



Université de Batna
Faculté des Sciences de l'Ingénieur

THESE

Préparée au

Département d'Electrotechnique

Présentée par

Malek BOUHARKAT

Pour obtenir le titre de

Docteur d'Etat Es-Sciences

Spécialité : Génie Electrique

**ETUDE DE L'EVOLUTION DES COURANTS
ROTORIQUES D'UNE MACHINE ASYNCHRONE
A CAGE EN REGIME DYNAMIQUE**

Soutenue le 15/02/2006

Devant le Jury composé de :

Med Said NAIT-SAID
Nour-Eddine BOUGUECHAL
Mohamed KADJOU DJ
Kamel SRAIRI
Amar GOLEA
Salah DERRADJI

Professeur
Professeur
Maître de Conférences
Maître de Conférences
Maître de Conférences
Chargé de cours

Univ. Batna
Univ. Batna
Univ. Batna
Univ. Biskra
Univ. Biskra
Univ. Batna

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

Avant-propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été réalisé en deux parties. La première partie a été effectuée au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle (L.E.E.I, URA au C.N.R.S n° 847) dans l'équipe 'Machines et actionneurs électriques à commutation électronique' de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse (ENSEEIH).

La deuxième partie a été réalisée au Département d'Electrotechnique de l'Université de Batna (Faculté des sciences de l'Ingénieur).

Je suis heureux d'exprimer à Monsieur le Professeur Nour-Eddine BOUGUECHAL, Doyen de la Faculté des sciences de l'Ingénieur, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie d'avoir accepté la direction de ce travail ainsi que pour ses conseils très éclairés.

Que Monsieur Med Saïd NAIT SAID, Professeur au Département d'électrotechnique, trouve ici l'assurance de mon respect pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Mohamed KADJOU DJ, Maître de Conférences au Département de Génie électrique, pour le soutien qu'il m'a apporté ainsi que pour son aide précieuse et d'avoir accepté de consacrer une partie de son temps pour analyser ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur Kamel SRAIRI, Maître de Conférences à l'Université de Biskra, qui a accepté de se déplacer pour participer à mon jury et d'avoir examiné mon travail.

Mes remerciements et mon grand respect s'adressent également à Monsieur Amar GOLEA, Maître de Conférences à l'Université de Biskra, qui a eu l'amabilité d'accepter de se déplacer pour faire partie de mon jury et d'avoir examiné mon travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Salah DERADJI, Enseignant au Département de Génie Mécanique et à Monsieur Sofiane TAIBI, Enseignant au Département de Génie électrique, qui ont consacré une partie de leur temps pour l'accomplissement de ce mémoire. Monsieur Salah DERADJI a, également, accepté de participer à ce jury en tant qu'invité, qu'il en soit remercié.

Il m'est très agréable de témoigner ma grande reconnaissance à Monsieur Med El Hachemi BENBOUZID, Professeur à l'Université de Brest (France), pour ses conseils et ses recommandations malgré la distance qui nous sépare.

Mes remerciements s'adressent aussi à Madame Fouzia ADJADI, Maître de Conférences au Département de Physique de la Faculté des Sciences, pour ses riches commentaires et ses orientations scientifiques.

Aussi, je remercie tous mes collègues du Département de Génie électrique pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Concernant la partie française :

J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur H. FOCH, Directeur de Laboratoire pour m'avoir accueilli au LEEI.

J'ai été sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur le Professeur LAJOIE-MAZEC, responsable du groupe 'Machines et actionneurs électriques à commutation électronique', pour m'avoir accepté dans son groupe et pour ses conseils et ses orientations.

Que Monsieur le Professeur B. TRANNOY, Directeur des Etudes Doctorales de (ENSEEIH), trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accepté dans son Ecole.

J'adresse une reconnaissance toute particulière à MM. Y. LEFEVRE et X. ROBOAM chargés de recherche au C.N.R.S, qui m'ont dirigé et m'ont fait bénéficier de leurs idées scientifiques. La confiance qu'ils m'ont accordée a été très appréciable durant mon séjour de recherche.

Je remercie Monsieur Pierre LARDY, Maître de Conférences et Directeur de L'URFIST de Lyon, pour son accueil chaleureux et le temps qu'il m'a accordé ainsi que les moyens mis à ma disposition durant tous mes stages de courte durée.

Je voudrais, aussi, remercier mon ami Henry SCHNEIDER, actuellement Maître de Conférences à l'ENSEEIH, de m'avoir aidé par sa présence, son écoute et ses conseils durant les moments difficiles.

Malek Bouharkat

***A la mémoire de mes parents
A Fouzia, Asma, Inssaf, Céline
A toute ma famille***

Résumé :

Du fait de son faible coût et de sa robustesse, la machine asynchrone à cage offre d'indéniables avantages, en particulier dans le domaine de la traction et de la commande. Cependant, même si les stratégies de contrôle qui lui sont associées, et qui permettent son fonctionnement à vitesse variable, sont de plus en plus performantes en profitant de l'avancée considérable de l'électronique de puissance, celles-ci sont classiquement élaborées à partir d'un modèle électrique très simplifié connu sous le nom de « modèle de Park ». Cette modélisation à paramètres fixes à l'avantage simple, ce qui permet son utilisation en temps réel.

Les différentes méthodes de modélisation exigent en particulier des informations électriques et mécaniques précises pour connaître le comportement réel de la machine en régime dynamique, cependant, une caractéristique du moteur asynchrone à cage est de ne fournir aucun renseignement direct sur les courants développés au rotor. Plus que tout autre moteur, il nécessite donc l'élaboration d'estimateurs qui rendent compte de l'état magnétique et électrique du rotor, de cela il nous paraît important de se poser la question de la représentation du modèle de la machine asynchrone.

La contribution de notre travail, afin de répondre à la problématique posée, consiste dans le développement d'un modèle qui représente la machine asynchrone à cage par des enroulements au stator et au rotor; le nombre d'enroulements utilisé pour représenter le rotor est égal au nombre de barres de la cage.

Le développement de ce modèle peut être vu comme une contribution de rapprocher la représentation par le calcul en pas à pas des équations du champ électromagnétique des circuits d'alimentation de la machine et le modèle classique de Park. Nous obtenons, ainsi, une modélisation offrant plus d'informations que celles données par le modèle à quatre enroulements et servira de modèle de prédiction du comportement de la machine asynchrone en cas de défauts (cassure de barres et anneaux).

SOMMAIRE

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre I :

Modélisation de Park-Equivalence multi-enroulement d'une MAS	6
I.1-Introduction	7
I.2-Modèles électromagnétiques de la machine asynchrone en grandeurs de phases...	7
I.2.1-Schéma d'un moteur asynchrone triphasé.....	7
I.2.2-Equation électrique de la machine asynchrone	8
I.2.3-Expression du couple	10
I.2.4-Equation du mouvement.....	10
I.2.5-Régime permanent de la machine asynchrone	10
I.2.6-Modèle de la machine dans le système d'axes d, q	11
I.2.7-Transformation de Park	11
I.3-Choix du référentiel.....	13
I.3.1-Référentiel immobile par rapport au stator	13
I.3.2-Référentiel immobile par rapport au rotor.....	13
I.3.3-Référentiel immobile par rapport au champ tournant	13
I.4-Application de la transformation à la machine asynchrone	14
I.5-Schémas et modèles de la machine asynchrone	15
I.6-Modèle triphasé /N – Phases	15
I.6.1-Machine diphasée/diphasée équivalente	18
I.7-Position du problème.....	22
I.8-Conclusion.....	23

Chapitre II :

Modélisation analytique de la machine asynchrone à cage.....	24
II.1-Introduction.....	25

II.2-Hypothèses, domaine d'étude, conventions.....	26
II.2.1-Hypothèses.....	26
II.2.2-Domaine d'étude.....	26
II.2.3-Conventions	27
II.3 Approche analytique par calcul de champs du modèle multi enroulement.....	27
II.3.1-Calcul de l'équation du champ électromagnétique dans l'entrefer.....	28
II.3.1.1-Modélisation de l'armature statorique	28
II.3.1.2-Transformation des grandeurs statoriques dans un repère du rotor ...	30
II.3.1.3-Champ créé par l'armature statorique	31
II.3.1.4-Inductance cyclique du stator.....	32
II.3.1.5-Mutuelle inductance du stator/rotor	33
II.3.1.6-Champ créé par une barre du rotor.....	34
II.3.1.7-Inductance propre d'une barre du rotor et de son conducteur retour .	35
II.3.1.8-Mutuelle inductance entre les barres du rotor	36
II.3.1.9Matrice flux-courant.....	36
II.3.2- Prise en compte de la fermeture de cage de machine asynchrone	40
II.3.2.1-Résistances et inductances des bagues rapportées aux barres	41
II.3.2.2-La méthode des mailles.....	41
II.3.2.3-Simplifications dues aux caractéristiques de la cage	48
II.3.2.4-Simplifications dues aux caractéristiques magnétiques de la MAS...	49
II.3.2.5-Cas général.....	49
II.3.2.6-Cas périodique.....	51
II.3.2.7-Cas anti-périodique	55
II.4-Equations finales.....	58
II.5-Conclusion	60

Chapitre III :

Identification par éléments finis de la MAS	61
III.1-Introduction	62
III.2-Présentation de la méthode de calcul par éléments finis	63
III.3-Modélisation de la machine asynchrone à cage par le logiciel EFCAD	66
III.3.1-Modélisation magnétique	67
III.3.2-Equations aux dérivées partielles	68

III.3.3-Méthode des éléments finis	69
III.3.4-Présentation du logiciel EFCAD	70
III.4-Description et manipulation des modules du logiciel EFCAD.....	73
III.4.1-Module EFP	73
III.4.2-Module EFDSIN.....	74
III.4.3-Module AREG	75
III.4.4-Module EFM.....	76
III.4.5-Module EFCR2.....	76
III.4.6-Module EFGX	77
III.5-Résultats obtenus par le logiciel EFCAD	78
III.6-Conclusion.....	79

Chapitre IV :

Détermination numérique des paramètres de la machine asynchrone à cage	80
IV.1-Introduction	81
IV.2-Présentation de la machine	81
IV.2.1-Equations électriques.....	81
IV.3-Calcul des résistances du modèle multi-enroulement	83
IV.3.1-Résistances statoriques	83
IV.3.2-Résistances rotoriques	84
IV.3.2.1-Résistances des barres	84
IV.3.2.2-Résistances des anneaux de fermeture	85
IV.4-Modélisation et domaine d'étude de la machine asynchrone à cage.....	87
IV.4.1-Structure et maillage de la machine sur un quart du domaine d'étude.....	87
IV.4.2-Détermination des inductances propres et mutuelles de la machine, lorsque la modélisation est faite sur un quart de la machine	90
IV.5-Interprétation des courbes obtenues	97
IV.6-Conclusion.....	99

Chapitre V :

Interprétation des résultats et validation.....	100
V.1-Introduction.....	101
V.2-Résultats du modèle multi-enroulement	101
V.2.1-Détermination des expressions analytiques par la méthode numérique	101

V.2.2-Programme de simulation de la MAS (multi-enroulement)	103
V.2.3-Résultats issus de la modélisation du modèle multi-enroulement	104
V.2.4-Analyse et interprétation des courbes	109
V.3- Validation du modèle multi-enroulement.....	109
V.3.1-Analyses et interprétation des courbes obtenus par le modèle	111
multi-enroulement et le modèle à quatre enroulements	111
V.4-Conclusion	112
 Conclusion générale	 113
Annexe 1 : Flux et potentiel vecteur	118
Annexe 2 : Potentiel vecteur dû au conducteur retour	122
Annexe 3 : Terme constant dans la densité de conducteurs	125
Annexe 4 : Transformation de Park appliquée à la machine asynchrone	131
Annexe 5 : Détermination expérimentale des paramètres électriques	142
de la machine asynchrone	142
Références bibliographiques	150

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation des machines asynchrones à rotor à cage d'écureuil dans les entraînements industriels est en pleine expansion, du fait de leur robustesse, de leur coût de fabrication relativement faible et la quasi-absence en entretien. Mais, depuis leur apparition, elles ont fait l'objet de nombreuses études basées, essentiellement, sur la méthode du schéma équivalent [1-8]. Ce dernier, ne peut s'appliquer qu'au régime permanent. D'autre part, le formidable progrès technologique des composants de l'électronique de puissance entraînant le développement des convertisseurs statiques a favorisé une large application des machines asynchrones.

Mais les machines subissent de plus en plus de perturbations, auxquelles elles sont sensibles, en particulier, de la part de la source d'alimentation. De ce fait, une étude du comportement dynamique de la machine est devenue impérative pour prévoir les effets que les perturbations génèrent en amont (rejet d'harmonique sur le réseau) et en aval (irrégularité de couple sur la charge) [9]. D'autres part, l'étude en régime transitoire permet de connaître les contraintes maximales subies par la machine asynchrone à cage, lors des perturbations du système (cassure d'une ou plusieurs barres, fissure dans l'anneau de fermeture, court-circuit....) [10-17].

L'analyse juste du comportement en régime dynamique de la machine asynchrone à cage exige, en particulier, des informations électriques précises pour connaître l'évolution de ces paramètres tels que les courants rotoriques [15-24]. Cependant, une caractéristique du moteur asynchrone à cage est de ne fournir aucun renseignement direct sur les courants développés au rotor vu l'inaccessibilité à la cage. Plus que tout autre moteur, il nécessite, donc, l'élaboration d'estimateurs qui rendent compte de l'état magnétique et électrique du rotor [23-29].

Et afin de répondre à cette problématique, nous pouvons envisager l'utilisation de la méthode de résolution de l'ensemble des équations des circuits d'alimentation de la machine, avec la cage sous forme d'enroulements particuliers [30-36]. Le but de notre travail est de développer un modèle de ce type, connu sous le nom multi-enroulement.

Pour ce faire, nous utilisons les équations électriques de la machine dans lesquelles figurent des paramètres tels que résistances statoriques et rotoriques, inductances propres et mutuelles. En conséquence, la fiabilité dépend de la précision de l'identification de ces paramètres [30-33].

Le modèle multi-enroulement représente la machine par des enroulements au stator et au rotor. Le nombre d'enroulements utilisé pour représenter le rotor est égal au nombre de barres de la cage. Au niveau du stator, il est représenté par trois enroulements [37-40]. Le développement de ce modèle peut donner une vision plus claire sur les paramètres de la cage du moteur d'une façon générale et en particulier sur l'évolution des courants rotoriques en régime dynamique.

Nous utiliserons la modélisation numérique, pour l'identification des paramètres inductifs (inductances propres, mutuelles) de la machine par éléments finis avec résolution en potentiel vecteur. Les résistances des anneaux et des barres de la cage seront calculées à partir des équations des mailles [25-28].

Le calcul en pas à pas des équations du champ électromagnétique des circuits d'alimentation de la machine est utilisé pour résoudre les équations d'états du système.

Cette thèse est subdivisée en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous indiquons la représentation de la machine asynchrone à cage et l'approche employée pour arriver aux grandeurs électromagnétiques ainsi que l'établissement des paramètres de la machine. Par la suite, nous mettons en place le modèle électrique de la machine :

Il s'agit d'un modèle diphasé au stator et au rotor, obtenu par transformations de la machine triphasée/n-phase et dans lequel interviennent des paramètres caractérisant la cage rotorique et les enroulements statoriques.

Dans le deuxième chapitre, une importance est donnée à la modélisation analytique de la machine asynchrone à cage. Pour ce faire, nous posons les

hypothèses nécessaires, le domaine d'étude et les conventions adoptées. Nous présentons l'approche employée pour arriver à l'identification des expressions analytiques des inductances. Par la suite, nous abordons une approche classique ('vue des bornes') de la machine qui amène à la détermination des expressions analytiques des inductances.

Nous montrons, aussi, dans ce chapitre, comment prendre en compte les anneaux de fermeture de la cage dans l'établissement des paramètres rotoriques du modèle. Finalement, nous montrons comment les caractéristiques électromagnétiques de la structure de la machine peuvent amener à des réductions, comme pour la périodicité et l'anti-périodicité du domaine d'étude.

Ainsi, le deuxième chapitre permet de justifier le modèle multi-enroulement et de montrer comment celui-ci peut s'adapter à des modèles vus des bornes tout en prenant compte la structure réelle de la machine.

Si, en principe, il est possible de déterminer analytiquement les inductances de la machine asynchrone, il reste, néanmoins, d'importantes difficultés pour leurs mise en œuvre. Pour pallier à ce problème, nous pouvons avoir recours à des méthodes numériques de détermination des valeurs des inductances beaucoup plus simples à mettre en œuvre.

Dans le troisième chapitre, nous citons quelques méthodes utilisées dans la modélisation de la machine asynchrone à cage. Nous présentons la méthode de modélisation par éléments finis d'une manière générale. Une importance est donnée à la description et au mode d'utilisation du logiciel EFCAD, ainsi qu'à ses modules afin de réaliser la modélisation numérique de la machine asynchrone à cage.

Le quatrième chapitre est consacré à la détermination numérique des paramètres de la machine. Dans un premier temps, nous présentons la machine asynchrone à cage réelle du point de vue caractéristiques électriques, ainsi que son domaine d'étude et son mode d'alimentation. Dans un deuxième temps, une importance est donnée au calcul détaillé des paramètres résistifs de la cage. Par la

suite, nous nous intéressons à la détermination de l'ensemble des inductances propres et mutuelles par le logiciel EFCAD, dont les courbes des inductances propres et mutuelles sont interprétées et utilisées dans la résolution du système des équations d'état du modèle proposé.

Dans le cinquième chapitre, le calcul basé sur la résolution des équations d'états électromagnétiques par une méthode numérique est réalisé. Les résultats sont exploités et interprétés en s'intéressant, plus particulièrement, à l'évolution des courants rotoriques en régime dynamique de la machine. Par la suite, une comparaison est établie entre les résultats obtenus avec le logiciel Matlab-Simuling du modèle à quatre enroulements et ceux du modèle multi-enroulement.

CHAPITRE I

Modélisation de Park-Equivalence multi-enroulement d'une MAS à cage

I.1-Introduction

Le principe de fonctionnement d'une machine asynchrone est basé sur l'interaction électromagnétique du champ tournant, créée par le courant triphasé fourni à l'enroulement statorique par le réseau, et des courants induits dans l'enroulement rotorique lorsque les conducteurs du rotor sont coupés par le champ tournant [29]. Cette interaction électromagnétique du stator et du rotor de la machine n'est possible que lorsque la vitesse du champ tournant diffère de celle du rotor. De cette façon, nous pouvons dire que, le fonctionnement d'une machine asynchrone est comparable à celui d'un transformateur dont l'enroulement secondaire est tournant.

I.2-Modèles électromagnétiques de la machine asynchrone en grandeurs de phases

La machine asynchrone est constituée par deux circuits couplés électromagnétiquement. Elle est représentée par un schéma équivalent vu du stator, analogue à celui d'un transformateur [5].

I.2.1-Schéma d'un moteur asynchrone triphasé

Nous pouvons représenter la machine asynchrone schématiquement par les trois enroulements de phase du stator a_s, b_s, c_s , ainsi, que les trois enroulements du rotor a_r, b_r, c_r (figure I.1).

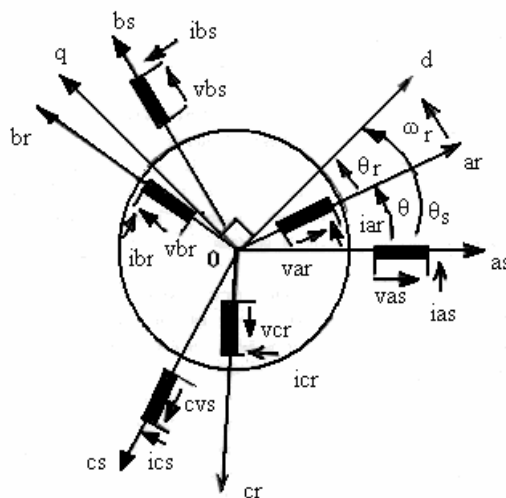


Figure I.1 : Schéma d'une machine asynchrone triphasée au stator et au rotor

Les deux axes O_d et O_q , sont perpendiculaires et serviront à transformer les équations de la machine. Leurs positions peuvent être quelconques vue l'isotropie du stator et du rotor.

$$O_{as}, O_d = \theta_s \quad O_{ar}, O_d = \theta_r \quad O_{as}, O_{ar} = \theta_s - \theta_r = \theta$$

L'angle θ caractérise la position angulaire du rotor par rapport au stator, d'où la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt}$$

I.2.2-Equations électriques de la machine asynchrone

Les équations des tensions régissant le fonctionnement d'une machine asynchrone s'écrivent sous forme matricielle :

$$[U_s] = [R_s] [I_s] + \frac{d}{dt} [\Phi_s] \quad (I.1)$$

$$[U_r] = [R_r] [I_r] + \frac{d}{dt} [\Phi_r] \quad (I.2)$$

Avec :

$$[U_s] = \begin{bmatrix} U_{as} \\ U_{bs} \\ U_{cs} \end{bmatrix}; [I_s] = \begin{bmatrix} I_{as} \\ I_{bs} \\ I_{cs} \end{bmatrix}; [\Phi_s] = \begin{bmatrix} \Phi_{as} \\ \Phi_{bs} \\ \Phi_{cs} \end{bmatrix}; [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

$$[U_r] = \begin{bmatrix} U_{ar} \\ U_{br} \\ U_{cr} \end{bmatrix}; [I_r] = \begin{bmatrix} I_{ar} \\ I_{br} \\ I_{cr} \end{bmatrix}; [\Phi_r] = \begin{bmatrix} \Phi_{ar} \\ \Phi_{br} \\ \Phi_{cr} \end{bmatrix}; [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

$[U_s], [U_r]$: vecteurs des tensions statoriques et rotoriques,

$[I_s], [I_r]$: vecteurs des courants statoriques et rotoriques,

$[\Phi_s], [\Phi_r]$: vecteurs des flux statoriques et rotoriques,

$[R_s], [R_r]$: matrices des résistances statoriques et rotoriques.

Les flux totalisés Φ_s et Φ_r des phases statoriques et rotoriques s'expriment sous forme :

$$[\Phi_s] = [L_s] [I_s] + [M_{sr}] [I_r] \quad (I.5)$$

$$[\Phi_r] = [L_r] [I_r] + [M_{sr}] [I_s] \quad (I.6)$$

L'isotropie et la symétrie de la machine font que les inductances propres des phases statoriques sont égales et de même pour celles du rotor.

Les matrices $[L_s]$ et $[L_r]$ deviennent :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [L_r] = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

L_s, L_r : inductances propres statoriques et rotoriques,

M_s : inductance mutuelle entre phases statoriques,

M_r : inductance mutuelle entre phases rotoriques.

La matrice des inductances mutuelles entre les phases du stator et du rotor dépend de la position angulaire θ entre l'axe du stator et celui du rotor :

$$[M_{sr}] = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos\theta & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

M_{sr} : Maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et la phase correspondante du rotor (leurs axes magnétiques sont, alors, alignés).

En introduisant les équations (I.5) et (I.6) dans (I.1) et (I.2), nous obtenons le système d'équations électriques nécessaire à l'étude du fonctionnement de la machine à tous les régimes :

$$[U_s] = [R_s] [I_s] + \frac{d}{dt} \{ [L_s] [I_s] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{sr}] [I_r] \} \quad (I.9)$$

$$[U_r] = [R_r] [I_r] + \frac{d}{dt} \{ [L_r] [I_r] \} + \frac{d}{dt} \{ [M_{rs}] [I_s] \} \quad (I.10)$$

I.2.3-Expression du couple

L'expression du couple électromagnétique est obtenue à partir de la dérivée de la coénergie magnétique par rapport à l'angle θ :

$$C_{em} = \frac{\partial [W_{co}]}{\partial \theta} = [I_s]^T \frac{\partial [M_{sr} \theta]}{\partial \theta} [I_r] \quad (I.11)$$

I.2.4-Equation du mouvement

L'équation d'équilibre des couples s'écrit :

$$C_{em} = C_r \quad (I.12)$$

Si, pour une raison quelconque, cette égalité entre les couples est perturbée ($C_{em} \neq C_r$), dans ce cas, l'équation d'équilibre des couples est réalisée grâce au couple dynamique :

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = C_{em} - C_r \quad (I.13)$$

C_r : couple résistant extérieur,

J : moment d'inertie des parties tournantes,

Ω_m : vitesse angulaire mécanique du rotor ($\Omega_m = P\omega$),

ω : pulsation mécanique,

P : nombre de paires de pôles.

I.2.5-Régime permanent de la machine asynchrone

En régime permanent, l'enroulement statorique est soumis à un système de tensions symétriques, l'enroulement rotorique est court-circuité et tourne à la vitesse de $\Omega_m = \text{cte}$. Les équations (I.9) et (I.10) deviennent plus simples :

$$[\overline{U_s}] = [R_s] [\overline{I_s}] + j [\mathbf{L}_s] \omega_s [\overline{I_s}] + j M_s \omega_s [\overline{I_r}] \quad (I.14)$$

$$[0] = [R_r] [\overline{I_r}] + j [\mathbf{L}_r] \omega_r [\overline{I_r}] + j M_r \omega_r [\overline{I_s}] \quad (I.15)$$

$\mathbf{L}_s : L_s - M_s$: inductance cyclique statorique par phase,

$\mathbf{L}_r : L_r - M_r$: inductance cyclique rotorique par phase.

L'expression de l'équation mécanique est la même que l'équation (I.12).

1.2.6-Modèle de la machine dans le système d'axes d, q

La matrice (I.7) des inductances mutuelles étant à éléments non constants, les coefficients des équations (I.8) et (I.9) sont variables et la résolution analytique de ce système d'équations se heurte à des difficultés insurmontables, particulièrement, lors de l'étude des phénomènes transitoires.

L'utilisation de la transformation de Park [16] permet de contourner, dans un premier temps, ce problème et d'obtenir un système d'équations à coefficients constants ce qui facilite sa résolution.

1.2.7-Transformation de Park

La transformation de Park consiste à appliquer aux courants, tensions et flux, un changement de variable faisant intervenir l'angle entre l'axe des enroulements et les axes d et q. Ceci peut être interprété comme la substitution, aux enroulements réels, d'enroulements fictifs d_s, q_s, d_r, q_r dont les axes magnétiques sont liés aux axes d, q conformément à la figure I.2.

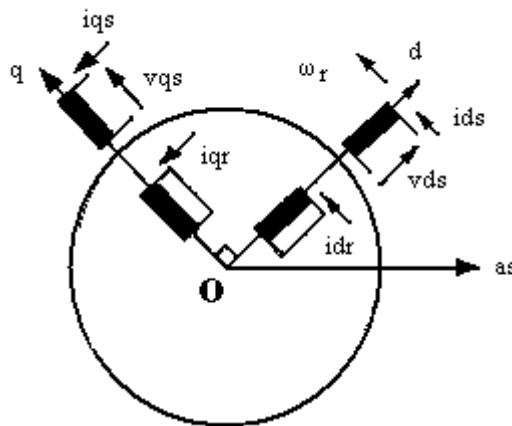


Figure I.2 : Modèle de la machine après transformation de Park

Nous transformons, ainsi, l'enroulement triphasé a, b, c en trois enroulements orthogonaux d, q, O dénommés :

- Axe direct (indice d),
- Axe transversal (indice q),
- Axe homopolaire (indice O).

Dans le cas d'un système de courant, la transformation s'écrit :

$$[I_{dqo}] = [A] [I_s] \quad (I.16)$$

$$[I_s] = [A]^{-1} [I_{dqo}] \quad (I.17)$$

Celle des tensions :

$$[U_{dqo}] = [A] [U_s] \quad (I.18)$$

$$[U_s] = [A]^{-1} [U_{dqo}] \quad (I.19)$$

La transformation des flux :

$$[\Phi_{dqo}] = [A] [\Phi_s] \quad (I.20)$$

$$[\Phi_s] = [A]^{-1} [\Phi_{dqo}] \quad (I.21)$$

Avec $[A]$ la matrice de transformation modifiée qui est orthogonale et s'écrit :

$$[A] = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (I.22)$$

et

$$[A]^{-1} = [A]^T = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & -\sin(\theta + 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (I.23)$$

$\theta = \theta_s - \theta_r$ l'angle entre l'axe de la phase a_s et la phase a_r ,

$$[I_{dq0}] = [I_d, I_q, I_0]^T$$

$$[U_{dq0}] = [U_d, U_q, U_0]^T$$

I.3-Choix du référentiel

L'étude analytique du moteur asynchrone à l'aide des composantes de Park nécessite l'utilisation d'un référentiel qui permet de simplifier au maximum les expressions analytiques. Trois types de référentiels sont intéressants. En pratique, le choix se fait en fonction du problème étudié.

I.3.1-Référentiel immobile par rapport au stator

Ce référentiel est souvent nécessaire lors des études des variations importantes de la vitesse de rotation. Dans ces conditions, nous avons :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = -\omega$$

I.3.2-Référentiel immobile par rapport au rotor

Ce référentiel est intéressant dans les problèmes de régimes transitoires où la vitesse de rotation est considérée comme constante. Nous avons, donc :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = 0$$

I.3.3-Référentiel immobile par rapport au champ tournant

C'est le seul référentiel qui n'introduit pas de simplification dans les équations de la machine. Il est utilisé lorsque la fréquence d'alimentation est constante et à fréquence variable lors des petites perturbations autour d'un régime donné. Ce type de référentiel est caractérisé par les relations :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_s - \omega = S \omega_s$$

I.4-Application de la transformation à la machine asynchrone

Dans le cas où le neutre de la machine n'est pas relié, les composantes homopolaires O sont nulles. Après transformation et arrangement des équations (I.18) et (I.19), nous obtenons un système d'équations non linéaires d'une machine biphasée dont les coefficients sont indépendants de l'angle θ . Dans le référentiel tournant au synchronisme ($\theta_s = \omega_s t$; $\theta_r = S \omega_s t$), il s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + d/dt L_s & -\omega_s L_s & d/dt M & -\omega_s M \\ \omega_s L_s & R_s + d/dt L_s & \omega_s M & d/dt M \\ d/dt M & -M S \omega_s & R_r + d/dt L_r & -L_r S \omega_s \\ M S \omega_s & d/dt M & L_r S \omega_s & R_r + d/dt L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} \quad (I.24)$$

S : glissement,

V_{ds} : composante de la tension suivant l'axe d,

V_{qs} : composante de la tension suivant l'axe q,

I_{ds} : composante du courant statorique suivant l'axe d,

I_{qs} : composante du courant statorique suivant l'axe q,

I_{dr} : composante du courant rotorique suivant l'axe d,

I_{qr} : composante du courant rotorique suivant l'axe q.

En effectuant les changements de variables dans l'expression (I.11), le couple devient :

$$C_{em} = P M (I_{qs} I_{dr} - I_{ds} I_{qr}) \quad (I.25)$$

I.4.1-Equation de Park en régime permanent

En régime permanent, les courants statoriques s'écrivent :

$$i_a = \sqrt{2} I_s \cos (\omega_s t + \varphi),$$

$$i_b = \sqrt{2} I_s \cos (\omega_s t + \varphi - 2\pi/3),$$

$$i_c = \sqrt{2} I_s \cos (\omega_s t + \varphi + 2\pi/3).$$

En appliquant la transformation de Park dans le référentiel lié au champ tournant, nous avons :

$$i_{ds} = \sqrt{2} I_s \cos \alpha = \text{cte},$$

$$i_{qs} = \sqrt{2} I_s \sin \alpha = \text{cte},$$

$$i_{os} = 0.$$

où α représente l'angle de phase à l'origine entre le courant et la tension.

Il en résulte que les flux totalisés sont constants et, par conséquent, les équations de la machine asynchrone, en régime permanent, ne contiennent pas de tensions induites de transformations et le système (I.24) devient :

$$\begin{aligned} V_{ds} &= R_s i_{ds} - \omega_s L_s i_{qs} - \omega_s M i_{qr} \\ V_{qs} &= R_s i_{qs} + \omega_s L_s i_{ds} + \omega_s M i_{dr} \\ 0 &= R_r i_{dr} + S \omega_s L_r i_{qr} - S \omega_s M i_{qs} \\ 0 &= R_r i_{qr} - S \omega_s L_r i_{dr} + S \omega_s M i_{ds} \end{aligned} \tag{I.26}$$

I.5-Schémas et modèles de la machine asynchrone

La littérature technique traitant des moteurs asynchrones propose une multitude de schémas équivalents. Les auteurs n'utilisent pas les mêmes schémas, mais, tous calculent une impédance vue du stator [5].

La représentation électrique la plus connue de la machine asynchrone est, sans nul doute, le schéma équivalent de type "transformateur", qui décrit, d'ailleurs, de façon satisfaisante, le comportement de la machine en régime permanent sinusoïdal.

I.6-Modèle triphasé /N – Phase

Le moteur asynchrone à cage est représenté par les trois phases du stator, quant à la cage pour la constitution des phases rotoriques, est de considérer l'association d'une barre avec celle π électriquement opposée, via l'anneau de court-circuit. Si m est le nombre de barres, et P le nombre de paires de pôles, nous aurons, donc, $m/2P$ phases rotoriques [34].

En regroupant les équations (I.1) et (I.2), nous aurons l'équation matricielle de la machine :

$$[V] = [R] [I] + \frac{d}{dt} [\Phi] \quad (I.27)$$

En introduisant des vecteurs tension, courant, flux et la matrice résistance, nous aurons :

$$[V] = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ \dots \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{m/2P} \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & r_b & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & r_c & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & \vdots & [R_r] \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

La matrice $[R_r]$ est une matrice pleine où interviennent, pour chaque phase, les résistances des 2 P-barres (le calcul détaillé est donné au chapitre IV. 3), ainsi que celles de l'anneau de court-circuit. Le vecteur flux peut s'écrire en fonction des inductances propres et mutuelles $L_{i,j}$ et $M_{i,j}$.

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \\ \dots \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{m/2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} & \vdots & M_{a1} & \vdots & \vdots & M_{a \frac{m}{2P}} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} & \vdots & M_{b1} & \vdots & \vdots & M_{b \frac{m}{2P}} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c & \vdots & M_{c1} & \vdots & \vdots & M_{c \frac{m}{2P}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{1a} & M_{1b} & M_{1c} & \vdots & L_1 & & & M_{1 \frac{m}{2P}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{\frac{m}{2P}a} & M_{\frac{m}{2P}b} & M_{\frac{m}{2P}c} & \vdots & M_{\frac{m}{2P}1} & \dots & \dots & L_{\frac{m}{2P} \frac{m}{2P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ \dots \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{m/2P} \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

Un terme $M_{i,j}$ pouvant s'écrire, au sens du 1^{er} harmonique, $M_{i,j} = M \cos p\theta$.

où: θ est l'angle mécanique entre les axes des phases i et j ; nous déduisons, alors, les termes de la matrice inductance (figure I.3).

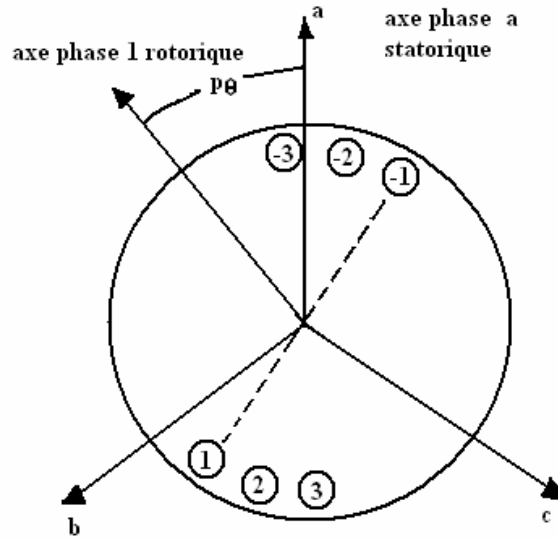


Figure I.3 : Distribution des phases de la machine asynchrone

Pour la machine asynchrone à cage nous avons les relations suivantes :

*Inductance propre d'une phase statorique :

$$L_a = L_b = L_c = L_n \quad (I.30)$$

*Inductances mutuelles entre deux phases statoriques (fuites négligées) :

$$M_{ab} = M_{ac} = M_{bc} = -\frac{1}{2} L_n. \quad (I.31)$$

*Inductance propre d'une phase rotorique :

$$L_1 = L_2 = \dots = L_{\frac{m}{2P}} = L_k \quad (I.32)$$

*Inductances mutuelles entre deux phases rotoriques :

$$\begin{aligned} M_{12} &= L_k \cos \frac{2\pi}{m} P = M_{n(n+1)} \\ &\vdots \\ M_{1\frac{m}{2P}} &= L_k \cos \left(\frac{m}{2P} - 1 \right) \frac{2\pi}{m} P \end{aligned} \quad (I.33)$$

*Inductances mutuelles entre une phase statorique et une phase rotorique :

$$\begin{aligned}
M_{a1} &= M \cos P\theta \\
M_{b1} &= M \cos (P\theta - \frac{2\pi}{3}) \\
M_{c1} &= M \cos (P\theta + \frac{2\pi}{3}) \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{I.34}$$

$$\begin{aligned}
M_{a\frac{m}{2P}} &= M \cos P (\theta + (\frac{m}{2P} - 1) \frac{2\pi}{m}) \\
M_{b\frac{m}{2P}} &= M \cos p (\theta - \frac{2\pi}{3P} + (\frac{m}{2P} - 1) \frac{2\pi}{m}) \\
M_{c\frac{m}{2P}} &= M \cos p (\theta + \frac{2\pi}{3P} + (\frac{m}{2P} - 1) \frac{2\pi}{m})
\end{aligned}$$

θ : représente l'angle mécanique entre l'axe de la phase a statorique et 1 rotorique,

M : valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase statorique et une phase rotorique.

