

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR DE BATNA

FACULTÉ DES TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

Présenté

Par :

LATRECHE SABER

Pour obtention du diplôme

MAGISTER EN GENIE MECANIQUE
OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

Contribution à L'étude et la Conception d'un Robot Delta

Travail effectué au sein de laboratoire de recherche en productique (LRP)

Soutenu publiquement le 27/06/2011, devant le jury composé de :

Pr. T. OUTAS	UHL. Batna	Président
Dr. M. ASSAS	MCA. Batna	Examineur
Dr. C. MAHFOUDI	MCA . Oum El Bouaghi	Examineur
Pr. B. BARKAT	UHL. Batna	Rapporteur

Remerciements

Avant tout, je remercie le grand dieu d'avoir guidé mes pas sur le bon chemin

Voici quelques lignes difficiles à écrire ; non pas parce que je n'ai envie de remercier personne (au contraire), mais parce que ces lignes marquent l'achèvement de plus de trois années de thèse, mémorables.

Pour moi. Aussi, c'est avec beaucoup d'émotion que je remercie l'ensemble des personnes suivantes, qui ont contribué à faire de mon quotidien des moments agréables.

Je tiens à remercier mon encadreur Pr. BARKAT Balkacem, pour la patience et l'aide qu'il m'a accordé en tant que promoteur de thèse et pour la qualité scientifique du travail qu'il a proposé.

Je remercie Monsieur OUTAS Toufik, professeur à l'université de Batna, pour m'avoir fait le plaisir de présider ce jury de thèse.

Mes remerciements vont à Monsieur ASSAS Mekki, maître de conférences à l'université de Batna, pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur MAHFOUDI Chawki, maître de conférences à l'université d'Oum El Bouaghi, pour avoir fait partie de ce jury.

Nos remerciements vont aussi à Messieurs Lombarkia Redhouane, Sedrat Toufik.

Pour leur soutien et aide, à tous les enseignants de l'institut de mécanique et à tous qui ont aidés pour réaliser ce travail.

Je ne peux terminer ces remerciements sans mentionner mes proches, à mes parents d'abord, qui m'ont aidé tout au long de mon parcours. A mes frères et mes sœurs. Je ne saurais oublier mes amis de sport surtout mon grand Maître Monsieur HADJOU DJ Tahar.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	2
SOMMAIRE.....	3
INTRODUCTION GENERALE	7
I. CHAPITRE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ROBOTS PARALLELES (DELTA)	9
I.1. INTRODUCTION.....	10
I.2. QUELQUES RAPPELS DE DEFINITIONS	10
I.2.1. DEFINITIONS D'UN MECANISME	10
I.2.2. LES CONSTITUANT TECHNOLOGIQUE D'UN ROBOT	10
I.2.3. LA STRUCTURE MECANIQUE D'UN ROBOT	11
I.2.4. DEGRE DE LIBERTE (DDL)	12
I.2.5. ESPACE ARTICULAIRE (ESPACE DE COMMANDE)	12
I.2.6. ESPACE OPERATIONNEL (ESPACE DES TACHES)	12
I.2.7. ESPACE DE TRAVAIL.....	13
I.3. LES ROBOTS PARALLELES	13
I.4. LES DIFFERENTS TYPES DE ROBOTS PARALLELES	14
I.4.1. ROBOT PLEINEMENT PARALLELE	14
I.4.1.1. STRUCTURE PLEINEMENT PARALLELES A 3DDL	14
I.4.2. ROBOT PARALLELE MIXTE (GENERALISE)	15
I.4.2.1. STRUCTURES A 6DDL EQUIPE D'UNE LAISSIONS PRISMATIQUE CIRCULAIRE	16
I.4.3. ROBOT PLEINEMENT PARALLELE LEGER.....	16
I.4.3.1. STRUCTURE HEXA A 6DDL	17
I.4.4. ROBOT PLEINEMENT PARALLELE AVEC DECOUPLAGE	17
I.4.4.1. ROBOT 2-DELTA	17
I.5. ROBOTS TRANSLATEURS (3DDL).....	18
I.5.1. ROBOT PARALLELE DELTA DE CLAVEL.....	19

I.5.2. ROBOT PARALLELE DELTA DE ZOBEL.....	20
I.5.3. ROBOT 3-UPU.....	20
I.5.4. MECANISME DE POLLARD.....	21
I.5.5. MECANISME DE MITOVA	21
I.5.6. ROBOT STAR.....	22
I.5.7. ROBOT H	22
I.5.8. MECANISME DE REBOULET (SPEED R MAN)	23
I.5.9. PROTOTYPES DE MIANOWSKI	23
I.5.10. PROTOTYPE DE NEUMANN.....	24
I.5.11. LE MECANISME TIRCEPT ET TETRABOT	24
I.5.12. TANSLATEUR RAF	25
I.5.13. ROBOT ORTHOGLIDE	25
I.5.14. CONCLUSION.....	26
II. CHAPITRE : PROPOSITION D'UNE NOUVELLE ARCHITECTURE « DETLTA-LRP »	27
II.1. INTRODUCTION	28
II.2. DESCRIPTION DU ROBOT DELTA-LRP	28
II.3. LE DESSIN TECHNOLOGIQUE	30
II.4. PARAMETRAGES DU ROBOT DELTA-LRP.....	31
II.4.1. PRESENTATION DE LA STRUCTURE ETUDIEE	31
II.4.1.1. PARAMETRAGE	33
II.4.1.1.1. REPERES UTILISES.....	33
II.4.1.1.2. PARAMETRES GEOMETRIQUES.....	33
II.4.1.1.3. VARIABLE ARTICULAIRE	33
II.5. LA RELATION ENTRE Θ ET LES PARAMETRES DE L'ACTIONNEUR (LE VERIN).....	34
II.5.1. CALCULE LE MAXIMUM ET MINIMUM DE LA COURSE DU VERIN PRISMATIQUE	36
II.6. LA RELATION ENTRE Φ ET LA COURSE DE L'ACTIONNEUR (LE VERIN)	37

II.7. CONCLUSION	38
III. CHAPITRE : MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT DELTA-LRP	39
III.1. INTRODUCTION	40
III.2. RAPPEL SUR LE MODELE GEOMETRIQUE DIRECT ET INVERSE	40
III.3. CARACTERISTIQUE DES MODELES GEOMETRIQUES DES ROBOTS PARALLELES	41
III.4. MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT TRANSLATEUR DELTA-LRP	42
III.5. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT DE COMMANDE	42
III.6. MODELE GEOMETRIQUE DIRECT COMPLET DU ROBOT DELTA -LRP	47
III.7. MODELE GEOMETRIQUE INVERSE	50
III.8. ESPACE DE TRAVAIL DE ROBOT DELTA-LRP	52
III.9. APPLICATIONS	53
III.10. RESULTATS	54
III.11. CONCLUSION	55
IV. CHAPITRE IV: ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE	56
IV.1. INTRODUCTION	57
IV.2. MODELISATION CINEMATIQUE DU ROBOT DELTA-LRP	57
IV.2.1. LE MODELE CINEMATIQUE DIRECT COMPLET	58
IV.2.2. LA MATRICE JACOBIENNE DE BASE	58
IV.2.3. CALCUL DU MODELE CINEMATIQUE DIRECT COMPLET DE ROBOT DELTA-LRP	59
IV.2.4. LE MODELE CINEMATIQUE INVERSE COMPLET DU ROBOT DETLA-LRP	60
IV.2.5. LE MODELE CINEMATIQUE INVERSE DU SECOND ORDRE	60
IV.2.6. APPLICATIONS	61
IV.2.6.1. LES RESULTATS	61
IV.2.6.1.1. LES VITESSES ARTICULAIRES	61
IV.2.6.1.2. LES ACCELERATIONS ARTICULAIRES	62
IV.3. MODELISATION DYNAMIQUE	63

IV.3.1. RAPPELLE THEORIQUE	63
IV.3.1.1. MODELE DYNAMIQUE INVERSE.....	63
IV.3.1.2. MODELE DYNAMIQUE DIRECT	63
IV.3.1.3. FORMALISME DE LAGRANGE	63
IV.3.2. ETUDE DYNAMIQUE DIRECT ET INVERSE DU ROBOT DELTA -LRP	65
IV.3.2.1. DETERMINATION DE L'ENERGIE CINETIQUE	65
IV.3.2.1.1. ÉNERGIE CINETIQUE DE LA JAMBE I.....	65
IV.3.2.2. DETERMINATION DES TERMES D'INERTIE - MATRICE (AI)	69
IV.3.2.3. DETERMINATION DES TERMES CENTRIFUGES.....	70
IV.3.2.4. DETERMINATION DES TERMES DE CORIOLIS.....	70
IV.3.2.5. DETERMINATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE DE LA JAMBE I	70
IV.3.3. MODELE DYNAMIQUE INVERSE.....	72
IV.3.3.1. CALCULE LA FORCE F_1 DE LA CHAÎNE I.....	72
IV.3.3.2. DYNAMIQUE DE LA PLATE-FORME	73
IV.3.4. MODELE DYNAMIQUE DIRECT	74
IV.3.5. LES RESULTATS	75
IV.4. CONCLUSION.....	76
CONCLUSION GENERALE	77
PERSPECTIVES.....	78
ANNEXE.....	79
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:	1

Introduction générale

Les robots parallèles ont fait l'objet d'un grand nombre de recherche en raison de l'intérêt considérable qu'ils possèdent à la différence des robots à architecture sériels, les actionneurs sont fixés sur le bâti, conduisant ainsi à réduire le poids des parties mobiles du manipulateur. Leur structure mécanique autorise une grande rigidité. Ils s'adaptent facilement au transfert des pièces légères à une cadence très élevée. De plus, ils sont particulièrement utilisés dans les opérations d'assemblages avec faibles tolérances. Ces propriétés particulières leur ouvrent la porte à toutes les applications spatiales.

La concurrence industrielle impose aux systèmes de production plusieurs contraintes telles que la grande vitesse et la précision. Ces exigences. Ne peuvent pas être assurées par les robots sériels classiques. Une nouvelle famille. Appelée robot parallèle, a été proposée. Elle est caractérisée par de bonnes performances dynamiques faibles masses mobiles du robot permettant d'avoir une grande cadence de production ainsi que de bonnes précisions assurées par la grande rigidité. Notre travail consiste, en une partie dans la conception et la modélisation d'une nouvelle structure du robot delta à trois degré de liberté avec trois actionneurs prismatiques.

Dans le premier chapitre, nous exposerons les différentes architectures mécaniques des robots parallèles à 3 degré de liberté en translation. Qu'on trouve dans la bibliographie.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons à l'aide du logiciel DAO de SolidWorks les différentes pièces et actionneurs et nous donnerons les paramètres géométriques de cette structure.

Dans le 3ème chapitre nous présenterons la modélisation géométrique directe et inverse. A partir des coordonnées de l'organe terminal permet de calculer les variables de commande et nous établirons les relations entre les variables passifs et actifs, ainsi nous consacrerons une

partie de ce chapitre pour la détermination de l'espace de travail de notre structure. Nous traitons également quelques exemples de planifications de trajectoire simple de géométrie connue.

Dans le 4ème chapitre nous traitons le modèle dynamique de notre structure, aussi bien le modèle dynamique direct et modèle dynamique inverse. Par le calcul des forces des actionneurs pour que l'organe terminal atteigne une vitesse et une accélération données la relation inverse sera aussi étudiée. Nous présenterons quelques résultats de cette étude pour des cas particuliers.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ROBOTS PARALLELES (DELTA)

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par présenter les robots parallèles en énonçant quelques définitions nécessaires pour décrire ces mécanismes et leurs caractéristiques et nous donnons une liste non exhaustive des différentes architectures qu'on trouve dans la littérature.

I.2. Quelques rappels de définitions

I.2.1. Définitions d'un mécanisme

Un mécanisme est un assemblage de pièces conçu afin de convertir des mouvements et/ou des efforts.

Un robot est un mécanisme piloté par une unité de commande qui réalise automatiquement des tâches telles que la manipulation ou l'usinage.

Une chaîne cinématique est un ensemble de pièces liées par les liaisons mécaniques. On appelle chaîne cinématique simple toute chaîne cinématique où chaque pièce a une ou deux liaisons seulement. On appelle chaîne cinématique complexe toute chaîne cinématique contenant une pièce ou plusieurs pièces ayant trois liaisons ou plus.

I.2.2. Les constituants technologiques d'un robot

Un robot est un ensemble de pièces mécaniques, reliés par des liaisons (appelées aussi joints ou articulations). Chacune de ces liaisons est articulée par un actionneur qui sera soit électrique, hydraulique ou pneumatique. L'énergie nécessaire aux actionneurs est fournie par une unité de puissance et le tout est contrôlé par une console de commande.

On a souvent une mini console d'apprentissage servant à l'apprentissage des trajectoires. A l'extrémité du robot, on a en général un outil (pince, torche à souder, etc...) servant à faire une opération particulière (*figure I.1*)

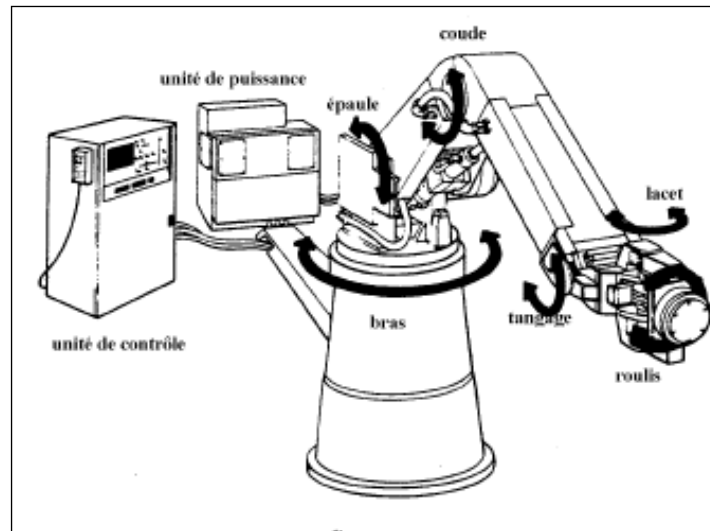


Figure I. 1 : *Constituant technologique d'un robot*

I.2.3. La structure mécanique d'un Robot

La structure mécanique d'un robot est composée de plusieurs corps (appelés aussi segment ou bras) connectés les uns aux autres par des liaisons appelées articulations ou joints, à un seul degré de liberté de translation ou de rotation. Cette structure mécanique peut constituer une chaîne cinématique continue ouverte simple, une chaîne arborescente ou une chaîne complexe (figure I.2)

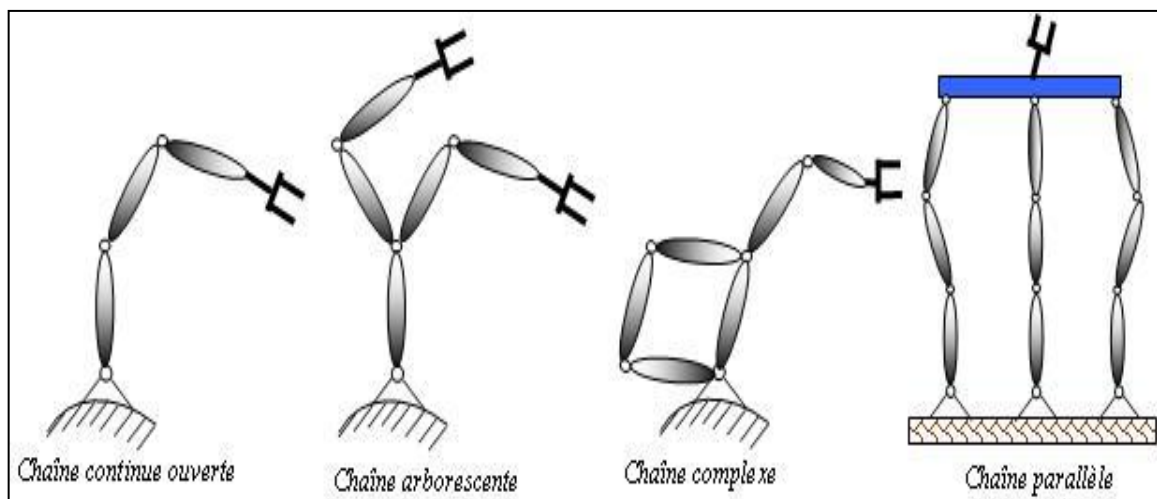


Figure I. 2 : *Structures utilisées dans la conception des robots*

Les bras manipulateurs à chaîne continue ouverte et à chaîne arborescente sont les plus nombreux. Ces bras manipulateurs sont simples sur le plan conception car sans risques

d'hyperstatisme, largement exploitées. Ces structures ont donné naissance à plusieurs générations de robots pratiquement chez tous les constructeurs.

Les bras manipulateurs conçus sur la base d'une structure mécanique du type chaîne complexe ont pour avantage essentiel d'augmenter la rigidité et par conséquent la précision en mode programmé. Ces chaînes permettent en outre un meilleur équilibrage statique. Leur exploitation industrielle, bien que nécessaire dans certains cas, revient trop chère et seule une compatibilité parfaite des liaisons peut éviter des degrés d'hyperstatisme interne.

I.2.4. Degré de liberté (ddl)

On appelle degrés de liberté d'un système mécanique les mouvements indépendants qui restent possibles. Le ddl d'une liaison mécanique entre deux pièces correspond au nombre de translations et de rotations indépendantes entre ces deux pièces.

Ainsi une liaison pivot et une liaison glissière ont chacune un seul ddl, alors qu'une liaison pivot glissant a deux ddl et une liaison rotule en a trois.

Le ddl d'un mécanisme, appelé aussi degré de mobilité, correspond au nombre de mouvements indépendants possibles dans le mécanisme.

I.2.5. Espace articulaire (Espace De Commande)

L'espace articulaire ou de configuration est l'espace qui permet de donner l'état de la configuration d'un bras manipulateur à un instant donné. Sa dimension n est égale au nombre de variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique (nombre des articulations pour une structure à chaîne continue ouverte).

I.2.6. Espace opérationnel (Espace Des Taches)

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal relativement à un référentiel $\{R_0\}$. La dimension de cet espace $m \leq 6$ est égale au nombre minimal des coordonnées opérationnelles qui permettent de définir la position et l'orientation de l'organe terminal (au maximum 3 dans le plan et 6 dans l'espace) suffisante pour l'exécution d'une tâche.

I.2.7. Espace de travail

Le volume de travail ou domaine atteignable est le volume engendré par un point de l'organe terminal. Sa forme (surface qui le délimite) et sa mesure (en m^3) dépendent du type de la structure porteuse et des limites des déplacements angulaires et linéaires de chaque axe, compte tenu des contraintes géométriques et mécaniques.

I.3. Les robots parallèles

Définition : « Un manipulateur parallèle est constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par n actionneurs simples » Lee [1].

Un manipulateur à architecture parallèle est donc caractérisé par l'existence de plusieurs chaînes cinématiques, simples ou complexes, entre une base et un organe terminal (*figure 1.3*). Un historique concernant la robotique parallèle est disponible dans une revue online. Cet historique fait apparaître un projet de plate-forme mobile destiné à un cinéma « dynamique » Pierrot [2] qui n'a jamais été construite.

Le premier robot parallèle construit est à mettre à l'actif de W. L. G. Pollard [3] ; il s'agit d'un mécanisme parallèle plan à cinq barres utilisé pour peindre des carrosseries de voitures.

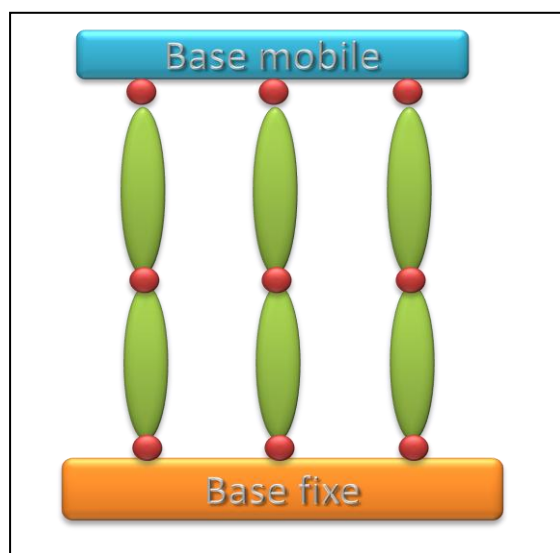


Figure I. 3 : *manipulateur à architecture parallèle*

I.4. Les différents types de robots parallèles

Ces dernières années les chercheurs travaillant dans le domaine de la robotique ont réservé une place plus importante aux manipulateurs ayant une architecture parallèle. De nombreux articles publiés sur ce sujet.

On se limite dans cette présentation aux principaux manipulateurs spatiaux généraux. Les robots translateurs (Delta).

Plusieurs auteurs utilisent des critères de classification pour comparer et analyser les robots à structures parallèle. Nous avons adopté un critère similaire à celui utilisé par Pierrot [2], et qui nous paraît judicieux. Ce critère consiste à différencier et classer les robots parallèles selon quatre grandes familles.

I.4.1. Robot pleinement parallèle

Un robot pleinement parallèle (Figure I.4) est un manipulateur parallèle dont le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal.

