \right) q21 p^2 + (m5 \sin(q3) q5p + (m3 \cos(q3) yG3 \\
 & + 3m5 \cos(q3) R2 + m5 \cos(q3) q5 - m5 \sin(q3) zG5 + m5 \cos(q3) yG5 \\
 & - m3 \sin(q3) zG3) q3p) q21 p + \frac{1}{2} m5 q5 p^2 - m5 q3 p zG5 q5p \\
 & + \left(\frac{1}{2} m1 + \frac{1}{2} m5 + \frac{1}{2} m3 + m2 \right) q1 p^2 \\
 & + \left(\frac{1}{2} XX5 + \frac{1}{2} m5 yG5^2 + \frac{1}{2} m5 q5^2 + \frac{1}{2} m5 zG5^2 + 3m5 yG5 R2 + \frac{1}{2} XX3 \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} m3 yG3^2 + \frac{1}{2} m3 zG3^2 + m5 yG5 q5 + 3m5 q5 R2 + \frac{9}{2} m5 R2^2 \right) q3 p^2 \\
 & + \frac{1}{2} m2 q22 p^2
 \end{aligned}$$

➤ Energie potentiel globale du mécanisme est :

$$\begin{aligned}
 EP_{mecanisme} := & -g(m1 zG1 + 2m2 zG2 + m2 q21 + m2 q22 + m3 \sin(q3) yG3 \\
 & + m3 \cos(q3) zG3 + m3 q21 + m5 \sin(q3) yG5 + m5 \cos(q3) zG5 \\
 & + m5 \sin(q3) q5 + 3m5 \sin(q3) R2 + m5 q21)
 \end{aligned}$$

A partir des deux équations de l'énergie cinétique et potentielle, on peut déduire la matrice d'inertie $M(q)$, la matrice des effets de Coriolis et centrifuge $C(q, \dot{q})$ et la matrice des effets de la gravité $G(q)$ du mécanisme.

- Les éléments de la matrice d'inertie $M(q)$:

$$Mq_{1,1} := m5 + m1 + m3 + 2m2, \quad Mq_{1,2} := 0, \quad Mq_{1,3} := 0, \quad Mq_{1,4} := 0 \\ Mq_{1,5} := 0.$$

$$Mq_{2,1} := 0, \quad Mq_{2,2} := m3 + m2 + m5, \quad Mq_{2,3} := 0 \\ Mq_{2,4} := 3m5 \cos(q3) R2 + m5 \cos(q3) q5 + m3 \cos(q3) yG3 - m3 \sin(q3) zG3 \\ + m5 \cos(q3) yG5 - m5 \sin(q3) zG5 \\ Mq_{2,5} := m5 \sin(q3).$$

$$Mq_{3,1} := 0, \quad Mq_{3,2} := 0, \quad Mq_{3,3} := m2, \quad Mq_{3,4} := 0, \quad Mq_{3,5} := 0.$$

$$Mq_{4,1} := 0, \\ Mq_{4,2} := 3m5 \cos(q3) R2 + m5 \cos(q3) q5 + m3 \cos(q3) yG3 - m3 \sin(q3) zG3 \\ + m5 \cos(q3) yG5 - m5 \sin(q3) zG5, \\ Mq_{4,3} := 0, \\ Mq_{4,4} := m5 zG5^2 + m3 zG3^2 + m5 q5^2 + m3 yG3^2 + 9m5 R2^2 + XX5 + 6 m5 q5 R2 \\ + 2 m5 yG5 q5 + 6 m5 yG5 R2 + XX3, \\ Mq_{4,5} := -m5 zG5.$$

$$Mq_{5,1} := 0, \quad Mq_{5,2} := m5 \sin(q3), \quad Mq_{5,3} := 0, \quad Mq_{5,4} := -m5 zG5, \\ Mq_{5,5} := m5.$$

- Les éléments de vecteur $C(q, qp)qp$:

$$C(q, qp)qp_1 := 0, \\ C(q, qp)qp_2 := 2 m5 \cos(q3) q3p q5p - q3p^2 m3 \cos(q3) zG3 - 3q3p^2 m5 \sin(q3) R2 \\ - q3p^2 m5 \sin(q3) yG5 - q3p^2 - q3p^2 m5 \cos(q3) zG5 - q3p^2 m3 \sin(q3) yG3 \\ C(q, qp)qp_3 := 0, \\ C(q, qp)qp_4 := 2 q5p m5 q3p q5 + 2 q5p m5 yG5 + 6q5p m5 q3p R2 \\ C(q, qp)qp_5 := -q3p^2 m5 q5 - q3p^2 m5 yG5 - 3q3p^2 m5 R2,$$

- La matrice des effets de la gravité $G(q)$.

$$G(q) := \begin{bmatrix} 0 \\ g(m_5 + m_3 + m_2) \\ g m_2 \\ -g m_3 \sin(q_3) z_{G3} + 3g m_5 \cos(q_3) R_2 + g m_5 \cos(q_3) y_{G5} + g m_5 \cos(q_3) q_5 - g m_5 \sin(q_3) z_{G5} + g m_3 \cos(q_3) y_{G3} \\ g m_5 \sin(q_3) \end{bmatrix}$$

2. Application aux monopèdes (Patte avec une rotation suivie d'une translation)

2.1 Description

Nous considérons ici le cas d'un monopède plan dont la patte comprend 2 degrés de liberté par rapport à son tronc [28][35][31] (le parallélogramme de la Figure 3.7). Le premier degré de liberté est une rotation de la patte par rapport au tronc, le second est une translation correspondant à une élongation de la patte.

Ce monopède peut être décrit par la figure suivante :

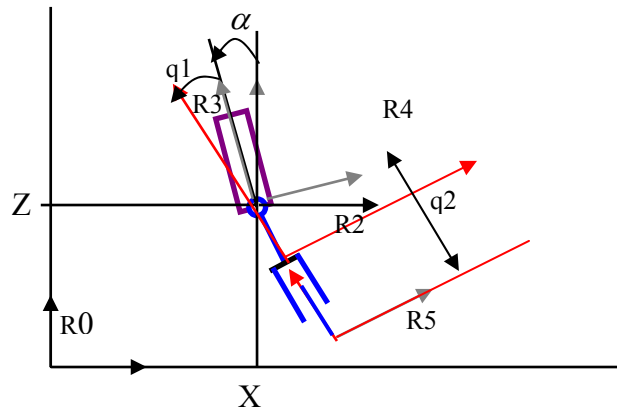


Figure 3.4 : Monopède

Pour modéliser ce problème on considère :

- Le robot en chute libre, c'est à dire sans contact avec le sol.
- Dans le plan, la plate-forme a trois degrés de liberté : X , Z et α .
- Le pied par rapport à la plate-forme en possède 2 ddl (q_1, q_2).
- Les variable dérivable par rapport au temps est $q = [X, Z, \alpha, q_1, q_2]$.
- La hauteur et le demi largeur de plate-forme est (l_1, l_2).

Les corps et les repères associés sont défini sur la structure arborescente Figure 3.8, dont les repères commençant par R_c sont fixes par rapport à R_3 , le repère principale de la plate-forme. Le point pris en considération pour l'impact avec le sol sera défini par le repère R_5 .

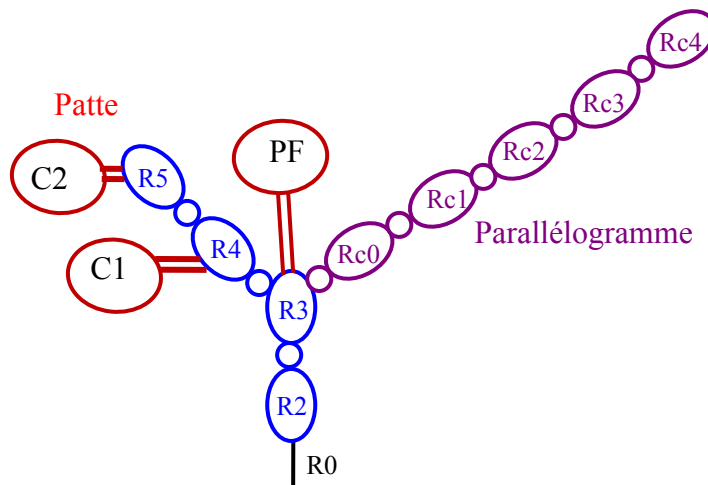


Figure 3.5 : structure arborescente du monopède

2.2 Fichier de définition

DEFINITIONS LA STRUCTURE DU MECANISME

1- DEFINITION DES LIAISONS DE MECANISME

liaison_véhicule:=table([

Repere2=([R0,vector([X,0,Z]),vector([0,0,0])),
Repere3=([Repere2,vector([0,0,0]),vector([0,alpha,0])),
Rc0=([Repere3,vector([l2,0,0]),vector([0,0,0])),
Rc1=([Rc0,vector([0,0,l1]),vector([0,0,0])),
*Rc2=([Rc1,vector([-2*l2,0,0]),vector([0,0,0])),*
Rc3=([Rc2,vector([0,0,-l1]),vector([0,0,0])),
Rc4=([Rc3,vector([l2,0,0]),vector([0,0,0])),
Repere4=([Repere3,vector([0,0,0]),vector([0,q1,0])),
Repere5=([Repere4,vector([0,0,q2]),vector([0,0,0]))
]);

2-DEFINITION DE L'ENSEMBLES DU CORPS DE MECANISME

Repere_corps:=table([

*Repere3=([plateforme,mp,
matrix([[XX0,0,0],[0,YY0,0],[0,0,ZZ0]]),
Vector([0,0,0,1]))],*

*Repere4= ([corps1,m1,
matrix([[XX1-zG1^2*m1,0,0],[0,YY1-zG1^2*m1,0],[0,0,ZZ1]]),
Vector([0,0,zG1,1]))],*

*Repere5= ([corps2,m2,
matrix([[XX2-zG2^2*m2,0,0],[0,YY2-zG2^2*m2,0],[0,0,ZZ2]]),
Vector([0,0,zG2,1]))]*

]);

3 ; DEFINITION DES VARIABLES DERIVABLES PAR RAPPORT AU TEMPS

*q:=vector([X,Z,alpha,q1,q2]);
ql:=convert(q,list) ;*

*qp:=vector([Xp,Zp,alpha_p,q1p,q2p]);
qpT:=convert(qp,Vector[column]);
qpl:=convert(qp,list) ;*

*qs:=Vector([Xs,Zs,alpha_s,q1s,q2s]);
qsl:=convert(qs,list);*

2.3 Calcul du modèle géométrique direct

Le calcul de la matrice de passage du modèle géométrique est :

$$corps2pass = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + q1) & 0 & \sin(\alpha + q1) & q2 \sin(\alpha + q1) + X \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha + q1) & 0 & \cos(\alpha + q1) & q2 \cos(\alpha + q1) + Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Calcul du modèle cinématique direct

Le torseur cinématique du monopède est donné par :

$$V_{corps2} = \begin{bmatrix} X_p + q2 \cos(\alpha + q1) \alpha p + q2 \cos(\alpha + q1) q1 p + \sin(\alpha + q1) q2 p \\ 0 \\ Zp - q2 \sin(\alpha + q1) \alpha p - q2 \sin(\alpha + q1) q1 p + \cos(\alpha + q1) q2 p \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{corps2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha p + q1 p \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Calcul du modèle dynamique

Le modèle dynamique du système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tau = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad \text{avec} \quad q = [X, Z, \alpha, q1, q2]^T$$

Ci-après nous présentons les termes M , $C(q, \dot{q}) \dot{q}$, G calculés par le générateur. Celui-ci peut présenter les résultats sous la forme explicite suivante :

La matrice d'inertie du monopède est exprimée par le résultat suivant :

$$M = \begin{bmatrix} m1 + m2 + mp & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m1 + m2 + mp & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & 0 \\ \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & 0 \\ m2 \sin(\alpha + q1) & m2 \cos(\alpha + q1) & 0 & 0 & m2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & 0 \\ -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & -\sin(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & \cos(\alpha + q1)(m1 zG1 + m2 zG2 + m2 q2) & 0 \\ YY1 + m2 q2^2 + YY2 + YY0 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & 0 \\ YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & YY1 + m2 q2^2 + YY2 + 2 m2 zG2 q2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m2 \end{bmatrix}$$

La matrice $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ est obtenu de la manière suivante :

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \begin{bmatrix} -((m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2} + m_2 q_2)(q_1 \dot{p}^2 + \alpha \dot{p}^2) + (2m_2 z_{G2} + 2m_1 z_{G1} + 2m_2 q_2) \alpha \dot{p} q_1 p) \sin(\alpha + q_1) \\ + (2m_2 q_1 p + 2\alpha \dot{p} m_2) q_2 p \cos(\alpha + q_1) \\ - (2m_2 q_1 p + 2\alpha \dot{p} m_2) q_2 p \sin(\alpha + q_1) + ((m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2} + m_2 q_2)(q_1 \dot{p}^2 + \alpha \dot{p}^2) \\ + (2m_2 z_{G2} + 2m_1 z_{G1} + 2m_2 q_2) \alpha \dot{p} q_1 p) \cos(\alpha + q_1) \\ (2m_2 z_{G2} + 2m_2 q_2)(q_1 p + \alpha \dot{p}) q_2 p \\ (2m_2 z_{G2} + 2m_2 q_2)(q_1 p + \alpha \dot{p}) q_2 p \\ - m_2(q_2 + z_{G2})(q_1 \dot{p}^2 + \alpha \dot{p}^2) - m_2(2z_{G2} + 2q_2) \alpha \dot{p} q_1 p \end{bmatrix}$$

L'expression du vecteur G des effets dus à la gravité est :

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(m_1 + m_2 + m_p) \\ -g(m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2} + m_2 q_2) \sin(\alpha + q_1) \\ -g(m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2} + m_2 q_2) \sin(\alpha + q_1) \\ gm_2 \cos(\alpha + q_1) \end{bmatrix}$$

3. Application à un robot mobile à 2D

Le schéma de la Figure 4.2 représente un robot mobile à quatre roues décrits dans un plan $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$ [36], dans les paramètres dynamiques du robot à considérer, sont données :

- La masse de la caisse M_t et la masse de chaque roue m_r .
- Le tenseur d'inertie de la plate forme I_{p33} .
- Le tenseur d'inertie en rotation de chaque roue avant est I_{d22}, I_{d33} .
- Le tenseur d'inertie en rotation de chaque roue dernière est I_{t22} .
- Les variables dérivables $q = [x_G, y_G, \theta, \varphi_{ag}, \varphi_{ad}, \varphi_g, \varphi_d, \alpha_{ag}, \alpha_{ad}]$.