I.6.1-Machine diphasée/diphasée équivalente

L'équation matricielle (I.27), de dimension élevée, n'est guère adaptée à l'exploitation : que ce soit pour une simulation de la machine en régime quelconque ou pour élaborer une loi de commande, il est préférable de se ramener à un système d'ordre inférieur, en l'occurrence, à un système de quatre équations différentielles, à coefficients constants.

En effet, ce nouveau modèle d'écriture simplifiée s'implante beaucoup plus facilement dans un programme informatique de simulation et permet, surtout, une transformation dans un repère tournant (Park).

La transformation normée de Concordia T_{32} , permettant le passage d'un système triphasé à un système diphasé est bien connue. De la même façon, nous pouvons élaborer une matrice $T_{\frac{m}{2P},2}$ [16, 29], qui assurerait la transformation d'un système $\frac{m}{2P}$ phase vers un système diphasé.

$$T_{\frac{m}{2P},2} = \sqrt{\frac{4P}{m}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \frac{2\pi}{m} P & \sin \frac{2\pi}{m} P \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{m}{2P-1}) \frac{2\pi}{m} P & \sin(\frac{m}{2P-1}) \frac{2\pi}{m} P \end{vmatrix} \quad (I.35)$$

Avec : $(T_{\frac{m}{2P},2})^t T_{\frac{m}{2P},2} = I_2$ (matrice identité)

Nous définissons les grandeurs du nouveau système $\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \end{bmatrix}$ à partir de celles des systèmes triphasés et $\frac{m}{2P}$ - phasés par :

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \end{bmatrix}_r = (T_{\frac{m}{2P},2})^t \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{m/2P} \end{bmatrix} \quad (I.36)$$

où :

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \end{bmatrix}_s = (T_{32})^t \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} \quad (I.37)$$

La figure I.4 illustre cette transformation.

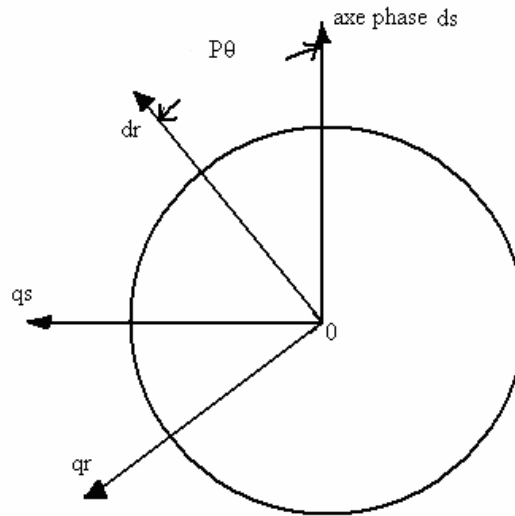


Figure I.4 : Passage du modèle triphasé/ $(m/2P)$ au modèle diphasé/diphasé

L'équation (I.27) peut donc s'écrire, en supposant les résistances des phases statoriques toutes égales à r_s :

$$T_{32} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix}_S = r_s T_{32} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_S + \frac{d}{dt} \left[T_{32} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_S \right] \quad (I.38)$$

$$0 = [R_r] T_{\frac{m}{2P},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_R + \frac{d}{dt} \left[T_{\frac{m}{2P},2} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_R \right] \quad (I.39)$$

En multipliant chaque membre par $(T_{32})^t$ et $T_{\frac{m}{2P},2}^t$ nous obtenons le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix}_S = r_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_S + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_S \quad (I.40)$$

$$0 = T_{\frac{m}{2P},2}^t [R_r] T_{\frac{m}{2P},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_R + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_R \quad (I.41)$$

où r_r est la résistance équivalente d'une phase rotorique, son expression est donnée au paragraphe IV.3. Il reste, maintenant, à expliciter les vecteurs flux en fonction des vecteurs courants. Nous reprenons, pour cela, l'équation matricielle (I.27) où nous introduisons les matrices de transformations :

$$T_{32} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_S = L_n \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} T_{32} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_S + [M_{sr}(\theta)] T_{\frac{m}{2P},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_R \quad (I.42)$$

$$T_{\frac{m}{2P},2} \begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_R = L_n \begin{bmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{m} P & \dots & \dots & \cos(\frac{m}{2P}-1) \frac{2\pi}{m} P \\ \cos \frac{2\pi}{m} P & 1 & \dots & \dots & \cos(\frac{m}{2P}-2) \frac{2\pi}{m} P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{m}{2P}-1) \frac{2\pi}{m} P & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} *$$

$$* T_{\frac{m}{2P}} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_R + [M_{rs}(\theta)] T_{32} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_S \quad (I.43)$$

En multipliant les deux membres des équations par T_{32}^t et $T_{\frac{m}{2p},2}^t$

respectivement, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_s = \frac{3}{2} L_n \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s + T_{32}^t [M_{sr}(\theta)] T_{\frac{m}{2p},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r \quad (I.44)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_r = L_n (T_{\frac{m}{2p},2})^t [L_r] T_{\frac{m}{2p},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r + (T_{\frac{m}{2p},2})^t [M_{rs}(\theta)] T_{32} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s \quad (I.45)$$

Finalement, nous arrivons à :

$$\begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_s = L_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s + M_{sr} p(p\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r \quad (I.46)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_d \\ \Phi_q \end{bmatrix}_r = L_r \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r + M_{rs} p(p\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s \quad (I.47)$$

Avec :

Inductance cyclique statorique :

$$L_s = \frac{3}{2} L_n$$

Inductance cyclique rotorique :

$$L_r = \frac{m}{4p} L_k$$

Inductance mutuelle cyclique stator/rotor :

$$M_{rs} = M_{sr} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{4p}} M$$

Et où $P(p\theta)$ représente la matrice de rotation de Park.

$$P(p\theta) = \begin{pmatrix} \cos p\theta & -\sin p\theta \\ \sin p\theta & \cos p\theta \end{pmatrix}$$

où $p\theta$ étant l'angle électrique de la figure (I.4).

Le système d'équations en tension est, donc, tout à fait similaire à celui obtenu pour une machine à rotor bobiné :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix}_s = r_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s + M_{sr} \frac{d}{dt} \left[P(p\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r \right] \quad (I.48)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r_r \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r + L_r \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r + M_{sr} \frac{d}{dt} \left[P(-p\theta) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_s \right] \quad (I.49)$$

De même, le calcul du couple électromagnétique, en tenant compte de l'indépendance de $[L_s]$ et $[L_r]$ de l'angle θ (entre l'axe de la phase a statorique et l'axe rotorique) :

$$C_{em} = [i_a \ i_b \ i_c]^T \left[\frac{d}{d\theta} M_{sr}(\theta) \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ i_{\frac{m}{2p}} \end{bmatrix} \quad (I.50)$$

Soit encore à :

$$C_{em} = [i_d \ i_q]_s T_{32}^t \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{4p}} M T_{32} p P(p\theta + \frac{\pi}{2}) T_{\frac{m}{2p},2}^t T_{\frac{m}{2p},2} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r \quad (I.51)$$

Compte tenu des propriétés des matrices de transformation, il vient :

$$C_{em} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{4p}} M p [i_d \ i_q]_s P(p\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}_r \quad (I.52)$$

I.7-Position du problème

Pour une bonne connaissance de la machine asynchrone à cage sur les différents régimes, il est nécessaire de disposer d'un modèle précis de la machine asynchrone. En effet, les simulations des différentes méthodes montrent que les

résultats sont très sensibles aux erreurs de modélisation [26-31]. Les schémas simplifiés sont loin d'être une image de ce qui se passe réellement dans la machine.

I.8-Conclusion

Dans ce chapitre, il apparaît que le choix d'un modèle de modélisation pour le moteur asynchrone présente plusieurs degrés de liberté. Chaque auteur choisit un schéma de façon à réduire le nombre de paramètres [5]. Ainsi, le modèle établi reste, souvent, limité à une application donnée. La machine asynchrone étant non accessible au rotor, le choix d'une hypothèse supplémentaire est, souvent, arbitraire. Ces différentes analyses nous amènent à poser deux questions :

- Est-ce que les modèles simplifiés sont suffisants pour cerner l'ensemble des phénomènes relatifs à la machine asynchrone à cage afin de la connaître au mieux?
- Est-il nécessaire de disposer d'un modèle précis de la machine asynchrone à cage et quels sont les éléments essentiels de ce modèle ?

Aussi, l'objet de ce chapitre était la mise en place d'une équivalence du modèle électrique de la machine à cage à partir des grandeurs intervenant effectivement au rotor et le modèle diphasé de Park basé sur les transformations d'axes. Habituellement, les machines asynchrones sont "vues du stator" et les paramètres électriques déterminés par des essais expérimentaux [29-31].

Dans ce qui suit, nous allons aborder la modélisation analytique, afin de cerner la machine asynchrone sur tous les plans (modèle classique, calcul analytique, calcul numérique).

CHAPITRE II

Modélisation analytique de la machine asynchrone à cage

II.1-Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons, dans un premier temps, le principe du modèle multi-enroulement de la machine asynchrone à cage à partir d'une approche analytique et, à l'aide de quelques hypothèses simplificatrices, nous établirons les expressions des inductances, basées sur la résolution de l'équation du champ électromagnétique dans l'entrefer en terme de potentiel vecteur avec le référentiel lié au rotor.

Par la suite, les équations des tensions de la machine asynchrone, vue des bornes, en grandeurs de phase sont présentées et définies, avec l'emploi des expressions analytiques classiques des inductances [11].

Nous montrons que l'application de la transformation de Park, dans un référentiel lié au rotor, amène à un système d'équations différentielles à coefficients constants où la rotation est prise en compte par l'addition d'un terme supplémentaire.

Ensuite, les bagues de fermetures de la cage sont prises en compte [34-36] en écrivant les équations des tensions rotoriques en fonction des mailles formées par les barres de la cage et les anneaux de fermeture, procédé qui s'avère fort utile pour les études des phénomènes qui y ont lieu, en particulier, pour le diagnostic.

Nous établissons, enfin, les caractéristiques de la structure électromagnétique de la machine, qui peuvent amener à la réduction du domaine d'étude, comme pour les cas de périodicité et anti-périodicité, encore que pour des machines spéciales le travailler avec la machine toute entière devient indispensable.

En dernier, les équations électriques sont ajoutées à l'équation mécanique. Ainsi, le système d'équations différentielles qui apporte toutes les informations possibles sur le fonctionnement des machines asynchrones à cage est présenté.

II.2-Hypothèses, domaine d'étude, conventions

II.2.1-Hypothèses

Des hypothèses simplificatrices sont posées lors de l'élaboration du modèle analytique :

- les courants de Foucault dans les parties massives sont négligés,
- l'effet de peau dans les barres (profondeur de la pénétration du champ électromagnétique en fonction de la fréquence des courants) est négligé,
- l'entrefer est supposé constant,
- le circuit magnétique est non saturé et à perméabilité constante,
- les couplages capacitifs entre les enroulements sont négligés,
- effet des encoches négligé,
- distribution spatiale sinusoïdale des forces magnétomotrices des entrefers.

II.2.2-Domaine d'étude

Le domaine minimal d'étude qui permet la représentation d'une machine asynchrone à cage peut être, selon les cas :

- anti-périodicité : π radians électriques,
- périodicité : 2π radians électriques,
- général : 2π radians mécaniques.

La prise en compte des caractéristiques de (anti) périodicité de la structure électromagnétique permet, dans la plupart des cas, la réduction du domaine d'étude.

Néanmoins, pour des machines particulières avec bobinages à pas fractionnaire et /ou cages spéciales, la modélisation sur 2π radians mécaniques peut être indispensable [17].

II.2.3-Conventions

Tout au long de ce mémoire les conventions utilisées sont des conventions récepteur.

II.3-Approche analytique par calcul de champs du modèle multi-enroulement

Soit une machine asynchrone à cage, dont le stator comporte trois phases déphasées de $2\pi/3$ radians électriques, notées S_1, S_2, S_3 . Le rotor est constitué par une cage dite d'écureuil avec N barres disposées – régulièrement ou non – tout le long de son périmètre.

Si nous supposons que cette structure électromagnétique est invariante selon la troisième dimension, nous pouvons envisager une résolution en deux dimensions (2 D) des équations du champ électromagnétique.

Tout d'abord, le stator triphasé peut être remplacé par deux enroulements équivalents d'axes d , q dans un référentiel lié au rotor. De plus, chaque barre du rotor est considérée comme un enroulement propre dont le retour est constitué d'un conducteur de résistance nulle situé dans une zone où le potentiel vecteur est nul (à l'infini, par exemple). Le diagramme correspondant est présenté par la figure II.1.

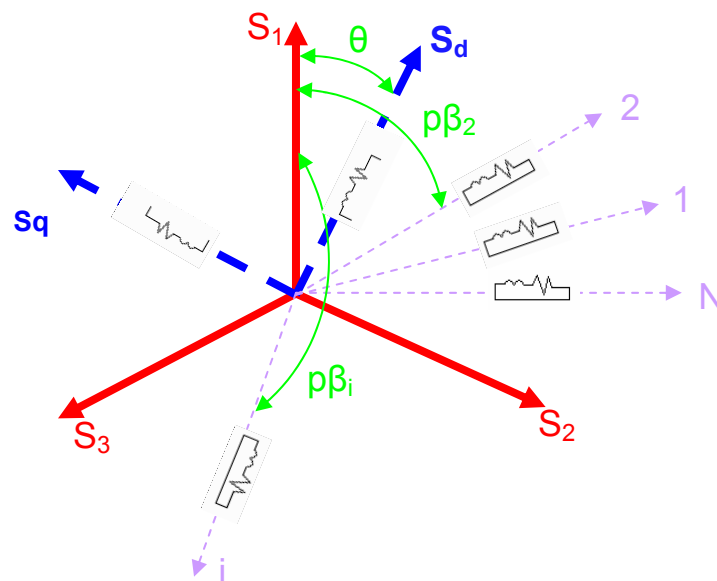


Figure II.1 : Diagramme représentatif de la machine à N enroulements

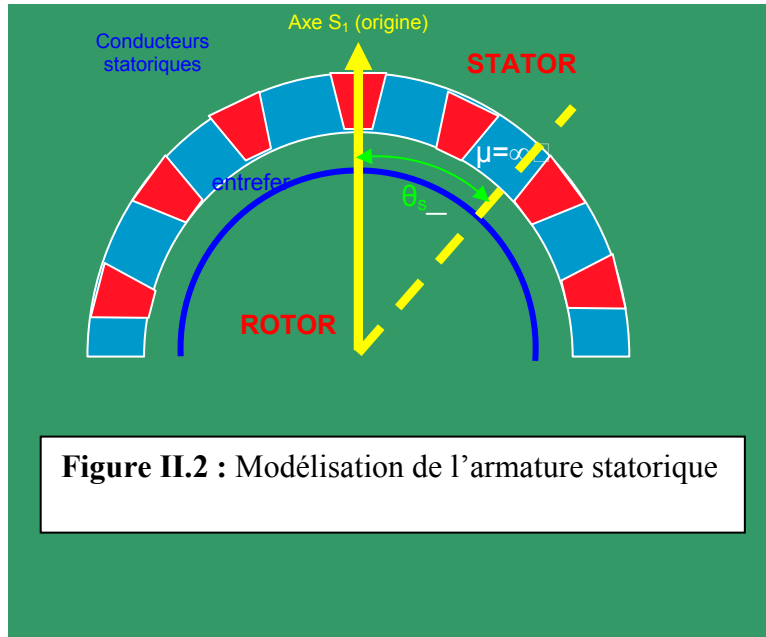
II.3.1-Calcul de l'équation du champ électromagnétique dans l'entrefer en terme potentiel vecteur, dans un référentiel lié au rotor.

Le principe de mise en équation de la machine asynchrone consiste à travailler en terme de potentiel vecteur (annexe 1) en résolvant directement les équations du champ électromagnétique dans l'entrefer. Cette méthode est basée sur la résolution analytique de l'équation du champ dans l'entrefer de la machine [11, 41].

Ces équations sont, résolues dans un référentiel lié au rotor afin d'introduire plus aisément, les caractéristiques de la fermeture des conducteurs de la cage rotorique.

II.3.1.1-Modélisation de l'armature statorique

Les conducteurs du stator sont supposés placés à la surface d'une zone de perméabilité infinie (figure II.2).



La densité de répartition des conducteurs est sinusoïdale telle que montre la figure II.3. Les conducteurs d'une phase peuvent, alors, être représentés par une densité superficielle de conducteurs qui peut s'écrire, si l'axe du bobinage de la phase 1 est choisi comme origine, sous la forme :

$$C_n(\theta_s) = \sum_{h=1}^{\infty} d_h \sin [hP\theta_s - h(n-1)2\pi/3] \quad (\text{II.1})$$

où P , h et n représentent, respectivement, le nombre de paires de pôles, le rang de l'harmonique et le numéro de la phase considérée.

Avec $n = 1, 2, 3$.

Les coefficients d_h caractérisent la série de Fourier lors de la répartition des conducteurs d'une phase.

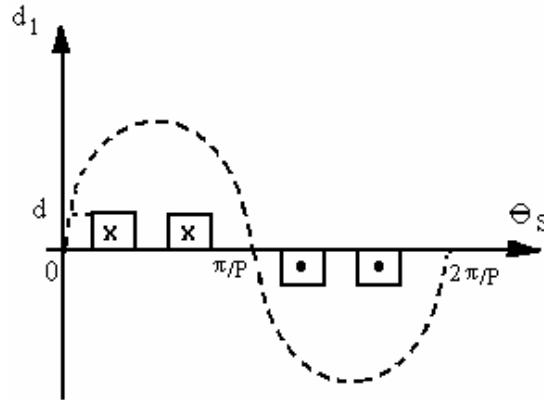


Figure II.3 : Modélisation d'une phase.
Représentation de la densité de conducteurs

Dans la figure II.4, est représentée, en détail, le référentiel adopté dans un premier temps, pour l'expression (II.9), où θ_s est l'angle mécanique défini par la position d'un point de l'entrefer par rapport à un repère fixé sur l'axe du bobinage S_1 du stator.

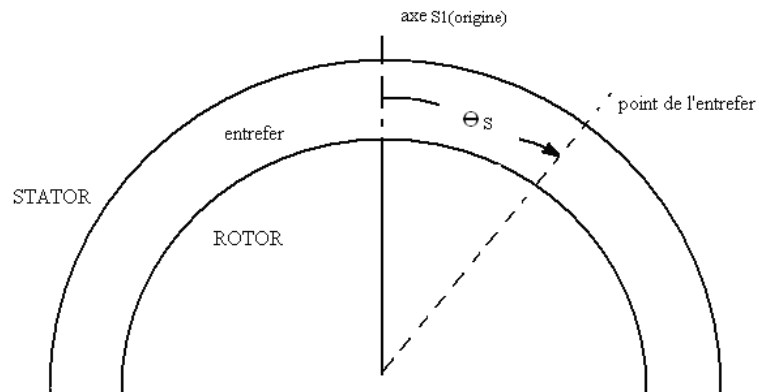


Figure II.4 : Définition de θ_s

Au terme du fondamental (h=1), la répartition des conducteurs au stator s'écrit :

$$C_n(\theta_s) = d_1 \sin (P\theta_s - (n-1) 2\pi/3) \quad (\text{II.2})$$

La densité de courant circulant à la surface du stator est de la forme :

$$K_s(\theta_s, t) = \sum_{n=1}^3 C_n(\theta_s) I_{sn}(t) \quad (\text{II.3})$$

où $I_{sn}(t)$ représente le courant à l'instant t dans la phase n du stator.

II.3.1.2-Transformation des grandeurs statoriques dans un repère du rotor

Nous pouvons représenté la densité superficielle des conducteurs d'une phase du stator dans un système lié au rotor, en remplaçant θ_s de l'expression (II.1) par :

$$\theta_s = \theta_r + \theta_0 + P\Omega t \quad (\text{II.4})$$

Cela nous conduit à :

$$C_n(\theta_r, t) = \sum_{h=1}^{\infty} d_h \sin [hP (\theta_r + \theta_0 + \Omega t) - h (n-1) 2\pi/3] \quad (\text{II.5})$$

La densité de courant circulant devient :

$$K_s(\theta_r, t) = \sum_{n=1}^3 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} d_h \sin [hP (\theta_r + \theta_0 + \Omega t) - h (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \right\} \quad (\text{II.6})$$

Au terme du fondamental (h =1), la densité (II.6) donne :

$$K_s(\theta_r, t) = \sum_{n=1}^3 d_1 \sin [P (\theta_r + \theta_0 + \Omega t) - (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \quad (\text{II.7})$$

D'où :

$$\begin{aligned} K_s(\theta_r, t) = & d_1 \sin (p\theta_r) \sum_{n=1}^3 \left\{ \cos [P (\theta_0 + \Omega t) - (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \right\} + \\ & d_1 \cos (P\theta_r) \sum_{n=1}^3 \left\{ \sin [P (\theta_0 + \Omega t) - (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

En posant :

$$I_{sd}(t) = + \sqrt{(2/3)} \sum_{n=1}^3 \{ \cos [P (\Omega t + \theta_0) - (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \} \quad (II.9)$$

$$I_{sq}(t) = - \sqrt{(2/3)} \sum_{n=1}^3 \{ \sin [P (\Omega t + \theta_0) - (n-1) 2\pi/3] I_{sn}(t) \} \quad (II.10)$$

D'après (II. 8), (II. 9) et (II.10), nous pouvons écrire :

$$K_s(\theta_r, t) = K_{sd}(\theta_r, t) + K_{sq}(\theta_r, t) \quad (II.11)$$

avec :

$$K_{sd}(\theta_r, t) = \sqrt{(2/3)} d_1 \sin (P\theta_r) I_{sd}(t) \quad (II.12)$$

$$K_{sq}(\theta_r, t) = - \sqrt{(2/3)} d_1 \cos (P\theta_r) I_{sq}(t) \quad (II.13)$$

La densité du courant circulant à la surface du stator peut, donc, apparaître dans un référentiel rotorique comme étant issue des courants $I_{sd}(t)$ et $I_{sq}(t)$ circulant dans deux bobinages en quadrature, fixés dans le référentiel rotorique. L'amplitude des densités des conducteurs associée à ces bobinages est égale à $\sqrt{(2/3)} d_1$, où d_1 est l'amplitude du fondamental de la densité des conducteurs d'une phase du stator.

L'axe direct du système d'axes d, q, ainsi défini, est, par convention, confondu avec l'origine du référentiel rotorique [43]. Par contre, sa position au niveau du rotor de la machine est à ce niveau arbitraire et définie par l'intermédiaire du terme θ_0 qui fixe la position du rotor à l'instant initial.

II.3.1.3-Champ créé par l'armature statorique

Pour une armature rotorique magnétiquement lisse (entrefer constant), le champ créé par l'armature statorique peut être calculé analytiquement [11].

Considérons le champ créé par le bobinage situé dans l'axe d. Il crée une densité de courant donnée par :

$$K_{sd}(\theta_r, t) = \sqrt{(2/3)} d_1 \sin (P\theta_r) I_{sd}(t) \quad (II.14)$$

Le potentiel vecteur 'As' qui lui est associé vérifie, dans l'entrefer, l'équation différentielle :

$$\delta^2 A_s / \delta r^2 + (1/r) \delta A_s / \delta r + (1/r^2) \delta^2 A_s / \delta \theta_r^2 = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\delta A_s / \delta r \Big|_{r=R-\epsilon} = 0 \quad (\text{Newmman}) \quad (\text{II.16})$$

$$\delta A_s / \delta r \Big|_{r=R} = \frac{\mu_0 K_{sd}(\theta_{sdt})}{r=R} \quad (\text{Derichelet}) \quad (\text{II.17})$$

où R est le rayon d'alésage de la machine et ϵ est l'épaisseur de l'entrefer.

A entrefer constant, le potentiel vecteur ne contient que les harmoniques en θ_r contenus dans les sources du champ, c'est-à-dire dans $K_{sd}(\theta_r, t)$. La solution de l'équation différentielle (II.18) est, donc, en tenant compte des conditions aux limites :

$$A_s(\theta_r, t) = I_{sd}(t) \sqrt{(2/3)} (\mu_0 d_l R/P) \sin(P\theta_r) \{ [r/(R-\epsilon)]^P + r/(R-\epsilon) \} / [R/(R-\epsilon)]^P + R/(R-\epsilon) \} \quad (\text{II.18})$$

II.3.1.4-Inductance cyclique du stator

Le flux à travers le bobinage d'axe d calculé sur la surface interne du stator est égal à :

$$\Phi_{sd} = H \int_0^{2\pi} A_s(R, \theta_r, t) [K_{sd}(\theta_r, t) / I_{sd}(t)] R d\theta_r \quad (\text{II.19})$$

Où H : longueur utile de la machine.

La résolution de l'expression (II.19) amène à :

$$\Phi_{sd} = I_{sd}(t) (3H/2) (\mu_0 \pi d_l^2 / P) R^2 \{ [(R/(R-\epsilon))]^P + R/(R-\epsilon) \} / [(R/(R-\epsilon))]^P - R/(R-\epsilon) \} \quad (\text{II.20})$$

Soit pour l'inductance cyclique du stator :

$$L_{sd}(t) = (3H/2) (\mu_0 \pi d_1^2 / P) R^2 \{ [(R/(R-\epsilon))]^P + R/(R-\epsilon) \}^P / [(R/(R-\epsilon))^P - R/(R-\epsilon)]^P \} \quad (II.21)$$

Dans l'axe q, nous obtenons la même inductance cyclique puisque l'entrefer est constant.

II.3.1.5-Mutuelle inductance du stator/rotor

Si nous considérons une barre b du rotor donnée sous la forme d'une densité de conducteurs $\tau_{rb}(\theta_r)$, le flux traversant le bobinage constitué de cette barre et de son conducteur retour est :

$$\Phi_{sbd} = H \int_0^{2\pi} A_s(R-\epsilon, \theta_r, t) \tau_{rb}(\theta_r) (R-\epsilon) d\theta_r \quad (II.22)$$

où cette fois-ci le flux est calculé sur la surface externe (R-ε) du rotor. La densité des conducteurs peut être écrite sous la forme :

$$\tau_{rb}(\theta_r) = \sum_{h=0}^{\infty} e_h \cos(h\theta_r - h\alpha_b) \quad (II.23)$$

où α_b est le décalage de l'axe de la barre b par rapport à l'origine du système de référence en θ_r .

Nous pouvons mettre $\tau_{rb}(\theta_r)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau_{rb}(\theta_r) = & e_0 + e_1 \cos(\theta_r - \alpha_b) + e_2 \cos(2\theta_r - 2\alpha_b) + \dots + \\ & + \dots + e_h \cos(h\theta_r - h\alpha_b) + \dots \end{aligned} \quad (II.24)$$

Le flux peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{sbd} = & H \int_0^{2\pi} I_{sd}(t) (\sqrt{3/2}) (\mu_0 d_1 R / P) \{ 2 / [(R/(R-\epsilon))^h \\ & - (R/(R-\epsilon))^{-h}] \} \sin(h\theta_r) \tau_{rb}(R-\epsilon) d\theta_r \end{aligned} \quad (II.25)$$

où seulement le terme dû à l'harmonique d'ordre h de la densité des conducteurs $\tau_{rb}(\theta_r)$ contribue au flux Φ_{sbd} , car l'intégration de 0 à 2π de tous les autres termes devient nulle, soit :

$$\Phi_{sbd} = I_{sd}(t) H \sqrt{3/2} (\mu_0 d_1 R/P) 2\pi e_h [(R-\epsilon)/(R/(R-\epsilon))]^h - (R/(R-\epsilon))^{-h} \sin(h\alpha_b) \quad (II.26)$$

Soit, pour la mutuelle inductance stator/rotor (pour l'axe d et la barre b) :

$$M_{sbd} = (\sqrt{3/2}) (\mu_0 \pi H/P) 2e_h d_1 \{R/(R-\epsilon) / [(R/(R-\epsilon))]^h + - (R/(R-\epsilon))^{-h}\} \sin(h\alpha_b) \quad (II.27)$$

Le flux créé par l'armature statorique restant confiné dans la machine, il n'apparaît pas dans les expressions précédentes de termes issus de la contribution du conducteur de retour (annexe 2) situé à l'infini.

Par une procédure identique, nous obtenons dans l'axe q :

$$M_{sbq} = -(\sqrt{3/2}) (\mu_0 \pi H/P) 2 d_1 e_h \{R/(R-\epsilon) / [(R/(R-\epsilon))]^h + - (R/(R-\epsilon))^{-h}\} \cos(h\alpha_b) \quad (II.28)$$

où M_{sbq} est la mutuelle inductance entre l'axe q du stator et la barre b rotor.

II.3.1.6-Champ créé par une barre du rotor

Le champ créé par une barre b du rotor de densité $\tau_{rb}(\theta_r)$, donnée par l'expression (II.23) et traversé par un courant $I_{rb}(t)$ vérifie l'équation :

$$\delta^2 A_r / \delta r^2 + (1/r) \delta A_r / \delta r + (1/r^2) \delta^2 A_r / \delta \theta_r^2 = 0 \quad (II.29)$$

avec comme conditions aux limites (Newmann, Derichelet) :

$$\delta A_r / \delta r \Big|_{r=R-\epsilon} = -\mu_0 K_{rb} \quad (II.30)$$

$$\left. \frac{\delta A_r}{\delta r} \right|_{r=R} = 0 \quad (\text{II.31})$$

Avec:

$$K_{rb}(\theta_r, t) = I_{rb}(t) \sum_{h=0}^{\infty} e_h \cos(h\theta_r - h\alpha_b) \quad (\text{II.32})$$

où K_{rb} est la densité de courant associée à la barre b du rotor.

La solution de l'équation (II.29), compte tenu des conditions aux limites, est :

$$A_r(r, \theta_r, t) = I_{rb}(t) \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \mu_0 e_h \cos((R-\epsilon)/h) \left[\left[\left(\frac{r}{R} \right)^h + \left(\frac{r}{R} \right)^{-h} \right] / \left[\left(\frac{R-\epsilon}{R} \right)^{-h} - \left(\frac{R-\epsilon}{R} \right)^h \right] \right] \right. \\ \left. * \cos(h\theta_r - h\alpha_b) - \mu_0 e_0 (R-\epsilon) \ln(r) \right\} \quad (\text{II.33})$$

$$e_0 = 1/(2\pi(R-\epsilon)) \quad (\text{II.34})$$

Le calcul du terme ' e_0 ' (de rang 0) est effectué dans l'annexe 3.

II.3.1.7-Inductance propre d'une barre du rotor et de son conducteur retour

Le flux propre dans le bobinage constitué de la barre considérée et du conducteur de retour placé à l'infini (où le potentiel vecteur est nul) est égal à :

$$\Phi_{rbb} = H \int_0^{2\pi} A_{rb}(R-\epsilon, \theta_r, t) \tau_{rb}(\theta_r) (R-\epsilon) d\theta_r + \Phi_{r0} \quad (\text{II.35})$$

où l'intégration est faite sur la surface du rotor et où le terme Φ_{r0} est la contribution du conducteur retour calculée dans l'annexe 3.

D'où :

$$\Phi_{rbb} = \pi H \mu_0 I_{rb}(t) (R-\epsilon)^2 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} (e_h^2/h) \left[\left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^h + \left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^{-h} \right] / \right. \\ \left. \left[\left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^{-h} - \left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^h \right] - 2e_0^2 \ln(R-\epsilon) \right\} + \Phi_{r0} \quad (\text{II.36})$$

Soit pour l'inductance propre :

$$L_{rbb} = \pi H \mu_0 (R-\epsilon)^2 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} (e_h^2/h) \left[\left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^h + \left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^{-h} \right] / \left[\left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^{-h} - \left(\frac{(R-\epsilon)}{R} \right)^h \right] \right. \\ \left. - 2e_0^2 \ln(R-\epsilon) \right\} + L_{r0} \quad (\text{II.37})$$

$$\text{où } L_{r0} = \Phi_{r0} / I_{rb} (t) \quad (\text{II.38})$$

II.3.1.8-Mutuelle inductance entre les barres du rotor

Le flux envoyé par l'enroulement constitué de la barre b et du conducteur de retour dans l'enroulement constitué d'une autre barre b' et du même conducteur de retour placé à l'infini est égal à :

$$\Phi_{rb b'} = H \int_0^{2\pi} A_{rb} (R-\varepsilon, \theta_r, t) \tau_{rb'} (\theta_r) (R-\varepsilon) d\theta_r + \Phi_{r0} \quad (\text{II.39})$$

Avec :

$$\tau_{rb'} (\theta_r) = \sum_{h=0}^{\infty} e'_h \cos (h \theta_r - h\alpha_{b'}) \quad (\text{II.40})$$

Le terme Φ_{r0} , comme précédemment, est issu du champ créé par le conducteur retour et calculé dans l'annexe 3.

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi_{rb b'} = \pi H \mu_0 I_{rb} (t) (R-\varepsilon)^2 \{ \sum_{h=1}^{\infty} (e_h e'_h / h) [((R-\varepsilon)/R)^h + ((R-\varepsilon)/R)^{-h}] / [((R-\varepsilon)/R)^{-h} - \\ ((R-\varepsilon)/R)^h] * \cos [h(\alpha_b - \alpha_{b'})] - 2e_0 e'_0 \ln (R-\varepsilon) \} + \Phi_{r0} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Soit pour la mutuelle inductance entre les barres b et b' :

$$\begin{aligned} L_{rb b'} = \pi H \mu_0 (R-\varepsilon)^2 \{ \sum_{h=1}^{\infty} (e_h e'_h / h) [((R-\varepsilon)/R)^h + ((R-\varepsilon)/R)^{-h}] / [((R-\varepsilon)/R)^{-h} - ((R-\varepsilon)/R)^h] \\ * \cos [h(\alpha_b - \alpha_{b'})] - 2e_0 e'_0 \ln (R-\varepsilon) \} + L_{r0} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

II.3.1.9-Matrice flux-courant

Les calculs précédents conduisent à l'obtention d'une matrice flux-courant de la forme standard [27-30].

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{sdq}] & [M_{srdq}] \\ [M_{rsdq}] & [L_r] \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$[M_{rsdq}] = [M_{srdq}]^T \quad (II.44)$$

La matrice flux-courant est composée, donc, des sous matrices :

$[L_{sdq}]$: Inductances d'axe d, q du stator, ordre 2x2,

$[L_r]$: Inductances du rotor, ordre NxN,

$[M_{srdq}]$: Mutuelles inductances stator/rotor, ordre 2xN,

$[M_{rsdq}]$: Mutuelles inductances rotor/stator, ordre Nx2.

Ces sous-matrices peuvent être explicitées sous la forme :

$$[L_{sdq}] = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{bmatrix} \quad (II.45)$$

$$[M_{srdq}] = \begin{bmatrix} M_{sd1} & M_{sd2} & \cdots & M_{sdj} & \cdots & M_{sdn} \\ M_{sq1} & M_{sq2} & \cdots & M_{sqj} & \cdots & M_{sqn} \end{bmatrix} \quad (II.46)$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_{r11} & L_{r12} & \cdots & L_{r1j} & \cdots & L_{r1N} \\ L_{r21} & L_{r22} & \cdots & L_{r2j} & \cdots & L_{r2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{ri1} & L_{ri2} & \cdots & L_{rij} & \cdots & L_{riN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{rN1} & L_{rN2} & \cdots & L_{rNj} & \cdots & L_{rNN} \end{bmatrix} \quad (II.47)$$

où : $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$

A partir des expressions analytiques des inductances, données par les expressions (II.33), (II.39), (II.40), (II.47) et (II.52), nous pouvons écrire :

$$L_{sd} = (3/2) L_s \quad (II.48)$$

$$L_{sq} = (3/2) L_s \quad (II.49)$$

$$M_{sdj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \sin(p\alpha_j) \quad (II.50)$$

$$M_{sqj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \cos(p\alpha_j) \quad (II.51)$$

$$L_{rij} = L_{ro} + L_r \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (II.52)$$

où L_s , L_{sr} , L_{ro} , L_r sont des constantes et $(p\alpha_i)$ est l'écart angulaire (en degrés électriques) entre le centre de la barre i et l'origine du système de référence en θ_r (figure II.5).

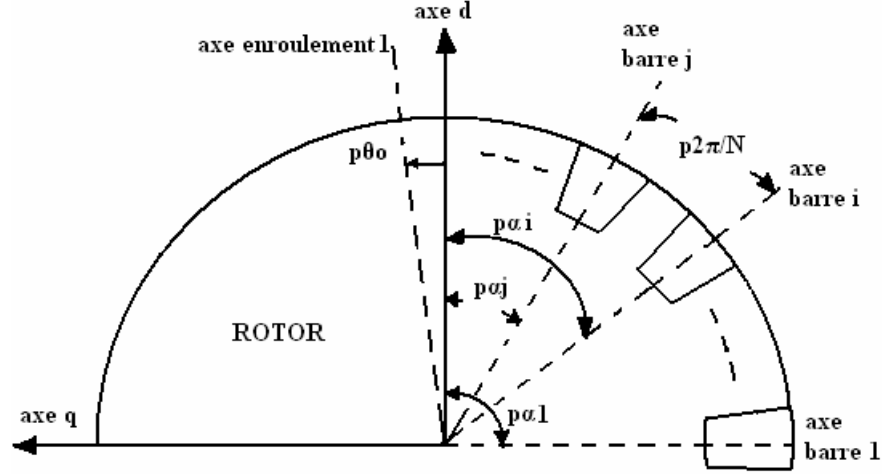


Figure II.5 : Définition de $p\alpha_i$.