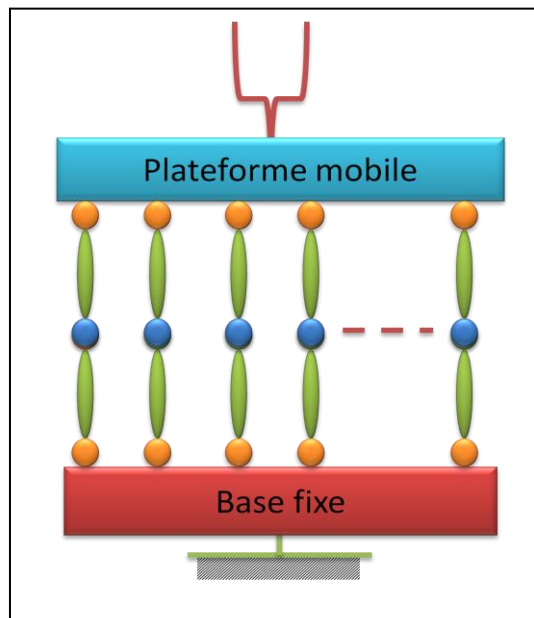


Figure I. 4: *Structure à trois degrés de liberté*

I.4.1.1. Structure pleinement parallèles à 3ddl

Ce type de structure est destiné à des applications réduites par rapport aux autres architectures développées précédemment.

La structure représentée (*figure I.5*) est semblable aux précédentes, celle-ci a été développée par Lee [1], elle est composée de vérins montés en parallèles et reliant une plateforme mobile à une plateforme fixe. Chaque vérin est lié d'une part à la plateforme fixe par une liaison pivot et à l'autre extrémité à la plateforme mobile par une liaison rotule.

Cette structure possède 3ddl dans l'espace : un de translation suivant l'axe vertical et deux degrés de liberté de rotation autour des autres axes

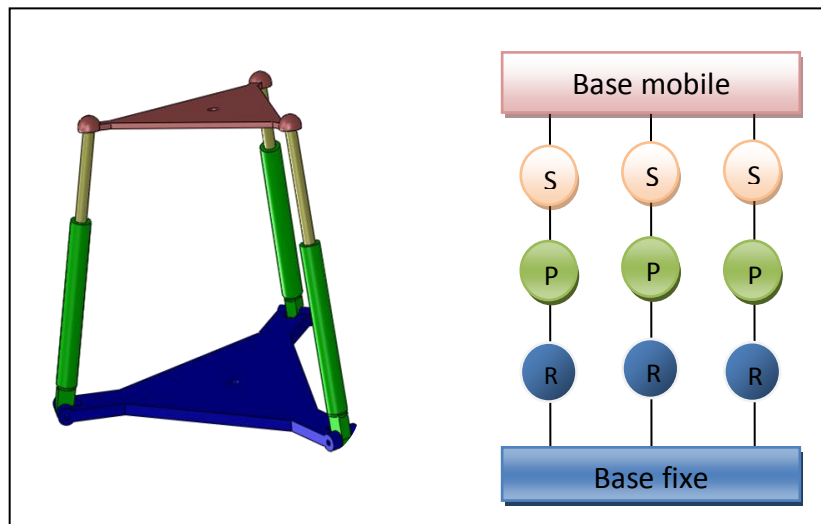


Figure I. 5: *Structure à 3ddl*

I.4.2. Robot parallèle mixte (généralisé)

Qui comme son nom l'indique, n'est pleinement parallèle, ces robot sont constitués deux bases, une fixe et une mobile, les deux bases sont reliées par des chaînes cinématiques ne sont pas identiques (*figure I.6*).

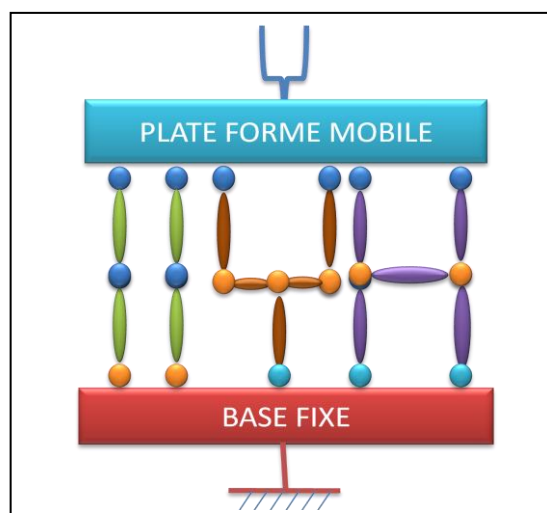


Figure I. 6: *Robots parallèle généralisés (chaines mixtes)*

I.4.2.1. Structures a 6ddl équipe d'une liaisons prismatique circulaire

La structure présentée (figure I.7) est proposée par Rasin [4], l'idée consiste à monter les actionneurs linéaires sur une liaison prismatique circulaire (sous formes de rail circulaire) qui premier d'avoir une rotation continue autour de l'axe vertical, ce robot donne un grand espace de travail.

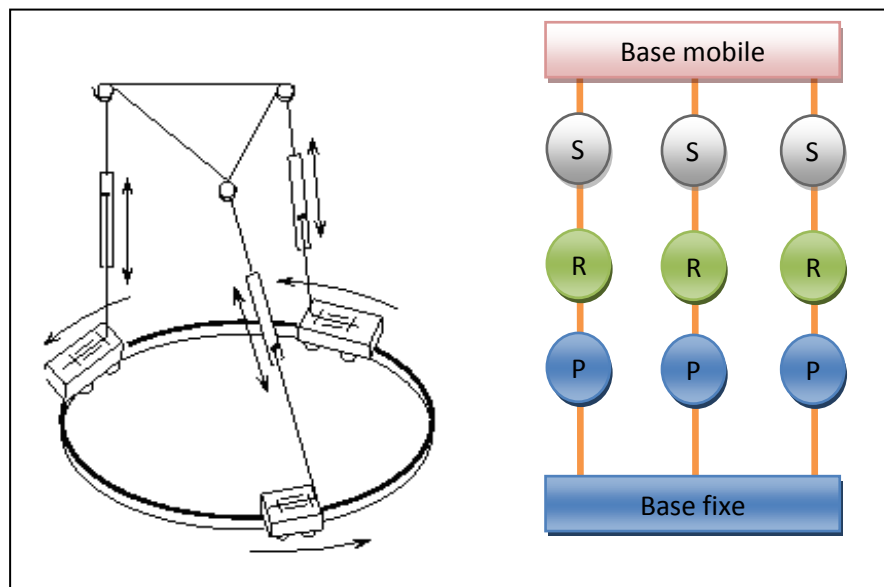


Figure I. 7: Structure à 6 ddl

I.4.3. Robot pleinement parallèle léger

Tous les actionneurs sont fixes par rapport à la base (figure I.9).

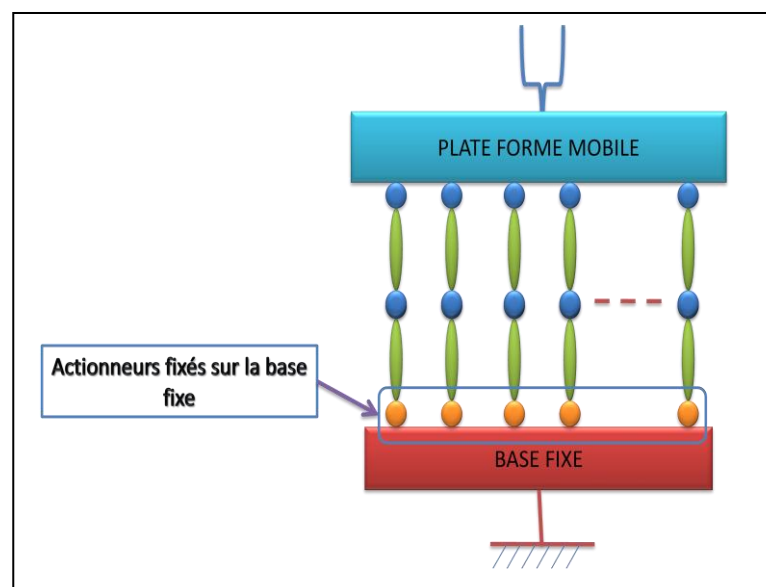


Figure I. 9: Robots pleinement parallèle léger

I.4.3.1. Structure hexa à 6ddl

Le robot hexa développé par Pierrot [2] est constitué de six chaînes cinématiques arrangées par paires, résultant de la séparation en deux bras de commande du bras de la structure delta (*figure I.10*). Chaque chaîne comporte au plus un actionneur. En ce sens, on rejoint ici le concept de la plateforme de Stewart à six chaînes en parallèle entre la base et la nacelle.

Cette structure a l'avantage d'avoir deux fonctions : elle peut fonctionner comme un robot delta si les deux bras d'une même paire de chaînes restent parallèles entre eux (deux ce cas les deux autres paires se déplacent suivant les mêmes règles). Par contre si les bras d'une même paire de chaînes ne sont pas parallèles entre eux, le parallélisme entre la base et la nacelle n'est plus conservée. L'orientation de la nacelle est fonction de l'angle forme par les deux bras

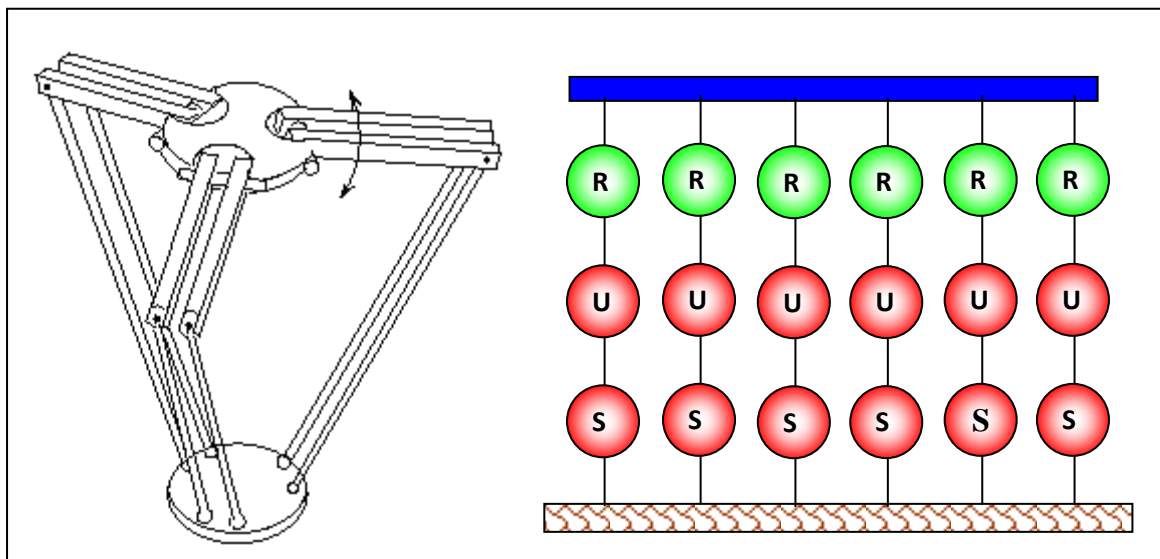


Figure I. 10 : Robot HEXA

I.4.4. Robot pleinement parallèle avec découplage

Robot pleinement parallèle avec découplage est constitué deux structures imbriquées, la première commande les translations de la plateforme mobile, la seconde structure commande les rotations de l'effecteur terminal. Les actionneurs sont fixés sur la base, et la rotation de l'effecteur est découplée de sa translation.

I.4.4.1. Robot 2-Delta

Le robot 2-Delta (*figure I.11*) est proposé par le professeur Jean Paul Lallemand [5] . Cette structure est constituée de deux structures delta imbriquées. La première est celle du robot delta

initial, elle ne commande que le déplacement parallèle à la base fixe. La seconde, ne commande que les orientations de la base (3) qui les transmet directement à la pince qui lui est liée.

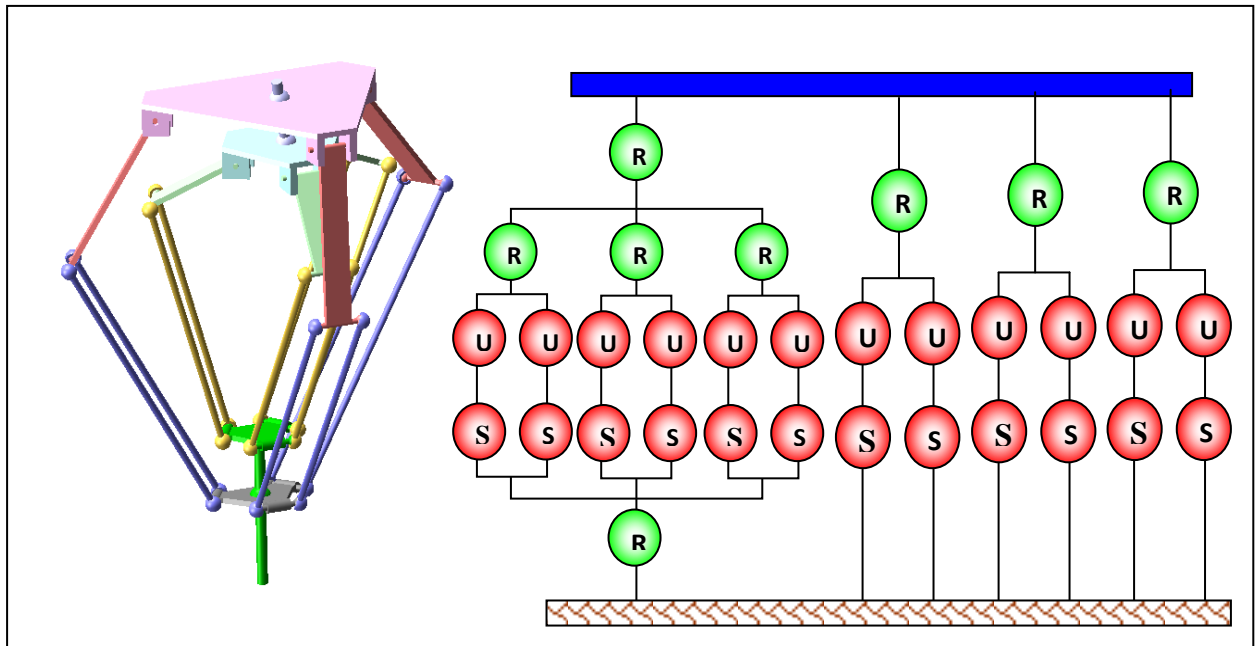


Figure I. 11 : Le robot 2-Delta de Lallemant

Les six branches principales montrent que cette structure est pleinement parallèle légère avec découplage. Elle possède bien 6ddl. La présence de plusieurs segments pour supporter l'organe terminal permet à cette structure parallèle d'avoir une bien meilleure rigidité. Cette rigidité assure une meilleure précision de positionnement. Les moteurs sont fixés sur la base. Cette diminution de la masse du manipulateur permet d'avoir un meilleur rapport (charge utile/masse du robot). On obtient un meilleur comportement dynamique et on peut atteindre des vitesses de déplacement plus importantes, et de larges possibilités d'accélération. Le robot 2-delta possède un domaine de travail très large.

I.5. Robots Translateurs (3ddl)

L'idée de cette famille de robots est développée initialement à l'école polytechnique de Lausanne grâce au professeur Raymond Clavel et son équipe, ces robots sont conçus pour manipuler des objets légers et peuvent travailler à une cadence très élevée. Leur particularité est qu'ils possèdent 3ddl de translation dans l'espace et que tous les actionneurs sont reportés sur la base. Ils ont la même topologie de base, représentée ici par une chaîne, par la composition des quatre maillons de la (figure I.12).

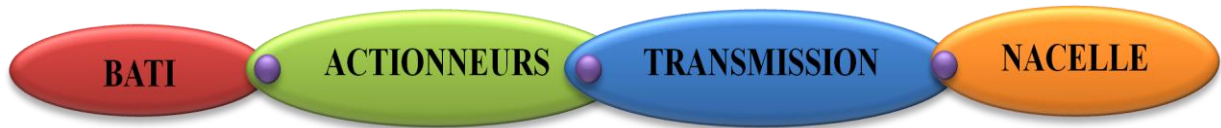


Figure I. 12 : *Principe des systèmes de positionnement à 3ddl dans l'espace*

Le maillon des actionneurs est composé par un ou plusieurs actionneurs par chaîne et sont tous fixes à la base. Celui de la transmission est assuré en général par des tiges de matériaux très légers, ce qui offre des possibilités de grande accélération. Comparés aux robots précédents, ce type de robot a un atout majeur : son espace de travail est très important.

I.5.1. Robot parallèle Delta de Clavel

La structure delta conçue par Clavel constitue une véritable innovation technologique, c'est un robot qui possède 3ddl en translation, la (figure I.13) illustre la géométrie de ce robot parallèle. La structure est composée de trois chaînes cinématiques identiques reliant la base à la nacelle. Chaque chaîne est constituée d'un bras relié à une extrémité à la base par une liaison pivot (motorisée) et à l'autre extrémité à deux biellettes parallèles par deux liaisons rotules. Ces deux biellettes sont également reliées à la nacelle par deux liaisons rotules

Clavel [6] expose les différentes architectures permettant d'obtenir un robot parallèle à 3 degrés de liberté en translation et cite quelques applications réalisées avec ce robot : manipulation dans l'industrie alimentaire, application dans le domaine médical où le Delta est utilisé comme support de microscope.

Le manipulateur delta est conçu pour le transfert rapide (trois transferts par seconde) de charges légères sur un espace de travail de 200m^3 .



Figure I. 13 : *Le Delta utilisant des actionneurs rotatifs en partis haute*

I.5.2. Robot parallèle Delta de Zobel

Notons que l'on pourrait remplacer la partie actionneur rotatif en levier par un actionneur linéaire comme l'ont proposé Tsai [7] et Cleval [6]. Et comme l'ont proposé Zobel [8] (*figure I.14*). Les leviers rotatifs sont remplacés par des actionneurs linéaires, ici placés verticalement.

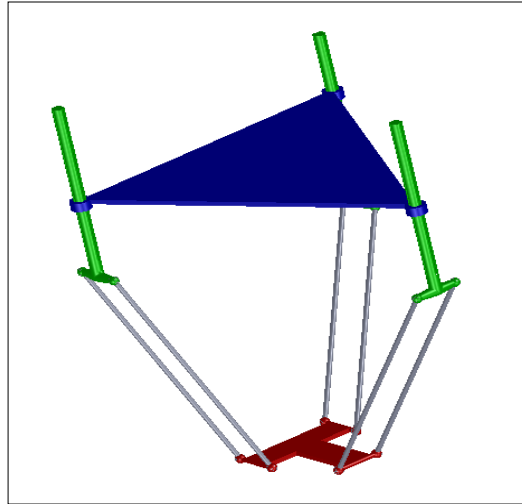


Figure I.14 : Robot à 3 ddl en translation: une variante du Delta

I.5.3. Robot 3-UPU

Le Robot à 3ddl appelé 3-UPU [7] (*figure I.15*) constitué de trois chaînes cinématiques de joints de cardans reliés par un actionneur prismatique. Un choix judicieux des axes des joints de cardan peut empêcher la rotation de la plateforme mobile.

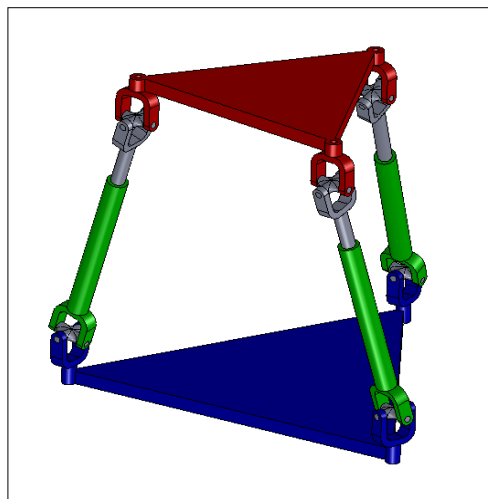


Figure I. 15 : Robot 3-UPU

I.5.4. Mécanisme de Pollard

Il faut noter que le Delta a comme ancêtre un mécanisme décrit en 1942 par Pollard [3] destiné à la peinture de véhicule automobile (*figure I.16*).

Dans ce mécanisme trois actionneurs rotoïdes orientent trois bras donc chaque extrémité est reliée à la nacelle par trois segments articulés.

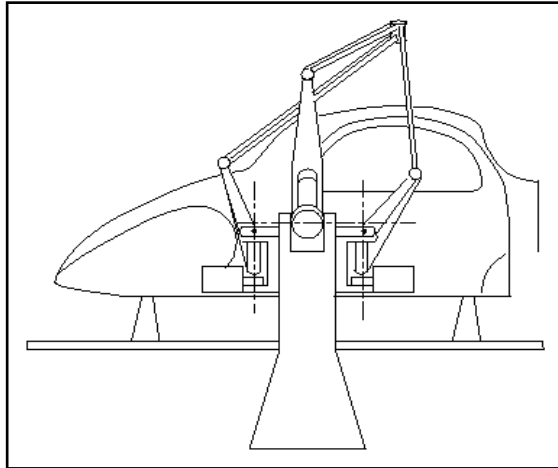


Figure I. 16 : *Le mécanisme de Pollard, l'ancêtre du "Delta", d'après Pollard.*

I.5.5. Mécanisme de Mitova

Parmi les variantes du Delta mentionnons le robot proposé par Mitova [9] où les actionneurs sont linéaires, placés après les parallélogrammes qui sont passifs (*figure I.17*).