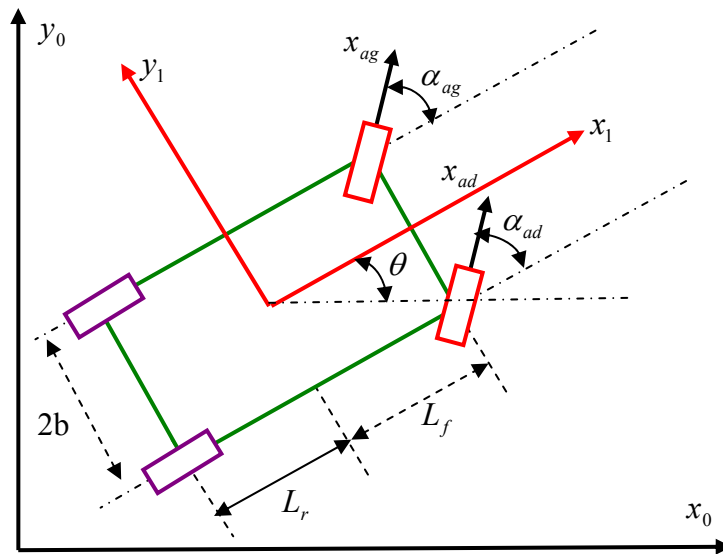


Figure 3.6 : Structure dynamique d'un robot mobile à 2D

Nous pouvons décomposer le mécanisme du robot en un ensemble de corps indépendant avec ces repères associés dont les mouvements sont définis par des variables articulaires.

La figure 4.3 illustre la structure arborescente des corps et des repères du mécanisme d'un robot mobile à 2D.

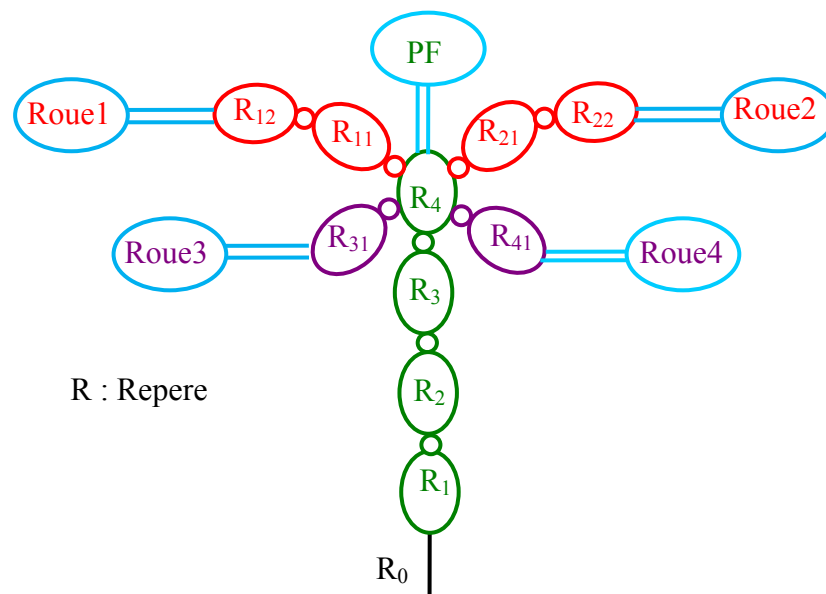


Figure 3.7 : Représentation arborescente d'un robot mobile à 2D

3.1 Fichier de définition

DEFINITIONS DE LA STRUCTURE VEHICULE

1- DEFINITION DES LIAISONS DE MECANISME

liaison_véhicule:=table ([

#DEFINITION DES REPERES LIE AU CHASSIS

Repere1= ([R0, vector ([xt, 0, 0]), vector ([0, 0, 0])],
Repere2= ([Repere1, vector ([0, yt, 0]), vector ([0, 0, 0])],
Repere3= ([Repere2, vector ([0, 0, -h]), vector ([0, 0, 0])],
Repere4= ([Repere3, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, theta])],

#DEFINITION DES REPERES ROUES

Repere11= ([Repere4, vector ([Lf, b, -(h-r)], vector ([0, 0, 0])],
Repere21= ([Repere4, vector ([Lf, -b, -(h-r)]), vector ([0, 0, 0])],
Repere31= ([Repere4, vector ([-Lr, b, -(h-r)]), vector ([0, 0, 0])],
Repere41= ([Repere4, vector ([-Lr, -b, -(h-r)]), vector ([0, 0, 0])],
Repere12= ([Repere11, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, alpha_ag])],
Repere22= ([Repere21, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, alpha_ad])],
Repere13= ([Repere12, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_ag, 0])],
Repere23= ([Repere22, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_ad, 0])],
Repere32= ([Repere31, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_g, 0])],
Repere42= ([Repere41, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_d, 0])]

2-DEFINITION DE L'ENSEMBLES DU CORPS DE VEHICULE

Repere_corps:=table([

Repere4 = ([chassis, Mt,
Matrix ([0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, Ip33]),
Vector ([0, 0, 0, 1])],

Repere13 = ([roue1, m,
Matrix ([0, 0, 0], [0, Id22, 0], [0, 0, Id33]),
Vector ([0, 0, 0, 1])],

Repere23 = ([roue2, m,
Matrix ([0, 0, 0], [0, Id22, 0], [0, 0, Id33]),
Vector ([0, 0, 0, 1])],

Repere32 = ([roue3, m,
Matrix ([0, 0, 0], [0, It22, 0], [0, 0, It33]),
Vector ([0, 0, 0, 1])],

Repere42 = ([roue4, m,
Matrix ([0, 0, 0], [0, It22, 0], [0, 0, It33]),
Vector ([0, 0, 0, 1])]

]);

3- DEFINITION DES VARIABLES DERIVABLE PAR RAPPORT AU TEMPS

q:= vector ([xt, yt, theta, phi_ag, phi_ad, phi_g, phi_d, alpha_ag, alpha_ad]);

3.2 Résultats des modèles :

La définition complète de la position et d'orientation de notre exemple est basée sur le calcul des matrices de passage des organes terminaux. Ici nous avons représenté les deux matrices de passage pour les deux roues (Roue1, Roue3).

Roue1 :

$$R0R13_{1.1} = \cos(\phi_{ag}) \cos(\theta + \alpha_{ag}), R0R13_{2.1} = \cos(\phi_{ag}) \sin(\theta + \alpha_{ag}),$$

$$R0R13_{3.1} = -\sin(\phi_{ag}), R0R13_{4.1} = 0.$$

$$R0R13_{1.2} = -\sin(\theta + \alpha_{ag}), R0R13_{2.2} = \cos(\theta + \alpha_{ag}),$$

$$R0R13_{3.2} = 0, R0R13_{4.2} = 0.$$

$$R0R13_{1.3} = \sin(\phi_{ag}) \cos(\theta + \alpha_{ag}), R0R13_{2.3} = \sin(\phi_{ag}) \sin(\theta + \alpha_{ag}),$$

$$R0R13_{3.3} = \cos(\phi_{ag}), R0R13_{4.3} = 0.$$

$$R0R13_{1.4} = \cos(\theta)L_f - \sin(\theta)b + xt, R0R13_{2.4} = \sin(\theta)L_f + \cos(\theta)b + yt,$$

$$R0R13_{3.4} = -2h + r, R0R13_{4.4} = 1$$

Roue3 :

$$R0R31 = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi_g) & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi_g) & -\cos(\theta)L_r - \sin(\theta)b + xt \\ \sin(\theta)\cos(\phi_g) & \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\phi_g) & -\sin(\theta)L_r + \cos(\theta)b + yt \\ -\sin(\phi_g) & 0 & \cos(\phi_g) & -2h + r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vitesses linéaires et angulaires des deux roues (Roue1, Roue3) sont données de la manière suivante :

➤ Torseur cinématique de la Roue1.

$$V_{Roue1} = \begin{bmatrix} xtp \\ ytp \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{Roue1} = \begin{bmatrix} -\phi_{ag}p \sin(\theta + \alpha_{ag}) \\ \phi_{ag}p \cos(\theta + \alpha_{ag}) \\ \alpha_{ag}p + \theta p \end{bmatrix}$$

- Torseur cinématique de la Roue3.

$$V_{Roue3} = \begin{bmatrix} xtp \\ ytp \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{Roue3} = \begin{bmatrix} -\phi gp \sin(\theta) \\ \phi gp \cos(\theta) \\ \theta p \end{bmatrix}$$

La forme de sortie des énergies cinétiques, potentielles et la matrice d'inertie du système est donnée sous les formes suivantes :

- Energie cinétique du châssis.

$$T_{chassis} = \frac{1}{2} Mt xtp^2 + \frac{1}{2} Mt ytp^2 + \frac{1}{2} \theta p^2 Ip33$$

- Energie cinétique de la Roue1.

$$T_{Roue1} = \frac{1}{2} \phi agp^2 Id22 + \frac{1}{2} Id33 \theta p^2 + Id33 \theta p \alpha agp + \frac{1}{2} Id33 \alpha agp^2$$

- Energie cinétique de la Roue2.

$$T_{Roue2} = \frac{1}{2} \phi adp^2 Id22 + \frac{1}{2} Id33 \alpha adp^2 + Id33 \alpha adp \theta p + \frac{1}{2} Id33 \theta p^2$$

- Energie cinétique de la Roue3.

$$T_{Roue3} = \frac{1}{2} \phi gp^2 It22 + \frac{1}{2} \theta p^2 It33$$

- Energie cinétique de la Roue4.

$$T_{Roue4} = \frac{1}{2} \phi dp^2 It22 + \frac{1}{2} \theta p^2 It33$$

- Energie cinétique global du robot est :

$$T_{véhicule} =$$

$$\frac{1}{2} Mt(xtp^2 + ytp^2) + (\frac{1}{2} Ip33 + It33 + Id33) \theta p^2$$

$$+ (\alpha adp + \alpha agp) Id33 \theta p + \frac{1}{2} It22 \phi dp^2 + \frac{1}{2} Id33 \alpha adp^2$$

$$+ \frac{1}{2} Id33 \alpha agp^2 + \frac{1}{2} Id22 \phi agp^2 + \frac{1}{2} It22 \phi gp^2 + \frac{1}{2} Id22 \phi adp^2$$

➤ Energie potentiel globale du robot est :

$$EP_{véhicule} = -Mt g h + 4 m g(r - h)$$

➤ La matrice d'inertie du robot est :

$$Mq = \begin{bmatrix} Mt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Mt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ip33 + 2Id33 + 2It33 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id33 & Id33 \\ 0 & 0 & 0 & Id22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & It22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & It22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id33 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id33 & 0 \\ 0 & 0 & Id33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id33 \end{bmatrix}$$

➤ La matrice d'inertie inverse est :

$$Mq = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Ip33 + 2Id33 + 2It33} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Ip33 + 2It33} & -\frac{1}{Ip33 + 2It33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Id22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Id22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{It22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{It22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ip33 + 2It33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ip33 + 2Id33 + 2It33}{(Ip33 + 2It33)Id33} & \frac{1}{Ip33 + 2It33} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ip33 + 2It33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Ip33 + 2It33} & \frac{Ip33 + 2Id33 + 2It33}{(Ip33 + 2It33)Id33} \end{bmatrix}$$

4. Conclusion

Dans ce chapitre on a démontré l'utilisation des algorithmes de génération, des modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. Dans le premier cas nous avons traité le cas d'une chaîne cinématique fermée, ou on a donné les formes de sortie des modèles générés par le générateur automatique. Nous constatons que ces formes utilisent les termes explicites du fichier de définition. De la même manière nous avons montré dans le deuxième cas et le troisième cas les formes de sortie du générateur de simulation d'un monopède et d'un robot mobile à 2D.

D'une manière générale pour obtenir des formes des modèles de sortie d'un système mécanique articulé en utilisant nos algorithmes, il est nécessaire avant de passer à l'étape de génération, de bien repérer les liaisons du mécanisme à modéliser à partir de la plate-forme jusqu'au l'organe terminal en donnant leurs sens, identification des variables dérivables par rapport au temps, la définition des corps du mécanisme et ces repères associés, ce qui facilite la définition de fichier de définition du système à modéliser.