Ecart angulaire électrique entre l'axe de la barre i et l'axe d du système référence en θ_r

Soit donc :

$P2\pi/N$: écart angulaire entre les axes de deux barres adjacentes ; $p\alpha_1$: écart angulaire entre l'axe de la barre 1 et l'axe d .

En plus :

$$p\alpha_1 = p\theta_0 + \pi/2 \quad (\text{II.53})$$

où θ_0 est donnée dans l'expression (II. 8).

Alors :

$$P\alpha_i = p\alpha_1 + (i-1) p2\pi/N \quad (\text{II.54})$$

Nous remarquons qu'il ne faut pas confondre l'axe de la barre j avec l'axe de l'enroulement formé par la barre j et son retour fictif placé à l'infini. L'axe de l'enroulement fictif qui est censé représenter la barre est situé à $+\pi/2$ radians électriques plus loin (figure II.6).

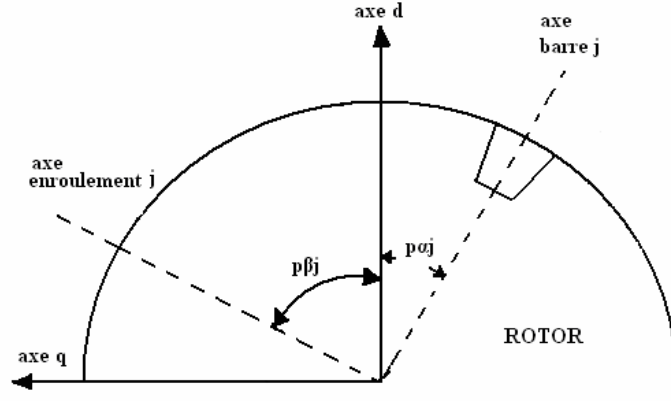


Figure II.6 : Axe de la barre j et axe de l'enroulement j

Bien que le retour de courant se fasse à l'infini au niveau magnétique, il doit se faire sous le pôle opposé, éloigné de $+\pi$ radians électriques, de sorte que l'axe de cet enroulement soit placé à mi-chemin magnétique entre l'aller et le retour, soit à $+\pi/2$ radians électriques.

Nous pouvons constater que :

$$p\alpha_j = p\beta_j + \pi/2 \quad (\text{II.55})$$

Les équations (II.60) et (II.62) peuvent s'écrire sous la forme :

$$M_{sdj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \cos(p\beta_j) \quad (\text{II.56})$$

$$M_{sqj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \sin(p\beta_j) \quad (\text{II.57})$$

$$L_{rij} = L_{ro} + L_r \cos(\beta_i - \beta_j) \quad (\text{II.58})$$

ou $p\beta_j$ est écart angulaire entre l'axe de l'enroulement j et l'axe d du système de référence en θ_r .

$$\text{et : } p\beta_i = p\beta_1 + (i - 1) p2\pi/N \quad (\text{II.59})$$

En plus, avec (II.53) et (II.55), nous constatons que :

$$p\beta_1 = p\theta_0 \quad (\text{II.60})$$

Cela dit, l'écart entre l'axe d du stator et l'origine du système de référence du rotor est égale à $(p\beta_1)$, et si cet écart est nul, pour le cas où les deux systèmes présentent une origine commune, nous avons :

$$p\beta_i = (i - 1) p2\pi/N$$

Et l'ensemble des inductances de la machine est, alors, donné par :

$$L_{sd} = (3/2) L_s \quad (\text{II.61})$$

$$L_{sq} = (3/2) L_s \quad (\text{II.62})$$

$$M_{sdj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \cos [(j-1) p2\pi/N] \quad (\text{II.63})$$

$$M_{sqj} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \sin [(j-1) p2\pi/N] \quad (\text{II.64})$$

$$L_{rij} = L_{ro} + L_r \cos [(i-j) 2\pi/N] \quad (\text{II.65})$$

Nous avons ainsi obtenu, pour un stator diphasé (axes d, q) et un rotor constitué de N barres, une matrice inductance [L] dans un référentiel lié au rotor de la forme :

$$[L] = \left[\begin{array}{cc|cccc} L_{sd} & 0 & M_{sd1} & M_{sd2} & \cdots & M_{sdN} \\ 0 & L_{sq} & M_{sq1} & M_{sq2} & \cdots & M_{sqN} \\ \hline M_{s1d} & M_{s1q} & L_{r11} & L_{r12} & \cdots & L_{r1N} \\ M_{s2d} & M_{s2q} & L_{r21} & L_{r22} & \cdots & L_{r2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{sNd} & M_{sNq} & L_{rN1} & L_{rN2} & \cdots & L_{rNN} \end{array} \right] \quad (\text{II.66})$$

où :

$$M_{sdj} = M_{sjd}$$

$$M_{sqj} = M_{sjq} \quad \text{avec : } i = 1, 2, \dots, N \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$L_{rij} = L_{rji}$$

II.3.2.-Prise en compte de la fermeture de cage de la machine asynchrone

Si nous voulons prendre en compte les anneaux de fermeture dans la performance de la machine, il faut ajouter aux résistances et inductances rotoriques la contribution de ses anneaux aux valeurs finales de ces grandeurs.

Cela peut être effectué en ajoutant à la valeur de la résistance et de l'inductance d'une barre, les valeurs de la résistances et de l'inductance de chaque morceau des anneaux (reliant entre elles deux barres conséquentes) ramenées aux valeurs équivalentes 'vues' par les barres.

Nous pouvons, aussi, établir les équations des courants pour les mailles formées par l'ensemble des barres et des morceaux des anneaux qui les relient entre elles [33-35].

II.3.2.1-Résistances et inductances des bagues rapportées aux barres

Si nous supposons une machine asynchrone à cage tout à fait symétrique avec une distribution régulière des barres rotoriques, nous arrivons à :

$$\hat{R}_r = R_r + [R_a / (2\sin^2 (P\pi/N))] \quad (\text{II.67})$$

$$\hat{L}_r = L_r + [L_a / (2\sin^2 (P\pi/N))] \quad (\text{II.68})$$

où :

\hat{R}_r, \hat{L}_r : respectivement résistance et inductance d'un enroulement rotorique avec prise en compte de la contribution de l'anneau de fermeture,

R_r, L_r : respectivement résistance et inductance propre d'une barre,

R_a, L_a : respectivement résistance totale et inductance propre totale de l'anneau de fermeture,

P : nombre de paires de pôle,

N : nombre de barres (enroulements).

Cela dit, il suffit d'ajouter aux valeurs originelles la contribution des anneaux, selon les expressions (II.67) et (II.68).

II.3.2.2-La méthode des mailles

Pour des machines avec structures régulières ou non, il existe une façon plus générale de présenter les équations des tensions rotoriques à travers les mailles de courant [27-35].

Ainsi, pour une machine tout à fait quelconque, nous pouvons présenter son circuit équivalent selon la figure II.7.

où :

R_{rj} : résistance de la barre,

δ_j : résistance du segment j de l'anneau δ , qui relie les barres j et $(j+1)$,

σ_j : résistance du segment j de l'anneau σ , qui relie les barres j et $(j+1)$,

L_{rij} : mutuelle inductance entre les barres i et j ,

M_{sdj} : mutuelle inductance entre l'axe d du stator et la barre j ,

M_{sqj} : mutuelle inductance entre l'axe q du stator et la barre j ,

$l_{\delta j}$: inductance propre du segment j de l'anneau δ , qui relie les barres j et $(j+1)$ (pas représenté sur la figure II.7),

$l_{\sigma j}$: inductance propre du segment j de l'anneau σ , qui relie les barres j et $(j+1)$ (pas représentée sur la figure II.7),

I_{mj} : courant dans la maille j , formée par les barres j et $(j+1)$ et par les segments des anneaux qui les relient entre elles,

K : courant dans la maille formé par l'anneau σ .

La structure représentée dans la figure II.7, amène à un système de $(2+N+1)$ équations différentielles.

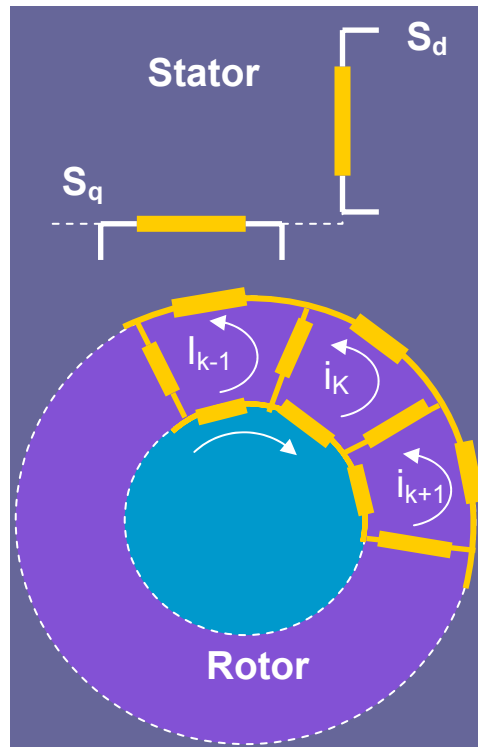


Figure II.7 : Machine asynchrone- représentation par maille

Les équations obtenues sont pour :

- Le stator:

$$V_{sd} = R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + \sum_{g=1}^N (M_{sdg} - M_{sdg+1}) (d/dt) I_{mg} - w L_{sq} I_{sq} - w \sum_{g=1}^N (M_{sqg} - M_{sqg+1}) I_{mg} \quad (II.69)$$

$$V_{sq} = R_s I_{sq} + L_{sq} (d/dt) I_{sq} + \sum_{g=1}^N (M_{sqg} - M_{sqg+1}) (d/dt) I_{mg} + w L_{sd} I_{sd} + w \sum_{g=1}^N (M_{sdg} - M_{sdg+1}) I_{mg} \quad (II.70)$$

- Le rotor, maille j (1 ≤ j ≤ N) :

$$0 = (M_{sdj} - M_{sdj+1}) (d/dt) I_{sd} + (M_{sqj} - M_{sqj+1}) (d/dt) I_{sq} + (l\delta_j + l\sigma_j) (d/dt) I_{mj} + \sum_{g=1}^N [(L_{rjg} - L_{rjg+1}) - (L_{rj+1g} - L_{rj+1g+1})] (d/dt) I_{mg} + l\sigma_j (d/dt) K - R_{rj} I_{mj-1} + [R_{rj} + R_{rj+1} + \sigma_j + \delta_j] I_{mj} - R_{rj+1} I_{mj+1} + \sigma_j K \quad (II.71)$$

- Le rotor, maille interne :

$$0 = \sum_{g=1}^N l\sigma_g (d/dt) I_{mg} + \left\{ \sum_{g=1}^N l\sigma_g \right\} (d/dt) K + \sum_{g=1}^N \sigma_g I_{mg} + \left\{ \sum_{g=1}^N \sigma_g \right\} K \quad (II.72)$$

Quand $g = N$ ou $j = N$, nous avons :

$$\begin{aligned} M_{sdN+1} &= M_{sd1} \\ M_{sqN+1} &= M_{sq1} \\ L_{rjN+1} &= L_{rj1} \\ L_{rN+1g} &= L_{r1g} \\ R_{rN+1} &= R_{r1} \\ I_{mN+1} &= I_{m1} \end{aligned} \quad (II.73)$$

Nous remarquons que les portions d'anneaux sont placées en quadrature (dans l'espace) par rapport aux barres et aux enroulements du stator, ce qui permet, dans un premier temps, de négliger les termes des mutuelles inductances respectives [10-11].

Dans l'expression (II.72) le courant K peut être explicité en fonction des courants I_{mg} , $g = 1, 2, 3, \dots, N$. Il peut être remplacé dans l'expression (II.71), ce qui amène la maille j du rotor à :

$$0 = (M_{sdj} - M_{sdj+1}) (d/dt)I_{sd} + (M_{sqj} - M_{sqj+1}) (d/dt)I_{sq} - (1/\Sigma\sigma) \left[\sum_{g=1}^N \sigma_g \sigma_j I_{mg} \right] - R_{rj} I_{mj-1} + [R_{rj} + R_{rj+1} + \sigma_j + \delta_j] I_{mj} - R_{rj+1} I_{mj+1} + \sum_{g=1}^N \{ [(L_{rjg} - L_{rjg+1}) - (L_{rj+1g} - L_{rj+1g+1})] (d/dt) I_{mg} \} \quad (II.74)$$

$$\text{où : } \Sigma\sigma = \sum_{g=1}^N \sigma_g \quad (II.75)$$

Dans les expressions (II.69), (II.70) et (II.74), pour $1 \leq g \leq N$, si nous supposons :

$$m_{sdg} = M_{sdg} - M_{sdg+1} \quad (II.76)$$

$$m_{sqg} = M_{sqg} - M_{sqg+1} \quad (II.77)$$

où, selon (II.74) et (II.75) :

$$M_{sdg} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \cos [(g-1) p 2\pi/N] \quad (II.78)$$

$$M_{sqg} = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \sin [(g-1) p 2\pi/N] \quad (II.79)$$

Nous arrivons à :

$$m_{sdg} = - (\sqrt{3/2}) [2 \sin (p(\pi/N))] L_{sr} \sin (p(\pi/N) - gp(2\pi/N)) \quad (II.80)$$

$$m_{sqg} = - (\sqrt{3/2}) [2 \sin (p(\pi/N))] L_{sr} \cos (p(\pi/N) - gp(2\pi/N)) \quad (II.81)$$

De même, si nous supposons :

$$l_{rjg} = (L_{rjg} - L_{rjg+1}) - (L_{rj+1g} - L_{rj+1g+1}) \quad (II.82)$$

où selon (II.66) :

$$l_{rjg} = L_{ro} + L_r \cos [(j-g) p(2\pi/N)] \quad (\text{II.83})$$

$$\text{Nous arrivons à : } l_{rjg} = A \cos [(j-g) p (2\pi/N)] \quad (\text{II.84})$$

$$\text{où : } A = [2\sin (p\pi/N)]^2 L_r \quad (\text{II.85})$$

Les termes L_{ro} dus au flux Φ_{ro} se sont annulés. Nous pouvons, alors, réécrire les équations des tensions de la machine.

- Pour le stator :

$$\begin{aligned} V_{sd} = R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + \sum_{g=1}^N m_{sdg} (d/dt) I_{mg} - w L_{sq} I_{sq} - \\ w \sum_{g=1}^N m_{sqg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

$$\begin{aligned} V_{sq} = R_s I_{sq} + L_{sq} (d/dt) I_{sq} + \sum_{g=1}^N m_{sqg} (d/dt) I_{mg} \\ + w L_{sd} I_{sd} + w \sum_{g=1}^N m_{sdg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

- Le rotor, maille j ($1 \leq j \leq N$) :

$$\begin{aligned} 0 = m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - (1/\Sigma\sigma) \left(\sum_{g=1}^N \sigma_g \sigma_j I_{mg} \right) + R_{bj} I_{mj-1} \\ + (R_{bj} + R_{bj+1} + \sigma_j + \delta_j) I_{mj} - R_{bj+1} I_{mj+1} + \sum_{g=1}^N l_{rjg} (d/dt) I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

Les expressions (II.86) à (II.88) peuvent être mises sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{sT} \\ V_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sT} & 0 \\ 0 & R_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sT} \\ I_{rm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{sT} & M_{srmT} \\ M_{rsmT} & L_{rm} \end{bmatrix} (d/dt) \begin{bmatrix} I_{sT} \\ I_{rm} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} W & L_{ST} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sT} \\ I_{rm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.89})$$

ou encore sous forme plus compacte :

$$[V_{mr}] = [R_{mr}] [I_{mr}] + [L_{mr}] (d/dt) [I_{mr}] + [G_{mr}] [I_{mr}] \quad (II.90)$$

où les indices T et m représentent, respectivement, la transformation dans un référentiel lié au rotor des grandeurs statoriques et l'emploi de mailles de courant au rotor.

Nous avons toujours :

$$[M_{rsmT}] = [M_{sr mT}]^T \quad (II.91)$$

Avec les mutuelles inductances entre le stator et les mailles du rotor données par :

$$[M_{sr mT}] = - (\sqrt{3/2}) [2 \sin(p\pi/N)] L_{sr} * \begin{vmatrix} \sin(p\pi/N - p2\pi/N) & \cdots & \sin(p\pi/N - jp2\pi/N) & \cdots & \sin(p\pi/N - Np2\pi/N) \\ \cos(p\pi/N - p2\pi/N) & \cdots & \cos(p\pi/N - jp2\pi/N) & \cdots & \cos(p\pi/N - Np2\pi/N) \end{vmatrix} \quad (II.92)$$

$$[L_{rm}] = A * \begin{vmatrix} \cos((1-1)p2\pi/N) & \cdots & \cos((1-j)p2\pi/N) & \cdots & \cos((1-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cos((i-1)p2\pi/N) & & \cos((i-j)p2\pi/N) & & \cos((i-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cos((N-1)p2\pi/N) & \cdots & \cos((N-j)p2\pi/N) & \cdots & \cos((N-N)p2\pi/N) \end{vmatrix} \quad (II.93)$$

où A est donnée par l'expression (II.85) et égale à $[2 \sin(p\pi/N)]^2 L_r$

De même, la sous-matrice des résistances des mailles rotoriques - dont seulement le noyau formé par les lignes et colonnes d'indices h, i, j, k, l est explicité - est donnée par l'expression (II.94) :

$$[R_{rm}] =$$

Colonne h \vdots	Colonne i \vdots
$\left \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right \begin{array}{l} + (R_{bh} + R_{bi} + \sigma_h + \delta_h - \sigma_h \sigma_h / \Sigma \sigma) \\ - (R_{bi} + \sigma_i \sigma_h / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_j \sigma_h / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_k \sigma_h / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_l \sigma_h / \Sigma \sigma) \end{array}$	$\left \begin{array}{l} - (R_{bi} + \sigma_h \sigma_i / \Sigma \sigma) \\ + (R_{bi} + R_{bj} + \sigma_i + \delta_i - \sigma_i \sigma_i / \Sigma \sigma) \\ + (R_{bj} + \sigma_j \sigma_i / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_k \sigma_i / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_l \sigma_i / \Sigma \sigma) \end{array} \right $
\vdots	\vdots
Colonne j \vdots	Colonne k \vdots
$\left \begin{array}{l} - (\sigma_h \sigma_j / \Sigma \sigma) \\ - (R_{bj} + \sigma_i \sigma_j / \Sigma \sigma) \\ + (R_{bj} + R_{bk} + \sigma_j + \delta_j - \sigma_j \sigma_j / \Sigma \sigma) \\ - (R_{bk} + \sigma_k \sigma_j / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_l \sigma_j / \Sigma \sigma) \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} - (\sigma_h \sigma_k / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_i \sigma_k / \Sigma \sigma) \\ - (R_{bk} + \sigma_j \sigma_k / \Sigma \sigma) \\ + (R_{bk} + R_{bl} + \sigma_k + \delta_k - \sigma_k \sigma_k / \Sigma \sigma) \\ - (R_{bl} + \sigma_l \sigma_k / \Sigma \sigma) \end{array} \right $
\vdots	\vdots
Colonne l \vdots	\vdots
$\left \begin{array}{l} - (\sigma_h \sigma_l / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_i \sigma_l / \Sigma \sigma) \\ - (\sigma_j \sigma_l / \Sigma \sigma) \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right $
	ligne h
	ligne i
	ligne j
	(II.94)
$\left \begin{array}{l} - (R_{bl} + \sigma_k \sigma_l / \Sigma \sigma) \\ + (R_{bl} + R_{bm} + \sigma_l + \delta_l - \sigma_l \sigma_l / \Sigma \sigma) \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right $
\vdots	\vdots
	ligne k
	ligne l

II.3.2.4-Simplifications dues aux caractéristiques magnétiques de la MAS

Les simplifications liées aux caractéristiques magnétiques de la machine et basées sur des conditions de (anti) périodicité magnétique permettent de réduire de façon importante l'ordre du système d'équations à résoudre [41, 56-57] :

- Le cas général : représentation sur 2π radians mécaniques (machine entière),
- Le cas périodique : représentation sur 2π radians électriques,
- Le cas anti-périodique : représentation sur π radians électriques.

II.3.2.5 Cas général

Dans ce cas, le domaine d'étude correspond à 2π radians mécaniques (machine entière) et les équations des tensions d'ordre $(2 + N)$ sont données par l'expression :

$$[V_{mT}] = [R_{mT}] [I_{mT}] + [L_{mT}] \frac{d}{dt} [I_{mT}] + [G_{mT}] [I_{mT}] \quad (II.100)$$

Avec :

$$[V_{mT}] = \begin{bmatrix} [V_{sT}] \\ [V_{mr}] \end{bmatrix} \quad (II.101)$$

Et :

$$[V_{sT}] = \begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} \quad (II.102)$$

$$[V_{mr}] = \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{mi} \\ \vdots \\ V_{mN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (II.103)$$

$$[I_{mT}] = \begin{bmatrix} [I_{sT}] \\ [I_{mr}] \end{bmatrix} \quad (II.104)$$

Et :

$$[I_{sT}] = \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \end{bmatrix} \quad (II.105)$$

$$[I_{mr}] = \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mi} \\ \vdots \\ I_{mN} \end{bmatrix} \quad (II.106)$$

Les résistances de la machine sont données par :

$$[R_{mT}] = \begin{bmatrix} [R_{sT}] & [0] \\ [0] & [R_{rm}] \end{bmatrix} \quad (II.107)$$

$$[R_{sT}] = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \quad (II.108)$$

La matrice des résistances des mailles rotoriques $[R_{rmT}]$ est donnée par l'expression (II.94). Les inductances de la machine sont données par :

$$[L_{mT}] = \begin{bmatrix} [L_{sT}] & [M_{srmT}] \\ [M_{rsmT}] & [L_{rm}] \end{bmatrix} \quad (II.109)$$

$$[L_{sT}] = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3/2)L_s & 0 \\ 0 & (3/2)L_s \end{bmatrix} \quad (II.110)$$

Les matrices des mutuelles inductances stator/rotor $[M_{rsmT}]$, $[M_{srmT}]^T$ et des inductances des mailles rotoriques $[L_{rm}]$ sont celles déjà présentées par les expressions (II.91) à (II.93) respectivement.

Les termes dus à la rotation de la machine sont donnés par :

$$[G_{mT}] = \begin{bmatrix} [W] & [L_{sT}] & [W] & [M_{srmT}] \\ [0] & & [0] & \end{bmatrix} \quad (II.111)$$

où la matrice $[W]$ est égale à :

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -W \\ +W & 0 \end{bmatrix} \text{ et } W = d \frac{\theta_s}{dt}$$

Après avoir résolu le système (II.100) ayant comme inconnue le vecteur courant $[I_{mT}]$ donné par (II.104) à (II.106), c'est-à-dire, les courants d'axe d, q du stator et les courants des mailles rotoriques, nous obtenons les courants des barres du rotor selon l'expression :

$$[I_r] = [K] [I_{mr}] \quad (\text{II.112})$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{rN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{mN} \end{bmatrix} \quad (\text{II.113})$$

Nous remarquons, au passage, que $[K]$ est une matrice singulière ce qui veut dire que nous ne pouvons pas obtenir les courants des mailles à partir des courants des barres du rotor.

II.3.2.6-Cas périodique

Il constitue un cas particulier, où la machine présente des conditions de périodicité du champ magnétique sur 2π radians électriques (une paire de pôles), avec un facteur de répétition p (p = nombre de paires de pôles). Dans ce cas, l'ordre des matrices est réduit de $(2+N)$ à $(2+N/p)$.

- Pour l'axe d du stator, nous trouvons :

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + \\ &+ \sum_{g=1}^{N=pn} (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} - w L_{sq} I_{sq} - w \sum_{g=1}^{N=pn} m_{sqg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.114})$$

où :

$$I_{mi} = I_{mi+1n} = I_{mi+2n} = \dots = I_{mi+(p-1)n} \quad (\text{II.115})$$

Et :

$$I_{sdi} = I_{sdi+1n} = I_{sdi+2n} = \dots = I_{sdi+(p-1)n} \quad (\text{II.116})$$

Et avec les expressions (II.115) et (II.116) en (II.114), nous arrivons à :

$$\begin{aligned} V_{sd} = & R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + \\ & + \sum_{K=1}^p \sum_{g=1}^n (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} - w L_{sq} I_{sq} - w \sum_{K=1}^p \sum_{g=1}^n m_{sqg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

Soit :

$$\begin{aligned} V_{sd} = & R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + \\ & + p \sum_{g=1}^n (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} - w L_{sq} I_{sq} - pw \sum_{g=1}^n m_{sqg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.118})$$

- De même pour l'axe q du stator :

$$\begin{aligned} V_{sq} = & R_s I_{sq} + L_{sd} (d/dt) I_{sq} + \\ & + p \sum_{g=1}^n (m_{sqg}) (d/dt) I_{mg} + w L_{sd} I_{sd} + pw \sum_{g=1}^n m_{sdg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.119})$$

- Pour la maille j du rotor ($1 \leq j \leq N/p$) :

$$\begin{aligned} V_{mj} = & m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - (\sigma/N) \sum_{g=1}^{N=pn} I_{mg} - R_b I_{mj-1} \\ & + (2 R_b \sigma + \delta) I_{mj} - R_b I_{mj+1} + \sum_{g=1}^{N=pn} L_{rjg} (d/dt) I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

Et avec le même procédé déjà utilisé pour les tensions statoriques, nous avons :

$$\begin{aligned}
 V_{mj} = & m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj} (d/dt) I_{sq} \\
 & - p(\sigma/N) \sum_{g=1}^n I_{mg} - R_b I_{mj-1} + (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj} - R_b I_{mj+1} + \\
 & + p \sum_{g=1}^n L_{rjg} (d/dt) I_{mg}
 \end{aligned} \tag{II.121}$$

- De même, pour la maille (j + kn) du rotor, avec k entier : (1 ≤ k ≤ (p-1))

$$\begin{aligned}
 V_{mj+kn} = & m_{sdj+kn} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj+kn} (d/dt) I_{sq} + p (\sigma/N) \sum_{g=1}^n I_{mg} - R_b I_{mj+kn-1} \\
 & + (2R_b + \sigma + \delta) I_{mj+kn} - R_b I_{mj+kn+1} + p \sum_{g=1}^n L_{rj+kn g} (d/dt) I_{mg}
 \end{aligned} \tag{II.122}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 V_{mj+kn} = & m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - p (\sigma/N) \sum_{g=1}^n I_{mg} + \\
 & - R_b I_{mj-1} + (2R_b + \sigma + \delta) I_{mj} - R_b I_{mj+1} + p \sum_{g=1}^n L_{rjg} (d/dt) I_{mg}
 \end{aligned} \tag{II.123}$$

Les p équations du type (II.123) sont additionnées pour arriver à :

$$\sum_{K=1}^p V_{mj+kn} = 0 \tag{II.124}$$

Car :

$$V_{mj+kn} = 0 \tag{II.125}$$

Avec :

$$1 \leq j \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq (p-1).$$

Soit donc :

$$\begin{aligned}
 0 = & p m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - p^2 (\sigma/N) \sum_{g=1}^n I_{mg} + \\
 & - p R_b I_{mj-1} + p (2R_b + \sigma + \delta) I_{mj} - p R_b I_{mj+1} + p^2 \sum_{g=1}^n L_{rjg} (d/dt) I_{mg}
 \end{aligned} \tag{II.126}$$

Alors, pour le cas périodique sur 2π radians électriques les équations des tensions, d'ordre $(2+n)$, où $n = N/p$ sont données par l'expression :

$$[V_{mT}] = [R_{mT}] [I_{mT}] + [L_{mT}] d/dt [I_{mT}] + [G_{mT}] [I_{mT}] \quad (II.127)$$

Les vecteurs et les matrices qui interviennent dans l'expression (II.127) ont la même forme que dans les expressions (II.101) à (II.111), mais l'indice 'n' remplace l'indice 'N'. Les matrices des résistances et des inductances rotoriques et des mutuelles inductances stator/rotor sont données par les expressions (II.128) à (II.130) :

$$[R_{rm}] = \begin{bmatrix} +p(2R_b + \sigma + \delta - p\sigma/N) & -p(R_b + p\sigma/N) & \dots\dots\dots \\ -p(R_b + p\sigma/N) & +p(2R_b + \sigma + \delta - p\sigma/N) & \dots\dots\dots \\ -p^2(\sigma/N) & -p(R_b + p\sigma/N) & \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots \\ -p(R_b + p\sigma/N) & -p^2(\sigma/N) & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (II.128)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & -p(R_b + p\sigma/N) & \vdots \\ \vdots & \vdots & -p^2(\sigma/N) & \vdots \\ \vdots & \vdots & -p^2(\sigma/N) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & +p(2R_b + \sigma + \delta - p\sigma/N) \end{bmatrix}$$

$$[M_{srmt}] = -p(\sqrt{3}/2)[2\sin(p\pi/N)] L_{sr} *$$

$$\begin{bmatrix} \sin(p\pi/N - 1p2\pi/N) & \dots & \sin(p\pi/N - jp2\pi/N) & \dots & \sin(p\pi/N - np2\pi/N) \\ \cos(p\pi/N - 1p2\pi/N) & \dots & \cos(p\pi/N - jp2\pi/N) & \dots & \cos(p\pi/N - np2\pi/N) \end{bmatrix} \quad (II.129)$$

$$[L_{rm}] = p^2 A^*$$

$$\begin{bmatrix} \cos((1-1)p2\pi/N) & \dots & \cos((1-j)p2\pi/N) & \dots & \cos((1-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos((i-1)p2\pi/N) & & \cos((i-j)p2\pi/N) & & \cos((i-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos((N-1)p2\pi/N) & \dots & \cos((N-j)p2\pi/N) & \dots & \cos((N-N)p2\pi/N) \end{bmatrix} \quad (II.130)$$

Après avoir résolu le système d'équations (II.127), d'ordre $(2+n, n = N/p)$ qui a comme inconnues les courants d'axes d, q du stator et les courants des mailles rotoriques placés sur 2π radians électriques (1 paire de pôles), les courants des barres peuvent être obtenus selon une expression de la forme de (II.113), où l'indice 'n' remplace l'indice 'N'.

II.3.2.7-Cas anti-périodique

Si la machine présente des conditions d'anti-périodicité magnétique, alors les courants dans la barre j ($1 \leq j \leq n/2$) et dans la barre (j + n/2) sont de modules équivalents mais de signes opposés, soit :

$$I_{mj} = - I_{mj+n/2} \quad (\text{II.131})$$

Avec : ($1 \leq j \leq n/2$) et $n = N/p$.

Les mutuelles inductances stator/rotor présentent elles aussi ces conditions d'anti-périodicité magnétique, soit :

$$m_{sdj} = - m_{sdj+n/2} \quad (\text{II.132})$$

$$m_{sqj} = - m_{sqj+n/2}$$

Et nous pouvons réécrire les équations des tensions, en séparant les courants en deux ensembles. Il s'ensuit pour le stator :

$$\begin{aligned} V_{sd} = & R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + p \sum_{g=1}^{n/2} (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} + p \sum_{g=n/2+1}^n (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} + \\ & - w L_{sq} I_{sq} - pw \sum_{g=1}^{n/2} m_{sqg} I_{mg} - pw \sum_{g=n/2+1}^n m_{sqg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.133})$$

$$\begin{aligned} V_{sq} = & R_s I_{sq} + L_{sd} (d/dt) I_{sq} + p \sum_{g=1}^{n/2} (m_{sqg}) (d/dt) I_{mg} + p \sum_{g=n/2+1}^n (m_{sqg}) (d/dt) I_{mg} + \\ & + w L_{sd} I_{sd} + pw \sum_{g=1}^{n/2} m_{sdg} I_{mg} + pw \sum_{g=n/2+1}^n m_{sdg} I_{mg} \end{aligned} \quad (\text{II.134})$$

Et en utilisant les expressions (II.131) et (II.132) dans (II.133) et (II.134) nous obtenons :

$$V_{sd} = R_s I_{sd} + L_{sd} (d/dt) I_{sd} + 2p \sum_{g=1}^{n/2} (m_{sdg}) (d/dt) I_{mg} +$$

$$- w L_{sq} I_{sq} - 2pw \sum_{g=1}^{n/2} m_{sqg} I_{mg} \quad (II.135)$$

$$V_{sq} = R_s I_{sq} + L_{sq} (d/dt) I_{sq} + 2p \sum_{g=1}^{n/2} (m_{sqg}) (d/dt) I_{mg} +$$

$$+ w L_{sd} I_{sd} + 2pw \sum_{g=1}^{n/2} m_{sdg} I_{mg} \quad (II.136)$$

De même, pour les mailles j et (j + n/2) du rotor ($1 \leq j \leq n/2$) :

$$V_{mj} = p m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + p m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - p^2 (\sigma/N) \left\{ \sum_{g=1}^{n/2} I_{mg} + \sum_{g=n/2+1}^n I_{mg} \right\} +$$

$$- p R_b I_{mj-1} + p (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj} - p R_b I_{mj+1} +$$

$$+ p^2 \left[\sum_{g=1}^{n/2} L_{rjg} (d/dt) I_{mg} + \sum_{g=n/2+1}^n L_{rjg} (d/dt) I_{mg} \right] \quad (II.137)$$

$$V_{mj+n/2} = p m_{sdj+n/2} (d/dt) I_{sd} + p m_{sqj+n/2} (d/dt) I_{sq} - p^2 (\sigma/N) \left\{ \sum_{g=1}^{n/2} I_{mg} + \sum_{g=n/2+1}^n I_{mg} \right\} -$$

$$p R_b I_{mj+n/2-1} + p (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj+n/2} - p R_b I_{mj+n/2+1} + p^2 \left[\sum_{g=1}^{n/2} L_{rj+n/2g} (d/dt) I_{mg} + \right.$$

$$\left. + \sum_{g=n/2+1}^n L_{rj+n/2g} (d/dt) I_{mg} \right] \quad (II.138)$$

Avec le même procédé déjà employé pour les tensions statoriques, nous obtenons :

$$V_{mj} = p m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + p m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - p R_b I_{mj-1} +$$

$$+ p (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj} - p R_b I_{mj+1} + 2 p^2 \sum_{g=1}^{n/2} L_{rjg} (d/dt) I_{mg} \quad (II.139)$$

$$V_{mj+n/2} = - p m_{sdj} (d/dt) I_{sd} - p m_{sqj} (d/dt) I_{sq} + p R_b I_{mj-1} +$$

$$- p (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj} + p R_b I_{mj+1} - 2 p^2 \sum_{g=1}^{n/2} L_{rjg} (d/dt) I_{mg} \quad (II.140)$$

Il faut encore faire :

$$V_{mj} = V_{mj+n/2} = 0 \quad (\text{II.141})$$

Soit :

$$\begin{aligned} & 2p m_{sdj} (d/dt) I_{sd} + 2p m_{sqj} (d/dt) I_{sq} - 2p R_b I_{mj-1} + 2p (2 R_b + \sigma + \delta) I_{mj} + \\ & - 2p R_b I_{mj+1} + (2p)^2 \sum_{g=1}^{n/2} L_{rjg} (d/dt) I_{mg} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

Alors, pour le cas anti-périodique sur π radians électriques (un pôle), les équations des tensions, d'ordre $(2 + n/2)$, $n = N/p$ sont données par l'expression :

$$[V_{mT}] = [R_{mT}] [I_{mT}] + [L_{mT}] d/dt [I_{mT}] + [G_{mT}] [I_{mT}] \quad (\text{II.143})$$

Les vecteurs et les matrices qui interviennent dans l'expression (II.143) ont la même forme que ceux des expressions (II.101) à (II.111), mais l'indice 'n/2' remplace l'indice 'N'.