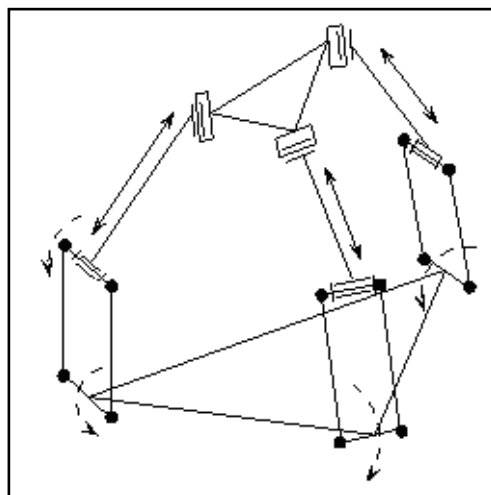


Figure I. 17 : *Une variante du Delta, le mécanisme de Mitova*

I.5.6. Robot Star

Le robot Star (ou Y-STAR) a été conçu à l'école centrale de paris. Hervé [10] propose quant à lui d'utiliser plutôt trois chaînes de type RHPaR. Cette structure est aussi une variante originale du robot Delta, elle est composée d'une nacelle reliée à une base par trois parallélogrammes. Chaque parallélogramme dont les sommets sont reliés par des cardans commandés par 3 moteurs par l'intermédiaire de 3 longues vis horizontales (*figure I.18*).

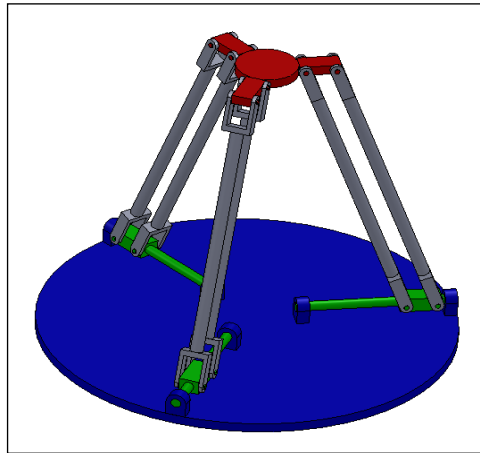


Figure I. 18 : *Le robot Star les actionneurs rotatifs entraînent l'écrou d'une vis sans fin sur lequel est articulé un parallélogramme*

I.5.7. Robot H

Robot H proposé par Hervé [11] qui utilise trois vis lisses à axe parallèle qui entraînent en translation des parallélogrammes (Clavel a aussi envisagé cette possibilité qu'il qualifie de delta linéaire) ainsi qu'une autre variation le (Prism-Robot) comme nous avons présenté dans la (*figure I.19*).

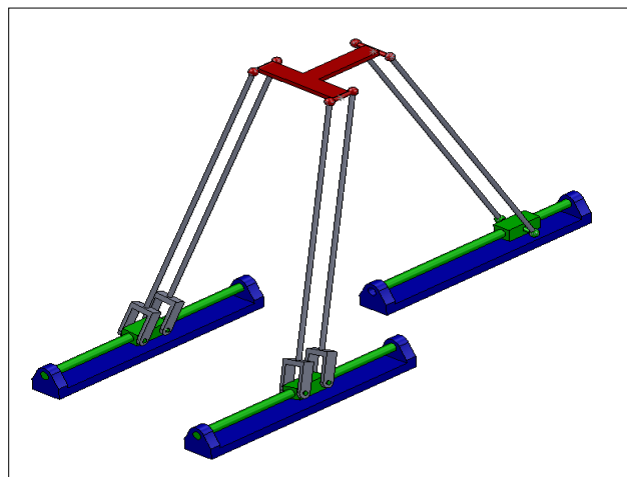


Figure I. 19 : *Le Robot H*

I.5.8. Mécanisme de Reboulet (Speed R Man)

Reboulet [12] propose, le « Speed R Man » de structure sensiblement compatible à celui du « Delta » mais où les actionneurs rotatifs sont remplacés par deux actionneurs linéaires agissant sur le même point. Il s'agit donc d'un mécanisme redondant présentant des caractéristiques de vitesse intéressantes. Ce manipulateur a plus spécialement été étudié par Nombrail [13].

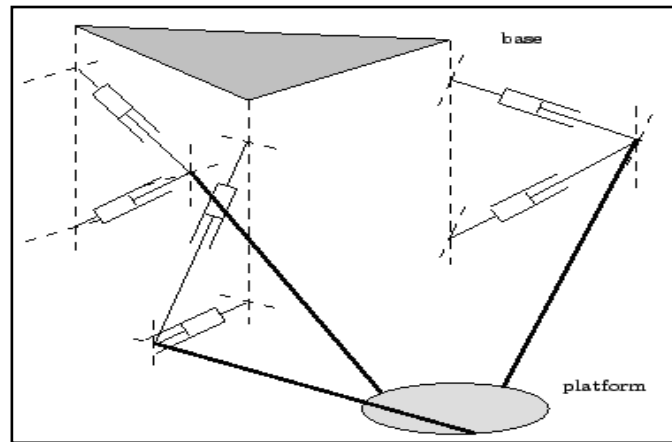


Figure I. 20 : Le Speed R Man

I.5.9. Prototypes de Mianowski

Mianowski [14] fait justement remarquer qu'un générateur du groupe des translations de l'espace peut être réalisé à partir de trois chaînes cinématiques de type (RPR), le groupe des déplacements, si ceux-ci agissent sur le même point. On peut ainsi construire une translation en faisant agir trois actionneurs linéaires soit sur un triple rotule, soit sur une structure équivalente

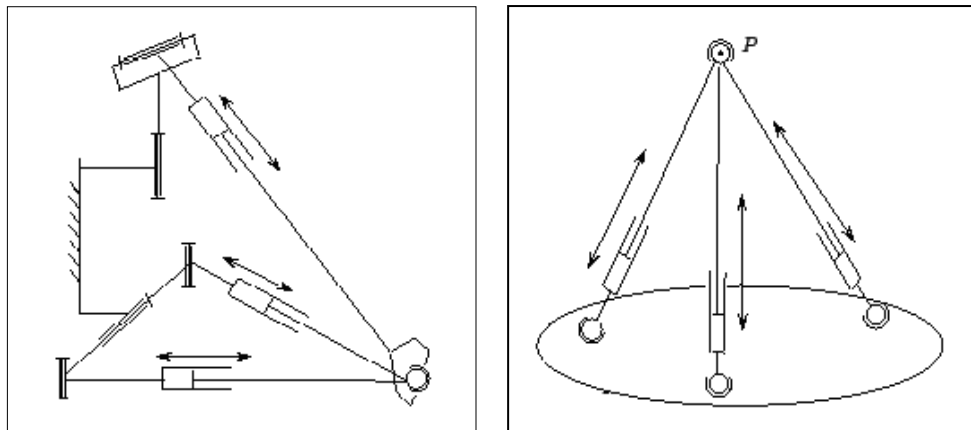


Figure I. 21 : Les prototypes de Mianowski

I.5.10. Prototype de Neumann

Ce robot breveté par Neumann [15] . Dans ce mécanisme, l'organe terminal comporte une tige libre de des déplacements selon son axe, cette tige est reliée à la base par un joint de cardan et trois chaînes de type RRPS agissent sur l'organe terminal (*figure I.22*).

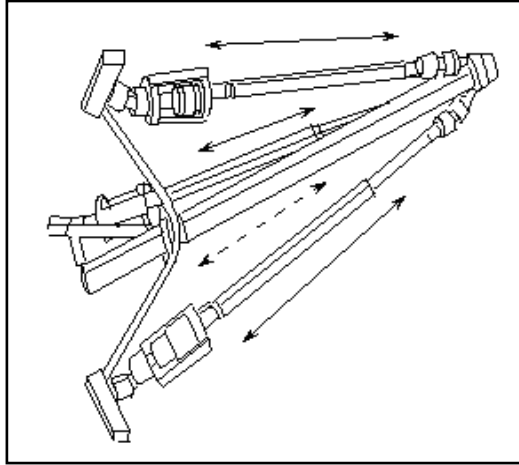


Figure I. 22 : *Le prototype de Neumann*

I.5.11. Le mécanisme Tircept et Tetrabot

La société Marconi a conçu le « Tetrabot » [16] (*figure I.23*), un robot hybride série parallèle, pour l'assemblage de pièces, de grande dimension, il s'agit en fait d'un positionneur de Neumann couplé à un poignet classique. Sa charge nominale est de 6 kg, pour une vitesse de 1m/s. ce manipulateur a une enveloppe de travail assez importante en raison de sa taille (environ deux fois la hauteur d'un homme).

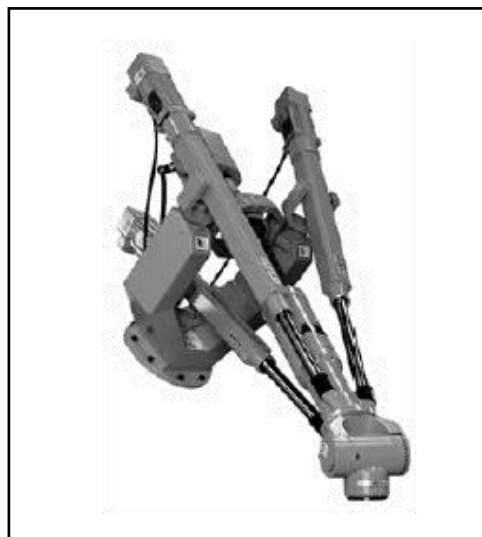


Figure I. 23 : *Tircept*

Notons que la société COMAU a proposé en 1994 le (Tricept HP1), un robot reposant sur le même principe.

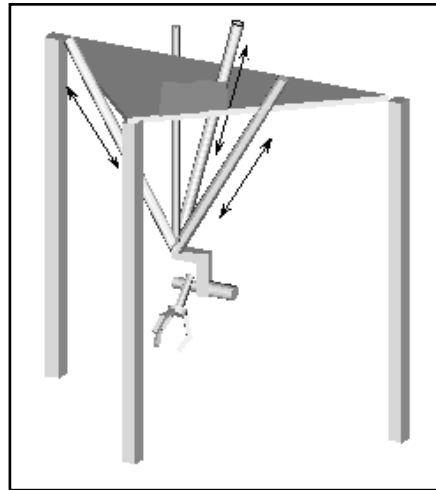


Figure I. 24 : *le Tetrabot*

I.5.12. Translateur RAF

Romdhane [17] a proposé un translateur RAF (*figure I.25*). Ce translateur comporte trois jambes SPS et deux chaînes passives qui éliminent des rotations de la plateforme mobile. Une jambe SPS est composée de deux liaisons sphériques reliées par un actionneur prismatique.

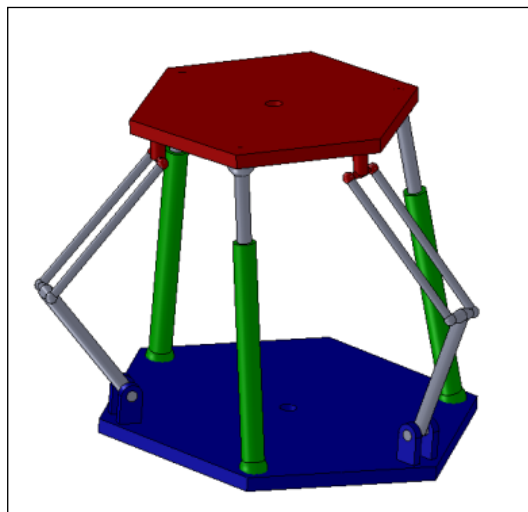


Figure I. 25 : *Translateur RAF*

I.5.13. Robot Orthoglide

L'Orthoglide [18] est dédié à l'usinage à grande vitesse, car son architecture se rapproche des machines standards d'architecture série PPP (espace de travail Cartésien régulier et performances uniformes) et avec, en plus, les propriétés des structures parallèles (inerties moins

importantes et meilleures performances dynamiques). Son espace de travail est proche d'un cube et ne possède aucune singularité (*figure I.26*).

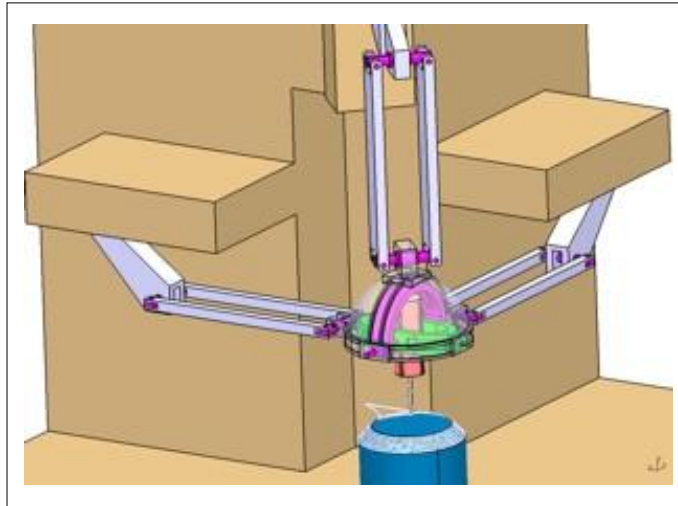


Figure I. 26 : *Robot Orthoglide à trois degrés de libertés en translation*

I.5.14. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes classes des robots parallèles existants. Nous avons vu que la particularité de ces robots réside dans leur morphologie. Celle-ci permet d'avoir une grande rigidité et peu d'inertie au détriment de leur domaine de travail très réduit comparativement aux robots séries.

A la lumière de cette recherche bibliographique nous allons proposer une nouvelle structure delta inspiré de ces différentes études présentées.

Le robot delta que nous visons est une structure originale dans son principe de fonctionnement, elle est entièrement parallèle, et possède trois degrés de libertés en translation.

Nous indiquerons dans le chapitre suivant les démarches qui nous permettront d'établir la conception du nouveau prototype de robot Delta, nous allons présenter, sa modélisation géométrique directe et inverse.

CHAPITRE II

PROPOSITION D'UNE NOUVELLE ARCHITECTURE « DETLTA-LRP »

II.1. Introduction

Dans ce chapitre nous présentons notre proposition de conception d'une nouvelle structure de robot delta à 3 degré de liberté en translation. Nous donnons une description générale et détaillée d'une chaîne cinématique parmi les 3 chaînes qui le composent. Comme nous donnons les plans détaillés de la solution technologique adoptée à sa cinématique.

II.2. Description du robot Delta-LRP

Le robot delta translateur est un robot parallèle à trois degrés de liberté en translation. Il est composé d'une plate-forme mobile et de trois chaînes cinématiques identiques. Chaque chaîne est composée d'un actionneur prismatique liant la base à la chaîne d'une articulation rotoïde (R), d'une articulation de type parallélogramme (Pa) et d'une articulation rotoïde liant la chaîne à la plateforme (figure I.1)

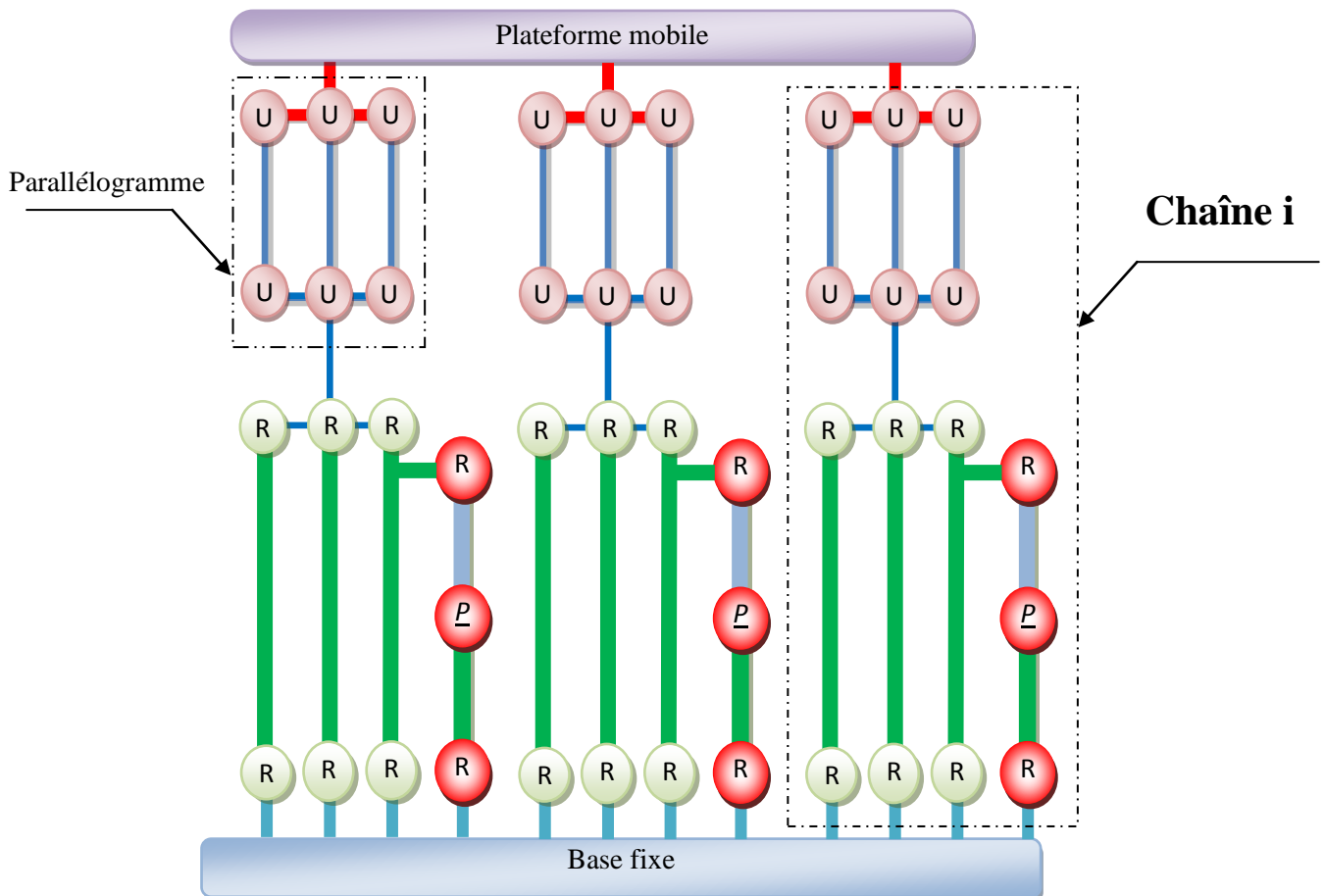


Figure II. 1 : Graphe des liaisons du robot Delta

Où : R : articulation rotoïde. P : actionneur prismatique. U : joint de cardan.

La (figure II.2) illustre le graphe de liaison d'une chaîne cinématique i ($i=1, 2, 3$) de notre robot.

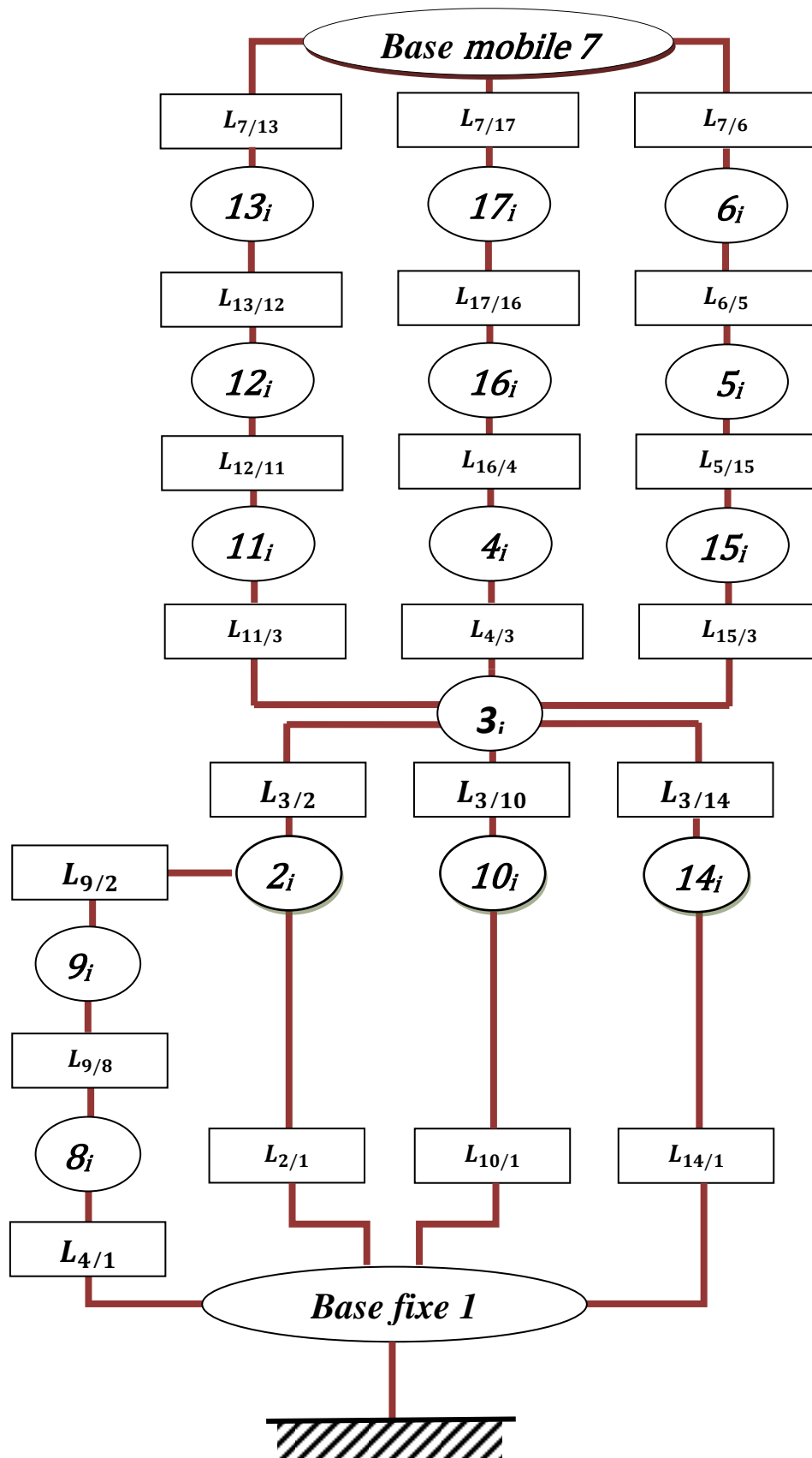


Figure II. 2 : Graphe de liaison de la chaîne i (détail I)

L_{ij} : La liaison entre la pièce i et la pièce j .