Chapitre 4

Modélisation d'un véhicule

Un véhicule est un système composé d'un assemblage complexe de plusieurs composantes de différents types : mécanique, pneumatique, électrique ou thermique. Chaque organe possède un rôle particulier dans son fonctionnement. Par ailleurs, il est difficile d'avoir un modèle de véhicule prenant en compte toutes ces composantes. Sinon son degré de complexité serait élevé et sa manipulation lourde. L'identification des caractéristiques de l'ensemble des composantes permettant de reconstruire le modèle représente un travail très difficile, car leurs paramètres peuvent varier énormément d'une situation à une autre, alors la modélisation d'un véhicule nécessite, de choisir les composantes essentielles de façons à établir un modèle nominal qui soit le plus proche de la réalité et suffisamment simple pour son implantation.

Actuellement il existe plusieurs outils de modélisation qui peuvent être classés en deux grandes parties : ceux empruntant la voie du calcul symbolique, et ceux calculant à chaque pas les interactions entre chaque composant du modèle. L'avantage de la voie symbolique est de pouvoir travailler directement sur l'aspect formel du modèle, alors que l'autre solution propose une boîte noire ne permettant pas directement d'évaluer l'effet de la variation d'un paramètre sur le modèle.

Le calcul symbolique permet un découplage complet entre le calcul du modèle et le simulateur. De plus, cette voie nous autorise un accès à tous les paramètres. Parmi les logiciels de modélisation pour la robotique utilisant le calcul symbolique nous pouvons citer le logiciel James (Simulog - Aérospatiale) et le logiciel SYMORO+. Les fonctions de ces types de logiciels peuvent être variées, certains proposant le calcul des modèles dynamiques d'autres les générations complète de simulateurs.

D'autres logiciels sont destinés à la modélisation intégrée, ils calculent les déplacements et les effets sur chaque corps un par un, Ces logiciels n'utilisent pas de modèle global du mécanisme. Donc, dans ce cas nous ne pouvons pas utiliser la partie modélisation pour les commandes. Parmi ces logiciels nous pouvons citer : Solid Dynamics, DADS, ADAMS. Ces trois logiciels sont dotés d'un modelleur graphique permettant la création des corps et des liaisons, ainsi qu'une interface de visualisation permettant l'observation des mouvements du mécanisme, voire des forces s'exerçant entre les corps, les données peuvent aussi être fournies sous forme de courbe.

Dans le but de calculer le système d'équation global du modèle du véhicule et vu la complexité de ce système du point de vue nombre de variables dynamiques, la non-linéarité du système et dans le but d'exploiter nos propres données, nous avons utilisé nos propres algorithmes de génération automatique représentés dans le chapitre 3.

1. Conception d'un simulateur du véhicule

La conception de la dynamique du véhicule peut être réalisée, en modélisant les différentes parties du véhicule, et en calculant les équations du mouvement dynamique du véhicule et les différents facteurs agissant sur son comportement qui doit être généré par des fonctions simulant les actions. La Figure 4.1 montre un organigramme d'une représentation fonctionnelle du véhicule.

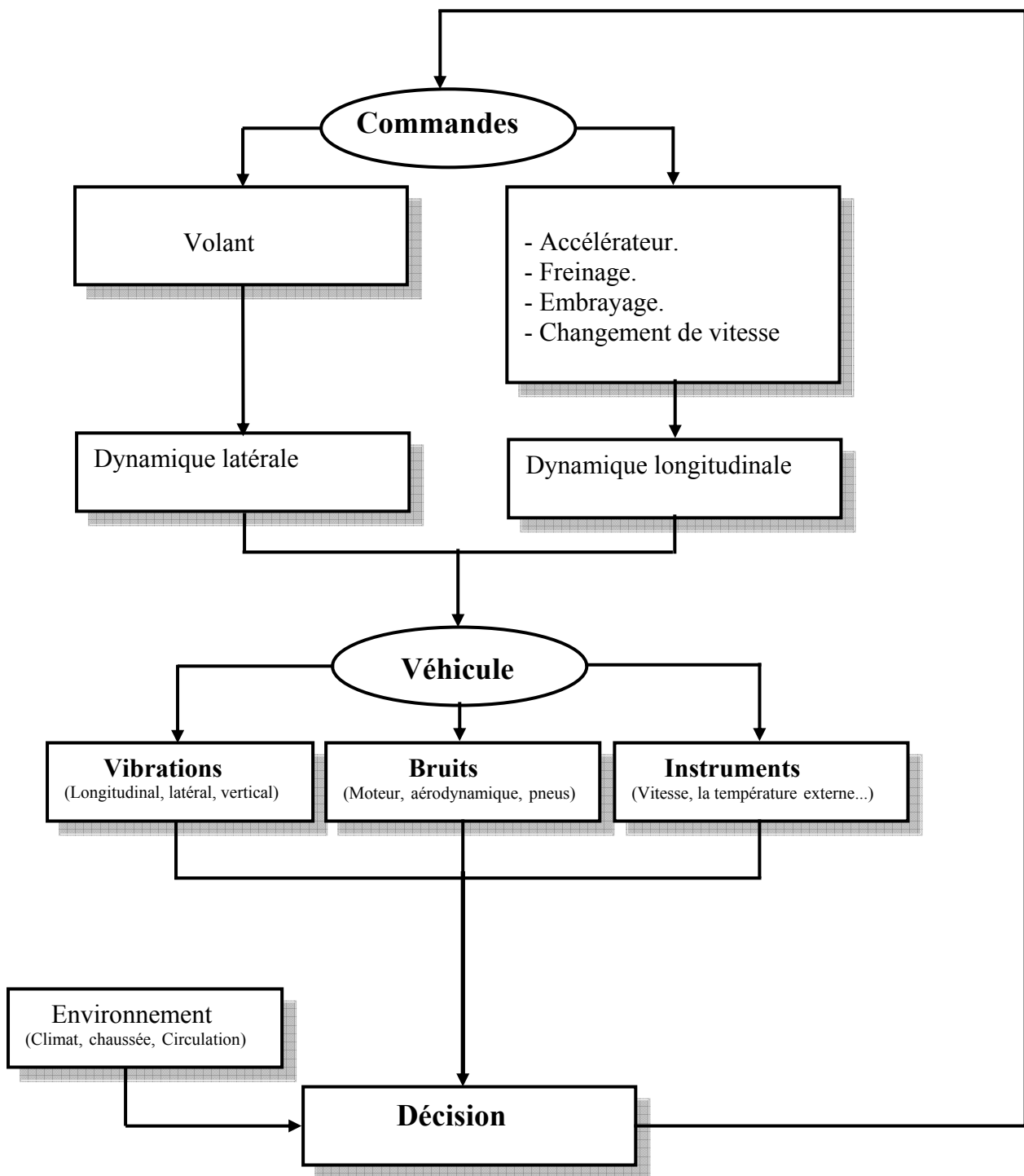


Figure 4.1 : Représentation fonctionnelle du véhicule

2. Hypothèses de base

Pour le calcul d'un modèle dynamique opérationnel, des simplifications liées à la structure dynamique du véhicule s'imposent pour réduire la complexité du système tout en garantissant un certain degré de réalisme et d'efficacité de la modélisation, dans ce cas en supposant :

- La caisse comme un corps rigide 3D.
- Chaque demi-essieu inclue les organes de liaisons et porte-moyeu sont représentés comme une liaison ponctuelle en translation uniquement.
- La cinématique de liaison roue/châssis peut être représentée par le braquage des roues directrices (deux roues avant), les débattements des suspensions et la rotation des roues autour de leur axe de fusée.
- La dynamique de variation du rayon de roulement est supposée négligeable sous l'hypothèse d'absence d'irrégularité dans la zone de contact.
- Chaque roue est considérée comme un corps rigide en rotation relié au châssis par l'intermédiaire d'une articulation élastique avec amortissement.
- Le contact roue/sol est supposé ponctuel et localisé dans le plan de symétrie de la roue à une distance égale au rayon sous charge par rapport au centre de la roue.

Le schéma de la figure (4.2) présente toutes les liaisons cinématiques que nous considérons dans le modèle utilisé. Les variables $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 indiquent les angles de rotation des quatre roues autour de l'axe de fusée, β_1 et β_2 les angles de braquage gauche et droit des roues directrices et z_1, z_2, z_3 et z_4 représentent le débattement des quatre suspensions.

Les angles de braquages gauche et droit peuvent être déduits à partir de la connaissance de l'angle de braquage donnée par la géométrie d'Ackerman [7][9] et qu'on la note β_b .

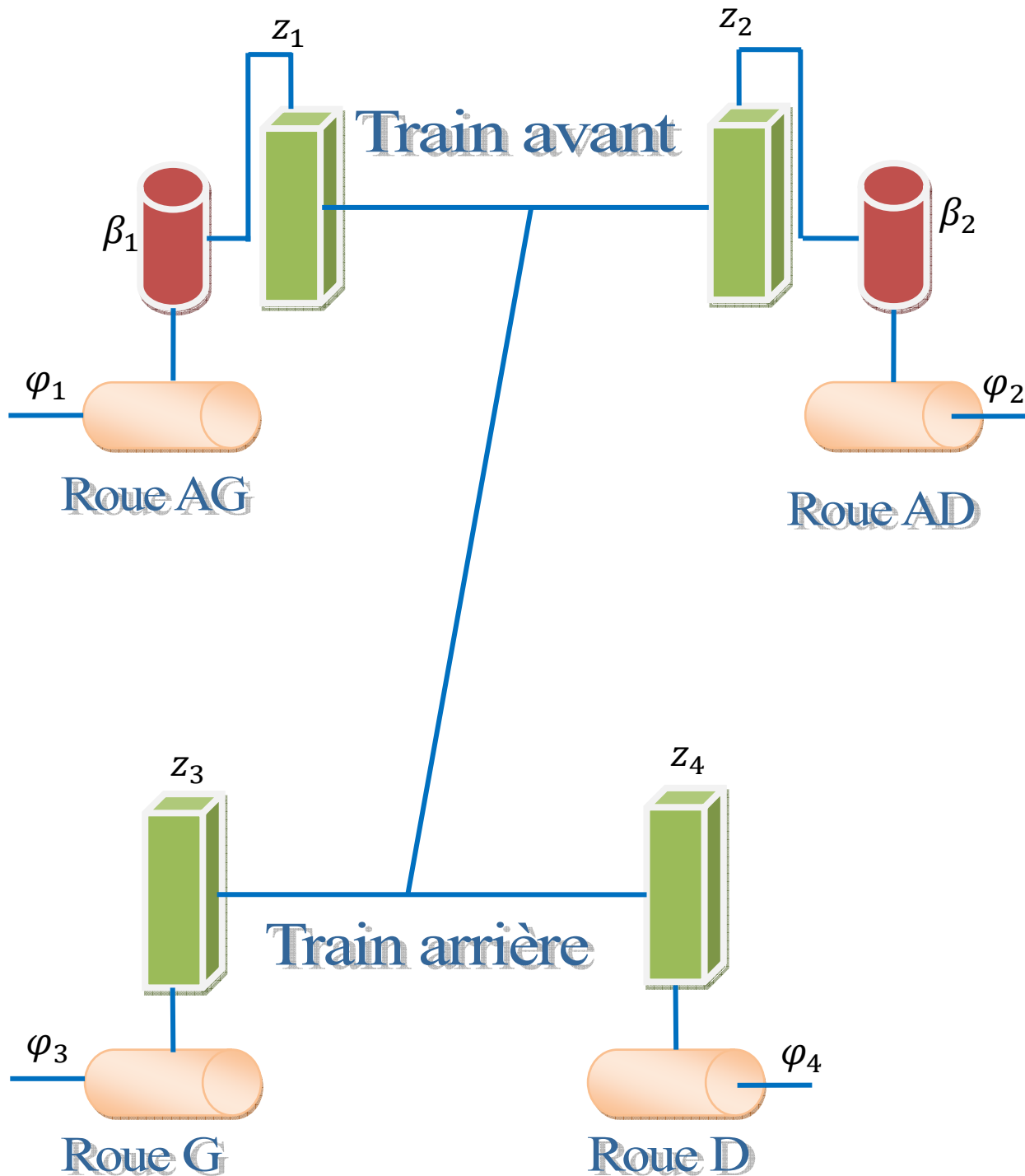


Figure 4.2. : Structure dynamique simplifiée du véhicule

3. Principe de Calcul

Nous utilisons les algorithmes de génération automatiquement pour générer les trois modèles (géométrique, cinématique et dynamique).

A fin, d'utiliser ces algorithmes, il est nécessaire de définir :

- L'ensemble des repères de mécanisme avec ces mouvements possibles (vecteur de translation, vecteur de rotation), on respectant la structure arborescente.
- Définition des corps de mécanisme par rapport à ces repères et leurs propriétés dynamiques (masses et la matrice d'inertie du corps).
- Les variables dérivables par rapport au temps.

3.1 Paramètres du véhicule en 3D

A partir de la description du mécanisme du véhicule en 3D (section 2.), les paramètres dynamiques à considérer sont :

- La masse de la caisse est M_s , la masse de chaque roue avant est M_{NSF} est la masse de chaque roue dernière est M_{NSR} .
- Le tenseur d'inertie de la caisse est donné par :

$$I_{ch} = \begin{bmatrix} XX6 & XY6 & XZ6 \\ XY6 & YY6 & 0 \\ XZ6 & 0 & ZZ6 \end{bmatrix}$$

- Les tenseurs d'inerties en rotation des quatre roues sont supposés égaux donnés par :

$$I_{roue} = \begin{bmatrix} XXI & 0 & 0 \\ 0 & YYI & 0 \\ 0 & 0 & XXI \end{bmatrix}$$

- Les variables dérivables sont :

$$q := \text{vector}([x, y, z, \theta_l, \theta_r, \theta_t, z1, z2, z3, z4, \beta_b, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]);$$

Pour plus de détaille, la Figure (4.3.) illustre les différentes dimensions du mécanisme et l'ensemble de repères associés aux corps de ce mécanisme.

