

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THESE

Présentée

AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
UNIVERSITE DE BATNA

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

Option : Construction Mécanique

Par

Mr SEGHIR KAMEL

*Etude du problème de la thermoélasticité dans
un corps à symétrie axiale*

(Couche transverse isotrope sollicitée par un poinçon cylindrique rigide à extrémités plates)

Soutenue publiquement le 26/12/2010 devant le jury composé de :

Dr OUTTAS Toufik	Prof	Université de Batna	Président
Dr BELBACHA El-Djemai	Prof	Université de Batna	Rapporteur
Dr BENBOUTA Rachid	M.C.A	Université de Batna	Examineur
Dr ZIDANI Kamel	M.C.A	Université de Batna	Examineur
Dr BRIOUA Mourad	M.C.A	Université de Batna	Examineur
Dr HECINI Mabrouk	MC.A	Université de Biskra	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur Belbacha, qui a accepté de poursuivre avec moi ce travail, après le départ de Monsieur Okrepkii.

Je remercie également les membres du jury, Messieurs :

Mr T. OUTTAS, Professeur à l'Université de Batna, d'avoir accepté de présider ce jury.

Mr R. BENBOUTA, Mr K. ZIDANI et Mr M. BRIOUA Maîtres de conférences à l'Université de Batna, qui ont accepté d'examiner ce travail et tout particulièrement Mr M. HECINI Maître de conférences qui nous vient de l'Université de Biskra pour l'examen de cette thèse.

Je remercie aussi mes collègues du département de mécanique qui m'ont encouragée, en particulier mon ami R. Benbouta, qui a toujours insisté à ce que je termine cette thèse.

Je souhaite finalement remercier tous ceux qui m'ont apportés leur soutien amical.

Résumé- Une méthode semi analytique est décrite pour trouver les pressions de contact superficiel d'une couche élastique transversalement isotrope, sollicité par un poinçon cylindrique rigide chauffé. Le problème thermoélastique est réduit à un problème élastostatique isotherme en trouvant quelles sont les contraintes mécaniques superficielles additionnelles dues seulement au champ thermique. La transformation intégrale de Hankel est utilisée pour résoudre les équations différentielles gouvernant le problème. Un exemple pratique est étudié et les courbes de répartition de contraintes dans la zone de contact sont tracées.

Mots clés : problème de contact, axisymétrique, couche transverse isotrope, poinçon cylindrique plat.

Abstract-A semi analytical method is described to find contact pressures surface of an elastic layer transversely isotropic, requested by a heated rigid cylindrical punch at flat end. The thermoelastic problem is reduced to an isothermal problem elastostatic while finding which are the additional surface constraints mechanical due only to the thermal field. The integral transformation of Hankel is used to solve the differential equations that described the stress- strain of the layer. A practical example is studied and the curves distributions of constraints in the zone of contact are plotted.

Keywords: contact problem, Axisymmetric, Transversely isotropic layer, cylindrical punch, heated rigid punch, flat end.

3.3.1 Formulation du problème	29
3.3.2 Méthode de résolution du problème aux limites.....	29
3.3.3 Méthodologie de résolution du système d'équation algébrique.....	30
3.3.4 Calcul numérique.....	36

**Chapitre 4: Solutions aux limites du problème d'élasticité axisymétrique
de la conduction thermique**

4.1 Généralités sur la conduction thermique (contraintes d'origine thermique).....	40
4.1.1 Equation de la conduction thermique dans un solide.....	41
4.1.2 Distribution stationnaire de la température dans un corps homogène.....	41
4.1.3 Equation de convection.....	42
4.1.4 Conditions aux limites.....	42
4.1.5 Méthodes de résolution de l'équation de conduction de chaleur.....	43
4.1.5.1 Méthode des potentiels.....	44
4.1.5.2 Analogie des ressorts.....	44
4.1.5.3 Méthodes semi analytiques des transformation intégrales.....	44
4.1.5.4 Méthodes numériques.....	45
4.1.5.5 Avantages et inconvénients.....	45
4.2 Détermination de la répartition de la température et des contraintes thermiques (Couche homogène isotrope).....	46
4.2.1 Position et formulation du problème.....	46
4.2.2 Solution aux limites du problème de la conduction de chaleur.....	47
4.3 Détermination de la répartition de la température et des contraintes thermiques (Couche transverse isotrope)..	50
4.3.1 Position et formulation du problème.....	50
4.3.2 Solution aux limites du problème de la conduction de chaleur.....	51
4.3.3 Répartition de la température (ordre de calcul).....	56
4.3.4 calcul numérique.....	57
4.3.5 Etapes de résolution.....	58
4.3.6 Calcul des contraintes thermiques.....	59

Introduction

Le contact est le problème central de la mécanique des solides, parce que la zone de contact est l'endroit principal où se concentrent les efforts sur un corps déformable et représente le point le plus critique dans le corps.

Le contact est un domaine pluridisciplinaire. En effet, il fait appel aux domaines de la mécanique, du frottement, du comportement des matériaux et de la thermique. C'est en outre un problème multi échelles allant des effets microscopiques (troisième corps, transformations tribologiques de surface, etc.) aux phénomènes macroscopiques de dissipation de la chaleur ou de déformations structurales, etc.

Les vraies surfaces de contact sont rugueuses, menant à la concentration du contact dans un secteur de contact réel microscopiques. Ceci affecte la conduction de la chaleur à travers l'interface aussi bien que le procédé mécanique de contact. La description proportionnée de tels systèmes exige un processus aléatoire ou un traitement statistique.

De nombreuses applications nécessitent la compréhension des phénomènes ayant lieu au sein du contact. On peut citer à titre d'exemple, dans les systèmes mécaniques, les freins, les embrayages, les engrenages, etc.

Au cours de ces dernières années, comme exemple l'industrie du transport a connue un essor et un développement important, sachant qu'un progrès énorme a été réalisé dans le domaine du transport ferroviaire ainsi que dans le domaine de l'automobile qui peuvent atteindre et même dépasser certaines vitesses considérables. Alors la fiabilité des freins est impérative afin de diminuer le risque et d'augmenter la sécurité.

Il devient important d'étudier et de comprendre les phénomènes ayant lieu au sein de l'interface du contact des disques de freins.

Si la mécanique a su répondre à certaines questions, d'autres interrogations demeurent posées. D'un point de vue thermique peu d'études ont été menées, jusqu'aujourd'hui, on arrive pas à comprendre le phénomène de conversion de l'énergie fournie par un système en une énergie calorifique (en chaleur) dans un contact.

Il est encore difficile de savoir correctement la répartition de la température au sein d'un contact si l'on considère l'hétérogénéité de l'interface du frottement.

Devant un tel problème si complexe dépendant de beaucoup de paramètres, ce qui implique logiquement peu de possibilités expérimentales, il est impératif de multiplier les études théoriques, numériques.

Les matériaux composites entrent en force dans les industries mécanique, électronique, etc. Ils sont utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Il est donc essentiel de disposer des moyens de calcul, les plus précis possibles, pour déterminer le champ thermique dans ces matériaux et d'en déduire les contraintes mécaniques liées à tel chargement thermique, et mieux de définir la superposition thermique et mécanique.

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la formulation semi analytique des problèmes aux limites, pour les matériaux transversalement isotropes. La motivation principale est de chercher le meilleur compromis efficacité-cout pour les méthodes de calcul correspondantes. Ce compromis peut être pensé au stade de la formulation, de façon à définir les outils mathématiques puissants capables de tenir compte du maximum d'informations entourant l'environnement du problème posé.

Les problèmes de contact de la thermoélasticité sont habituellement analysés avec les conditions de frontières thermiques idéalisées [1] de la conduction parfaite ou de l'isolation parfaite. Le poinçon est en contact thermique parfait tandis que le reste de la frontière est partiellement isolé.

Nous traitons alors dans ce présent travail le problème de contact de poinçon cylindrique rigide porté à température et une couche élastique transversalement isotrope colée sur un substrat également rigide. Il a été nécessaire, afin de déterminer la répartition des contraintes dans l'interface du contact qui est bien le but, de conduire la démarche selon les étapes suivantes.

Chapitre 1 :

Ce chapitre présente une étude théorique fondée sur les travaux de recherche (précédents et récents) dans le domaine du contact qui intéresse notre travail. Plusieurs modèles de calcul que les chercheurs ont utilisés ainsi que les hypothèses et les difficultés rencontrées ont été présentées.

Chapitre 2 :

Ici, nous faisons appel à la théorie de l'élasticité (structure à symétrie axiale) des corps isotrope et anisotrope présentées dans [59-64] pour formuler les équations générales des contraintes élastiques et thermiques à utiliser dans la résolution aux limites.

Chapitre 3 :

Nous résolvons dans un premier temps le problème élastostatique d'impression de poinçon cylindrique à extrémités plates dans une couche épaisse transversalement isotrope,

nous déterminons alors à l'interface poinçon- couche élastique la répartition des contraintes essentiellement mécaniques normales élastiques. Nous utilisons pour cela une méthode semi analytique basée sur la transformée de Hankel [2]

Chapitre 4 :

Sur la base de l'étude bibliographique concernant les méthodes analytiques permettant de définir les températures au contact, nous en déduisons le potentiel thermique, la répartition de la température ainsi que les contraintes élastiques provoquées par la chaleur à l'interface du contact. La transformation de Hankel a été également utilisée pour ce but.

Chapitre 5 :

Pour la résolution des problèmes de la thermoélasticité, on applique directement les équations fondamentales aux conditions aux limites du problème [1]. Ici, nous développons et réalisons une technique de calcul basée sur la superposition [3] des effets au niveau du contact (effets thermiques et mécaniques). Nous regroupons les conditions aux limites du problème mécanique et ceux du problème thermique que nous séparent plus tard après résolution des équations aux limites. Les résultats obtenus en comparaison avec ceux de la littérature récente montrent la nécessité de disposer d'une telle réflexion pour alléger le contenu de la résolution et minimiser les erreurs d'intégration, Cette démarche nous fait aboutir en fin de compte à la résolution d'une seule équation algébrique par voie numérique avec grande précision.

Chapitre 6 :

Dans ce chapitre sont regroupés les résultats graphiques relatives aux formules closes des contraintes et déplacements trouvées dans les chapitres précédents. Des interprétations et discussions de ces courbes sont également données.

Objectif et portée du présent travail.

Se basant sur l'enquête bibliographique et la littérature courante, on s'aperçoit qu'il y a certainement d'autres développements des solutions basées sur les transformations intégrales de Hankel.

Les études passées se sont concentrées sur les problèmes de milieu semi infini et couches élastiques isotropes chargés sur les surfaces limites avec des poinçons de formes, tandis que la présente est menée sur un cas plus difficile d'une couche élastique transversalement isotrope reposant sur un substrat rigide sollicitée par un poinçon cylindrique à extrémités plates. L'objectif de cette thèse est donc d'examiner d'abord le comportement du matériau élastique sous l'influence des coefficients de l'anisotropie qui le caractérise, et de séparer dans un second temps les parties mécanique et thermique du problème thermoélastique afin de pouvoir connaître l'influence du champs thermique sur le coté mécanique.

Chapitre 1

Etude bibliographique

1.1 Historique

Le problème de contact le plus connu dans la théorie classique de l'élasticité (problème de Boussinesq) est celui de la détermination de l'état de contraintes dans un demi-espace élastique lorsque le plan limite du corps élastique est déformé par la pression d'un corps parfaitement rigide. On suppose alors qu'aux points du corps élastique éloignés du poinçon rigide, chacune des composantes du tenseur de contraintes tend vers zéro. D'une autre part, il a été nécessaire de formuler l'hypothèse de la disparition de la contrainte de cisaillement en tout point du bord, s'il n'y a pas de frottement. On formule également l'hypothèse que la perturbation de la configuration d'équilibre est assez réduite pour que les conditions aux limites sur la surface libre soient remplacées par des conditions correspondantes sur la limite plane non déformée.

- On dispose principalement de quatre méthodes de résolution de problèmes de contact :

- 1 - les méthodes des variables complexes,
- 2 - les méthodes de transformations intégrales,
- 3 - les méthodes variationnelles et des différences finis,
- 4 - les méthodes numériques, (éléments finis).

L'utilisation de la méthode des variables complexes peut mener à la solution d'une intégrale singulière dont la solution numérique est dérivée par la méthode d'Erdogan et Gupta [4].

L'utilisation d'une transformation intégrale peut amener la solution numérique d'une intégrale de Fredholm de la deuxième espèce.

Muskhelishvili [5] est le premier qui a développé les méthodes des variables complexes. Pour les solutions des problèmes aux limites en élasticité plane. Son ouvrage trace l'histoire de ses travaux de pionnier. England [6] fait un exposé clair et élémentaire de l'utilisation de ces méthodes en élasticité plane. Brilla [7] étudie de façon détaillée la théorie plane des corps anisotropes.

Harding et Sneddon [8] semblent être les premiers à utiliser les transformations intégrales pour résoudre les problèmes mixtes de valeurs aux limites en élasticité. Ils utilisent la théorie des transformations intégrales de Hankel pour réduire le problème de Boussinesq pour un poinçon en forme d'un solide de révolution, à celui de la résolution d'une paire d'équations intégrales doubles. L'intérêt pour les équations de ce type avait été ranimé par E.C.Titchmarsh dans la publication de son ouvrage (introduction to the theory of Fourier integrals). Beaucoup d'autres ouvrages décrivent de façon détaillée les méthodes des transformations intégrales et leurs applications aux problèmes de contact [9, 10,11].

Kupradze [12] a amélioré une méthode d'équations intégrales plus appropriée à la solution des problèmes tridimensionnels. La méthode des transformations intégrales prend ses origines dans le traité classique de Boussinesq [13] qui d'ailleurs reste digne d'intérêt et d'étude.

En parallèle avec l'évolution de ces méthodes mathématiques d'autres chercheurs effectuent des travaux numériques qui deviennent au cours du temps surtout avec le développement remarquable des moyens de calcul des plus sollicités, parlant des méthodes des différences finies et celle d'éléments finis. Plusieurs monographies ont apportés des éclaircissements aux problèmes de contact, citons l'imminente publication de la monographie de Gladwell [14] vaste et complète constituant une mise à jour dans le domaine. Il faut noter aussi le livre de Vorovich [15], les synthèses de Lubkin [16] et de Abramyan [17]. Ce dernier complet l'ouvrage de Galin [18] faisant synthèse des travaux d'après –guerre.

Après avoir mis un œil sur les travaux antérieurs servant toujours de bases aux travaux récents, nous allons essayer d'étudier essentiellement les travaux dans le domaine de l'utilisation des transformations intégrales, et également ceux couvrant les méthodes des équations intégrales.

Les problèmes d'impression de couches élastiques et des massifs semi infinis par un pénétrateur rigide ont une longue histoire et demeurent d'intérêt courant. Ce problème a surgi dans les applications industrielles, soient la conception des roulements garnis des élastomères et des rouleaux couverts de caoutchouc utilisés en traitement des machines. Les solutions classiques du problème sont exprimées en termes d'équations intégrales après transformation [19]. La répartition des efforts à l'interface du contact satisfait une équation singulière pour les couches minces [14].L'évaluation numérique de la solution classique pour déterminer le rapport entre la profondeur de pénétration et la charge a été effectuée par plusieurs investigateurs, Hayes et autres [20] Mak et autres [21].Une recherche de Jaffar [22] présente une solution numérique pour la déformation extérieure verticale pour un éventail de géométrie, mais les résultats sont solution comparée à celle de demi –espace et souffrent de

l'inexactitude près du bord du pénétrateur. Afin de déterminer le champ de déformation dans toutes la couche est d'essayer de résoudre le problème directement. Inversement, la méthode directe offre des possibilités d'être prolongée à la théorie non linéaire. Les méthodes numériques telles que les différences finis et les éléments finis sont applicables. Cependant, pour les pénétrateurs plats, la nature singulière des gradients de déformation près du bord du pénétrateur peut mener à un taux de convergence. Dans un travail récent Mansoor, et autres [23] ont résolu le problème de l'impression de la couche élastique linéaire par le pénétrateur plat et ont conduit une analyse asymptotique de la déformation pour les couches minces. Ainsi une solution analytique approximative a été développée et les formes closes des expressions pour la déformation verticale et l'effort normal sont obtenues près des bords du pénétrateur externe et interne ont été démontrées.

1.2 Applications biomécaniques

Le cartilage articulaire est l'extrémité de l'os à l'intérieure des joints synovial. Possédant des propriétés mécaniques excellentes pour transmettre des charges et pour permettre les mouvements relatifs sans usages significatifs. Dans beaucoup de situations, le cartilage articulaire se détériore jusqu'à séchage (osteoathrosis) menant à des séjours prolongés.

Des recherches significatives ont été entreprises pour comprendre le phénomène de l'osteoathrosis. Dans son travail [24] Mow affirme que le modèle qui convient le mieux pour le cartilage articulaire est le biphasé (considéré comme matrice pleine poreuse gonflée avec le fluide sous l'impression [25]) qui peut être analysé comme couche élastique [26]. Des essais d'impression avec des pénétrateurs sphériques et cylindriques ont été réalisés sur des animaux [27] pour déterminer les propriétés élastiques du cartilage articulaire.

Dans une récente étude [28], on montre que le modèle transversalement isotrope dans lequel le module de Young dans le plan du cartilage (plan d'isotropie) est plus grand que celui dans la direction du chargement, donne un bon ajustement aux courbes expérimentales présentées dans ce présent travail [29]. La solution analytique de l'impression de cette couche élastique a été développée sur la base des équations générales de l'élasticité anisotrope. Cette solution peut aider à analyser le cartilage articulaire sous le chargement d'impact et déterminer les constants élastiques dans les essais correspondants.

1.3 Applications aux multi matériaux

Ces dernières années, l'intérêt s'est concentré également sur la solution des problèmes de contact de matériaux anisotropes, et ce pour leurs applications d'impact liées aux matériaux composites. Afin d'y aboutir, comme le confirme les travaux récents [30,31] on est souvent amenés à résoudre deux problèmes au lieu d'un seul (isotrope transverse et orthotrope). Beaucoup plus disponible sont les solutions des chargements de contact de demi-espace, alors qu'aujourd'hui on s'intéresse plus aux problèmes des couches d'épaisseurs finies. Récemment Swanson [32] utilise la méthode de Willis [33] (double transformation de Fourier) et propose comme solution celle de Turner [34] pour les matériaux isotropes dans laquelle il remplace le module d'élasticité par une combinaison de modules pour matériaux isotrope transverse. Batra [31] et Vel [35] utilisent le formalisme de Stroh [36] pour étudier les déformations infinitésimales dans une couche anisotrope; afin de stabiliser la convergence des séries solutions, il finira par résoudre au lieu d'un, deux problèmes de contact (l'un isotrope et l'autre orthotrope).

1.4 Problèmes thermiques et thermo élastiques (position et difficultés)

Le transfert thermique entre deux solides en contact est d'un grand intérêt physique et technologique. En effet, dans un matériau non contraint avec des bords libres, la variation de température n'entraîne pas de champ de contraintes dans le massif, au contraire, si les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, la dilatation provoque la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant (les effets d'échauffement dus à la déformation sont négligeables).

Dilatation thermique linéaire

Un barreau isotrope soumis à une variation de température ΔT , s'allonge d'une quantité :

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

Son élongation unitaire ($\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$) a pour expression :

$$\varepsilon_{th} = \alpha \cdot \Delta T$$

Ainsi, le coefficient de dilatation thermique linéaire α peut se définir comme le rapport de l'élongation unitaire de température. Graphiquement, il représente la pente de la courbe ($\frac{\Delta L}{L_0} = f(\Delta T)$). Il est en général donné pour un domaine de température limité.

Le coefficient de dilatation est un paramètre intrinsèque au matériau (dépendance vis-à-vis de la nature chimique donc des forces inter atomiques).

Du fait de l'anharmonicité des potentiels atomiques, une augmentation de température s'accompagne d'une dilatation volumique macroscopique du solide. Un matériau à caractère covalent (liaisons fortes) présente généralement de faibles valeurs de α . Des anisotropies de dilatation peuvent être observées dans les matériaux multiphasés (orientation préférentielle de certaines phases).

De nombreuses études ont été effectuées sur la détermination de la répartition de la chaleur à l'interface des corps en contact. Seulement y a eu beaucoup d'hypothèses simplificatrices à chaque fois et les résultats ne coïncidaient pas avec la réalité physique du problème. Les hypothèses admises peuvent être du genre ; contact lisse (parfait) ou avec aspérités ainsi que le régime thermique, permanent ou transitoire.

Les études bibliographiques montrent que suivant le cas, le problème peut être traité de façon spécifique. Dans le cas de régime permanent, on utilise généralement la notion de résistance thermique de contact avec des expressions différentes selon que l'on considère un mouvement d'un des deux corps ou non. En revanche, dans le cas du régime transitoire, la résolution des équations (de la chaleur et les conditions aux limites) est nettement plus compliquée.

L'autre paramètre important est celui de la génération de chaleur. Il faut noter la différence entre le paramètre décrivant le partage du flux de chaleur entre deux corps en contact, et le paramètre représentant la part du flux de chaleur qui est générée dans l'un des deux corps.

L'autre paradoxe est la vitesse infinie de la propagation de la chaleur que prévoit l'équation de la conduction de la chaleur (type parabolique). Lord et Shulman [40] proposent une théorie « L-S » prévoyant un temps de relaxation dans l'équation de conduction généralisée de Maxwell Cattaneo's, dite première généralisation à la théorie couplée d'élasticité. Les équations correspondantes pour un cas isotrope ont été obtenues par Dhaliwal et Sherief [41]. Pour y aboutir, ils ont associées plusieurs simplifications en raison de la complexité des équations régissant et des difficultés mathématiques. Certains auteurs [42,43] emploient dans le cadre de la thermoélasticité couplée un temps de relaxation nul dans un système d'équations parabolique, la solution est en contradiction avec l'observation physique correspondant à la vitesse infinie de propagation de la chaleur. D'autres auteurs préfèrent

ignorer les effets d'inertie en théorie couplée [44] ou en négligeant l'effet d'accouplement. La deuxième généralisation de la théorie couplée de l'élasticité est ce qui est connu comme théorie de thermoélectricité avec deux fois le temps de relaxation dite aussi théorie « G-L » de Green et Lindsay [45]. Muller [46], dans un examen de la thermoélasticité des solides thermoélastiques, propose l'inégalité de production d'enthalpie avec l'aide de ces restrictions construit une classe d'équations constitutives. Green et Lows [47] ont proposés la généralisation de cette inégalité. Ces équations ont été également obtenues indépendamment par Suhubi [48]. Cette théorie contient deux constantes qui agissent en tant que temps de relaxation et modifier toutes les équations de la théorie couplée, non seulement l'équation de la chaleur. La loi de Fourier classique de la conduction de la chaleur n'est pas violée si le milieu à étudier possède un centre de symétrie. Depuis beaucoup de chercheurs l'on utilisée à des fins bien déterminés [49, 50, 51].

Les éléments structuraux sont soumis à des variations de températures qui peuvent influencer leurs propriétés mécaniques même dans un sens approximatif. Sur ce, il est question d'en tenir compte dans l'analyse thermique. Hasselman et autres [52], Youssef et autres [53] dans leurs travaux récents ont tenu compte en considérant un plat de couches se composant de divers matériaux, chacune est homogène et isotrope. Quand ce plat, initialement au repos est soudainement chauffé sur les surfaces libres, un écoulement de la chaleur et du champ thermique se produit. Le modèle mathématique thermoélastique généralisé unidimensionnel avec la conductivité thermique variable pour le problème de conduction de la chaleur est construit pour un plat mince posé. Les équations de base sont transformées par Laplace et résolu par une méthode directe. Les transformations de Laplace sont obtenues numériquement. La température, l'effort et les distributions de déplacement sont représentés graphiquement.

Chen et autres [54] ont dérivés une solution générale tridimensionnelle compacte pour les matériaux thermoélastiques transversalement isotropes. Peng-Fei Hou et autres [1] Emploient les solutions générales harmoniques compactes des matériaux transversalement isotropes et construisent les solutions fondamentales tridimensionnelles pour une source de chaleur régulière de point sur la surface d'un matériel thermoélastique transversalement isotrope semi infini par trois fonctions harmoniques nouvellement présentées.

M.Kumar et Ku.Uma Hiremath [55] ont considérés le problème de la répartition de température à la surface limite d'une couche élastique homogène et isotrope pressée par un poinçon cylindrique annulaire chauffé. La solution est réduite à la résolution d'une équation intégrale triple. Les équations intégrales triples sont réduites à la solution d'un ensemble

infini d'équations simultanées en raison de la singularité dans la région limite du poinçon. Cette imperfection est résolue numériquement et les dix premières racines sont considérées. Les variations de la charge totale sous le poinçon sont montrées graphiquement.