Les matrices des résistances et des inductances rotoriques et des mutuelles inductances stator/rotor sont données par les expressions (II.144) à (II.146).

$$[R_{rm}] = 2p^* \begin{vmatrix} (R_b + \sigma + \delta) & -R_b & 0 & \cdots & 0 & +R_b \\ -R_b & (R_b + \sigma + \delta) & -R_b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -R_b & (R_b + \sigma + \delta) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -R_b & 0 & 0 & \cdots & -R_b & (R_b + \sigma + \delta) \end{vmatrix} \quad (\text{II.144})$$

$$[M_{srmT}] = -2p (\sqrt{3/2}) [2 \sin(p\pi/N)] L_{sr}^*$$

$$\begin{vmatrix} \sin(p\pi/N - 1p2\pi/N) & \cdots & \sin(p\pi/N - jp2\pi/N) & \cdots & \sin(p\pi/N - (n/2)p2\pi/N) \\ \cos(p\pi/N - 1p2\pi/N) & \cdots & \cos(p\pi/N - jp2\pi/N) & \cdots & \cos(p\pi/N - (n/2)p2\pi/N) \end{vmatrix} \quad (\text{II.145})$$

$$[L_{rm}] = (2p)^2 A * \begin{vmatrix} \cos((1-1)p2\pi/N) & \cdots & \cos((1-j)p2\pi/N) & \cdots & \cos((1-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cos((i-1)p2\pi/N) & & \cos((i-j)p2\pi/N) & & \cos((i-N)p2\pi/N) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cos((N-1)p2\pi/N) & \cdots & \cos((N-j)p2\pi/N) & \cdots & \cos((N-N)p2\pi/N) \end{vmatrix} \quad (II.146)$$

Après avoir résolu le système d'équations (II.143), d'ordre $(2 + n/2)$, ($n = N/p$) qui a comme inconnues les courants d'axes d, q du stator et les courants des mailles rotoriques placés sur π radians électriques (un pôle), nous pouvons obtenir les courants dans les barres selon l'expression :

$$\begin{vmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{rn/2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & +1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{mn/2} \end{vmatrix} \quad (II.147)$$

II.4-Equations finales

Au système d'équations générales, d'ordre $2 + N$, $2 + N/p$ ou $2 + N/ (2p)$, selon le cas envisagé, il faut ajouter l'équation du mouvement donnée par :

$$(J/p) (dw/dt) = C_{em} - C_{ext} - (f_r /p) w \quad (II.148)$$

ou :

J : moment d'inertie de la machine [kgm²],

f_r : coefficient de frottement [kgm²/s],

C_{ext} : couple appliqué à l'arbre de la machine [Nm],

C_{em} : couple électromagnétique [Nm],

ω : vitesse angulaire électrique [rd/s].

Et où les flux statoriques sont calculés par :

$$[\Phi_{sdq}] = \begin{bmatrix} [L_{sT}] & [M_{srmT}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_{sT}] \\ [I_{mT}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.149})$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \end{bmatrix} + [M_{srmT}] [I_{mT}] \quad (\text{II.150})$$

Les équations électriques et mécaniques, sont assemblées pour obtenir le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} L_{mT} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & J/p \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{mT} \\ \dots \\ \theta \\ w \end{bmatrix} = \quad (\text{II.151})$$

$$\begin{bmatrix} V_{mT} \\ \dots \\ \theta \\ C_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{mT}] & + & [G_{mT}] \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ P\Phi_{sq} & -P\Phi_{sd} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \\ fr/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{mT} \\ \dots \\ \theta \\ w \end{bmatrix}$$

L'expression (II.179) est du type :

$$[M] (d/dt) [X] = [Y] \quad (\text{II.152})$$

D'où le système :

$$(d/dt) [X] = [M]^{-1} [Y] \quad (\text{II.153})$$

La résolution de ce système par une des méthodes numériques nous donne toutes les informations nécessaires pour l'analyse du fonctionnement de la machine.

II.5-Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de façon analytique, le modèle multi-enroulement d'une machine asynchrone à cage, après avoir indiqué les hypothèses de départ, le domaine d'étude et les conventions adoptées.

Nous avons montré qu'à partir de la résolution analytique des équations du champ électromagnétique en terme de potentiel vecteur dans un référentiel lié au rotor, nous obtenons les expressions analytiques des inductances de la machine, données par des fonctions indépendantes de la position du rotor.

Nous arrivons, ainsi, à un modèle utilisable pour prendre en compte la structure réelle du rotor.

Ensuite, nous avons montré que ce modèle est équivalent au modèle obtenu après une transformation des grandeurs statoriques dans un référentiel lié au rotor, conformément à la transformation de Park. La comparaison entre les expressions analytiques des inductances pour ces deux cas de figure montre la validité de la méthode adoptée.

Par la suite, nous avons présenté comment sont introduites les portions d'anneaux de la cage. Pour cela, nous avons appliqué la méthode des mailles à la structure réelle du rotor.

Dans la partie finale de ce chapitre, nous avons montré comment la structure magnétique de la machine permet d'envisager des simplifications du modèle multi-enroulement au niveau des éléments de la matrice résistance et inductance du modèle. Ceci pour arriver, en ajoutant l'équation mécanique, au système d'équations générales représentant le fonctionnement de la machine.

CHAPITRE III

Identification par Eléments Finis de la MAS

III.1-Introduction

Parmi les méthodes de détermination des paramètres de la machine asynchrone à cage, nous citons le modèle à quatre enroulements. Ce modèle est basé sur les méthodes expérimentales (Annexe 5) autrement dit essais à vide et essais à rotor bloqué [31].

Avec le développement des machines asynchrones utilisées en vitesse variable, il est devenu nécessaire de modéliser la machine de façon précise, que ce soit pour simuler et prévoir le comportement de la machine alimentée par son convertisseur statique [45-49], ou pour connaître l'évolution des différents paramètres (courants rotoriques, vitesse, couple etc...), lors d'un défaut en régime dynamique.

Devant la nécessité de reconstituer les grandeurs rotoriques (flux et courants) à partir des grandeurs mesurables (courants et tensions statoriques, vitesse de rotation), la fiabilité du modèle et des paramètres électriques utilisés prend une importance particulière. De plus, lors du fonctionnement, ces paramètres sont amenés à varier dans des proportions non négligeables sous l'influence de phénomènes non linéaires, tels que la saturation des matériaux magnétiques, l'effet pelliculaire dans les barres rotoriques, ou encore l'échauffement des différentes parties de la machine [50-55].

Un calcul basé sur la détermination numérique des grandeurs locales est, particulièrement, bien adapté à la mise en évidence de ces phénomènes très complexes. Cette détermination numérique permet, de plus, d'explorer une large gamme de fonctionnement, sans risques matériels et d'éviter des essais expérimentaux parfois difficiles à réaliser «in situ».

Dans ce chapitre nous exposons, aussi, la méthode de la modélisation par éléments finis que nous avons choisie pour la prédétermination des paramètres réactifs et de leurs variations selon le point de fonctionnement électromagnétique.

III.2-Présentation de la méthode de calcul par éléments finis

La détermination des champs électromagnétiques est d'un grand intérêt pour la conception des machines électriques. En effet, le dimensionnement et l'évaluation des performances d'une machine asynchrone à cage reposent sur la connaissance et l'identification des inductances dont découle le calcul des efforts dans les conducteurs des ampertours consommés dans les circuits magnétiques, des flux utiles et des flux de fuites des réactances.

L'analyse de ces phénomènes électromagnétiques est basée sur la résolution des équations de Maxwell dont la complexité est telle qu'elle est exclue dans la plupart des cas du formalisme analytique.

Nous distinguons deux techniques principales de résolution des équations des champs électromagnétiques :

- Différences finies (D.F) : le maillage est, souvent, un quadrillage rectangulaire sur les nœuds pour lesquels est effectuée la discrétisation de l'équation différentielle associée à la décomposition en série de Taylor du potentiel scalaire.
- Eléments finis (E.F) : autorisent l'emploi d'éléments de toute forme à l'intérieur desquels le potentiel est approché par un polynôme ; la résolution se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle liée à l'énergie emmagasinée dans les éléments.

L'utilisation de la méthode numérique de calcul par éléments finis nous apporte plusieurs avantages : la prise en compte de la géométrie de la machine, de la saturation des matériaux magnétiques, ainsi que l'effet de peau dans les barres rotoriques. D'autre part, d'un point de vue pratique, il est très facile de faire varier les conditions de fonctionnement de la machine (fréquence et flux magnétisant), en changeant simplement les données du programme de calcul d'où une grande souplesse d'utilisation [56].

Les équations qui régissent le champ électromagnétique dans les systèmes électromagnétiques sont les équations de Maxwell, accompagnées des relations constitutives du milieu considéré. Elles font intervenir les champs magnétique et électrique \vec{H} et \vec{E} , les inductions magnétique et électrique \vec{B} et \vec{D} [41, 57-59].

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (\text{III.4})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{III.5})$$

$$\vec{H} = \gamma \vec{B} \quad (\text{III.6})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{III.7})$$

A noter, que nous avons omis le terme $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ dans (III.3). Les courants de déplacement étant négligeables devant les courants de conduction (\vec{J}) dans les machines électriques.

A partir de l'égalité (III.2), nous pouvons poser $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ d'où une nouvelle écriture du champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}V \quad (\text{III.8})$$

Les potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} seront choisis comme inconnues du système d'équations précédant ; de plus, dans les machines électriques classiques, nous pouvons supposer que les courants et le potentiel vecteur se trouvent dirigés suivant le même axe. Le problème se ramène, donc, à deux inconnues A_z et V et se résout par une formulation bidimensionnelle.

Egalement, la loi $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ s'écrit :

$\vec{J} = \sigma \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}V} \right]$, peut être réduite selon le domaine où l'on travaille : dans les

barres d'une machine asynchrone à cage, le courant induit \vec{J} est simplement égal à :

$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ si l'on considère parfait le court-circuit des anneaux (il n'existe pas de

différence de potentiel entre deux extrémités de la machine, le terme $\overrightarrow{\text{grad} V}$ est donc

nul). Par contre, au stator, nous considérons que les seuls courants \vec{J} qui interviennent sont ceux imposés par l'alimentation.

L'équation générale que nous aurons à résoudre s'écrit, compte tenu de ces considérations :

$$\text{div} \left[\gamma \overrightarrow{\text{grad} A_z} \right] = -J_0 + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (\text{III.9})$$

où J_0 représente la densité de courant imposée dans les conducteurs. Les conditions aux limites du domaine d'étude qui devront être associées à l'équation (III.9) seront soit du type Dirichlet ($A = A_0$ imposé à la surface du domaine), soit du type Newmann ($\frac{\partial A}{\partial n}$ imposé à la surface).

Le principe de la méthode de calcul par éléments finis est de résoudre les équations électromagnétiques sur des éléments de surface (résolution bidimensionnelle) de dimension réduite où nous pourrions faire certaines hypothèses qui simplifieront l'expression du problème.

La méthode analytique qui permet de calculer les inductances propres et mutuelles d'enroulements polyphasés, est basée sur une approche linéaire de la machine : la perméabilité du matériau est considérée infinie, l'excitation magnétique \vec{H} est, donc, nulle hors de l'entrefer.

La force magnétomotrice $\epsilon(\theta)$, définie comme la circulation de \vec{H} le long de l'entrefer et liée à l'expression du champ magnétique dans l'air par la perméance

superficielle et il est facile alors de calculer le flux Φ capté par un enroulement, au sens du premier harmonique ; les flux de fuite ne sont pas pris en compte [8].

$$\Phi = n_1 k_1 \iint_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{s} = n_1 k_1 \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} p(\theta) \frac{LD}{2} \varepsilon(\theta) d\theta \quad (III.10)$$

où k_1 représente le coefficient de bobinage de l'enroulement.

Malheureusement, l'équation locale (III.10) n'est pas adaptée à cette discrétisation spatiale et, pratiquement, nous cherchons, soit à minimiser, selon les valeurs de A_z , une certaine fonctionnelle [21], soit à résoudre l'équation suivante pour toutes les fonctions w (méthode des résidus pondérés) :

$$\iiint_V w \left[\text{div}(\gamma \overrightarrow{\text{grad} A_z}) + J_0 - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \right] dr = 0 \quad (III.11)$$

Dans le cadre d'une étude bidimensionnelle, cette intégrale devient une intégrale de surface. Pour fonctions w , nous choisissons, par ailleurs, les fonctions de forme $\phi_i(x, y)$ de chaque élément [57-60]. La surface totale Ω du domaine d'étude est, alors, discrétisée en éléments de surface Ω^e sur lesquels nous mettons l'hypothèse d'une perméabilité μ constante.

L'intégrale volumique de l'équation (III.11) est, donc, transformée en une somme discrète sur toute la surface Ω du domaine d'étude des intégrales surfaciques élémentaires numériquement.

III.3-Modélisation de la machine asynchrone à cage par le logiciel EFCAD

La modélisation magnétique s'effectue à partir des équations de MAXWELL. Compte tenu des fréquences utilisées en électrotechnique, les charges et les courants de déplacement peuvent être négligés. Les équations de MAXWELL se réduisent, alors, aux relations de la magnétodynamique [41].

III.3.1-Modélisation magnétique

Les relations de la magnétodynamique s'expriment comme suit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} \quad (\text{III.12})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{III.14})$$

A ces équations, il faut rajouter les équations des différents milieux et, en particulier, des milieux magnétiques mobiles (rotor) :

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{III.15})$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \sigma\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{J}_{\text{ext}} \quad (\text{III.16})$$

où σ : la conductivité,

Le terme \vec{J}_{ext} étant la densité de courant imposé par un circuit électrique, soit :

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad (\text{III.17})$$

Dans les autres parties de la machine, ce terme est nul. La densité de courant correspond seulement aux courants induits créés, d'une part, par la variation d'induction $-\frac{d\vec{B}}{dt}$, et d'autre part, par la vitesse de déplacement \vec{V} :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \sigma\vec{V} \wedge \vec{B} \quad (\text{III.18})$$

Le comportement dynamique de la machine lié au mouvement du rotor peut, donc, être assimilé à une succession d'états, régis par les équations de la magnétostatique.

Nous obtenons, alors, le système suivant :

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{III.19})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad (\text{III.21})$$

En effet, nous pouvons considérer que les conducteurs constituent un circuit électrique local particulier. La structure et les paramètres physiques de la machine permettent de déterminer les caractéristiques électriques de ce circuit. Elles sont, ensuite, utilisées pour déterminer l'évolution du courant dans les conducteurs, donc, J [61].

Pour le régime permanent défini par ces courants, nous déduisons le champ magnétique pour l'état considéré.

III.3.2-Equations aux dérivées partielles

La distribution du champ électromagnétique, dans le domaine d'étude donné est définie par les équations de MAXWELL, à partir des sources de champ et des conditions aux limites du domaine. Nous définissons une nouvelle variable \vec{A} , qui représente une fonction "potentiel vecteur magnétique", définie par :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (\text{III.22})$$

Les équations citées précédemment conduisent à la nouvelle expression :

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \vec{J} + \frac{1}{\mu} \text{rot}(\vec{B}_r) \quad (\text{III.23})$$

L'unicité de la solution du potentiel vecteur \vec{A} est assurée en imposant la valeur de sa divergence, en utilisant la jauge de Coulomb :

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, en supposant la structure considérée invariante par la troisième dimension du référentiel (x, y, z) , l'équation vectorielle précédente se transforme, alors, en une équation scalaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} B_{ry} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} B_{rx} \right) \quad (\text{III.25})$$

Cette dernière équation, associée à celle traduisant les conditions aux frontières du domaine d'étude, constitue un système d'équations aux dérivées partielles que nous pouvons résoudre à l'aide de méthodes numériques.

III.3.3-Méthode des éléments finis

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie. Sur chaque domaine appelé élément fini, la fonction est approchée par un polynôme de degré faible, de un à six suivant les applications. Ces éléments doivent réaliser une partition, ou discrétisation du domaine.

Sur chaque élément du découpage, la fonction d'interpolation est de la forme :

$$A(x, y) = \sum_{m=1,2,3} \alpha_m A_m \quad (\text{III.26})$$

Le polynôme d'approximation (du premier degré pour un triangle est déterminé par ces coefficients (ici trois).

$$\alpha_m(x, y) = a_m + b_m x + c_m y \quad (\text{III.27})$$

Les coefficients peuvent être déterminés par les valeurs de la fonction en des points particuliers appelés nœuds de l'élément (ici les sommets du triangle dans la figure III.1). Ainsi, le potentiel est défini à l'intérieur de chaque élément.

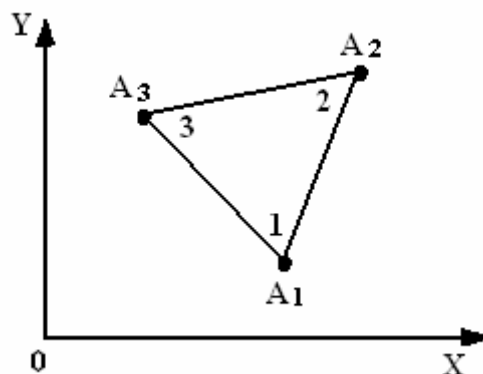


Figure III.1: Fonction d'interpolation d'un élément

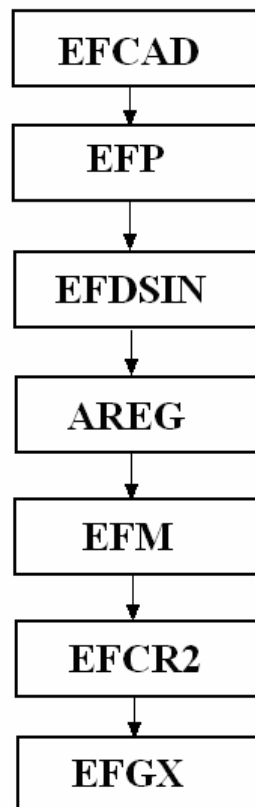
Le processus de discrétisation par éléments finis aboutit, alors, à un système algébrique de la forme : $[K] [A] + [F] = 0$

où $[A]$ est un vecteur dont les composantes sont les inconnues du problème et représentent les valeurs nodales du potentiel magnétique ; $[K]$ est une matrice symétrique dont les composantes sont fonction des propriétés magnétiques des matériaux composant le système et indépendantes des sources du champ ; $[F]$ est un vecteur fonction des sources du champ (courants, aimants).

Ainsi la, détermination des valeurs A_1, A_2, \dots, A_n , que la fonction inconnue $A(x, y)$ prend en chaque nœud de chaque élément de découpage, représente le déroulement des calculs pour arriver à la solution du problème.

III.3.4-Présentation du logiciel EFCAD

EFCAD est un logiciel de calcul des champs par éléments finis 2D, (figure III.2), [61-62].



**Figure III.2 : Organigramme du logiciel de modélisation EFCAD
et ses modules**

Ce logiciel est composé de plusieurs modules, ses modules peuvent résoudre les équations :

- de la magnétostatique,
- de l'électrostatique,
- de la magnétodynamique.

Le calcul en 2D est valable pour les structures dont la géométrie et les propriétés électromagnétiques peuvent être considérées comme invariantes :

- par translation suivant un axe (oz),
- par rotation autour d'un axe (oz).

Pour les structures invariantes par translation suivant oz les équations électromagnétiques sont écrites en coordonnées (x, y, z).

Dans ce cas, toutes les dérivées par rapport à z sont nulles ce qui permet d'écrire les équations uniquement avec les dérivées par rapport à (x, y).

Pour les systèmes invariants par rotation, les équations sont écrites en coordonnées cylindriques (r, θ , z). Dans ce cas, toutes les dérivées par rapport à (θ) sont nulles ce qui permet d'écrire les équations uniquement avec les dérivées par rapport à (r, z), qui est le système de coordonnées des structures axisymétriques.

Dans le cas de l'électrostatique, les sources peuvent être soit des densités de charge, soit des potentiels imposés sur certaines régions du plan.

Les vecteurs champ et induction électrique n'ont, alors, que deux composantes soit en (x, y) soit en (r, z) . Les équations sont résolues avec le potentiel scalaire électrique.

Dans le cas de la magnétostatique, les sources peuvent être soit des densités surfaciques de courants dirigées suivant l'axe oz ou (θ) , soit des aimants permanents parallèlement au plan (x, y) .

Lorsque il n'y a pas de courant, les équations peuvent être résolues avec le potentiel scalaire magnétique, autrement elles sont résolues avec le potentiel vecteur magnétique.

Dans le cas de la magnétodynamique, les courants varient avec le temps. Les équations sont, alors, écrites en complexe pour des courants variant sinusoïdalement ou discrétisés par rapport au temps dans le cas général.

Si les courants d'alimentation ne sont pas connus, EFCAD peut, aussi, traiter le cas des structures alimentées par des tensions variant dans le temps. Pour ce dernier cas, les équations du champ magnétique sont associées aux équations du circuit extérieur d'alimentation.

Pour que les équations du champ puissent être résolues numériquement, le domaine d'étude du problème doit être fini et le comportement du champ, sur le domaine, doit être précisé.

Dans le cas général, EFCAD tient compte de deux types de conditions aux frontières :

- les conditions de DIRICHLET,
- les conditions de NEWMANN.

Pour résoudre un problème, EFCAD a besoin de données géométriques [61-62] et de données sur les caractéristiques des différents milieux.

III.4-Description et manipulation des modules du logiciel EFCAD pour la modélisation de la machine asynchrone à cage

III.4.1-Module EFP

Ce module sert à créer et entretenir une banque de milieux. Trois milieux différents sont considérés : les milieux linéaires, les milieux saturables et les milieux alimentés.

Les milieux linéaires sont les milieux pour lesquels la perméabilité magnétique est indépendante du champ. Si tous les milieux du domaine étudié sont linéaires, les équations algébriques obtenues après discrétisation sont linéaires.

La caractéristique principale demandée par EFP pour les milieux linéaires est la perméabilité relative des milieux. L'air est considéré comme un milieu linéaire avec une perméabilité relative de 1.

Les milieux saturables sont les milieux pour lesquels la perméabilité magnétique dépend du champ. Si le domaine étudié contient, au moins, un milieu saturable, alors, les équations du champ sont non linéaires.

La caractéristique principale demandée est celle de première saturation du matériau utilisé.

Les milieux aimantés sont les milieux présentant une aimantation permanente. La principale caractéristique demandée par EFP est la droite de recul de l'aimant.

Nous entrons, alors, les composantes de l'induction rémanente dans le système de coordonnées choisies :

- Bcx, Bcy ou Bcr (radiale), Bct (tangentielle) pour un système plan ; Bcx, Bcy représentant respectivement les composantes suivant l'axe ox et oy ;
 - Bcr et Bcz pour un système axisymétrique, et la perméabilité relative de l'aimant.
- Pour la plupart des aimants la perméabilité relative est peu différente de 1.

EFP sauvegarde les données dans un fichier EFMAT.DAT. Nous ne pouvons avoir qu'un seul fichier dans chaque répertoire ou sous-répertoire. Chaque milieu, ainsi, répertorié porte un numéro. Pour des raisons de facilité, il est vivement conseillé de numéroter 1 l'air.

III.4.2-Module EFDSIN

Module servant à illustrer la géométrie de la structure à analyser, le dessin étant construit à partir de points. EFDSIN demande les coordonnées des points sur les quels repose la structure (cas de notre machine figure IV.3.a et figure IV.3.b). Pour les systèmes plans, ces coordonnées sont données en coordonnées cartésiennes (x, y) ou polaires (r, θ).

A partir de ces points, nous construisons des courbes. Ces dernières sont de deux types : soit des segments de droite, soit des arcs de cercle. Un groupe de courbes peut être répété. Lorsque nous entrons les points en (r, θ) nous ne pouvons répéter que par rotation.

Dans ce cas, nous précisons le pas de rotation angulaire et, dans chaque cas, le nombre de répétition est demandé. Les courbes peuvent être supprimées.

Dans chacune de ces opérations, une région du domaine peut être agrandie par le zoom. Pour cela, il suffit d'amener le curseur sur deux points diagonaux d'un rectangle qui entoure la zone à agrandir. Pour le bon déroulement de la suite des opérations, il est impératif de respecter les recommandations suivantes :

- a) tous les contours fermés doivent être reliés au reste du domaine, frontière comprise, par au moins deux courbes,
- b) les courbes ne doivent pas se superposer,
- c) entre deux courbes voisines faisant partie d'au moins un contour fermé, il ne peut y avoir de vide. Une des courbes doit commencer au point d'arrivée de l'autre.

III.4.3-Module AREG

Il permet de préciser les caractéristiques des différentes régions, qui correspondent à tous les contours fermés du domaine. Une procédure automatique permet de les reconnaître. Si les recommandations ne sont pas respectées, celles-ci ne marchent pas : dans ce cas, il faut corriger le dessin de la structure sur EFDSIN.

A la fin de cette procédure automatique toutes les régions sont numérotées 1. Nous affectons, ensuite, le numéro de chaque milieu sur le graphique. Il faut s'assurer que les numéros donnés correspondent à des matériaux répertoriés avec EFP.

De la même manière, toutes les régions sont définies avec les densités de courant nuls à la fin de la procédure automatique. Nous précisons, ensuite, les régions avec des densités de courant non nulles. Cette phase sert surtout pour la résolution des équations du champ en complexe.

Le module AREG permet aussi de définir les conditions aux frontières : par défaut, toutes courbes sur la frontière qui porte une condition de NEWMANN est homogène. Nous précisons les courbes sur la frontière qui porte un autre type de conditions : DIRICHLET, périodique ou anti-périodique.

Enfin, nous définissons tous les autres paramètres importants du problème :

- a) l'unité de longueur utilisée,
- b) la formulation utilisée potentiel scalaire ou vecteur,
- c) le type de structure : plan ou axisymétrique,
- d) si c'est une machine est tournante ou non,
- e) conditions aux frontières (D /P/A/N) :
 - D : Dirichelet,
 - P : Périodique,
 - A : Antipériodique,
 - N : Pas de conditions aux frontières (C.F),
 - Par défaut c'est Newmann.
- f) le type de résolution : linéaire ou non linéaire,
- g) le type de maillage désiré : basse, moyenne, ou haute densité. Bien que le maillage se fasse automatiquement, celui-ci peut être imposé en précisant le découpage de certaines courbes.

III.4.4-Module EFM

Ce module sert à mailler le domaine, c'est-à-dire à découper le domaine en petits domaines élémentaires appelés éléments finis (figure IV.4). Dans EFCAD, ces éléments sont, soit des triangles, soit des quadrilatères. Ce découpage se fait automatiquement à partir des données issues du module AREG. Cependant, nous pouvons modifier le maillage en rajoutant ou en supprimant des nœuds.

III.4.5-Module EFCR2

Il permet de résoudre des problèmes de structures électromagnétiques tournantes quand l'utilisateur est intéressé par l'analyse de certaines grandeurs en fonction de la position. Ce module ne prend pas en compte les courants de Foucault ni le circuit extérieur d'alimentation. En fait, il s'agit d'une succession d'états statiques

pour chaque nouvelle position de la partie mobile. Il est prévu pour le calcul en linéaire et non-linéaire (convergences successives et Newton-Raphson.).

L'excitation du système est faite à travers des densités de courants dans les phases, mais ces densités de courant peuvent être de n'importe quelle forme d'onde, c'est-à-dire, que le programme demande à l'utilisateur la phase à alimenter, l'angle de déplacement et le pas. Pour ce module, la partie exploitation numérique est intégrée au module.

- a) entrer le nom du fichier (exemple f₁.dat),
- b) voulez-vous déterminer l'inductance propre o/n ?
- c) voulez-vous déterminer l'inductance mutuelle o/n ?
- d) entrer le numéro de la phase,
- e) donner le nombre de conducteurs sur le domaine,
- f) le courant dans la phase :
 - sinusoïdale ? : donner (amplitude, phase),
 - rectangulaire ? : donner le signal.

Le module EFCR2 calcule suivant un menu, et selon le choix de l'utilisateur. Il permet de stocker sur un fichier les courbes des flux à travers des inductances (par une des méthodes : tenseur de MAXWELL, ou variation de la co-énergie et de la force électromotrice en fonction de la position.

III.4.6-Module EFGX

Il permet la visualisation des lignes de champ (électrique et magnétique) du maillage de la structure des différents milieux ; il constitue la préparation de l'exploitation des résultats numériques.

III.5-Résultats obtenus par le logiciel EFCAD

Après la saisie des différentes données demandées par les divers modules du logiciel EFCAD. Un temps est accordé à la résolution.

Le temps total de calcul, sur un domaine de 90° mécanique (un quart de la machine et pour une machine comportant 2 paires de pôles est de 2 heures (valeur approximative, relative à un ordinateur HP 9000-A). De même, l'occupation mémoire est de 3000 variables double précision.

Les résultats obtenus (organe de sortie est une imprimante raccordée à des terminaux) sont un ensemble de courbes (11) des inductances (propre et mutuelles) en fonction de l'angle θ de déplacement de la phase programmée de la machine.

Nous répétons la programmation pour le reste des phases de la machine, en indiquant le numéro de la phase à alimenter. Ainsi, nous obtenons en finalité une matrice d'inductances totale de 121 éléments (chaque élément est une courbe), comme l'indiqué sur le Tableau III. 1.

L_{1.1}(θ)	L _{1.2} (θ)	L _{1.3} (θ)	L _{1.4} (θ)	L _{1.5} (θ)	L _{1.6} (θ)	L _{1.7} (θ)	L _{1.8} (θ)	L _{1.9} (θ)	L _{1.10} (θ)	L _{1.11} (θ)
L _{2.1} (θ)	L_{2.2}(θ)	L _{2.3} (θ)	L _{2.4} (θ)	L _{2.5} (θ)	L _{2.6} (θ)	L _{2.7} (θ)	L _{2.8} (θ)	L _{2.9} (θ)	L _{2.10} (θ)	L _{2.11} (θ)
L _{3.1} (θ)	L _{3.2} (θ)	L_{3.3}(θ)	L _{3.4} (θ)	L _{3.5} (θ)	L _{3.6} (θ)	L _{3.7} (θ)	L _{3.8} (θ)	L _{3.9} (θ)	L _{3.10} (θ)	L _{3.11} (θ)
L _{4.1} (θ)	L _{4.2} (θ)	L _{4.3} (θ)	L_{4.4}(θ)	L _{4.5} (θ)	L _{4.6} (θ)	L _{4.7} (θ)	L _{4.8} (θ)	L _{4.9} (θ)	L _{4.10} (θ)	L _{4.11} (θ)
L _{5.1} (θ)	L _{5.2} (θ)	L _{5.3} (θ)	L _{5.4} (θ)	L_{5.5}(θ)	L _{5.6} (θ)	L _{5.7} (θ)	L _{5.8} (θ)	L _{5.9} (θ)	L _{5.10} (θ)	L _{5.11} (θ)
L _{6.1} (θ)	L _{6.2} (θ)	L _{6.3} (θ)	L _{6.4} (θ)	L _{6.5} (θ)	L_{6.6}(θ)	L _{6.7} (θ)	L _{6.8} (θ)	L _{6.9} (θ)	L _{6.10} (θ)	L _{6.11} (θ)
L _{7.1} (θ)	L _{7.2} (θ)	L _{7.3} (θ)	L _{7.4} (θ)	L _{7.5} (θ)	L _{7.6} (θ)	L_{7.7}(θ)	L _{7.8} (θ)	L _{7.9} (θ)	L _{7.10} (θ)	L _{7.11} (θ)
L _{8.1} (θ)	L _{8.2} (θ)	L _{8.3} (θ)	L _{8.4} (θ)	L _{8.5} (θ)	L _{8.6} (θ)	L _{8.7} (θ)	L_{8.8}(θ)	L _{8.9} (θ)	L _{8.10} (θ)	L _{8.11} (θ)
L _{9.1} (θ)	L _{9.2} (θ)	L _{9.3} (θ)	L _{9.4} (θ)	L _{9.5} (θ)	L _{9.6} (θ)	L _{9.7} (θ)	L _{9.8} (θ)	L_{9.9}(θ)	L _{9.10} (θ)	L _{9.11} (θ)
L _{10.1} (θ)	L _{10.2} (θ)	L _{10.3} (θ)	L _{10.4} (θ)	L _{10.5} (θ)	L _{10.6} (θ)	L _{10.7} (θ)	L _{10.8} (θ)	L _{10.9} (θ)	L_{10.10}(θ)	L _{10.11} (θ)
L _{11.1} (θ)	L _{11.2} (θ)	L _{11.3} (θ)	L _{11.4} (θ)	L _{11.5} (θ)	L _{11.6} (θ)	L _{11.7} (θ)	L _{11.8} (θ)	L _{11.9} (θ)	L _{11.10}	L_{11.11}(θ)

Tableau III. 1 : représentation des éléments de la matrice des inductions

Avec :

$L_{i,j}$ = inductance propre d'une phase, (quand $i = j$, représentée en gras),

$L_{i,j}$ = inductance mutuelle entre deux phases, (quand $i \neq j$).

III.6-Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué au départ la méthode d'identification des paramètres de la machine asynchrone à cage, ensuite, une priorité est donnée aux variations électromagnétiques.

Nous avons exposé la méthode de modélisation par éléments finis qui a été retenue pour la prédétermination des paramètres réactifs et de leurs variations selon le point de fonctionnement électromagnétique. La théorie de la modélisation par éléments finis basés sur la résolution des équations de Maxwell est présentée dans le but d'une utilisation numérique.

La description et le mode d'utilisation des différents modules constituant le logiciel EFCAD est donnée, en détail. Les résultats obtenus (les courbes des inductances de la machine) seront exploités dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

Détermination numérique des paramètres de la machine asynchrone

IV.1-Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons, dans une première étape, la machine asynchrone, ainsi, que ses équations électriques. Par la suite nous calculons l'ensemble des valeurs des résistances statoriques, ainsi, que les valeurs des résistances des barres et des anneaux de fermetures de la cage de la machine présentée, en tenant compte de l'influence de la température sur la valeur finale de ces résistances.

La deuxième étape consiste en la détermination numérique des paramètres inductifs (inductances propres et mutuelles) de la machine asynchrone à cage, afin que ces paramètres soient utilisés dans la résolution du système d'équations de la machine. Ce ne sont pas les paramètres habituels du schéma équivalent qu'il faut obtenir, mais ceux qui interviennent dans les équations électriques instantanées.

Les moyens informatiques nécessaires à ce type de résolution numérique dépendent, en fait, de la mémoire active utilisée pour le stockage des grandeurs nodales. Ce type de calcul est réalisable sur mini ordinateur (L.E.E.I Toulouse) doté du logiciel EFCAD [61-62].

IV.2-Présentation de la machine

Il s'agit d'une machine asynchrone triphasée à cage classe E fabriquée par Leroy-Sommer, pour la quelle les enroulements statoriques ont été modifiés au LEEI (Annexe 5).

Le modèle multi-enroulement est présenté au chapitre II avec les hypothèses, les conventions et le domaine d'étude.

IV.2.1-Equations électriques

D'une façon générale, les équations électriques régissant le fonctionnement d'une machine asynchrone à cage peuvent s'écrire :

$$\{V\} = [R] \{I\} + \frac{d}{dt} \{\Phi\} \quad (IV.1)$$

$$\{\Phi\} = [L] \{I\}$$

$$\frac{d}{dt} \{\Phi\} = \frac{d}{dt} [L] \{I\} + [L] \frac{d}{dt} \{I\}$$

$$\frac{d}{dt} \{\Phi\} = \frac{d}{d\theta} [L] \frac{d\theta}{dt} \{I\} + [L] \frac{d}{dt} \{I\}$$

$$\{V\} = [R] \{I\} + \frac{d}{d\theta} [L] \frac{d\theta}{dt} \{I\} + [L] \frac{d}{dt} \{I\} \quad (IV.2)$$

Mais, comme nous avons fait des transformations concernant le passage du triphasé au diphasé du côté du stator au paragraphe II.3.2.1, l'équation (IV.1) devient :

$$\begin{vmatrix} |L_{mT}| \\ \dots \\ |0| \end{vmatrix} \left\| \begin{vmatrix} |0| \\ \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & J/p \end{vmatrix} \right\| \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} |I_{mT}| \\ \dots \\ |\theta| \\ |w| \end{vmatrix} = \quad (IV.3)$$

$$\begin{vmatrix} |V_{mT}| \\ \dots \\ |0| \\ |C_{ext}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [R_{mT}] & + & [G_{mT}] \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ p\Phi_{sq} & -p\Phi_{sd} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |0| \\ \dots \\ 0 & -1 \\ 0 & fr/p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |I_{mT}| \\ \dots \\ |\theta| \\ |w| \end{vmatrix}$$

L'expression (IV.3) est du type :

$$[M] (d/dt) [X] = [Y]$$

Avec :

$$(d/dt) [X] = [M]^{-1} [Y] \quad (IV.4)$$

La résolution de ce système se fera, par la suite, par la méthode de Runge-Kutta, après avoir déterminé les éléments de la matrice inductance et complété le calcul des résistances du modèle multi-enroulement.

IV. 3-Calcul des résistances du modèle multi-enroulement

Pour compléter le modèle multi-enroulement, il faut calculer les résistances de la machine. Les résistances du stator peuvent être calculées à partir des données constructives de la machine ou encore déterminées par des mesures classiques en courant continu. Les résistances du rotor sont définies à partir des dimensions et du matériau de la cage.

IV.3.1-Résistances statoriques

La sous-matrice des résistances statoriques du modèle multi-enroulement est donnée par :

$$[R_{sT}] = \begin{bmatrix} R_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{S2} & \\ 0 & 0 & R_{S3} \end{bmatrix} \quad (IV.5)$$

où les résistances des bobines d, q sont égales à la résistance d'une phase statorique, car la machine est supposée avoir les trois enroulements statoriques identiques, symétriques et déphasés de $2\pi/3$ radians électriques les uns par rapport aux autres, ce qui amène à :

$$R_{S1} = R_{S2} = R_{S3} \quad (IV.6)$$

où : R_{S1} : résistance de l'enroulement de la phase S_1 ,

R_{S2} : résistance de l'enroulement de la phase S_2 ,

R_{S3} : résistance de l'enroulement de la phase S_3 .

A partir des mesures en courant continu effectuées sur les bobinages statoriques et des données de la machine considérée nous déterminons les résistances statoriques dans (Annexe 5).