Nous utilisons en suite la structure arborescente pour présenter les repères et définir le fichier de définition du mécanisme et le parcours des chemins des organes terminaux. La Figure (4.4) illustre la structure arborescente des repères et corps du mécanisme.

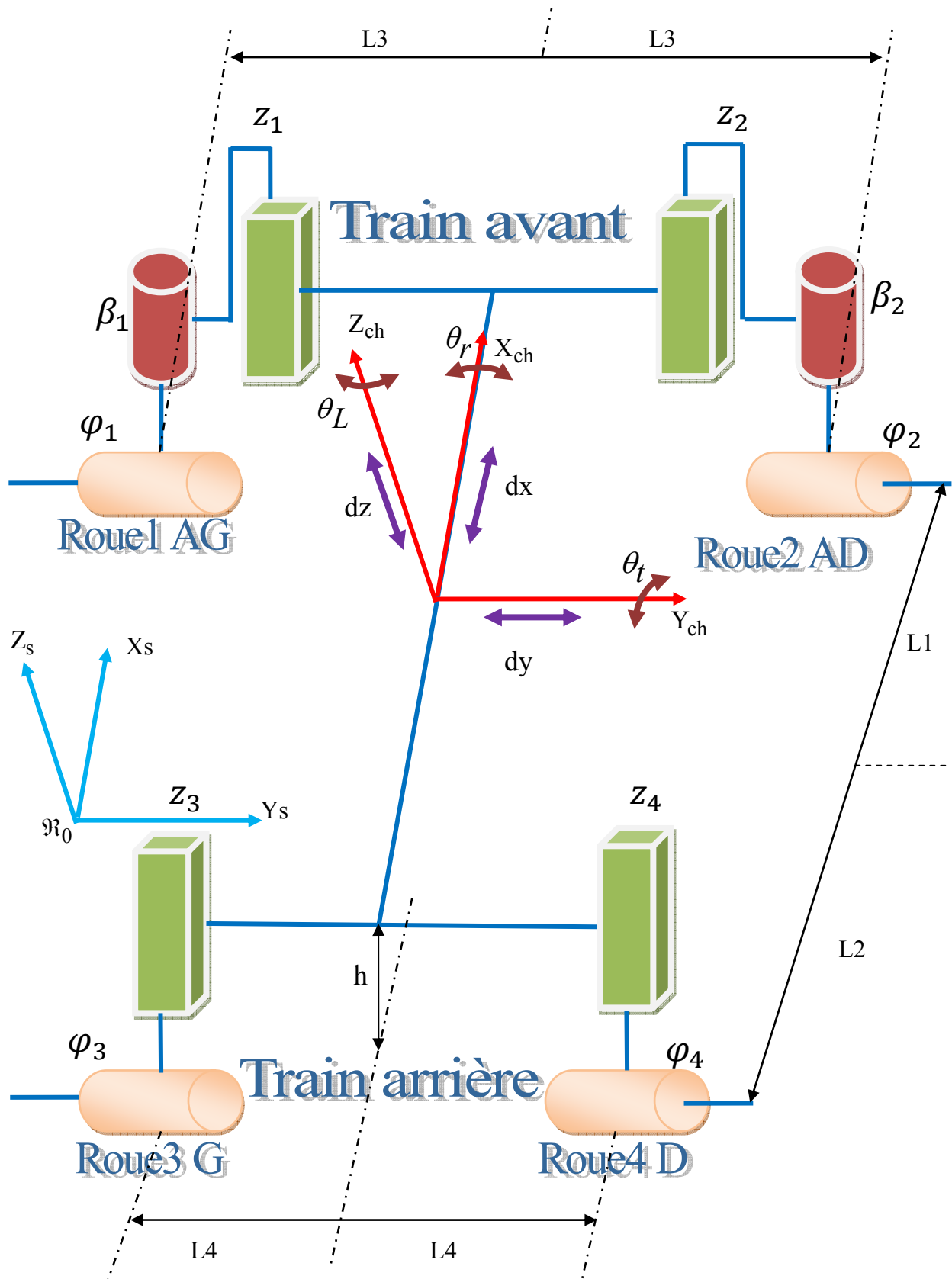


Figure 4.3. : Définition des repères du mécanisme

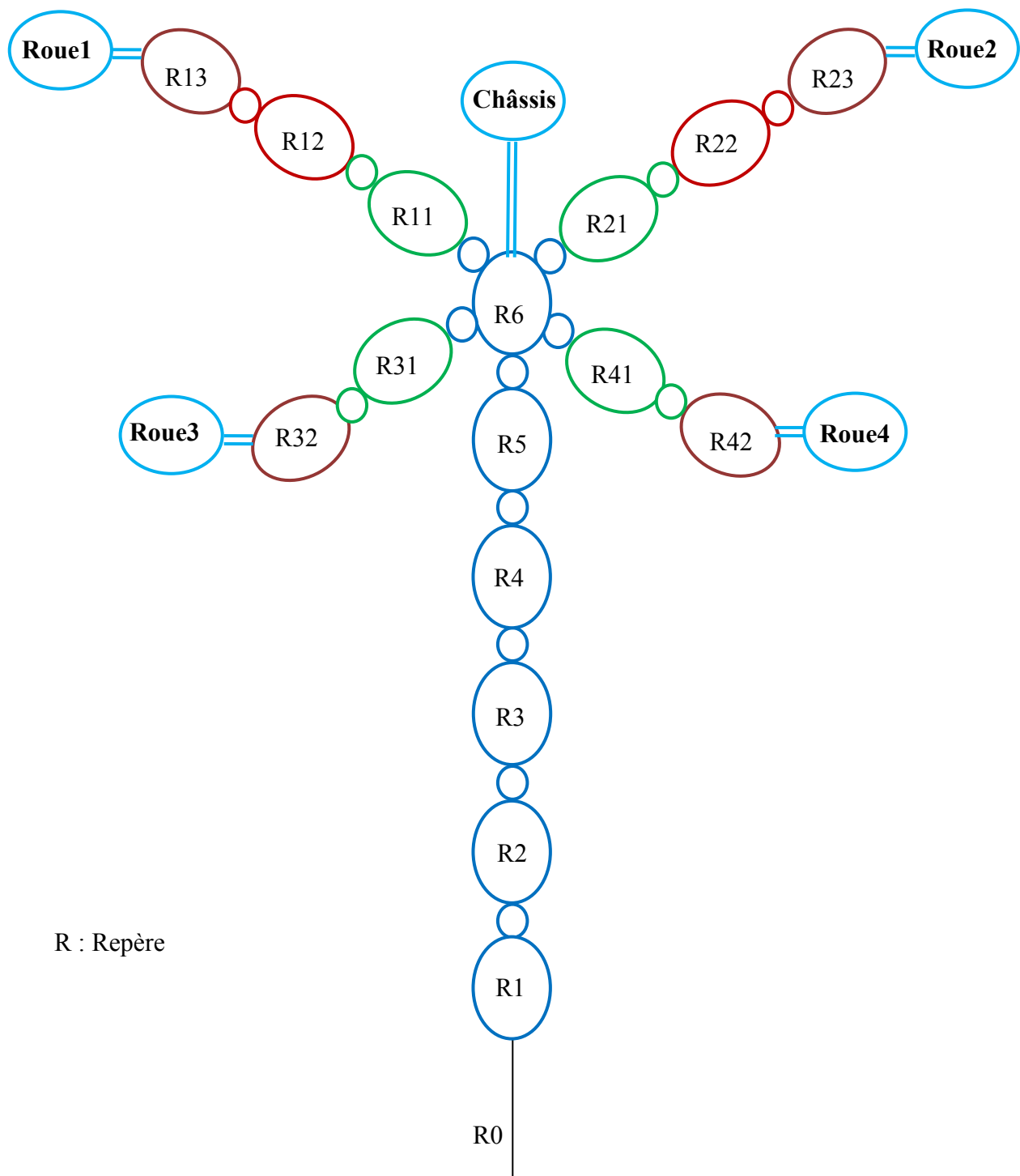


Figure 4.4. : Représentation arborescente du mécanisme de véhicule en 3D

3.2 Fichier de définition

1- DEFINITION DES LIAISONS DE MECANISME VEHICULE

```
liaison_véhicule:=table ([
  #DEFINITION DES REPERES LIER AU CHASSIS
  Repere1= ([R0, vector ([x, 0, 0]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere2= ([Repere1, vector ([0, y, 0]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere3= ([Repere2, vector ([0, 0, z]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere4= ([Repere3, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, theta_l])]),
  Repere5= ([Repere4, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, theta_r, 0])]),
  Repere6= ([Repere5, vector ([0, 0, 0]), vector ([theta_t, 0, 0])]),
  #DEFINITION DES REPERES LIER A LA SUSPENSION
  Repere11= ([Repere6, vector ([L1,-L3,-LSFg+z1]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere21= ([Repere6, vector ([L1, L3,-LSFd+z2]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere31= ([Repere6, vector ([-L2,-L4,-LSRg+z3]), vector ([0, 0, 0])]),
  Repere41= ([Repere6, vector ([-L2, L4,-LSRd+z4]), vector ([0, 0, 0])]),
  #DEFINITION DES REPERES DE DIRECTION
  Repere12= ([Repere11, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, beta_b])]),
  Repere22= ([Repere21, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, 0, beta_b])]),
  #DEFINITION DES REPERES DE ROTATION
  Repere13= ([Repere12, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_1, 0])]),
  Repere23= ([Repere22, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_2, 0])]),
  Repere33= ([Repere31, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_3, 0])]),
  Repere43= ([Repere41, vector ([0, 0, 0]), vector ([0, phi_4, 0])]),
]);
```

2-DEFINITION DE L'ENSEMBLES DU CORPS DE VEHICULE

```
Repere_corps:=table ([
  Repere6= ([chassis, MS, matrix([[XX6,XY6,XZ6],[XY6,YY6,0],[XZ6,0,ZZ6]]),
    Vector ([0, 0, 0,1])]),
  Repere13= ([roue1,MNSF, matrix([[XX1,0,0],[0,YY1,0],[0,0,XX1]]),
    Vector ([0, 0, 0,1])]),
  Repere23= ([roue2,MNSF, matrix([[XX1,0,0],[0,YY1,0],[0,0,XX1]]),
    Vector ([0, 0, 0,1])]),
  Repere33= ([roue3,MNSR,matrix([[XX1,0,0],[0,YY1,0],[0,0,XX1]]),
    Vector ([0, 0, 0,1])]),
  Repere43= ([roue4,MNSR,matrix([[XX1,0,0],[0,YY1,0],[0,0,XX1]]),
    Vector ([0, 0, 0,1])])
]);
```

3-DEFINITION DES VARIABLES DERIVABLES PAR RAPPORT AU TEMPS

```
q:=vector([x,y,z,theta_l,theta_r,theta_t,z1,z2,z3,z4,beta_b,phi_1,phi_2,phi_3,phi_4]);
```


3.3 Résultats de la modélisation

3.3.1 Calcul du modèle géométrique direct

Dans le but de déterminer le modèle géométrique direct, nous pouvons introduire les matrices de transformations homogènes [14]. Ces matrices, fonction des variables articulaires, permettent de calculer l'orientation et la position d'un corps par rapport à un corps précédent. Les trois premières colonnes définissent la rotation, la dernière colonne définit une translation. Pour chaque liaison entre deux corps, nous pouvons calculer une matrice de transformation homogène qui traduit le mouvement entre les repères définissant la position de chacun des deux corps. Ici on va se limiter à la représentation des matrices homogènes des deux roues (Roue1 et Roue3),

La Matrice de passage homogène **Sol-roue1** est :

$$\begin{aligned}
 ROR13_{1,1} &:= \cos(\theta_l) \cos(\theta_r) \cos(\beta_b) \cos(\phi_l) \\
 &\quad - \sin(\beta_b) \cos(\phi_l) \sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \cos(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 &\quad - \sin(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_t) - \sin(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) \\
 ROR13_{2,1} &:= \sin(\theta_l) \cos(\theta_r) \cos(\beta_b) \cos(\phi_l) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \cos(\phi_l) \cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \cos(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 &\quad + \sin(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_t) - \sin(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) \\
 ROR13_{3,1} &:= -\sin(\theta_r) \cos(\beta_b) \cos(\phi_l) \\
 &\quad + \cos(\theta_r) \sin(\theta_t) \sin(\beta_b) \cos(\phi_l) - \cos(\theta_r) \cos(\theta_t) \sin(\phi_l) \\
 ROR13_{4,1} &:= 0 \\
 ROR13_{1,2} &:= -\cos(\theta_l) \cos(\theta_r) \sin(\beta_b) - \cos(\beta_b) \sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \cos(\beta_b) \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 ROR13_{2,2} &:= -\sin(\theta_l) \cos(\theta_r) \sin(\beta_b) + \cos(\beta_b) \cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \cos(\beta_b) \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 ROR13_{3,2} &:= \sin(\theta_r) \sin(\beta_b) + \cos(\theta_r) \sin(\theta_t) \cos(\beta_b) \\
 ROR13_{4,2} &:= 0 \\
 ROR13_{1,3} &:= \cos(\theta_l) \cos(\theta_r) \cos(\beta_b) \sin(\phi_l) \\
 &\quad - \sin(\beta_b) \sin(\phi_l) \sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \sin(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 &\quad + \cos(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_t) + \cos(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) \\
 ROR13_{2,3} &:= \sin(\theta_l) \cos(\theta_r) \cos(\beta_b) \sin(\phi_l) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \sin(\phi_l) \cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
 &\quad + \sin(\beta_b) \sin(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) \\
 &\quad - \cos(\phi_l) \cos(\theta_l) \sin(\theta_t) + \cos(\phi_l) \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ROR13_{3,3} &:= -\sin(\theta_r) \cos(\beta b) \sin(\phi l) \\
&\quad + \cos(\theta_r) \sin(\theta t) \sin(\beta b) \sin(\phi l) + \cos(\theta_r) \cos(\theta t) \cos(\phi l) \\
ROR13_{4,3} &:= 0 \\
ROR13_{1,4} &:= \cos(\theta l) \cos(\theta_r) L1 + L3 \sin(\theta l) \cos(\theta t) \\
&\quad - L3 \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \sin(\theta t) - \sin(\theta l) \sin(\theta t) LSFg \\
&\quad + \sin(\theta l) \sin(\theta t) z1 - \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) LSFg \\
&\quad + \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) z1 + x \\
ROR13_{2,4} &:= \sin(\theta l) \cos(\theta_r) L1 - L3 \cos(\theta l) \cos(\theta t) \\
&\quad - L3 \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \sin(\theta t) + \cos(\theta l) \sin(\theta t) LSFg \\
&\quad - \cos(\theta l) \sin(\theta t) z1 - \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) LSFg \\
&\quad + \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) z1 + y \\
ROR13_{3,4} &:= -\sin(\theta_r) L1 - \cos(\theta_r) \sin(\theta t) L3 \\
&\quad - \cos(\theta_r) \cos(\theta t) LSFg + \cos(\theta_r) \cos(\theta t) z1 + z \\
ROR13_{4,4} &:= 1
\end{aligned}$$

Cette matrice définit la position du repère R13 associée au corps (Roue1) par rapport au repère R0 de la plate forme.