George et Sneddon [56] étaient premiers à étudier le problème axisymétrique du demi-espace élastique dentelé par un poinçon chauffé et ont rendu une comparaison entre les efforts près provoqués par le poinçon seule et les efforts induits par le champs thermique. En utilisant la technique différente Keer et Fu [57] ont déterminés les distributions thermo élastiques d'efforts dues au chargement combiné des poinçons symétriques et circulaires dentelant une couche élastique épaisse. Shibuya [58] a conçu une méthode pour déterminer des distributions d'efforts dans un demi-espace élastique dentelé par un poinçon rigide annulaire plat et dans une couche élastique épaisse dentelée par une paire de poinçons annulaires rigides plats. La méthode de Shibuya [58] réduit les équations intégrales triples dues aux trois conditions mixtes par parties sur la surface de contact dans un ensemble d'équations simultanées linéaires. Ces équations simultanées sont résolues numériquement.

Keer et fu, étudient quelques distributions de contraintes thermo élastiques provenant de l'action combinée de la charge d'un poinçon circulaire, non symétrique, rigide et d'un flux calorifique arbitraire, stabilisé, s'exerçant sur une plaque élastique épaisse. Il est montré que le résultat est obtenu par la solution d'équations intégrales de Fredholm, de deuxième espèce, non couplées. Il a donné des résultats approximatifs pour le cas d'une symétrie axiale, lorsque le rayon du poinçon est beaucoup plus petit que l'épaisseur de la plaque.

Scheletovskii [3] développe Une technique basée sur le principe de superposition des effets pour résoudre des problèmes de contact pour les poinçons annulaires de forme chauffées agissant inversement sur les surfaces limites d'une couche transversalement isotrope. Les formules pour les efforts de contact sous les poinçons sont obtenues, et l'effet de la forme des poinçons sur l'importance de la distribution de ces efforts est analysé.

Chapitre 2

Théorie générale de l'élasticité (structure à symétrie axiale)

2.1 Equations fondamentales gouvernant le problème d'élasticité axisymétrique.

Pour les structures à symétrie axiale, les composantes des contraintes sont indépendantes de l'angle de symétrie θ . Ainsi pour la même raison les composantes ($\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{z\theta}$) sont nulles et toutes les dérivées par rapport à θ disparaissent des équations d'équilibres.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Les composantes du tenseur de contraintes s'expriment par les vecteurs déplacements axial et radial U_z et U_r par :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ \sigma_\theta &= 2\mu \frac{U_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)\end{aligned}\quad (2.2)$$

(μ et λ) sont les coefficients de Lamé

L'introduction de la fonction de contraintes $\phi(r, z)$ [19] définie par les relations :

$$U_z = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \nabla^2 \phi - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$U_r = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial z} \quad (2.3)$$

Substituant maintenant les expressions (2.3) dans (2.2) puis dans (2.1), on obtient l'équation gouvernant le problème d'élasticité en symétrie axiale, soit.

$$\nabla^4 \phi = 0$$

Avec : (2.4)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.2 Solution générale du problème d'élasticité (cas de matériau homogène isotrope)

Soit $\bar{\phi}(\xi, z)$ la transformée de Hankel d'ordre zéro de la fonction $\phi(r, z)$,

$$\bar{\phi}(\xi, z) = \int_0^{\infty} r \phi(r, z) J_0(\xi r) dr \quad (2.5)$$

J_0 : étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro.

La fonction $\phi(r, z)$ s'exprime par la transformée inverse de (2.5) de la manière suivante.

$$\phi(r, z) = \int \xi \bar{\phi}(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi \quad (2.6)$$

Soient les dérivées partielles de $\phi(r, z)$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} = - \int_0^{\infty} \xi^2 \bar{\phi}(\xi, z) J_1(\xi r) d\xi, \quad \text{sachant que} \quad \left(\frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} = -\xi J_1(\xi r) \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} = - \int_0^{\infty} \xi^2 \bar{\phi}(\xi, z) \frac{\partial}{\partial r} J_1(\xi r) d\xi = \int_0^{\infty} \xi \left[-\xi^2 J_0(\xi r) + \frac{\xi}{r} J_1(\xi r) \right] \bar{\phi}(\xi, z) d\xi.$$

$$\frac{\partial J_1(\xi r)}{\partial r} = \xi J_0(\xi r) - \frac{J_1(\xi r)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \xi \frac{\partial^2 \bar{\phi}(\xi, z)}{\partial z^2} J_0(\xi r) d\xi$$

On obtient après avoir substituer les dérivées partielles de la fonctions de contraintes $\phi(r, z)$

dans (2.4) l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d^2 \bar{\phi}(\xi z)}{dz^2} - \xi^2 \bar{\phi}(\xi z) = 0, \quad (2.7)$$

La solution générale correspondante est :

$$\bar{\phi}(\xi, z) = [B_1(\xi) + B_2(\xi)]e^{-\xi z} + [B_2(\xi) + B_2(\xi)]e^{+\xi z}$$

Les fonctions $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $B_3(\xi)$ et $B_4(\xi)$ sont les fonctions d'intégrations à définir par les conditions aux limites.

Enfin, la solution générale $\phi(r, z)$ s'écrit sous sa forme :

$$\phi(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \left\{ [B_1(\xi) + B_2(\xi)]e^{-\xi z} + [B_3(\xi) + B_4(\xi)]e^{\xi z} \right\} J_0(\xi r) d\xi \quad (2.8)$$

2.2.1 Expressions générales des contraintes et déplacements.

Les formes générales des expressions des contraintes et déplacements sont obtenues par substitution de (2.8) dans (2.3) puis dans (2.2).

$$U_r = \frac{1}{b_1} \int_0^{\infty} \xi^2 \left\{ [-\xi B_1(\xi) + (1 - \xi z)B_2(\xi)]e^{-\xi z} + [\xi B_3(\xi) + (1 + \xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z} \right\} J_1(\xi r) d\xi$$

$$U_z = - \int_0^{\infty} \xi^2 \left\{ \left[\frac{1}{b_1} \xi B_1(\xi) + \left(2 + \frac{1}{b_1} \xi z \right) B_2(\xi) \right] e^{-\xi z} + \left[\frac{1}{b_1} \xi B_3(\xi) - \left(2 - \frac{1}{b_1} \xi z \right) B_4(\xi) \right] e^{\xi z} \right\} J_0(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_z = 2b_3 \int_0^{\infty} \xi^3 \left\{ [\xi B_1(\xi) + (b_1 + \xi z)B_2(\xi)]e^{-\xi z} - [\xi B_3(\xi) - (b_1 - \xi z)B_4(\xi)] \right\} J_0(\xi r) d\xi$$

$$\tau_{rz} = 2b_3 \int_0^{\infty} \xi^3 \left\{ [\xi B_1(\xi) - (b_2 - \xi z)B_2(\xi)]e^{-\xi z} + [\xi B_3(\xi) + (b_2 + \xi z)B_4(\xi)] \right\} J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_r = b_3 \int_0^{\infty} \xi^3 \left\{ [-\xi B_1(\xi) + (b_1 + 2b_2 - \xi z)B_2(\xi)]e^{-\xi z} + [\xi B_3(\xi) + (b_1 + 2b_2 + \xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z} \right\} J_0(\xi r) d\xi + \quad (2.9)$$

$B_i (i = 1, 2, 3, 4)$: Fonctions à déterminer par les conditions aux limites

$$\text{Ou : } b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b_3 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad b_4 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$$

$$\lambda = \frac{\gamma E}{(1 + \gamma)(1 - 2\gamma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \gamma)}$$

E et λ : coefficients d'élasticité respectivement de Young et Lamé

2.3 Solution générale du problème d'élasticité (cas de matériau transverse – isotrope)

Les composantes du tenseur de contraintes s'expriment par l'intermédiaire des composantes du vecteur déplacement [59,60] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left[A_{11} \frac{\partial}{\partial r} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{1}{r} \right] U_r + A_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} ; \\
 \sigma_z &= A_{13} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r + A_{33} \frac{\partial U_z}{\partial z} ; \\
 \sigma_\theta &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial U_r}{\partial r} + A_{11} \frac{U_r}{r} + A_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} ; \\
 \tau_{rz} &= A_{44} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Où les A_{ij} sont les constantes d'élasticité du matériau [59,61].

La fonction de contraintes $\phi(r, z)$ est introduite sous la forme :

$$U_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} ; U_z = k \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.11}$$

Où : k est une constante quelconque.

Substituons les relations (2.10) dans les équations d'équilibre locales (problème d'élasticité axisymétrique) et tenant compte de (2.11), on déduit les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_{11} \nabla_1^2 \phi + [A_{44} + k(A_{13} + A_{44})] \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \\
 [A_{13} + (1+k)A_{44}] \nabla_1^2 \phi + kA_{13} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Egalisons ces deux dernières expressions, on obtient.

$$\left(\nabla_1^2 + \nu_i^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_i = 0 ; \quad (i = 1, 2) \tag{2.12}$$

Avec :

$$\frac{A_{44} + k_i(A_{13} + A_{44})}{A_{11}} = \frac{k_i A_{33}}{A_{13} + (1+k)A_{44}} = \nu_i^2 \tag{2.13}$$

$$\text{et} \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.14)$$

Les paramètres γ_i^2 sont les racines de l'équation suivante obtenue à partir des équations (2.13) par élimination de la constante k_i ($i = 1, 2$),

$$A_{11}A_{44} \gamma_i^4 + [A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{44}] \gamma_i^2 + A_{44}A_{33} = 0 \quad (2.15)$$

$k_i, (i=1,2)$: Valeurs de la constante (k), définie de l'égalité (2.13) respectivement pour $\gamma_i^2, (i=1,2)$.

Pour la solution des équations (2.12), concernant les domaines de grandes d'étendues, il convient d'utiliser la transformation de Hankel d'ordre zéro des fonctions de contraintes $\phi_i(r, z)$, soit :

$$\bar{\phi}_i(\xi, z) = \int_0^{\infty} r \phi_i(r, z) J_0(\xi r) dr$$

En intégrant les équations différentielles (2.12) conformément aux transformations inverses de Hankel [2,9] des fonctions $\phi_i(r, z)$.

$$\phi_i(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \bar{\phi}_i(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi. \quad (2.16)$$

J_0 : étant la fonction de Bessel d'ordre zéro.

On déduit les solutions générales à partir des ces équations différentielles ordinaires suivantes.

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_i(\xi, z)}{\partial z^2} - \frac{\xi^2}{(\gamma_i^2)^2} \bar{\phi}_i(\xi, z) = 0$$

Soient :

$$\bar{\phi}_i(\xi, z) = B_{i1}(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\gamma_i}} + B_{i2}(\xi) e^{\frac{\xi z}{\gamma_i}} \quad (2.17)$$

$B_{i1}(\xi)$ et $B_{i2}(\xi)$ sont des fonctions inconnues d'intégrations à déterminer par les conditions aux limites.

2.3.1 Expressions générales des contraintes et déplacements

Ayant trouvé les fonctions $\bar{\phi}_i(\xi, z)$, remplaçons leurs expressions dans ceux des déplacements (2.11) puis dans ceux des contraintes (2.10), ce qui fait :

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\phi_1 + \phi_2) \quad \text{et} \quad U_z = \frac{\partial}{\partial z}(k_1\phi_1 + k_2\phi_2) \\
 U_r &= -\int_0^\infty \xi^2 [S_1(\xi z) + S_2(\xi z)] J_1(\xi r) d\xi \\
 U_z &= \int_0^\infty \xi^2 \left[\frac{k_1}{\gamma_1} S_3(\xi z) + \frac{k_2}{\gamma_2} S_4(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \\
 \sigma_z &= \int_0^\infty \xi^3 \left[\frac{d_1}{\gamma_1^2} S_1(\xi z) + \frac{d_2}{\gamma_2^2} S_2(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi \\
 \tau_{rz} &= -A_{44} \int_0^\infty \xi^3 \left[\frac{1+k_1}{\gamma_1} S_3(\xi z) + \frac{1+k_2}{\gamma_2} S_4(\xi z) \right] J_1(\xi r) d\xi \\
 \sigma_r &= -\int_0^\infty \xi^3 \left[\frac{d_3}{\gamma_1^2} S_1(\xi z) + \frac{d_4}{\gamma_2^2} S_2(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi + \frac{2A_{66}}{r} \int_0^\infty \xi^2 [S_1(\xi z) + S_2(\xi z)] J_1(\xi r) d\xi
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 S_1(\xi z) &= B_{11}(\xi) e^{\frac{-\xi z}{\gamma_1}} + B_{12}(\xi z) e^{\frac{\xi z}{\gamma_1}} \\
 S_2(\xi z) &= B_{21}(\xi) e^{\frac{-\xi z}{\gamma_2}} + B_{22}(\xi z) e^{\frac{\xi z}{\gamma_2}} \\
 S_3(\xi z) &= -B_{11}(\xi z) e^{\frac{-\xi z}{\gamma_1}} + B_{12}(\xi z) e^{\frac{\xi z}{\gamma_1}} \\
 S_4(\xi z) &= -B_{21}(\xi) e^{\frac{-\xi z}{\gamma_2}} + B_{22}(\xi z) e^{\frac{\xi z}{\gamma_2}}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$d_i = k_i A_{33} - \gamma_i^2 A_{13}, \quad (i=1,2)$$

$$d_3 = -k_1 A_{13} + \gamma_1^2 A_{11} \tag{2.20}$$

$$d_4 = -k_2 A_{13} + \gamma_2^2 A_{11}$$

Nous signalons que dans le cas de l'espace transverse isotrope les modules d'élasticité A_{ij} sont liés aux coefficients de déformations a_{ij} [59,62] selon les rapports suivants :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{(a_{11}-a_{12})\left[a_{33}(a_{11}+a_{12})-2a_{13}^2\right]} \\
 A_{33} &= \frac{a_{11}+a_{12}}{a_{33}(a_{11}+a_{12})-2a_{13}^2} \\
 A_{13} &= \frac{a_{13}}{a_{33}(a_{11}+a_{12})-2a_{13}^2} \\
 A_{44} &= \frac{1}{a_{44}}, \quad A_{66} = \frac{A_{11}-A_{12}}{2} \\
 A_{66} &= \frac{E}{2(1+\gamma)} = \mu
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\text{Ici : } a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{33} = \frac{1}{E'}, \quad a_{13} = \frac{-\delta}{E}, \quad a_{13} = -\frac{\delta'}{E'}, \quad a_{44} = \frac{1}{\mu'}.$$

E, E' : Modules de Young correspondants aux contraintes dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

δ, δ' : Coefficients de Poisson correspondants aux contraintes lors de la traction dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

μ' : Module de glissement caractérise le glissement des angles entre les directions de plans d'isotropie et les directions perpendiculaire à ces dernières.

2.4 Rapports de conduction thermique et thermo élastique (matériau homogène isotrope)

Examinons l'état de déformation d'un corps élastique homogène isotrope axisymétrique du à un champ thermique stationnaire.

Comme indiqué dans les travaux [63,64] le champ thermique $T(r, z)$ et le potentiel de déformation $\varphi(r, z)$ satisfont les équations suivantes.

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 T &= 0 \\
 \nabla^2 \varphi &= \frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha_T T
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Les contraintes et déplacements thermiques sont définis par les expressions suivantes:

$$U_r(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad U_z(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_{rz}(T) = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad \sigma_z(T) = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right)$$

et

$$\sigma_r(T) = -2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (2.23)$$

Avec :

α_T : est le coefficient de dilatation thermique

Donc pour déterminer les contraintes et les déplacements thermiques, on est amené à définir d'abord le champ thermique $T(r, z)$ ensuite le potentiel thermique de déplacement $\varphi(r, z)$ et se servir des formules (2.23) pour le calcul des contraintes et déplacements.

2.4.1 Solution générale de l'équation de Laplace gouvernant le problème (matériau homogène isotrope)

Pour les domaines illimités on utilise la transformation de Hankel $\bar{T}(\xi, z)$ d'ordre zéro de la fonction $T(r, z)$ de distribution de la température.

$$\bar{T}(\xi, z) = \int_0^{\infty} r T(r, z) J_0(\xi r) dr \quad (2.24)$$

Substituons dans l'équation de Laplace, on obtient l'équation différentielle ordinaire du second ordre.

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) \bar{T}(\xi, z) = 0 \quad (2.25)$$

Résolvons cette équation (2.25) en utilisant la transformation inverse de (2.24), on obtient l'expression définissant la distribution de la température.

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{+\xi z} + B(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.26)$$

2.4.2 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques

Pour un champ thermique connu, le potentiel thermo élastique est déterminé par la deuxième équation (2.22), dont la solution particulière pour un domaine axisymétrique illimitée est de la forme.

$$\varphi(r, z) = z \int_0^{\infty} \xi \left[A^0(\xi) e^{+\xi z} + B^0(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.27)$$

$A^0(\xi)$ et $B^0(\xi)$ sont déterminées à l'aide des fonctions $A(\xi)$ et $B(\xi)$ à partir de la coïncidence des deux équations (2.22).

Ainsi pour les domaines d'étendue important,

$$\varphi = \frac{1+\delta}{2(1-\delta)} \alpha_T z \int_0^{\infty} \left[A(\xi) e^{+\xi z} + B(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.28)$$

La solution générale pour $\varphi(r, z)$ est égale à la somme de la solution particulière (2.27) et la solution générale correspondante à l'équation homogène $\nabla^2 \varphi = 0$ s'écrivant sous la forme.

$$\varphi_0 = \int_0^{\infty} \xi \left[C(\xi) e^{+\xi z} + D(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.29)$$

On signale que lors de l'analyse des problèmes thermo élastique, il est préférable d'utiliser la solution générale représentée par la fonction bi harmonique, c'est pourquoi les expressions données par la suite (composantes de contraintes et déplacements) correspondent uniquement à une valeur particulière du potentiel thermo élastique.

Substituons (2.28) dans (2.23), on obtient :

$$\begin{aligned} U_z^{(T)} &= \frac{1+\delta}{2(1-\delta)} \alpha_T \int_0^{\infty} \left[A(\xi)(1+\xi z) e^{+\xi z} + B(\xi)(1-\xi z) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \\ \sigma_z^{(T)} &= \frac{1+\delta}{1-\delta} \mu \alpha_T Z \int_0^{\infty} \xi^2 \left[A(\xi) e^{+\xi z} + B(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi \\ \tau_{rz}^{(T)} &= -\frac{1+\delta}{1-\delta} \mu \alpha_T \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi)(1+\xi z) e^{+\xi z} + B(\xi)(1-\xi z) e^{-\xi z} \right] J_1(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5 Rapports de conduction thermique (matériau transverse isotrope).

Dans le cas du matériau transverse isotrope le champ thermique satisfait l'équation différentielle suivante [60,64].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.31)$$

Les contraintes et les déplacements sont déterminés par les potentiels thermoélastiques φ_1 et φ_2 selon les formules suivantes :

$$U_z^{(T)} = -a_1 \left(s_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
U_r^{(T)} &= -a_1 \left(s_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \\
\sigma_z^{(T)} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \\
\tau_{rz}^{(T)} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} \\
\sigma_r^{(T)} &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (s_1^2 \varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 doivent satisfaire le système d'équations différentiel suivant,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= \frac{1}{a_2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - a_3 T \right) \\
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} &= a_4 T
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Dans ces formules (2.31), (2.32) et (2.33) sont introduits les symboles suivants :

λ_0^2 : Rapport entre coefficients de conductibilité thermique dans la direction de l'axe de symétrie de la structure et dans la direction perpendiculaire à celle - ci.

γ_1^2 et γ_2^2 : sont les racines de l'équation indiquées auparavant.

$$A_{11}A_{44} \gamma_i^4 + [A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{44}] \gamma_i^2 + A_{44}A_{33} = 0$$

S_1^2 et S_2^2 : sont les racines de l'équation suivante :

$$A_{44}.S^4 - (A_{11} - A_{12})S^2 + \frac{(A_{11} - A_{12})^2(A_{13} + A_{44})}{A_{11}A_{33} - A_{13}^2} = 0$$

$$a_1 = a_{11} - a_{12} \ , \quad a_2 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_1a_{11}} \ , \quad a_3 = \frac{\beta_T a_{11} - \alpha_T a_{13}}{a_1a_{11}} \ , \quad a_4 = a_3 \gamma_1^2 - \frac{\alpha_T}{a_{11}} \ .$$

a_{ij} : Coefficients de déformations [64] liés aux modules d'élasticités A_{ij} par les formules précédentes.

α_T et β_T : sont les coefficients de dilatation thermique linéaires respectivement dans le plan d'isotropie et dans la direction perpendiculaire à ce plan.

Le champ thermique est trouvée par analogie au cas de matériau isotrope, la formule correspondante possède la même forme, soit :

$$T = \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.34)$$

Les solutions particulières du potentiel thermique sont trouvées par la résolution du système d'équations (2.33).

2.5.1 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques

Connaissant le champ thermique (2.34), on détermine à partir de la deuxième équation (2.33) la fonction φ_2 . Substituons maintenant la valeur trouvée de φ_2 et la valeur de la température dans la première équation (2.33), on trouve la fonction φ_1 .

Toute transformation faite, on obtient :

$$\varphi_1 = h_1 \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.35)$$

$$\varphi_2 = \frac{a_4 \lambda_0^2}{\gamma_1^2 - \lambda_0^2} \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.36)$$

Les composantes des déplacements et contraintes correspondants aux relations (2.32), tenons compte de (2.35) et (2.36) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} U_z^T &= -a_1 \lambda_0 h_2^* \int_0^{\infty} \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_0(\xi r) d\xi \\ \sigma_z^T &= -\lambda_0^2 h_1^* \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_0(\xi r) d\xi \\ \tau_{rz}^T &= \lambda_0 h_1^* \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda_0}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda_0}} \right] J_1(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (2.37)$$

Les valeurs h_i^* ($i=1,2,3$) expriment la relation entre les paramètres inclus dans les expressions, à savoir:

$$h_1^* = \frac{1}{a_2(\gamma_2^2 - \lambda_0^2)} \left(\frac{a_4}{\gamma_1^2 - \lambda_0^2} - a_3 \right), \quad h_2^* = S_2^2 h_1 - \frac{a_4}{\gamma_1^2 - \lambda_0^2}$$

Chapitre 3

Solution aux limites du problème d'élasticité axisymétrique

3.1 Hypothèses et Position du problème

Nous supposons qu'aux points du corps élastique éloignés du poinçon rigide chacune des composantes du tenseur de contraintes tends vers zéro.

On formule également l'hypothèse que la perturbation de la configuration d'équilibre est assez réduite pour que les conditions aux limites sur la surface libre soient remplacées par les conditions correspondantes sur la limite plane non déformée.

Dans le cas de la symétrie axiale, il est plus approprié d'utiliser la transformation de Hankel au lieu de celle de Fourier.

Telles sont d'ailleurs les hypothèses sous lesquelles Sneddon et Harding [8] dans une étude précédente utilisaient la transformation de Hankel pour réduire le problème de Boussinesq pour un poinçon en forme d'un solide de révolution, à celui de la résolution d'une paire d'équations intégrales doubles. Uflyand [11] a présenté une synthèse des premiers travaux dans son ouvrage « transformations intégrales dans les problèmes d'élasticité » et beaucoup d'autres ouvrages comprennent des descriptions détaillées des applications des transformations intégrales aux problèmes de contacts. Kuo et Keer [38] analysaient le contact d'un pénétrateur sphérique rigide avec un demi-espace formé de plusieurs couches parfaitement collées de matériaux isotrope transverse en employant la transformation intégrale de Hankel et réduiraient le problème à une équation intégral qu'ils solutionnaient numériquement. La même procédure est utiliser par Matnyak[39] pour déterminer la distribution de contraintes sous le poinçon cylindrique en mouvement sur une couche précontrainte. Plus compliqué est le problème de la thermo élasticité qu'a traiter Shelestovskii [3] en appelant également la transformation de Hankel pour déterminer et analyser les contraintes thermoélastique d'une couche comprimée par deux poinçons cylindriques annulaires de formes.

Ici, nous utilisons une procédure similaire basée sur la transformation intégrale de Hankel [2,9] pour réduire le problème de contact à un système d'équations intégrales que nous solutionnons par voie numérique. Pour faciliter le passage à la forme intégrale nous introduisons une fonction paramètre $\phi(\eta)$ dans la condition au limite correctement choisie. Les résultats obtenus de l'exemple étudié sous forme de courbes seront vérifiés comparativement à ceux trouvés en littérature. Autrement dans les cas limites suivants on peut également vérifier les résultats :

- Lorsque l'épaisseur « H » tend vers l'infini, la couche devient alors un espace semi infini.
- Lorsque ν_1, ν_2 (respectivement caractéristiques du matériau dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci) tendent vers l'unité, le matériau devient quasiment isotrope.

3.1.1 Problématique

On se propose d'étudier le phénomène de la thermoélasticité qui se produit à l'interface du contact poinçon cylindrique avec la surface supérieur de la couche élastique.

Le problème statique ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) coïncidant avec la surface supérieur de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig.1).