II.3. Le dessin technologique

Le dessin technologique en 3D (figure II.3) de la chaîne i est réalisé par le logiciel DAO SolidWorks.

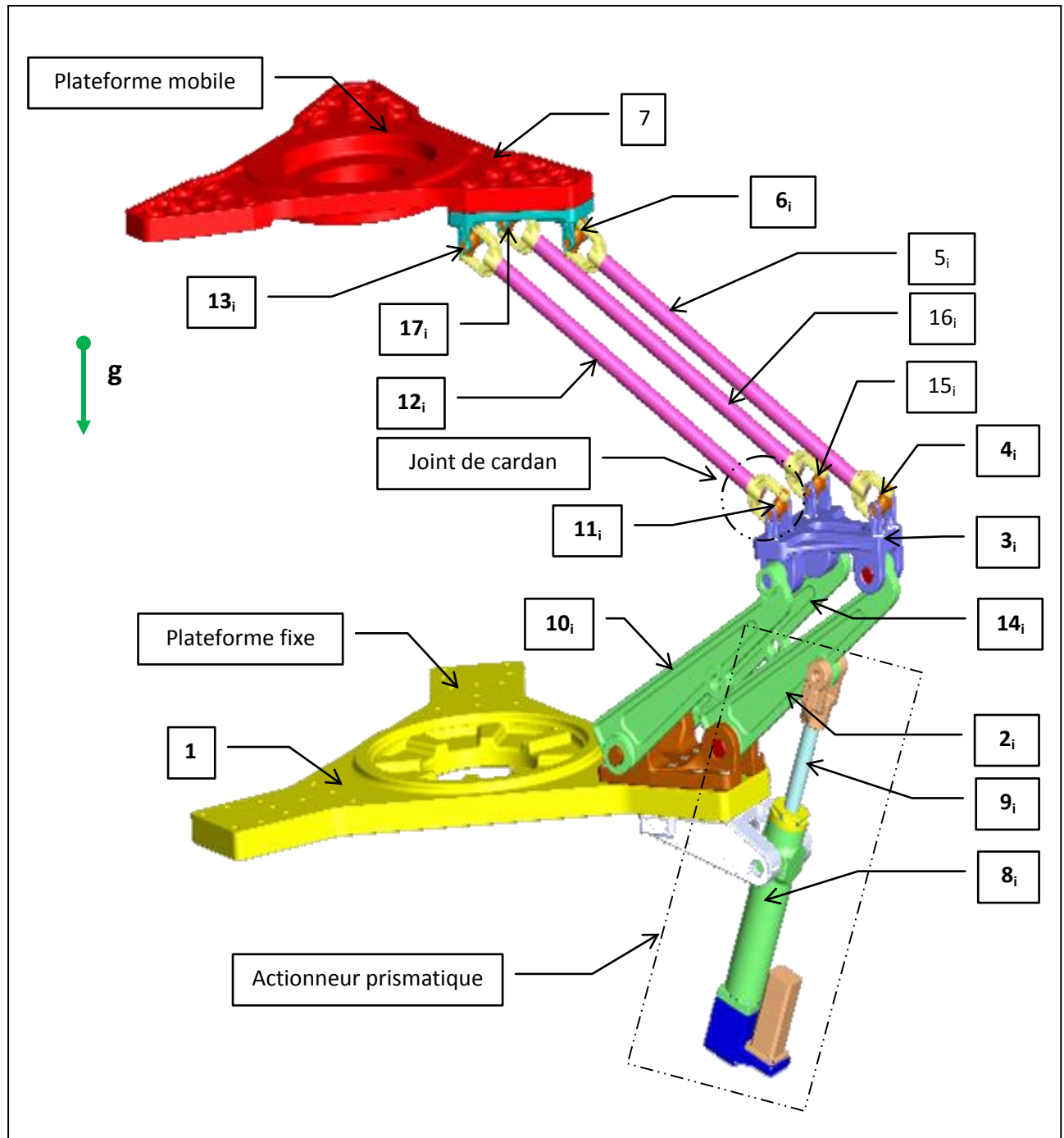


Figure II. 3 : Dessin technologique de la chaîne i (détail i)

II.4. Paramétrages du robot Delta-LRP

II.4.1. Présentation de la structure étudiée

La (figure II.4) représente une vue en perspective de la structure delta avec les différents repères et notation, pour faciliter la compréhension des paramètres utilisés au niveau des différents éléments articulés.

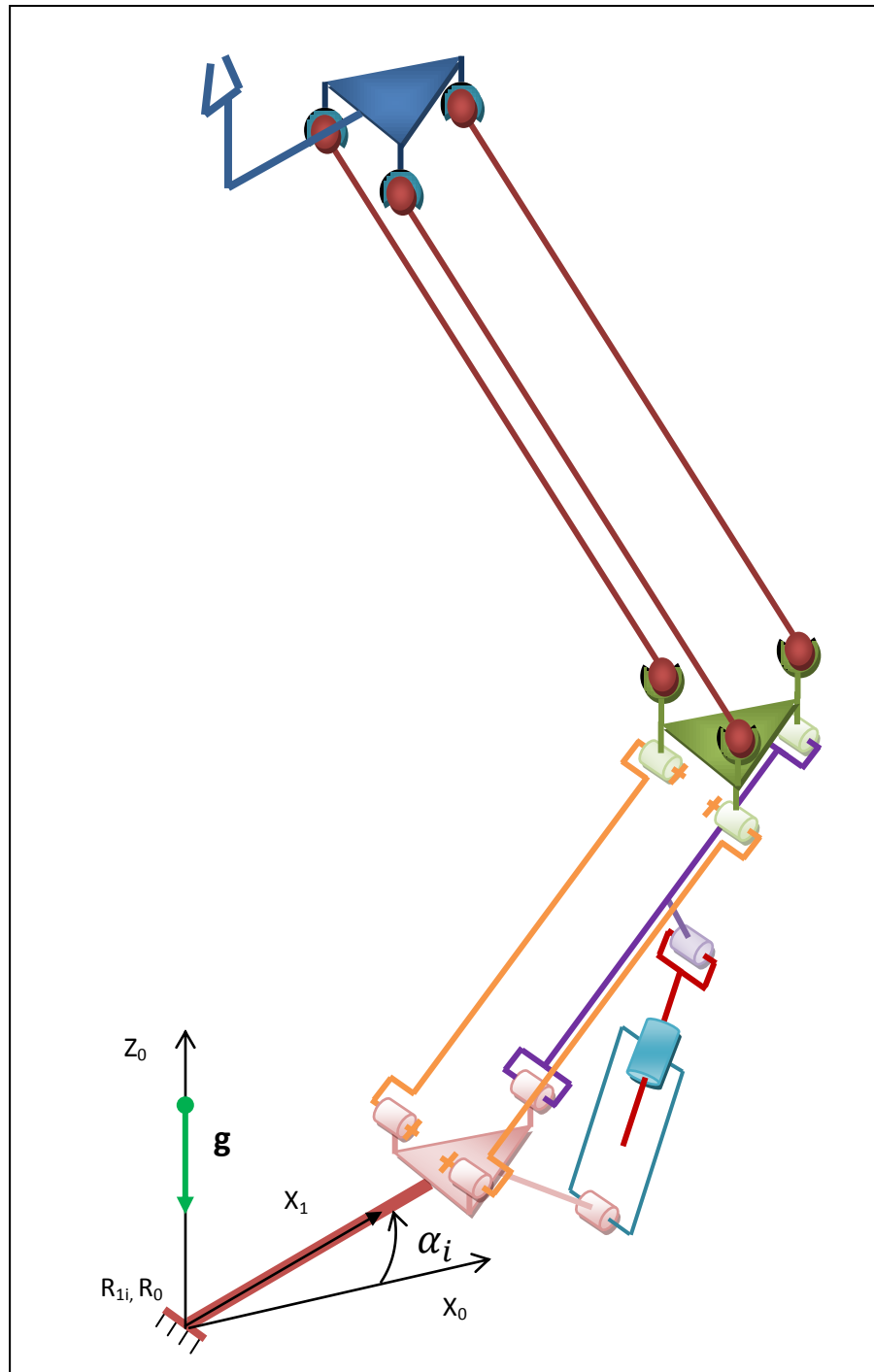


Figure II. 4 : Paramétrage d'une chaîne cinématique i de la structure Delta-LRP

La (figure II.5) représente le vue de face et vue de gauche de la chaîne cinématique i

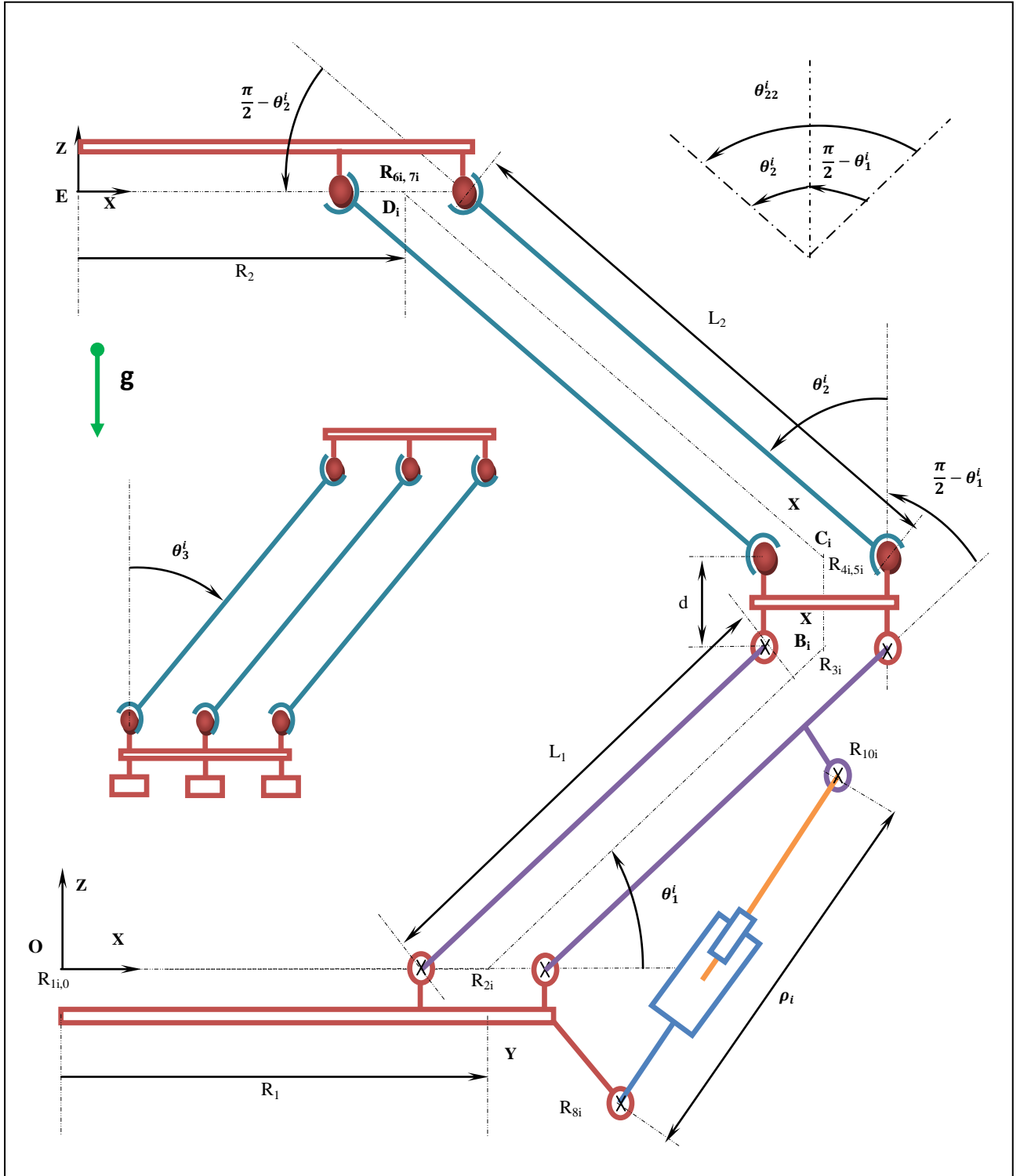


Figure II. 5 : Paramétrage d'une chaîne cinématique i de la structure Delta-LRP vue de face

II.4.1.1. Paramétrage

II.4.1.1.1. Repères utilisés

$R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$: Repère de référence lié à la base fixe

$R_{A_i}(A_i, X_{A_i}, Y_{A_i}, Z_{A_i})$: Repère local lié à la base fixe

$R_i(A_i, X_i, Y_i, Z_i)$: Repère lié au bras

$R_\pi(B_i, X_\pi, Y_\pi, Z_\pi)$: Repère lié au plan des biellettes

$R_3(B_i, X_3, Y_3, Z_3)$: Repère lié à la biellette.

$R_{D_i}(A_{D_i}, X_{D_i}, Y_{D_i}, Z_{D_i})$: Repère lié à la plateforme mobile en translation.

$R_E(D, X_E, Y_E, Z_E)$: Repère lié à la plateforme mobile en translation.

$R_V(V, X_V, Y_V, Z_V)$: Repère lié à la pince

II.4.1.1.2. Paramètres géométriques

$OA_i = R_1$: Rayon de la base fixe.

$ED_i = R_2$: Rayon de la de la plateforme en translation.

$A_iB_i = L_1$: Longueur du bras de commande.

$C_iD_i = L_2$: La longueur de la biellette.

$DV = L_v$: Distance entre le centre de la plateforme mobile en translation et le point V de la pince.

$B_iC_i = d$: Hauteur de la pièce 3_i

II.4.1.1.3. Variable articulaire

a. Variable de commande :

ρ_i : La course de vérin

b. Variables passives :

θ_1^i : Angle entre le plan horizontal de la base fixe et le plan du $i^{\text{ème}}$ bras extérieur, par convention
L'angle θ_1^i est positif quand le bras est au dessus de l'horizontal.

θ_2^i : Angle formé par le bras extérieur et le plan du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme.

θ_3^i : Angle formé par une biellette du parallélogramme de l'axe X_π

α_i : Angle représente de décalage angulaire entre les différentes chaînes cinématiques.

Remarque : dans la suite de notre étude nous considérons :

- Afin d'alléger l'écriture de certaines expressions, nous utilisons les notations condensées :
- $C\theta_j^i$ (resp $S\theta_j^i$) pour désigner $\cos\theta_j^i$ (resp $\sin\theta_j^i$)
- $C\theta_{jk}^i$ (resp $S\theta_{jk}^i$) pour désigner $\cos(\theta_j^i + \theta_k^i)$ (resp $\sin(\theta_j^i + \theta_k^i)$)

L'exposant $i=1, 2, 3$ correspond au numéro de la chaîne.

L'indice $j=1$ correspond à l'indice d'une variable active, $j=2,3$ correspond à l'indice d'une variable articulaire passive.

II.5. La relation entre θ et les paramètres de l'actionneur (le vérin)

La (figure II.6) représente les différents paramètres de l'actionneur prismatique du vérin et la structure de DELTA -LRP:

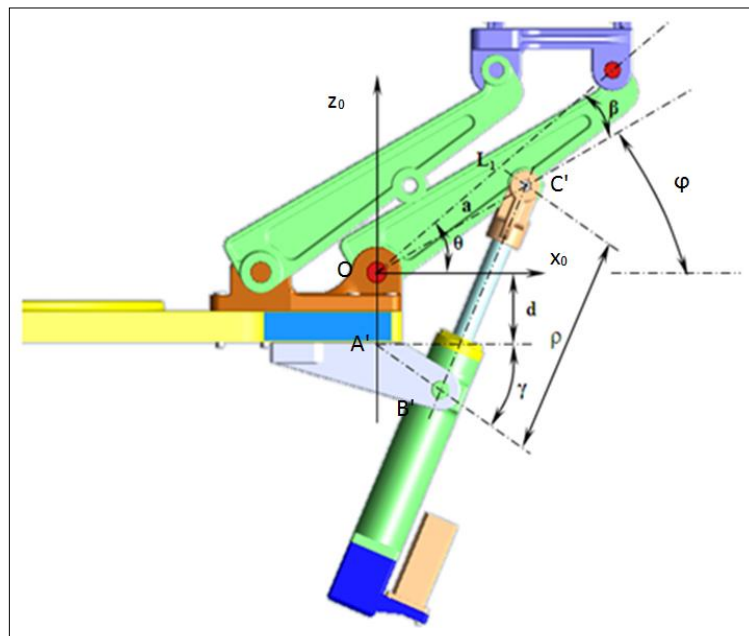


Figure II. 6 : Les paramètres géométriques de vérin et la biellette

D'après la (figure II.6) nous avons l'équation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'C'} + \vec{\rho} \quad (\text{II. 1})$$

Où :

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{bmatrix} a \cos(\varphi) \\ a \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \overrightarrow{OB'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d' \end{bmatrix}, \overrightarrow{B'C'} = \begin{bmatrix} L_3 \cos(\gamma) \\ -L_3 \sin(\gamma) \end{bmatrix}, \vec{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

On remplace les vecteurs précédents dans l'équation vectorielle (II.1) on trouve :

$$\begin{cases} a \cos(\varphi) + L_3 \cos(\gamma) = \rho \cos(\phi) \\ a \sin(\varphi) - (d' + L_3 \sin(\gamma)) = \rho \sin(\phi) \end{cases} \quad (\text{II. 2})$$

$$\rho^2 = (a \cos(\varphi) - L_3 \cos(\gamma))^2 + (a \sin(\varphi) + L_3 \sin(\gamma) + d')^2 \quad (\text{II. 3})$$

En élevant les deux équation(II.2) au carré et en les additionnant. On en déduit que :

On pose :

$$E_2 = d' + L_3 \sin(\gamma), H = a^2 + L_3^2 + d'^2 + 2d'L_3 \sin(\gamma), E_1 = L_3 \cos(\gamma)$$

$$\psi = \arctan(E_2 / E_1)$$

On remplace les équations précédentes dans l'équation (II.3):

$$\rho^2 = H + 2a(-E_1 \cos(\varphi) + E_2 \sin(\varphi))$$

On peut écrire l'équation précédente sous forme :

$$\rho^2 = H + 2a(\sqrt{E_1^2 + E_2^2} \cos(\varphi - \psi))$$

On a : $\theta = \varphi + \beta$

Et finalement on obtient :

$$\theta_1^i = \cos^{-1} \left(\frac{\rho^2 - H}{2a\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \right) - \psi - \beta \quad (\text{II. 4})$$

$$\rho = \left\{ -\sqrt{H + 2a\left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2} \cos(\varphi - \psi)\right)}, \sqrt{H + 2a\left(\sqrt{E_1^2 + E_2^2} \cos(\varphi - \psi)\right)} \right\} \quad (\text{II. 5})$$

II.5.1. Calcule le maximum et minimum de la course du vérin prismatique

Nous traçons la fonction de la course de vérin en fonction de l'angle θ_1^i pour déterminer le maximum et minimum de course de l'actionner.