$R_s = 1.5 \, \Omega$, résistance d'une phase statorique sur $2\pi/3$ radians électriques.

IV. 3. 2-Résistances rotoriques

Avec le modèle multi-enroulement, nous présenterons le rotor de la machine avec sa structure réelle et nous devons, donc, obtenir les valeurs des résistances des barres et des anneaux de fermeture de la cage.

Ces valeurs sont basées sur les caractéristiques physiques des matériaux qui la composent, ses dimensions et sa géométrie.

IV.3.2.1-Résistances des barres

La résistance R_b d'une barre est obtenue à l'aide de l'expression :

$$R_b = \rho \, l / S \quad (IV.7)$$

où : ρ : résistivité électrique en $[\Omega m]$,

l : longueur en $[m]$,

S = surface de la section droite en $[m^2]$.

Si nous voulons tenir compte de l'influence de la température sur la valeur finale de la résistance des barres, nous pouvons effectuer une correction de la valeur de la résistivité ρ , par l'intermédiaire de l'expression :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \delta_T) \quad (IV.8)$$

où : ρ_0 : résistivité à la température de référence,

α : coefficient de température,

δ_T : différence entre la température de travail et la température de référence.

IV.3.2.2-Résistances des anneaux de fermeture

La cage rotorique présente en chaque extrémité un anneau de fermeture, reliant les barres entre elles et assurant à la fois sa continuité électrique et mécanique.

Dans la cage, nous utiliserons la résistance des morceaux de l'anneau qui relient entre eux deux barres voisines, sa résistance est obtenue en divisant la valeur de la résistance totale d'un anneau par le nombre de barres formant la cage du rotor

(figure IV.1).

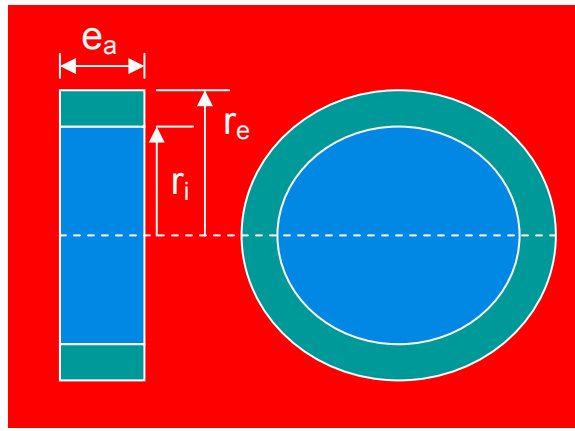


Figure IV.1 : Anneau simplifié, vue de côté et vue de face

Le calcul de la résistance de l'anneau entier est fait selon les formules (IV.7) et (IV.8), en remplaçant R_b par R_a (résistance d'un anneau), nous obtenons :

$$S = (r_e - r_i) e_a \quad (\text{IV.9})$$

$$l = 2\pi (r_e + r_i)/2 \quad (\text{IV.10})$$

où : S : surface de la section droite de l'anneau [m^2],

r_e, r_i : rayons de l'anneau extérieur et intérieur [m],

e_a : épaisseur latérale [m],

l : longueur moyenne de la bague [m].

La valeur de la résistance r_a d'un morceau de l'anneau est donnée par :

$$r_a = R_a/N \quad (\text{IV. 11})$$

avec N le nombre de barres formant la cage du rotor.

Dans le calcul des différentes valeurs nous avons pris :

$\rho_{Al} = 28.10^{-9} \Omega m$ [à 20°C] : résistivité de l'aluminium à 20°C.

$\alpha_{Al} = 3,9.10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, coefficient moyen de température de l'aluminium.

Nous avons considéré que les deux bagues de fermeture de la cage formant le rotor étaient identiques. Pour compléter le modèle multi-enroulement, nous présentons la matrice des résistances sur 90° mécanique (tableau IV.1).

Cette matrice est de la forme :

$$[R_{mT}] = \begin{bmatrix} [R_{ST}] & [0] \\ [0] & [R_{rT}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

La matrice $[R_{mT}]$ se compose de :

R_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	R_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	R_s	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0	0	0	0	0	+ R_b
0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0	0	0	0	0
0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0	0	0	0
0	0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0	0	0
0	0	0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0	0
0	0	0	0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b	0
0	0	0	0	0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$	- R_b
0	0	0	+ R_b	0	0	0	0	0	- R_b	$2R_b + 2r_a$

Tableau IV.1 : Matrice des résistances sur 90° mécanique

IV.4-Modélisation et domaine d'étude de la machine asynchrone à cage

Le domaine d'étude minimal qui permet la représentation d'une machine asynchrone à cage peut être :

- anti- périodique : π radians électriques,
- périodique : 2π radians électriques,
- général : 2π radians mécaniques.

La prise en compte des caractéristiques de (anti) périodicité de la structure électromagnétique permet, dans la plupart des cas, la réduction du domaine d'étude.

Puisque nous souhaitons déterminer les inductances du stator, du rotor et les inductances mutuelles entre les deux armatures, il est indispensable de représenter géométriquement les deux parties ferromagnétiques.

IV.4.1-Structure et maillage de la machine sur un quart du domaine d'étude

- Cas anti-périodique : π radians électriques

La machine présente la caractéristique d'anti-périodicité, alors la modélisation est faite sur le un quart afin de réduire le domaine d'étude de la machine (figure IV.2), de décroître le temps de calcul et simplifier le dessin de la géométrie (figure IV.3.a et IV.3.b) de la structure à analyser par le module EFDSIN du logiciel EFCAD.

Le maillage de la machine sous un pôle comporte (594) nœuds et (1023) éléments illustré par la figure IV.4.

Les conditions imposées aux limites du domaine sont d'anti-périodicité pour les limites latérales, et des conditions de DIRICHLET ($A = 0$) ailleurs, avec un mode d'alimentation des phases statoriques : (-1, 0), (+3, 0), (-2, 0) et (-4, 0), (+8, 0), (-5, 0) (+9, 0), (-6, 0), (+10, 0) (-7, 0), (+11, 0) pour les phases rotoriques (figure IV.5).

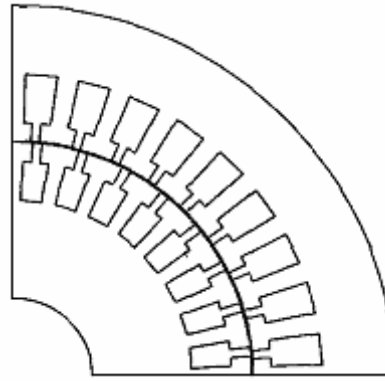


Figure IV.2 : Schéma de la structure de la machine sous un pôle

Stator :

Coordonnées des points représentant les encoches

- 1 (24.2 ; 0)
- 2 (24.2 ; 4)
- 3 (26.0 ; 4)
- 4 (26.0 ; 2)
- 5 (31.0 ; 2)
- 6 (31.0 ; 8)
- 7 (26.0 ; 8)
- 8 (26.0 ; 6)
- 9 (24.2 ; 6)
- 10 (24.2 ; 10)

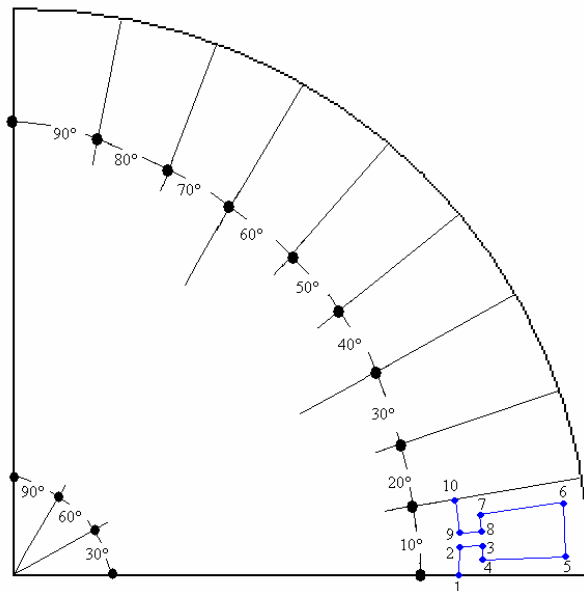


Figure IV.3.a : Coordonnées des encoches du stator

Rotor :

Coordonnées des points représentant
Les encoches :

- 1 (24.0 ; 0)
- 2 (24.0 ; 4.5)
- 3 (22.0 ; 4.5)
- 4 (22.0 ; 2.25)
- 5 (18.0 ; 2.25)
- 6 (18.0 ; 9)
- 7 (22.0 ; 9)
- 8 (22.0 ; 6.75)
- 9 (24.0 ; 6.75)
- 10 (24.0 ; 11.25)

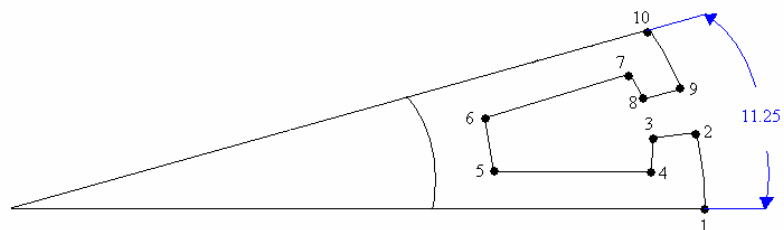


Figure IV.3.b : Coordonnées des encoches du rotor

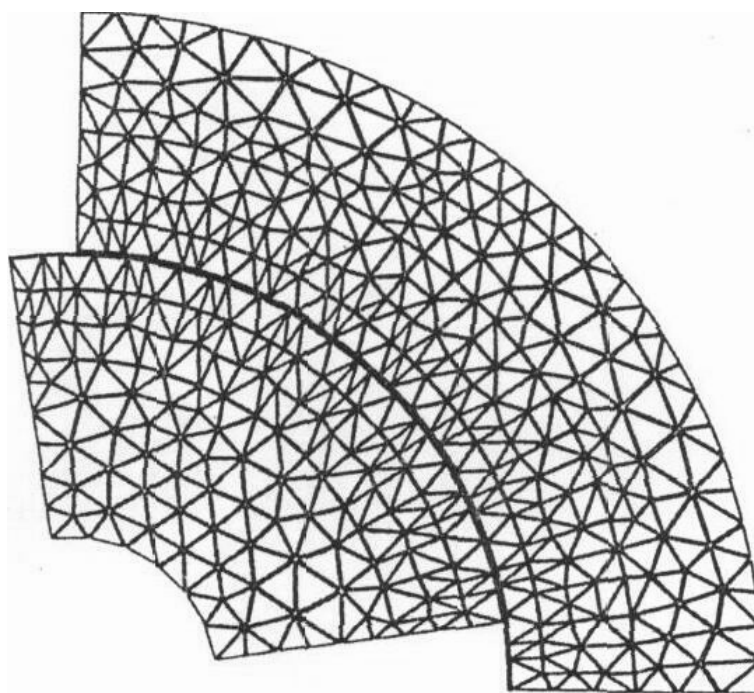


Figure IV.4 : Schéma du maillage de la machine sous un pôle avec un mouvement d'un pas du rotor

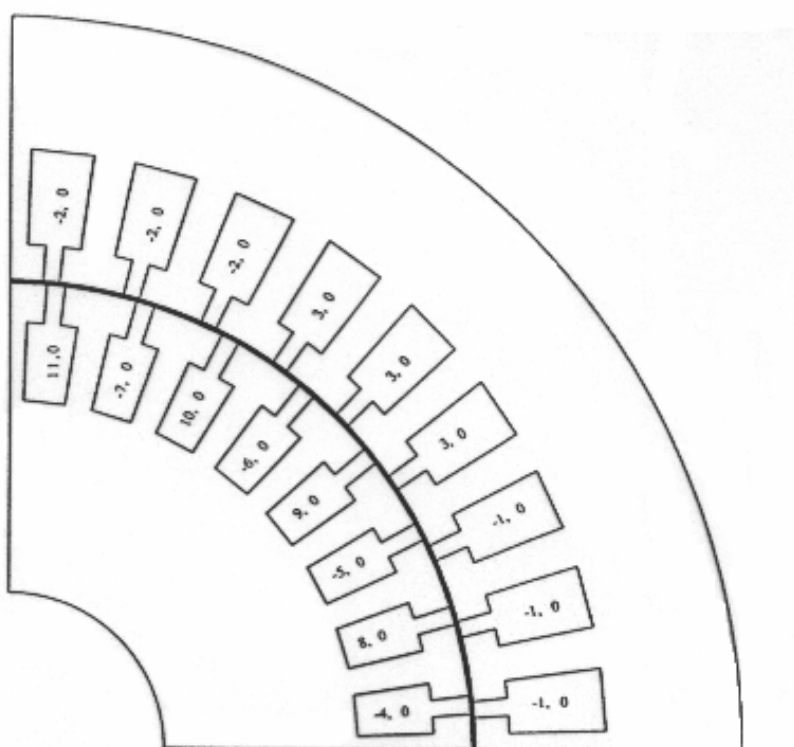


Figure IV.5 : Schéma de répartitions des phases de la machine sous un pôle

IV.4.2-Détermination des inductances propres et mutuelles de la machine, lorsque la modélisation est faite sur un quart de la machine

- Détermination des inductances propres du stator

Pour obtenir les inductance mutuelles stator/stator, on alimente une phase du stator seule, l'alimentation de chaque phase se fait séparément par le module EFCR2 du logiciel EFCAD, en précisant la nature de l'inductance à obtenir (propre ou mutuelle) et le numéro de la phase à alimenter. Nous obtenons les figures IV.6 à IV 8.

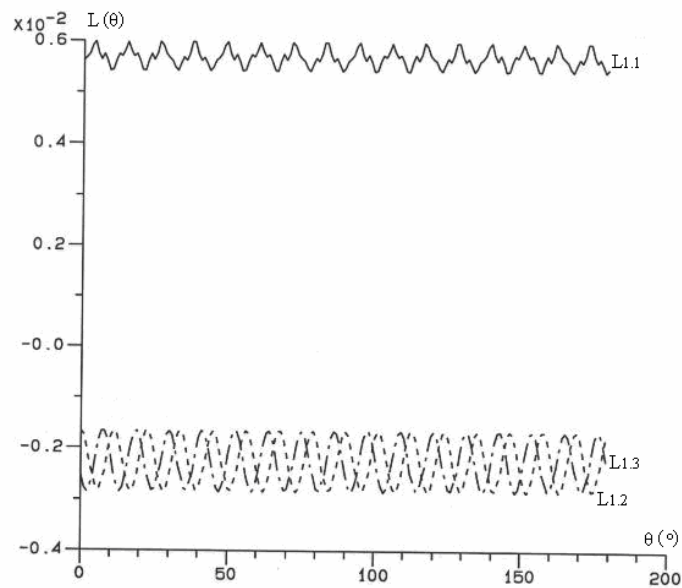


Figure IV.6 : Courbes des inductances propre et mutuelles stator/stator.

Phase 1 alimentée

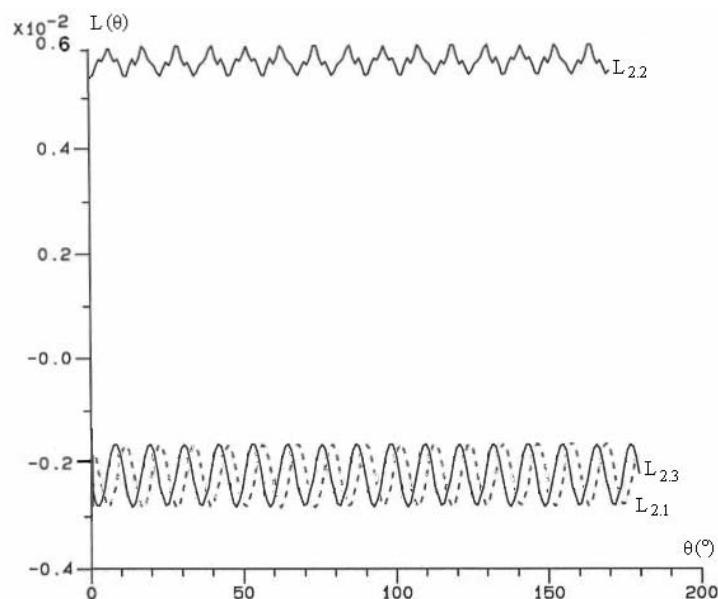


Figure IV.7 : Courbes des inductances propre et mutuelles stator/stator.

Phase 2 alimentée

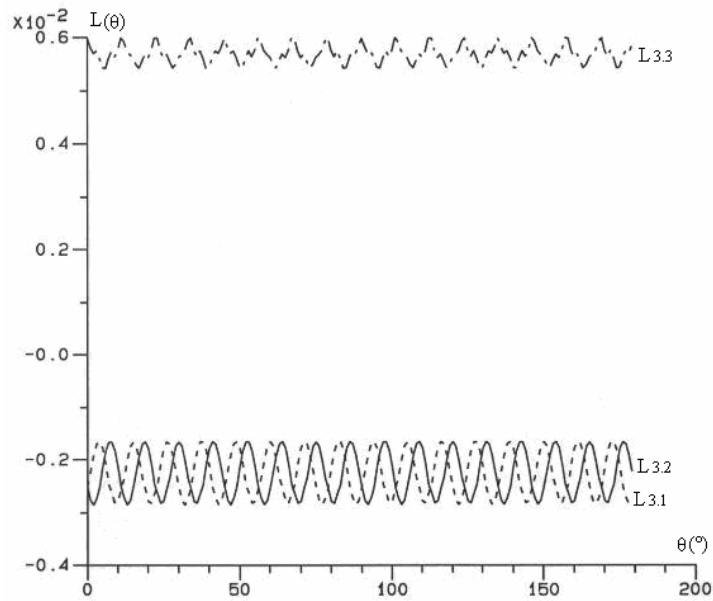


Figure IV.8 : Courbes des inductances propre et mutuelles stator/stator.
Phase 3 alimentée

Les courbes des inductances mutuelles stator/rotor sont obtenues en alimentant les trois phases du stator séparément : lorsque la phase 1 est alimentée nous aurons son inductance propre et ses mutuelles par rapport au rotor (figure IV.9), de même pour la deuxième et la troisième phase du stator (respectivement figures IV.10 et IV.11).

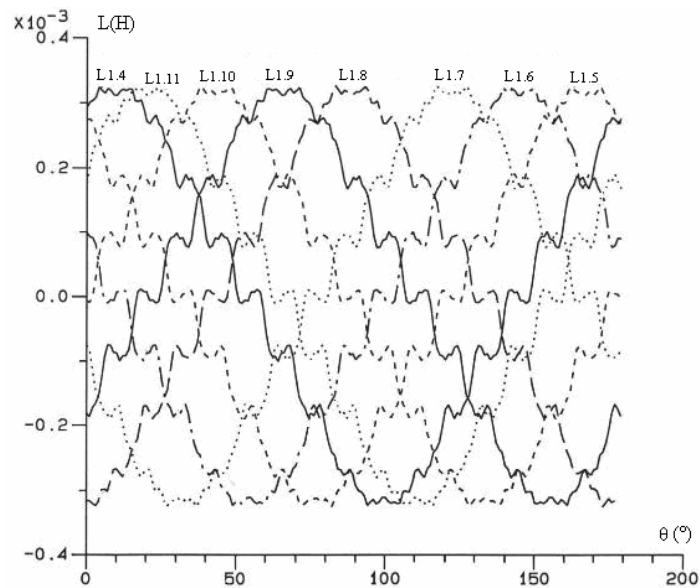


Figure IV.9 : Courbes des inductances mutuelles stator/ rotor.
Phase 1 alimentée

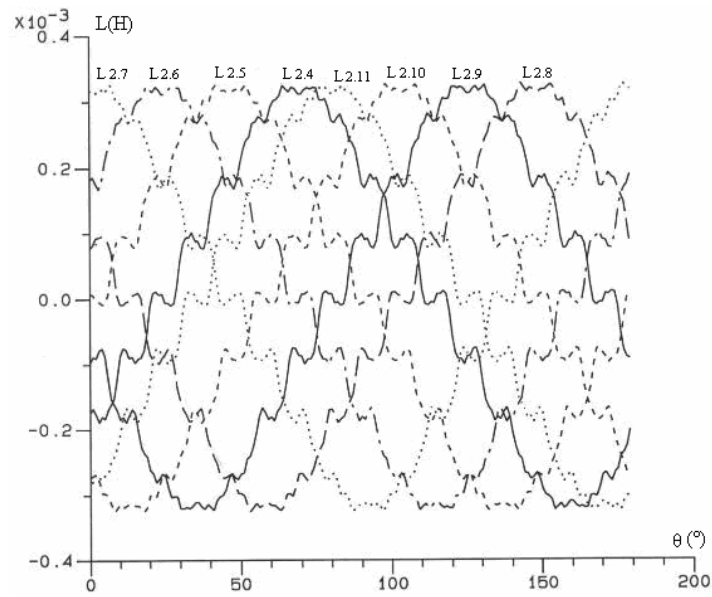


Figure IV.10 : Courbes des inductances mutuelles stator/ rotor.

Phase 2 alimentée

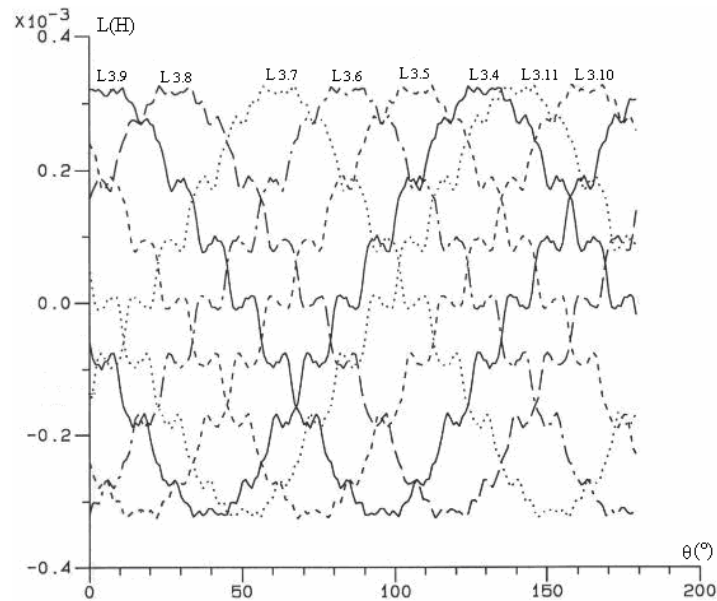


Figure IV.11 : Courbes des inductances mutuelles stator/ rotor.

Phase 3 alimentée

Pour obtenir les inductances propres et mutuelles de chaque phase du rotor, on alimente chaque phase séparément par le module EFCR2 du logiciel EFCAD, en précisant la nature de l'inductance (propre ou mutuelle) et le numéro de la phase à alimenter (figures IV.12 à IV.19).

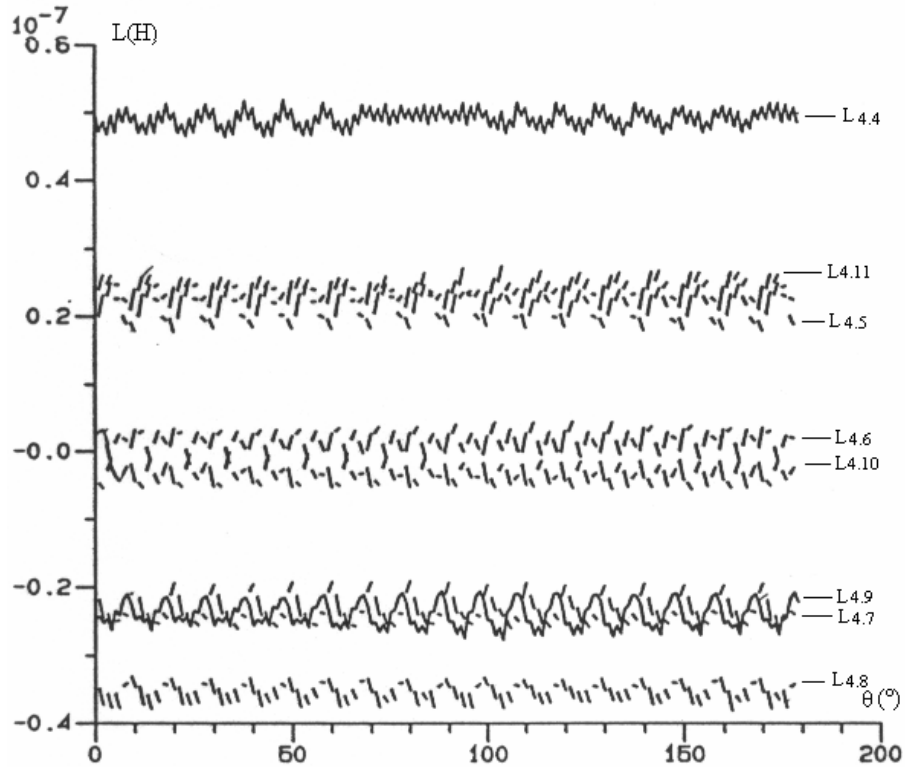


Figure IV.12 : Courbes des inductances mutuelles et propres rotor/rotor.
barre 1 alimentée (numérotée 4)

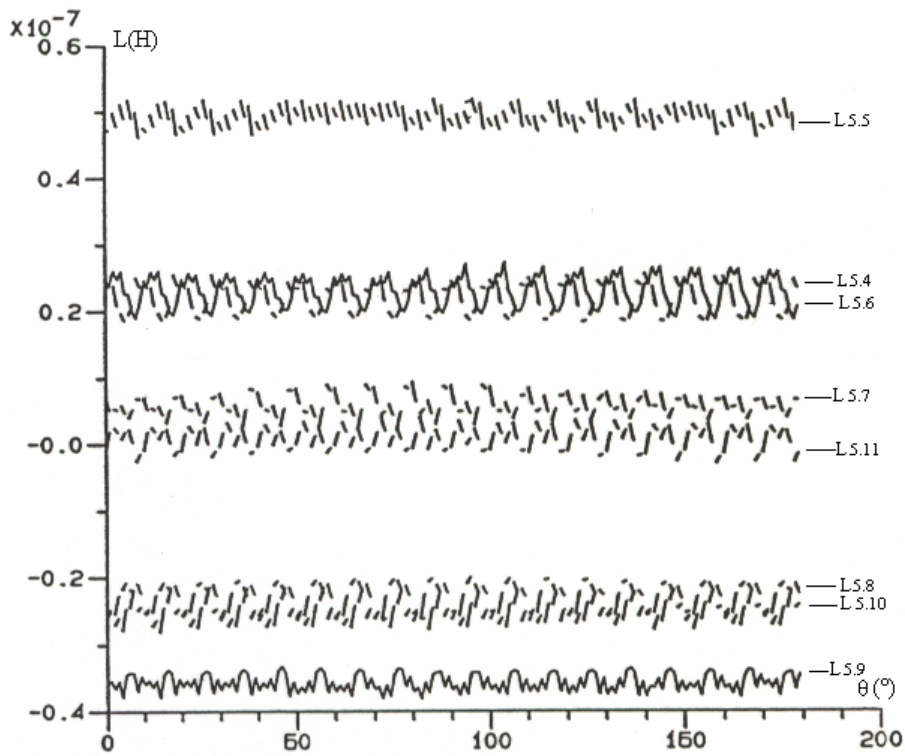


Figure. IV.13 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 2 alimentée (numérotée 5)

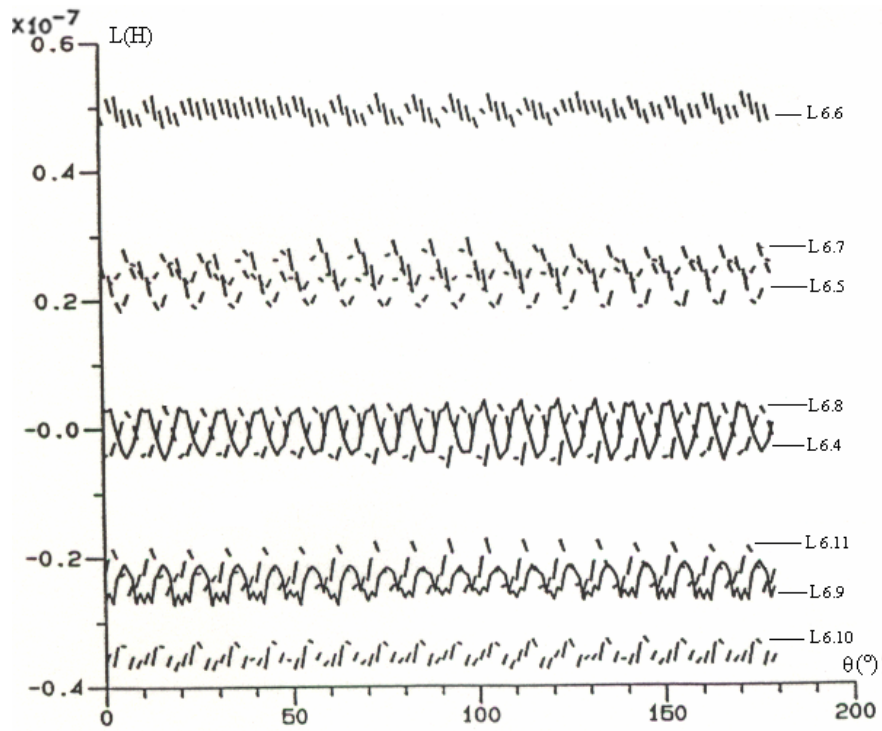


Figure IV.14 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 3 alimentée (numérotée 6)

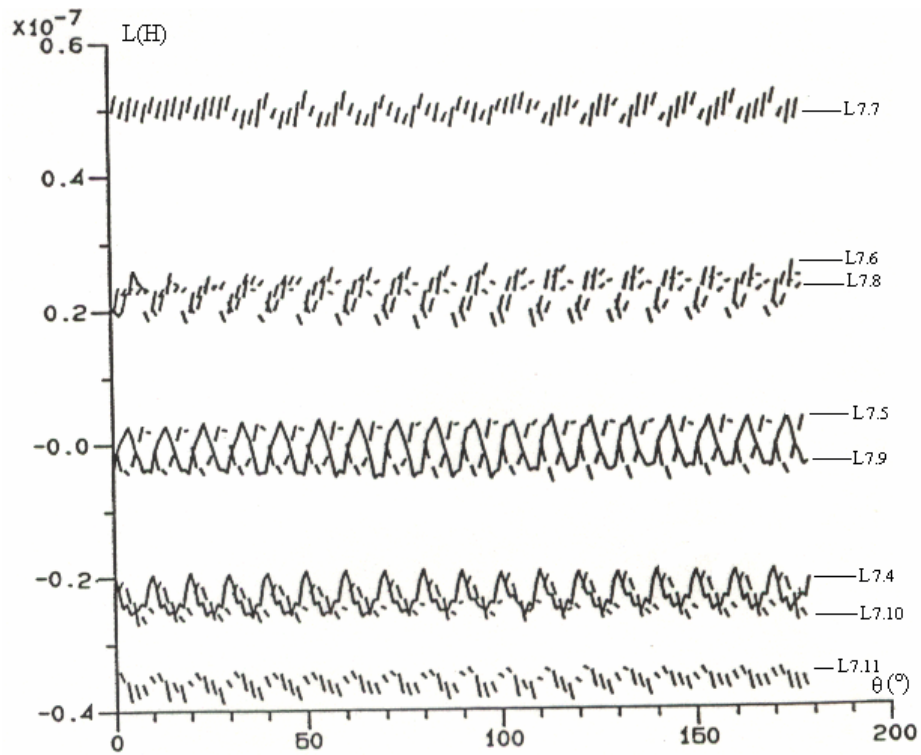


Figure IV.15 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 4 alimentée (numérotée 7)

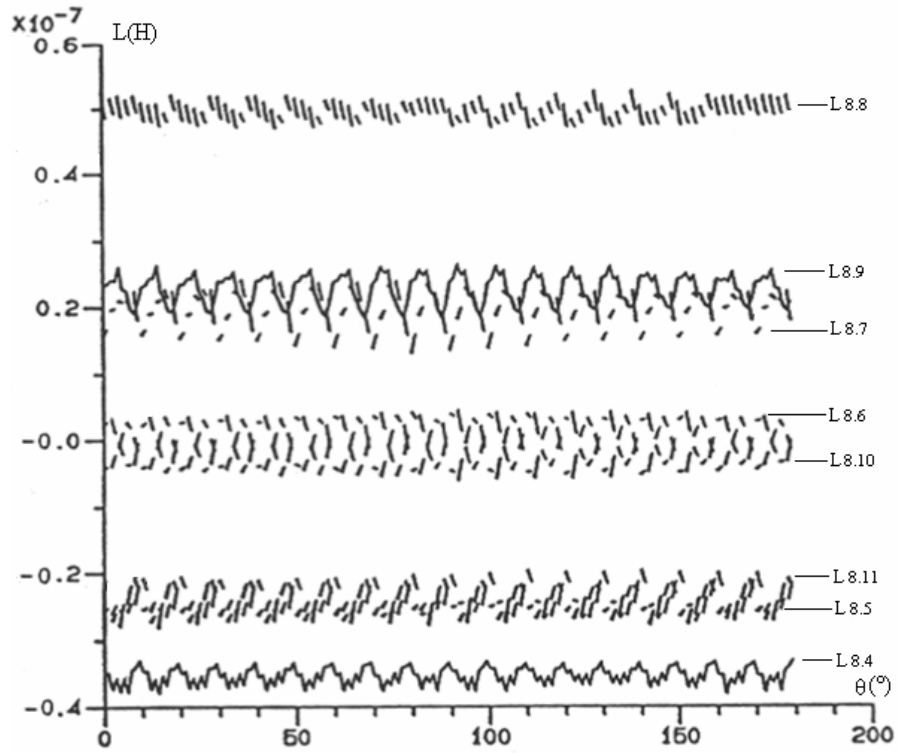


Figure IV.16 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 5 alimentée (numérotée 8)

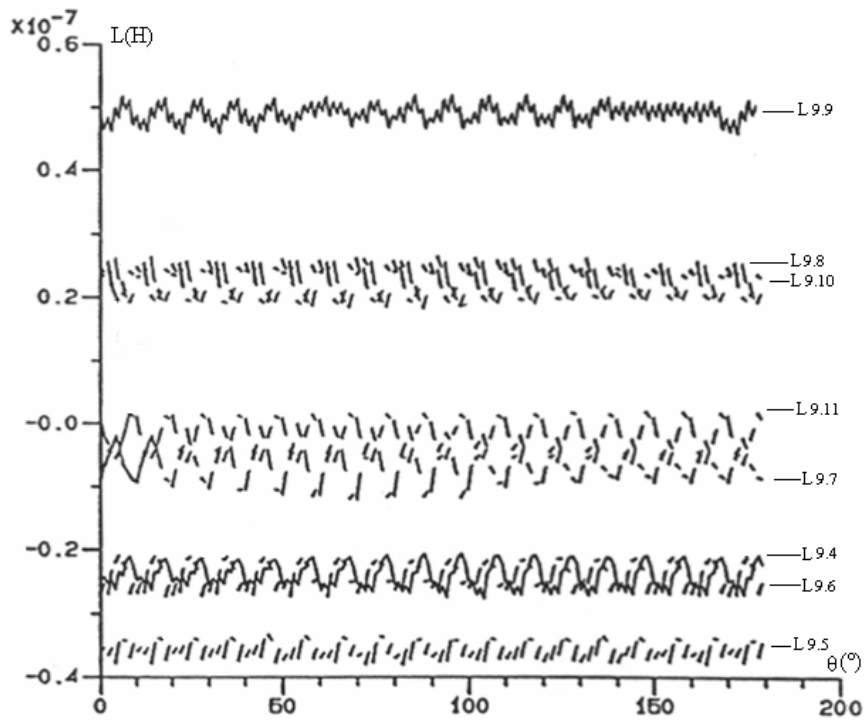


Figure IV.17 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 6 alimentée (numérotée 9)

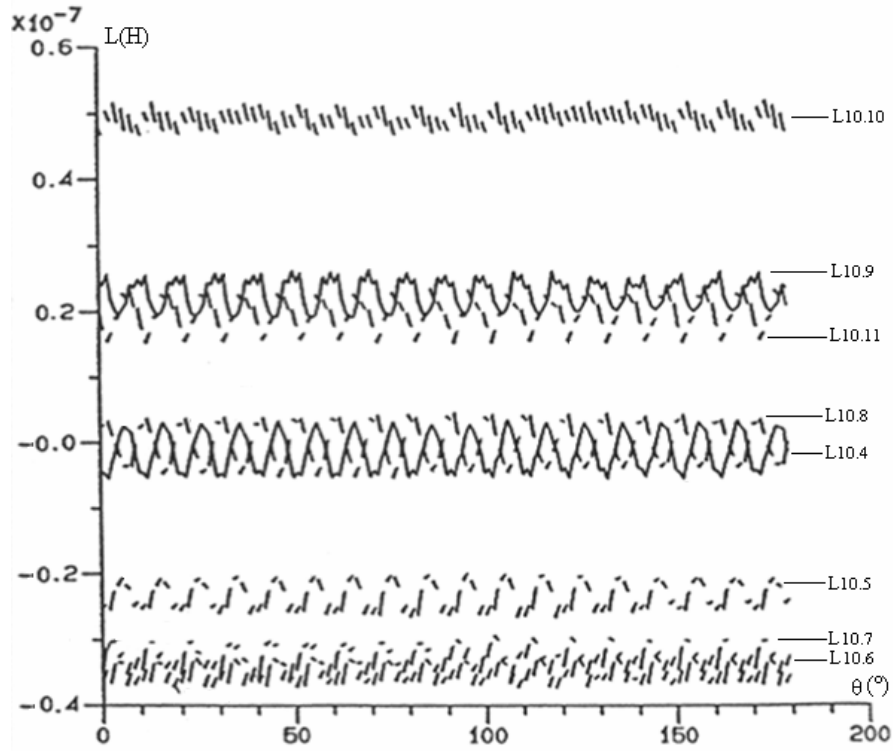


Figure IV.18 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 7 alimentée (numérotée 10)

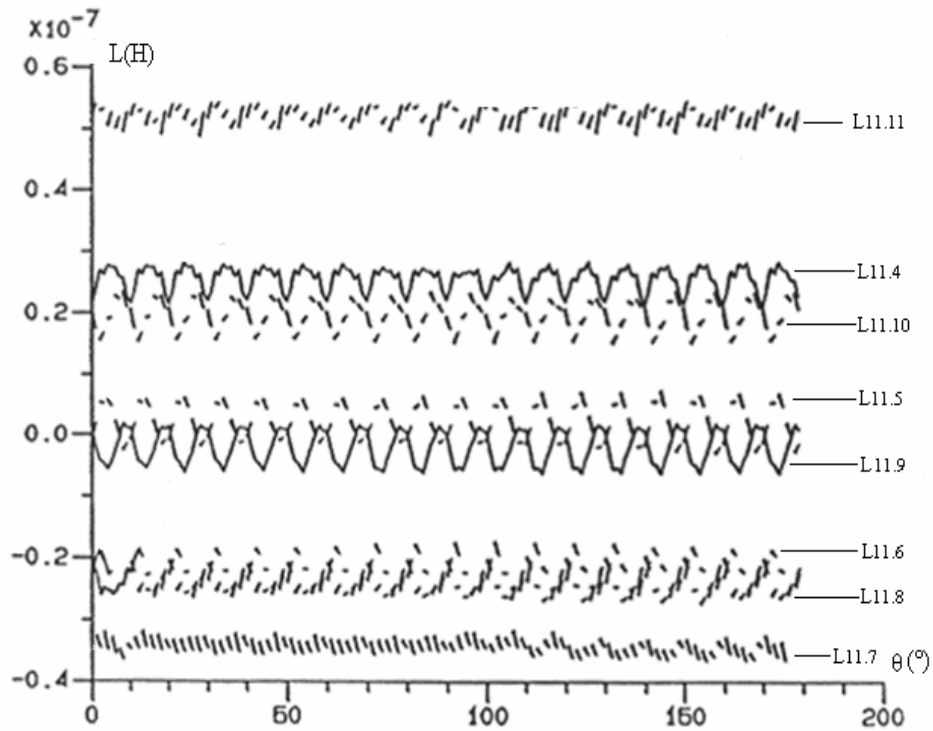


Figure IV.19 : Courbes des inductances mutuelles rotor/rotor.
barre 8 alimentée (numérotée 11)

IV.5-Interprétation des courbes obtenues

Les valeurs des courbes obtenues donnent des résultats satisfaisants et correspondent à la structure de la machine et au mode de bobinage.