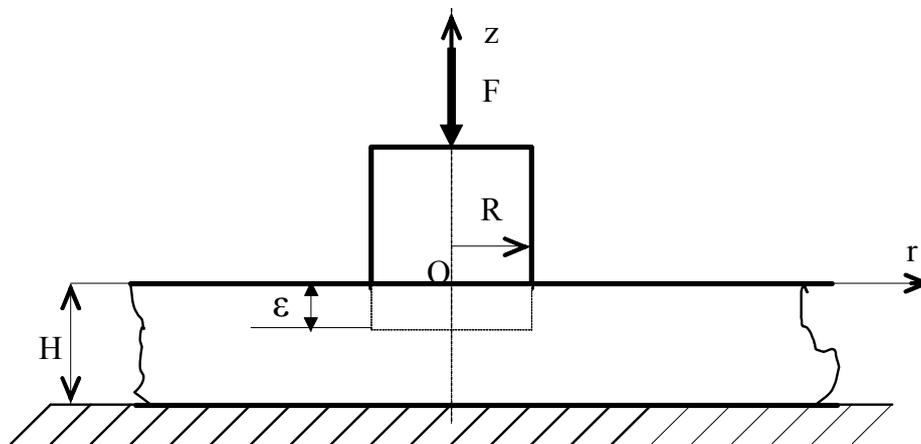


Fig.1 – croquis schématique du problème

ε : Représentera la profondeur de pénétration du poinçon dans la couche élastique (isotrope et transverse isotrope) que se soit sous le chargement mécanique, thermique ou les deux à la fois (thermoélastique).

H : étant l'épaisseur de la couche élastique.

1- Dans un premier temps la surface limite supérieure ($z=0$) sera chargée mécaniquement par la pression du poinçon soumis à l'effort physique F .

2- Dans un deuxième temps la même surface limite sera sous l'effet du chargement thermique du poinçon chauffé à une température fixe.

3- Enfin, la couche sera chargée par les effets thermique et mécanique du poinçon à la fois sur la même surface limite.

Dans chacune des étapes, sera considéré le matériau isotrope et transverse isotrope.

Le problème principal qu'on se propose de résoudre est celui de trouver de quelle manière la chaleur influence (en quantité) le côté mécanique (contraintes). Sur le chemin, on peut toujours étudier la participation des paramètres dans la problématique tel que (le matériau, dimensionnement, ...etc.).

3. 2 Détermination des contraintes normales au contact couche - poinçon cylindrique (matériau homogène isotrope)

3.2.1 Formulation du problème

Il est important afin de justifier et généraliser l'emploi de la méthode, de considérer d'abord le cas de couche élastique de matériau isotrope.

La couche d'épaisseur H élastique homogène et isotrope d'étendue suffisamment grande est sollicitée normalement à sa surface limite supérieure par un poinçon cylindrique rigide à extrémités plates. la surface limite inférieure de la couche repose sur une plate forme également rigide.

Nous nous proposons d'étudier le problème élastostatique et de déterminer les contraintes sur la surface de contact couche poinçon cylindrique.

Nous supposons le chargement parallèle à l'axe de symétrie de la couche élastique est appliqué normalement à cette surface.

Nous supposons qu'aux points du corps élastique éloignés du poinçon rigide, chacune des composantes du tenseur de contraintes tends vers zéro.

On formule également l'hypothèse que la perturbation de la configuration d'équilibre est assez réduite pour que les conditions aux limites sur la surface libre soient remplacées par les conditions correspondantes sur la limite plane non déformée.

Soient les conditions aux limites suivantes :

$$0 \leq r \leq R, \quad z=0 : U_z = -\varepsilon \quad (3.1)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad z=0 : \tau_{rz} = 0 \quad (3.2)$$

$$R \leq r < \infty, \quad z=0 : \sigma_z = 0 \quad (3.3)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad z=-H : U_z = 0 \quad (3.4)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad z=-H : \tau_{rz} = 0 \quad (3.5)$$

ε : Profondeur de pénétration du poinçon dans la couche élastique(isotrope)

3.2.2 Méthode de résolution du problème aux limites

Rappelons les expressions générales des contraintes et déplacements (2.9) après avoir introduit le changement de variables suivant.

$$\frac{r}{R} = \rho, \quad \xi R = \eta, \quad \frac{z}{R} = \zeta \quad \text{et} \quad F_i(\eta) = \frac{\eta^3}{R^3} B_i\left(\frac{\eta}{R}\right), \quad i=1,2,3,4$$

Soient :

$$\begin{aligned} U_z &= -\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \left[\frac{\eta}{b_1 R} F_1(\eta) + \left(2 + \frac{\eta \zeta}{b_1}\right) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \zeta} + \left[\frac{\eta}{b_1 R} F_3(\eta) - \left(2 - \frac{\eta \zeta}{b_1}\right) F_4(\eta) \right] e^{\eta \zeta} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta \\ \sigma_z &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (b_1 + \eta \zeta) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \zeta} + \left[\frac{-\eta}{R} F_3(\eta) + (b_1 - \eta \zeta) F_4(\eta) \right] e^{\eta \zeta} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta \\ \tau_{rz} &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) - (b_2 - \eta \zeta) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \zeta} - \left[\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2 + \eta \zeta) F_4(\eta) \right] e^{\eta \zeta} \right\} J_1(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Satisfaisons les conditions aux limites (3.2), (3.4) et (3.5), introduisons ensuite la fonction inconnue $\phi(\eta)$ dans la condition (3.3), nous obtenons le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{R} F_1(\eta) - b_2 F_2(\eta) + \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + b_2 F_4(\eta) &= 0 \\ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) - (b_2 + \eta l) F_2(\eta) \right] e^{\eta l} + \left[\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2 - \eta l) F_4(\eta) \right] e^{-\eta l} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\eta}{b_1 R} F_1(\eta) + \left(2 - \frac{\eta l}{b_1}\right) F_2(\eta) \right] e^{\eta l} + \left[\frac{\eta}{b_1 R} F_3(\eta) - \left(2 + \frac{\eta l}{b_1}\right) F_4(\eta) \right] e^{-\eta l} = 0$$

$$\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + b_1 F_2(\eta) - \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + b_1 F_4(\eta) = R \eta \phi(\eta) \quad (3.7)$$

$l = H / R$: est la constante sans dimension (représentant le rapport entre l'épaisseur de la couche élastique et le rayon du poinçon).

Résolvons le système d'équations algébriques (3.7) et exprimons les fonctions inconnues $F_i(\eta), (i = 1, 2, 3, 4)$ en fonction de $\phi(\eta)$.

Les conditions (3.1) et (3.3) s'écrivent respectivement après avoir introduit les fonctions $F_i(\eta)$ exprimées en fonction de $\phi(\eta)$ sous forme d'un système de deux équations intégrales

$$\int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{-\varepsilon}{R} b_4 + \int_0^{\infty} \phi(\eta) G_1(2\eta l) J_0(\eta \rho) d\eta \quad : \rho < 1$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (3.8)$$

$$\text{Avec : } b_4 = \frac{\mu}{2\mu + \lambda}, \quad \text{et } G_1(2\eta l) = \frac{1 + 2\eta l - e^{-2\eta l}}{sh 2\eta l + 2\eta l}$$

Avec la représentation suivante [9,37].

$$\phi(\eta) = b_4 \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt \quad (3.9)$$

La deuxième équation (3.8) est satisfaite identiquement, en effet:

$$\int_0^{\infty} \eta J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt = \begin{cases} 0 & \rho > 1 \\ \frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} & \rho < 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

La première équation (3.8) se ramène à une intégrale d'Abel

$$\int_0^{\rho} \frac{f(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho) \quad (3.11)$$

qui se résout [65]:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \quad (3.12)$$

Avec :

$$g(\rho) = \frac{-\varepsilon}{R} + \int_0^\infty G_1(2\eta l) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt \quad (3.13)$$

Après substitution et transformation (3.12) s'écrit sous cette forme :

$$f(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G_1(2\eta l) \cos \eta x d\eta \quad : \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.14)$$

Les contraintes normales à la surface limite de contact s'expriment par

$$\sigma_z = 2b_3 \int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 2b_3 b_4 \left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right] \quad : \quad \rho < 1 \quad (3.15)$$

De la condition d'équilibre statique,

$$F = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho) d\rho$$

On écrit, après avoir substituer $\sigma_z(\rho)$ par son expression, tenant compte de (3.14) et effectuer l'intégration par rapport à la variable (t)

$$f(t) = \frac{-F}{2\pi R^2 2b_3 b_4} \psi(t) \quad (3.16)$$

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G_1(2\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta = 1 \quad (3.17)$$

Ainsi nous ramenons l'expression de la contrainte (3.15) à la forme simple

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2 2b_3 b_4} \sigma_z^*(\rho) \quad (3.18)$$

Où :

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{\Psi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad (3.19)$$

L'expression (3.19) représente la contrainte $\sigma_z^*(\rho)$ sans dimensions.

Commentaire

$$\lim_{l \rightarrow \infty} G_1(2\eta l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\eta l - e^{-2\eta l}}{sh2\eta l + 2\eta l} = 0$$

De (3.17), nous déduisons :

$$\psi(t) = 1$$

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi(1)}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2 2b_3 b_4} \sigma_z^*(\rho) = \frac{-P}{2\pi R^2 2b_3 b_4} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

Dans le cas où l'épaisseur de la couche est infiniment grande (c'est-à-dire H tends vers l'infini), le rapport relatif $l = H/R$ tends vers l'infini et par conséquent la fonction $\psi(t)$ tends vers l'unité. Ce résultat coïncide exactement avec celui de la bibliographie du demi espace de Boussinesq connu sous le nom de (Problème de Schteicher).

3.3 Détermination des contraintes normales au contact couche - poinçon cylindrique (matériau transverse isotrope).

Nous gardons le même schéma de calcul que le précédent (Fig.1), mêmes hypothèses, prenant cette fois-ci le matériau de la couche en question transverse isotrope.

3.3.1 Formulation du problème

La couche d'épaisseur « H » à faces parallèles de matériau isotrope transverse est statiquement comprimée par un cylindre rigide à extrémités plates sur la face supérieure. La face inférieure est collée à un support plat également rigide.

Le problème ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) coïncidant avec la surface supérieur de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig.1).

Soient les conditions aux limites suivantes :

$$0 \leq r \leq R, \quad z = 0 : U_z = -\varepsilon \quad (3.20)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad z = 0 : \tau_{rz} = 0 \quad (3.21)$$

$$R \leq r < \infty, \quad z = 0 : \sigma_z = 0 \quad (3.22)$$

$$0 \leq r < \infty \quad , \quad z = -H : \quad U_z = 0 \quad (3.23)$$

$$0 \leq r < \infty \quad , \quad z = -H : \quad \tau_{rz} = 0 \quad (3.24)$$

ε : profondeur de pénétration du poinçon dans la couche élastique transverse isotrope.

3.3.2 Méthode de résolution du problème aux limites

Effectuant le changement de variables

$$F_i(\eta) = \frac{\eta^3}{R^3} B_i\left(\frac{\eta}{R}\right) \quad ; \quad (i = 1,4)$$

$$\rho = \frac{r}{R} \quad ; \quad \eta = \zeta R \quad ; \quad \zeta = \frac{z}{R}$$

$$d_1 = k_1 A_{33} - \nu_1^2 A_{13} \quad ; \quad d_2 = k_2 A_{33} - \nu_2^2 A_{13} \quad ; \quad d_3 = -k_1 A_{13} + \nu_1^2 A_{11} \quad ; \quad d_4 = -k_2 A_{13} + \nu_2^2 A_{11}$$

Les formules des contraintes et déplacements (2.18) prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} U_z &= \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta \quad ; \\ \sigma_z &= \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{\nu_1^2} \left[F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{d_2}{\nu_2^2} \left[F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta \quad ; \quad (3.25) \\ \tau_{zz} &= -\frac{A_{44}}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_1(\eta\rho) d\eta \end{aligned}$$

Satisfaisons les conditions aux limites et introduisons la fonction $\phi(\eta)$ dans la condition (3.22) tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\frac{k_1}{\nu_1} (-F_1(\eta) + F_2(\eta)) + \frac{k_2}{\nu_2} (-F_3(\eta) + F_4(\eta)) \right] J_0(\eta\rho) d\eta &= -\varepsilon \quad ; \\ \frac{1+k_1}{\nu_1} (-F_1(\eta) + F_2(\eta)) + \frac{1+k_2}{\nu_2} (-F_3(\eta) + F_4(\eta)) &= 0 \quad ; \\ \frac{d_1}{\nu_1^2} (F_1(\eta) + F_2(\eta)) + \frac{d_2}{\nu_2^2} (F_3(\eta) + F_4(\eta)) &= \eta\phi(\eta)R \quad ; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta l}{\nu_1}} + F_2(\eta)e^{-\frac{\eta l}{\nu_1}} \right] + \frac{k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta l}{\nu_2}} + F_4(\eta)e^{-\frac{\eta l}{\nu_2}} \right] = 0 ;$$

$$\frac{1+k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta l}{\nu_1}} + F_2(\eta)e^{-\frac{\eta l}{\nu_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta l}{\nu_2}} + F_4(\eta)e^{-\frac{\eta l}{\nu_2}} \right] = 0 .$$

Résolvons le système d'équations algébriques obtenu (3.26) et exprimons les fonctions F_i ($i = 1,4$) par $\phi(\eta)$.

Ecrivons le système d'équations pour les quatre dernières équations (3.26) sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+k_1)}{\gamma_1} & \frac{1+k_1}{\gamma_1} & -\frac{1+k_2}{\gamma_2} & \frac{1+k_2}{\gamma_2} \\ \frac{d_1}{\gamma_1^2} & \frac{d_1}{\gamma_1^2} & \frac{d_2}{\gamma_2^2} & \frac{d_2}{\gamma_2^2} \\ \frac{\eta l}{k_1 e^{\gamma_1}} & \frac{\eta l}{k_1 e^{-\gamma_1}} & \frac{\eta l}{k_2 e^{\gamma_2}} & \frac{\eta l}{k_2 e^{-\gamma_2}} \\ \frac{-(1+k_1)}{\gamma_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} & \frac{1+k_1}{\gamma_1} e^{-\frac{\eta l}{\gamma_1}} & \frac{-(1+k_2)}{\gamma_2} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} & \frac{1+k_2}{\gamma_2} e^{-\frac{\eta l}{\gamma_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\eta) \\ F_2(\eta) \\ F_3(\eta) \\ F_4(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta\phi(\eta)R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3.3 Méthodologie de résolution du système d'équation algébrique

La résolution directe du présent système d'équations par Gauss est assez compliquée. Les expressions analytiques sont longues et le risque d'erreurs est très probable. Afin de contourner ce risque, il est préférable de procéder de la manière suivante.

De la deuxième équation (condition) (3.21), on tire le résultat suivant :

$$(-F_1(\eta) + F_2(\eta)) = \frac{1+k_2}{1+k_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (F_3(\eta) - F_4(\eta)) \quad (3.27)$$

La première condition (3.20) s'écrit en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ de cette façon ;

$$\frac{k_1 - k_2}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} (F_3(\eta) - F_4(\eta)) J_0(\eta\rho) d\eta = -\varepsilon \quad \rho < 1 \quad (3.28)$$

Soustrayons l'équation (3.23) de l'équation (3.24), après avoir multiplié les deux équations respectivement par les paramètres k_1 et $(1+k_1)$, on obtient la relation entre $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$.

$$F_4(\eta) = e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta) \quad (3.29)$$

De la condition (3.24), on tire après avoir substitué $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ la relation entre les fonctions $F_1(\eta)$ et $F_2(\eta)$, soit :

$$F_2(\eta) = e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} F_1(\eta) \quad (3.30)$$

La première condition (3.20) s'écrit en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\frac{k_1}{\gamma_1} \frac{1+k_2}{1+k_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{k_2}{\gamma_2} \right] (F_3(\eta) - F_4(\eta)) J_0(\eta\rho) d\rho = -\varepsilon \quad \rho < 1 \quad (3.31)$$

La troisième condition prend la forme suivante :

$$\int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad \rho > 1 \quad (3.32)$$

Il est donc question de chercher seulement la fonction $F_3(\eta)$ par $\phi(\eta)$ au lieu des quatre fonctions $F_i(\eta)$; pour cela considérons les équations (conditions) (3.21) et (3.22), soient :

$$\begin{bmatrix} \frac{1+k_1}{\gamma_1} \left(e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} - 1 \right), & \frac{1+k_2}{\gamma_2} \left(e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} - 1 \right) \\ \frac{d_1}{\gamma_1^2} \left(e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} + 1 \right), & \frac{d_2}{\gamma_2^2} \left(e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} + 1 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\eta) \\ F_3(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\eta\phi(\eta) \end{bmatrix}$$

Par la méthode de Cramer, on cherche la fonction : $F_3(\eta) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$

$$\Delta = \frac{4}{\gamma_1\gamma_2} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left[\frac{1+k_1}{\gamma_2} d_2 \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{\gamma_2} - \frac{1+k_2}{\gamma_1} d_1 \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{\gamma_1} \right]$$

Qui s'écrit aussi

$$\Delta = \frac{4}{\gamma_1\gamma_2} \frac{d_1 d_2}{\gamma_1\gamma_2 A_{44}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} Q(\eta l) \quad (3.33)$$

Avec

$$Q(\eta l) = \left[\frac{1}{\gamma_1} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{\gamma_1} \right]$$

Et

$$\Delta_2 = \frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} R \eta \phi(\eta) e^{\gamma_1 \frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1}$$

Introduisons les résultats dans les équations conditions (3.31) et (3.32), nous obtenons un système de deux équations intégrales que nous écrivons sous la forme :

$$\frac{1}{\delta_0} \int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{-\mathcal{E}}{R} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^\infty G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad : \quad \rho < 1 \quad (3.34)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (3.35)$$

$$\text{Avec : } l = \frac{H}{R} \quad ; \quad \delta_0 = \frac{(A_{11} v_2^2 + A_{13}) v_2 d_1}{A_{11} (v_1^2 - v_2^2) v_1}$$

$$G(\eta l) = 1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta l}{v_2} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{v_1}}{\frac{1}{v_2} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{v_1} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{v_2} - \frac{1}{v_1} \operatorname{ch} \frac{\eta l}{v_2} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{v_1}} \quad (3.36)$$

Soit la représentation suivante [9,37].

$$\phi(\eta) = \delta_0 \int_0^1 f_0(t) \cos \eta t \, dt \quad (3.37)$$

Intégrons par partie l'équation (3.35) en prenant $U = f(t)$ et $dV = \cos \eta t dt$

$$\int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_0(t) \cos \eta t \, dt = \int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \left[f_0(t) \frac{\sin \eta t}{\eta} \Big|_0^1 - \frac{1}{\eta} \int_0^1 f_0'(t) \sin \eta t dt \right] =$$

$$= \int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \left[\frac{f_0(1) \sin \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} \int_0^1 f_0'(t) \sin \eta t dt \right] =$$

$$f_0(1) \int_0^\infty J_0(\eta \rho) \sin \eta d\eta - \int_0^1 f_0'(t) dt \int_0^\infty J_0(\eta \rho) \sin \eta t d\eta = \frac{f_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_0^1 \frac{f_0'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad : \quad (\rho < 1)$$

D'après la table d'intégration [65], l'intégral de Weber se résout en :

$$\int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) \sin \eta t dt = \begin{cases} 0 : \rho > t \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} : \rho < t \leq 1 \end{cases}$$

L'équation (3.31) est donc satisfaite identiquement, en effet:

$$\int_0^{\infty} \eta J_0(\eta\rho) d\eta \int_0^1 f_0(t) \cos \eta t dt = \begin{cases} 0 & \rho > 1 \\ \frac{f_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f_0'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} & \rho < 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

L'équation (3.30) se ramène à une intégrale d'Abel

$$\int_0^1 f_0(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) \cos \eta t d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^1 f_0(t) dt \int_0^{\infty} G(\eta l) J_0(\eta\rho) \cos \eta t d\eta$$

Posons

$$\int_0^1 f_0(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) \cos \eta t d\eta = g(\rho)$$

D'après la table d'intégration [65], on écrit ;

$$\int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) \cos \eta t d\eta = \begin{cases} 0 : \rho < t \\ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} : \rho > t \end{cases}$$

D'où l'intégral D'Abell

$$\int_0^{\rho} \frac{f_0(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho) \quad : \rho > t \quad (3.39)$$

Qui se résout [65]:

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \quad (3.40)$$

Avec:

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta \quad (3.41)$$

Substituons (3.41) dans (3.40) et tenons compte de (3.37),

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left(-\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^{\infty} f_0(t) dt \int_0^{\infty} G(\eta l) J_0(\eta\rho) \cos \eta t d\eta = \right.$$

$$= -\frac{2\varepsilon}{\pi R} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\infty G(\eta l) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_0(u) \cos u \eta du$$

Effectuant le changement de variable pour le calcul de cet intégrale

$$\text{Soit ; } \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = -\int_t^0 \frac{z dz}{z} = t$$

D'ou :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\infty G(\eta l) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_0(u) \cos u \eta du =$$

$$\int_0^1 f_0(u) du \int_0^\infty G(\eta l) \cos u \eta d\eta \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho J_0(\eta \rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right] = \int_0^1 f_0(u) du \int_0^\infty G(\eta l) \cos u \eta \cos \eta t d\eta$$

D'après [65]

$$\int_0^t \frac{\rho J_0(\eta \rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \frac{\sin \eta t}{\eta}$$

Nous obtenons après ces transformations l'expression de $f(t)$

$$f_0(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_0(x) dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \cos \eta t d\eta \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.42)$$

Les contraintes à la surface de contact $\sigma_z(\rho, 0)$, se déterminent par la formule.

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \left[\frac{f_0(1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f_0'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right] \quad (3.43)$$

La charge totale sur le poinçon qui produit la pénétration est donnée par la condition d'équilibre statique:

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho) d\rho \quad (3.44)$$

L'expression (3.38) s'écrit également sous la forme:

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \int_0^1 f_0(t) \cos \eta t \, dt \int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) \, d\eta \quad (3.45)$$

Portons (3.41) dans (3.40) tenons compte de (3.38) et intégrons par rapport à la variable (t), nous aurons :

$$f_0(t) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \psi_0(t) \quad (3.46)$$

Avec :

$$\psi_0(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi_0(x) dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = 1 \quad (3.47)$$

Les équations (3.16, 3.17) et (3.42, 3.43) sont identiques de formes, et alors la contrainte se calcul par la même formule (3.18), soit :

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{\Psi_0'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (3.48)$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho) \quad (3.49)$$

Commentaire

La limite de la fonction $G(\eta l)$ (3.36) lorsque $\gamma_1 = \gamma_2 \rightarrow 1$ est égale à $G(2\eta l)$ (3.8) précédemment calculée (cas du matériau isotrope), d'autre part la limite du coefficient δ_0 coïncide avec la valeur du coefficient $2b_3b_4$ du matériau homogène isotrope.

$$1) \quad \lim_{(\nu_1=\nu_2) \rightarrow 1} \delta_0 = \lim_{(\nu_1=\nu_2) \rightarrow 1} \frac{(A_{11}\nu_2^2 + A_{13})\nu_2 d_1}{A_{11}(\nu_1^2 - \nu_2^2)\nu_1} = \chi_0 = \frac{2(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu}$$

λ et μ : sont les constants de Lamé (matériau isotrope)

$$2) \quad \lim_{(\gamma_1=\gamma_2) \rightarrow 1} G(\eta l) = \lim_{(\gamma_1=\gamma_2) \rightarrow 1} \frac{\frac{\text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}{\frac{1}{\nu_2} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_1} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}}{\text{sh} 2\eta l + 2\eta l} = G(2\eta l)$$

3) Problème de Schteicher :

En faisant tendre à la fois γ_1 et γ_2 vers l'unité et H vers l'infini ; $G(2\eta l)$ s'annule.

De (3.17) on a : $\psi(t) = 1$, la formule (3.18) s'écrit $\sigma_z(\rho, 0) = \chi_0 \frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}}$

$$(3.42) \text{ devient } f(1) = \frac{-P}{2\pi R^2 \chi_0} \psi(1) \text{ ce qui implique } \sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2 \chi_0} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

3.3.4 Calcul numérique.

L'utilisation de la méthode des sommes finies (intégration numérique) pour la résolution de l'équation intégrale (3.43) nous amène à résoudre un système d'équations algébriques linéaires d'inconnue $\psi(t_i)$; ($i=1, N+1$).

Que nous présentant sous cette forme,

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)k(x,t)dx = 1 \tag{3.50}$$

Avec :

$$k(x,t) = \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x (\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta}) d\eta \quad x, t \in [0, 1]$$

Utilisons pour l'intégration numérique le pas de valeur « h ».