La courbe suivante (figure II.7) représente la variation de la course de vérin en fonction de l'angle θ_1^i :

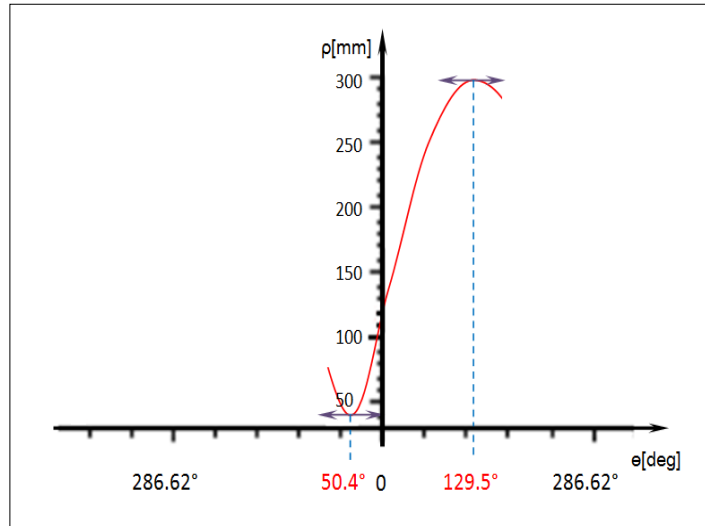


Figure II. 7 : La variation de la course de vérin en fonction de θ_1^i

Le déplacement maximal et minimal de la course de vérin (figure II.8) :

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{\max}^i = 300.34 [mm] \\ \rho_{\min}^i = 39.66 [mm] \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\rho = 260.68 [mm]$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{1\max}^i = 129.53^\circ \\ \theta_{1\min}^i = -50.47^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\theta_1^i = 180^\circ$$

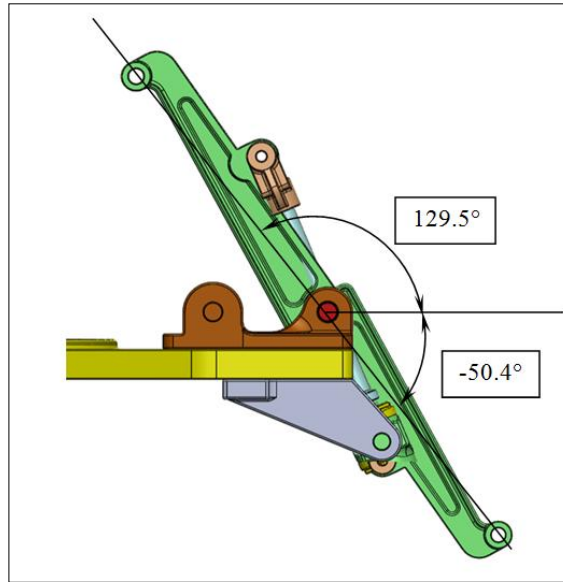


Figure II. 8 : la variation de la course de vérin on fonction de θ_1^i

II.6. La relation entre Φ et la course de l'actionneur (le vérin)

La projection de l'équation vectorielle (II.1) sur le repère R_1 donne :

$$\begin{cases} a \cos(\phi) = 0 + L_3 \cos(\gamma) + \rho \cos(\phi) \\ a \sin(\phi) = d' + L_3 \sin(\gamma) - \rho \sin(\phi) \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

En faisant la somme des carrées, ce qui conduit à :

$$(a)^2 = (\rho \cos(\phi) + L_3 \cos(\gamma))^2 + (\rho \sin(\phi) + L_3 \sin(\gamma) - d')^2 \quad (\text{II. 7})$$

Si l'on pose :

$$H1 = (L_3^2 + \rho^2 + d'^2 - d' \rho \sin(\gamma)) / 2a$$

On peut écrire l'équation (II.7) sous forme suivant :

$$H1 / 2\rho = E_2 \cos(\phi) + E_1 \sin(\phi) \quad (\text{II. 8})$$

La résolution de l'équation (II.8) donne :

$$\phi = \cos^{-1} \left(H1 / 2\rho \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \right) + \psi \quad (\text{II. 9})$$

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre proposition de conception d'une nouvelle structure de robot Delta-LRP à 3 degré de liberté en translation. Nous avons donné une description générale et détaillée d'une chaîne cinématique parmi les 3 chaînes qui le composent. Comme nous avons donné les plans détaillés de la solution technologique adoptée à sa cinématique et nous avons déterminé la relation entre les paramètres géométriques de l'actionneur et l'angle entre le plan horizontal de la plateforme fixe et le bras.

Et finalement, nous avons calculé les points singuliers entre le bras et l'actionneur pour éviter le blocage de la structure.

CHAPITRE III

MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT DELTA-LRP

III.1. Introduction

La modélisation des robots à architectures parallèles est tout à fait particulière en ce qui concerne l'obtention des différents modèles, il n'existe pas de méthode simple et systématique.

Il faut donc choisir des méthodes bien adaptées à chaque structure pour exprimer les modèles de la manière la plus simple.

Nous étudions dans ce chapitre la modélisation du robot Delta-LRP dont la description est donnée au Chapitre I nous présentons les expressions de chaque modèle géométrique étudié, nous introduisons deux modèles géométriques : modèle géométrique direct et modèle géométrique inverse ces modèles basés sur des algorithmes analytiques permettent d'obtenir l'ensemble des variables articulaires passives et actives en fonction des coordonnées opérationnelles dans le cas du modèle géométrique direct ; celui-ci permet d'obtenir en plus de la position et l'orientation de l'effecteur, les valeurs des différentes variables passives de toute la structure, en fonction uniquement des coordonnées articulaires de commandes. L'exploitation de ces deux modèles et l'étude des limites des différentes variables permet d'avoir une meilleure connaissance de l'espace de travail aussi bien pour la position de l'effecteur que pour son orientation.

III.2. Rappel sur le modèle géométrique direct et inverse

Le modèle géométrique direct permet de connaître la situation de l'organe terminal par rapport à un repère de référence, connaissant les variables articulaires de commande, l'opération inverse donne le modèle géométrique inverse

On distingue deux sortes de variables articulaires :

$$q = f(q_a, q_p)$$

Où :

q_a : variables articulaires actives ou de commande $q_a \in Q_a \{Q_a : \text{espace articulaire actif}\}$

q_p : variables articulaires passives $q_p \in Q_p \{Q_p : \text{espace articulaire passif}\}$

Dans le cas d'un robot série le modèle géométrique obtenu naturellement est le modèle direct, il s'écrit :

$x = f(q_a)$ Calculable $\forall q_a \in Q_a$ où x est le vecteur des coordonnées opérationnelles.

Dans le cas d'un robot parallèle le modèle géométrique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle géométrique complet. } f(x, q_a, q_p) = 0 \Leftrightarrow f(x, q) = 0 \\ \text{Modèle géométrique de commande } f(x, q_a) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III. 10)} \\ \text{(III. 11)} \end{array}$$

Le M.G.D complet de calculer x et q_p en fonction de q_a

$$\left\{ \begin{array}{l} x = g(q_a) \\ q_p = h(q_a) \end{array} \right. \text{ Existe pour } q_a \in Q_a \text{ et } q_p \in Q_p \quad \text{(III. 12)}$$

Le M.G.I complet de calculer q_a et q_p en fonction de x

$$\left\{ \begin{array}{l} q_a = g^{-1}(x) \\ q_p = h^{-1}(x) \end{array} \right. \text{ avec } x \in X \text{ espace de travail} \quad \text{(III. 13)}$$

III.3. Caractéristique des modèles géométriques des robots parallèles

De nombreux travaux sur le problème de la modélisation géométrique directe et inverse des manipulateurs parallèles ont été publiés, en générale, la modélisation géométrique inverse des manipulateurs parallèles est beaucoup plus simple à résoudre que celle de la modélisation géométrique directe MacCallion et al [19], Fichter [20], etc..., et ce contrairement aux manipulateur séries.

La formulation du modèle direct conduit à un système d'équations non linéaires couplées. Pendant longtemps, les chercheurs se sont limités à des résolutions numériques Merlet [21] Gosselin [22] si on prend le cas d'un robot à 6ddl tel que la plateforme de Stewart le modèle géométrique inverse peut être calculé mais la modèle direct pose beaucoup de problèmes cette difficulté provient du fait que la position et l'orientation de la plateforme mobile sont obtenues à partir de l'intersection de 6 sphères, ce qui donne des polynômes de degré élevé.

En général, dans le cas des robots parallèles il est difficile d'établir les modèles analytiquement. D'autres part, la solution n'est pas toujours unique, du fait que l'on peut assembler de différentes manières un manipulateur parallèle, dans le cas du robot translateur delta nous présentons une solution analytique Khalil [23].

III.4. Modélisation géométrique du robot translateur Delta-LRP

Nous cherchons de modéliser la structure de manière complète et analytique. Le modèle recherché doit nous permettre de calculer les valeurs de toutes les variables articulaires actives et passives de la structure en fonction de la position d'un repère lié à l'effecteur, ceci dans le cas d'une modélisation inverse.

Dans le cas d'une modélisation directe, celui-ci doit être capable de calculer les coordonnées opérationnelles et les valeurs des différentes variables articulaires passives de l'ensemble de la structure en fonction des variables de commande. Ce modèle servira de base pour la suite de nos études.

III.5. Modèle géométrique direct de commande

Le modèle géométrique direct de commande consiste dans le cas du robot delta LRP à calculer les coordonnées opérationnelles de la pince, en fonction uniquement des variables articulaires de commande, ce modèle peut être représenté par une relation du type

$$\mathbf{M.G.D} \Rightarrow X_{OV} = f(\theta_1^i) \text{ et } \theta_1^i = g(\rho_i) \quad (\text{III. 14})$$

Où : $i = 1, 2, 3$

$\rho_i = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$: Variables articulaires de commande.

$X_{OV} = (X_{OV}, Y_{OV}, Z_{OV})^T$: vecteur dont les composantes représentent les coordonnées du point V dans R_0 .

Le modèle géométrique direct basé sur la fermeture vectorielle et la projection dans le repère R_0 lié à la base fixe :

$$OV^0 = OE^0 + A^{0,V}.EV^V$$

Nous allons dans un premier temps définir les coordonnées des points B_i , D_i et C_i dans le repère R_0 ensuite nous remplaçons les coordonnées de ces points dans l'équation

$$OC_i^0 = OA_i^0 + A^{0,1}.AB_i^1 + A^{0,2}.BC_i^1 \quad (\text{III. 17})$$

Avec :

OB_i^0 : vecteur représente les coordonnées du point B_i .

OA_i : vecteur représente les coordonnées du point A_i .

$A^{0,1}$: matrice de passage du repère R_0 au repère R_1 définie par :

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} C\theta_1^i C\alpha_i & -S\alpha_i & -C\theta_1^i S\alpha_i \\ C\theta_1^i S\alpha_i & C\alpha_i & -S\theta_1^i S\alpha_i \\ S\theta_1^i & 0 & C\theta_1^i \end{bmatrix}$$

$A^{0,2}$: matrice de passage du repère R_0 au repère R_2 définie par :

$A_i B_i^1$: vecteur représentant les composantes du bras de commande dans le repère R_1 après développement nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} X_{OBi} \\ Y_{OBi} \\ Z_{OBi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{OAi} + L_1 C\theta_1^i C\alpha_i \\ Y_{OAi} + L_1 C\theta_1^i S\alpha_i \\ Z_{OAi} + L_1 S\theta_1^i \end{bmatrix} \quad (\text{III. 18})$$

Les coordonnées des points C_i dans le repère sont données par :

$$OD_i^0 = OE_i^0 + A^{C,E}.ED_i^E \quad (\text{III. 19})$$

En suivant la même démarche que pour le calcul du vecteur OB_i nous calculons aussi le vecteur OC_i dans le repère R_0 qui est donné par :

$$\begin{bmatrix} X_{OCi} \\ Y_{OCi} \\ Z_{OCi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{OE} + R_2 C\alpha_i \\ Y_{OE} + R_2 S\alpha_i \\ Z_{OE} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 20})$$

En reportant les équations (III. 18) et (III. 20) dans le système (III. 16), nous pouvons calculer les composantes du vecteur OD représentant les coordonnées de la plate forme mobile en translation.

$$\left(\left(R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)\right)\cos(\alpha_i) - X_{OE}\right)^2 + \left(\left(R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)\right)\sin(\alpha_i) - Y_{OE}\right)^2 + \left(L_1 \sin(\theta_1^i) + d - Z_{OE}\right)^2 = L_2^2$$

En posant :

$$E_i = \left(R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)\right)\cos(\alpha_i)$$

$$F_i = \left(R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)\right)\sin(\alpha_i)$$

$$G_i = L_1 \sin(\theta_1^i) + d$$

Nous obtenons donc :

$$(E_i - X_{OE})^2 + (F_i - Y_{OE})^2 + (G_i - Z_{OE})^2 = L_2^2 \quad (\text{III. 21})$$

En développant l'équation (III.21) pour chaque indice i, on trouve :

$$X_{OE}^2 + Y_{OE}^2 + Z_{OE}^2 - 2E_1 X_{OE} - 2F_1 Y_{OE} - 2G_1 Z_{OE} = D_1 \quad (\text{III. 22})$$

$$X_{OE}^2 + Y_{OE}^2 + Z_{OE}^2 - 2E_2 X_{OE} - 2F_2 Y_{OE} - 2G_2 Z_{OE} = D_2 \quad (\text{III. 23})$$

$$X_{OE}^2 + Y_{OE}^2 + Z_{OE}^2 - 2E_3 X_{OE} - 2F_3 Y_{OE} - 2G_3 Z_{OE} = D_3 \quad (\text{III. 24})$$

$$\text{Avec : } D_i = L_2^2 - (E_i^2 + F_i^2 + G_i^2)$$

En conservant l'équation (III.22) puis (III.22)-(III.23) et (III.22)-(III.24) on obtient :

$$X_{OE}^2 + Y_{OE}^2 + Z_{OE}^2 - 2E_1 X_{OE} - 2F_1 Y_{OE} - 2G_1 Z_{OE} = D_1 \quad (\text{III. 25})$$

$$(E_1 - E_2) X_{OE} + (F_1 - F_2) Y_{OE} + (G_1 - G_2) Z_{OE} = \frac{D_1 - D_2}{2} \quad (\text{III. 26})$$

$$(E_1 - E_3) X_{OE} + (F_1 - F_3) Y_{OE} + (G_1 - G_3) Z_{OE} = \frac{D_1 - D_3}{2} \quad (\text{III. 27})$$

On résout le système (III.26) et (III.27) qui nous donne :

$$X_{OE} = A'Z_{OE} + B'$$

$$Y_{OE} = C'Z_{OE} + D'$$

Puis nous remplaçons les valeurs de X_{OD} et Y_{OD} dans l'équation (III.25), et finalement on le modèle géométrique de commande de notre :

$$Z_{OE} = \left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right) / 2A \quad (\text{III. 28})$$

$$X_{OE} = \frac{H_2 + H_3 Z_{OE}}{2H_1} \quad (\text{III. 29})$$

$$Y_{OE} = -\frac{H_4 + H_5 Z_{OE}}{2H_1} \quad (\text{III. 30})$$

Avec :

$$A = \frac{H_2^2 + H_4^2}{4H_1^2} + 1$$

$$B = \frac{F_1 H_4}{H_1} + \frac{H_3 H_2}{2H_1^2} + \frac{H_5 H_4}{2H_1^2} - \frac{E_1 H_2}{H_1} - 2G_1$$

$$C = \frac{H_2^2}{4H_1^2} + \frac{F_1 H_5}{H_1} + \frac{H_5^2}{4H_1^2} - \frac{E_1 H_3}{H_1} - A_1$$

$$H_1 = -E_1 F_3 - E_2 F_1 + E_2 F_3 + E_1 F_2 - E_3 F_2 + E_3 F_1$$

$$H_2 = -2F_1 G_3 + 2F_1 G_2 + 2G_1 F_3 - 2G_1 F_2 + 2F_2 G_3 - 2G_2 F_3$$

$$H_3 = -A_2 F_3 - F_1 A_3 + A_1 F_3 - A_1 F_2 + F_1 A_2 F_2 A_3$$

$$H_4 = 2E_3 G_1 - 2E_3 G_2 - 2E_2 G_1 - 2E_1 G_3 + 2E_1 G_2 + 2E_2 G_3$$

$$H_5 = E_2 A_3 - E_2 A_1 - E_1 A_3 + E_1 A_2 - E_3 A_2 + E_3 A_1$$

III.6. Modèle géométrique direct complet du robot Delta -LRP

Parmi les méthodes et notations proposées pour effectuer une modélisation géométrique systématique des robots, la plus répandue en robotique est celle des paramètres de Denavit-Hartenberg. Ces paramètres permettent de modéliser aisément les robots dont les articulations possèdent chacune un degré de liberté. Elle est donc particulièrement efficace pour les robots série, mais bien qu'elle soit universelle et automatisée, elle complexifie la description des robots parallèles dont les articulations passives ont deux ou trois degrés de liberté et peut introduire des singularités qui n'existent pas physiquement. Cependant, l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs la rend intéressante aujourd'hui.

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j se fait à travers 4 étapes :

- Une rotation d'angle β_{j-1} autour de l'axe x_{j-1} ,
- Une translation de distance L_{j-1} mesurée le long de l'axe x_{j-1} ,
- Une rotation d'angle θ_j autour de l'axe z_j ,
- Une translation de distance r_j mesurée le long de l'axe z_j .

Il en résulte la matrice de transformation homogène ${}^{j-1}T_j$, suivante :

$${}^{j-1}\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & L_{j-1} \\ C\beta_{j-1}S\theta_j & C\beta_{j-1}C\theta_j & -S\beta_{j-1} & -r_jS\beta_{j-1} \\ S\beta_{j-1}S\theta_j & S\beta_{j-1}C\theta_j & C\beta_{j-1} & r_jC\beta_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La (figure III.2) représente les quatre paramètres de Denavit-Hartenberg:

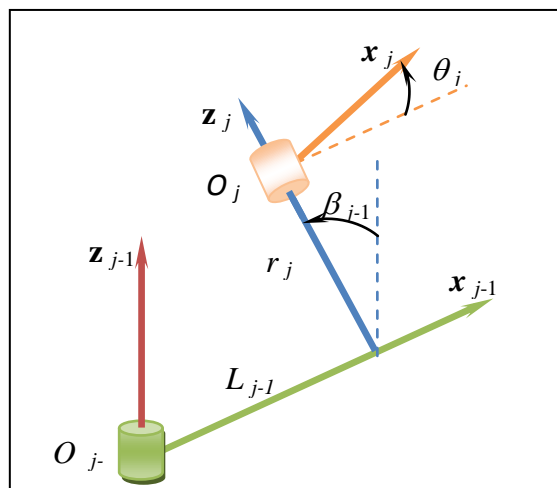


Figure III. 2 : Paramètres de Denavit- Hartenberg

Le tableau suivant représente les différents paramètres de Denavit–Hartenberg de robot Delta-LRP

k	σ_k	L_{k-1}	β_{k-1}	r_k	θ_k
1	0	0	0	0	α_i
2	0	R_1	$\pi/2$	0	θ_1^i
3	0	L_1	0	0	$\frac{\pi}{2} - \theta_1^i$
4	0	d	0	0	θ_2^i
5	0	0	$\pi/2$	0	θ_3^i
6	0	L_2	0	0	$-\theta_3^i$
7	0	0	$-\pi/2$	0	$\frac{\pi}{2} - \theta_2^i$

Tableau III. 1 : Les paramètres géométriques de la structure Delta

Les matrices de transformation homogènes élémentaires du robot delta :

$$\begin{aligned}
 {}^0\tilde{T}_1 &= \begin{bmatrix} C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 & 0 \\ S\alpha_i & C\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1\tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1^i & -S\theta_1^i & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_1^i & C\theta_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^2\tilde{T}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_1^i & -S\theta_1^i & 0 & L_1 \\ S\theta_1^i & C\theta_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^3\tilde{T}_4 = \begin{bmatrix} C\theta_2^i & -S\theta_2^i & 0 & d \\ S\theta_2^i & C\theta_2^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4\tilde{T}_5 &= \begin{bmatrix} C\theta_3^i & -S\theta_3^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_3^i & C\theta_3^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^5\tilde{T}_6 = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & S\theta_3^i & 0 & L_2 \\ -S\theta_3^i & C\theta_3^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^6\tilde{T}_7 = \begin{bmatrix} C\theta_2^i & -S\theta_2^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_2^i & -C\theta_2^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Le modèle géométrique direct du robot est obtenu par le produit matriciel suivant :

$${}^0\tilde{T}_6 = {}^0\tilde{T}_1 \cdot {}^1\tilde{T}_2 \cdots {}^6\tilde{T}_7 \quad (\text{III. 31})$$

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} {}^0\tilde{T}_7[1,1] = -C\alpha_i \\ {}^0\tilde{T}_7[1,2] = 0 \\ {}^0\tilde{T}_7[1,3] = S\alpha_i \end{cases} ; \begin{cases} {}^0\tilde{T}_7[2,1] = -S\alpha_i \\ {}^0\tilde{T}_7[2,2] = 0 \\ {}^0\tilde{T}_7[2,3] = -C\alpha_i \end{cases} ; \begin{cases} {}^0\tilde{T}_7[3,1] = 0 \\ {}^0\tilde{T}_7[3,2] = -1 \\ {}^0\tilde{T}_7[3,3] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^0\tilde{T}_7[1,4] = (R_1 + L_1 C(\theta_1^i) - L_2 C(\theta_3^i) S(\theta_2^i)) C(\alpha_i) + L_2 S(\alpha_i) S(\theta_3^i) \\ {}^0\tilde{T}_7[2,4] = (R_1 + L_1 C(\theta_1^i) - L_2 C(\theta_3^i) S(\theta_2^i)) S(\alpha_i) - L_2 C(\alpha_i) S(\theta_3^i) \\ {}^0\tilde{T}_7[3,4] = L_2 (C\theta_2^i C(\theta_3^i)) + d + L_1 S\theta_1^i \end{cases}$$

En écrivant la relation dite de fermeture vectorielle, et en projection celle-ci dans le repère R_0 on obtient :

$$\mathbf{OV} = {}^0\tilde{T}_7 \cdot \mathbf{DV} \quad (\text{III. 32})$$

Avec :

OV : vecteur dont les composantes représentent les coordonnées du point V dans le repère R_0 .