La matrice de passage **Sol-roue3** est :

$$\begin{aligned}
ROR33_{1,1} &:= \cos(\theta l) \cos(\theta_r) \cos(\phi 3) - \sin(\phi 3) \sin(\theta l) \sin(\theta t) \\
&\quad - \sin(\phi 3) \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) \\
ROR33_{2,1} &:= \sin(\theta l) \cos(\theta_r) \cos(\phi 3) + \sin(\phi 3) \cos(\theta l) \sin(\theta t) \\
&\quad - \sin(\phi 3) \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) \\
ROR33_{3,1} &:= -\sin(\theta_r) \cos(\phi 3) - \cos(\theta_r) \cos(\theta t) \sin(\phi 3) \\
ROR33_{4,1} &:= 0 \\
ROR33_{1,2} &:= -\sin(\theta l) \cos(\theta t) + \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \sin(\theta t) \\
ROR33_{2,2} &:= \cos(\theta l) \cos(\theta t) + \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \sin(\theta t) \\
ROR33_{3,2} &:= \cos(\theta_r) \sin(\theta t) \\
ROR33_{4,2} &:= 0 \\
ROR33_{1,3} &:= \cos(\theta l) \cos(\theta_r) \sin(\phi 3) + \cos(\phi 3) \sin(\theta l) \sin(\theta t) \\
&\quad + \cos(\phi 3) \cos(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) \\
ROR33_{2,3} &:= \sin(\theta l) \cos(\theta_r) \sin(\phi 3) - \cos(\phi 3) \cos(\theta l) \sin(\theta t) \\
&\quad + \cos(\phi 3) \sin(\theta l) \sin(\theta_r) \cos(\theta t) \\
ROR33_{3,3} &:= -\sin(\theta_r) \sin(\phi 3) + \cos(\theta_r) \cos(\theta t) \cos(\phi 3) \\
ROR33_{4,3} &:= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R0R33_{1,4} &:= -\cos(\theta_l) \cos(\theta_r) L2 + L4 \sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
&\quad - L4 \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) - \sin(\theta_l) \sin(\theta_t) LSRg \\
&\quad + \sin(\theta_l) \sin(\theta_t) z3 - \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) LSRg \\
&\quad + \cos(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) z3 + x \\
R0R33_{2,4} &:= -\sin(\theta_l) \cos(\theta_r) L2 - L4 \cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \\
&\quad - L4 \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \sin(\theta_t) + \cos(\theta_l) \sin(\theta_t) LSRg \\
&\quad - \cos(\theta_l) \sin(\theta_t) z3 - \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) LSRg \\
&\quad + \sin(\theta_l) \sin(\theta_r) \cos(\theta_t) z3 + y \\
R0R33_{3,4} &:= \sin(\theta_r) L2 - \cos(\theta_r) \sin(\theta_t) L4 \\
&\quad - \cos(\theta_r) \cos(\theta_t) LSRg + \cos(\theta_r) \cos(\theta_t) z3 + z \\
R0R33_{4,4} &:= 1
\end{aligned}$$

Pour déterminer les coordonnées en position $[x, y, z]^T$ et en orientation, $[\theta_r, \theta_t, \theta_l]^T$ des organes terminaux par rapport à R0 (en utilisant angles de Roulis - Tangage - Lacet.) et Si on prend comme exemple la Rouelou la matrice de transformation homogène est $R0R13$ entre la plate-forme et la Rouel (OT repère R13). La relation entre les coordonnées homogènes de l'OT dans $R0[x, y, z]^T$ et de ses coordonnées homogènes exprimées dans le repère R13 $[0, 0, 0, 1]^T$ est la suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} := R0R13 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matrice de transformation homogène entre R0 et R13 peut être exprimée avec les angles de Roulis - Tangage - Lacet de la manière suivante dans R0 :

M :=

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_l \cos \theta_t & -\sin \theta_l \cos \theta_r + \cos \theta_l \sin \theta_t \sin \theta_r & \sin \theta_l \sin \theta_r + \cos \theta_l \sin \theta_t \cos \theta_r \\ \sin \theta_l \cos \theta_t & \cos \theta_l \cos \theta_r + \sin \theta_l \sin \theta_t \sin \theta_r & -\cos \theta_l \sin \theta_r + \sin \theta_l \sin \theta_t \cos \theta_r \\ -\sin \theta_t & \cos \theta_t \sin \theta_r & \cos \theta_t \cos \theta_r \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La relation entre les angles d'orientation et l'orientation du segment dans le repère R0 est :

$$M = R0R13$$

On résoudre cette équation on obtient la position et l'orientation de l'OT sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_r \\ \theta_t \\ \theta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix}$$

$[T_x, T_y, T_z]$: Les coordonnées cartésiennes de position de l'OT.

q : Vecteur des variables articulaires.

g_1, g_2, g_3 : Sont des fonctions des variables q_i .

3.3.2 Calcul du modèle cinématique direct

Les formules de sortie du générateur pour les torseurs cinématiques des deux roues (Roue1, Roue3) sont données par :

➤ Le torseur cinématique de la Roue1.

$$v_{Roue1} := \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp + zlp \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_x := & (\cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \sin(\theta_r) + \sin(\theta_l) \sin(\theta_t)) \beta bp + (\\ & -\cos(\theta_l) \cos(\theta_r) \sin(\beta b) + \cos(\theta_l) \sin(\theta_t) \sin(\theta_r) \cos(\beta b) \\ & - \sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \cos(\beta b)) \phi lp \\ & + \cos(\theta_r) \cos(\theta_l) \theta tp - \sin(\theta_l) \theta rp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_y := & (\cos(\theta_l) \cos(\theta_t) \cos(\beta b) - \sin(\theta_l) \cos(\theta_r) \sin(\beta b) \\ & + \sin(\theta_l) \sin(\theta_t) \sin(\theta_r) \cos(\beta b)) \phi lp \\ & + (\sin(\theta_l) \cos(\theta_t) \sin(\theta_r) - \cos(\theta_l) \sin(\theta_t)) \beta bp \\ & + \theta rp \cos(\theta_l) + \cos(\theta_r) \sin(\theta_l) \theta tp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_z := & (\sin(\beta b) \sin(\theta_r) + \sin(\theta_t) \cos(\theta_r) \cos(\beta b)) \phi lp \\ & + \theta lp + \beta bp \cos(\theta_t) \cos(\theta_r) - \theta tp \sin(\theta_r) \end{aligned}$$

➤ Le torseur cinématique de la Roue3.

$$\mathbf{v}_{Roue3} := \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp + z3p \end{bmatrix}$$

$$W_x := (\cos(\theta l) \sin(\theta t) \sin(\theta r) - \sin(\theta l) \cos(\theta t)) \phi 3p \\ + \cos(\theta r) \cos(\theta l) \theta tp - \sin(\theta l) \theta rp$$

$$W_y := (\cos(\theta l) \cos(\theta t) + \sin(\theta l) \sin(\theta t) \sin(\theta r)) \phi 3p \\ + \theta rp \cos(\theta l) + \cos(\theta r) \sin(\theta l) \theta tp$$

$$W_z := \theta lp - \theta tp \sin(\theta r) + \phi 3p \sin(\theta t) \cos(\theta r)$$

3.3.3 Calcul du modèle dynamique

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle dynamique de la structure arborescente est obtenu en utilisant l'approche de Lagrange basée sur le calcul de l'énergie cinétique et potentielle [13][14][15]. Ici l'énergie cinétique et potentielle du véhicule est :

✓ Energie cinétique global du véhicule est :

$$T_{véhicule} := \frac{1}{2} MNSF z2p^2 + YY1 \theta rp \phi 3p + \frac{1}{2} \theta tp^2 XX6 \\ + \frac{1}{2} \theta rp^2 YY6 + \theta tp \theta rp XY6 + \theta tp \theta lp XZ6 + 2 \theta tp^2 XX1 \\ + \frac{1}{2} MS zp^2 + \frac{1}{2} \theta lp^2 ZZ6 + \frac{1}{2} MS yp^2 + \frac{1}{2} YY1 \phi 4p^2 \\ + \frac{1}{2} MS xp^2 + \frac{1}{2} MNSR z3p^2 + YY1 \theta rp \phi 2p + \frac{1}{2} YY1 \phi 2p^2 \\ + \frac{1}{2} YY1 \phi 3p^2 + YY1 \theta rp \phi 4p + \frac{1}{2} MNSR z4p^2 \\ + YY1 \theta rp \phi 1p + 2 XX1 \theta lp \beta bp + 2 YY1 \theta rp^2 + \frac{1}{2} YY1 \phi 1p^2 \\ + 2 XX1 \theta lp^2 + XX1 \beta bp^2 + \frac{1}{2} MNSF z1p^2$$

✓ Energie potentielle global du véhicule est :

$$EP_{véhicule} := MS g z - MNSF g LSFg + MNSF g z1 \\ - MNSF g LSFd + MNSF g z2 - MNSR g LSRg + MNSR g z3 \\ - MNSR g LSRd + MNSR g z4$$

Le calcul de la matrice d'inertie, la matrice des effets de centrifuge et Coriolis et la matrice de gravité sont déduites à partir des énergies citées précédemment en utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q = 0. \quad (4.3)$$

$$Q = -\frac{dV}{dq} + \Gamma + Q_{nc}.$$

Avec :

Γ : Vecteur des forces généralisées aux articulations

q_i : Vecteur des variables articulaires.

Q_{nc} : Vecteur de forces non conservatrices

V : vecteur d'énergie potentielle.

✓ Matrice d'inertie du véhicule.

$M(q) =$

$$\begin{bmatrix} MS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ZZ6 + 4 * XX1 & 0 & XZ6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 * XX1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & YY6 + 4 * YY1 & XY6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & YY1 & YY1 & YY1 \\ 0 & 0 & 0 & XZ6 & XY6 & XX6 + 4 * XX1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & MNSF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & MNSF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & MNSF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & MNSF & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 * XX1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 * XX1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & YY1 \end{bmatrix}$$

- ✓ Le vecteur $C(q, \dot{q})$ des effets de l'accélération de Coriolis et des effets centrifuges est nul.
- ✓ Le vecteur $G(q)$ des effets dus à la gravité est donné :

$$G(q) = [0 \quad 0 \quad MS * g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad MNSF * g \quad MNSF * g \quad MNSR * g \quad MNSR * g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

La résolution des mouvements du mécanisme revient à exprimer numériquement l'équation suivante :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\Gamma - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)). \quad (4.4)$$

Avec :

M la matrice d'inertie du système,

C la matrice des effets centrifuges et de Coriolis,

G les effets de la gravité,

Γ Vecteur des forces généralisées aux articulations.

3.4 Les forces extérieures

Les efforts extérieurs principaux agissant sur le véhicule sont ceux dus aux contacts pneu/sol et les forces aérodynamiques. La prise en compte de ces efforts se traduit par l'ajout aux couples des actionneurs (Γ) les couples supplémentaires représentant ces actions.

3.4.1 Forces de contact pneu/sol

Le pneu est la composante la plus importante dans le comportement d'un véhicule routier. En effet, la dynamique du véhicule dépend, en grande partie, de la dynamique des pneus. Le pneu étant le seul contact que le véhicule a avec le sol, la précision du mouvement du système dépend en majeure partie de la validité du modèle de pneu. La Figure 4.5 montre de façon complète les forces engendrées par un pneu [4].