Nous remarquons, en premier lieu, la présence d'une symétrie de la matrice inductance $L_{(θ)}$, qui est tout à fait logique et correspond à la topologie de la machine d'où $L_{i,j}(θ) = L_{j,i}(θ)$

Pour la sous-matrice stator/stator les inductances propres sont égales, et les inductances mutuelles sont égales en module avec un déphasage de $2π/3$.

a) inductances propres stator :

$$L_{i,j} = L_{j,i} \text{ (} i=1,2,3 \text{ ; } j=1,2,3 \text{)}$$

b) inductances mutuelles stator/stator :

$$L_{1,2} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta + \psi_n) \quad \text{et} \quad L_{1,2} = L_{2,1}$$

$$L_{1,3} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta + \psi_n + 2\pi/3) \quad \text{et} \quad L_{1,3} = L_{3,1}$$

$$L_{2,3} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta + \psi_n + 4\pi/3) \quad \text{et} \quad L_{2,3} = L_{3,2}$$

Pour la sous-matrice stator/rotor est égale à la sous matrice rotor/stator. Les inductances mutuelles sont égales entre elles avec un déphasage de $2π/8$ qui correspond, tout à fait, à la disposition des barres autour du périmètre de la cage de la machine asynchrone.

inductances mutuelles stator /rotor:

$$L_{i,k}(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\theta + \psi_n + (i-1) 2\pi/3 + (k-4) 2\pi/8]$$

$$i = 1, 2, 3 \text{ et } k = 4, 5, \dots, 11 \quad \text{et} \quad L_{k,i}(\theta) = L_{i,k}(\theta)$$

Par contre, la sous-matrice rotor/rotor est symétrique par rapport à la diagonale et se caractérise par une relation particulière entre ses éléments qui est l'égalité entre ces derniers suivant une diagonale (Tableau IV.2), de plus cette matrice est circulaire.

L_{4.4}	L _{4.5}	L _{4.6}	L _{4.7}	L _{4.8}	L _{4.9}	L _{4.10}	L _{4.11}
	L_{5.5}	L _{5.6}	L _{5.7}	L _{5.8}	L _{5.9}	L _{5.10}	L _{5.11}
		L_{6.6}	L _{6.7}	L _{6.8}	L _{6.9}	L _{6.10}	L _{6.11}
			L_{7.7}	L _{7.8}	L _{7.9}	L _{7.10}	L _{7.11}
				L_{8.8}	L _{8.9}	L _{8.10}	L _{8.11}
					L_{9.9}	L _{9.10}	L _{9.11}
						L_{10.10}	L _{10.11}
							L_{11.11}

Tableau IV.2 : matrice des inductances et mutuelles rotor/rotor

$$L_{4.5}(\theta) = L_{5.6}(\theta) = L_{6.7}(\theta) = L_{7.8}(\theta) = L_{8.9}(\theta) = L_{9.10}(\theta) = L_{10.11}(\theta) = L_{4.11}(\theta)$$

$$L_{4.6}(\theta) = L_{5.7}(\theta) = L_{6.8}(\theta) = L_{7.9}(\theta) = L_{8.10}(\theta) = L_{9.11}(\theta) = L_{5.11}(\theta) = L_{4.10}(\theta)$$

$$L_{4.7}(\theta) = L_{5.8}(\theta) = L_{6.9}(\theta) = L_{7.10}(\theta) = L_{8.11}(\theta) = L_{4.9}(\theta) = L_{5.10}(\theta) = L_{6.11}(\theta)$$

$$L_{4.8}(\theta) = L_{5.9}(\theta) = L_{6.10}(\theta) = L_{7.11}(\theta)$$

a) inductances propres du rotor :

$$L_{i,j} = L_{j,i} \quad (i = 4, \dots, 11 ; j = 4, \dots, 11)$$

b) inductances mutuelles rotor/rotor :

$$L_{k,k+1} \quad \text{pour } k = 4, 5, \dots, 10$$

$$L_{k,k+2} \quad \text{pour } k = 4, 5, \dots, 9$$

$$L_{k,k+3} \quad \text{pour } k = 4, 5, \dots, 8$$

$$L_{k,k+4} \quad \text{pour } k = 4, 5, \dots, 7$$

$$L_{k,k+5} \quad \text{pour } k = 4, 5, 6$$

$$L_{k,k+6} \quad \text{pour } k = 4, 5$$

$$\text{D'où} \quad L_{k,k+1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\theta + \psi_n)]$$

De cela nous pouvons affirmer, que de ces relations nous avons réduit considérablement le temps de calcul de la détermination de la matrice des inductances de la machine asynchrone à cage, en programmant 5 fois au lieu de 11 fois.

IV.6-Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la détermination numérique des paramètres du modèle multi-enroulement de la machine asynchrone.

Pour cela, nous avons présenté la machine considérée avec ses différentes caractéristiques (équations électriques et géométriques).

Par la suite, nous avons calculé les résistances du modèle multi-enroulement de la machine considérée, en prenant en compte les anneaux de fermeture de la cage et de la température de travail.

Vu la caractéristique d'anti-périodicité que présente la machine, nous avons effectué une modélisation sur le un quart, correspondant à 90° mécaniques à partir de laquelle nous avons déterminé toutes les inductances propres et mutuelles de la machine asynchrone.

En outre, une interprétation profonde des différentes courbes des inductances mutuelles et propres obtenues par modélisation est faite afin de valider et de vérifier leur conformité avec la géométrie et la structure de la machine.

CHAPITRE V

Interprétation des résultats et validation

V.1-Introduction

Après l'obtention des différentes courbes des inductances (propres et mutuelles) par le logiciel EFCAD et des valeurs des résistances (barres et anneaux) du modèle multi-enroulement dans le chapitre précédent. La résolution du système d'équations instantanées de la machine par une méthode numérique (Runge-Kutta) apportera les informations nécessaires (les courants dans les barres, la vitesse et couple électromagnétique) pour l'analyse du fonctionnement de la machine asynchrone à rotor à cage [63-64].

Pour ce faire, une première étape consiste à réaliser le passage de la forme d'ondes des différentes courbes des inductances (propres et mutuelles) de la machine à la forme analytique (analyse en série de Fourier) [63].

Après avoir obtenu les expressions analytiques des différentes inductances, nous établirons un deuxième algorithme afin de résoudre le système d'équations décrivant le fonctionnement de la machine asynchrone à cage par une méthode numérique (Runge-Kutta).

Dans la partie finale de ce chapitre, nous validerons les résultats du modèle multi-enroulement en les comparant avec le modèle diphasé de Park.

V.2-Résultats du modèle multi-enroulement

V.2.1-Détermination des expressions analytiques par la méthode numérique

La structure de l'algorithme (figure V.1) permet de déterminer les expressions analytiques des différents éléments formant la matrice inductance, constituées de propres et mutuelles à partir des formes d'ondes des inductances de la matrice de la machine, obtenues du logiciel EFCAD paragraphe IV.4.1, en utilisant la décomposition de Fourier.

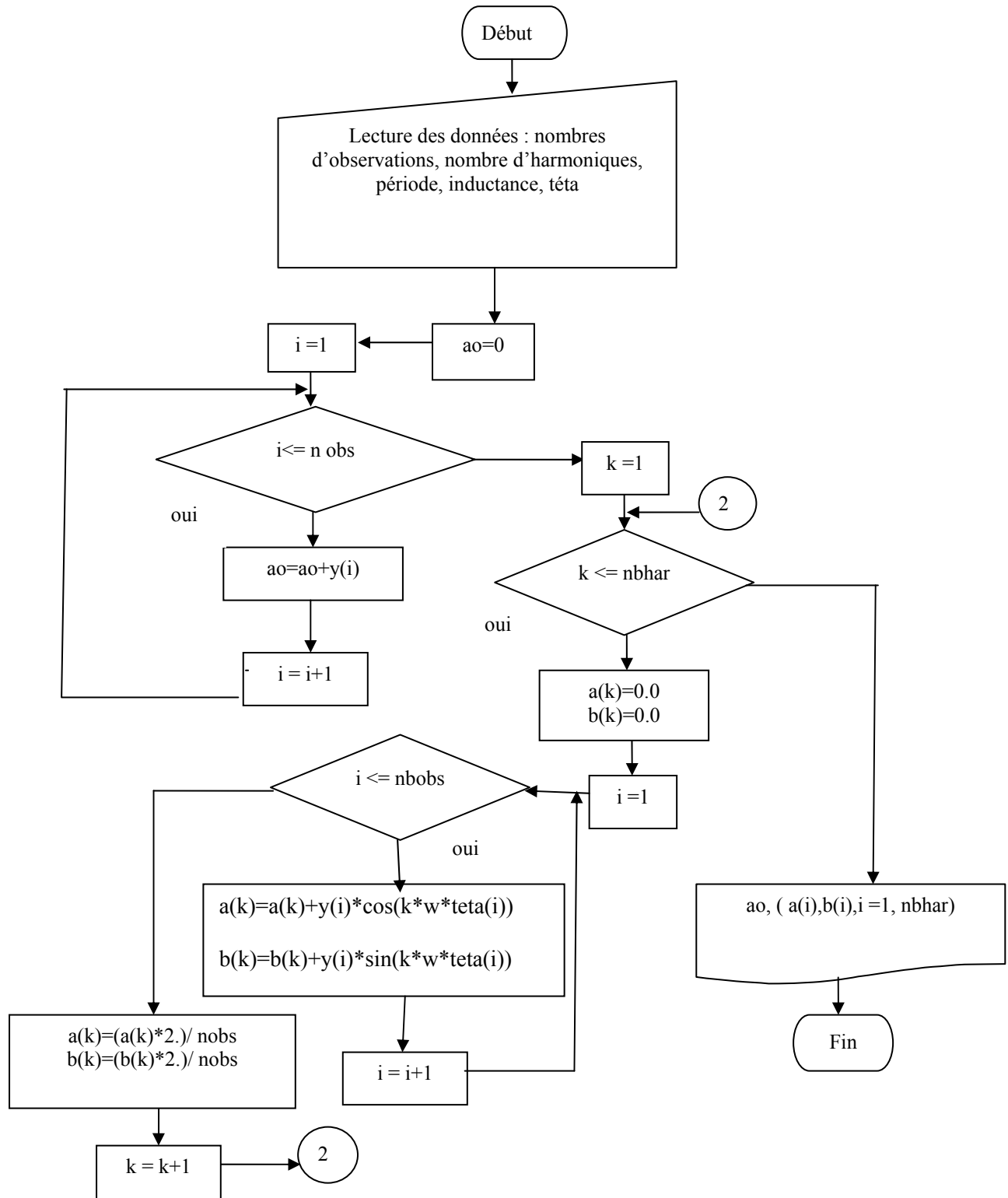


Figure V.1 : Organigramme déterminant les expressions analytiques des inductances

V.2.2-Programme de simulation de la MAS (modèle multi-enroulement)

Le programme général est constitué d'une partie principale faisant appel à trois sous-routines (inverse de la matrice des inductances, Derivs et Runge-Kutta). Le passage par les différentes étapes de programme (figure V.2) nous permet de résoudre le système : $(d/dt) [X] = [M]^{-1}[Y]$ du paragraphe II.4 par la méthode de Runge-Kutta, afin d'arriver aux résultats souhaités c'est-à-dire l'évolution des grandeurs de la machine (courants dans les barres de la cage, ainsi que la vitesse angulaire et le couple électromagnétique).

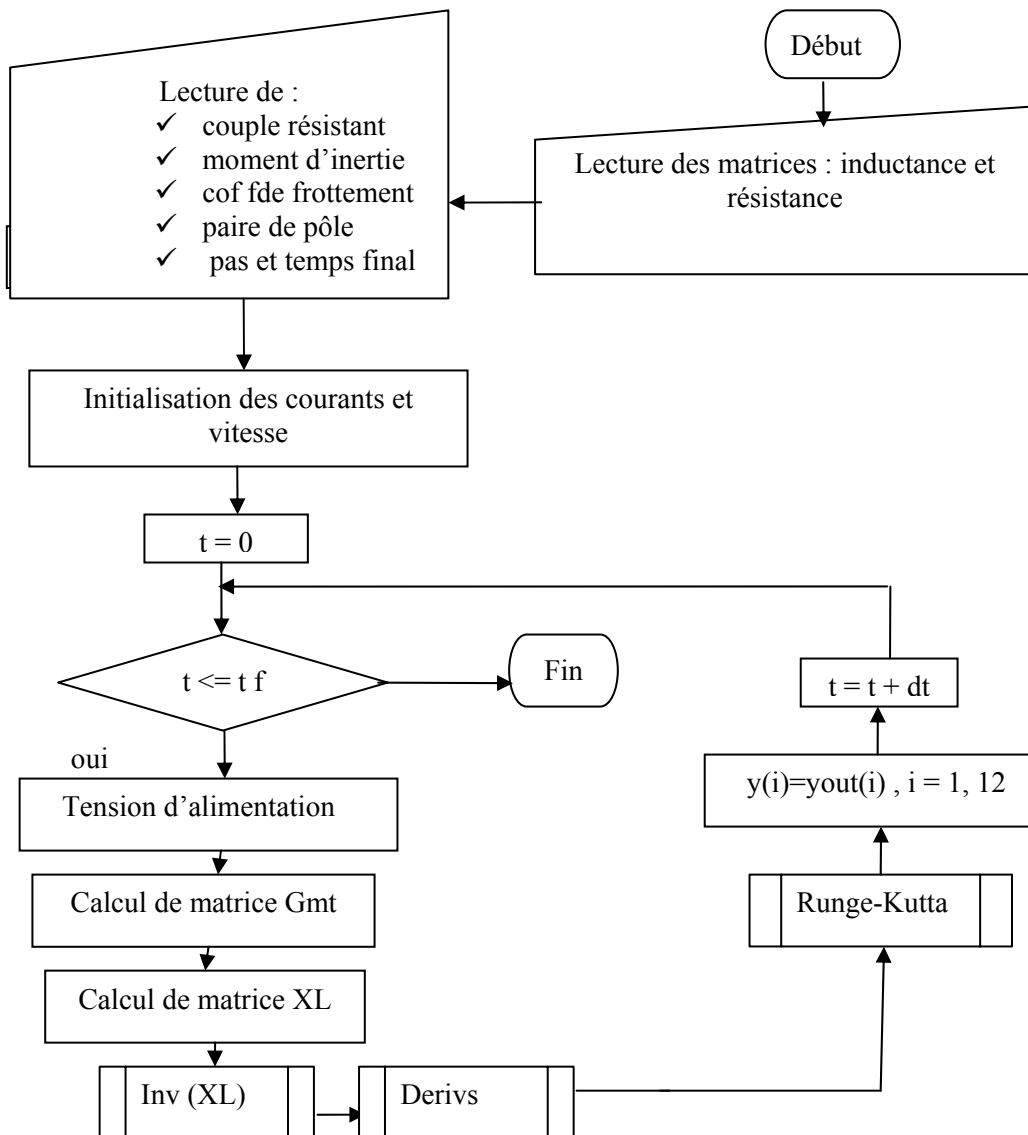


Figure V.2 : Organigramme général

V.2.3-Résultats issus de la modélisation du modèle multi-enroulement

Le programme général issu du (modèle multi-enroulement), nous a permis la résolution du système d'équation résultant de la discrétisation.

Ce résultat numérique contient toutes les informations recherchées (courants dans les barres, vitesse de la machine et le couple électromagnétique) à vide et en charge, illustrées par les figures (V.3 à V.26).

L'ensemble des caractéristiques est issu de la modélisation de la machine asynchrone lors de l'application d'un couple extérieur à l'arbre de 10 N.m à l'instant t égal à 0.5 seconde.

Ces caractéristiques représentent, respectivement, la vitesse de rotation de la machine, les courants rotoriques dans chaque barre de la cage formant le rotor et le couple électromagnétique (figures V.3 à V.24).

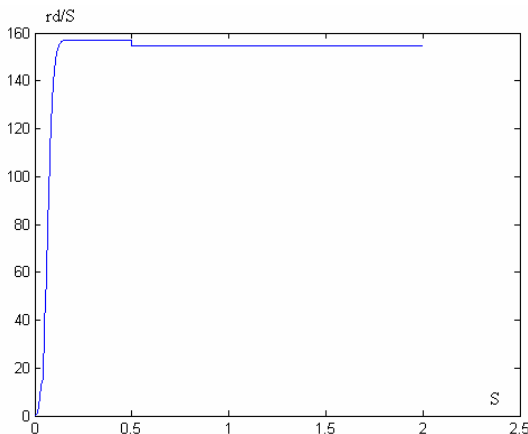


Figure V. 3. : Courbe de vitesse

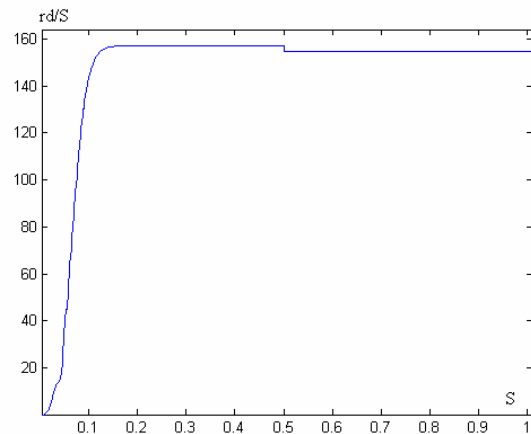


Figure V. 4. : Courbe de vitesse (Zoom)

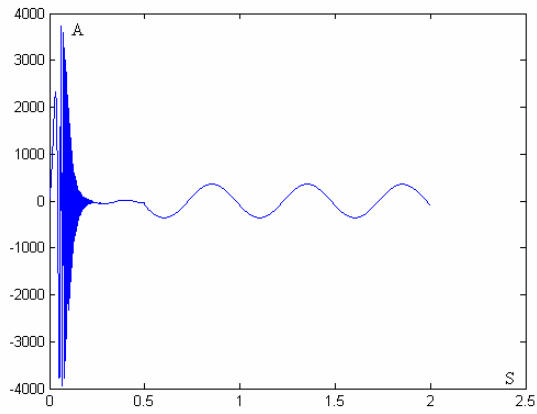


Figure V. 5 : Courant barre 1

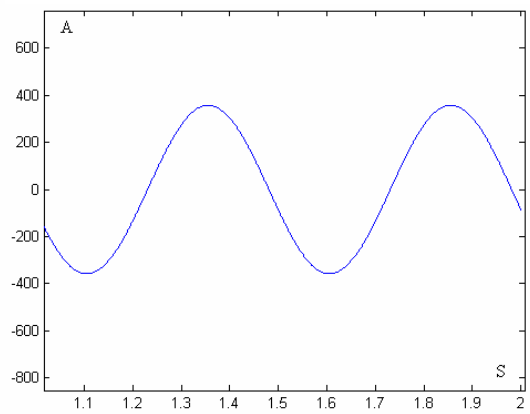


Figure V. 6 : Courant barre 1 (Zoom)

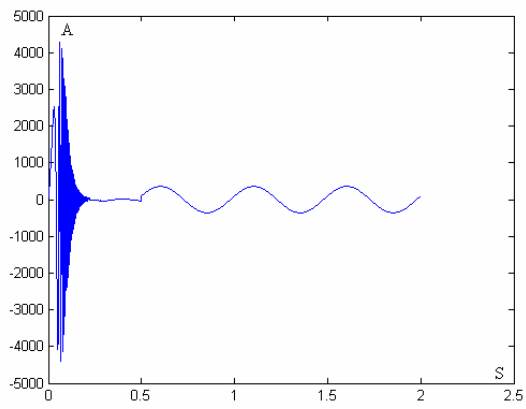


Figure V. 7 : Courant barre 2

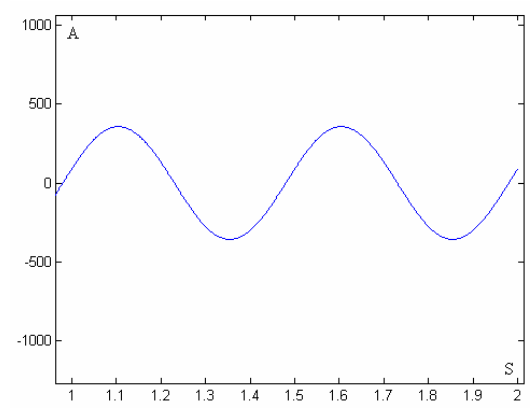


Figure V. 8 : Courant barre 2 (Zoom)

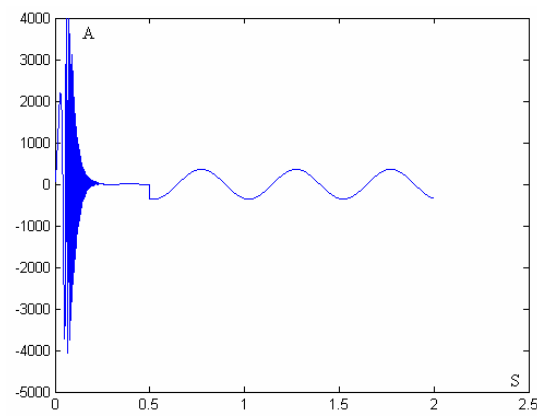


Figure V. 9 : Courant barre 3

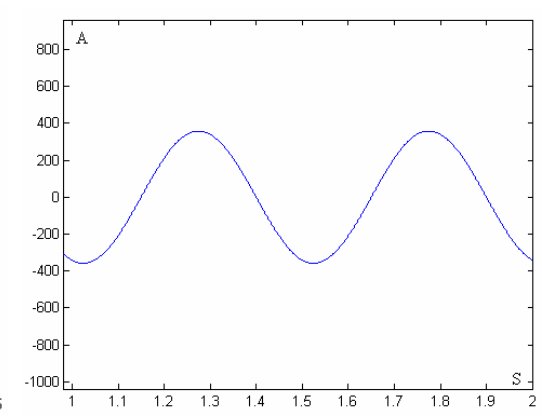


Figure V. 10 : Courant barre 3 (Zoom)

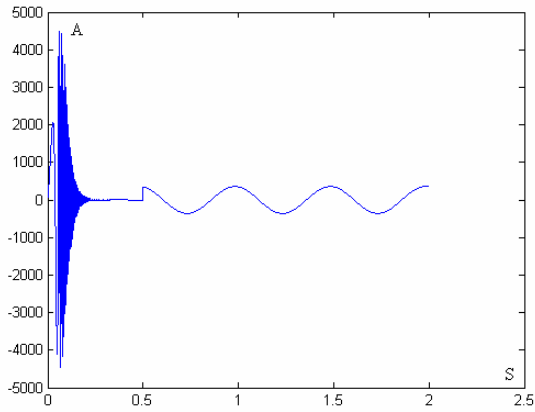


Figure V. 11 : Courant barre 4

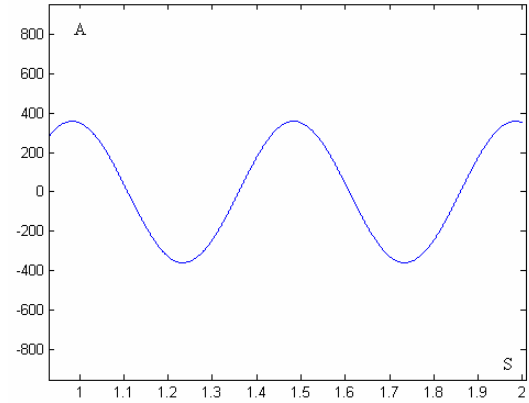


Figure V. 12 : Courant barre 4 (Zoom)

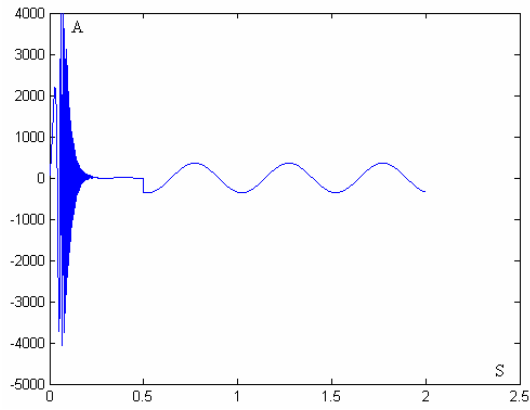


Figure V. 13 : Courant barre 5

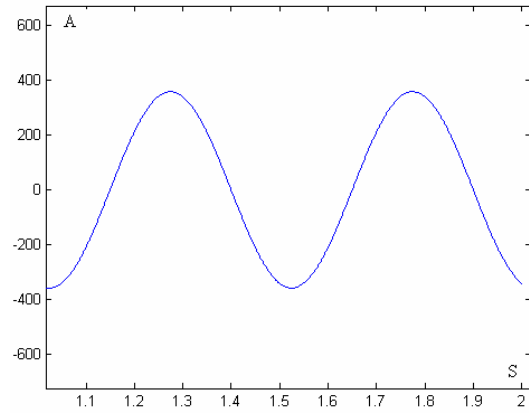


Figure V. 14 : Courant barre 5 (Zoom)

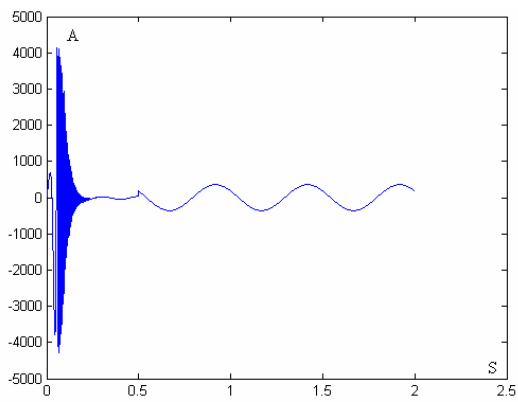


Figure V. 15 : Courant barre 6

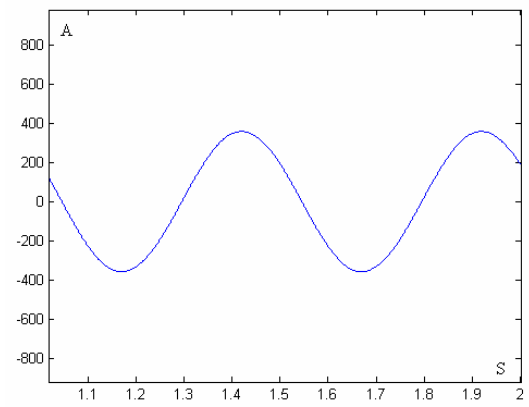


Figure V. 16 : Courant barre 6 (Zoom)

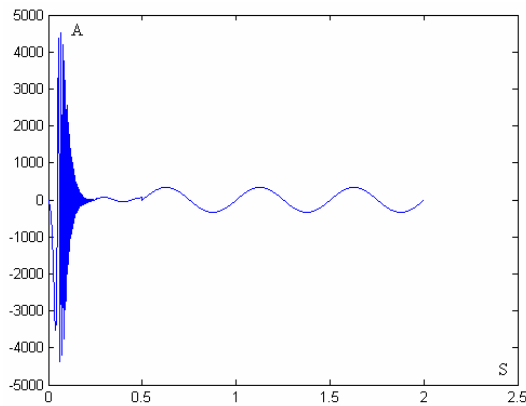


Figure V. 17 : Courant barre 7

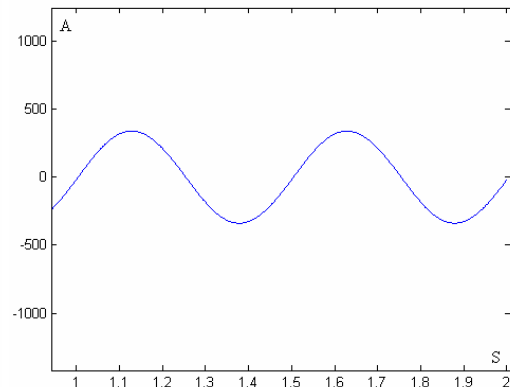


Figure V. 18 : Courant barre 7 (Zoom)

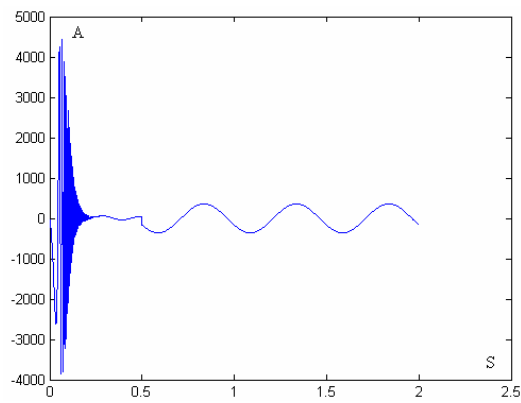


Figure V. 19 : Courant barre 8

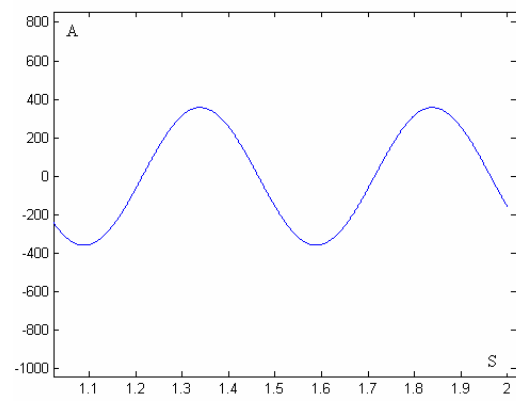


Figure V. 20 : Courant barre 8 (Zoom)

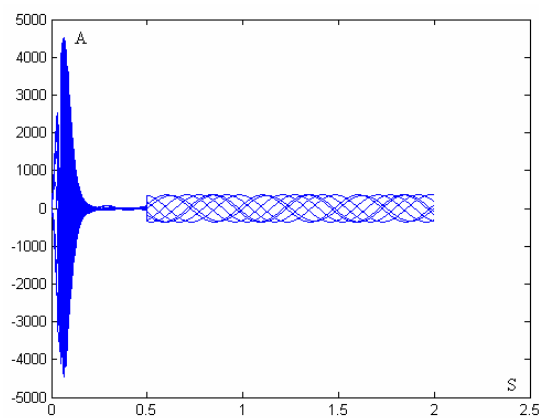


Figure V. 21 : Courants dans les barres rotoriques

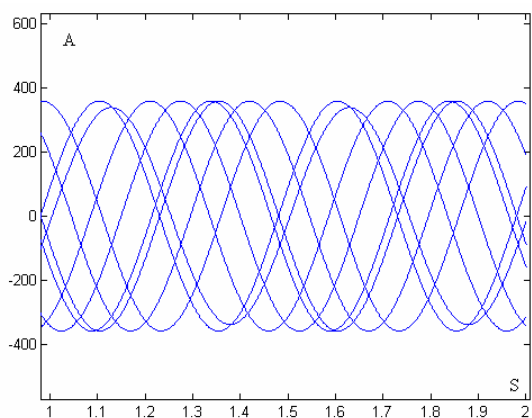


Figure V. 22 : Courants dans les barres rotoriques (Zoom)

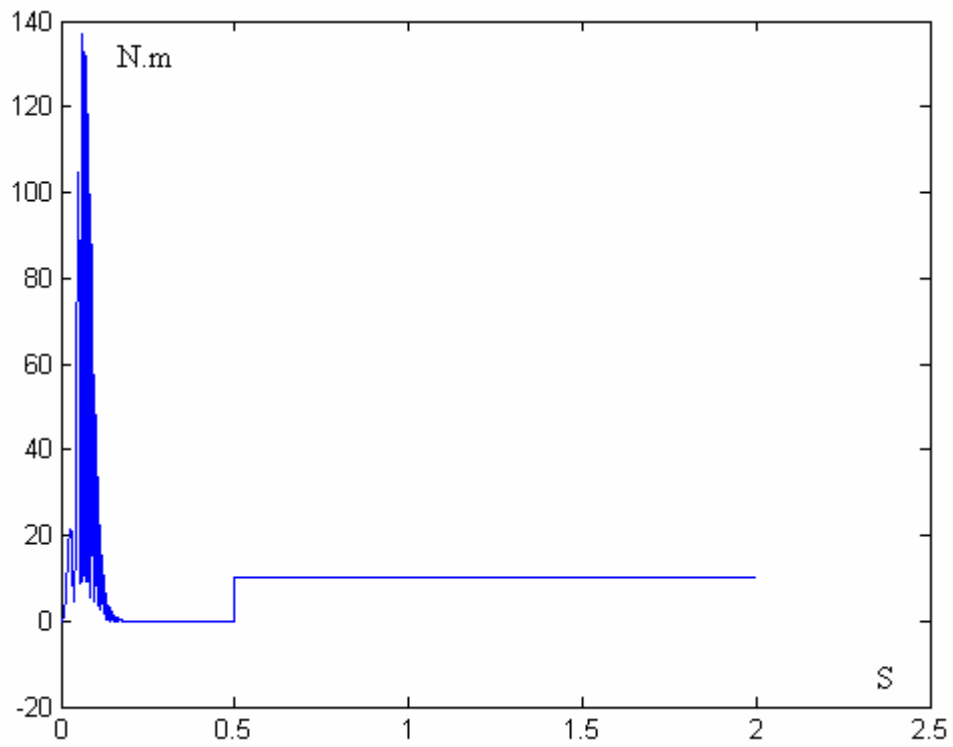


Figure V. 23 : Courbe du couple électromagnétique

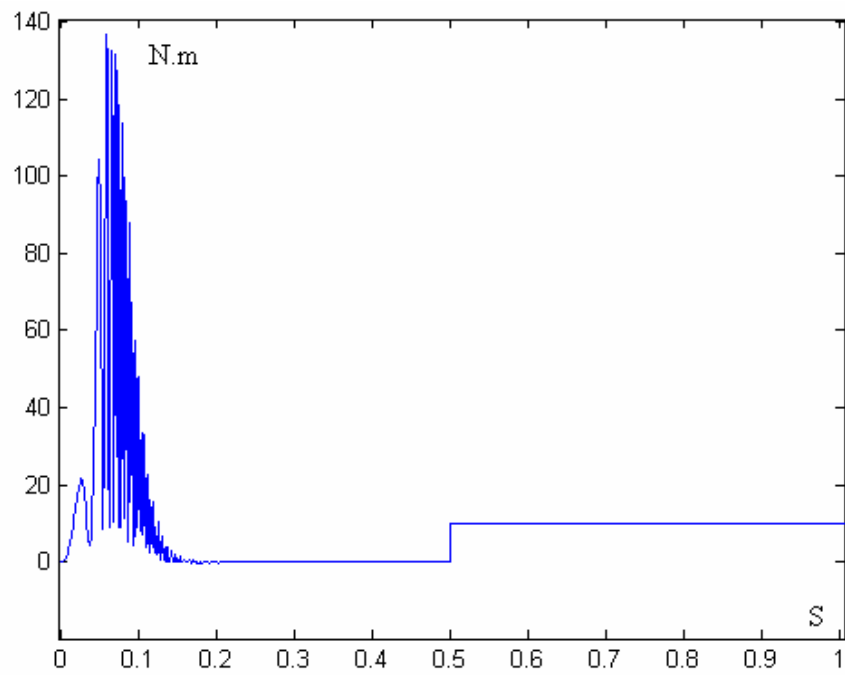


Figure V. 24 : Zoom du couple

V.2.4-Analyses et interprétations des courbes

De l'analyse des courbes (figures V. 5 à V. 20), nous constatons que les courants circulant dans les barres de cage de la machine sont très élevés. Ils peuvent atteindre pendant le régime transitoire quelques milliers d'Ampères (4500 A). Quant au régime permanent, les courants dans les barres peuvent atteindre 358 A. Nous remarquons, aussi, l'importance de l'aspect oscillatoire sur ces courbes au début transitoire.