${}^0\tilde{T}_7$: matrice de passage du repère R_0 au repère R_V ou matrice d'orientation de l'effecteur.

DV : vecteur dont les composantes représentent les coordonnées du point V de la pince dans le repère R_V

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires, pour calculer les coordonnées du point V, origine du repère lié à la pince, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} X_{OV} \\ Y_{OV} \\ Z_{OV} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\tilde{T}_7 \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ -Z_v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 33})$$

$\mathbf{DV} = (R_2 \quad 0 \quad -Z_v)^T$ où Z_v représente la longueur de la pince.

Le vecteur $(X_{OV} \quad Y_{OV} \quad Z_{OV})$ constitue le modèle géométrique direct de commande.

III.7. Modèle géométrique inverse

Nous cherchons à calculer le modèle géométrique inverse du même type que celui des relations (III.13) qui exprime l'ensemble des variables articulaires actives et passives connaissant les coordonnées opérationnelles de l'effecteur. Ces relations peuvent se traduire par :

$$\text{M.G.I complet} \quad \begin{cases} (\theta_1^i, \theta_1^i, \theta_1^i) = & f(X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov}) \\ \rho_i = & g(\theta_1^i(X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov}), \theta_2^i(X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov}), \theta_3^i(X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov})) \end{cases} \quad (\text{III. 34})$$

Où :

$\theta_1^i = (\theta_1^1 \ \theta_1^2 \ \theta_1^3)^T$, $\theta_2^i = (\theta_2^1 \ \theta_2^2 \ \theta_2^3)^T$ et $\theta_3^i = (\theta_3^1 \ \theta_3^2 \ \theta_3^3)^T$ étant les variables articulaires passives.

Le modèle géométrique inverse (MGI) est l'ensemble des relations inverses à celles du modèle direct. Ce modèle permet d'exprimer les variables articulaires \mathbf{q} du bras manipulateur en fonction des coordonnées opérationnelles \mathbf{X} exigées pour l'exécution d'une tâche donnée.

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$$

Il n'existe pas une méthode analytique générale qui permet de résoudre le MGI. Cependant un certain nombre de méthodes, dans notre cas on utilise la méthode de **PAUL**.

D'après la méthode de Paul on a :

$${}^1\tilde{T}_0 U_0 = {}^1\tilde{T}_2 {}^2\tilde{T}_3 {}^3\tilde{T}_4 {}^4\tilde{T}_5 {}^5\tilde{T}_6 {}^6\tilde{T}_7 \quad (\text{III. 35})$$

L'équation (III.35) nous donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} P_x C\alpha_i + P_y S\alpha_i = R_1 - R_2 + L_1 C\theta_1^i - L_2 C\theta_3^i S\theta_2^i \dots\dots\dots [\text{III.36.1}] \\ -P_x S\alpha_i + P_y C\alpha_i = L_2 S\theta_3^i \dots\dots\dots [\text{III.36.2}] \\ P_z = L_2 C\theta_3^i C\theta_2^i + L_1 S\theta_1^i + d \dots\dots\dots [\text{III.36.3}] \end{cases} \quad (\text{III. 36})$$

On résout équation(III.36.2) à une inconnue θ_3^i , on trouve finalement :

$$\theta_3^i = \sin^{-1} \left(\frac{P_x S \alpha_i - P_y C \alpha_i}{L_2} \right) \quad (\text{III. 37})$$

Elevons au carré les deux équations (III.36.1) et (III.36.1) et ajoutons les, on obtient :

$$\left(P_x C(\alpha_i) + P_y S(\alpha_i) - (R_1 - R_2) \right)^2 + (P_z - d)^2 = L_2^2 C(\theta_3^i)^2 + L_1^2 + 2L_1 L_2 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i - \theta_2^i) \quad (\text{III. 38})$$

On pose :

$$\theta_{22}^i = \theta_2^i + \frac{\pi}{2} - \theta_1^i \Rightarrow \theta_2^i = \theta_{22}^i + \theta_1^i - \frac{\pi}{2}$$

Et on remplace dans l'équation (III.38) on obtient :

$$L_2^2 C(\theta_3^i)^2 + L_1^2 + 2L_1 L_2 C(\theta_3^i) C(\theta_{22}^i) = \left(P_x C(\alpha_i) + P_y S(\alpha_i) - (R_1 - R_2) \right)^2 + (P_z - d)^2$$

Ensuite, on résout l'équation à l'inconnue θ_{22}^i , on trouve :

$$\theta_{22}^i = C^{-1} \left(\frac{\left(P_x C(\alpha_i) + P_y S(\alpha_i) - (R_1 - R_2) \right)^2 + (P_z - d)^2 - \left(L_2^2 C(\theta_3^i)^2 + L_1^2 \right)}{2L_1 L_2 C(\theta_3^i)} \right) \quad (\text{III. 39})$$

Considérons à niveau les équations (III.38.1) et (III.38.3)

Prenons l'équation (III.38.1) et développons $C(\theta_1^i + \theta_{22}^i)$, on obtient

$$\left(L_1 + L_2 C(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i) \right) C(\theta_1^i) - \left(L_2 S(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i) \right) S(\theta_1^i) = P_x C(\alpha_i) - P_y S(\alpha_i) - (R_1 - R_2)$$

En procédant de manière analogue, nous développons $S(\theta_1^i + \theta_{22}^i)$ dans l'équation (III.38.3), on obtient donc :

$$\left(L_2 S(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i) \right) C(\theta_1^i) + \left(L_1 + L_2 C(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i) \right) S(\theta_1^i) = (P_z - d)$$

Ensuite, on résout un système de deux équations à deux inconnues $S\theta_1^i$ et $C\theta_1^i$, qui nous permet enfin de calculer θ_1^i :

$$\begin{cases} S\theta_1^i = \frac{(L_1 + L_2 C(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i))(Pz - d) - (L_2 S(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i))(Px C(\alpha_i) + Py S(\alpha_i) - (R_1 - R_2))}{(L_1 + L_2 C\theta_3^i C\theta_{22}^i)^2 + (L_2 C\theta_3^i S\theta_{22}^i)^2} \\ C\theta_1^i = \frac{(L_1 + L_2 C(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i))(Px C(\alpha_i) + Py S(\alpha_i) - (R_1 - R_2)) - (Pz - d)(L_2 S(\theta_{22}^i) C(\theta_3^i))}{(L_1 + L_2 C\theta_3^i C\theta_{22}^i)^2 + (L_2 C\theta_3^i S\theta_{22}^i)^2} \end{cases}$$

On calcule donc :

$$\theta_1^i = \arctan(S\theta_1^i / C\theta_1^i) \quad (\text{III. 40})$$

Le modèle géométrique inverse du robot donne les variables prismatiques motorisées (ρ_i) en fonction des coordonnées (P_V, P_V, P_V) exprimées dans le repère R_0 :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1, \alpha_1 = 0) \\ f(\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}) \\ f(\theta_1^3, \theta_2^3, \theta_3^3, \alpha_3 = \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 41})$$

III.8. Espace de travail de robot Delta-LRP

L'espace de travail d'un robot est l'espace dans lequel peut évoluer l'organe terminal de ce robot. Il traduit en effet dans l'espace cartésien, les possibilités articulaires du mécanisme.

Pour les manipulateurs parallèles l'espace de travail peut être restreint par trois facteurs : les débattements des articulations passives, les intersections entre segments et limitations dues aux actionneurs.

Pour notre structure nous avons utilisés un programme sur le MATLAB qui détermine l'espace de travail on remarque ce travail est proche d'un ellipsoïde (*figure III.2*):

$$C(x_{c(i)}, y_{c(i)}, z_{c(i)}) = ((R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)) \cos(\alpha_i), (R_1 - R_2 + L_1 \cos(\theta_1^i)) \sin(\alpha_i), L_1 \cos(\theta_1^i) + d)$$

Avec :

$$\theta_1^{\min} \leq \theta_1^i \leq \theta_1^{\max}$$

D'après l'équation précédente On remarque que l'espace de travail de notre structure compris entre six sphères de centre $c_i(x_{c(i)} \ y_{c(i)} \ z_{c(i)})$ et rayon de L_2 dans le repère R_0

La (figure III.3) représente le volume de travail de la structure Delta-LRP :

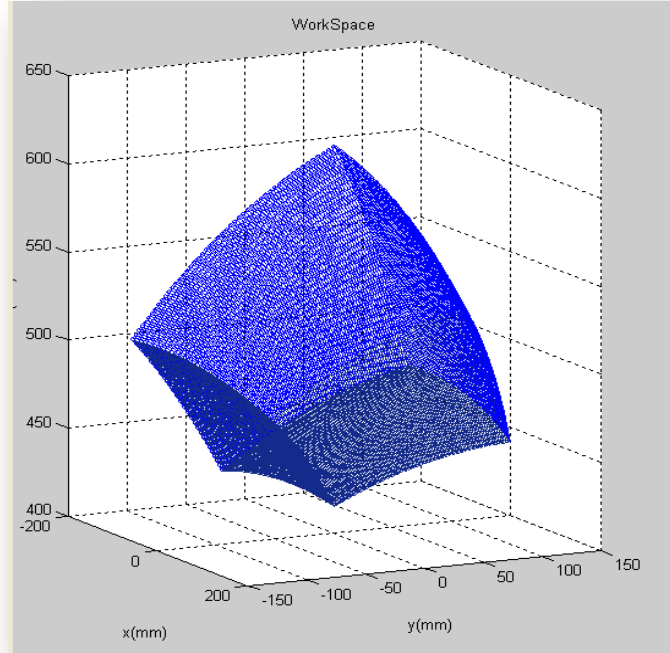


Figure III. 3 : L'espace de travail de la structure Delta-LRP

III.9. Applications

Afin de valider notre modélisation, nous effectuons les calculs pour quelques trajectoires à forme géométrique connue :

On suppose que l'effecteur terminal trace un cercle de rayon $R=150[\text{mm}]$ et avec une période $T_p=10[\text{s}]$ sous forme :

$$\begin{cases} P_x = R \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ P_y = R \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ P_z = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_x = -\frac{2\pi}{10}R \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ \dot{P}_y = \frac{2\pi}{10}R \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ \dot{P}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{P}_x = -\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 R \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ \ddot{P}_y = -\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 R \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \\ \ddot{P}_z = 0 \end{cases}$$

III.10. Résultats

La figure suivante représente la variation des variables articulaires actives et passives en fonction de temps:

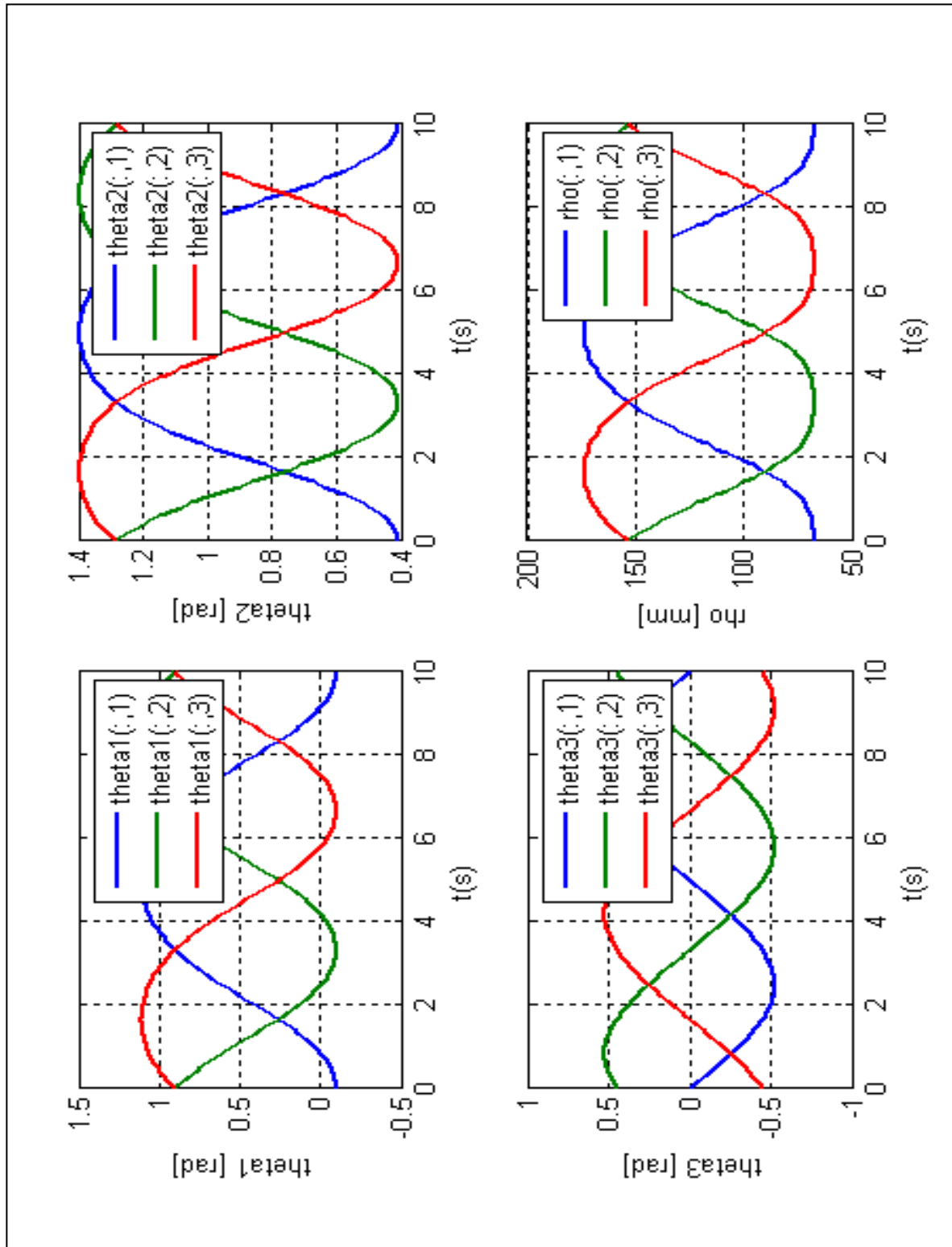


Figure III. 4 : Les variables articulaires de la structure delta

III.11. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi les deux principaux modèles géométriques de base de la structure parallèle delta, nous avons remarqué que la propriété de cette structure a permis de modéliser analytiquement cette architecture sans trop de difficultés. Il est à noter que la modélisation des robots parallèles d'une manière générale présente beaucoup de difficultés. Les équations sont très complexes à analyser, comparé à des structures séries. Pour résoudre ce problème, les chercheurs font souvent appel à des outils numériques.

L'analyse et les méthodes utilisées nous ont conduits à établir deux modèles qui permettent de calculer en plus de la position et l'orientation de l'effecteur, l'ensemble des variables articulaires passives de toute la structure. De même, ces modèles sont faciles à implanter sur ordinateur. L'étude des limites des variables articulaires passives, permet de connaître la limite en orientation et en position de l'effecteur qu'elle que soit la configuration.

CHAPITRE IV

ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE

IV.1. Introduction

Les robots parallèles sont des systèmes multi-corps complexes, qui sont parmi ceux les plus difficiles à modéliser, à cause de leur architecture parallèle qui comporte plusieurs boucles fermées. Suite à l'augmentation constante des performances attendues par ce type de machines, la conception de leur commande doit prendre en compte les forces d'interactions dynamiques. D'où l'intérêt d'avoir un modèle dynamique efficace pour la commande en ligne.

Afin d'obtenir le modèle dynamique des robots parallèles, beaucoup de méthodes calculent le modèle dynamique de la structure arborescente et utilisent les multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir le modèle dynamique complet du robot [24], [25], [26], [27] et [28]. Le principe des travaux virtuels a été utilisé dans [29] et [30]. La formulation de Newton-Euler a aussi été utilisée, par exemple : Reboulet et Al. [31] ont donné une forme matricielle pour les robots parallèles de type Stewart, cependant leur modèle n'est pas complet. Ils négligent notamment la masse des pistons et la rotation autour de l'axe principal de chaque chaîne. Gosselin [32] a proposé le modèle dynamique inverse du robot Stewart dans lequel toutes les masses et inerties sont prises en compte, le problème direct n'a pas été traité. Dasgupta et al. [33] ont appliqué cette méthode à plusieurs robots parallèles de type planaires et spatiaux [34]. Ji [35] a étudié l'influence de l'inertie des chaînes cinématiques dans le modèle dynamique.

Dans ce chapitre on va déterminer le modèle dynamique complet inverse et direct de notre structure. Ce modèle est obtenu en termes des éléments du modèle dynamique cartésien des chaînes cinématiques du robot perçues aux points de connexions des chaînes avec la plateforme. Par conséquent, on peut appliquer les techniques développées pour les robots séries aux calculs de ces modèles. Nous avons récemment utilisée une nouvelle méthode Khalil-Guegan [36] pour la modélisation dynamique du robot à 6 ddl "structure de Gough-Stewart". Sur le robot Delta-LRP, nous considérons l'application de cette méthode au robot Delta-LRP.

IV.2. Modélisation cinématique du robot Delta-LRP

La modélisation cinématique c'est la modélisation qui permet d'exprimer la cinématique de l'organe terminal (vitesses et accélérations opérationnelles) en fonction de la cinématique de la configuration articulaire (vitesses et accélérations articulaires) du bras manipulateur et inversement ; on distingue :

- Le modèle cinématique direct,
- Le modèle cinématique inverse,
- Le modèle cinématique direct du second ordre,

- Le modèle cinématique inverse du second ordre,

IV.2.1. Le modèle cinématique direct complet

Le modèle cinématique (différentiel) direct exprime les vitesses de translation et d'orientation de l'effecteur \dot{X} de la base mobile (les variations élémentaires dX des coordonnées opérationnelles) en fonction des vitesses articulaires \dot{q} (passives + actives), il est noté :

$$\dot{X} = J(q) \cdot \dot{q} \quad (\text{IV. 42})$$

Avec : $\dot{X} = [V_E, w_E]^T$, $\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T$

Où $J(q)$ désigne la matrice Jacobienne de dimension ($m.n$) du bras manipulateur, égale à $\frac{\partial X}{\partial q}$ et fonction des variables articulaires q .

L'intérêt du calcul de la matrice Jacobienne, est multiple :

- En statique, on utilise le Jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés sur l'organe terminal aux forces et couples des actionneurs.
- En cinématique, on utilise la matrice Jacobienne pour établir les relations liant les vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires.
- Elle facilite le calcul des singularités et de dimension de l'espace opérationnel accessible au robot.

IV.2.2. La matrice Jacobienne de base

Le calcul de la matrice Jacobienne peut être mené de plusieurs façons, permet les méthodes consistent à calculer les éléments de vecteur vitesse opérationnel \dot{X} , la méthode de la dérivation par rapport au temps des éléments du vecteur des coordonnées opérationnelles X , obtenus par le modèle géométrique direct complet :

$$X = f(q) \text{ et } q = (q_a, q_p) \text{ et } F(q) = [F_1(q) \quad F_2(q) \quad \dots \quad F_m(q)]$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = \left[\frac{\partial F_1(q)}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F_1(q)}{\partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt}; \dots \dots \dots \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F_m(q)}{\partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt} \right]$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation (IV. 42) on obtient l'expression suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial F_m(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_m(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 43})$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{J}}_n] \cdot [\dot{\mathbf{q}}] \quad \text{avec :} \quad J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \right.$$

IV.2.3. Calcul du modèle cinématique direct complet de robot Delta-LRP

Pour trouver la matrice Jacobienne il suffit de dériver les coordonnées de l'effecteur terminal Par rapport au temps, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_{ov}}{dt} = \dot{X}_{ov} \\ \frac{dY_{ov}}{dt} = \dot{Y}_{ov} \\ \frac{dZ_{ov}}{dt} = \dot{Z}_{ov} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{V}_{ov} = \left[\frac{\partial (X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov})}{\partial (\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1^i \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{array} \right\} \quad (\text{IV. 44})$$

$$\dot{\theta}_1^i = \frac{\rho}{a\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \dot{\rho}$$

Nous avons obtenu dans l'équation (III.33) une relation entre les variables articulaires et les coordonnées de l'effecteur terminal et par simple différentiation on obtient le Jacobien :

$${}^0 J_7 = \frac{\partial (X_{ov}, Y_{ov}, Z_{ov})}{\partial (\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)} \quad (\text{IV. 45})$$

Les éléments de la matrice Jacobienne de chaîne i est comme étant :

$${}^0 J_7 = J_i = \begin{bmatrix} -C\alpha_i(L_1 S\theta_1^i + L_2 C\theta_3^i S\theta_{12}^i) & -L_2 C\alpha_i C\theta_3^i S\theta_{12}^i & L_2 S\alpha_i S\theta_3^i - L_2 C\alpha_i S\theta_3^i C\theta_{12}^i \\ -S\alpha_i(L_1 S\theta_1^i + L_2 C\theta_3^i S\theta_{12}^i) & -L_2 S\alpha_i C\theta_3^i S\theta_{12}^i & L_2 C\alpha_i S\theta_3^i - L_2 S\alpha_i S\theta_3^i C\theta_{12}^i \\ L_1 C\theta_1^i + L_2 C\theta_3^i C\theta_{12}^i & -L_2 C\theta_3^i C\theta_{12}^i & -L_2 S\theta_3^i S\theta_{12}^i \end{bmatrix}$$

IV.2.4. Le modèle cinématique inverse complet du robot Detla-LRP

Le modèle cinématique inverse du robot donne des variables rotoïdes motorisées $[\dot{\theta}_1^1 \quad \dot{\theta}_1^2 \quad \dot{\theta}_1^3]$ en fonction de la vitesse de plate-forme:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^1 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_1^3 \end{bmatrix} = {}^0J_i^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_{ov} \\ \dot{Y}_{ov} \\ \dot{Z}_{ov} \end{bmatrix} \\ \dot{\rho} = \frac{a\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{\rho} \cdot \dot{\theta}_1^i (\dot{X}_{ov}, \dot{Y}_{ov}, \dot{Z}_{ov}) \end{cases} \quad (IV. 46)$$

Où ${}^0J_i^{-1}$ est la matrice Jacobienne inverse de la chaîne cinématique i.