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(a_1) + \dots + f(b)),$$

Ce qui conduit l'équation (3.46) à un système de N équations algébriques suivant

$$\begin{aligned} \psi(1) - \frac{2}{\pi} \frac{h}{2} [\psi(1)k(1,1) + 2\psi(2)k(2,1) + 2\psi(3)k(3,1) + \dots + \psi(n)k(n,1)] &= 1 \\ \psi(2) - \frac{2}{\pi} \frac{h}{2} [\psi(1)k(1,2) + 2\psi(2)k(2,2) + 2\psi(3)k(3,2) + \dots + \psi(n)k(n,2)] &= 1 \\ \psi(3) - \frac{2}{\pi} \frac{h}{2} [\psi(1)k(1,3) + 2\psi(2)k(2,3) + 2\psi(3)k(3,3) + \dots + \psi(n)k(n,3)] &= 1 \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ \psi(n) - \frac{2}{\pi} \frac{h}{2} [\psi(1)k(1,n) + 2\psi(2)k(2,n) + 2\psi(3)k(3,n) + \dots + \psi(n)k(n,n)] &= 1 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Soit, sous forme matricielle linéaire : $[A]\{x\}=[B]$,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{h}{\pi}k(1,1), & -\frac{2h}{\pi}k(2,1), & -\frac{2h}{\pi}k(3,1), & \dots & -\frac{h}{\pi}k(n,1) \\ \frac{-h}{\pi}k(1,2), & 1 - \frac{2h}{\pi}k(2,2), & \frac{-2h}{\pi}k(3,2), & \dots & \frac{-h}{\pi}k(n,2) \\ \frac{-h}{\pi}k(1,3), & \frac{-h}{\pi}k(2,3), & 1 - \frac{2h}{\pi}k(3,3), & \dots & \frac{-h}{\pi}k(n,3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-h}{\pi}k(1,n), & \frac{-h}{\pi}k(2,n), & \frac{-h}{\pi}k(3,n), & \dots & 1 - \frac{2h}{\pi}k(n,n) \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \\ \psi(3) \\ \vdots \\ \psi(n) \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La fonction $\psi(t)$ est définie en N points par la résolution de l'équation matricielle $[A]\{x\}=[B]$ dans l'intervalle $t \in [0,1]$ divisé en N parties de longueur « h », c'est-à-dire par les couples (t_i, ψ_i)

$$\psi(t) = \{(t_1, \psi_1), (t_2, \psi_2), (t_3, \psi_3), \dots, (t_n, \psi_n)\} \tag{3.52}$$

L'approximation de $\psi(t)$ par le polynôme de la forme ;

$$\psi(t_i) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k t_i^k,$$

Nous facilite le calcul de dérivée et par conséquent le calcul de la contrainte normale $\sigma_z^*(\rho)$ à l'interface du contact.

L'introduction de $\psi(t_i)$ dans (3.44), nous conduit une fois encore à un nouveau système d'équations algébriques linéaire en (a_i) ,

$$\begin{aligned} \psi(t_1) &= a_0 + a_1 t_1^1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 + \dots a_n t_1^n \\ \psi(t_2) &= a_0 + a_1 t_2^1 + a_2 t_2^2 + a_3 t_2^3 + \dots a_n t_2^n \\ &\dots \end{aligned}$$

.....

$$\psi(t_n) = a_0 + a_1 t_n^1 + a_2 t_n^2 + a_3 t_n^3 + \dots a_n t_n^n \tag{3.53}$$

Un programme de calcul est prévu (annexe3) pour déterminer les termes k_{ij} de la matrice $[A]$, la résolution successive des systèmes d'équations (3.47) et (3.49) aboutissant à la détermination des coefficients d'interpolations « a_i » de la fonction $\psi(t) = \{\psi(t_i)\}$ et enfin à sa détermination.

Ainsi, nous ramenons l'expression de la contrainte normale à la forme:

$$\sigma_z(\rho,0) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho) \tag{3.54}$$

Où :

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_0'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.55}$$

$\sigma_z^*(\rho)$: est calculée par voie numérique

3.3.5 Calcul d'intégral

L'approximation de la fonction est de la forme polynomiale

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$$

Sa dérivée est

$$\psi'(t) = \sum_{k=1}^N k a_k t^{k-1}$$

La partie à intégrer de (3.51) s'écrit :

$$\int_{\rho}^1 \frac{\Psi'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = \sum_{k=0}^N \int_{\rho}^1 \frac{k a_k t^{k-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} dt = \sum_{k=1}^N k a_k \int_{\rho}^1 \frac{t^{k-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} dt$$

Choisissons le changement de variable suivant pour faciliter l'intégration

$$\sqrt{t^2-\rho^2} = t+x, \quad t = \frac{-(x^2+\rho^2)}{2x} \quad \text{alors} \quad dt = \frac{-(x^2+\rho^2)}{2x^2} dx.$$

D'où les bornes d'intégration ;

$t = \rho$ implique $x = -\rho$, et $t = 1$ implique $x = -1 + \sqrt{1 - \rho^2}$

D'où, la nouvelle forme de l'intégral

$$\int_{\rho}^1 \frac{t^k dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \int_{-\rho}^{-1 + \sqrt{1 - \rho^2}} -\left(\frac{x^2 + \rho^2}{2x}\right)^k \frac{2x}{x^2 - \rho^2} \frac{-(x^2 - \rho^2)}{2x^2} dx = \frac{-1}{2^k} \int_{-\rho}^{-1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \frac{(x^2 + \rho^2)^k}{x^{k+1}} dx$$

Un sous programme est prévu pour le calcul de cet intégral (annexe 4).

Chapitre 4

Solution aux limites du problème axisymétrique de la conduction thermique.

4.1 Généralités sur la conduction thermique (contraintes d'origine thermiques).

Il existe trois types de transmission de la chaleur :

La conduction, la convection et le rayonnement

La conduction est un transfert de chaleur dans les milieux au repos (solide, liquide ou gazeux).

La conduction caractérise les interactions directes entre particules voisines lors d'un transfert de chaleur avec support matériel mais sans transfert de matière. C'est la présence d'un gradient de température qui régit la propagation d'un flux de chaleur par conduction. Dans les matériaux métalliques, se sont essentiellement les électrons libres qui servent de support aux transferts de chaleur.

Le champ de température dans le massif est déterminé par la résolution des équations de la conduction.

La convection est un transfert de chaleur dans les milieux liquides ou gazeux en mouvement. On distingue deux modes de convection : la convection libre (fluide mis en mouvement par différence de température) et la convection forcée (mouvement du fluide imposée).

Le rayonnement est la transmission de chaleur par ondes électromagnétiques.

Le phénomène de rayonnement se produit seulement à haute température, c'est pourquoi il n'est assez répondu dans la littérature par rapport aux phénomènes de conduction.

La convection est souvent utilisée comme condition aux limites, soit sous forme de convection libre avec le milieu extérieur, soit sous forme de convection forcée.

4.1.1 Equation de la conduction thermique dans un solide

L'équation de la conduction est obtenue en écrivant l'équilibre énergétique d'un volume élémentaire d'un milieu au repos dans un repère fixe. Sous sa forme la plus générale dans un solide avec des propriétés continues, elle s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i}) + g = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

g : Chaleur produite par une source interne telle que les déformations plastiques.

ρ : La densité du matériau.

c_p : Chaleur spécifique, (est un paramètre intrinsèque au matériau et ne dépend que de sa composition chimique, de l'état physique, de la structure, de la température et de la pression).

k : Conductivité thermique, (caractérise le flux de chaleur traversant une section sur une distance élémentaire est dirigé de la zone chaude vers la zone plus froide)

En tenant compte de certaines hypothèses ;

-prise en compte des phénomènes transitoires, (la dérivée totale devient partielle)

-pas de source de chaleur interne

-variation des propriétés seulement dans la direction x .

L'équation précédente se simplifie à :

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial T}{\partial x}) + k(x) (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}) = \frac{k(x)}{D(x)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec D la diffusivité thermique du matériau définie telle que : $D = \frac{k}{\rho c_p}$.

-Dans le cas stationnaire, le second membre est nul.

4.1.2 Distribution stationnaire de la température dans un corps homogène

Si le processus est stationnaire sans source de chaleur. Autrement dit si la température ne dépend pas du temps, mais uniquement des coordonnées des points du corps, alors la distribution de la température coïncide avec la solution de l'équation de Laplace.

En coordonnées cylindrique cette dernière s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Si la température $T(r, \varphi, z)$ ne dépend pas du paramètre z mais uniquement de r et φ , l'équation se simplifie et devient,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 0$$

4.1.3 Equation de la convection

La convection est un phénomène complexe, nécessitant la résolution simultanée d'un problème de thermique et d'un problème de mécanique des fluides. La variation locale de la température d'un liquide induit une évolution de ses propriétés, soit l'échange de chaleur entre le fluide et des corps en contact dans le cas où le mouvement préexisterait (convection forcée). Ces deux phénomènes sont régis par les mêmes équations mais leurs effets d'un point de vue thermique sont très différents. Enfin le mouvement du fluide provoque un cisaillement qui génère un flux thermique non négligeable.

La convection peut être considérée comme une condition aux limites à la surface d'un corps. Dans ce cas, l'échange de chaleur est approximé par un flux linéaire de type :

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + H(T_s - T_a) = 0$$

- T_a la température ambiante,
- T_s la température de la surface,
- H la conductance de la paroi,
- \vec{n} la normale à la surface extérieure.

4.1.4 Conditions aux limites

D'un point de vue mathématique, les conditions aux limites d'un problème de thermo-élasticité sont de deux types :

- conditions aux limites de type Dirichlet : c'est trouver une fonction vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieure du domaine (d) en prenant en chaque point (M) de la surface(s) des

valeurs données $T|_s = \psi(M)$ (la valeur de l'inconnue est imposée « déplacement, température »)

-conditions aux limites de type Neumann : si sur la surface du corps la température n'est pas connue mais en revanche on connaît le flux de chaleur en chaque point de la surface qui est proportionnel à $\frac{\partial T}{\partial n}$, on aura sur la surface (s) au lieu de la condition aux limites précédentes,

la condition suivante $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = \psi(M)$ (dérivées imposées, nécessitant un traitement particulier

des phases de résolution du problème » flux, contraintes imposées »).

Imposer une dérivée en thermique signifie imposée un flux en surface. En effet, le flux thermique s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{Q} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}$$

Avec :

T : la température, k la conduction thermique et \vec{n} la normale extérieure à la surface.

Le signe négatif implique un flux négatif, la variation de température dans le matériau sera aussi négative (température plus importante en surface que dans la profondeur). Un flux négatif en surface correspond donc à une entrée d'énergie dans le massif.

Une température imposée est plus facile à traiter numériquement, mais est moins réaliste physiquement. Ce type de conditions est utilisé si les bords du solide sont éloignés de la source de chaleur.

Les conditions aux limites mécaniques correspondent soit à un déplacement, soit à une contrainte normale ou tangentielle imposée sur les différentes zones. Il existe trois degrés de liberté en déplacement, il y a alors trois équations à résoudre simultanément pour déterminer les conditions aux limites.

4.1.5 Méthodes de résolution de l'équation de conduction de la chaleur

4.1.5.1 Méthode des potentiels

Cette méthode consiste à transformer un système d'équations en un système d'équations équivalent plus simple à résoudre. Les inconnues sont exprimées sous forme de fonctions harmoniques (appelées généralement potentiels de déplacement). Pour cela, une propriété

fondamentale des équations de Lamé est utilisée : la bi harmonicité des composants de l'état élastique, soit :

$$\Delta\Delta\{u\} = 0$$

Avec u le vecteur des déplacements.

Il a été montré [66] que si les forces de volume dérivent d'un potentiel, toutes les fonctions de la théorie de l'élasticité sont elles aussi bi harmoniques.

Dans les cas les plus généraux, cette méthode permet de déterminer une solution analytique au problème d'élasticité. Dans des études de comparaison de différents potentiels proposés par différents auteurs tels que Papkovitch, Galerkin, Grodski pour la résolution des équations de Lamé. Leur utilisation permet généralement de se ramener à une équation de Poisson ou de Laplace bien connue.

4.1.5.2 Analogie avec les ressorts

Leroy [67] a mis en place une méthode analytique simple pour calculer les contraintes à l'interface d'un massif semi-infini et d'une couche mince en deux 2D à partir des valeurs obtenues dans le cas d'un massif semi-infini non revêtu. Cette méthode permet de calculer les contraintes quand l'épaisseur de la couche est inférieure à un dixième de la largeur de contact. Les calculs sont rapides et permettent d'obtenir une première approximation des contraintes sous les hypothèses suivantes (couche mince, adhérence parfaite entre le revêtement et le substrat). Ce modèle est basé sur une analogie avec les ressorts dont les raideurs sont égales aux modules d'Young du revêtement et du substrat respectivement.

4.1.5.3 Méthodes semi-analytiques : transformation intégrales

Définition

Le principe de la transformation intégrale est de travailler non plus dans l'espace réel, mais dans l'espace transformé en diminuant le nombre d'inconnues. Les inconnues sont projetées sur une base orthogonale de l'espace fonctionnel et la résolution est conduite sur l'équation transformée. Cette opération a pour but de dériver ou de diminuer le nombre de variables transformées de Laplace, de Hankel, ou de Fourier.

La formulation générale des transformations intégrales est la suivante :

$$F(\tau) = \int_a^b k(\tau, t) f(t) dt$$

Avec :

- $k(\tau, t)$ le noyau,
- $F(\tau)$ la fonction projetée dans l'espace des τ ,
- $f(t)$ la fonction originale.

La résolution des équations différentielles avec cette méthode est résumée à l'aide du schéma suivant.

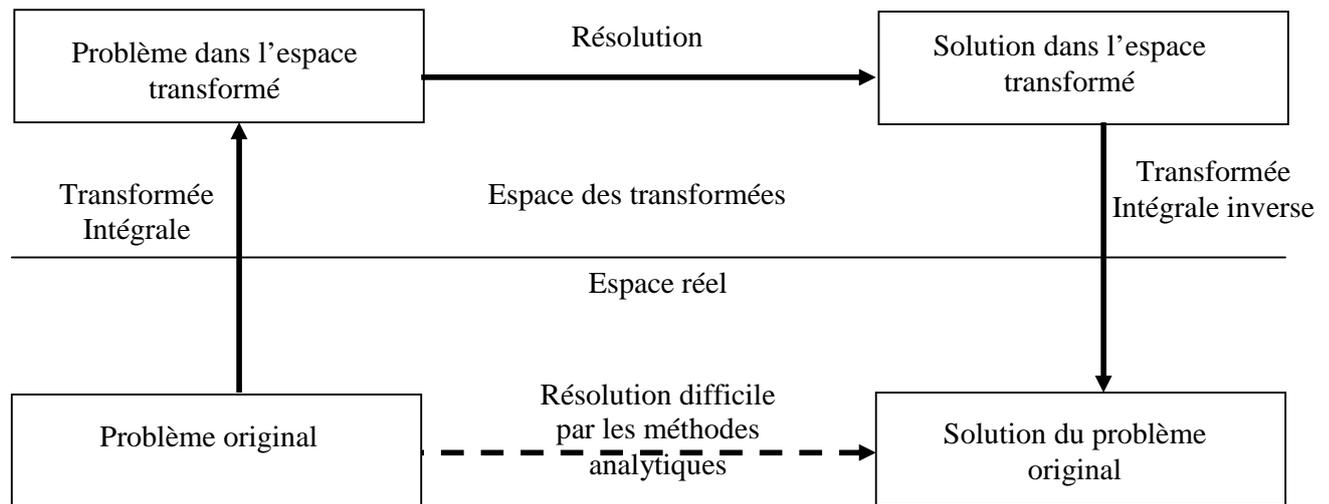


Fig.2 Principe de l'utilisation des transformations intégrales

4.1.5.4 Méthodes numériques

Pour résoudre numériquement un problème, il faut diviser l'espace en mailles élémentaires dans lesquelles les équations sont résolues localement. La méthode de discrétisation la plus utilisée actuellement est la méthode des éléments finis. Elle s'adapte à n'importe quelle géométrie, la taille du maillage est modifiée en fonction du problème posé, des lois de comportement (élasticité, plasticité, visco-plasticité) peuvent être considérées. L'inconvénient principal de ce type de résolution est le temps de calcul. Dans le cas de géométries simples, la méthode des différences finies est plus simple à mettre en œuvre et aussi efficace. Le domaine est maillé en rectangles de mêmes dimensions.

Les techniques de discrétisation sont utilisées pour écrire un problème continu sous la forme d'un système d'équations linéaires. La taille de ce système est directement proportionnelle à celle du maillage.

4.1.6 Avantages et inconvénients

Les méthodes analytiques telles que les méthodes basées sur les potentiels ou l'analogie avec les ressorts sont avantageuses en termes de temps de calcul. Les résultats sont immédiats. De plus, la solution est continue. Par contre, leur domaine d'application est restreint à cause des différentes hypothèses utilisées pour déterminer les solutions.

Les méthodes semi-analytiques présentent un bon compromis entre le temps nécessaire à la résolution et la complexité du problème. Par contre, elles imposent un certain nombre d'hypothèses sur la géométrie. Les couches doivent être d'épaisseur constante, homogènes. La prise en compte d'un gradient de propriétés est possible avec une loi de variation définie (type loi puissance ou exponentielle), mais nécessite la reformulation du modèle. Enfin, la géométrie du solide est imposée, soit parallélépipède, soit cylindrique en utilisant les transformations de Hankel équivalentes aux transformées de Fourier dans un repère axisymétrique, ou la méthode des potentiels.

4.1.7 Effets de la chaleur sur les matériaux

Dans un matériau non contraint avec des bords libres, la variation de température n'entraîne pas de champ de contraintes dans le massif. Au contraire, si les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, la dilatation provoque la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant (les effets d'échauffement dus à la déformation sont négligeables).

4.2 Détermination de la répartition de la température et des contraintes thermiques (couche de matériau homogène isotrope).

Nous nous proposons d'étudier et de déterminer l'état du champ thermique dans une couche élastique homogène isotrope d'épaisseur très importante comparativement à son épaisseur soumise à un champ thermique stationnaire imposé à la surface limite de la couche en l'absence de source de chaleur.

Nous déterminons dans un premier temps la distribution de température dans la couche comme étant l'étape fondamentale qui nous conduit par la suite au calcul des contraintes d'origine thermiques.

4.2.1 Position du problème

Le problème ainsi posé est axisymétrique, sera étudié en coordonnées cylindriques, le poinçon cylindrique est porté à une température fixe (constante) T_0 .

Les conditions aux limites relatives au problème (Fig.1), sont :

$$0 \leq r \leq R \quad , \quad z=0 \quad : \quad T=T_0 \quad (4.1)$$

$$r > R \quad , \quad z=0 \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

$$0 \leq r < \infty \quad , \quad z = -H \quad : \quad T = 0 \quad (4.3)$$

4.2.2 Solution aux limites du problème de la conduction de la chaleur

La solution générale du problème du genre relatif à la distribution de la température (cas de matériau isotrope) (2.26) s'exprime par la formule suivante :

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{\xi z} + B(\xi) e^{-\xi z} \right] J_0(\xi r) d\xi$$

Par ce changement de variables ci dessous l'expression de $T(r, z)$ et sa première dérivée passent aux formes suivantes :

$$\xi = \frac{\eta}{R} \quad , \quad \rho = \frac{r}{R} \quad , \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad ,$$

$$E_1(\eta) = \frac{\eta}{R^2} A\left(\frac{\eta}{R}\right) \quad , \quad E_2(\eta) = \frac{\eta}{R^2} B\left(\frac{\eta}{R}\right)$$

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} \left[E_1(\eta) e^{\eta \zeta} + E_2(\eta) e^{-\eta \zeta} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T(\rho, \zeta)}{\partial z} = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \eta \left[E_1(\eta) e^{\eta \zeta} - E_2(\eta) e^{-\eta \zeta} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.5)$$

Satisfaisons les conditions aux limites indiquées, nous obtenons un système de trois équations intégrales

$$\int_0^{\infty} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 \quad : \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (4.6)$$

$$\int_0^{\infty} \eta [E_1(\eta) - E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\infty} \left[E_1(\eta) e^{-\eta l} + E_2(\eta) e^{\eta l} \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad 0 \leq \rho < \infty \quad (4.8)$$

Avec :

$$l = \frac{H}{R}$$

Introduisons une nouvelle fonction $\phi(\eta)$ dans la condition (4.2) et exprimons $E_1(\eta)$ et $E_2(\eta)$ en fonction de cette dernière, nous aurons :

$$E_1(\eta) = \frac{e^{\eta l}}{2ch\eta l} \phi(\eta) \quad \text{et} \quad E_2(\eta) = \frac{-e^{-\eta l}}{2ch\eta l} \phi(\eta)$$

Les deux premières conditions (4.1) et (4.2) se réécrivent en un nouveau système de deux équations intégrales

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{e^{\eta l}}{2ch\eta l} - \frac{e^{-\eta l}}{2ch\eta l} \right] \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 \quad : \quad \rho < 1 \quad (4.9)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (4.10)$$

Se système s'écrit encore sous la forme :

$$\int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta l}}{ch\eta l} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad : \quad \rho < 1 \quad (4.11)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (4.12)$$

Pour :
$$\phi(\eta) = \int_0^1 f_1(t) \cos \eta t dt \quad (4.13)$$

La deuxième équation est satisfaite identiquement, la première s'écrit:

$$\int_0^1 f_1(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\eta \rho) \cos \eta t d\eta = \int_0^{\rho} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho) \quad : \quad \rho > t \quad (4.14)$$

D'après Abel

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \quad (4.15)$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left[T_0 + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta l}}{ch\eta l} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_1(t) \cos \eta t dt \right]$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} T_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) dx \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta l}}{ch\eta l} \cos \eta x \cos \eta t d\eta \quad (4.16)$$

Substituons $f_1(t)$ par $T_0 \psi_1(t)$, dans (4.16) cela donne ;

$$\psi_1(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_1(x) L(x, t) dx = \frac{2}{\pi} \quad (4.17)$$

Avec :
$$L(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta l}}{ch\eta l} \cos \eta x \cos \eta t d\eta$$

Enfin, la formule déterminant la répartition de la température dans la couche élastique est :

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{\eta(l+\zeta)}}{2ch\eta l} + \frac{e^{-\eta(l+\zeta)}}{2ch\eta l} \right] \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \int_0^{\infty} \frac{sh(l+\zeta)}{ch\eta l} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \int_0^1 \psi_1(t) dt \int_0^{\infty} \frac{sh(l+\zeta)}{ch\eta l} \cos \eta t J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.18)$$

Commentaire.

Lorsque $l = H/R$ tends vers l'infini (cas du sous espace), l'intégral $L(x, t)$ tendra vers la valeur zéro.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta l}}{ch\eta l} \cos \eta t \cos \eta x d\eta = 0$$

D'où la valeur de $f_1(t) = \frac{2}{\pi} T_0$

$$\phi(\eta) = \int_0^1 f_1(t) \cos \eta t dt = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^1 \cos \eta t dt = \frac{2T_0}{\pi} \frac{\sin \eta}{\eta}$$

Alors, la répartition du champ thermique dans la zone de contact est :

$$T(\rho, \zeta) = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\eta \zeta} \frac{\sin \eta}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta$$

Pour $\zeta = 0$

$$T(\rho, \zeta) = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{2T_0}{\pi} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \rho < 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases}$$

Ce résultat bien connu coïncide parfaitement avec celui de la bibliographie.

4.3 Détermination de la répartition de la température et des contraintes thermiques (couche élastique transverse isotrope)

Nous nous proposons d'étudier et de déterminer l'état de contraintes thermiques dans une couche élastique isotrope transverse d'épaisseur très importante comparativement à son épaisseur soumise à un champ thermique stationnaire imposé à la surface limite de la couche. Nous déterminons dans un premier temps la distribution de température dans la couche comme étant l'étape fondamentale qui nous conduit par la suite au calcul des contraintes d'origine thermiques.

4.3.1 Position du problème

Le problème ainsi posé est axisymétrique sera étudié en coordonnées cylindriques, le poinçon cylindrique est porté à une température fixe (constante) T_0 , les coefficients de convection poinçon vers couche, couche vers plan d'appui et couche vers milieu extérieur sont respectivement Kc_1, Kc_2, Kc_3 (Fig.1 page 23) thermique sont:

$$0 \leq r \leq R, \quad z=0 : \quad \frac{\partial T}{\partial z} = Kc_1(T_0 - T) \quad (4.19)$$

$$r > R, \quad z=0 : \quad \frac{\partial T}{\partial z} + Kc_2 T = 0 \quad (4.20)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad z=-H : \quad \frac{\partial T}{\partial z} = Kc_3 T \quad (4.21)$$

4.3.2 Solution aux limites du problème de conduction de la chaleur

La solution générale du problème du genre relatif à la distribution de la température (cas de matériau transverse isotrope) (2.34) s'exprime par la formule suivante :

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \left[A(\xi) e^{\frac{\xi z}{\lambda}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi z}{\lambda}} \right] J_0(\xi r) d\xi$$

Soient :

$$\xi = \frac{\eta}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad E_1(\eta) = \frac{\eta}{R^2} A\left(\frac{\eta}{R}\right), \quad \text{et} \quad E_2(\eta) = \frac{\eta}{R^2} B\left(\frac{\eta}{R}\right)$$

Par le changement de variables l'expression de $T(\rho, \zeta)$ et sa première dérivée passent aux formes suivantes.