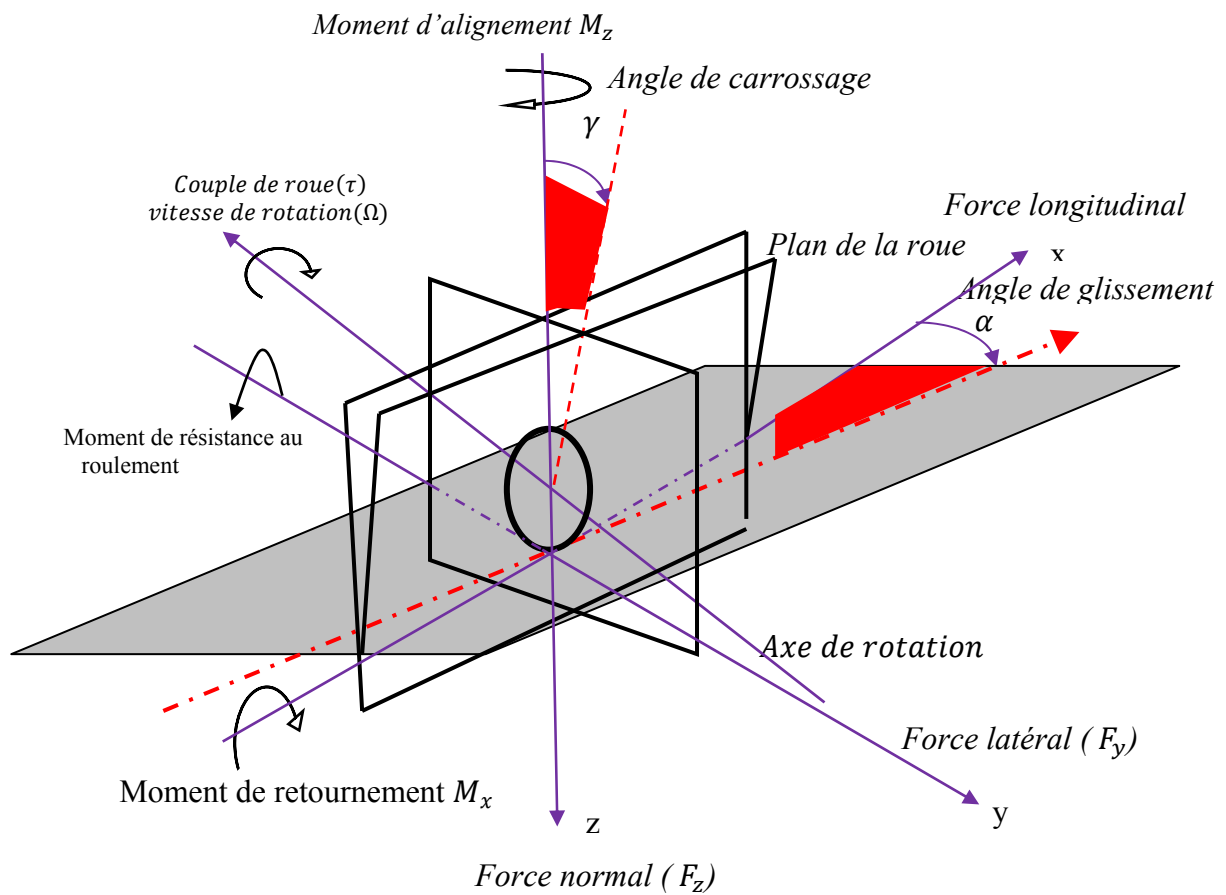


Figure 4.5 : Illustration des composantes dynamiques d'un pneu

a) Description dynamique d'un pneu

Suivant le système d'axes de (SAE) et à partir de la Figure 4.5 on peut définir:

- Plan de la roue: plan central de la roue, normal à l'axe de rotation.
- Centre de la roue: intersection du plan de la roue et de l'axe de rotation.
- Centre de contact du pneu: intersection du plan de la roue avec la projection de l'axe de rotation sur le plan de la route.
- Rayon sous charge: distance entre le centre de la roue et le centre de contact du pneu.
- Force longitudinale F_x : composante de la force exercée par la route sur le pneu, dans le plan de la route et parallèle à l'intersection du plan du pneu et du plan de la route
- Force latérale F_y : composante de la force exercée par la route sur le pneu, dans le plan de la route et normale à l'intersection du plan du pneu et du plan de la route
- Force normale F_z : composante de la force exercée par la route sur le pneu, normale au plan de la route
- Moment de retournement M_x : moment sur le pneu dans le plan de la route et parallèle à l'intersection du plan du pneu et du plan de la route
- Moment de résistance au roulement M_y : moment normal à l'intersection du plan de la roue et du plan de la route
- Moment d'alignement M_z : moment normal au plan de la route.
- Angle de dérive (α): angle entre la direction de cap de la roue et la direction d'avance de la roue.
- Angle de carrossage (γ): angle entre le plan de la roue et la verticale

b) Modélisation des forces de contact pneu/sol

En négligeant les composantes de moments, l'effort au niveau de chaque contact pneu/sol est composé d'un vecteur de forces tri-axial exprimé dans le repère lié à la roue i dont l'origine est fixée au centre de l'aire de contact. Ces forces sont : la force longitudinale F_{cxi} , la force latérale F_{cyi} et la force normale F_{czi} . L'indice c est utilisé pour faire référence à un effort de contact roue/sol. La projection de ces forces dans le repère absolu est exprimée par le vecteur F_{0i} tel que :

$$F_{0i} = [F_{0xi}, F_{0yi}, F_{0zi}]^T$$

Dans l'espace articulaire, le vecteur F_{0i} est exprimé par le vecteur de forces Γ_{ai} donné par la relation suivante [31] :

$$\Gamma_{ai} = J_i^T(q)F_{0i} \quad (4.5)$$

Où $J_i(q) = \frac{\partial X(q)}{\partial q}$ est la jacobienne du vecteur $X_i(q)$ par rapport au vecteur de coordonnées articulaires q . Le vecteur $X_i(q)$ exprime la position du point de contact de la i dans le de base, en fonction des variables articulaires.

Pour le cas du véhicule à quatre roues l'action des forces de contact sur chaque roue est exprimée dans l'espace articulaire par le vecteur de forces généralisées Γ_a . Qui est donné par :

$$\Gamma_a = \sum_{i=1}^4 \Gamma_{ai} = J^T F_0 \quad (4.6)$$

Avec J^T une matrice (12x15) et F_0 le vecteur de force de contact de dimension 12, tel que :

$$J^T = [J_1^T \ J_2^T \ J_3^T \ J_4^T]$$

$$F_0 = [F_{01}^T \ F_{02}^T \ F_{03}^T \ F_{04}^T]$$

Les détails des matrices J_i (pour un point de contact) sont donnés en annexe.

c) Plan de la chaussée parallèle au plan du repère de base.

Si l'on considère que le plan de la chaussée est parallèle au plan $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$ du repère de base. Alors le tableau des repères :

- pour les deux roues directrices est :

$$\text{liaison_véhicule} := \text{table}([\text{Repere_Z} = ([R0, \text{vector}([0, 0, 0]), \text{vector}([0, 0, \text{theta_l}]))], \\ \text{Repere_B} = ([\text{Repere_Z}, \text{vector}([0, 0, 0]), \text{vector}([0, 0, \text{Beta_b}]))])]:$$

- Pour les deux roues non directrices est :

$$\text{liaison_véhicule} := \text{table}([\text{Repere_Z} = ([R0, \text{vector}([0, 0, 0]), \text{vector}([0, 0, \text{theta_l}]))])]:$$

Avec : θl est l'angle de Lacet,

βb est l'angle de braquage des roues directrices.

La projection du vecteur de forces de contact développées dans le repère de la roue se donne de la manière suivante :

- Pour les roues directrices.

$$\begin{bmatrix} F_{0xi} \\ F_{0yi} \\ F_{0zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta l + \beta b) & -\sin(\theta l + \beta b) & 0 \\ \sin(\theta l + \beta b) & \cos(\theta l + \beta b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{cxi} \\ F_{c yi} \\ F_{c zi} \end{bmatrix}$$

- Pour les roues non directrices.

$$\begin{bmatrix} F_{0xi} \\ F_{0yi} \\ F_{0zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta l) & -\sin(\theta l) & 0 \\ \sin(\theta l) & \cos(\theta l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{cxi} \\ F_{c yi} \\ F_{c zi} \end{bmatrix}$$

d) Plan de la chaussée non parallèle au plan du repère de base.

Si le plan de la surface de contact roue_i/sol est non parallèle au plan de la chaussée et fait un angle ψ_x par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox_0}$, un angle ψ_y par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oy_0}$ et un angle ψ_z par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oz_0}$, alors on a :

$$F_{0i} = \mathfrak{R}_i(\psi_x, \psi_y, \psi_z) F_{ci}$$

Avec $\mathfrak{R}_i(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ la matrice de passage du repère de la roue i dont l'origine est fixée au centre de la zone de contact, vers le repère absolu.

Pour calculer la matrice de passage $\mathfrak{R}_i(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ nous avons suivi les étapes suivantes :

Etape1 : Définition de la table des repères récursifs liés aux rotations des angles ψ_x, ψ_y, ψ_z des deux roues directrices avant et les deux roues arrière. Ce qui peut-être traduit dans la syntaxe Maple par :

- Pour les deux roues avant la table des repères récursives ce traduit par :

```
liaison_véhicule:=table([ Repere_Z=([R0,vector([0,0,0]),vector([0,0,psi_z]))],
                        Repere_B=([Repere_Z,vector([0,0,0]),vector([0,0,Beta_b]))],
                        Repere_y=([ Repere_B,vector([0,0,0]),vector([0,psi_y,0]))],
                        Repere_x=([Repere_y,vector([0,0,0]),vector([psi_x,0,0])) ]):
```

- Pour les deux roues dernières la table des repères récursifs est :

```
liaison_véhicule:= table([ Repere_Z=([R0,vector([0,0,0]),vector([0,0,psi_z]))],
                        Repere_y= ([ Repere_Z, vector([0,0,0]),vector([0,psi_y,0]))],
                        Repere_x= ([Repere_y, vector ([0, 0, 0]), vector ([psi_x, 0, 0])) ]):
```

Etape2 : Définition des chemins arborescents des efforts de contact pour les quatre roues.

- Pour les deux roues avant le chemin des repères est :

Ch_effort = Repère_z , Repere_B, Repere_y, Repere_x.

- Pour les deux roues arrière le chemin des repères est :

Ch_effort = Repère_z , Repere_y, Repere_x.

Etape3 : Calcul des matrices de rotation des forces de contact par rapport au repère de base.

- Matrice de passage des efforts de contact pour les deux roues directrices est :

$RD_effort =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_y) & -\sin(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_x) + \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b) \\ \sin(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_x) & \cos(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_x) + \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \sin(\psi_z + \beta b) \\ -\sin(\psi_y) & \cos(\psi_y) \sin(\psi_x) \\ \sin(\psi_z + \beta b) \sin(\psi_x) + \sin(\psi_y) \cos(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b) \\ -\cos(\psi_z + \beta b) \sin(\psi_x) + \sin(\psi_y) \cos(\psi_x) \sin(\psi_z + \beta b) \\ \cos(\psi_y) \cos(\psi_x) \end{bmatrix}$$

- Matrice de passage des efforts de contact pour les deux roues arrière est :

$$RND_effort = \begin{bmatrix} \cos(\psi_z) \cos(\psi_y) & \sin(\psi_z) \cos(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \\ \sin(\psi_z) \cos(\psi_y) & \cos(\psi_z) \cos(\psi_x) + \sin(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \\ -\sin(\psi_y) & \cos(\psi_y) \sin(\psi_x) \\ \sin(\psi_z) \sin(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \\ -\cos(\psi_z) \sin(\psi_x) + \sin(\psi_z) \sin(\psi_y) \cos(\psi_x) \\ \cos(\psi_y) \cos(\psi_x) \end{bmatrix}$$

e) Forces de la résistance au roulement

La force de traction F_{cxi} développée au niveau du contact roue_i/sol pendant la phase d'accélération ou la phase de freinage, résiste au mouvement de la roue. Par ailleurs en roulement, la déformation de la carcasse de la roue entraîne le moment de résistance au roulement. Ainsi la force horizontale associée est appelée force de résistance au roulement F_{rr} . Elle s'exprime en fonction de la charge verticale et du coefficient de résistance. Ce dernier est fonction du carré de la vitesse du véhicule. Le couple de résistance à la rotation de la roue s'exprime alors par le couple suivant :

$$\Gamma_{ri} = -r_{ei}(F_{cxi} + F_{rr}) \quad (4.7)$$

Où r_{ei} est le rayon de roulement effectif moyen de la roue i.