Le modèle cinématique inverse de la chaîne i donne la vitesse des articulations de la chaîne i $(\dot{\theta}_i^1, \dot{\theta}_i^2, \dot{\theta}_i^3)$ en fonction de la vitesse du point P :

$$\dot{q}_i = {}^0J_i^{-1} \cdot {}^0V_p \quad (IV. 47)$$

Où ${}^0J_i^{-1}$ est la matrice Jacobienne inverse de la chaîne i.

IV.2.5. Le modèle cinématique inverse du second ordre

Le modèle cinématique inverse du second ordre de la chaîne i donne l'accélération des articulations de la chaîne i $(\ddot{\theta}_i^1, \ddot{\theta}_i^2, \ddot{\theta}_i^3)$ en fonction de l'accélération du point P :

$$\ddot{q}_i = {}^0J_i^{-1} \cdot {}^0\dot{V}_p - {}^0\dot{J}_i^{-1} \cdot \dot{q}_i \quad (IV. 48)$$

Le modèle cinématique inverse présente un grand intérêt en phase d'exploitation surtout quand le robot travaille en cours de déplacement avec des contraintes de vitesses, de l'effecteur relativement à la pièce (opérations de soudage, de découpage,.....). L'autre intérêt est qu'il se substitue au modèle géométrique inverse et permet de calculer les incréments de déplacements articulaires à réaliser sur les différentes articulations, sur la base de la configuration présente, pour matérialiser un déplacement élémentaire dans l'espace opérationnel.

IV.2.6. Applications

IV.2.6.1. Les résultats

IV.2.6.1.1. Les vitesses articulaires

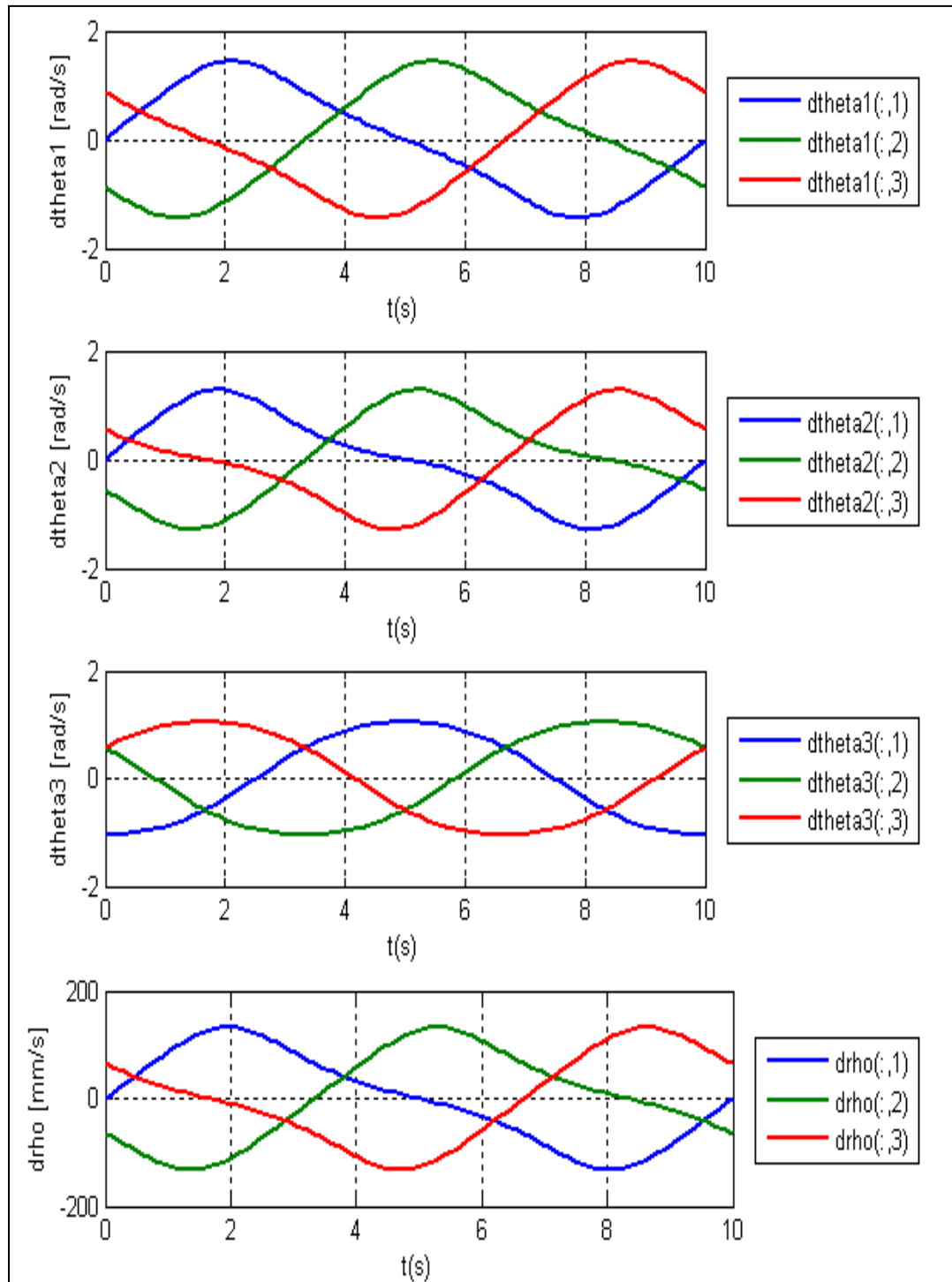


Figure IV. 1 les vitesses articulaires

IV.2.6.1.2. Les accélérations articulaires

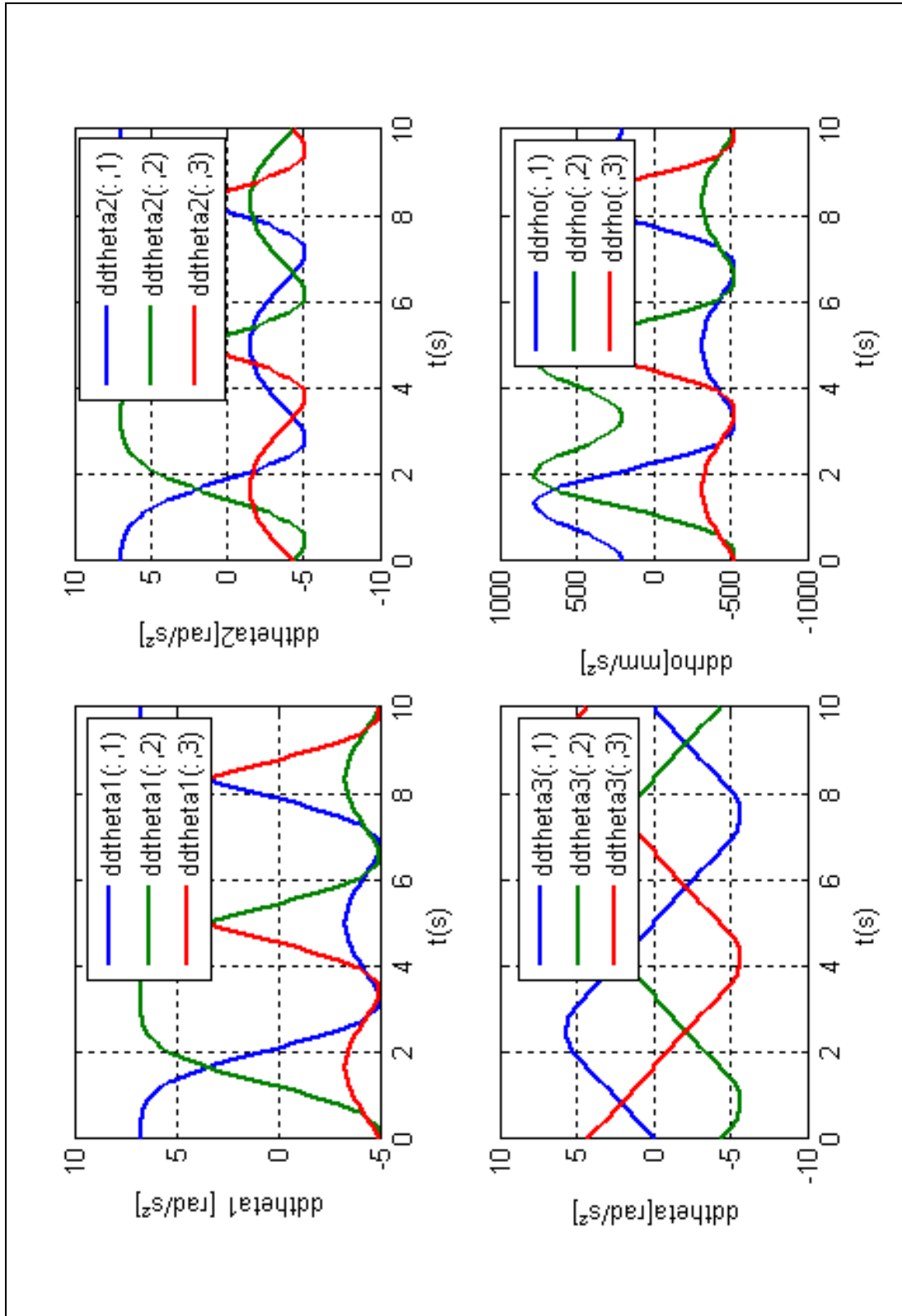


Figure IV. 2 : les accélérations articulaires

IV.3. Modélisation dynamique

IV.3.1. Rappel théorique

IV.3.1.1. Modèle dynamique inverse

On appelle modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique, le système d'équations qui permet d'établir les relations entre le vecteur des forces généralisées (forces et/ou couples) appliquées au niveau des articulations et les paramètres cinématiques (coordonnées, vitesses et accélérations généralisées) du bras manipulateur. On représente donc le modèle dynamique inverse par une relation de la forme :

$$\Gamma = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_{ext}) \quad (\text{IV. 49})$$

Où :

Γ : Vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique.

f_{ext} : effort extérieur (forces et couples), à exercer par l'organe terminal.

IV.3.1.2. Modèle dynamique direct

Le modèle dynamique direct est celui qui permet d'exprimer les accélérations généralisées en fonction des coordonnées, vitesses et forces généralisées. Il est alors représenté par la relation :

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, \Gamma, f_{ext}) \quad (\text{IV. 50})$$

Les méthodes les plus souvent utilisés sont :

- Le formalisme de Newton-Euler
- Le formalisme de Lagrange
- Le principe des travaux virtuels

IV.3.1.3. Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange est utilisé surtout pour construire le modèle dynamique direct, il ne présente que peu d'intérêts pratiques. On utilise généralement ce modèle pour la simulation des mécanismes polyarticulés libres.

Les équations de mouvement issues du modèle de Lagrange s'écrivent, en absence d'efforts extérieurs et de frottement comme suit :

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{IV. 51})$$

Où :

τ_i : Force/Couple moteur de la $i^{\text{ème}}$ articulation,

L : Lagrangien du système égale à $E_c - E_p$,

E_c : Energie cinétique totale,

E_p : Energie potentielle totale,

n : Nombre total des articulations.

L'énergie cinétique du système est une forme quadratique des vitesses articulaires

Où $A(q)$ est la matrice $(n \times n)$ d'inertie du système, elle est symétrique et définie positive

$$E_c = \frac{1}{2} m_i V_{G_i}^T V_{G_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{G_i} \omega_i$$

Ce formalisme permet d'écrire les équations de mouvement en termes de travail et d'énergie directement sous une forme matricielle :

$$\Gamma = [A]\ddot{q} + [B]\dot{q}\dot{q} + [C]q^2 + G + F_{\text{ext}} \quad (\text{IV. 52})$$

Avec :

A : Matrice d'inertie du bras manipulateur.

B : Matrice des termes de Coriolis.

C : Matrice des termes centrifuges.

G : Vecteur des forces de gravité.

F_{ext} : Vecteur des forces extérieures.

$$\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 & \dot{q}_1\dot{q}_3 & \cdots & \dot{q}_1\dot{q}_n & \dot{q}_2\dot{q}_3 & \cdots & \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \cdots & \dot{q}_n^2 \end{bmatrix}$$

Les expressions des éléments des matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} sont données par les relations suivantes :

$$B_{i,jk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \quad (\text{IV. 53})$$

$$C_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_{jj}}{\partial q_i} \quad (\text{IV. 54})$$

IV.3.2. Etude dynamique direct et inverse du robot Delta -LRP

IV.3.2.1. Détermination de l'énergie cinétique

IV.3.2.1.1. Énergie cinétique de la jambe i

a. L'énergie cinétique de la structure triangulée de la chaîne i

Corps (0):

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_0 &= \vec{0} \\ \vec{V}_0 &= \vec{0} \end{aligned} \quad \text{base de robot fixe}$$

Corps (1)

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \vec{\sigma}_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1^i \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{O_0O_1} + \vec{\sigma}_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \vec{z}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{V}_{G_1} = \vec{V}_1 + \vec{w}_1 \times \vec{O_1G_1} \quad \text{et avec} \quad \vec{O_1G_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1=0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 \times \vec{O_1G_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1^i \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{G_1} = \begin{pmatrix} -Y_1\dot{\theta}_1^i \\ X_1\dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{C_1} = \frac{1}{2} m_1 \begin{pmatrix} 0 & -Y_1\dot{\theta}_1^i & X_1\dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y_1\dot{\theta}_1^i \\ X_1\dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx}^{(1)} & -I_{xy}^{(1)} & 0 \\ -I_{xy}^{(1)} & I_{yy}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix}$$

$$E_{C_1} = \frac{1}{2} \left(I_{zz}^{(1)} + m_1 (Y_1^2 + X_1^2) \right) (\dot{\theta}_1^i)^2$$

Corps(2) :

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\sigma}_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot \vec{z}_2 = {}^2\tilde{R}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1 O_2} + \sigma_2 \cdot \dot{q}_2 \cdot \vec{z}_2 = \vec{0} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1^i \\ L_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$V_{G_2} = V_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2 G_2} = \begin{bmatrix} C\theta_1^i & S\theta_1^i & 0 \\ -S\theta_1^i & C\theta_1^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{G_2} = \begin{bmatrix} L_1 S(\theta_1^i) & 0 & 0 \\ L_1 C(\theta_1^i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^i \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$${}^2\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1^i & S\theta_1^i & 0 \\ -S\theta_1^i & C\theta_1^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{O_1 O_2} = \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{O_2 G_2} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Corps (2):

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 \begin{pmatrix} L_1 \dot{\theta}_1^i S(\theta_1^i) & L_1 \dot{\theta}_1^i C(\theta_1^i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \dot{\theta}_1^i S(\theta_1^i) \\ L_1 \dot{\theta}_1^i C(\theta_1^i) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m_2 (L_1 \dot{\theta}_1^i)^2$$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 (L_1 \dot{\theta}_1^i)^2$$

Corps(3) :

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_2 + \vec{\sigma}_3 \cdot \dot{q}_3 \cdot \vec{z}_3 = {}^3R_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2 O_3} + \sigma_3 \cdot \dot{q}_3 \cdot \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{0} = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{V}_{G_3} = \vec{V}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{O_3 G_3} = \begin{bmatrix} C\theta_2^i & S\theta_2^i & 0 \\ -S\theta_2^i & C\theta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{0} = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{G_3} = \begin{bmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) & 0 & 0 \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^i \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$${}^3\tilde{\mathbf{R}}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2^i & C\theta_2^i & 0 \\ -S\theta_2^i & S\theta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{O_2 O_3} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{O_3 G_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} m_3 \begin{pmatrix} L_1 \dot{\theta}_1^i S(\theta_1^i + \theta_2^i) & L_1 \dot{\theta}_1^i C(\theta_1^i + \theta_2^i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2^i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{pmatrix}$$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} \left(m_3 \left(L_1 \dot{\theta}_1^i \right)^2 + I_{zz}^{(3)} \left(\dot{\theta}_2^i \right)^2 \right)$$

Corps 4:

$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3 + \vec{\sigma}_4 \cdot \vec{q}_4 \cdot \vec{z}_4 = {}^4R_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & 0 & S\theta_3^i \\ -S\theta_3^i & 0 & C\theta_3^i \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{O_3 O_4} + \sigma_4 \cdot \vec{q}_4 \cdot \vec{z}_4 = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2^i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{0} = \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (R3)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_3^i & 0 & S\theta_3^i \\ -S\theta_3^i & 0 & C\theta_3^i \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} \quad (R4)$$

$${}^4\tilde{\mathbf{R}}_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & 0 & C\theta_3^i \\ -S\theta_3^i & 0 & S\theta_3^i \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{O_3 O_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{O_4 G_4} = \begin{pmatrix} X_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{G_4} = \vec{V}_4 + \vec{\omega}_4 \times \vec{O_4 G_4} = \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ X_4 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -X_4 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{G_4} = \begin{bmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) & 0 & 0 \\ -L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) & 0 & X_4 \\ -L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) & -X_4 C(\theta_3^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^i \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$$E_{C_4} = \frac{1}{2} m_4 \left(L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \quad X_4 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \quad -X_4 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \right) \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ X_4 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -X_4 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \quad C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \quad \dot{\theta}_3^i \right) \begin{bmatrix} I_{xx}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$$E_{C_4} = \frac{1}{2} m_4 \left(\left(L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \right)^2 + \left(X_4 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \right)^2 + \left(X_4 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i + L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \right)^2 \right) \\ + \frac{1}{2} \left(I_{xx}^{(4)} \left(S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \right)^2 + I_{yy}^{(4)} \left(C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \right)^2 + I_{zz}^{(4)} \left(\dot{\theta}_3^i \right)^2 \right)$$

Corps 5:

$$\vec{\omega}_5 = \vec{\omega}_4 + \vec{\sigma}_5 \cdot \vec{q}_5 \cdot \vec{z}_5 = {}^5R_4 \begin{bmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & S\theta_3^i & 0 \\ -S\theta_3^i & C\theta_3^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ 0 \end{bmatrix}_{R_5}$$

$$\vec{V}_5 = \vec{V}_4 + \vec{\omega}_4 \wedge \vec{O_4 O_5} + \vec{\sigma}_5 \cdot \vec{q}_5 \cdot \vec{z}_5 = \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{0} = \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_2 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix}_{R_4}$$

$$\vec{V}_5 = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & S\theta_3^i & 0 \\ -S\theta_3^i & C\theta_3^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \\ -L_2 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 C\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + S\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_1 S\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + C\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_2 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{bmatrix}_{(R5)}$$

$${}^5\tilde{R}_4 = \begin{bmatrix} C\theta_3^i & C\theta_3^i & 0 \\ -S\theta_3^i & S\theta_3^i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{O_4 O_5} = \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{O_5 G_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{G_5} = \mathbf{V}_5 + \vec{\omega}_5 \times \vec{O_5 G_5} = \begin{pmatrix} L_1 C\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + S\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_1 S\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + C\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_2 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{G_5} = \begin{pmatrix} L_1 C\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + S\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_1 S\theta_3^i C(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i + C\theta_3^i (L_2 \dot{\theta}_3^i - L_1 S(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i) \\ -L_2 C(\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i - L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) \dot{\theta}_1^i \end{pmatrix}$$

$$V_{G_5} = \begin{bmatrix} L_1 \left(C^2(\theta_3^i) S(\theta_1^i + \theta_2^i) - S^2(\theta_3^i) C(\theta_1^i + \theta_2^i) \right) & 0 & L_2 S \theta_3^i \\ L_1 C \theta_3^i S(\theta_3^i) \left(C(\theta_1^i + \theta_2^i) + S(\theta_1^i + \theta_2^i) \right) & 0 & L_2 C \theta_3^i \\ -L_1 C(\theta_1^i + \theta_2^i) & -L_2 C(\theta_3^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^i \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

$$E_{C_5} = \frac{1}{2} m_5 \left(V_{G_5} \right)^T V_{G_5} + \frac{1}{2} \left(S(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \quad C(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \quad 0 \right) \begin{bmatrix} I_{xx}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{(5)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ C(2\theta_3^i) \dot{\theta}_2^i \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. L'énergie cinétique de vérin de la chaîne i