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial T(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{1}{R\lambda} \int_0^{\infty} \eta \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda}} - E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.23)$$

Satisfaisons les conditions aux limites indiquées, nous obtenons un système de trois équations intégrales

$$\int_0^{\infty} \left[(\eta + h_1^t) E_1(\eta) + (h_1^t - \eta) E_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = h_1^t T_0 \quad : \quad \rho < 1 \quad (4.24)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\eta + h_2^t) E_1(\eta) + (h_2^t - \eta) E_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (4.25)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\eta - h_3^t) e^{-\eta h} E_1(\eta) - (\eta + h_3^t) e^{\eta h} E_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad 0 \leq \rho < \infty \quad (4.26)$$

Avec :

$$h_1^t = Kc_1 R \lambda_0, \quad h_2^t = Kc_2 R \lambda_0, \quad h_3^t = Kc_3 R \lambda_0, \quad \text{et} \quad h = \frac{H}{R \lambda_0} = \frac{l}{\lambda_0}$$

Introduisons une nouvelle fonction $\phi(\eta)$ dans la condition (4.25) et exprimons $F_1(\eta)$ et $F_2(\eta)$ en fonction de cette dernière,

Pour ce but résolvons le système des deux dernières équations (4.24) et (4.26), soit :

$$(\eta + h_2^t) E_1(\eta) - (\eta - h_2^t) E_2(\eta) = \eta \phi(\eta) \quad (4.27)$$

$$(\eta - h_1^t) e^{-\eta h} E_1(\eta) - (\eta + h_1^t) e^{\eta h} E_2(\eta) = 0 \quad (4.28)$$

On obtient :

$$E_1(\eta) = \frac{\eta(\eta + h_3^t)e^{\eta h}}{2Q^T(\eta)}\phi(\eta) \quad \text{et} \quad E_2(\eta) = \frac{\eta(\eta - h_3^t)e^{-\eta h}}{2Q^T(\eta)}\phi(\eta) \quad (4.29)$$

$$Q^T(\eta) = (\eta^2 + h_2^t h_3^t)sh\eta h + \eta(h_2^t + h_3^t)ch\eta h$$

Les conditions (4.24) et (4.25) se réécrivent en un nouveau système de deux équations intégrales :

$$\int_0^{\infty} \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = h_1^t T_0 \quad : \quad \rho < 1 \quad (4.30)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (4.31)$$

Avec

$$P(\eta) = (\eta^2 + h_1^t h_3^t)sh\eta h + \eta(h_1^t + h_2^t)ch\eta h$$

Introduisant pour la résolution de ce présent système (4.30) (4.31) la fonction $U(x)$ définie par :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$

L'équation (4.31) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1 - \rho)X(\rho) \quad : \quad 0 \leq \rho < \infty \quad (4.32)$$

Soit $X(\rho)$ la fonction développable en séries de fonctions de Bessel,

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k J_0(\lambda_k \rho) \quad (4.33)$$

λ_k : sont les racines de la fonction de Bessel d'ordre zéro

a_0 : est égale à zéro et ce pour marquer la continuité

Par la transformation inverse de Hankel, on tire de l'équation (4.32) la fonction $\phi(\eta)$

$$\begin{aligned}\phi(\eta) &= \int_0^{\infty} \rho J_0(\eta\rho) U(1-\rho) X(\rho) d\rho = \int_0^1 \rho J_0(\eta\rho) \sum_{k=1}^N a_k J_0(\lambda_k \rho) d\rho : \quad \rho < 1 \\ \phi(\eta) &= \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \rho J_0(\eta\rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho\end{aligned}\quad (4.34)$$

D'après la relation d'orthogonalité des fonctions de Bessel, on a :

$$\int_0^1 \rho J_0(\eta\rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho = \frac{\lambda_k J_0'(\lambda_k) J_0(\eta) - \eta J_0(\lambda_k) J_0'(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} = \frac{-\lambda_k J_1(\lambda_k) J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2}$$

En effet : $J'(\lambda_k) = -J_1(\lambda_k)$ et $J_0(\lambda_k) = 0$

D'où

$$\phi(\eta) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^* J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} \quad \text{avec} \quad a_k^* = -\lambda_k J_1(\lambda_k) a_k = \lambda_k J_{-1}(\lambda_k) a_k$$

Substituons maintenant $\phi(\eta)$ dans l'équation (4.30) du système précédent, on écrit,

$$\int_0^{\infty} \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \int_0^{\infty} \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} J_0(\eta\rho) \sum_{k=1}^N \frac{a_k^* J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta = h_1 T_0 : \quad \rho < 1 \quad (4.35)$$

Qui peut être écrite également sous la forme simplifiée

$$\sum_{k=1}^N a_k^* L_k(\rho) = h_1 T_0, \quad \text{avec} \quad L_k(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\eta P(\eta)}{Q(\eta)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta \quad (4.36)$$

D'après le théorème des résidus

$$\begin{aligned}& \int_0^{\infty} \frac{\phi(\eta)}{\eta^2 - a^2} J_0(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \\ &= \pi i \sum_{k=1}^N \left[\text{res} \phi(z) \right]_{z=iy_k} \left[\frac{J_0(\rho z) H_0(z)}{z^2 - a^2} \right]_{z=iy_k} - \frac{\pi}{2} \frac{\phi(a)}{a} J_0(\rho a) Y_0(a)\end{aligned}$$

$\phi(\eta)$: est une fonction impaire

Alors

$$[\text{res}\phi(z)]_{z=iy_k} = \text{res} \left[\frac{zP(z)}{Q(z)} \right]_{z=iy_k} = \frac{iy_k P(iy_k)}{Q'(iy_k)} = \frac{-y_k P^*(y_k)}{Q'(iy_k)}$$

$$\left[\frac{J_0(\rho z)H_0(z)}{z^2 - a^2} \right]_{z=iy_k} = \frac{J_0(\rho iy_k)H_0(iy_k)}{(iy_k)^2 - \lambda_k^2} = \frac{2I_0(\rho y_k)K_0(y_k)}{-\pi i(y_k^2 + \lambda_k^2)}$$

$$J_0(i\rho y_k) = I_0(\rho y_k) \quad , \quad \text{d'une manière générale} \quad J_n(ix) = (-1)^n I_n(x)$$

$P(iy_k) = iP^*(y_k)$ pour la fonction $P(iy_k)$ impaire

$$(iy_k)^2 - \lambda_k^2 = -(y_k^2 + \lambda_k^2)$$

$$H_0(iy_k) = \frac{2K_0(y_k)}{\pi i}$$

Dans notre cas la fonction rapport $\frac{\eta P(\eta)}{Q(\eta)}$ est une fonction impaire, c'est pourquoi le calcul

de l'intégrale $L_k(\rho)$ peut être effectué par l'emploi du théorème des résidus.

$$L_k(\rho) = \int_0^\infty \frac{\eta P(\eta)}{Q(\eta)} \frac{J_0(\eta)J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta = -\frac{\pi}{2\lambda_k} \frac{P(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)} J_0(\lambda_k\rho)Y_0(\lambda_k) + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{y_k P^*(y_k)K_0(y_k)I_0(\rho y_k)}{Q'(iy_k)(y_k^2 + \lambda_k^2)}$$

Cherchons à présent les racines (iy_k) de l'égalité $Q(iy_k) = 0$,

$$Q(iy_k) = (-y_k^2 + h_2 h_3) \text{sh}iy_k h + iy_k (h_2 + h_3) \text{ch}iy_k h = 0$$

Sachant bien que

$$\text{sh}iy_k = i \sin y_k \quad \text{et} \quad \text{ch}iy_k = \cos y_k$$

Cela aboutit à la résolution de l'équation transcendante

$$(h_2 h_3 - y_k^2) i \sinh y_k + iy_k (h_2 + h_3) \cosh y_k = i \left[(h_2 h_3 - y_k^2) \sin y_k + y_k (h_2 + h_3) \cos y_k h \right] = 0$$

Calculons ensuite, on prend la dérivée $Q'(\eta)$ pour la valeur ($\eta = iy_k$)

$$Q'(\eta) = 2\eta sh\eta h + (\eta^2 + h_2 h_3) h ch\eta h + (h_2 + h_3) ch\eta h + \eta(h_2 + h_3) h sh\eta h$$

$$Q'(\eta) = [2\eta + \eta h(h_2 + h_3)] sh\eta h + [h(\eta^2 + h_2 h_3) + h_2 + h_3] ch\eta h = 0$$

$$Q'(iy_k) = iy_k shiy_k h [2 + h(h_2 + h_3)] + chi y_k h [h(-y_k^2 + h_2 h_3) + h_2 + h_3]$$

$$Q'(iy_k) = -y_k \sin y_k h [2 + h(h_2 + h_3)] + \cos y_k h [h(h_2 h_3 - y_k^2) + h_2 + h_3] = 0$$

4.3.3 Répartition de la température (ordre de calcul)

Revenant à présent à la formule générale (4.22) calculant la température

$T(\rho, \zeta)$ dans laquelle nous remplaçant $E_1(\eta)$, $E_2(\eta)$ et $\phi(\eta)$ par leurs nouvelles expressions (4.29), et (4.34).

$$E_1(\eta) = \frac{\eta(\eta + h_3^t) e^{\eta h}}{2Q(\eta)} \phi(\eta)$$

$$E_2(\eta) = \frac{\eta(\eta - h_3^t) e^{-\eta h}}{2Q(\eta)} \phi(\eta)$$

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \left[\frac{\eta(\eta + h_3^t) e^{\eta h}}{2Q(\eta)} \phi(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda}} + \frac{\eta(\eta - h_3^t) e^{-\eta h}}{2Q(\eta)} \phi(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$(\eta + h_3) e^{\frac{\eta(h + \zeta)}{\lambda}} + (\eta - h_3) e^{-\frac{\eta(h + \zeta)}{\lambda}} = 2\eta ch\eta(h + \frac{\zeta}{\lambda}) + 2h_3 sh\eta(h + \frac{\zeta}{\lambda})$$

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.37)$$

Avec la représentation suivant de $\phi(\eta)$

$$\phi(\eta) = h_1^t T_0 \int_0^1 \psi(t) \cos \eta t dt \quad (4.38)$$

La formule (4.37) prend la forme

$$T^*(\rho, \zeta) = \frac{T(\rho, \zeta)}{h_1^t T_0} = \int_0^1 \psi(t) dt \int_0^\infty \frac{W(\eta, \rho)}{Q(\eta)} \cos \eta t J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.39)$$

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) L(x,t) dx = \frac{2}{\pi} \tag{4.40}$$

$$W(\eta, \zeta) = \eta \left[2\eta \operatorname{ch} \eta \left(h + \frac{\zeta}{\lambda} \right) + 2h_3 \operatorname{sh} \eta \left(h + \frac{\zeta}{\lambda} \right) \right] \tag{4.41}$$

$$L(x,t) = \int_0^\infty \left[1 - \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \right] \cos \eta x \cos \eta t d\eta \tag{4.42}$$

Si la fonction rapport $\frac{\eta P(\eta)}{Q(\eta)}$ est une fonction impaire, la fonction $\phi(\eta)$ peut être exprimée de

la sorte :

$$\phi(\eta) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^* J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2}$$

$$T(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty \frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta = \sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty G(\eta, \zeta) \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta \tag{4.43}$$

Puisque $G(\eta, \zeta) = \frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)}$ est une fonction impaire également, alors $T(\rho, \zeta)$ peut être

déterminée analytiquement par la formule suivante :

$$T(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^N a_k^* \left[-\frac{\pi}{2\lambda_k^2} G(\lambda_k, \zeta) J_0(\lambda_k \rho) Y(\lambda_k) + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{W(iy_k, \zeta) K_0(y_k) I_0(\rho y_k)}{Q'(iy_k)(y_k^2 + \lambda_k^2)} \right] \tag{4.44}$$

4.3.4 Calcul numérique

L'expression finale de la répartition du champ thermique étant définie, dont les coefficients a_k^* sont à déterminer de la résolution du système d'équations algébriques suivant décrit auparavant par (4.35), exprimé par l'équation matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} L_1(\rho_1) & L_2(\rho_1) & L_3(\rho_1) & \dots & L_N(\rho_1) \\ L_1(\rho_2) & L_2(\rho_2) & L_3(\rho_2) & \dots & L_N(\rho_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\rho_N) & L_2(\rho_N) & L_3(\rho_N) & \dots & L_N(\rho_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \dots \\ \dots \\ a_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^t T_0 \\ h_1^t T_0 \\ \dots \\ \dots \\ h_1^t T_0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

$$\text{Avec : } L_k(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{\eta P(\eta) J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta$$

Le calcul de ce type d'intégral pose un problème, que soit au niveau des bornes d'intégrations, ou au niveau des singularités qui les rendent discontinues non intégrables en ces points. Les singularités ont pour valeurs les racines de la fonction de Bessel d'ordre zéro λ_k .

Afin de contourner cette difficulté on a adopté une simplification de ces expressions par l'application de la règle de l'Hospital connu pour dégager l'indétermination, ainsi :

$$\lim_{\eta \rightarrow \lambda_k} \frac{J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} = \lim_{\eta \rightarrow \lambda_k} \frac{-J_1(\eta)}{2\eta} = \frac{-J_1(\lambda_k)}{2\lambda_k}$$

D'où, le calcul de l'intégral $L_k(\rho)$

$$\begin{aligned} L_k(\rho) &= \int_0^{\infty} \frac{\eta P(\eta) J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta = \\ &= \int_0^{\lambda_k - \varepsilon'} \frac{\eta P(\eta) J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta + \int_{\lambda_k + \varepsilon'}^{\lambda_k + 1 - \varepsilon'} \frac{\eta P(\eta) J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta - \int_{\lambda_k - \varepsilon'}^{\lambda_k + \varepsilon'} \frac{\eta P(\eta) J_1(\lambda_k) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta) 2\lambda_k} d\eta \end{aligned} \quad (4.46)$$

ε' : Est une valeur choisie suffisamment petite pour rester loin de l'indétermination.

Les fonctions de Bessel sont prises sous la forme intégrale approchée (voir annexe), ou sous la forme intégrale suivante :

$$j_n(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - \eta \sin \theta) d\theta, \quad (n = 0, 1)$$

Les résultats de calcul sont obtenus dans une matrice (m.n)

m : représente la dimension lignes (valeurs de ρ)

n : représente la dimension colonnes (valeurs de λ_k).

4.3.5 Procédure (étapes) de résolution

1-determination des racines des fonctions de Bessel ($J_0(\lambda_k)$ et $J_1(\lambda_k)$) par la procedure (unit) (voir programme annexe).

2-determination de la matrice principale (calcul d'intégrales)

3- Résolution du système d'équation algébrique pour l'obtention des valeurs (a_k^*)

4- Résolution de l'équation analytique pour trouver les valeurs de températures dans les différents points du rayon

4.3.6 Calcul des contraintes thermiques

1- Contrainte axiale

Par le changement de variables utilisé précédemment, la formule (2.37) déterminant la contrainte axiale $\sigma_z^{(T)}$ par le seul effet thermique est :

$$\sigma_z^T(\rho, \zeta) = -\lambda^2 h_1^* \int_0^\infty \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$\sigma_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -\lambda^2 h_1^* \sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty \frac{W(\eta, \zeta) J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta$$

$\frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)}$ est la fonction paire, c'est pourquoi le calcul de l'intégrale ne peut être effectué que par voie numérique

2-Déplacement axial

La formule exprimant le déplacement (2.37) toutes transformations faites, s'écrit :

$$U_z^T = -a_1 \lambda h_2^* R \int_0^\infty \eta^{-1} \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$U_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -a_1 \lambda h_1^* R \sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{W(\eta, \zeta) J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta \quad (4.47)$$

Le rapport $\frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)}$ est une fonction impaire, et l'intégrale se calcul par voie analytique

$$U_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -a_1 \lambda h_1^* R \sum_{k=1}^N a_k^* \left[-\frac{\pi}{2\lambda_k^2} \frac{W(\lambda_k, \zeta)}{Q(\lambda_k)} J_0(\lambda_k \rho) Y_0(\lambda_k) + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{W(iy_k, \zeta) K_0(y_k) I_0(\rho y_k)}{Q'(iy_k) (y_k^2 + \lambda_k^2)} \right]$$

(4.48)

3-Contraintes tangentielles

La formule calculant les contraintes tangentielles (2.37), prend la forme suivante.

$$\tau_z^T = \lambda h_1^* \int_0^\infty \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda}} \right] J_1(\eta\rho) d\eta$$

Substituons $E_1(\eta)$, $E_2(\eta)$ et $\phi(\eta)$ par leurs expressions, on aura :

$$\tau(\rho, \zeta) = \lambda h_1^* \sum_{K=1}^N a_k^* \int_0^{\infty} \frac{W(\eta, \zeta) J_0(\eta) J_1(\eta \rho)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta \quad (4.49)$$

Le rapport $\frac{W(\eta, \zeta)}{Q(\eta)}$ est une fonction paire, $\tau(\rho, \zeta)$ se calcul alors par intégration numérique.

Chapitre 5

Problème de la thermoélasticité (Couche élastique transverse isotrope)

5.1 Position et formulation du problème

Nous supposons implicitement que le solide étudié précédemment se trouvait à une température uniforme et constante. Nous calculons les contraintes dues à l'application exclusive de forces sur le poinçon (problème isotherme ou élastostatique).

L'introduction d'un champ non uniforme de température complique l'étude élastique. La complexité réside dans les régimes transitoires de température ou celle-ci dépend de l'état de déformation. Il ya alors couplage entre problème thermique et problème mécanique.

Nous faisons l'hypothèse que l'état de température à un instant donné ne dépend pas de l'état de déformation du milieu. Les problèmes thermique et mécanique découplés, seront résolus séparément.

Le problème général de la thermoélasticité consiste d'abord à intégrer l'équation de conduction de Laplace et déterminer le champ de température qu'on portera dans les équations des contraintes et déformations. On sera ainsi amener à un problème de type isotherme ne faisant plus intervenir la température.

Il s'agit toujours d'un poinçonnement par un poinçon cylindrique rigide à extrémités plates porté à une température T_0 sollicitant la couche d'épaisseur constante H de matériau transverse isotrope sur la face extérieure supposée parallèle à la face d'appui.

Soient les conditions aux limites :

$$U_z^P + U_z^T = -\varepsilon \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad \zeta = 0 \quad (5.1)$$

$$\tau_{rz}^P + \tau_{rz}^T = 0 \quad 0 \leq \rho < \infty \quad \zeta = 0 \quad (5.2)$$

$$\sigma_z^P + \sigma_z^T = 0 \quad \rho \geq 1 \quad \zeta = 0 \quad (5.3)$$

$$U_z^P + U_z^T = 0 \quad 0 \leq \rho \leq \infty \quad \zeta = -l \quad (5.4)$$

$$\tau_{rz}^P + \tau_{rz}^T = 0 \quad 0 \leq \rho < \infty \quad \zeta = -l \quad (5.5)$$

5.2 Méthode de résolution aux limites du problème thermoélastique.

Rappelons les formules générales (chapitre 1) des contraintes et déplacements élastiques et thermiques utilisés pour résoudre séparément les deux problèmes mécanique et thermique.

Les formules des contraintes et déplacements élastiques (2.18).

$$\begin{aligned}
 U_z &= \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta ; \\
 \sigma_z &= \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{\nu_1^2} \left[F_1(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{d_2}{\nu_2^2} \left[F_3(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta ; \\
 \tau_{zz} &= -\frac{A_{44}}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{\nu_1} \left[-F_1(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\nu_2} \left[-F_3(\eta) e^{\frac{-\eta\zeta}{\nu_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\nu_2}} \right] \right\} J_1(\eta\rho) d\eta
 \end{aligned}$$

Les formules des contraintes et déplacements thermiques (2.37).

$$\begin{aligned}
 U_z^T &= -a_1 \lambda_0 h_2^* R \int_0^\infty \eta^{-1} \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta ; \\
 \sigma_z^T &= -\lambda_0^2 h_1^* \int_0^\infty \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta ; \\
 \tau_z^T &= \lambda_0 h_1^* \int_0^\infty \left[E_1(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{\lambda_0}} \right] J_1(\eta\rho) d\eta .
 \end{aligned}$$

Satisfaisons les conditions aux limites et introduisons une nouvelle fonction $\phi(\eta)$ dans

la condition (5.3), nous obtenons le système d'équations algébrique aux inconnues suivantes

$F_1(\eta), F_2(\eta), F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$.

$$\int_0^\infty \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{\gamma_1} [-F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{k_2}{\gamma_2} [-F_3(\eta) + F_4(\eta)] - a_1 \lambda_0 h_2^* R [E_1(\eta) + E_2(\eta)] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta = -\varepsilon \quad (5.6)$$

$$\frac{1+k_1}{\gamma_1} [-F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{1+k_2}{\gamma_2} [-F_3(\eta) + F_4(\eta)] - \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1^* [E_1(\eta) + E_2(\eta)] = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{d_1}{\gamma_1^2} [F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{d_2}{\gamma_2^2} [F_3(\eta) + F_4(\eta)] - R\lambda_0^2 h_1^* [E_1(\eta) + E_2(\eta)] = \eta\phi(\eta)R \quad (5.8)$$

$$\int_0^\infty \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{\gamma_1} \left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} + F_2(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\gamma_1}} \right] + \frac{k_2}{\gamma_2} \left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + F_4(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\gamma_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta -$$

$$-a_1\lambda_0 h_2^* R \int_0^\infty \eta^{-1} \left[E_1(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{1+k_1}{\gamma_1} \left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} + F_2(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\gamma_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\gamma_2} \left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + F_4(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\gamma_2}} \right] - \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1^* \left[E_1(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] = 0 \quad (5.10)$$

Sous forme matricielle le système d'équations algébrique se composant des conditions (5.7), (5.8), (5.9) et (5.10), s'écrit.

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+k_1)}{\gamma_1} & \frac{1+k_1}{\gamma_1} & \frac{-1+k_2}{\gamma_2} & \frac{1+k_2}{\gamma_2} \\ \frac{d_1}{\gamma_1^2} & \frac{d_1}{\gamma_1^2} & \frac{d_2}{\gamma_2^2} & \frac{d_2}{\gamma_2^2} \\ \frac{k_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}}}{\gamma_1} & \frac{k_1 e^{\frac{-\eta l}{\gamma_1}}}{\gamma_1} & \frac{k_2 e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}}}{\gamma_2} & \frac{k_2 e^{\frac{-\eta l}{\gamma_2}}}{\gamma_2} \\ \frac{-(1+k_1)}{\gamma_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} & \frac{1+k_1}{\gamma_1} e^{\frac{-\eta l}{\gamma_1}} & \frac{-(1+k_2)}{\gamma_2} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} & \frac{1+k_2}{\gamma_2} e^{\frac{-\eta l}{\gamma_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\eta) \\ F_2(\eta) \\ F_3(\eta) \\ F_4(\eta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{R}{A_{44}} \lambda h_1^* [E_1(\eta) + E_2(\eta)] \\ R\lambda^2 h_1^* [E_1(\eta) + E_2(\eta)] + \eta\phi(\eta)R \\ a_1 \lambda h_2^* R \left[E_1(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\lambda}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta l}{\lambda}} \right] \\ \frac{R}{A_{44}} \lambda h_1^* \left[E_1(\eta)e^{\frac{-\eta l}{\lambda}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta l}{\lambda}} \right] \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Résoudre ce système d'équations linéaire et obtenir les fonctions $F_i(\eta)$ exprimées en fonction de $\phi(\eta)$ n'est pas pratique par les méthodes directes telle que la méthode de Gauss. Les expressions seront très longues, difficiles à les manipuler et les erreurs sont très probables. Nous, nous en passons de cette manière.