Les forces de tractions F_{cxi} sont données sous forme symbolique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \checkmark F_{0cx1} &= \cos(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_y) F_{cx1} \\ &+ (\sin(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_x) + \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b)) F_{cy1} \\ &+ (\sin(\psi_z + \beta b) \sin(\psi_x) + \sin(\psi_y) \cos(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b)) F_{cz1} \\ \checkmark F_{0cx2} &= \cos(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_y) F_{cx2} \\ &+ (\sin(\psi_z + \beta b) \cos(\psi_x) + \sin(\psi_y) \sin(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b)) F_{cy2} \\ &+ (\sin(\psi_z + \beta b) \sin(\psi_x) + \sin(\psi_y) \cos(\psi_x) \cos(\psi_z + \beta b)) F_{cz2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\checkmark \quad F_{0cx3} &= \cos(\psi_z) \cos(\psi_y) F_{cx3} \\
&+ (\sin(\psi_z) \cos(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x)) F_{cy3} \\
&+ (\sin(\psi_z) \sin(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x)) F_{cz3} \\
\checkmark \quad F_{0cx4} &= \cos(\psi_z) \cos(\psi_y) F_{cx4} \\
&+ (\sin(\psi_z) \cos(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x)) F_{cy4} \\
&+ (\sin(\psi_z) \sin(\psi_x) + \cos(\psi_z) \sin(\psi_y) \sin(\psi_x)) F_{cz4}
\end{aligned}$$

3.4.2 Résistance aérodynamique

La résistance de l'air influe sur le comportement du véhicule, principalement pour les véhicules légers. La résistance de l'air peut se traduire par un torseur d'efforts aérodynamiques appliqué au centre de gravité du véhicule. Ce torseur est composé de trois forces (trainée, dérive, portance) et de trois moments liés aux angles de rotation du véhicule (roulis, tangage, lacet) [8]. Dans la modélisation du véhicule, on se contentera de représenter la résistance de l'air uniquement par sa composante de trainée dont l'expression est :

$$F_{air} = \frac{1}{2} C_x \rho_a S V_x^2$$

C_x est le coefficient aérodynamique de trainée, il est déterminé par des essais sur des maquettes en soufflerie. Il dépend du profil du véhicule. ρ_a représente la masse volumique de l'air, S est l'aire de la surface frontale du véhicule et V_x est la vitesse longitudinale du véhicule.

3.4.3 Effets des suspensions

Les mouvements verticaux de la roue et de la caisse seront reliés par le débattement des suspensions. Ainsi, l'effet ressort-amortisseur est représenté par un effort vertical transmis de la masse non suspendue vers la masse suspendue. En effet, l'application d'un effort vertical au pivot de la roue (porte-moyeu) se traduit par un débattement de la suspension auquel va correspondre un mouvement de la caisse. De même, une variation de la charge de la masse suspendue se traduit par une variation de la force verticale appliquée au pivot de la roue. Ceci se traduit par le calcul, pour chaque articulation représentant le débattement des suspensions (dans la plage linéaire), de l'effort suivant :

$$\Gamma_{si} = K_r z_i + K_z \dot{z}_i. \quad (4.8)$$

Avec K_r et K_z représentant respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement de la suspension. z_i est le débattement de la suspension reliant la roue i au châssis et \dot{z}_i la vitesse de ce débattement.

La barre anti-roulis sert à limiter principalement le mouvement de roulis de la caisse dans les virages pour le bon comportement. L'effet de la barre anti-roulis sur la dynamique se traduit par un effort qui s'oppose au mouvement de roulis et par conséquent, il crée une interdépendance des roues du même essieu. Ce couplage peut s'exprimer alors respectivement au niveau des articulations de débattement avant et arrière par les efforts suivants :

$$\Gamma_{sar} = K_{ar} \Delta z_{sar} \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{sav} = K_{av} \Delta z_{sav} \quad (4.10)$$

Où K_{ar} et K_{av} sont respectivement les raideurs des barres anti-roulis avant et arrière et Δz représente la différence de débattements droite/gauche.

3.4.4 Effets des frottements

Si l'on considère la présence de frottements secs et visqueux dans certaines articulations, ils peuvent être modélisés par un effort ajouté à l'équation du mouvement du véhicule. L'expression de cet effort pour une articulation q_k est :

$$\Gamma_{kf} = C_{fvk} \dot{q}_k + C_{fsk} \text{sign}(q_k) \quad (4.11)$$

Où C_{fvk} et C_{fsk} représentent respectivement les coefficients de frottements sec et visqueux associés à l'articulation q_k .

3.4.5 Angle volant et couple de braquage

Le système de direction peut être modélisé en utilisant l'équivalence du modèle masse-ressort-amortisseur. Dans cette représentation, l'entrée du système est l'angle volant β_v et la sortie est l'angle de braquage β_b du modèle bicyclette. En fait, l'équivalent de masse dans ce modèle est l'inertie du train autour de l'axe du pivot. La colonne de direction est caractérisée par une raideur de torsion K_T et un coefficient d'amortissement C_T . le rapport de démultiplication est donné par G_d . Ainsi le couple de braquage est donné par :

$$\Gamma_b = K_T(\beta_v - G_d \beta_b) - C_T \dot{\beta}_b - d_{cx}(F_{cx1} + F_{cx2}) - d_{cy}(F_{cy1} + F_{cy2}) \quad (4.12)$$

Où d_{cx} et d_{cy} représentent respectivement les dépôts de chasses longitudinaux et latéraux.

4. Conclusion

Dans ce chapitre on a proposé un modèle nominal qui permet de décrire la dynamique d'un véhicule routier assez proche du système physique réel dans une configuration classique de la structure du véhicule et de son environnement. En conséquence ce modèle simulé nous permettra d'étudier le comportement du véhicule dans des conditions de conduites normales jusqu'aux limites de contrôlabilité. Il sera aussi utilisable pour la conception de lois de commandes en vue du contrôle du véhicule.

On a présenté également le calcul symbolique de modèle géométrique, modèle cinématique direct et le modèle dynamique du véhicule, en utilisant les algorithmes de génération automatique. Dans cette modélisation on a intégré les principaux paramètres dynamiques et la plupart des efforts exercés par l'environnement sur le véhicule à savoir :

Les forces de contact roue/sol, le couple de résistance à la rotation de la roue, la composante trainée de la résistance aérodynamique, les effets des suspensions, le couple de braquage et les effets de frottements secs et visqueux dans certaines articulations.

Synthèse et perspectives

L'objectif de ces travaux de mémoire était d'obtenir une modélisation dynamique du véhicule routier prenant en considération les principaux paramètres dynamiques, les forces de contact roue/sol, notamment la présence de couple de résistance à la rotation de la roue, la composante trainée de la résistance aérodynamique, les effets des suspensions, le couple de braquage et les effets de frottements secs et visqueux dans certaines articulations.

Cet objectif peut être considéré comme atteint par la mise en place des résultats de modélisations représentées dans le chapitre 4. Cette modélisation peut être étendue aux autres mécanismes articulés par exemple les robots à structures cinématiques fermées et ouvertes et plus particulièrement aux robots à pattes.

La modélisation en question est conçue par le développement des outils génériques c'est-à-dire entièrement paramétrables. Ces outils sont représentés sous formes de procédures. Nous avons développé ces outils en utilisant la théorie des systèmes robotiques, ou on a donné les formes mathématiques de ces outils connus sous les noms : des modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. Nous avons simplifié la structure mécanique du véhicule et de son environnement d'une manière à obtenir un modèle nominal décrivant le comportement simulé assez proche du système réel en utilisant les notions de liaisons cinématiques (prismatique et rotoïde) entre les différents corps et on a choisi la structure arborescente pour définir l'ensemble des repères du système .

En fin, on a choisi un langage de programmation de haut niveau mathématique pour développer les outils génériques et entre tout ce que nous avons traité, il reste un noyau commun dont le point d'entrée est le fichier de définition que nous avons voulu le plus clair, le plus lisible possible et permettant l'utilisation de termes explicites. Ainsi que la présentation du modèle dynamique utilisant directement les termes explicites ou utilisant des variables temporaires pour l'optimisation des calculs.

Les perspectives visent la conception de lois de commandes en vue du contrôle du véhicule, la réalisation d'une interface graphique qui va faciliter les actions de l'utilisateur et une interface d'animation permettant d'obtenir rapidement un résultat de la simulation.

La conception de lois de commandes peut être créée en exploitant les résultats obtenus du modèle dynamique du véhicule. La tâche de contrôle du véhicule peut être divisée en deux sous-tâches indépendantes concernant respectivement les comportements latéral et longitudinal du véhicule :

- L'entrée du modèle latéral est la commande du volant et ses sorties sont la position et le cap du véhicule. Le but de la commande latérale est d'annuler les écarts de position et de cap du véhicule par rapport à la trajectoire de consigne.
- Les entrées du modèle longitudinal sont la commande du frein et celle de l'accélérateur et sa sortie est la vitesse du véhicule. Le but de la commande longitudinal est de faire diminuer les perturbations comme les changements de pente ou de terrain

L'objectif final de la commande est donc d'avoir un comportement du simulateur aussi proche que possible du mécanisme réel, afin d'implanter avec le minimum de modification la loi de commande sur les dispositifs de commande du mécanisme du véhicule.

On pense à réaliser aussi une interface graphique composée de plusieurs ensembles de fenêtres tel que : les fenêtres de définition des paramètres de simulation (conditions initiales, sol, etc.), la fenêtre animation destiné à représenter une animation de mouvement du mécanisme avec un temps de calcul minimum, et la fenêtre Simulink du simulateur qui représente les systèmes modélisés.

Annexe A

Détails des Matrice J_i des points de contact

Notation :

L_1, L_2 : Demi-empattement avant et arrière par rapport au centre de gravité de la caisse

L_3, L_4 : Demi-voie droite et gauche,

LSF : longueur au repot du ressort (de la suspension) .

➤ Jacobienne d'un point de contact roue avant droite.

$$J_i^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & jt_{1,4} & jt_{1,5} & jt_{1,6} & jt_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & jt_{2,4} & jt_{2,5} & jt_{2,6} & jt_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & jt_{3,5} & jt_{3,6} & jt_{3,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} jt_{1,4} &:= -\sin(\theta l) \cos(\theta r) L1 + L3 \cos(\theta l) \cos(\theta t) \\ &\quad + L3 \sin(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) - \cos(\theta l) \sin(\theta t) LSFg \\ &\quad + \cos(\theta l) \sin(\theta t) z1 + \sin(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) LSFg \\ &\quad - \sin(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jt_{1,5} &:= -\cos(\theta l) \sin(\theta r) L1 - L3 \cos(\theta l) \cos(\theta r) \sin(\theta t) \\ &\quad - \cos(\theta l) \cos(\theta r) \cos(\theta t) LSFg + \cos(\theta l) \cos(\theta r) \cos(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jt_{1,6} &:= -L3 \sin(\theta l) \sin(\theta t) - L3 \cos(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) \\ &\quad - \sin(\theta l) \cos(\theta t) LSFg + \sin(\theta l) \cos(\theta t) z1 \\ &\quad + \cos(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) LSFg - \cos(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$jt_{1,7} := \sin(\theta l) \sin(\theta t) + \cos(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t)$$

$$\begin{aligned} jt_{2,4} &:= \cos(\theta l) \cos(\theta r) L1 + L3 \sin(\theta l) \cos(\theta t) \\ &\quad - L3 \cos(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) - \sin(\theta l) \sin(\theta t) LSFg \\ &\quad + \sin(\theta l) \sin(\theta t) z1 - \cos(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) LSFg \\ &\quad + \cos(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jt_{2,5} &:= -\sin(\theta l) \sin(\theta r) L1 - L3 \sin(\theta l) \cos(\theta r) \sin(\theta t) \\ &\quad - \sin(\theta l) \cos(\theta r) \cos(\theta t) LSFg + \sin(\theta l) \cos(\theta r) \cos(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jt_{2,6} &:= L3 \cos(\theta l) \sin(\theta t) - L3 \sin(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t) \\ &\quad + \cos(\theta l) \cos(\theta t) LSFg - \cos(\theta l) \cos(\theta t) z1 \\ &\quad + \sin(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) LSFg - \sin(\theta l) \sin(\theta r) \sin(\theta t) z1 \end{aligned}$$

$$jt_{2,7} := -\cos(\theta l) \sin(\theta t) + \sin(\theta l) \sin(\theta r) \cos(\theta t)$$

$$j_{t_{3,5}} := -\cos(\theta r) L1 + \sin(\theta r) \sin(\theta t) L3 + \sin(\theta r) \cos(\theta t) LSFg \\ - \sin(\theta r) \cos(\theta t) z1$$

$$j_{t_{3,6}} := -\cos(\theta r) \cos(\theta t) L3 + \cos(\theta r) \sin(\theta t) LSFg \\ - \cos(\theta r) \sin(\theta t) z1$$

$$j_{t_{3,7}} := \cos(\theta r) \cos(\theta t)$$

➤ La forme symbolique de la matrice jacobienne des quatre points de contact.

$$J^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ j_{4,1} & j_{4,2} & 0 & j_{4,4} & j_{4,5} & 0 & j_{4,7} & j_{4,8} & 0 & j_{4,10} & j_{4,11} & 0 \\ j_{5,1} & j_{5,2} & j_{5,3} & j_{5,4} & j_{5,5} & j_{5,6} & j_{5,7} & j_{5,8} & j_{5,9} & j_{5,10} & j_{5,11} & j_{5,12} \\ j_{6,1} & j_{6,2} & j_{6,3} & j_{6,4} & j_{6,5} & j_{6,6} & j_{6,7} & j_{6,8} & j_{6,9} & j_{6,10} & j_{6,11} & j_{6,12} \\ j_{7,1} & j_{7,2} & j_{7,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{8,4} & j_{8,5} & j_{8,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{9,7} & j_{9,8} & j_{9,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{10,10} & j_{10,11} & j_{10,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Annexe B

Petit mémo Maple

Notions de base

- Tout groupe d'instructions commence par le prompt `>`
- Pour qu'une instruction soit exécutée et affichée, elle doit être suivie d'un point-virgule ;
- Pour qu'il y ait exécution, mais non affichage, elle doit être suivie par deux points :
- Assigner une valeur à une variable: `variable := valeur` ; e.g. `A := 2+x`; `A`;
- Pour vider une variable de son assignation: `unassign('A')`; ou bien `A := 'A'` ;
- % rappelle le résultat précédent: `x^3`; `%+2`; `%%`;
- Aide en ligne sur commande : taper `?commande`, ou bien cliquez commande et faites `ctrl-F1`
- La commande `restart`; efface toute assignation et démarre une nouvelle session Maple
- Au besoin, il faut charger en mémoire des packages: `with(student)`; `with(plots)`;