Pour l'évolution des courants rotoriques, le modèle multi-enroulement met à jour les courants réels des barres de la cage rotorique, ce qui est intéressant pour l'étude ponctuelle du comportement des paramètres de la cage en régime dynamique.

Leurs valeurs s'accordent bien pour l'ensemble des barres et correspondent à la position de chaque barre sur la cage. Ces valeurs sont en relation directe avec les valeurs des inductances propres et mutuelles, ainsi, que les distances qui séparent les barres autour de l'anneau de fermeture de la cage.

V. 3-Validation du modèle multi-enroulement

Précédemment, nous avons développé et présenté le modèle multi-enroulement qui est censé représenter la machine asynchrone à cage d'écureuil. Encore faut-il qu'on indique avec quel degré de précision ce modèle représente la machine par les différentes caractéristiques et le mode de fonctionnement.

Pour cela, nous effectuons une comparaison des résultats obtenus avec le logiciel EFCAD du modèle multi-enroulement et ceux obtenus avec le logiciel Matlab-Simulink du modèle classique de Park. Une comparaison est faite entre les paramètres de sorties issues des deux méthodes : vitesse et couple.

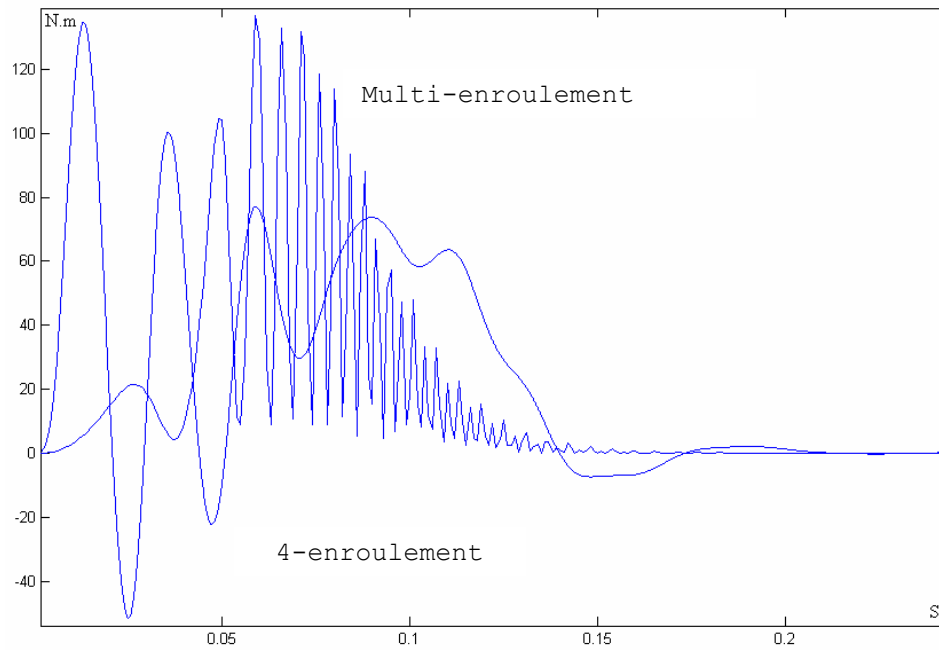


Figure V. 25 : Comparaison des Courbes du couple à vide des deux modèles

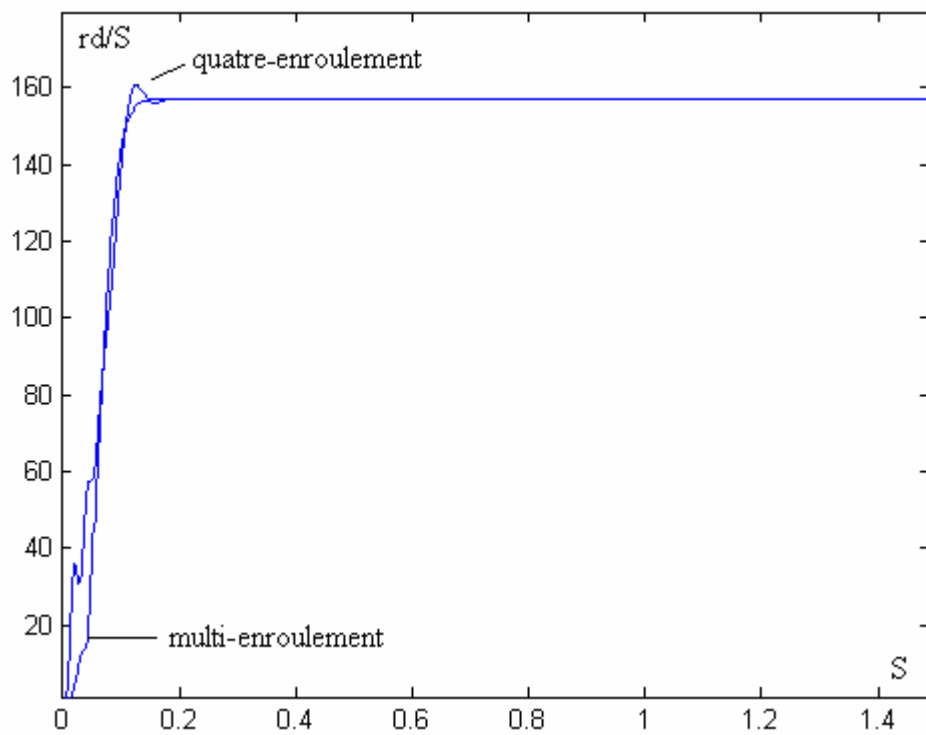


Figure V. 26 : Comparaison des Courbes de la vitesse des deux modèles

V.3.1-Analyses et interprétations des courbes obtenues par le modèle multi-enroulement et le modèle à quatre enroulements (modèle de Park)

En analysant les résultats des courbes (Figure V. 25 et Figure V. 26) obtenues avec le modèle multi-enroulement et ceux du modèle à quatre enroulements (Park), nous constatons :

Pour les vitesses : l'intervalle transitoire commence par un temps de réponse légèrement plus rapide de la courbe du modèle à quatre –enroulements, que celle du modèle multi-enroulement et ceci sur un laps de temps de 0.07 seconde. Ensuite, les courbes se joignent parfaitement pour enfin se stabiliser en régime permanent.

Egalement, nous constatons, un léger dépassement (pic 160 rd/S) à la fin de la montée de courbe de vitesse du modèle à quatre–enroulements dans l'intervalle $0.125 \div 0.135$ seconde. Ces petites différences peuvent être dues à la fin de l'inertie de la machine et au nombre des courants beaucoup plus important pris en compte dans la modélisation du modèle multi-enroulement.

Pour les couples : l'analyse des résultats obtenus par la modélisation des deux modèles par superposition, nous permet de remarquer que le comportement du début du transitoire du couple électromagnétique du modèle multi-enroulement est légèrement long (0.028 seconde de retard) et plus oscillatoire par rapport au couple électromagnétique du modèle à quatre-enroulement.

Ceci peut être dû à la prise en compte de tous les paramètres de la machine au lieu de cinq paramètres dans le modèle de Park. Par contre, le couple électromagnétique du modèle multi-enroulements se stabilise avant le couple à quatre-enroulements, en terminant tous les deux stables obéissant à la valeur permanente imposée par la charge sur l'arbre de la machine.

A partir des analyses précédentes, nous pouvons affirmer, dans un premier temps, que le modèle multi-enroulement permet de représenter assez bien la machine en régime permanent, quant au régime transitoire il faudra le perfectionner en prenons en compte :

- les inductances de têtes des bobines,
- l'effet de peau (profondeur de pénétration du champ dans le rotor).

V. 4-Conclusion

Le modèle multi-enroulement, ainsi exposé, permet de représenter la machine asynchrone à cage d'une manière satisfaisante. Encore qu'il ne soit pas évident de comprendre toutes les raisons des différentes remarques et constatations car la machine asynchrone est assez complexe.

Sachant que pour les machines à faible rapport longueur utile/diamètre, l'influence du champ dans les têtes de bobine doit être considérée, ce qui peut être fait par la sommation de l'inductance de tête de bobine et les valeurs déterminées par le calcul en deux dimensions.

En finalité, dans un souci de clarté, nous suggérons la nécessité d'une correction du modèle proposé pour tenir compte des phénomènes qui ont été négligés par hypothèses simplificatrices adoptées au départ.

CONCLUSION GENERALE

La machine asynchrone à cage est caractérisée par des équations électriques complexes, ou apparaissent des paramètres dont la détermination expérimentale s'avère imprécise, de plus, la difficulté d'accéder aux informations rotoriques, nous laisse dans l'impossibilité de voir le comportement et l'évolution des courants rotoriques en régime dynamique.

Pour cela, nous avons présenté et développé une modélisation basée sur la résolution des équations de la machine asynchrone en terme potentiel vecteur par éléments finis. Notre choix s'est porté sur le modèle multi-enroulement pour modéliser au mieux le fonctionnement et le comportement réel de la machine asynchrone à cage. Généralement, l'identification des paramètres de la machine asynchrone est élaborée à partir de méthodes classiques (essais à vide et en court-circuit) à cinq paramètres. Ces dernières ne décrivent pas d'une manière satisfaisante le comportement réel de la machine.

Devant la nécessité de bien mener cette modélisation, nous avons fait l'identification de paramètres inductifs à partir logiciel de calcul des champs EFCAD et la loi des mailles pour le calcul des paramètres résistifs de la machine. La réduction du domaine d'étude nous a permis de simplifier le dessin de la géométrie de la machine et de réduire le temps de calcul, en prenant en compte des caractéristiques de la machine (anti-périodique, périodique et cas général).

Le passage de la forme d'ondes des différentes courbes des inductances (propres et mutuelles) de la machine à la forme analytique est réalisé en utilisant la transformée de Fourier.

A partir des expressions analytiques des différentes inductances, des valeurs des résistances de la machine et des grandeurs mesurables, nous avons reconstitué les courants rotoriques, en résolvant le système d'équations de la machine asynchrone par une méthode numérique (Runge-Kutta), en donnant les informations nécessaires pour l'analyse du fonctionnement de la machine.

Les résultats obtenus lors de l'identification des paramètres inductifs de la machine asynchrone sont très satisfaisants car, lorsque nous avons commencé la programmation sur le logiciel EFCAD, il était nécessaire de programmer 11 fois afin d'aboutir à la matrice des inductances propres et mutuelles de la machine formée de 121 éléments.

Des résultats obtenus, une analyse et une interprétation sont faites et nous pouvons affirmer, en s'appuyant sur les relations (amplitude et phase) entre les éléments de la matrice inductance, que nous avons réduit considérablement le temps de calcul de la détermination de la matrice des inductances de la machine asynchrone à cage, en programmant deux 5 au lieu de 11 fois.

Pour valider les résultats obtenus à partir du modèle multi-enroulement, nous avons programmé notre machine en diphasée-diphasée (Park) sur le logiciel Matlab-Simulink.

Les résultats obtenus en superposant représentent les courbes à vide et en charge (vitesse, couple électromagnétique), montrent la concordance des formes d'onde de ces courbes. Nous remarquons, aussi, que comportement du début du transitoire du couple électromagnétique du modèle multi-enroulement est légèrement long (0.028 seconde de retard) et plus oscillatoire par rapport au couple électromagnétique du modèle à quatre-enroulements.

Ceci peut être dû à la prise en compte de tous les paramètres de la machine au lieu de cinq paramètres dans le modèle de Park. Par contre, le couple électromagnétique du modèle multi-enroulements se stabilise avant le couple à quatre-enroulements, en terminant tous les deux stables en obéissant à la valeur permanente imposée par la charge sur l'arbre de la machine.

Quant à la vitesse, la réponse du transitoire commence par un temps de réponse légèrement plus rapide de la courbe du modèle à quatre enroulements que celle du modèle multi-enroulement et ceci sur un laps de temps de 0.07 seconde. Ensuite, les courbes se joignent parfaitement pour se stabiliser enfin en régime permanent.

De l'analyse des courbes des courants rotoriques les courants circulant dans les barres de cage de la machine sont très élevés. Ils peuvent atteindre, pendant le régime transitoire, quelques milliers d'Ampères (4500 A). Quant au régime permanent, les courants dans les barres peuvent atteindre 358 A.

Pour l'évolution des courants rotoriques, le modèle multi-enroulement met à jour les courants réels des barres de la cage rotorique, ce qui est intéressant pour l'étude ponctuelle du comportement des paramètres de la cage en régime dynamique et surtout pour le diagnostic de la machine en cas de défaut (cassure de barres...).

Leurs valeurs s'accordent bien pour l'ensemble des barres et correspondent à la position de chaque barre sur la cage. Ces valeurs sont en relation directe avec les valeurs des inductances propres et mutuelles, ainsi, que les distances qui séparent les barres autour de l'anneau de fermeture de la cage.

En finalité, notre travail offre de nombreuses possibilités de prédiction du comportement de la machine asynchrone aussi bien en tant que concepteur qu'utilisateur. Les utilisations possibles qui peuvent être faites de ce modèle sont nombreuses :

- Une simulation du fonctionnement de la machine avec une ou plusieurs ruptures dans une des bagues de fermeture, comme pour le cas des barres cassées, permet de mettre à jour le comportement de ses grandeurs électromagnétiques (diagnostic).
- De complexité intermédiaire entre le modèle classique de Park et une résolution en pas à pas des équations du champ, le modèle multi-enroulement défini à partir de la géométrie de la machine peut devenir un outil d'étude et de conception des machines asynchrones à cage.
- Comme le modèle proposé permet la connaissance de l'évolution des courants induits dans le rotor, d'autres applications sont envisageables :

- détermination des pertes par effet joule dans la cage,
- estimation de la température à l'intérieur de la machine,
- efforts auxquels la cage est soumise (fonctionnement normal ou rupture d'un élément).

En perspectives, quelques améliorations peuvent être apportées à notre modèle :

- addition des inductances de tête de bobine,
- prise en compte de l'effet de peau.

Annexe 1

Flux et potentiel vecteur

Généralités

Le flux à travers un bobinage se calcule, aisément, à partir d'une formulation en potentiel vecteur du champ électromagnétique :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Phi = \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A1-1})$$

$$\Phi = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{théorème de Stokes})$$

Pour une résolution en deux dimensions (2D) des équations du champ électromagnétiques (figure A1-1), le potentiel vecteur en un point est égal à $A \cdot \mathbf{u}$, où \mathbf{u} est le vecteur unitaire selon la direction z .

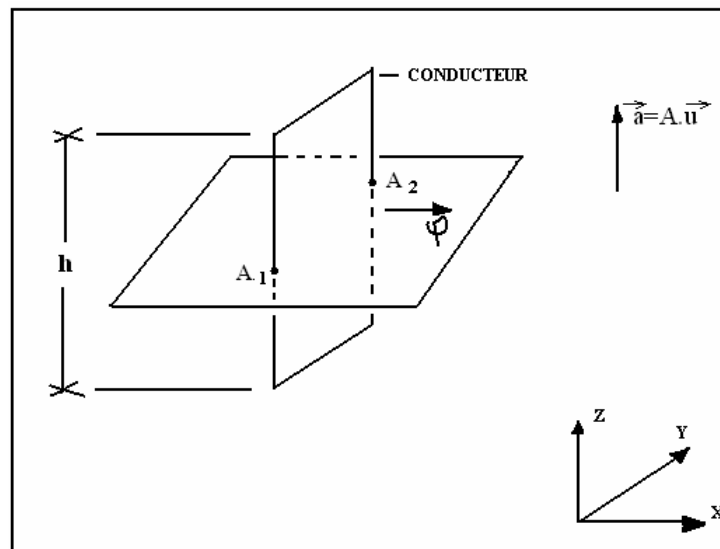


Figure A1-1 : Résolution en 2 D des équations du champ

Pour le flux à travers le conducteur représenté dans la figure A1-1 on a donc :

$$\Phi = (A_1 - A_2) h \quad (\text{A1-2})$$

Si le bobinage est constitué de n conducteurs :

$$\Phi = n (A_1 - A_2) h \quad (\text{A1-3})$$

Où A_1, A_2 sont les valeurs du potentiel vecteur et h est la hauteur du bobinage.

Flux à travers un bobinage localisé

En calcul des champs électromagnétiques, les bobinages apparaissent par l'intermédiaire des densités de courant données en $[A/m^2]$. La contribution d'un élément ds des conducteurs au flux traversant le bobinage auquel appartiennent ces conducteurs est :

$$d\Phi = a n ds h \quad (A1-4)$$

Où n et a représentent le nombre de conducteurs par unité de surface et le potentiel vecteur sur l'élément ds .

Si l'on considère, par exemple, une encoche d'une machine électrique, la contribution de cette encoche au flux traversant le bobinage auquel appartiennent les conducteurs, on a :

$$\Phi = (N_e h / S_e) \iint_{S_e} a ds \quad (A1-5)$$

Où N_e et S_e sont respectivement le nombre de conducteurs dans l'encoche et la surface de l'encoche.

Flux à travers un bobinage réparti

Le flux peut être calculé de façon similaire dans le cas d'un bobinage défini par une densité superficielle de conducteurs située sur une surface :

$$d\Phi = a \tau dl h \quad (A1-6)$$

Où τ représente la densité superficielle de conducteurs par mètre linéaire.

Flux à travers un conducteur isolé

Lorsque l'on raisonne en terme de potentiel vecteur, le calcul du flux ne demande, donc, qu'une intégration au niveau des conducteurs et non le long d'une surface tendue sur ces conducteurs. On parle, alors, de contribution des conducteurs au calcul du flux.

Cette remarque est à la base du calcul du flux pour les barres de la cage rotorique, par exemple. Si l'on considère un conducteur isolé, on peut calculer le flux à travers le bobinage constitué de ce conducteur et d'un conducteur retour situé à l'infini. Ce flux est égal à la contribution Φ du conducteur isolé à laquelle il faut ajouter la contribution Φ_0 du conducteur retour situé à l'infini (voir annexe 2).

Le flux dans le bobinage ainsi constitué est, donc, de la forme :

$$\varphi = \Phi + \Phi_0 \quad (A1-7)$$

Le flux Φ_0 est un terme parasite correspondant à un retour fictif situé hors du domaine d'étude. Il est, directement, proportionnel au courant dans le conducteur considéré :

$$\Phi_0 = -L_0 I \quad (A1-8)$$

Avec :

$$L_0 = h \mu_0 / (8\pi) \quad (A1-9)$$

Annexe 2

Potentiel vecteur dû au conducteur retour

Soit un conducteur isolé de rayon r_0 et orthogonal au plan d'étude. Dans le conducteur le potentiel vecteur vérifie l'équation :

$$\delta^2 A_1 / \delta r^2 + (1/r) \delta A_1 / \delta r = -\mu_0 J \quad (A2-1)$$

Et hors du conducteur, il vérifie l'équation :

$$\delta^2 A_2 / \delta r^2 + (1/r) \delta A_2 / \delta r = 0 \quad (A2-2)$$

Soit:

$$A_1(r) = -\mu_0 J r^2 / 4 + k_1 \ln(r) + k_2 \quad (A2-3)$$

$$A_2(r) = k_3 \ln(r) + k_4$$

Si l'on veut que le potentiel vecteur soit fini au centre du conducteur et, par exemple, nul :

$$k_1 = 0 \quad (A2-4)$$

$$k_2 = 0$$

Pour $r = r_0$ on doit avoir une continuité de $\delta A / \delta r$ pour avoir une continuité de la composante tangentielle du champ H et continuité de a pour avoir une solution continue.

$$k_3 = -\mu_0 J r_0^2 / 2 \quad (A2-5)$$

$$k_4 = -(\mu_0 J r_0^2 / 4) (1 - 2 \ln(r_0))$$

Soit pour le potentiel vecteur dans le conducteur:

$$A_1(r) = -\mu_0 J r_0^2 / 4 \quad (A2-6)$$

$$A_2(r) = -(\mu_0 J r_0^2 / 2) (\ln(r/r_0) + 1/2)$$

Soit en fonction du courant I circulant dans le conducteur :

$$A_1(r) = -(\mu_0 I / (4\pi r_0^2)) r^2 \quad (A2-7)$$

$$A_2(r) = -(\mu_0 I / 2\pi) (\ln(r/r_0) + 1/2) \quad (A2-8)$$

La contribution d'un élément ds de ce conducteur au calcul du flux est égale au produit du potentiel vecteur en ds que multiplie le nombre de conducteurs en ds et la longueur h selon la troisième dimension.

$$d\Phi = h A_1(r) ds / (\pi r_o^2 / 2) \quad (A2-9)$$

Soit:

$$\Phi = h / (\pi r_o^2) \int_0^{r_o} \int_0^{2\pi} A_1(r) r d\theta dr \quad (A2-10)$$

D'où :

$$\Phi = - h \mu_o I / (8\pi) \quad (A2-11)$$

Et, par conséquent :

$$L = h \mu_o / (8\pi) \quad (A2-12)$$

Annexe 3

Terme constant dans la densité de conducteurs

Si l'on considère la densité de conducteurs d'une barre du rotor (figure A3-1), celle-ci est de la forme :

$$\tau(\theta) = \sum_{h=0}^{\infty} e_h \cos(hp\theta - hp\alpha) \quad (A3-1)$$

Et contient un terme continu e_0 .

Si l'on considère les équations du champ électromagnétique pour ce terme continu :

$$\delta^2 A_0 / \delta r^2 + (1/r) \delta A_0 / \delta r + (1/r^2) (\delta^2 A_0 / \delta \theta^2) = 0 \quad (A3-2)$$

Avec les conditions de contour :

$$\begin{aligned} \delta A_0 / \delta r \Big|_{r=R-\varepsilon} &= -\mu_0 e_0 i r = k_0 \\ \delta A_0 / \delta r \Big|_{r=R} &= 0 \end{aligned} \quad (A3-3)$$

On ne trouve pas de solution.

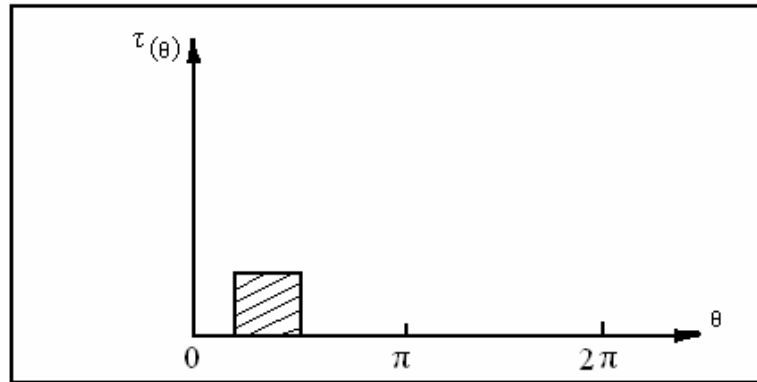


Figure A3-1 : Représentation de la densité d'une barre du rotor

En effet, le terme source étant indépendant de θ , le potentiel A_0 qui lui correspond est indépendant de θ . Le potentiel vecteur A_0 vérifie donc l'équation :

$$\delta^2 A_0 / \delta r^2 + (1/r) \delta A_0 / \delta r + = 0 \quad (A3-4)$$

Posons:

$$A_0 = \delta A_0 / \delta r \quad (A3-5)$$

On obtient :

$$\delta A_0 / \delta r + (1/r) A_0 = 0 \quad (A3-5)$$

$$\begin{aligned} A_0 \Big|_{r=R-\varepsilon} &= k_0 \\ & \quad \Big|_{r=R-\varepsilon} \end{aligned} \quad (A3-6)$$

$$\begin{aligned} A_0 \Big|_{r=R} &= 0 \\ & \quad \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

L'équation différentielle dont la solution générale $A_0 = c/r$ est incompatible avec les conditions aux limites.

Cette incompatibilité est due au fait que dans le cas d'une source constante indépendante de θ les lignes équipotentielles sont circulaires et l'on ne peut donner de conditions d'orthogonalité sur une frontière.

En effet, dans ce cas, l'équation vérifiée par le potentiel vecteur se réduit à :

$$\begin{aligned} \delta^2 A_0 / \delta r^2 + (1/r) (\delta A_0 / \delta r) &= 0 \\ \delta A_0 / \delta r \Big|_{r=R-\varepsilon} &= -\mu_0 e_0 i r \\ & \quad \Big|_{r=R-\varepsilon} \end{aligned} \quad (A3-7)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \delta A_0 / \delta r + (1/r) A_0 &= 0 \\ A_0 \Big|_{r=R-\varepsilon} &= k_0 \\ & \quad \Big|_{r=R-\varepsilon} \end{aligned} \quad (A3-8)$$

D'où :

$$A_0 = k_0 (R-\varepsilon) / r \quad (A3-9)$$

Et pour le potentiel vecteur A_0 :

$$A_0(r, t) = -i_r \mu_0 (R-\varepsilon) e_0 \ln(r) + k \quad (A3-10)$$

où : la constante k n'est pas prise en compte dans toute solution du type potentiel vecteur.

Flux propre

Dans le calcul du flux propre, la contribution du conducteur retour intervient à deux niveaux.

Il y a, tout d'abord, le terme dû au champ créé par le conducteur retour. On a vu dans l'annexe 2 que le potentiel dans le conducteur retour est égal à :

$$A_1(r) = - (\mu_0 I / 4\pi r_0^2) r^2 \quad (A3-11)$$

Soit puisque le courant dans ce conducteur est égal à $(- i_r(t))$:

$$A_1(r) = (\mu_0 i_r(t) / 4\pi r_0^2) r^2 \quad (A3-12)$$

Ce potentiel crée un flux :

$$\Phi_0(t) = L_0 i_r(t) \quad (A3-13)$$

Mais il y a aussi les flux dus aux potentiels en $\ln(r)$ créés à l'extérieur du conducteur retour et par l'harmonique de rang 0 contenus dans le potentiel créé par la barre dans la machine. Une particularité, en effet, des potentiels de la forme :

$$A(r) = k \ln(r) \quad (A3-14)$$

est de ne pas être atténués au passage d'une paroi magnétique. Si l'on considère, par exemple, la figure A3-2 où est représentée une paroi magnétique de perméabilité μ , le potentiel vecteur dans les différentes zones est égal à :

$$A_1(r) = k \ln(r)$$

$$A_2(r) = (\mu/\mu_0) k \ln(r) \quad (A3-15)$$

$$A_3(r) = k \ln(r)$$

Le potentiel n'est pas atténué par la paroi et tend vers l'infini à l'infini.

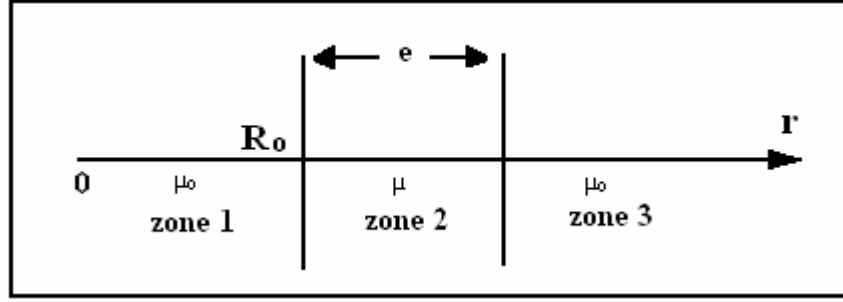


Figure A3-2 : Paroi magnétique

On a donc, à cause de ces valeurs infinies du potentiel vecteur, un terme Φ_0' provenant de la valeur du potentiel créé par le conducteur de retour au niveau de la barre du rotor et de la valeur du potentiel créé par cette barre au niveau du conducteur de retour situé à l'infini.

Compte tenu de l'expression de ces deux potentiels, Φ_0' est de la forme :

$$\Phi_0' = H \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} [-\mu_0 (R-\epsilon) e_0 i_{rb}(t) \ln(r)] + \lim_{r \rightarrow \infty} [\mu_0 / 2\pi i_{rb}(t) \ln(r)] \right\} \quad (A3-16)$$

Soit :

$$\Phi_0' = H \mu i_{rb}(t) \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ (1/2\pi) - e_0 (R-\epsilon) \ln(r) \right\} \quad (A3-17)$$

Et

$$\Phi_0' = 0 \quad (A3-18)$$

Car :

$$e_0 = 1 / (2 \pi (R - \epsilon)) \quad \text{périmètre du rotor} \quad (A3-19)$$

Le flux propre se limite donc à Φ_0 .

Flux mutuel

Il s'agit de calculer la contribution du conducteur retour au flux mutuel. Le principe de cette contribution est explicité sur la figure A3-3.

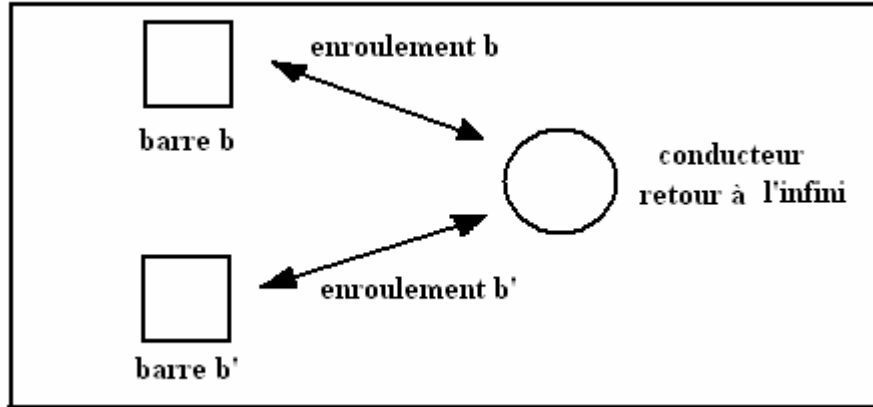


Figure A3-3 : Principe du calcul du flux mutuel

Cette contribution au flux mutuel contient trois termes :

- Un terme dû à la valeur du potentiel créé par le conducteur retour de l'enroulement b dans le conducteur retour de l'enroulement b', qui n'est autre que le terme Φ_0 ;
- Un terme dû à la valeur du potentiel créé par le conducteur retour de l'enroulement b dans la barre b' qui vaut :

$$\Phi_x = H \lim_{r \rightarrow \infty} \{ (\mu_0 / 2\pi) i_{rb}(t) \ln(r) \} \quad (A3-20)$$

- Un terme dû à la valeur du potentiel créé par la barre b dans le conducteur situé à l'infini et qui vaut :

$$\Phi_y = H \lim_{r \rightarrow \infty} \{ -\mu_0 \epsilon_0 (R - \epsilon) i_{rb}(t) \ln(r) \} \quad (A3-21)$$

Comme dans le cas du flux propre, la contribution du conducteur de retour situé à l'infini au flux mutuel est égale à Φ_0 .

Annexe 4

Transformation de Park (avec référentiel lié au rotor) appliquée à la machine asynchrone

Introduction

Les équations des tensions d'une machine asynchrone sont données par :

$$[V] = [R] [I] + (d/dt) \{ [L(\theta)] [I] \} \quad (A4-1)$$

Où :

$[V]$: vecteur des tensions,

$[I]$: vecteur des courants,

$[R]$: matrice des résistances,

$[L(\theta)]$: matrice des inductances.

Soit une transformation $[T(\theta)]$ et son inverse $[T(\theta)]^{-1}$, qui est appliquées sur les grandeurs tension $[V]$ et courant $[I]$ de la machine conduisent à :

$$[V_T] = [T(\theta)]^{-1} [V] \quad (A4-2)$$

$$[I_T] = [T(\theta)]^{-1} [I]$$

Et :

$$[V] = [T(\theta)] [V_T] \quad (A4-3)$$

$$[I] = [T(\theta)] [I_T]$$

Où : $[V_T]$ et $[I_T]$ sont respectivement les vecteurs tension et courant transformés de la machine.

Si l'on remplace les vecteurs $[V]$ et $[I]$ selon (A4-2), dans l'expression (A4-1), il en résulte :

$$[T(\theta)] [V_T] = [R] [T(\theta)] [I_T] + (d/dt) \{ [L(\theta)] [T(\theta)] [I_T] \} \quad (A4-4)$$

On pré-multiplie l'expression (A4-4) par $[T(\theta)]^{-1}$:

$$[V_T] = [T(\theta)]^{-1} [R] [T(\theta)] [I_T] + [T(\theta)]^{-1} (d/dt) \{ [L(\theta)] [T(\theta)] [I_T] \} \quad (A4-5)$$

On effectue l'opération de dérivation indiquée :

$$[V_T] = [T(\theta)]^{-1} [R] [T(\theta)] [I_T] + [T(\theta)]^{-1} [L(\theta)] [T(\theta)] (d/dt)[I_T] + [T(\theta)]^{-1} (d/dt) \{ [L(\theta)] [T(\theta)] \} [I_T] \quad (A4-6)$$

Et, si l'on pose :

$$[R_T] = [T(\theta)]^{-1} [R] [T(\theta)] \quad (A4-7)$$

$$[L_T] = [T(\theta)]^{-1} [L(\theta)] [T(\theta)] \quad (A4-8)$$

$$[G_T] = [T(\theta)]^{-1} (d/dt) \{ [L(\theta)] [T(\theta)] \} \quad (A4-9)$$

Où $[L_T]$ ne dépend plus de θ .

On obtient :

$$[V_T] = [R_T] [I_T] + [L_T] (d/dt) \{ [I_T] \} + [G_T] [I_T] \quad (A4-10)$$

L'expression (A4-10) présente les équations des tensions de la machine avec les tensions et les courants transformés.

Par la suite, on va détailler cette opération. On suppose, d'abord, que la machine asynchrone est triphasée au stator et présente des caractéristiques d'isotropie magnétique au stator et au rotor. Cela dit, seules les mutuelles inductances entre le stator et le rotor dépendent de l'angle θ .

Les différentes sous-matrices qui forment les matrices $[R]$ et $[L(\theta)]$ des expressions (A4-7)-(A4-9) sont données par :

$$[R_s] = \begin{vmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{vmatrix} \quad (A4-11)$$

$$[R_r] = \begin{vmatrix} R_r & & & & 0 \\ & R_r & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_r & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & R_r \end{vmatrix} \quad (A4-12)$$

$$[L_s] = L_s \begin{vmatrix} \cos(0 \times 2\pi/3) & \cos(1 \times 2\pi/3) & \cos(2 \times 2\pi/3) \\ \cos(1 \times 2\pi/3) & \cos(0 \times 2\pi/3) & \cos(1 \times 2\pi/3) \\ \cos(2 \times 2\pi/3) & \cos(1 \times 2\pi/3) & \cos(0 \times 2\pi/3) \end{vmatrix} \quad (A4-13)$$

$$[L_r] = L_r \begin{vmatrix} \cos((1-1)2\pi/N) & \cos(1-2\pi/N) & \cos((1-j)2\pi/N) & \cdots & \cos((1-N)2\pi/N) \\ \cos((2-1)2\pi/N) & \cos(0 \times 2\pi/N) & \cos((2-j)2\pi/N) & \cdots & \cos((2-N)2\pi/N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos((i-1)2\pi/N) & \cos((i-2)2\pi/N) & \cos((i-j)2\pi/N) & \cdots & \cos((i-N)2\pi/N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos((N-1)2\pi/N) & \cos((N-2)2\pi/N) & \cos((N-j)2\pi/N) & \cdots & \cos((N-N)2\pi/N) \end{vmatrix} \quad (A4-14)$$

Où :

R_s : résistance d'une phase statorique,

R_r : résistance d'une phase rotorique,

L_s : inductance propre d'une phase statorique,

L_r : inductance propre d'une phase rotorique.

$$[M_{sr}(\theta)] = M_{sr} \begin{vmatrix} \cos[\theta + 0(2\pi/N) - 0(2\pi/3)] & \cdots & \cos[\theta + (j-1)2\pi/N - 0(2\pi/3)] \\ \cos[\theta + 0(2\pi/N) - 1(2\pi/3)] & \cdots & \cos[\theta + (j-1)2\pi/N - 1(2\pi/3)] \\ \cos[\theta + 0(2\pi/N) - 2(2\pi/3)] & \cdots & \cos[\theta + (j-1)2\pi/N - 2(2\pi/3)] \\ \cdots & \cos[\theta + (N-1)2\pi/N - 0(2\pi/3)] \\ \cdots & \cos[\theta + (N-1)2\pi/N - 1(2\pi/3)] \\ \cdots & \cos[\theta + (N-1)2\pi/N - 2(2\pi/3)] \end{vmatrix} \quad (A4-15)$$

$$[M_{sr}(\theta)] = [M_{sr}(\theta)]^T \quad (A4-16)$$

Où M_{sr} : valeur maximale de la mutuelle inductance stator/rotor.