5.2.1 Résolution du système d'équations linéaire.

Soustrayons l'équation condition (5.10) de l'équation condition (5.9) après avoir multiplier les deux équations respectivement par k_1 et $(1+k_1)$,

$$\begin{aligned} & \left[-(1+k_1)\frac{k_2}{\gamma_2} + (1+k_2)\frac{k_1}{\gamma_2} \right] e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta) + \left[(1+k_1)\frac{k_2}{\gamma_2} - (1+k_2)\frac{k_1}{\gamma_2} \right] e^{-\frac{\eta l}{\gamma_2}} F_4(\eta) = \\ & = (1+k_1)a_1\lambda_0 h_2 R \left[E_1(\eta) e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] - k_1 \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 \left[E_1(\eta) e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] \end{aligned}$$

D'où l'expression de $F_4(\eta)$ en fonction de $F_3(\eta)$,

$$F_4(\eta) = \left((1+k_1)a_1\lambda_0 h_2 R - k_1 \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 \right) \frac{\gamma_2}{(k_2 - k_1)} \left[E_1(\eta) e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + e^{-\frac{2\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta)$$

Sous forme simplifiée

$$F_4(\eta) = \beta_1 \left(E_1 e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right) e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + e^{-\frac{2\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta) \quad (5.12)$$

Avec :

$$\beta_1 = \left((1+k_1)a_1\lambda_0 h_2 R - k_1 \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 \right) \frac{\gamma_2}{k_2 - k_1}$$

Substituons $F_4(\eta)$ par $F_3(\eta)$ dans l'équation condition (5.10).

$$\frac{1+k_1}{\gamma_1} \left[-F_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} + F_2 e^{-\frac{\eta l}{\gamma_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\gamma_2} \left[-F_3 e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + F_4 e^{-\frac{\eta l}{\gamma_2}} \right] = \frac{R}{A_{44}} \lambda h_1 \left(E_1 e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right)$$

Qui se simplifie en :

$$\frac{1+k_1}{\gamma_1} \left[-F_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} + F_2 e^{-\frac{\eta l}{\gamma_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\gamma_2} \beta_1 \left[E_1 e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] = \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 \left[E_1 e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right]$$

Se qui donne $F_2(\eta)$ en fonction de $F_1(\eta)$

$$F_2 = \beta_2 (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) e^{\gamma_1} + e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} F_1 \quad (5.13)$$

Avec :

$$\beta_2 = \left[\frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 - \frac{1+k_2}{k_2 - k_1} (a_1 \lambda_0 h_2 R (1+k_1) - \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 k_1) \right] \frac{\gamma_1}{1+k_1}$$

Substituons à présent dans les équations conditions (5.7) et (5.8) $F_2(\eta)$ exprimée par $F_1(\eta)$ et $F_4(\eta)$ exprimée par $F_3(\eta)$ on obtient deux équations algébriques en $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1+k_1}{\gamma_1} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} - 1), & \frac{1+k_2}{\gamma_2} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} - 1) \\ \frac{d_1}{\gamma_1^2} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} + 1), & \frac{d_2}{\gamma_2^2} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\eta) \\ F_3(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 (E_1 + E_2) - \frac{1+k_1}{\gamma_1} \beta_2 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) - \frac{1+k_2}{\gamma_2} \beta_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} (e_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \\ \lambda_0^2 h_1 R (E_1 + E_2) - \frac{d_1}{\gamma_1^2} \beta_2 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) - \frac{d_2}{\gamma_2^2} \beta_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) + \eta \phi(\eta) R \end{bmatrix}$$

Par Cramer, on détermine la fonction $F_3(\eta)$ par le rapport :

$$F_3(\eta) = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (5.14)$$

Δ : Etant le déterminant de la matrice des coefficients des inconnues $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$

$$\Delta = \frac{1+k_1}{\gamma_1} \frac{d_2}{\gamma_2^2} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} - 1) (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} + 1) - \frac{1+k_2}{\gamma_2} \frac{d_1}{\gamma_1^2} (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} - 1) (e^{\frac{2\eta l}{\gamma_1}} + 1)$$

Peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\Delta = \frac{4}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \frac{d_1 d_2}{A_{44}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} Q(\eta l) \quad (5.15)$$

$$Q(\eta l) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} sh \frac{\eta l}{\gamma_2} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} sh \frac{\eta l}{\gamma_2} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \end{bmatrix}$$

Δ_2 : Est le déterminant de la matrice composée des coefficients de l'inconnue $F_1(\eta)$ et des termes de la colonne droite en remplacement des coefficients de l'inconnue $F_3(\eta)$.

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & 2 \frac{d_1}{\gamma_1^2 A_{44}} \lambda_0 h_1 R \left(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 + E_2) + 2 \frac{1+k_1}{\gamma_1} \frac{d_1}{\gamma_1^2} \beta_2 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \left(ch \frac{\eta l}{\gamma_1} - sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) + \\ & + 2 \frac{d_1 d_2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 A_{44}} \beta_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left(\frac{1}{\gamma_2} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) + 2 \frac{(1+k_1)}{\gamma_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} R \eta \phi(\eta) sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \end{aligned}$$

Pour des considérations futures, présentant Δ_2 sous cette nouvelle forme

$$\Delta_2 = \Delta_2^* + \frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^* = & 2 \frac{d_1}{\gamma_1^2 A_{44}} \lambda_0 h_1 R \left(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 + E_2) + 2 \frac{1+k_1}{\gamma_1} \frac{d_1}{\gamma_1^2} \beta_2 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) + \\ & + 2 \frac{d_1 d_2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 A_{44}} \beta_1 e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left(\frac{1}{\gamma_2} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^* = & 2 \frac{d_1}{\gamma_1^2 A_{44}} \lambda_0 h_1 R e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \left(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) (E_1 + E_2) + 2 \frac{d_1}{\gamma_1^2 A_{44}} \lambda_0 h_1 R e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) - \\ & \frac{1}{k_2 - k_1} \frac{2d_1 d_2 R}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 A_{44}} \beta e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) + \frac{1}{k_2 - k_1} \frac{2d_1 d_2 R}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 A_{44}} \beta e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left(ch \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \end{aligned}$$

Avec

$$\beta = \left[a_1 \lambda_0 h_2 (1+k_1) - \frac{1}{A_{44}} \lambda_0 h_1 k_1 \right]$$

De l'équation condition (5.7), on tire la somme des deux fonctions $(-F_1(\eta) + F_2(\eta))$ en fonction de la somme des deux autres $(-F_3(\eta) + F_4(\eta))$ soit :

$$-F_1(\eta) + F_2(\eta) = \frac{\gamma_1}{1+k_1} \left[\frac{R}{A_{44}} \lambda_0 h_1 (E_1(\eta) + E_2(\eta)) - \frac{1+k_2}{\gamma_2} (-F_3(\eta) + F_4(\eta)) \right]$$

Que nous substituons dans la condition (5.6), cette dernière s'écrit alors seulement en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$.

Le système d'équations intégrales (5.6-5.10) se réduit à deux équations intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} : \quad & \frac{k_1 - k_2}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} [F_3(\eta) - F_4(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = -\varepsilon + \frac{R}{1+k_1} (a_1 \lambda_0 h_2 (1+k_1) - \frac{1}{A_{44}} \lambda h_1 k_1) \\ & \int_0^\infty \eta^{-1} (E_1(\eta) + E_2(\eta)) J_0(\eta\rho) d\eta \quad \rho < 1 \quad (5.17) \end{aligned}$$

La condition (3) prend la forme

$$\mathbf{2)} : \quad \int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad \rho > 1 \quad (5.18)$$

5.2.2 Développement du système d'équations intégrales (5.17, 5.18)

5.2.2.1 Traitement de la partie droite de la première équation intégrale.

La fonction $F_4(\eta)$, étant exprimé par $F_3(\eta)$ (5.12).

$$F_4(\eta) = \beta_1 (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} + e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta)$$

La fonction $F_3(\eta)$ est calculée par (5.14)

$$F_3(\eta) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta_2^* + \frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \right)$$

D'où :

$$F_3(\eta) - F_4(\eta) = F_3(\eta) - e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} F_3(\eta) - \beta \frac{\gamma_2}{k_2 - k_1} e^{\frac{2\eta l}{\gamma_2}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}})$$

$$F_3(\eta) - F_4(\eta) = -\frac{1}{\Delta} \left[\Delta_2^* + \frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \right] 2e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} - \beta \frac{\gamma_2}{k_2 - k_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda}}) \quad (5.19)$$

Alors, la partie de droite de l'équation (5.12) s'écrit en substituant dedans le terme $(-F_3(\eta) + F_4(\eta))$ par son équivalent (5.14) :

$$\frac{k_1 - k_2}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} [F_3(\eta) - F_4(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{k_1 - k_2}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \{***\} J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$\{***\} = -\frac{1}{\Delta} \left[\Delta_2^* + \frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \right] 2e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} - \beta \frac{\gamma_2}{k_2 - k_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}})$$

Gardant uniquement le terme en $\phi(\eta)$ à droite et transposant le reste des termes à gauche.

$$\frac{2(k_2 - k_1)}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{\frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2}}{\frac{4}{\gamma_1 \gamma_2} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \frac{d_1 d_2}{A_{44} \gamma_1 \gamma_2} Q(\eta l)} J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{-2(k_2 - k_1)}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{\Delta_2^*}{\Delta} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} J_0(\eta \rho) d\eta -$$

$$\frac{(k_2 - k_1)}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \beta \frac{R \gamma_2}{k_2 - k_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left[E_1 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta - \varepsilon + \frac{\beta R}{1+k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} (E_1 + E_2) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.20)$$

Pour faciliter le traitement de l'équation (5.15), départageant là en quatre termes $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$

$$I_1 = \frac{2(k_2 - k_1)}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{\frac{2(1+k_1)}{\gamma_1} \eta R \phi(\eta) e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2}}{\frac{4}{\gamma_1 \gamma_2} e^{\frac{\eta l}{\gamma_1}} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \frac{d_1 d_2}{A_{44} \gamma_1 \gamma_2} Q(\eta l)} J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{A_{44} \gamma_1 \gamma_2 (k_2 - k_1)}{d_1 d_2} \int_0^\infty \frac{R}{Q(\eta l)} \phi(\eta) \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} J_0(\eta \rho) d\eta$$

Qui s'écrit encore,

$$\frac{A_{44} \gamma_1 \gamma_2 (k_2 - k_1)}{d_1 d_2} \int_0^\infty \frac{R}{Q(\eta l)} \phi(\eta) \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_1} \operatorname{sh} \frac{\eta l}{\gamma_2} J_0(\eta \rho) d\eta =$$

$$I_1 = \frac{A_{44} \gamma_1 \gamma_2 (k_2 - k_1) R}{d_1 d_2} \int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \frac{A_{44} \gamma_1 \gamma_2 (k_2 - k_1) R}{d_1 d_2} \int_0^\infty G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.21)$$

Avec

$$G(\eta l) = 1 - \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta)}$$

$$I_2 = \frac{-2(k_2 - k_1)}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{\Delta_2^*}{\Delta} e^{\gamma_2 \eta} sh \frac{\eta l}{\gamma_2} J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.22)$$

$$\frac{\Delta_2^*}{\Delta} = \frac{\gamma_2^2 \lambda_0 h_1 R}{2d_2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right)}{e^{\gamma_2 \eta} Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] + \frac{\gamma_2^2 \lambda h_1 R}{2d_2} \frac{1}{e^{\gamma_2 \eta} Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] -$$

$$\frac{\beta R}{2(k_2 - k_1)} \frac{1}{e^{\gamma_2 \eta} Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] + \frac{\beta R}{2(k_2 - k_1)} \frac{\left(ch \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} \right)}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right]$$

$$I_2 = \frac{-(k_2 - k_1)}{1+k_1} \frac{\gamma_2 \lambda h_1 R}{d_2} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta -$$

$$\frac{(k_2 - k_1)}{1+k_1} \frac{\gamma_2 \lambda h_1 R}{d_2} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta +$$

$$\frac{\beta R}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta -$$

$$\frac{\beta R}{\gamma_2(1+k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{e^{\gamma_2 \eta} \left(sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.23)$$

Qui se réduit à :

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{-(k_2 - k_1) \gamma_2 \lambda_0 h_1 R}{1 + k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1}) sh \frac{\eta l}{\gamma_1}}{Q(\eta l)} \gamma_2 [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta - \\
 & \frac{(k_2 - k_1) \gamma_2 \lambda_0 h_1 R}{1 + k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \\
 & \frac{\beta R}{\gamma_2 (1 + k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[1 - e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left(sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) \right] (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) J_0(\eta \rho) d\eta
 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \frac{-\beta R}{(1 + k_1)} \int_0^\infty \eta^{-1} e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \\
 I_4 = & -\varepsilon + \frac{\beta R}{1 + k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} (E_1 + E_2) J_0(\eta \rho) d\eta
 \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.2.2.2 Reconstruction de l'équation intégrale (5.17)

Remettant à présent tous les termes ($\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3 \mathbf{I}_4$) dans l'équation (5.17)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\delta_0} \int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = & -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^\infty G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{\beta}{1 + k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} (E_1(\eta) + E_2(\eta)) J_0(\eta \rho) d\eta \\
 & - \frac{\gamma_1 h_1 \lambda}{\delta_0} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{(\frac{\lambda}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1}) sh \frac{\eta l}{\gamma_1}}{Q(\eta l)} \gamma_2 [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta - \\
 & \frac{\gamma_1 \lambda_0 h_1}{\delta_0} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)} \left[E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta + \\
 & \frac{\beta}{1 + k_1} \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{1}{Q(\eta l)} \left\{ sh \frac{\eta l}{\gamma_2} \left[\frac{1}{\gamma_2} - e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \left(\frac{1}{\gamma_2} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) \right] - Q(\eta l) e^{\frac{\eta l}{\gamma_2}} \right\} (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) J_0(\eta \rho) d\eta
 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Où

$$\begin{aligned}
 \frac{(k_2 - k_1) \gamma_2 \lambda_0 h_1}{1 + k_1} = \frac{\gamma_1 h_1 \lambda_0}{\delta_0} \\
 \chi_0 = \frac{\beta}{1 + k_1} = a_1 \lambda_0 h_2 - \frac{k_1}{A_{44}(1 + k_1)} \lambda_0 h_1 = \lambda_0 h_1 \left(a_1 \frac{h_2}{h_1} - \frac{k_1}{A_{44}(1 + k_1)} \right)
 \end{aligned}$$

Réduisant le volume de l'équation (5.26) par l'introduction de nouvelles fonctions $V(\eta l)$ et $W(\eta l)$ qui se simplifie en :

$$\frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{V(\eta l)}{Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{W(\eta l)}{Q(\eta l)} \left[E_1(\eta) e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.27)$$

Avec :

$$V(\eta l) = \chi_0 Q(\eta l) - \frac{\gamma_1 h_1 \lambda_0}{\delta_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) sh \frac{\eta l}{\gamma_2}$$

$$W(\eta l) = \chi_0 \left\{ sh \frac{\eta l}{\gamma_2} \left[\frac{1}{\gamma_2} - e^{\gamma_2} \left(\frac{1}{\gamma_2} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right) \right] - Q(\eta l) e^{\gamma_2} \right\} - \frac{\gamma_1 h_1 \lambda_0}{\delta_0} sh \frac{\eta l}{\gamma_2}$$

$$Q(\eta l) = \left[\frac{1}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_1} ch \frac{\eta l}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} sh \frac{\eta l}{\gamma_2} ch \frac{\eta l}{\gamma_1} \right]$$

$$G(\eta l) = 1 - \frac{sh \frac{\eta l}{\gamma_1} sh \frac{\eta l}{\gamma_2}}{Q(\eta l)}$$

$$\frac{1}{\delta_0} = \frac{(k_2 - k_1) A_{44} \gamma_1 \gamma_2}{d_1 d_2}$$

5.3 Résolution du système d'équations intégrales gouvernant le problème de la thermoélasticité

Le problème se résume donc en la solution d'une paire d'équations intégrales suivante (5.26, 5.18), soit :

$$\frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} G(\eta l) \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{V(\eta l)}{Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{W(\eta l)}{Q(\eta l)} \left[E_1(\eta) e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad : \rho < 1 \quad (5.28)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (5.29)$$

Avec la représentation suivante [2,9],

$$\phi(\eta) = \delta_0 \int_0^1 f(t) \cos \eta t \, dt \quad (5.30)$$

L'équation (5.29) est satisfaite identiquement, en effet :

$$\int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f(t) \cos \eta t \, dt = \begin{cases} 0 & : \rho > 1 \\ \frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_0^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} & : \rho < 1 \end{cases} \quad (5.31)$$

L'équation (5.28) se ramène à une intégrale d'Abel

$$(5.32)$$

Qui se résout

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.33)$$

Avec :

$$g(\rho) = \frac{-\varepsilon}{R} + \int_0^\infty G(\eta l) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt + \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{V(\eta l)}{Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta + \int_0^\infty \eta^{-1} \frac{W(\eta l)}{Q(\eta l)} \left[E_1(\eta) e^{-\frac{\eta l}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (5.34)$$

Substituons (5.34) dans l'équation précédente (5.33) et effectuons l'intégration [65], on obtient :

Intégrales de table utilisées au cours de l'opération

1)- $\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = -\int_t^0 \frac{z dz}{z} = t$

2)- $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho J_0(\eta \rho) d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \cos \eta t$

3)- $\int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) d\rho = \frac{J_1(\eta)}{\eta}$

$$4)- \int_0^{\infty} \eta \cos \eta t \frac{J_1(\eta)}{\eta} d\eta = 1$$

D'où :

$$f(t) = \frac{-2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(u) du \int_0^{\infty} G(\eta l) \cos u \eta \cos \eta t d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{V(\eta l)}{Q(\eta l)} [E_1(\eta) + E_2(\eta)] \cos \eta t d\eta +$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-1} \frac{W(\eta l)}{Q(\eta l)} \left[E_1(\eta) e^{-\frac{\eta l}{\lambda}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda}} \right] \cos(\eta t) d\eta \quad (5.35)$$

L'équilibre mécanique thermoélastique à l'interface du contact se traduit par l'équation d'équilibre statique suivante :

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho (\sigma_z^p + \sigma_z^t) d\rho \quad (5.36)$$

σ_z^p : représente la contrainte élastique due à la force de pression du poinçon

σ_z^t : représente la contrainte thermique due à l'effet de la température

Désignons par $\sigma_z(\rho, 0)$ la contrainte normale thermoélastique à l'interface de contact

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho (\sigma_z^p + \sigma_z^t) d\rho = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho, 0) d\rho \quad (5.37)$$

La contrainte normale thermoélastique sur la surface de contact se détermine également par (5.28) de cette façon

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) R J_0(\eta \rho) d\eta \quad \rho \leq 1 \quad (5.38)$$

D'où, après avoir remplacer $\phi(\eta)$ par son équation (5.30) dans (5.39)

$$\frac{-P}{2\pi R^2} = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \delta_0 \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) d\rho \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} \eta \cos \eta t d\eta \quad (5.39)$$

Se qui donne

$$\frac{-P}{2\pi R^2} = \delta_0 \int_0^1 f(t) dt \quad (5.40)$$

Ou encore, en substituant $f(t)$ par (5.35) dans (5.40) ;

$$\begin{aligned} \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} = & \int_0^1 \left[\frac{-2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(u) du \int_0^\infty G(\eta l) \cos u\eta \cos \eta t d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) \cos \eta t d\eta + \right. \\ & \left. \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) \left(E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right) \cos \eta t d\eta \right] dt \end{aligned} \quad (5.41)$$

Avec :

$$R_1(\eta l) = \eta^{-1} \frac{V(\eta l)}{Q(\eta l)}, \quad R_2(\eta l) = \eta^{-1} \frac{W(\eta l)}{Q(\eta l)}$$

On effectue l'intégration de (5.41), et on tire le terme $-\frac{2\varepsilon}{\pi R}$;

$$\begin{aligned} \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} = & \frac{-2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(u) du \int_0^\infty G(\eta l) \cos u\eta d\eta \int_0^1 \cos \eta t dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) d\eta \int_0^1 \cos \eta t dt + \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) \left(E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right) d\eta \int_0^1 \cos \eta t dt \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{-2\varepsilon}{\pi R} = & \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos x\eta \frac{\sin \eta}{\eta} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta - \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) \left(E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \end{aligned} \quad (5.42)$$

ε : Représente la déformation totale provoquée par les effets mécanique et thermique à la fois.

Substituant le terme $\frac{-2\varepsilon}{\pi R}$ écrit par cette nouvelle forme (5.42) dans celle de $f(t)$ écrit sous la forme (5.35), on aura :

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos x\eta \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) \left(E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} \right) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.6 Découplage des problèmes mécanique et thermique

Départageant l'équation (5.43) en la somme de deux termes. Le premier exprime la partie mécanique, le second marque l'influence du champ thermique.

$$f(t) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \psi(t)^P - \lambda_0^2 h_1 \psi(t)^T \quad (5.44)$$

Remplaçant $f(t)$ par (5.44) dans (5.43)

$$\begin{aligned} & \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \psi(t)^P - \lambda_0^2 h_1 \psi(t)^T = \\ & \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \psi(x)^P - \lambda^2 h_1 \psi(x)^T \right] dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta \end{aligned} \quad (5.45)$$

Par identification des termes de (5.45), on tire les équations qui expriment chacune des deux parties mécanique et thermique.

La première est celle caractérisant la partie mécanique du problème, précédemment étudié.

$$\psi(t)^P + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)^P dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta = 1 \quad (5.46)$$

Que nous écrivons par sa forme précédente (3.43) ;

$$\psi(t)^P - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)^P k(x, t) dx = 1 \quad (5.47)$$

Avec :

$$k(x, t) = \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta$$

La deuxième partie représente l'effet mécanique provoqué par le champ thermique.

$$\begin{aligned}
 \psi(t)^T + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)^T dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta = \\
 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_1(\eta l) (E_1 + E_2) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta \\
 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_2(\eta l) (E_1 e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2 e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}) \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Rappelons les formules (4.29) du paragraphe précédent de la répartition de la température

$$E_1(\eta) = \frac{\eta(\eta + h_3) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}}}{2Q^T(\eta)} \phi(\eta) \quad , \quad E_2(\eta) = \frac{\eta(\eta - h_3) e^{-\frac{\eta l}{\lambda_0}}}{2Q^T(\eta)} \phi(\eta)$$

Avec :

$$Q^T(\eta) = (\eta^2 + h_2 h_3) sh \eta \frac{l}{\lambda_0} + \eta(h_2 + h_3) ch \eta \frac{l}{\lambda_0}$$

Se qui permet d'écrire

$$E_1(\eta) + E_2(\eta) = \frac{\eta \phi^T(\eta)}{2Q^T(\eta)} \left[2\eta ch \eta \frac{l}{\lambda_0} + 2h_3 sh \eta \frac{l}{\lambda_0} \right] \tag{5.49}$$

$$E_1(\eta) e^{\frac{-\eta l}{\lambda_0}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta l}{\lambda_0}} = \frac{\eta \phi^T(\eta)}{2Q^T(\eta)} \left[2\eta ch \eta \left(\frac{l}{\lambda_0} - \frac{l}{\lambda_0} \right) + 2h_3 sh \eta \left(\frac{l}{\lambda_0} - \frac{l}{\lambda_0} \right) \right] = \frac{\eta^2 \phi^T(\eta)}{Q^T(\eta)} \tag{5.50}$$

Substituant (5.33) et (5.34) dans (5.32) en tenant compte de (4.38), toute transformation faite on écrit ;

$$\begin{aligned}
 \psi(t)^T + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)^T dx \int_0^\infty G(\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta = \frac{2}{\pi} \cdot h_1^t T_0 \int_0^1 \psi^t(t) \cos \eta t dt. \\
 \int_0^\infty \frac{\eta}{Q(\eta l) Q^T(\eta)} \left\{ V(\eta l) \left[ch \frac{\eta l}{\lambda} + \frac{h_3}{\eta} sh \frac{\eta l}{\lambda} \right] + W(\eta l) \right\} \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Chapitre 6

Résultats graphiques et discussions

6.1 Problème mécanique

6.1.1 Matériau transverse isotrope

Le schéma du problème de contact étudié (fig.1) (chapitre 3) où une couche transversalement isotrope homogène est déposée sur un substrat rigide serrée contre celui-ci par un poinçon plat cylindrique rigide sur sa surface limite supérieur. Pour rendre le problème menable, les prétentions suivantes sont faites:

- le poinçon est rigide et non conducteur de sorte que l'écoulement de la chaleur soit dirigé seulement dans le milieu élastique
- l'extérieur libre en dehors du secteur du poinçon est thermiquement sous conditions.
- le mouvement du poinçon est lent de sorte que des effets d'inertie ou de choc soient négligés;
- le secteur de contact est stationnaire en ce qui concerne la couche élastique sans la séparation entre le poinçon et la surface de contact.

6.1.1.1 Influence de l'anisotropie

Prenons comme exemple de calcul, une couche élastique d'épaisseur réduite $l = H/R = 2$, discrétisons le rayon en 20 parties ($N=20$), utilisons pour l'approximation de la fonction $\psi(t)$ le polynôme de degré $k=5$ et faisant appel aux formules précédemment trouvées (chapitre 3).

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_0'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (3.48)$$

$$\psi_0(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi_0(x) dx \int_0^{\infty} G(\eta l) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = 1 \quad (3.47)$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = -\frac{F}{2\pi R^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho) \quad (3.49)$$

Fixons la valeur $\nu_1 = 1$ et changeons $\nu_2 = 0,1 ; 0,8 ; 1,5$ ensuite fixons la valeur $\nu_2 = 1,5$ et changeons $\nu_1 = 0,5 ; 1,4 ; 1,8$.