Fonctions et constantes mathématiques

Notation	Description	Exemple
<code>+, -, *, /, ^</code>	Addition, soustraction, multiplication, division, puissance	<code>> x+y*z/w^2</code> ;
<code>sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan</code>	fonctions trigonométriques circulaires	<code>> sin(theta)</code> ;
<code>sinh, cosh, tanh, arcsinh, arccosh, arctanh</code>	fonctions trigonométriques hyperboliques	<code>> sinh(2)</code> ;
<code>exp</code>	la fonction exponentielle	<code>> exp(x)</code> ;
<code>ln</code> ou <code>log</code>	le logarithme népérien	<code>> ln(x)</code> ;
<code>log[b]</code>	le logarithme en base <i>b</i>	<code>> log[10](x)</code> ;
<code>abs</code>	valeur absolue ou module d'un nombre complexe	<code>> abs(-1)</code> ; <code>> abs(1+I)</code> ;
<code>sqrt</code>	la fonction racine carrée	<code>> sqrt(x)</code> ;
<code>!</code>	factorielle	<code>> 5!</code> ;
<code>Pi</code>	la constante π	<code>> cos(Pi)</code> ;
<code>I</code>	le <i>i</i> complexe tel que $i^2 = -1$	<code>> I^2</code> ;

Graphiques 2d

Notation	Description et/ou exemples
<code>plot</code>	<code>plot(expression_en_x , x=min..max)</code> ; <code>plot(sqrt(x) , x=0..4)</code> ; <code>plot(sqrt(x) , x=0..4 , scaling=constrained)</code>
superposer deux courbes	<code>plot({ f(x) , g(x) } , x=min..max)</code> ; <code>plot({ x^2 , 1-x } , x=-1..1)</code> ;
équations paramétriques	<code>plot([x(t) , y(t) , t=min..max])</code> ; <code>plot([cos(t) , sin(t) , t=-Pi/4..3*Pi/4])</code> ;
coordonnées polaires	<code>plot(expr, theta=min..max, coords=polar)</code> ; <code>plot(1+cos(t) , t=0..2*Pi, coords=polar)</code> ;

Séquence, liste, ensemble et tableau

Notation	Description
séquence	suite d'opérandes séparées par des virgules <code>a, b, c, a</code> ;
liste	séquence entre crochets <code>ma_liste := [a, b, 7, -1, a]</code> ;
extraction	<code>op(k , objet)</code> ; extrait le k-ième opérande de objet <code>op(3, ma_liste)</code> ; <code>objet[k]</code> ; fait de même <code>ma_liste[3]</code> ;
tableau	<code>T := array([[a, b, c], [d, e, f]])</code> ; <code>T[2,1]</code> ;

Fonctions et commandes

Notation	Description	Exemple
animate	crée une animation [plots]	Animate (a+x,x=0..5,a=0..1);
binomial	coefficient binomial	binomial(5, 3);
ceil	fonction plafond (entier supérieur ou égal à n)	ceil(2.3);
collect	assemble les termes semblables dans une expression polynomiale	collect ((x-1)^3+(x+2)^2, x);
combine	linéarise une expression	combine(sin(x)^2);
convert	convertit sous une autre forme base b	convert(9 , binary);
D	dérive une fonction	D(sin);
det	calcule le déterminant d'une matrice [linalg]	det(A);
diff	dérivée d'une expression	diff(sin(x), x); diff(sin(x), x, x, x);
Digits	modifie l'affichage des chiffres	Digits := 25 ;
display	affiche plusieurs graphiques[plots]	a:=plot(x); b:=plot(cos); display(a, b);
dsolve	résoud une équation différentielle	dsolve (diff(y(x),x)=x,y(x));
evalf	donne une approximation numérique	evalf(Pi);
expand	développe une expression	expand((x+1)^3);
evalm	évalue et affiche la matrice	evalm(A + B);
factor	factorise une expression	factor(x^5-x);
floor	fonction plancher	floor(2.3);
fsolve	résoud numériquement	fsolve(x=cos(x), x=0..2);
ifactor	décompose en un produit de premiers	ifactor(7200);
igcd	le plus grand commun diviseur	igcd(36, 40);
ilcm	le plus petit commun multiple	ilcm(12, 15);
Im	partie imaginaire d'un complexe	Im(5-2*I);
inverse	calcule l'inverse de la matrice A	inverse(A);
type	permet de tester le type d'un	type(5, integer);

int	donne la primitive (ou l'intégrale définie si on donne un intervalle)	int(2*x, x); int(2*x, x=a..b);
lhs	membre de gauche de l'équation	lhs(a=b+2);
limit	évalue la limite d'une expression	limit(1/x, x=0);
map	applique à chaque élément d'une liste	Map (sqrt, [1,2,3,4]);
member	test d'appartenance	member (2, {1,2,3,4});
normal	forme de simplification	normal(1 + 1/x);
plot	crée un graphique	plot(sin(x),
rand	génère un nombre aléatoire	rand(1..6);
rank	calcule le rang d'une matrice	rank(A);
Re	partie réelle d'un nombre complexe	Re(5-2*I);
rhs	membre de droite de l'équation	rhs(a=b+2);
rsolve	résoud une récurrence	rsolve(u(n+1)=u(n)+1, u(1)=1);
seq	génère une séquence	seq(x^k, k=1..5);
simplify	simplifie l'expression	simplify(ln(9)/2);
solve	résoud une équation	solve(x^2-x+1=0, x);
sort	trie une expression	sort([4,7,1])
subs	substitution d'une opérande	subs(x=2, x+y);
sum	sommation	sum(k, k=1..10);
taylor	développement de Taylor	Taylor (sin(x), x=0, 5);

Programmation

Notation	Description et/ou exemples
proc	définit une procédure nom := proc(...) ... end;
boucle for	for variable from valeur_init to valeur_final do instructions ; od ;
boucle while	while condition do instructions ; od ;
boucle if	if condition_1 then instructions_1 ; elif condition_2 ; then instructions_2 ; ... else instructions_n ; fi ;

Bibliographie

- [1] J. Happian Smith. « An introduction to modern vehicle design ». Butterworth Heinemann 2002.
- [2] H. Heisler. « Vehicle and Engine Technology ». 2nd edition. SAE, 1999.
- [3] H. Heisler. « Advanced Vehicle Technology». 2nd edition, SAE, 2002.
- [4] T. Gillespie. « Fundamentals of vehicle Dynamics », 1992, Society of Automotive Engineers (SAE)
- [5] W. Milliken & D. Milliken. « Race Car Vehicle Dynamics », 1995, Society of Automotive Engineers (SAE).
- [6] U.Kiencke & L.Nielsen “Automotive control systems for Engine, Driveline, and Véhicule “, 2005, Springer.
- [7] J.Y. Wong. « Theory of Ground Vehicles ». John Wiley & sons. 1993 (2nd edition) 2001 (3rd edition).
- [8] W.H. Hucho. « Aerodynamics of Road Vehicles ». 4th edition. SAE International. 1998.
- [9] R. Bosch. « Automotive Handbook ». 5th edition. 2002. Society of Automotive Engineers (SAE)
- [10] T. Postiau Thèse de doctorat « Génération et Parallélisation des Équations du Mouvement de Systèmes Multicorps par l'Approche Symbolique ». Louvain-la-Neuve.Septembre 2004
- [11] Lorenzo FLÜCKIGER. Thèse de doctorat « INTERFACE POUR LE PILOTAGE ET L'ANALYSE DES ROBOTS BASÉE SUR UN GÉNÉRATEUR DE CINÉMATIQUES ». Lausanne, EPFL 1998
- [12] W. Khalil et J. Kleinfinger. *A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots*. ICRA'86, pages 75–79, avril 1986.
- [13] W. Khalil et E. Dombre. Modélisation, identification et commande des robots. Hermès, 1999.
- [14] Spong M.W. Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1988.
- [15] J. J. Craig. Introduction to robotics : Mechanics and control. Addison- Wesley, 1989.

- [16] M. Renaud. *Comment définir l'orientation d'un corps ?* Rapport technique 96078, LAAS-CNRS, 1996.
- [17] R. Murray, Z. Li et S. Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, 1994.
- [18] Lallemand J.P. Zegloul S. *Robotique, Aspects Fondamentaux* Masson, France, 1994.
- [19] Canudas de Witt C. Siciliano B. Bastin G. *Theory of Robot Control*. Springer.
- [20] Restrepo P.P. *Contribution à la modélisation, Identification et commande des robots à structures fermées : Application au robot ACMA SR400* thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire d'Automatique de Nantes, France, 1996.
- [21] Kleinfinger J.F. *Modélisation dynamique de robots à chaîne cinématique simple, arborescente ou fermée, en vue de leur commande*. Thèse de doctorat. ENSM, Nantes, 1986.
- [22] Dupourque V. *Les contrôleurs de robots*. Collection Novotique. INRIA. France. Dec1986.
- [23] Haug E.J. *Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*
- [24] J. Neimark et N. Fufaev. *Dynamics of nonholonomic systems*, volume 33. *Translations of Mathematical Monographs*, 1972.
- [25] B. Gorla et M. Renaud. *Modelling of robot manipulators. Control and applications*. Communication personnelle, 2001.
- [26] Rajesh Rajamani . *Vehicle Dynamics and Control* . Springer, 2006
- [27] M. Renaud. *Calcul analytique itératif des modèles d'un robot manipulateur*. Rapport technique 86159, LAAS-CNRS, 1986.
- [28] Bruneau O. *Approche bio-mimétique pour la conception et la simulation du comportement dynamique de robots bipèdes*, Thèse de Doctorat. Université Paris VI., Laboratoire de Robotique de Paris.
- [29] R. Paul. *Robot manipulators : Mathematics, programming, and control*. MIT press, Cambridge, Londres, Royaume-Uni, 1981
- [30] J.Brillet . *Manuel Maple 95* observatoire des sciences de l'univers bordeaux.
- [31] G.Beurier. *Thèse de doctorat « Modélisation, analyse et contrôle de systèmes mécaniques avec interaction avec l'environnement »* .Laboratoire de robotique de Paris, 2000.
- [32] Griffiths M. *Techniques algorithmiques pour l'intelligence artificielle*. Hermès, 1986

- [33] Pasqui-Boutard V. Méthodes systématiques pour la modélisation et l'analyse cinématiques des mécanismes complexes. Thèse de Doctorat. Université Paris VI. Laboratoire de Robotique de Paris.
- [34] Thomas R.Kurfess Ph.D., P.E. ROBOTICS AND AUTOMATION HANDBOOK. CRC PRESS LLC 2005.
- [35] Beurier G. Roussel L. Perrin B. A simulator for biped robot with a continuous contact model. IFAC Workshop on motion control, Grenoble France sept 98.
- [36] D.Ameddah. Thèse de doctorat. « Conception d'une commande en temps minimal d'un robot mobile » L.I.R.S, 2004.

Modélisation d'un Véhicule En Présence des Forces de Contact Roues/sol

Résumé

L'objectif de ce travail vise principalement l'étude et la mise en œuvre d'un modèle approché des véhicules routiers, en utilisant une approche générique sous le logiciel Maple pour modéliser différents phénomènes relatifs au véhicule. Dans cette étude nous avons mis en considération tous les paramètres influents la dynamique du véhicule, tout en spécifiant les forces longitudinale et latérale de contact roue/sol. Dont l'objectif est de maximiser les forces de traction pendant l'accélération et les forces de freinage durent la décélération, ceci pour éviter le patinage des roues et dérapage du véhicule.

Pour le calcul d'un modèle dynamique opérationnel du véhicule, nous avons choisi les composantes essentielles de façon à réduire la complexité du système tout en garantissant un certain degré de réalisme et d'efficacité de la modélisation. La modélisation dynamique est établie, par le développement d'un programme écrit sous l'environnement Maple, qui permet de générer successivement le modèle géométrique, cinématique et dynamique du véhicule. Les algorithmes utilisés pour la génération des modèles précédents, on était généralisé d'une manière à modéliser d'autres mécanismes articulés, par exemple les robots à structures cinématiques fermées et ouvertes et les robots à pattes.

Mots clés : Modèle dynamiques, véhicule, robots à structure fermées et ouvertes, robots à pattes, forces de contact.

Modeling of a Vehicle In the Presence of the Forces of Wheels/ground Contact

Abstract

The objective of this work aims mainly the study and the implementation of an approximate model of the road vehicles, by using a generic approach under the Maple software to model various phenomena relating to the vehicle. In this study we put in consideration all the influential parameters the dynamics of the vehicle, all specify of them the forces longitudinal and side of contact Wheels/ground. Whose objective is to maximize the forces of traction during acceleration and the forces of braking last deceleration, this to avoid the ice-skating of the wheels and skid of the vehicle.

For the computation of an operational dynamic model of the vehicle, we chose the essential components in ways to reduce the complexity of the system while guaranteeing a certain degree of realism and effectiveness of modeling. Dynamic modeling is established, by the development of a program written under the environment Maple, which makes it possible to generate successively the geometrical, kinematic and dynamics models of the vehicle. The algorithms used for the generation of the preceding models, one was generalized in a manner to model other link mechanisms, for example the robots with structures closed and opened kinematics and the robots with legs.

Key words: Model dynamic, vehicle, closed and opened structure with robots, robots with legs, forces of contact