La machine étant triphasée au stator, la transformation $[T(\theta)]$ et son inverse $[T(\theta)]^{-1}$ sont données [8] par :

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} [P(\theta)] & [0] \\ [0] & [U] \end{bmatrix} \quad (A4-17)$$

$$[T(\theta)]^{-1} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U]^{-1} \end{bmatrix} \quad (A4-18)$$

Où :

$[0]$: matrice nulle,

$[U]$: matrice unité,

$[P(\theta)]$: Transformation de Park qui garde l'invariance de la puissance instantanée.

Donc :

$$[P(\theta)] = (\sqrt{3/2}) \begin{bmatrix} \sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} \\ +\cos(\theta) & +\cos(\theta-2\pi/3) & +\cos(\theta-4\pi/3) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta-2\pi/3) & -\sin(\theta-4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (A4-19)$$

Et :

$$[P(\theta)]^{-1} = [P(\theta)]^T \quad (A4-20)$$

Calcul de la matrice des résistances

L'expression (A4-7) peut être écrite sous la forme :

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_s] & [0] \\ [0] & [R_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P(\theta)] & [0] \\ [0] & [U] \end{bmatrix} \quad (A4-21)$$

Soit :

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R_s] & [0] \\ [0] & [R_r] \end{bmatrix} \quad (A4-22)$$

Parce que $[R_s]$ est une matrice diagonale et $[P(\theta)]$, $[P(\theta)]^{-1}$ sont des transformations orthogonales et :

$$[P(\theta)]^{-1} [R_s] [P(\theta)] = [R_s] \quad (A4-23)$$

De même :

$$[U]^{-1}[R_r][U] = [R_r] \quad (A4-24)$$

Calcul de la matrice des inductances

L'expression (A4-8) peut être écrite sous la forme :

$$[L_T] = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}(\theta)] \\ [M_{rs}(\theta)] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P(\theta)] & [0] \\ [0] & [U] \end{bmatrix} \quad (A4-25)$$

Soit, pour les inductances statoriques :

$$[L_T] = \begin{bmatrix} [L_{sT}] & [M_{srT}] \\ [M_{rsT}] & [L_r] \end{bmatrix} \quad (A4-26)$$

Où :

$$[L_{sT}] = [P(\theta)]^{-1} [L_s] [P(\theta)] \quad (A4-27)$$

Soit :

$$[L_{sT}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3/2)L_s & 0 \\ 0 & 0 & (3/2)L_s \end{bmatrix} \quad (A4-28)$$

Pour les inductances rotoriques, on voit bien qu'elles restent inchangées, vu qu'elles ont été multipliées par des matrices unités.

$$[U]^{-1}[L_r][U] = [L_r] \quad (A4-29)$$

Pour les mutuelles inductances stator/rotor, on obtient :

$$[M_{srT}] = [P(\theta)]^{-1} [M_{sr}(\theta)] [U] \quad (A4-30)$$

$$[M_{srT}] = (\sqrt{3/2}) L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \cos[(1-j)2\pi/N] & \dots & \cos[(j-1)2\pi/N] & \dots \\ \sin[(1-j)2\pi/N] & \dots & \sin[(j-1)2\pi/N] & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \cos[(N-1)2\pi/N] & \dots & \dots \\ \dots & \sin[(N-1)2\pi/N] & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (A4-31)$$

Et finalement, la sous-matrice des mutuelles inductances rotor/stator est obtenue en se basant sur les caractéristiques de symétrie de la machine, soit :

$$[M_{srT}] = [M_{srT}]^t \quad (A4-32)$$

Calcul du terme dû à la rotation

On peut réécrire l'expression (A4-9) sous la forme :

$$[G_T] = \begin{vmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U]^{-1} \end{vmatrix} \frac{d}{dt} \left\{ \begin{vmatrix} [L_s] & [M_{sr}(\theta)] \\ [M_{rs}(\theta)] & [L_r] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [P(\theta)] & [0] \\ [0] & [U] \end{vmatrix} \right\} \quad (A4-33)$$

Si l'on effectue le produit matriciel et la dérivation indiqués, on obtient :

$$[G_T] = \begin{vmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U]^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\{[L_s][P(\theta)]\} & \frac{d}{dt}\{[U][M_{sr}(\theta)]\} \\ \frac{d}{dt}\{[M_{rs}(\theta)][P(\theta)]\} & \frac{d}{dt}\{[L_r][P(\theta)]\} \end{vmatrix} \quad (A4-34)$$

On peut toujours simplifier l'expression, car :

$$\frac{d}{dt}\{[L_s][P(\theta)]\} = [L_s] \frac{d}{dt} [P(\theta)] \quad (A4-35)$$

$$\frac{d}{dt}\{[L_r][U]\} = [0] \quad (A4-36)$$

$$\frac{d}{dt}\{[M_{rs}(\theta)][P(\theta)]\} = \frac{d}{dt} [M_{srT}]^t = [0] \quad (A4-37)$$

$$\frac{d}{dt}\{[U][M_{sr}(\theta)]\} = \frac{d}{dt} [M_{sr}(\theta)] \quad (A4-38)$$

Avec les expressions (A4-35) à (A4-38), on peut expliciter (A4-34) après avoir effectué le produit matriciel, selon :

$$[G_T] = \begin{vmatrix} [P(\theta)]^{-1} [L_s] \frac{d}{dt} [P(\theta)] & [P(\theta)]^{-1} \frac{d}{dt} [M_{sr}(\theta)] \\ [0] & [0] \end{vmatrix} \quad (A4-39)$$

Il faut encore calculer les deux termes non nuls de la matrice :

$$[P(\theta)]^{-1} [L_s] \frac{d}{dt} [P(\theta)] = [W] [L_{sT}] \quad (A4-40)$$

$$[P(\theta)]^{-1} d/dt [M_{sr}(\theta)] = [W] [M_{srT}] \quad (A4-41)$$

Où :

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w \\ 0 & +w & 0 \end{bmatrix} \quad (A4-42)$$

$$W = d\theta/dt \quad (A4-43)$$

Calcul des tensions transformées

Le vecteur des tensions explicité par l'expression (A4-2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [V_{sT}] \\ [V_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(\theta)]^{-1} & [0] \\ [0] & [U] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_s] \\ [V_r] \end{bmatrix} \quad (A4-44)$$

Où :

$$[V_{sT}] = [P(\theta)]^{-1} [V_s] \quad (A4-45)$$

$$[U]^{-1} [V_r] = [V_r] \quad (A4-46)$$

Si la machine est alimentée par un réseau triphasé équilibré, on a :

$$[V_s] = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \end{bmatrix} = \sqrt{2} V_s \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (A4-47)$$

Où V_s : est la valeur efficace de la tension du réseau, entre phase et neutre.

$$\omega : 2\pi f \quad (A4-48)$$

avec ω : pulsation électrique en [rad/s] ;

f : fréquence du réseau en [Hz].

Donc, en effectuant l'opération indiquée en (A4-45), on arrive à :

$$[V_s] = \begin{bmatrix} V_{so} \\ V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} = \sqrt{2} V_s \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{(3/2)} \cos(\omega t - \theta) \\ \sqrt{(3/2)} \sin(\omega t - \theta) \end{bmatrix} \quad (A4-49)$$

Calcul des courants (anti) transformés

L'expression (A4-10) représente les équations des tensions de la machine après l'application de la transformation sur les grandeurs statoriques et consiste donc en un système d'équations différentielles ayant comme inconnue le vecteur courant transformé $[I_T]$.

Après avoir résolu ce système d'équations, on connaît les composantes homopolaires, d'axe d et d'axe q (notées o, d, q) des courants réels du stator (notés 1, 2, 3). Il faut donc effectuer sur le vecteur $[I_T]$ l'opération donnée par (A4-3), ce que peut être mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(\theta)] & [0] \\ [0] & [U] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_{sT}] \\ [I_r] \end{bmatrix} \quad (A4-50)$$

Soit :

$$[I_s] = [P(\theta)] [I_{sT}] \quad (A4-51)$$

$$[U] [I_r] = [I_r] \quad (A4-52)$$

Alors, de (A4-51) on obtient :

$$[I_s] = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \sqrt{(2/3)} \begin{bmatrix} \sqrt{(2/2)} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sqrt{(2/2)} \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) \\ \sqrt{(2/2)} \cos(\theta - 4\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{so} \\ I_{sd} \\ I_{sq} \end{bmatrix} \quad (A4-53)$$

Soit :

$$I_{s1} = \sqrt{(2/3)} \{ \cos(\theta) I_{sd} - \sin(\theta) I_{sq} \} \quad (A4-54)$$

$$I_{s2} = \sqrt{(2/3)} \{ \cos(\theta - 2\pi/3) I_{sd} - \sin(\theta - 2\pi/3) I_{sq} \} \quad (A4-55)$$

$$I_{s3} = \sqrt{(2/3)} \{ \cos(\theta - 4\pi/3) I_{sd} - \sin(\theta - 4\pi/3) I_{sq} \} \quad (A4-56)$$

Soit :

$$I_{so} = 0 \quad (A4-57)$$

Les équations des tensions transformées

A partir des équations des tensions en grandeurs de phase d'une machine asynchrone symétrique, on est arrivé au système d'équation des tensions transformées, donné par (A4-10) et où les divers termes qui y participent ont été explicités par la suite.

En regardant ces termes, on voit bien qu'on peut abandonner les composantes homopolaires des tensions $[V_T]$ et des courants $[I_T]$ transformés, sans préjudice pour la suite des calculs, car ces composantes sont nulles.

Au niveau pratique, cela consiste à abandonner la ligne et la colonne 1 des matrices et le premier élément des vecteurs.

Pour éviter la prolifération sans fin des labels des grandeurs utilisées dans ce travail, leurs noms restent inchangés, même après l'abandon des composantes homopolaires et, à partir de (A4-22), (A4-26) et (A4-39) on arrive à :

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R_s] & [0] \\ [0] & [R_r] \end{bmatrix} \quad (A4-58)$$

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \quad (A4-59)$$

La matrice des résistances rotoriques $[R_r]$ est restée inchangée, elle est donnée par l'expression (A4-12).

De même, pour la matrice des inductances :

$$[L_T] = \begin{bmatrix} [L_{sT}] & [M_{srT}] \\ [M_{srT}]^t & [L_r] \end{bmatrix} \quad (A4-60)$$

Avec :

$$[L_{sT}] = \begin{vmatrix} (3/2)L_s & \\ & (3/2)L_s \end{vmatrix} \quad (A4-61)$$

$$[M_{srT}] = \sqrt{(3/2)} L_{sr} \begin{vmatrix} \cos 0 \times (2\pi/N) & \cdots & \cos((j-1)2\pi/N) & \cdots \\ \sin 0 \times (2\pi/N) & \cdots & \sin((j-1)2\pi/N) & \cdots \\ \cdots & \cos((N-1)2\pi/N) & & \\ \cdots & \sin((N-1)2\pi/N) & & \end{vmatrix} \quad (A4-62)$$

La matrice des inductances rotoriques $[L_r]$ est restée inchangée. Elle est donnée par l'expression (A4-14).

$$[G_T] = \begin{vmatrix} [w][L_{sT}] & [w][M_{srT}] \\ [0] & [0] \end{vmatrix} \quad (A4-63)$$

où toutes les sous-matrices qui y interviennent ont été déjà explicitées.

Annexe 5

Détermination expérimentale des paramètres électriques de la machine asynchrone à cage

Méthodes expérimentales

A partir du schéma équivalent (figure A.5.1), nous pouvons déterminer les paramètres du modèle classique de Park basée sur les méthodes expérimentales autrement dit essais à vide et essais à rotor bloqué, ou nous utilisons le circuit équivalent par phase de la machine asynchrone à cage, dont le stator est connecté en étoile.

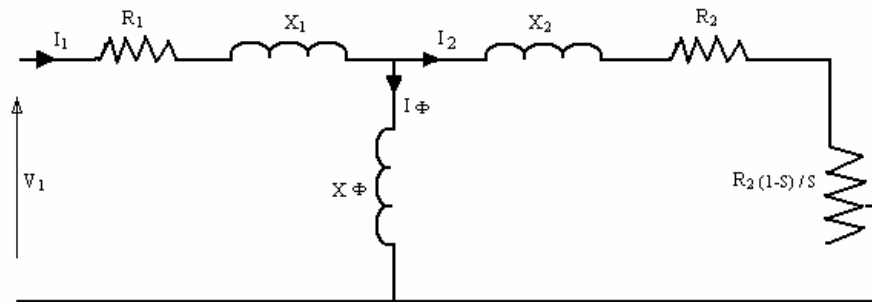


Figure A.5.1 : Circuit équivalent par phase de la machine asynchrone

Dans ce circuit équivalent on a :

- R_1 : résistance du stator,
- X_1 : inductance de fuite du stator,
- R_2 : résistance du rotor référée au stator,
- X_2 : inductance du rotor référée au stator,
- $X\Phi$: réactance de magnétisation,
- V_1 : tension de phase du stator,
- I_1 : courant de phase du stator,
- $I\Phi$: courant de magnétisation,
- I_2 : courant du stator,
- S : glissement.

Tous les essais doivent être effectués avec la machine chaude, à la température nominale de fonctionnement.

La valeur de la résistance d'une phase du stator peut être obtenue par des mesures en courant continu, par l'application d'une tension continue entre ses bornes.

Essai à vide

Cet essai peut être réalisé avec la machine asynchrone entraînée à la vitesse synchrone par une machine auxiliaire. Dans ce cas, le circuit équivalent par phase, avec le glissement nul ($S=0$), est représenté par la figure A.5.2.

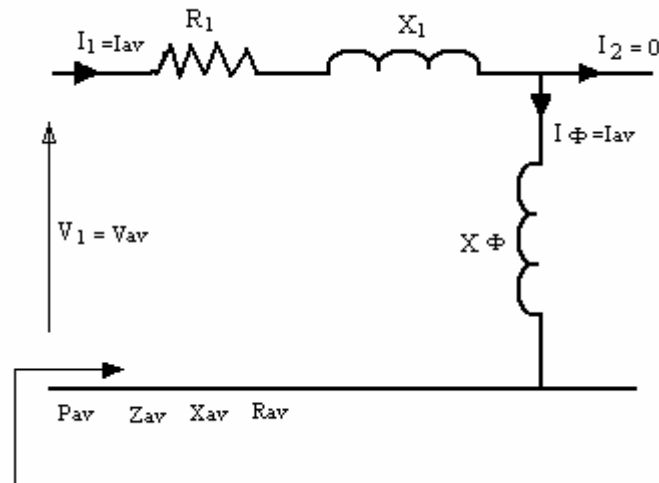


Figure A.5.2 : Circuit équivalent (par phase) de la machine asynchrone à vide, entraînée à vitesse synchrone

ou les grandeurs référées au stator, par phase :

I_{av} : courant à vide (valeur efficace),

V_{av} : tension à vide (valeur efficace),

P_{av} : puissance active à vide,

Z_{av} : impédance à vide,

X_{av} : réactance à vide,

R_{av} : résistance à vide.

Si l'on effectue les mesures de V_{av} , I_{av} et P_{av} on obtient :

$$Z_{av} = V_{av} / I_{av} \quad (A.5.1)$$

$$R_{av} = P_{av} / I_{av}^2 \quad (A.5.2)$$

Et :

$$X_{av} = \sqrt{Z_{av}^2 - R_{av}^2} \quad (A.5.3)$$

ou dans ce cas, comme indiqué sur la figure A.5.2 :

$$X_{av} = X_1 + X_2 \quad (A.5.4)$$

Nous remarquons que cet essai doit être réalisé avec une alimentation statorique triphasée équilibrée, à tension et fréquence nominales.

Essai à rotor bloqué

En principe, les conditions adoptées doivent être les plus proches de l'utilisation de la machine.

Autrement dit, si nous nous intéressons aux performances de la machine lors de sa mise sous tension, nous devons choisir une alimentation avec fréquence et tension nominales, ce qui implique de hautes valeurs pour le courant.

Par contre, si nous voulons étudier les performances pour des conditions normales, cet essai doit être effectué avec tension réduite, de façon à mieux tenir compte des effets liés aux problèmes de saturation et de profondeur de pénétration des courants.

Pour le cas des machines de puissance ne dépassant pas 25 CV, nous pouvons effectuer cet essai à tension réduite et fréquence nominale.

Dans cet essai, où les courants rotoriques sont importants, la branche d'excitation est négligée (Figure A.5.3).

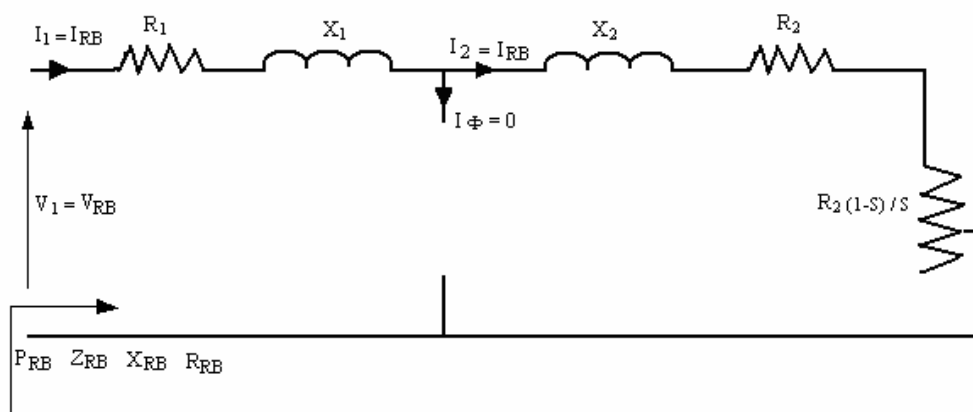


Figure A.5.3 : Essai à rotor bloqué – circuit équivalent par phase de

la machine asynchrone

ou les grandeurs référées au stator, par phase sont :

I_{rb} : courant à rotor bloqué (valeur efficace),

V_{rb} : tension à rotor bloqué (valeur efficace),

P_{rb} : puissance active à rotor bloqué,

Z_{rb} : impédance à rotor bloqué,

X_{rb} : réactance à rotor bloqué,

R_{rb} : résistance à rotor bloqué.

Si l'on effectue les mesures de V_{rb} , I_{rb} et P_{rb} , on obtient :

$$Z_{rb} = V_{rb} / I_{rb} \quad (A.5.5)$$

$$R_{rb} = P_{rb} / I_{rb}^2 \quad (A.5.6)$$

Et :

$$X_{rb} = \sqrt{Z_{rb}^2 - R_{rb}^2} \quad (A.5.7)$$

De plus :

$$X_{rb} = X_1 + X_2 \quad (A.5.8)$$

Alors à l'aide du tableau, qui présente les coefficients empiriques de distribution des réactances dans les machines asynchrones [32], nous déterminons les valeurs de X_1 et X_2 .

Distribution empirique des réactances de fuite entre le stator et le rotor des machines asynchrones			
Classe	Caractéristiques	Fraction de ($X_1 + X_2$)	
		X_1	X_2
A	Couple de démarrage normal Courant de démarrage normal	0.5	0.5
B	Couple de démarrage normal Bas courant de démarrage	0.4	0.6
C	Couple de démarrage élevé Bas courant de démarrage	0.3	0.7
D	Couple de démarrage élevé Glissement élevé	0.5	0.5
Rotor bobiné		0.5	0.5

Tableau A.5.1: Coefficients empiriques de distribution des réactances de fuite asynchrones (selon AIEE Test Code)

Avec la valeur de X_1 et l'expression (A.5.4), on obtient :

$$X_\Phi = X_{av} + X_1 \quad (A.5.9)$$

Des cinq paramètres du circuit équivalent de la figure A.5.1, nous avons déjà réussi à en déterminer quatre, soit : R_1 , X_1 , X_2 et X_Φ . La valeur de la résistance du rotor R_2 , peut être déterminée par l'expression [1-18] :

$$R_2 = (R_{rb} - R_1) \cdot [(X_2 + X_\Phi)^2 / X_\Phi] \quad (A.5.10)$$

Et finalement, nous pouvons obtenir les inductances de la machine, selon :

$$L_1 = X_1 / 2\pi f \quad (A.5.11)$$

$$L_2 = X_2 / 2\pi f \quad (A.5.12)$$

$$L_\Phi = X_\Phi / 2\pi f \quad (A.5.13)$$

ou f est la fréquence des tensions statoriques, en [hz].

$$R_s = R_1 \quad (A.5.14)$$

$$R_r = R_2 \quad (A.5.15)$$

$$L_{sd} = L_{sq} = L_1 + L_\Phi \quad (A.5.16)$$

$$L_{rd} = L_{rq} = L_2 + L_\Phi \quad (A.5.17)$$

$$m_{sr} = L_\Phi \quad (A.5.18)$$

Calcul des paramètres de la machine considérée

Résistances statoriques :

Tout d'abord, nous effectuons plusieurs mesures de la résistance des phases statoriques, avec un courant continu sur une plage allant de 0 A jusqu'à 20 A et la moyenne des valeurs obtenues sur les trois phases a été :

$$R_1 = 1.5 \, \Omega \quad (A.5.19)$$

On rappelle ici que cette valeur correspond à deux enroulements statoriques de la même phase connectés en parallèle, car la machine considérée possède 2 paires de pôles.

Si l'on prend, selon le tableau A.5.1, pour une machine asynchrone classe A, le coefficient de distribution des réactances de fuite, on a :

$$X_1 = 0.5 X_{rb} \quad (A.5.20)$$

$$X_2 = 0.5 X_{rb} \quad (A.5.21)$$

La réactance magnétisante est donnée par l'expression :

$$X_\phi = X_{av} - X_1 \quad (A.5.22)$$

La résistance R_2 est calculée suivant l'expression A.5. 10.

A partir des valeurs des paramètres R_1 , X_1 , X_2 , R_2 et X_ϕ données par les expressions (A.5.19)- (A.5.22) et en utilisant aussi les expressions (A.5.14) - (A.5.18), nous arrivons aux cinq paramètres du modèle de la machine asynchrone (modèle classique de Park), présentés dans le tableau A.5.2.

Paramètre	Valeur	
R_s	1.5 Ω	Résistance des enroulements statoriques
R_r	2.0 Ω	Résistance des enroulements rotoriques
L_{sd}, L_{sq}	0.6330 H	Inductance propre des enroulements statoriques
L_{rd}, L_{rq}	0.6330 H	Inductance propre des enroulements statoriques
m_{sr}	0.6221 H	Mutuelle inductance stator/ rotor

Tableau A.5.2 : Paramètres du modèle classique de Park référencé au stator.

Présentation de la machine

Il s'agit d'une machine asynchrone triphasée à cage classe E fabriquée par Leroy-Sommer, pour la quelle les enroulements statoriques ont été modifiés au LEEL.

Le modèle multi-enroulement est présenté au chapitre II avec les hypothèses, les conventions et le domaine d'étude.

Caractéristiques géométriques

- $l = 0.08$ m, longueur utile,
- $R_{ex} = 0.033$ m, rayon extérieure la tôle du stator,
- $R = 0.026$ m, rayon d'alésage,
- $R_{er} = 0.024$ m, rayon extérieure du rotor,
- $e = 0.002$ m, épaisseur de l'entrefer,
- $S_{es} = 216E-6$ m², surface de l'encoche du stator,
- $S_{br} = 138E-6$ m², surface de l'encoche du rotor,
- $r_e = 0.024$ m, rayon extérieure des anneaux de fermeture de la cage,
- $r_i = 0.018$ m, rayon intérieur des anneaux de fermeture de la cage,
- $ea = 0.008$ m, épaisseur des anneaux.

Caractéristiques électriques

- nombre de paires de pôles $P = 2$,
- nombre de conducteurs par encoche au stator = 18,
- nombre d'encoches statoriques 36,
- nombre de barres rotoriques = 32,
- coefficient de frottement = 0.0038 kgm²/s,
- moment d'inertie = 0.038 kgm².

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. Kant, "Machine asynchrone actionneur d'avenir", Revue Générale d'Electricité, N° 6, Juin 1990.

[2] D. Klein, "Le moteur asynchrone en tant qu'actionneur d'asservissement", Revue Générale d'Electricité, N° 6, Juin 1990.

[3] C.G. Hong, G.J. Hwang, "Nonlinear complex finite-element analysis of squirrel cage induction motor performance", IEE Proc. B, Vol. 138, N° 5, September 1991.

[4] E. Vassent, "Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par les méthodes des éléments finis", Thèse de doctorat, ENSIEG. Grenoble, Novembre 1990.

[5] M. Pouloujadoff, M. Ivanov, "Comparaison des schémas équivalents au moteur asynchrone polyphasé", Revue Générale d'Electricité, Tome 76, N° 1, Juin 1967.

[6] M. Mihalache, "Paramètres de la machine synchrone définition et méthodes de détermination", Revue science technique et énergie, pp. 381-291, Roumanie, 1988.

[7] D. Petrovic, "Détermination des paramètres des machines tournantes : identification d'une grandeur comportant une somme d'exponentielle", Bull. Direction études et recherches, Série B, Réseaux électriques, matériels électriques N° 1, 1975.

[8] V. Gourishankar. "Electrotechnical energy conversion". International textbook company. Pennsylvania, 1965.

[9] S. A. Eldhemy, "Analyse of space harmonics interaction in squirrel cage induction machines" Electric machines and Power Systems, vol. 14, 1988

[10] A. Bezziane " Commande vectorielle d'une machine asynchrone à rotor défaillant", Thèse de magister en Electrotechnique. Université de Batna, Décembre 2003.

[11] L. Mazec, "Identification des paramètres de l'actionneur électrique pour la modélisation", Notes de cours, INP Toulouse, 1993

[12] Hamid A. Toliyat and Thomas A. Lipo "Transient analysis of cage induction machines under stator, rotor bar and ring faults", IEE Transactions on Energy Conversion., Vol. 10, n°. 2, pp. 241-247, June 1995.

[13] Subhasis Nandi, Hamid A. Toliyat "Condition monitoring and fault diagnosis of electrical machines"-A Review. IEEE 1999.

[14] Subhasis Nandi, Hamid A. Toliyat "Fault diagnosis of electrical machines"-A Review. IEEE 1999.

[15] Subhasis Nandi, Hamid A. Toliyat and Alexander G. Parols "Performance analysis of A single phase induction motor under eccentric" IEEE Industry applications society. New Orleans, Louisiana, Annual Meeting. pp 174-181. October 5-9, 1997.

[16] M. Poloujadoff, " Machines électriques", technique de l'ingénieur, traité de génie électrique, D 3 485, pp. 1-22.

[17] Boumegoura. Tarek, "recherche de signature électromagnétique des défauts dans une MAS et synthèse d'observation en vue du diagnostic", Thèse de Doctorat, E.C.Lyon, mars 2001.

[18] E. Levi, M. Jones, S.N. Vukosavic, "Even-phase multi-motor vector controlled drive with single inverter supply and series connection of stator windings", IEEE, Proc. Electr. Power Appl., Vol. 150, No. 5, pp. 580-590, September 2003.

[19] F. Bordry, B. De Fornel and B. Trannoy "Flux and speed numerical control of voltage-fed asynchronous induction machine" IEEE Proceedings, vol. 127 Pt. B, n° 2, March 1980.

[20] D. Telford, M.W. Dunnigan, B.W. Williams, "Adaptive High Bandwidth Current Control for Induction Machines", IEEE, Transactions on power electronics, vol.18, N° 2, pp. 527-538, March 2003.

[21] Davat. B, Lajoie-Mazenc. M, Hector. I, " Magnetic structure and feeding circuit modellingF.", IEEE, Transactions on Magnetics, vol.19, pp. 2471-2473, 1983.

[22] E. Levi, M.J. Slobodan, N. Vukosavic, H.A. Toliyat, "A Novel Concept of a Multiphase Multimotor Vector Controlled Drive System Supplied From a Single Voltage Source Inverter", IEEE, Transactions on power electronics, vol.19, N° 2, pp. 320-335, March 2004.

[23] J.D. Ede, K. Atallah, J. Wang, D. Howe, "Effect of Optimal Torque Control on Rotor Loss of Fault-Tolerant Permanent-Magnet Brushless Machines", IEEE, Transactions on magnetics, vol. 38, N° 5, pp. 3291-3293, September 2002.

[24] E. Levi, M. Wang, "Online Identification of the Mutual Inductance for Vector Controlled Induction Motor Drives, IEEE, Transactions on energy conversion, vol. 18, N° 2, pp. 299-305, June 2003.

[25] H. Meshgin-Kelk, J. Milimonfared, H.A. Toliyat, "A Comprehensive Method for the Calculation of Inductance Coefficients of Cage Induction Machines", IEEE, Transactions on energy conversion, vol. 18, N°. 2, pp. 187-193, June 2003.

[26] K. Delaere, W. Heylen, R. Belmans, K. Hameyer, "Comparison of Induction Machine Stator Vibration Spectra Induced by Reluctance Forces and Magnetostriction", IEEE, Transactions on magnetics, vol.38, N°. 2, pp. 969-972, March 2001.

[27] Davat. B, "Modélisations des dispositifs électromagnétiques". Thèse de Docteur és-Science Physique, INPToulouse France 1984.

[28] M. Bouharkat, "Amélioration du modèle de la machine asynchrone en vue de la commande ", Rapport de DEA, INP Toulouse, 1993.

[29] B. Trannoy, "Modélisation des machines asynchrones, Modèle de Park", Notes de cours, INP Toulouse, 1992.

[30] M. Bouharkat, R. Abdessmed, "Modélisation de la cage d'un moteur à induction", Conférence internationale d'électrotechnique, 5-7 octobre, pp 500-505, Oran, 1998.

[31] Leplat. Pierre-Marie, "Modélisation de la génératrice asynchrone", Rapport de DEA en Génie-Électrique. Université de Lille 1994/1995.

[32] J. Huang, Modélisation et simulation des machines synchrones munies de circuits amortisseurs alimentées par convertisseurs statiques, Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 1998.

[33] S. Williamson, M.C. B egg, B.Sc.(Eng.), "Calculation of the bar resistance and leakage reactance of cage rotors with closed slots" IEEE, Proceedings, vol.132, Pt.B, N°. 3, pp.125-132, May1985.

[34] S. Williamson, M.J. Robinson, "Calculation of cage induction equivalent circuit parameters using finite elements", IEEE, Proceedings-B, vol. 138, N°.5, pp. 264-276, September 1991.

[35] S. Williamson, M.C. Begg, B.Sc.(Eng.), A.M.I.E.E." Calculation of the resistance of induction motor end rings" IEEE, Proceedings, vol.133, Pt.B, N°. 2, pp.54-60, March 1986.

[36] V. Eric, Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, INP Grenoble, 1990.

- [37] M. Bouharkat, R. Abdessmed, "Détermination des paramètres inductifs du MAS à cage", Conference on Modelling and simulation of Electrical systems (CMSES), 13-14 mai, Saida, 1997.
- [38] B. Cassoret, R. Corton, D. Roger, J.F. Brudny, "Magnetic Noise Reduction of Induction Machines", IEEE, Transactions on power electronics, vol.18, N°. 2, pp. 570-579, March 2003.
- [39] J.R. Stack, T.G. Habetler, R.G. Harley, "Effects of Machine Speed on the Development and Detection of Rolling Element Bearing Faults", IEEE, Power electronics letters, vol. 1, N°. 1, pp. 19-21, March 2003.
- [40] A.B. Proca, A. Keyhani, "Identification of Variable Frequency Induction Motor Models from Operating Data", IEEE, Transactions on energy conversion, vol. 17, N°. 1, pp. 24-31, March 2002.
- [41] F.Gardio, Traité d'électricité, Electromagnétisme, vol. III. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes Edition, France, 1996.
- [42] F. Wang, F. Zhang, L. Xu, "Parameter and Performance Comparison of Doubly Fed Brushless Machine with Cage and Reluctance Rotors", IEEE, Transactions on industry applications, vol.38, N°. 5, pp. 1237-1243, September/October 2002.
- [43] J. P. Caron, J. P. Hautier, "Modélisation et commande de la machine asynchrone", Editions Technip. Octobre 1995, France.
- [44] K. Shima, K. Ide, M. Takahashi, " Finite-Element Calculation of Leakage Inductances of a Saturated Silent-Pole Synchronous Machine With Damper Circuits", IEEE, Transaction on energy conversion, vol.17, N°.4, pp. 463-470, December 2002.
- [45] B. De Fornel, Variation de vitesse des machines à courants alternatifs, Notes de cours, INP Toulouse, 1993.
- [46] Y. Shin Lai, "Machine Modeling and Universal Controller for Vector-Controlled Induction Motor Drives", IEEE, Transactions on energy conversion, vol. 18, N°. 1, pp.23-32, March 2003.
- [47] E. Levi, M.J. Slobodan, N. Vukosavic, H.A. Toliyat, "A Novel Concept of a Multiphase Multimotor Vector Controlled Drive System Supplied From a Single Voltage Source Inverter", IEEE, Transactions on power electronics, vol.19, N°. 2, pp. 320-335, March 2004.

- [48] M. Tsuji, S. Chen, K. Izumi, E. Yamada, "A Sensor less Vector Control System for Induction Motors Using q-Axis Flux with Stator Resistance Identification", IEEE, Transactions on industrial electronics, vol. 48, N°. 1, pp. 185-194, February 2001.
- [49] J. Holtz, J. Quan ,” Sensorless Vector Control of Induction Motors at Very Low Speed Using a Nonlinear Inverter Model and Parameter Identification”, IEEE, Transactions on industry applications, vol. 38, N°. 4, pp. 1087-1095, July/August 2002.
- [50] R. Qu, T.A. Lipo, "Dual-Rotor, Radial-Flux, Toroidally Wound, Permanent-Magnet Machines", IEEE, Transactions on industry applications, vol.39, N°. 6, pp. 1665-1673, November/December 2003.
- [51] L.P. Huelzman, "Visual Study of Rotating Electrical Machines" IEEE, Circuits and devices magazine, pp. 2-4, July 2002.
- [52] F. Córcoles, J. Pedra, M. Salichs, L. Sainz, "Analysis of the Induction Machine Parameter Identification", IEEE, Transactions on energy conversion, vol. 17, N°. 2, pp.183-190, June 2002.
- [53] In-Joon Ha and Sang-Hoon Lee "An Online Identification Method for Both Stator and Rotor Resistances of Induction Motors without Rotational Transducers", IEEE, Transactions on industrial electronics, vol. 47, N°. 4, pp. 842-853, August 2000.
- [54] D. Hadiouche, H. Razik, A. Rezzoug, "On the Modeling and Design of Dual-Stator Windings to Minimize Circulating Harmonic Currents for VSI Fed AC Machines", IEEE, Transactions on industry applications, vol. 40, N°. 2, pp. 506-515, March/April 2004.
- [55] R. Qu, T.A. Lipo, "Design and Parameter Effect Analysis of Dual-Rotor, Radial-Flux, Toroidally Wound, Permanent-Magnet Machines", IEEE, Transactions on industry applications, vol. 40, N°. 3, pp. 771-779, May/June 2004.
- [56] M. Bouharkat, R. Abdessmed, "Field choice of the meshing during the modelling of a multi-rolling up electric actuator", Journal of Electrical Engineering, vol. 4, n° 2, pp 27-33, 2004.
- [57] G.R.U.CA.D, Logiciel de calcul des champs par éléments finis, L.E.E.I-ENSEETH, Toulouse, 1990.
- [58] K. S. Huang, Q.H. Wu, D.R. Turner, "Effective Identification of Induction Motor Parameters Based on Fewer Measurements", IEEE, Transactions on energy conversion, vol.17, N°. 1, pp. 55-60, March 2002.

[59] B. Froidurat, L.L. Rouve, A. Foggia, J.P. Bongiraud, G. Mennier, "Calculation of Electrical Machine Magnetic Stray Fields", IEEE, proc-sci technol vol. 149, N°. 5, pp. 190-193, September 2002.

[60] X.B. Bomela, M.J. Kamper, "Effect of Stator Chording and Rotor Skewing on Performance of Reluctance Synchronous Machine", IEEE, Transactions on industry applications, vol.38, N°. 1, pp. 91-100, January/February 2002.

[61] N. Sadowski, EFCAD : Un logiciel de calcul des champs électromagnétiques en deux dimensions. L.E.E.I-ENSEETHT, France, 1990.

[62] N. Sadowski, DSN, Un logiciel de manipulation des courbes; manuel de manipulation de référence. L.E.E.I-ENSEETHT, France, 1990.

[63] A. Gourdin et M. Boumahrat, Méthodes numériques appliquées, OPU, Algérie, 1991.

[64] K. Arbenz et A. Wohlhauser, Analyse numérique, OPU, Algérie, 1988.