Les résultats numériques obtenus permettent de montrer l'influence de l'anisotropie aux travers des courbes représentées (figure 6.3).

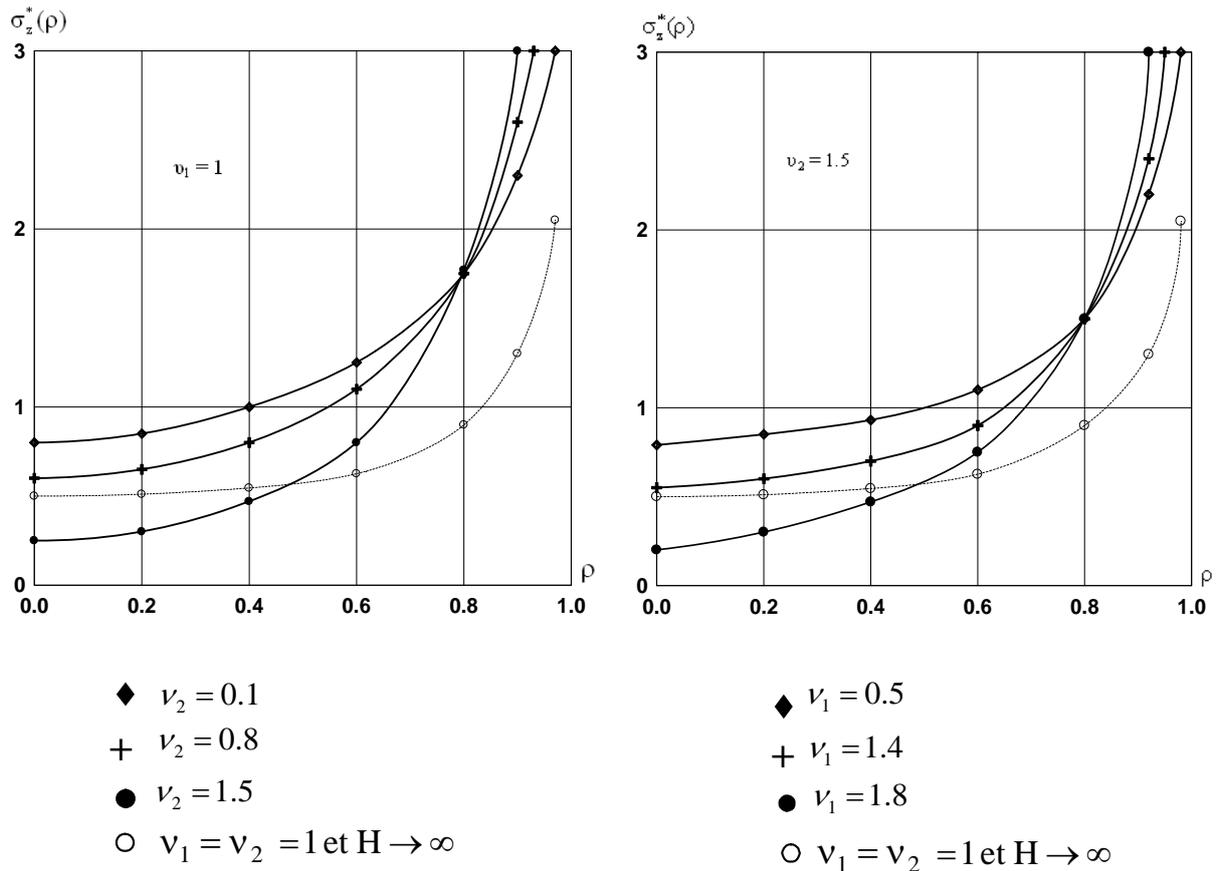


Fig 6.3 – distribution de contraintes non dimensionnelles dans la zone de contact Matériau transverse isotrope

Les courbes représentatives (Fig.3) montrent que la contrainte au centre du poinçon est moindre pour le modèle transversalement isotrope pour lequel le module Young dans le plan d'isotropie est supérieur au module de Young dans le plan perpendiculaire à celui. Comme la pression sous le poinçon est une constante et ne dépend pas de l'épaisseur de la couche, alors la répartition est assez forte aux bords de la surface limite.

Le modèle mécanique le plus répandu pour le cartilage articulaire est le biphasé est analysé comme couche élastique équivalente. Dans une étude Garcia et autres [26] montrent que la couche transversalement isotrope répond le mieux aux expériences d'impression pour le

cartilage articulaire lorsque le module de Young dans le plan du cartilage (plan d'isotropie) est plus grand que celui dans la direction du chargement.

6.1.1.2 contraintes non locales

Une analyse paramétrique a été également entreprise pour des rapports de modules d'anisotropie élevés, soit les valeurs $\gamma_2 = 0.8$ et $\gamma_1 = 10\gamma_2$.

Pour différentes valeurs relatives de l'épaisseur de la couche, on obtient les résultats graphiques suivants.

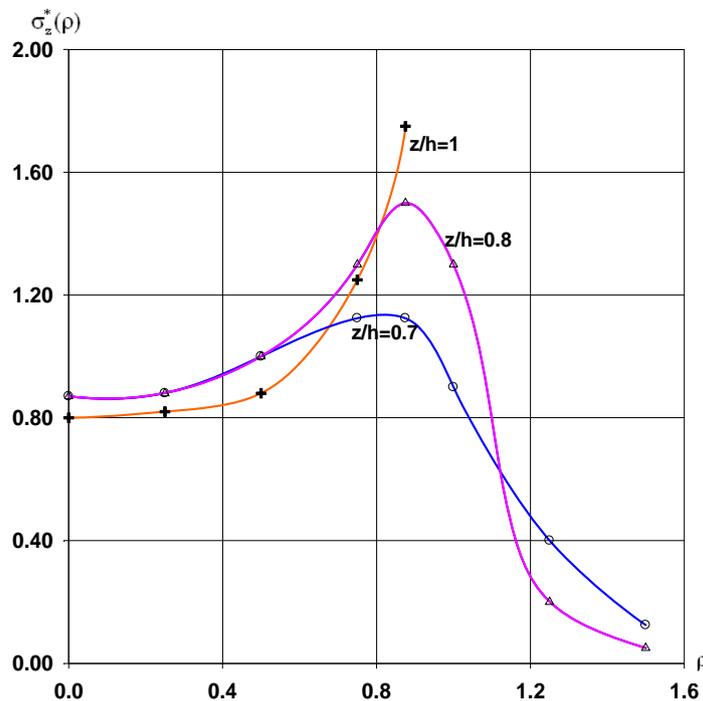


Fig 6.4 Contraintes locales et non locales non dimensionnelles

Il ressort de l'allure des résultats graphiques (Fig 6.4) que pour la valeur $\rho = 0.9$ et les valeurs avoisinantes, apparaît la répartition des contraintes non locales similaires à ceux de la distribution des contraintes indiquées dans une étude récente [67]. Ce phénomène de contraintes locales et les problèmes similaires sont beaucoup plus discutées dans les travaux [67-69].

Il est dit que les contraintes locales et non local sont pratiquement constants sous le poinçon au voisinage de $\rho = 0,95$ comme indiqué sur (Fig.4). Ces contraintes dépendent essentiellement de la valeur H (épaisseur de la couche) et de R (rayon du poinçon).

6.1.2 Matériau homogène isotrope

6.1.2.1 Contraintes normales à l'interface de contact

Pour le cas de matériau homogène isotrope, il suffit de prendre la limite de l'expression $G(\eta l)$ dans la formule (3.36) pour $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, on retrouvera l'expression (3.8) de $G(2\eta l)$.

$$\lim_{(\gamma_1=\gamma_2)\rightarrow 1} G(\eta l) = \lim_{(\gamma_1=\gamma_2)\rightarrow 1} \frac{\frac{\text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}{\frac{1}{\nu_2} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_1} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}}{\text{sh} 2\eta l + 2\eta l} = G(2\eta l) \quad (3.8)$$

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\psi_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\psi_0'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (3.44)$$

$$\psi_0(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi_0(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta l) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = 1$$

(3.43)

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho)$$

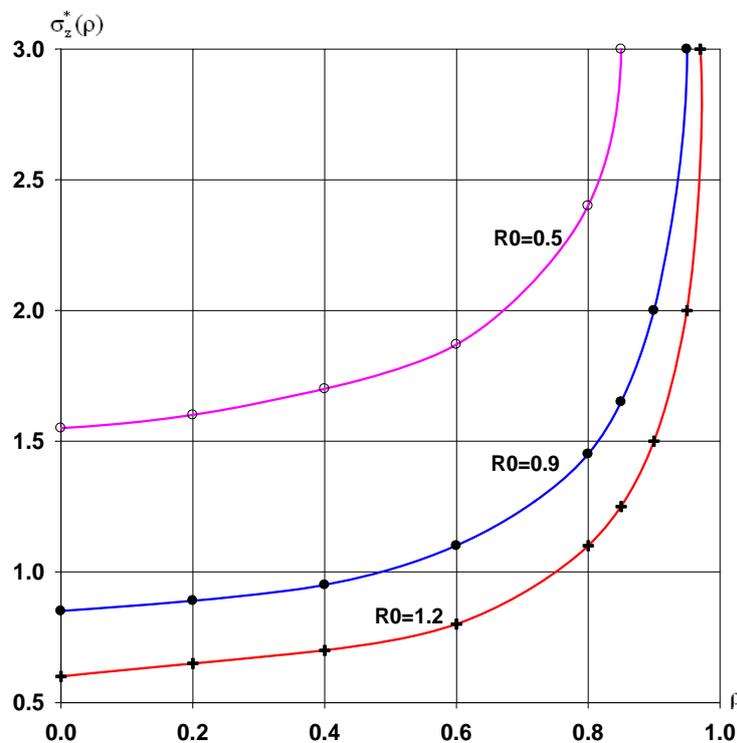


Fig 6.5 distribution des contraintes non dimensionnelles dans la zone de contact
Matériau homogène isotrope

Il est clair que le profil de la distribution de la contrainte (Fig 6.5) ne changera pas d'allure par rapport à celui du matériau transverse isotrope. La pression ne dépend pas de la nature de la matière diminue logiquement avec l'augmentation de la section du contact.

On observe une bonne corrélation de distribution de pression dans la zone de contact obtenue avec cette solution et celle donnée par Hertz représentée sur (Fig 6.3).

6.1.2.2 Déplacement vertical en dehors de la zone de contact

Il est également intéressant de connaître le déplacement vertical dans le sens de l'application de la charge à l'extérieur du poinçon:

Le déplacement vertical exprimé par la formule (3.25) devient après avoir remplacé respectivement $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ par (3.29) et (3.33) et tenir compte de (3.37) et (3.46).

$$\frac{2\pi R\delta_0}{F} U(\rho, 0) = \int_0^1 \psi_0(t) dt \int_0^\infty \frac{\text{sh} \eta l / \gamma_2 \text{sh} \eta l / \gamma_1}{Q(\eta l)} J_0(\eta \rho) \cos \eta t d\eta$$

D'après le commentaire de la page 35, pour les matériaux isotrope $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

$$\lim_{(\nu_1=\nu_2) \rightarrow 1} \delta_0 = \frac{2(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} = \chi_0, \quad \lim_{(\gamma_1=\gamma_2) \rightarrow 1} \frac{\frac{\text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}{\frac{1}{\nu_2} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_1} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} \text{ch} \frac{\eta l}{\nu_2} \text{sh} \frac{\eta l}{\nu_1}}}{\text{sh} 2\eta l + 2\eta l} = \frac{1 + 2\eta l - e^{-2\eta l}}{\text{sh} 2\eta l + 2\eta l}$$

$$\text{Alors: } U^*(\rho, 0) = \frac{2\pi R\chi_0}{F} U(\rho, 0) = \int_0^1 \psi_0(t) dt \int_0^\infty \frac{1 + 2\eta l - e^{-2\eta l}}{\text{sh} 2\eta l + 2\eta l} J_0(\eta \rho) \cos \eta t d\eta, \quad \rho > 1$$

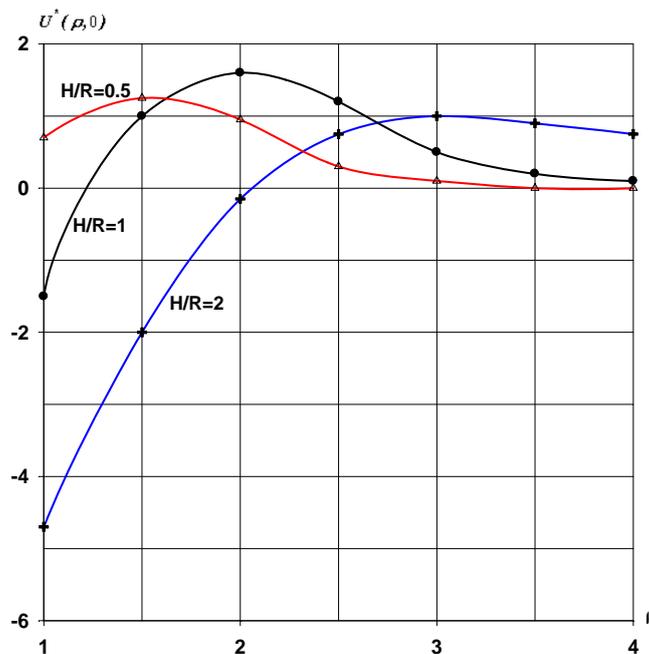


Fig 6.6 courbes de déplacement vertical en dehors de la surface de contact

Les courbes représentatives de déplacement adimensionnel (Fig.6) de la surface limite en dehors de la zone de contact sont tout à fait logiques dans leurs allures. En effet, la théorie adressée par A.E, Giannakopoulos [70] prévoit la variation du module de Young en fonction de la profondeur d'indentation pour poinçons axisymétriques. C'est pourquoi sous les conditions imposées du problème, la matière sous le poinçon sera obligée de glisser en dehors du secteur de contact suivant la direction radiale. Ce résultat correspond à celui trouvé par

I.N, Sneddon [8] par la formule : $w(\rho) = \frac{2\delta}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)$, $\rho > a$

6.1.3 Espace semi infini homogène isotrope

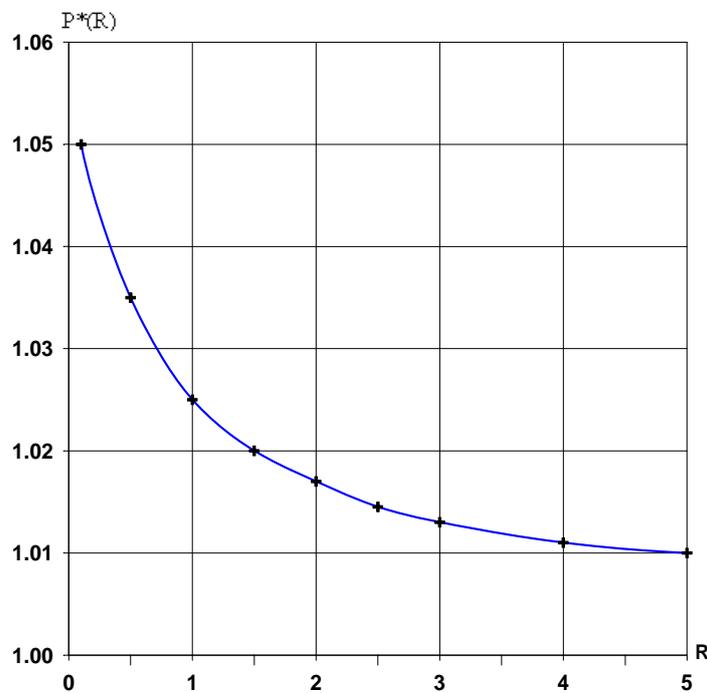


Fig 6.7 variation non dimensionnelle de la force d'indentation en fonction du rayon de contact

Si H (épaisseur de la couche élastique) tends vers l'infini le rapport $l = H / R$ tends également vers l'infini, par conséquent la fonction $G_1(\eta l)$ (3.8) tends vers zéro et $\psi_0(t)$ tends vers l'unité.

D'où :

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

$$\sigma_z(\rho,0) = \frac{-F}{2\pi R^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho) = \frac{-F}{2\pi R^2 \delta_0} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

L'expression coïncide exactement avec celle de la bibliographie du demi espace de Boussinesq Connu sous le non de (Problème de Schteicher).

Ce résultat dont la représentation graphique (Fig 6.7) est en bonne corrélation avec le résultat de la bibliographie [14] concernant le matériau isotrope indiqué par la formule suivante :

$$\sigma_{zz} = -\frac{4\mu(\lambda + \mu)d}{\pi a(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{\sqrt{1-(r/a)^2}}$$

En fin la figure (Fig 6.8) est un cas particulier du problème qui illustre la distribution de contraintes dans le cas de la force ponctuelle appliquée sur la surface libre d'un demi espace en remplacement de la force répartie sous le poinçon cylindrique (problème de Boussinesq).

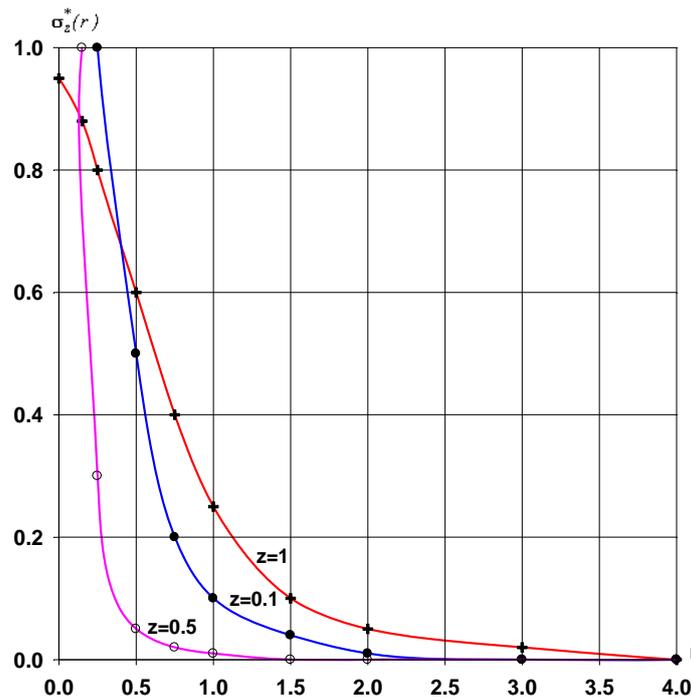


Fig 6.8 Profil de la contrainte normal adimensionnelle
Cas de la force ponctuelle

6.3 Problème thermique

6.3.1 Répartition du champ thermique dans le massif

Les formules pour la détermination du champ de la température et de l'effort normal dans le secteur de contact sont obtenues (chapitre 4), rappelons-les.

$$T^*(\rho, \zeta) = \frac{T(\rho, \zeta)}{h_1^t T_0} = \int_0^1 \psi^t(t) dt \int_0^\infty \frac{W(\eta, \rho)}{Q(\eta)} \cos \eta t J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.39)$$

$$W(\eta, \zeta) = \eta \left[2\eta \operatorname{ch} \eta \left(h^t + \frac{\zeta}{\lambda} \right) + 2h_3^t \operatorname{sh} \eta \left(h^t + \frac{\zeta}{\lambda} \right) \right] \quad (4.40)$$

$$\psi^t(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi^t(x) L(x, t) dx = \frac{2}{\pi} \quad (4.41)$$

$$L(x, t) = \int_0^\infty \left[1 - \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \right] \cos \eta t d\eta \quad (4.42)$$

Aux quelles correspondent les graphes suivants à différents niveaux de l'épaisseur de la couche.

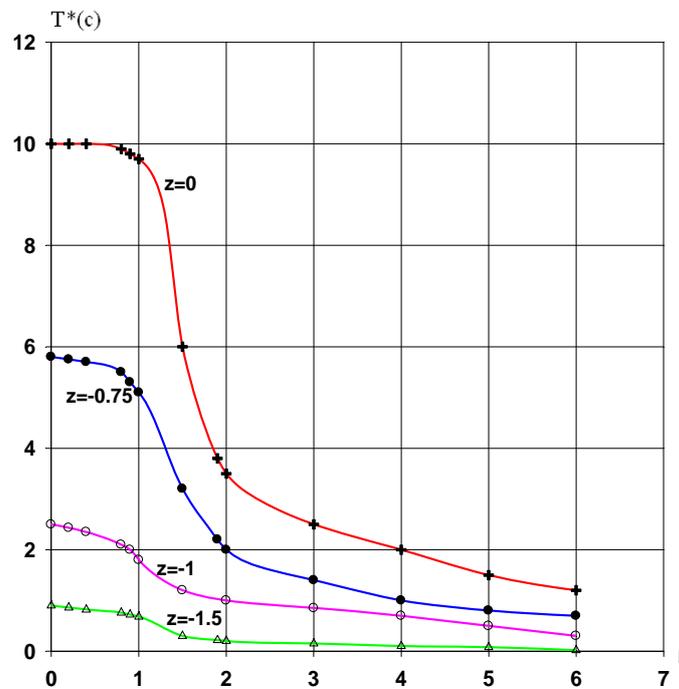


Fig 6.9 Courbes représentatives de la répartition de la température aux différentes profondeurs de la couche

Cette partie de la solution concerne le problème stationnaire de distribution de température dans un massif. Pour ce cas on observe (Fig 6.8) la bonne corrélation de l'allure des courbes de la distribution de température dans le secteur de contact obtenu avec cette solution et celle donnée Moncef.A [71], lui dans son étude comparait les résultats des trois théories de transformations de Laplace, Fourier et Hankel et aboutit à la conclusion que les différences apparaissent pour les temps très petits.

Beaucoup mieux sont les petites différences dans les distributions qu'on observe comparativement à ceux trouvés par X.Tian et autres [72]. Ces différences peuvent être comprises puisque la précision de la méthode des éléments finies en déplacement est réduite en contraintes.

Nous nous intéressons aux contraintes thermiques axiales sur la surface limite de la couche, c'est pourquoi le temps de relaxation indiqué dans ces deux articles et dans d'autres ne nous importe peu dans cette étude, malgré que les différences sont minimales. La méthode présentée est prometteuse pour analyser le problème thermoélastique efficacement et avec précision à l'interface du corps.

6.4 Problème thermoélastique

6.4.1 Détermination de la contrainte mécanique sous l'effet thermique.

Le but du travail actuel est d'évaluer l'effet du champ thermique du poinçon chauffé sur la couche transversalement isotrope concernant la distribution des composants des efforts mécaniques au sein du contact sous le poinçon.

Pour ce but, nous avons pu séparer la pression due à l'action simultanée du champ thermique et de la force physique appliquée dessus le poinçon en deux parties (chapitre 5):

-Une première partie étant l'effet de la force mécanique agissante sur le poinçon $\sigma_z^{*P}(\rho, 0)$ étudiée au chapitre 3.

-Une deuxième partie est la contrainte mécanique sous l'influence du champ thermique $\sigma_z^T(\rho, 0)$ déterminée par la résolution des équations suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_z^T(\rho, 0) &= -\frac{2}{\pi} \lambda_0 h_1 h_1' T_0 \sigma_z^{*T}(\rho, 0) \\ \sigma_z^{*T}(\rho, 0) &= \frac{\Psi^T(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi^{*T}(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \\ \psi(t)^T + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x)^T dx \int_0^{\infty} G(\eta l) \cos \eta x \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta &= \int_0^1 \psi^t(t) \cos \eta t dt. \\ \int_0^{\infty} \frac{\eta}{Q(\eta l) Q^T(\eta)} \left\{ V(\eta l) \left[ch \frac{\eta l}{\lambda} + \frac{h_3}{\eta} sh \frac{\eta l}{\lambda} \right] + W(\eta l) \right\} \left[\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta & \end{aligned} \quad (5.51)$$

Dans cette formule $\psi^t(t)$ est déterminé par (4.40) et (4.42) du chapitre 4.

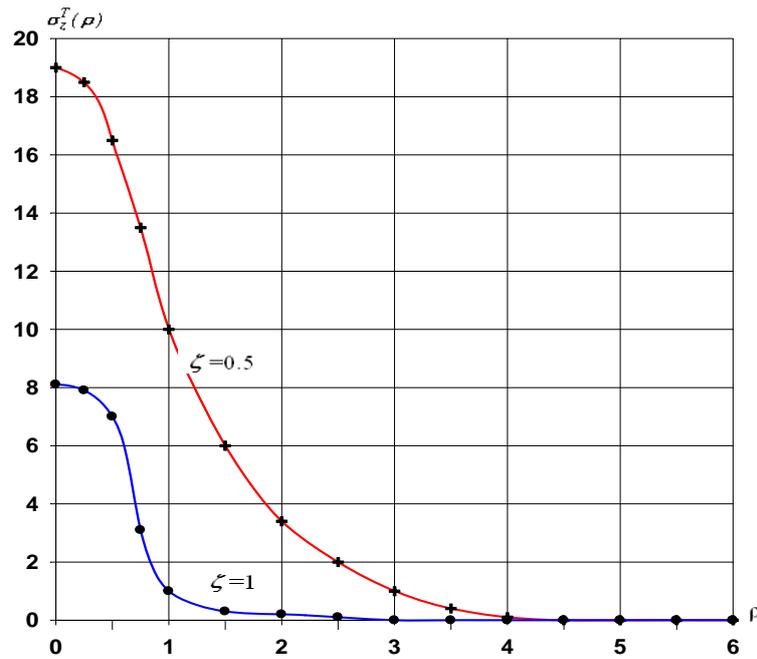


Fig 6.10 courbes de répartition de contraintes mécanique due au champ thermique

Nous montrons à travers ces courbes (Fig.10) l'influence du champ thermique sur les contraintes mécaniques (autrement dit la partie additionnelle de contraintes mécaniques que peut apporter la présence de la chaleur). Nous prenons pour l'exemple de calcul le matériau de mêmes données que ceux considérées pour le calcul de la répartition du champ thermique, et ce pour conserver la même fonction $\psi^t(t)$ dont on aura besoin dans la formule (5.51). Coefficients d'anisotropie ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.8$), les coefficients de conduction ($\alpha_T = \beta_T = 1$), le rapport $l = 2$. L'influence thermique dans la région centrale est beaucoup plus important, est un résultat évident pour les données de l'exemple. Seulement, il est à signaler que l'impact de la formule (5.51) peut aller au delà et peut analyser la variation des coefficients de conductibilité thermique dans le contact.

Pour chercher les courbes relatives aux contraintes thermoélastique $\sigma_z^*(\rho, 0)$, il suffit seulement d'ajouter les ordonnées des courbes des figures (Fig 6. 3 et Fig 6. 10).

Conclusion générale

Le but principal de cette thèse est d'étudier l'influence des coefficients de l'anisotropie sur la répartition des contraintes normales dans la surface de séparation poinçon- couche élastique. L'effet du champ thermique sur les contraintes normales dans la superficie de contact des deux corps est également considéré.

Les solutions semi analytiques pour le champ élastique axisymétrique du à un chargement extérieur uniformément répartie et à un champ thermique stationnaire sont présentées séparément. Les solutions de formes closes sont obtenues.

Les résultats numériques choisis sont présentés pour les matériaux arbitraires, car les paramètres employés dans les expressions des solutions sont sans dimensions. L'équation intégrale de Fredholm de la deuxième espèce est résolue numériquement, la quadrature numérique est exigée pour le calcul de ces solutions exprimées par des intégrales semi infinies.

La représentation graphique montre clairement au travers des courbes l'influence de l'anisotropie sur la répartition de la pression en dessous du poinçon. Un résultat intéressant (contraintes non locales) apparut entre temps pour des valeurs remarquables de l'anisotropie. Le matériau devient plus mou en marquant des contraintes moins faibles qu'auparavant près de la frontière singulière. A ce sujet pour plus d'informations, il est conseillé d'examiner les travaux des références suivantes [67-69].

Les résultats trouvés sont enrichis par le passage direct à la solution du même problème concernant le matériau homogène et isotrope par simples limites d'expressions lorsque ($\gamma_1 = \gamma_2 \rightarrow 1$).

Les résultats graphiques pour la couche isotrope et l'espace semi infini montrent la dépendance de la pression au contact avec l'épaisseur de la couche, la taille du poinçon et l'effet d'une charge point verticale comparativement avec la charge uniformément répartie.

La répartition du champ thermique sous le poinçon est déterminée également par le même algorithme (résolution de l'équation de Fredholm de seconde espèce) obtenu en employant la transformation de Hankel.

Presque un même comportement de cette loi de distribution est observé pour différents niveaux de l'épaisseur de la couche. Cette loi de distribution stationnaire par hypothèse marque une légère différence par rapport aux résultats bibliographiques [40,71,72] qui eux tiennent compte du paramètre temps en faisant intervenir un ou deux de relaxations. Cette petite différence est sans grande importance pour notre cas, du fait qu'en s'intéresse au phénomène thermique uniquement à la surface limite et que la propagation de chaleur ne nous intéresse pas à l'intérieure de la matière, beaucoup plus qu'à l'extérieure .

La solution du problème thermo élastique à l'interface du contact poinçon-couche élastique est trouvée. Le problème formulé en termes d'équations intégrales satisfaisant les conditions aux limites des champs élastique et thermique à la fois sont réduites en une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Etant superposés par hypothèses, les efforts mécanique et thermique dans cette équation sont séparés. La partie thermique telle qu'elle est présentée prouve la dépendance de l'élasticité et du potentiel thermique (contraintes thermiques) à la surface de contact. L'étude faite peut être orientée sur l'influence de la conductivité sur la distribution des champs de la température et de l'effort normal dans la superficie de contact. En effet, dans son expression final (5.51) la contrainte adimensionnelle $\sigma_z^{*T}(\rho,0)$ dépend des coefficients d'élasticités, des coefficients de conductions thermiques et des coefficients de convections.

Si les contraintes et les déplacements sont supposés tendre vers zéro lorsque (r) tends vers l'infini, La transformation de Hankel est utilisée pour établir les expressions des composantes des contraintes et des déplacements sous forme d'expressions intégrales.

Retenons de la présente étude ce qui suit.

1- La solution du problème de l'espace semi infini transversalement isotrope sollicité par un poinçon cylindrique rigide [66, 73,71] est obtenue, en faisant tendre l'épaisseur de la couche H vers l'infini dans (3.36) et (3.47).

2- Lorsqu'on fait tendre les coefficients ν_1 et ν_2 vers l'unité dans (3.36) et (3.47), la solution correspondra à celle du problème de la couche élastique isotrope sollicité par un poinçon cylindrique rigide à extrémités plates [8].

3- En faisant tendre à la fois les coefficients ν_1 et ν_2 vers l'unité et l'épaisseur de la couche H vers l'infini dans (3.36) et (3.47), on retrouve la solution du problème classique de Boussinesq pour un poinçon cylindrique à extrémités plates [14] (problème de Scheicher).

4- L'intersection des courbes au voisinage de $\rho = 0.8$ (fig.3) est un résultat important, marquant l'apport de l'algorithme de calcul. En effet, et indépendamment des coefficients

v_1 et v_2 la pression sous le poinçon est constante et ne dépend pas de l'épaisseur de la couche. Afin de garder la même valeur de surface sous chaque courbe cette intersection doit exister. Quant à l'influence de l'anisotropie il convient de remarquer que jusqu'au voisinage de $\rho = 0.8$ pression diminue avec l'augmentation des valeurs v_1 et v_2 et inversement au delà de cette valeur.

5- La même procédure de calcul est maintenue pour le calcul élastique et thermoélastique, la forme de l'unique équation à résoudre à chaque fois (3.47),(4.40), (5.51) ne change pas avec la nature du problème qu'il soit élastique, thermique ou thermoélastique. Seulement les expressions dedans les intégrales prennent des formes analytiques différentes. Donc le même programme de calcul numérique est utilisé pour répandre à toutes les solutions d'équations intégrales. Ce qui fait d'ailleurs le point fort de la présente étude.

La solution semi analytique proposée nous semble intéressante. Car le même algorithme est facilement utilisé pour différents cas cités ci-dessus. D'autre part le calcul numérique contenant dans sa partie majeure la résolution numérique de type (3.47) est assez réduit et présente l'avantage d'être rapide.

Il s'avère donc utile de compléter le domaine afin de permettre l'utilisation de la transformée de Hankel et d'avoir à traiter un problème plus au moins simple. Cette approche a permis de considérer les solutions pour les domaines abstraits d'étendue illimitée, souvent utilisées en physique mathématique.

Perspectives

On réalité, on se propose d'étudier le phénomène de la thermo – élasticité qui se produit sur les surfaces limites de la couche élastique isotrope transverse comprimée sur ses faces par deux poinçons cylindriques à extrémités plates animés de mouvements de rotation. Le problème tel qu'il se présente est assez complexe. Il nous semble utile de l'examiner par étape. La première étape sera le calcul statique des contraintes élastiques sur les deux faces limites, la suivante étape est la distribution de la température, puis le calcul des contraintes thermiques, et ainsi de suite...

Références Bibliographies

- [1] Peng-Fei Hou, Andrew Y.T. Leung, Chang-Ping Chen, Fundamental solution for transversely isotropic thermo elastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 392-408
- [2] Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P., *Integral transforms and operational calculus* Pergamon Press, New York, 1965
- [3] Shelestovshii, B.G., Gabrusev, G.V., *International Applied Mechanics*, 04 40, (2004), 67-77
- [4]: Erdogan.f, et Gupta G.D. On the numerical solution of singular integral equations, *Q.Appl.Math.*, 1972, 29, 525.
- [5]: Muskhelishvili n. I. *Somme basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff, Groningen, 1953.
- [6]: England A.H. *complex variable methods in elasticity*, wiley, New York, 1971.
- [7]: Brilla J. *Mixed boundary value problems of plane anisotropic bodies*, CISM Course and Lectures, n 16, Springer-Verlag, Vienne, 1969.
- [8]: Harding J.W. et Sneddon I.N: The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch, *Pro.cambridge Phil. Soc.*, 1945, 41, 16.
- [9]: Sneddon I.N. *Fourier transforms*, McGraw-will, New York, 1951.
- [10]: Sneddon I.N. *The use of transform methods in elasticity*, vol.1:N .C.State Univ. Techn.Rept., AFOSR.1964, vol. 2 :1965.
- [11]: Uflyand Ja.S. *Survey articles on the applications of integral transforms in the theory of elasticity*, N.C.State Univ., Raleigh, N.C., 1965.
- [12]: Kupradze V.D. *Méthodes par Potentielles dans la théorie de l'élasticité*, Moscou, 1963. Traduction anglaise 1965
- [13]: Boussinesq J. *Applications des potentiels à l'étude del'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gautier-Villars, Paris, 1885.
- [14]: Gladwell G.M.L. A contact problem for a circular cylindrical punch in adhesive contact with an elastic half- space, *Int.J.Engng. Sci.*, 1969, 7, 295.
- [15]: Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. *problèmes non classiques mixtes de la théorie de l'élasticité*, Nauka, Moscou, 1974.
- [16]: Lubkin J.L. *contact problems* Mc Graw-Hill, New York, 1962,
- [17]: Abramyan B.L. *Problèmes de contact mixtes de la théorie de l'élasticité (en russe)*, traduction anglaise, N.C.state Univ, Raleigh N.C., 1971.
- [18]: Galin : *Problèmes de contact de la théorie de l'élasticité (en russe)*, traduction anglaise, North Carolina state Univ., Raleigh N.C., 1961.
- [19]: Sneddon, I. N. (1975) *Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*. Springer- Verlag, New York.
- [20]: Hayes, W. C., Keer, L. M., Herrmann, G. and Mockros, L. F. (1972) A mathematical analysis for indentation tests of articular cartilage. *J. Biomech.* 5, 541-551.
- [21]: Mak, A. K., Lai, W. M. and Mow, V. C. (1987) Biphasic indentation of cartilage I-Theoretical analysis. *J. Biomech.* 20, 703-714.
- [22]: Jaffar, M. J. (1988) A numerical solution for axisymmetric contact problems involving rigid indenters on elastic layers. *J. Mech. Phys. Solids* 36, 401-416.

- [23]: Mansoor A., Haider and Mark H. Holmes. (1995) Indentation of a thin compressible elastic layer. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 43, n.8, pp. 1199-1219, 1995 Elsevier Science Ltd.
- [24]: Mow, V.C., S.C. Kuei, W.M. Lai and C.G. Armstrong, "Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage: Theory and experiment", *Journal of Biomechanics*, 102, 73-84, (1980).
- [25]: Armstrong, C. G., Lai, W. M. and Mow, V. C. (1984) An analysis of the unconfined compression of articular cartilage. *J. Biomech. Engng* 106, 165-173.
- [26]: García, J.J., N.J. Altiero and R.C. Haut, "An approach for the stress analysis of transversely isotropic bi-phasic cartilage under impact load", *Journal of Biomechanical Engineering*, 120, 608-613, (1998).
- [27]: Mow, V.C., M.C. Gibbs, W.M. Lai, W.B. Zhu and K.A. Athanasiou, "Biphasic indentation of articular cartilage. II. A numerical algorithm and an experimental study", *Journal of Biomechanics*, 22, 853-861, (1989).
- [28]: Cohen, B., T.R. Gradner and G.A. Ateshian, "The influence of transverse isotropy on cartilage indentation behavior. A study on the human humeral head", *Trans. Aorthop. Res. Soc.*, 18, 185 (1993).
- [29]: Töiräs, J., T. Lyyra-Laitinen, R. Niinimäki, M.T. Lindgren, M.T. Nieminen, I. Kirivanta and J.S. Jurvelin, "Estimation of the Young's modulus of articular cartilage using an arthroscopic indentation instrument and ultrasonic measurement of tissue thickness", *Journal of Biomechanics*, 34, 251-256, (2001).
- [30] Swanson, S.R., *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* issue 10 36 (2005) 1421-1429
- [31] Batra, R.C., Jian, W., *International Journal of Solids and Structures* issues 22-23 45 (2008) 5814-5830
- [32] Swanson, S.R., *International Journal of solids and structures* issue 07 41 (2004) 1945-1959
- [33] Willis, J.R., *Journal of the mechanics and of the physics of solids* issue 03 14 (1966) 163-176
- [34] Turner, J.R., *International Journal of solids and structures* issue 05 16 (1966) 409-419
- [35] Vel, S.S., Batra, R.C., *International Journal of solids and structures* 37 (2000) 715- 733
- [36] Stroh, A.N., *Journal of the mathematics and physics* 41 (1962) 77-103
- [37] Ufljand, Ja.S., *Survey of articles on the applications of integral transforms in the theory of elasticity*, N.C.State Univ., Raleigh, N.C., 1965
- [38] Kuo, C.H., Keer, L.K., *ASME Journal of tribology* 114 (1992) 253-262
- [39] Matnyac, S.V., *International Applied Mechanics*. 07 39, (2003), 840-847
- [40] Lord, H.W., Shulman, Y., 1967. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 15, 299-309
- [41] R. Dhaliwal and H. Sherief, Generalized thermoelasticity for anisotropic media, *Quart. Appl. Math.* 38, 1-8 (1980)
- [42] A. Roberts, On the steady motion of a line load over a coupled thermoelastic half-space subsonic case, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 25, 497-511 (1972).
- [43] F. Ziegler, Ebene Wellenausbreitung im Halbraum bei Zufallserregung Spannungs-und Temperaturfeld, *Acta Mechanica* 2, 307-327 (1966).
- [44] Y. Yang and C. Chen, Thermoelastic transient response of an infinitely long annular cylinder composed of two different materials, *Int. J. Eng. Sci.* 24, 569-581 (1986).
- [45] Green, A.E., Lindsay, K.A., 1972. Thermoelasticity. *J. Elast.* 2, 1-7.
- [46] I. Müller, The coldness, a universal function in thermoelastic solids, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 41, 319 (1971).
- [47] A. Green and N. Laws, On the entropy production inequality, *Arch. Rat. Anal.* 54, 7 (1972).

- [48] E. Şuhubi and S. Erbay, Longitudinal wave propagation in a generalized thermo-elastic cylinder, *J. Therm. Stresses* 90, 279 (1986).
- [49] S. Erbay and E. Şuhubi, longitudinal wave propagation in a generalized thermo-elastic cylinder, *J. Therm. Stresses* 90, 279 (1986).
- [50] J. Ignaczak, A strong discontinuity wave in thermoelastic with relaxation times, *J. Thermal Stresses* 8, 25 (1985).
- [51] J. Ignaczak, Decomposition theorem for thermoelasticity with finite wave speeds, *J. Thermal Stresses* 1, 41 (1978).
- [52] D. P. H. Hasselman and R. A. Heller, *Thermal Stresses in Sever Environments*, Plenum Press, New York (1980).
- [53] H.M.Youssef and A.A.El-Bary mathematical model for thermal shock problem of a generalised thermoelastic layered composite material with variable thermal conductivity. *Computational Methods in science and Technologie* 12(2), 165-171 (2006).
- [54] Chen, W.Q., Ding, H.J., Ling, D.S., 2004. Thermoelastic field of transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution. *International Journal of Solids and Structures* 41, 69–83.
- [55] M.Kumar et Ku.Uma Hiremath the axisymmetric Boussinesq problem for a heated annular punch, *Indian J.pure appl.Math.*,15(9) : 1036-1047,1984.
- [56] D.L.George and I.N.Sneddon, The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch, *J.Math.and Mech.*,11,N0.5(1962).
- [57] Keer,L.M.,and Fu,w.s.(1967). Some stress distribution in a elastic plate due to rigid heated punches. *Int.J.Engng Sci.*, 5,555.
- [58] Shibuya, T. (1974) An elastic contact problem for a half-space indented by a flat annular rigid stamp. *Int.J.Engng Sci.*,
- [59] Leknitskii, S.G., *Theory of elasticity of an anisotropy elastic body*. San Francisco: Holden-Day, 1963
- [60]Sing A Stress distributions within solids of revolution.-ZAMM, 1959.-Bd.39H.12
- [61] Grilitskii, D.V., Kizyma, Y., *Theory of deformation elastic and thermic, axisymmetric contact problem*, Nauka, Moscow, 1981
- [62] Bakhterov ,V.N. Etude analytique de la loi généralisée de Hooke *J.Ass. ph.chimie* 1925
- [63]Nowacki.W,Issues of thermoelasticity[Russian translation].Izd.AN SSSR. Moscow 1962
- [64]SingA. Axisymétrique thermal stresses in transversely isotropic bodies.-*Arch.Mech.Stos.*,1966.-v.12,N3.
- [65] Gradshteyn, I.I., Ryzhik, I.M., *Tables of integrals, series, and products*, Academie press, NewYork, 1980.
- [66] Ruiny, C., Dahan, M., *Comptes Rendus de Mécanique* 330 (2002) 469-473
- [67] Picu, R.C., A nonlocal formulation of rubber elasticity, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1, 1, pp. 23–32, 2003.
- [68] Dumitriu,D.,Chirou,V., *Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl.*, TOME 53, No 3, P. 239–246, Bucarest, 2008
- [69] . Artan, R., Nonlocal elastic half plane loaded by a concentrated force, *Int. J. Engng. Sci.*, 34, pp. 943–950, 1996.
- [70] [70] A.E.Giannakopoulos and S.Suresh,Indentation of solids with gradients in elastic properties *Int.J.Solids Structures* Vol 34,N0 19, pp 2393-2428,1997.
- 71] Moncef.A.,Discontinuities in an axisymmetric generalised thermoélastique problem,*Int Jour of mathematics and mathematical science*,DOI:10.11555/IJMMS.2005.1015.

-
- [72] XTian, J.Zhang, Y.Shen, T.J.LU., Finite element method for generalized piezothermoelastic problems. *Int. Journal of solids and structures* 44(2007)6330-6339.
- [73] Dahan, M., *Journal de Mécanique Appliquée*. 3 (1979) 373-386
- [74] Dahan, M., *Problèmes de contact dans la théorie de l'élasticité transversalement isotrope*, thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie Paris 6 soutenue en 1980.

Annexes

Annexe 1

Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de Fourier

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Soit :

$$T = R(r)Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{d^2 R(r)}{dr^2} Z(z)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dZ(z)}{dz} R(r)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} R(r)$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} Z(z) + \frac{1}{r} Z(z) \frac{dR(r)}{dr} + R(r) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Divisons cette expression par $R(r)Z(z)$, on obtient :

$$\frac{d^2 R(r) + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr}}{R(r)} = \frac{-d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Cette équation peut être représenté sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} = \pm \alpha^2 R(r) \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \pm \alpha^2 Z(z) \end{array} \right.$$

1) signe de α positif

La première équation est celle de Bessel, admet comme solution

$$R(r) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 N_0(\alpha r)$$

J_0 : Fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro

N_0 : Fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre zéro

Sachant que : $\lim_{r \rightarrow 0} N_0(\alpha r) = \infty$, par conséquent pour borner les solutions, il faudra posé $C_2 = 0$, d'où $R_1(r) = C_1 J_0(\alpha r)$

La deuxième équation admet les solutions sous forme :

$$Z_1(z) = e^{kz}, (k_j = \pm \alpha)$$

$$Z_1(z) = A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z}$$

La solution est par conséquent

$$T_1(r, z) = J_0(\alpha r) [A_1 ch(\alpha z) + B_1 ch(\alpha z)]$$

2) signe de α négatif

La solution de l'équation de Bessel cette fois ci est :

$$R_2(r) = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 N_0(\alpha r)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} N_0(\alpha r) = \infty$$

$$R_2(r) = C_1 I_0(\alpha r)$$

La solution de la deuxième équation est

$$Z_2(z) = A_1 e^{i\alpha z} + B_1 e^{-i\alpha z}, (k_j = \mp i\alpha)$$

D'où la solution du deuxième système

$$T_2(r, z) = I_0(\alpha r) [A_2 \cos(\alpha r) + B_2 \sin(\alpha r)]$$

La solution initiale de l'équation de Laplace est

$$T_0(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2)$$

Et la solution générale est sous la forme :

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r) [A_k sh(\alpha_k z) + B_k ch(\alpha_k z)] + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\alpha_k r) [C_k \cos(\alpha_k z) + D_k \sin(\alpha_k z)]$$

Enfin la solution de l'équation de Laplace pour le cas de la symétrie axiale

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (\lambda^2 r^2 - r z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\alpha_k r) \left[A_k sh\left(\frac{\alpha_k z}{\lambda}\right) + B_k ch\left(\frac{\alpha_k z}{\lambda}\right) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\lambda \gamma_k r) [C_k \cos(\gamma_k z) + D_k \sin(\gamma_k z)]$$

λ : est le coefficient de conductibilité

Annexe 2

Quelques expressions approchées de fonctions remarquables

Fonctions approchées de Bessel de première espèce (d'ordre zéro et un)

*** Pour : $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2,249997\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1,2656208\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0,31638\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,04444\left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0,00394\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1,6 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $3 \leq x < \infty$

$$J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \cos \theta_0$$

$$Y_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \sin \theta_0$$

$$\theta_0 = x - 0,7853981 - 0,0416639\left(\frac{3}{x}\right) - 0,0000395\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0,0026257\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,0005412\left(\frac{3}{x}\right)^4 -$$

$$-0,0002933\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon. \quad |\varepsilon| < 7 \cdot 10^{-6}$$

*** Pour : $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_0(x) + 0,3674669 + 0,6055936\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 0,7435038\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 0,2530011\left(\frac{x}{3}\right)^6 -$$

$$0,0426121\left(\frac{x}{3}\right)^8 + 0,0042791\left(\frac{x}{3}\right)^{10} - 0,0002484\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon. \quad |\varepsilon| < 1,4 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $-3 \leq x \leq 3$

$$x^{-1} J_1(x) = 0,5 - 0,5624998\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0,2109357\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0,0395428\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,0044331\left(\frac{x}{3}\right)^8 -$$

$$-0,0003176\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0,00001109\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon. \quad |\varepsilon| < 1,3 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $3 \leq x < \infty$

$$J_1(x) = x^{-0,5} f_1 \cos \theta_1$$

$$f_1 = 0,7978845 + 0,00000156\left(\frac{3}{x}\right) + 0,0165966\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0,00017105\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,0024951\left(\frac{3}{x}\right)^4 +$$

$$+0,0011365\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,0002003\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon. \quad |\varepsilon| < 4.10^{-8}$$

$$\theta_1 = x - 2,3561944 + 0,1249961\left(\frac{3}{x}\right) + 0,0005650\left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0,0063787\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0,0007434\left(\frac{3}{x}\right)^4 +$$

$$+0,0007982\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,0002916\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon. \quad |\varepsilon| < 9.10^{-8}$$

Formules exactes

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \quad (\Gamma' : \text{Dérivée logarithmique})$$

Fonctions de Bessel modifiées

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}$$

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}$$

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = \psi(k+1) = -\gamma + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}. \quad \gamma = 0,577215 : \text{Est la constante L'Euler}$$

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xtdt}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (\text{Formule approchée pour } x > 0)$$

Racines des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre un et deux.

$$J_0(\lambda_k) = 0$$

$$\lambda_k : (k = 1, 2, \dots, 13) = 2,404825 : 5,25007 : 8,65372 : 11,79153 : 14,93091 : 18,07106 :$$

$$21,21163 : 24,35247 : 27,49347 : 30,36460 : 33,77582 : 36,91709 : 40,05842$$

$$J_1(\mu_k) = 0$$

$$\mu_k : (k = 1, 2, \dots, 13) = 3,83171 : 7,01559 : 10,17347 : 13,32369 : 16,47063 : 19,61586 :$$

$$22,76008 : 25,90367 : 29,04683 : 32,18968 : 35,33231 : 38,47477 : 41,61709$$