Corps 8:

$$E_{C_8} = \frac{1}{2} \left(m_8 (Y_8^2 + X_8^2) + I_{zz[8]} \right) (\dot{\phi}_i)^2$$

Corps 9:

$$E_{C_9} = \frac{1}{2} \left(m_9 (C_1 \rho_i + C_2)^2 + I_{zz[9]} (\dot{\rho}_i)^2 + I_{zz[9]} (\dot{\phi}_i)^2 \right) + I_{zz[9]} \dot{\phi}_i \dot{\rho}_i$$

On peut écrire l'énergie totale de la chaîne i :

$$E_{C(i)} = E_{C(i)}(\text{chaîne triangulée}) + E_{C(i)}(\text{vérin})$$

$$E_{C(i)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^i & \dot{\theta}_2^i & \dot{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ai_{11} & Ai_{12} & Ai_{13} \\ Ai_{12} & Ai_{22} & Ai_{11} \\ Ai_{13} & Ai_{21} & Ai_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta}_2^i \\ \dot{\theta}_3^i \end{bmatrix}$$

IV.3.2.2. Détermination des termes d'inertie - matrice (Ai)

Ces termes sont obtenus à partir de l'expression de l'énergie cinétique total de la jambe i, ils représentent les coefficients des différents termes $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$.

$$Ai = \begin{bmatrix} Ai_{11} & Ai_{12} & Ai_{13} \\ Ai_{12} & Ai_{22} & Ai_{11} \\ Ai_{13} & Ai_{21} & Ai_{33} \end{bmatrix}$$

$$Ai_{11} = \frac{1}{2} \left(m_3 L_1^2 + 3 \left(I_{zz_2} + L_1^2 m_6 + m_5 L_1^2 + m_2 (y_2^2 + x_2^2) + m_4 L_1^2 \right) \right) \left(f_1(\theta_1^i(\rho_i)) \right)^2 +$$

avec :

$$\frac{1}{2} \left(I_{zz_9} + I_{zz_8} + m_9 (C_1 \rho_i + C_2)^2 + m_8 (y_8^2 + x_8^2) + I_{zz_9} \right) \left(f_2(\phi_i(\rho_i)) \right)^2 + I_{zz_9} f_2(\phi_i(\rho_i))$$

$$\begin{aligned}
Ai_{22} &= \frac{3}{4} \left((I_{yy_5} - I_{xx_5} + m_5 x_5^2 + m_6 L_2^2) \cos(2\theta_3^i) + (I_{yy_5} + m_6 L_2^2 + m_5 x_5^2 + I_{xx_5}) \right) + \frac{3}{2} \left((I_{zz_4} + I_{yy_6}) - I_{xy_5} \sin(2\theta_3^i) \right) \\
Ai_{33} &= \frac{3}{2} (m_6 L_2^2 + I_{zz_5} + m_5 x_5^2) \\
Ai_{13} &= -3L_1 (m_5 x_5 + m_6 L_2) \sin(\theta_3^i) \cos(-\theta_2^i + \theta_1^i(\rho_i)) f_1(\theta_1^i(\rho_i)) \\
Ai_{23} &= -3 \left(\sin(\theta_3^i) + \cos(\theta_3^i) \right) I_{xz_5} \\
Ai_{12} &= 3L_1 (m_5 x_5 + m_6 L_2) \cos(\theta_3^i) \sin(-\theta_2^i + \theta_1^i(\rho_i)) f_1(\theta_1^i(\rho_i))
\end{aligned}$$

IV.3.2.3. Détermination des termes centrifuges

C'est une matrice de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Voir l'annexe})$$

et dont les éléments sont donnés par l'expression suivante :

$$B_{ij} = \frac{\partial Ai_{ij}}{\partial \theta_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial Ai_{jj}}{\partial \theta_i}$$

IV.3.2.4. Détermination des termes de Coriolis

C'est une matrice de la forme (voir l'annexe)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{112} & C_{113} & C_{123} \\ C_{212} & C_{213} & C_{223} \\ C_{312} & C_{313} & C_{323} \end{bmatrix}$$

Les éléments de cette matrice sont donnés par l'expression suivante :

$$C_{ij,k} = \frac{\partial Ai_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial Ai_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial Ai_{jk}}{\partial \theta_i} \quad \text{Avec : } j \neq k$$

IV.3.2.5. Détermination de l'énergie potentielle de la jambe i

a. L'énergie potentielle de la structure triangulée de la chaîne i

La seule source d'énergie potentielle est la gravité. Soit g , le vecteur de gravité exprimé

dans le repère de base R_0 . On a :

$$Ep_i = m_i \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_i \cdot \overrightarrow{O_i G_i}$$

Corps(1) : L'énergie potentielle du corps (1) est donnée par :

$$Ep_1 = m_1 \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_1 \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = m_1 \left(X_1 \sin(\theta_1^i) + Y_1 \cos(\theta_1^i) \right) g$$

Corps(2) : L'énergie potentielle du corps (2) est donnée par :

$$Ep_2 = m_2 \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_2 \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = m_2 \left(X_2 + L_1 \sin(\theta_1^i) \right) g$$

Corps(3) : L'énergie potentielle du corps (3) est donnée par :

$$Ep_3 = m_3 \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = m_3 \left(d + L_1 \sin(\theta_1^i) \right) g$$

Corps(4) : L'énergie potentielle du corps (4) est donnée par :

$$Ep_4 = m_4 \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_4 \cdot \begin{bmatrix} X_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Corps(5) : L'énergie potentielle du corps (5) est donnée par :

$$Ep_5 = m_5 \cdot [0 \quad 0 \quad g \quad 0] \cdot {}^0T_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. L'énergie potentielle de vérin de la chaîne i

Corps (8) : $Ep_8 = m_8 g \left(\sin(\phi_i) X_8 + \cos(\phi_i) Y_8 - L_3 \sin(\gamma) - d_1 \right)$

Corps (9) :

$$Ep_9 = m_9 g \left((C_1 \rho_i + C_2) \sin(\phi_i) - L_3 \sin(\gamma) - d_1 \right)$$

L'énergie potentiel totale de la jambe i est donnée par :

$$E_{P(i)} = E_{P(i)}(\text{chaîne triangulée}) + E_{P(i)}(\text{vérin})$$

Le vecteur des efforts de gravitation est donné par l'expression suivante :

$$G_i = \frac{\partial Ep_i}{\partial \theta_i}$$

IV.3.3. Modèle Dynamique Inverse

Le modèle dynamique inverse représente la relation entre les forces des articulations motorisées et les positions, vitesses, accélérations cartésiennes de la plate-forme. Il s'écrit :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_{ext})$$

En utilisant le modèle géométrique et cinématique inverse du robot et des chaînes on peut exprimer la position, la vitesse et l'accélération des articulations de chaque chaîne $(\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)$ en fonction du mouvement de la plate-forme.

En représentant les réactions de la plate-forme sur la chaîne i par f_i les inconnues du modèle dynamique inverse sont les 9 composantes des forces $f_i = \begin{bmatrix} f_{xi} & f_{yi} & f_{zi} \end{bmatrix}^T$ et les 3 forces des articulations indépendantes Γ_{1i} ($i = 1, 2, 3$). Le modèle dynamique inverse de chaque chaîne est composée de 3 équations indépendantes ce qui donne un total de 9 équations.

Les équations de Newton-Euler de la plateforme donnent 3 équations supplémentaires. Le système est donc composé de 12 inconnues et de 12 équations, il est donc envisageable d'être résolu. Dans la suite, ce système d'équations sera résolu de façon séquentielle.

IV.3.3.1. Calcule la force f_i de la chaîne i

La forme générale du modèle dynamique de la chaîne i, s'écrit :

$$\Gamma_i = A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i + {}^0 J_i^T {}^0 f_i$$

Γ_i : composé des couples/forces de la chaîne i

Les forces de réaction 0f_i peuvent s'écrire :

$${}^0f_i = {}^0J_i^{-T} \Gamma_i - {}^0J_i^{-T} (A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i) \quad (\text{IV. 55})$$

IV.3.3.2. Dynamique de la plate-forme

Les équations de Newton-Euler appliquées à l'origine de la plate-forme s'écrivent (pas de rotation) :

$${}^0F_p = m_7 \left({}^0\dot{V}_p - {}^0g \right) \quad (\text{IV. 56})$$

Avec :

0g : accélération de la pesanteur exprimée dans le repère R_0

m_7 : masse de la plate-forme mobile.

0F_p : Force totale extérieure appliquée sur la plate-forme mobile au point P. Puisque 0V_p est connu, alors 0F_p peut-être calculé à partir de l'équation (IV.16)

Les forces appliquées à la plate-forme dues aux forces de réaction de chaque chaîne sont calculées en utilisant l'équation suivante :

$${}^0F_p = \sum_{i=1}^3 \left[{}^0J_i^T \Gamma_i - {}^0J_i^T (A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i) \right]$$

$$\Gamma_i = {}^0J_p^T \left({}^0F_p + \sum_{i=1}^3 \left[{}^0J_i^T (A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i) \right] \right)$$

Finalement, l'équation (IV.18) représente le modèle dynamique inverse du robot delta :

$$\Gamma_{robot} = {}^0J_p^T H_{robot} \quad (\text{IV. 57})$$

Avec :

$$H_{robot} = \left(F_p + \sum_{i=1}^3 \left[{}^0J_i^T (A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i) \right] \right)$$

$$\Gamma_{robot} = [\Gamma_{11} \quad \Gamma_{12} \quad \Gamma_{13}]^T$$

IV.3.4. Modèle dynamique direct

Le modèle dynamique direct exprime les accélérations cartésiennes de la plate-forme en fonction des positions et vitesses de la plate-forme et les forces des articulations motorisées. Il s'écrit : $\ddot{q} = G(q, \dot{q}, \Gamma, f_{ext})$

Les inconnues pour ce problème sont les 9 composantes des forces de réaction au point P sur chaque chaîne $f_i = [f_{xi} \quad f_{yi} \quad f_{zi}]^T$ et les 3 composantes de l'accélération linéaire cartésienne de la plate-forme ${}^0\ddot{V}_p$. Comme pour le modèle dynamique inverse, on a 9 équations obtenues à partir des modèles dynamiques inverses des chaînes et 3 équations provenant de la plate-forme. Le système est donc composé également de 12 inconnues et de 12 équations. Ce système d'équations sera résolu de façon séquentielle.

Les forces de réaction de la chaîne, relation (IV.19), doivent être exprimées en fonction des accélérations linéaires cartésiennes de la plate-forme. En utilisant les relations (IV.15) et (IV.14) de façon à séparer les forces d'inerties des forces de Coriolis, centrifuges et gravités, on obtient :

$${}^0f_i = {}^0J_i^{-T}\Gamma_i - A_{xi}{}^0\dot{V}_p + A_{xi}{}^0J_i\dot{q}_i - {}^0J_i^{-T}(B_i\dot{q}_i\dot{q}_i + C_i\dot{q}_i^2 + G_i) \quad (IV. 58)$$

Où : $A_{xi} = {}^0J_i^{-T}A_i{}^0J_i^{-1}$ est la matrice (3×3) d'inertie cartésienne de la chaîne i exprimée au point P_i .

En substituant l'équation (IV.56) dans les équations de Newton-Euler de la plate-forme mobile, relation (IV.54), on obtient :

$${}^0F_p = {}^0J_p^{-T}\Gamma_{robot} - \sum_{i=1}^3 A_{xi}{}^0\dot{V}_p - \sum_{i=1}^3 [A_{xi}{}^0J_i\dot{q}_i + {}^0J_i^{-T}(B_i\dot{q}_i\dot{q}_i + C_i\dot{q}_i^2 + G_i)] \quad (IV. 59)$$

Ce qui s'écrit :

$${}^0J_p^{-T}\Gamma_{robot} = {}^0F_p + \left[\sum_{i=1}^3 A_{xi} + I_3 m_6 \right] {}^0\dot{V}_p + \sum_{i=1}^3 [A_{xi}{}^0J_i\dot{q}_i + {}^0J_i^{-T}(B_i\dot{q}_i\dot{q}_i + C_i\dot{q}_i^2 + G_i)] \quad (IV. 60)$$

Les accélérations de la plate-forme mobile peuvent être calculées à partir de la relation suivante

$${}^0\dot{V}_p = A_{robot}^{-1} ({}^0J_p^{-T}\Gamma_{robot} - h_{robot}) \quad (IV. 61)$$

Avec :

$$A_{robot} = \left[\sum_{i=1}^3 A_{xi} + I_3 m_6 \right]$$

$$h_{robot} = \sum_{i=1}^3 \left[A_{xi}^0 J_i \dot{q}_i + {}^0 J_i^{-T} (B_i \dot{q}_i \dot{q}_i + C_i \dot{q}_i^2 + G_i) \right]$$

IV.3.5. Les résultats

La (figure IV.3) représente la variation des forces de vérins on fonction de temps

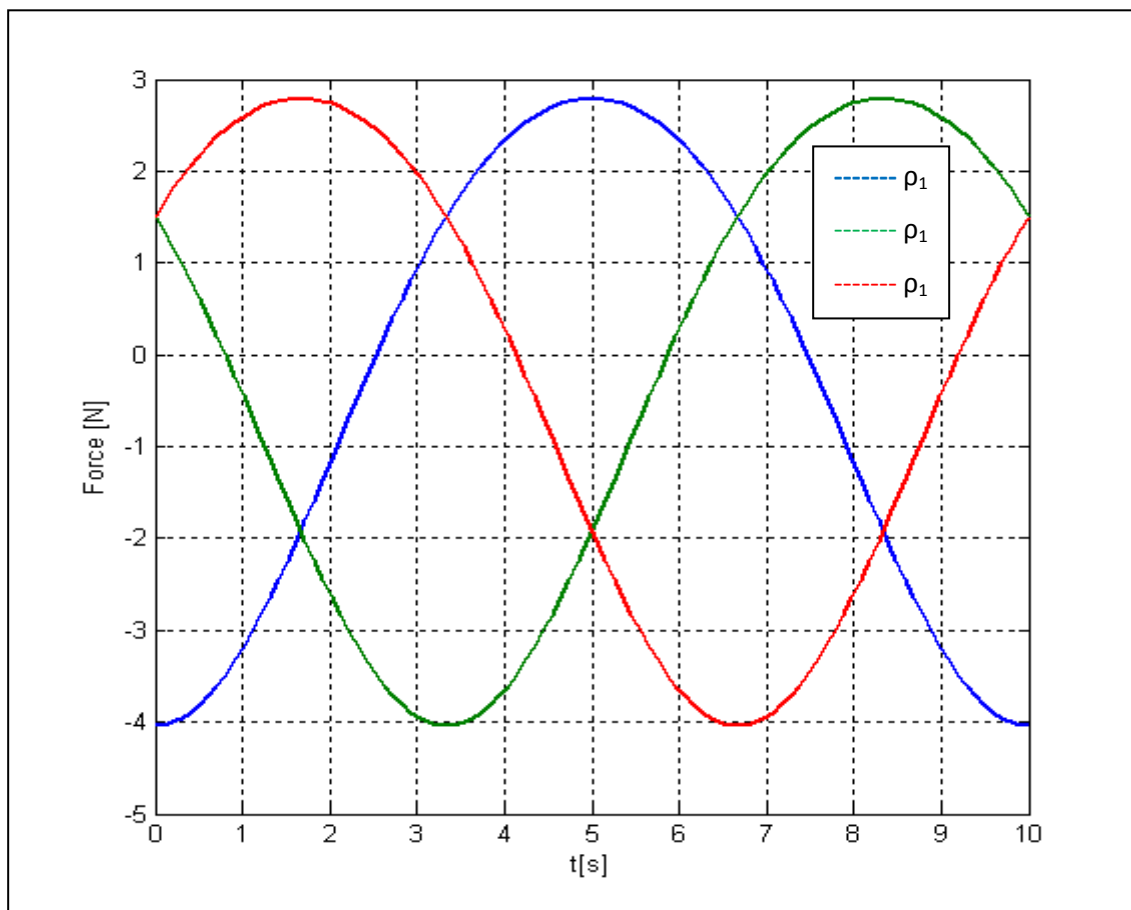


Figure IV. 3 : Les forces exercées sur les actionneurs prismatiques

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une forme intéressante du modèle dynamique inverse et direct du robot Delta-LRP. En effet, ces modèles prennent en compte toute la dynamique du robot sans simplification et permettent de déduire une interprétation physique du modèle dynamique du robot parallèle. Et permet d'écrire les équations de mouvement en termes de travail et d'énergie sous une forme matricielle et déterminer les couples des actionnaires de cette structure.

Ces modèles sont obtenus en termes des éléments du modèle dynamique cartésien des chaînes cinématiques du robot perçues aux points de connexions des chaînes avec la plateforme.

Conclusion générale

Les caractéristiques des robots parallèles, très différentes de celles des manipulateurs séries, ils sont des systèmes multi-corps complexes, qui sont parmi ceux les plus difficiles à modéliser, à cause de leur architecture parallèle qui comporte plusieurs boucles fermées. Suite à l'augmentation constante des performances attendues par ce type de machines, la conception de leur commande doit prendre en compte les forces d'interactions dynamiques.

L'idée directe de ce travail consistait à proposer une nouvelle structure de robots parallèles, caractérisée par la translation de l'effecteur terminal, et déterminer le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique.

Nous allons rappeler brièvement le contenu des chapitres pour en faire ressortir l'essentiel.

Dans la première partie nous avons présenté une énumération relativement exhaustive des architectures mécaniques pour manipulateurs parallèles en translation décrit dans la littérature.

Nous avons essayé de faire une conception optimale sur logiciel de CAO SolidWorks et déterminer la meilleure conception Pour la réalisation.

La modélisation de cette structure nous a permis de définir les modèles analytiques performants qu'établissent les relations entre les coordonnées opérationnelles de l'effecteur terminal et les variables articulaires passives et actives, ces modèles sont indispensables pour la suite de notre étude.

La détermination de l'espace de travail des robots parallèles est en général plus complexe que pour les manipulateurs série, les méthodes géométriques sont cependant généralement très complexes et l'on ne peut que regretter qu'elles ne soient pas plus fréquemment utilisées.

L'établissement des modèles dynamiques pour les chaînes cinématiques fermées est un point de passage obligé pour établir un schéma de commande pour les manipulateur rapides, et pour cela nous avons utilisé le formalisme de Lagrange pour trouver le modèle dynamique direct et le modèles dynamique inverse. Nous avons aussi vu les modèles dynamiques inverse et directe sont très complexes,

Perspectives

En ce qui concerne les développements ultérieurs envisageables à court terme sur ce même sujet, nous pouvons mentionner quelques axes de recherches tellement les perspectives ouvertes par ce travail :

- Réaliser la structure et étude de motorisation du robot et implantation d'une commande en temps réel.
- Etude et modélisation du jeu en considérant cette fois la réalité du parallélogramme et les vérins.
- Etude de génération et d'optimisations de trajectoires.
- Etude la Planification de trajectoire de robot évitant les singularités et collisions.
- Etude d'évitement d'obstacles.
- Placement optimal des robots parallèles dans un site.

ANNEXE

Propriétés de masse :

Pièce N° 02 :

- Système de coordonnées: Système de coordonnées1
- Masse = 978,75 [g]
- Centre de gravité: [mm]
 - $X = 146,02$
 - $Y = 0,62$
 - $Z = 0,00$
- Moments d'inertie: [g.mm²]

$I_{xx} = 342490,86$	$I_{xy} = -1087394,51$	$I_{xz} = 0,00$
$I_{yx} = -1087394,51$	$I_{yy} = 31194992,92$	$I_{yz} = 0,00$
$I_{zx} = 0,00$	$I_{zy} = 0,00$	$I_{zz} = 31512433,46$

Pièce N° 03 :

- Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1
- Masse = 3332.56 [g]
- Centre de gravité: [mm]
 - $X = 19.90$
 - $Y = 18.31$
 - $Z = -0.00$
- Moments d'inertie: [g.mm²]

$I_{xx} = 15164752.45$	$I_{xy} = 794649.94$	$I_{xz} = -0.81$
$I_{yx} = 794649.94$	$I_{yy} = 8257111.20$	$I_{yz} = 3.78$
$I_{zx} = -0.81$	$I_{zy} = 3.78$	$I_{zz} = 11756390.62$

Pièce N° 04 :

- Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1
- Masse = 85.48 [g]
- Centre de gravité: [mm]
 - $X = -0.00$
 - $Y = 0.00$
 - $Z = -0.00$
- Moments d'inertie: [g.mm²]

$I_{xx} = 7937.51$	$I_{xy} = -0.02$	$I_{xz} = 0.00$
--------------------	------------------	-----------------

$$\begin{aligned} I_{yx} &= -0.02 & I_{yy} &= 13687.49 & I_{yz} &= 0.01 \\ I_{zx} &= 0.00 & I_{zy} &= 0.01 & I_{zz} &= 7937.51 \end{aligned}$$

Pièce N° 05 :

➤ Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1

➤ Masse = 1204.23 [g]

➤ Centre de gravité: [mm]

$$X = 245.00$$

$$Y = 0.00$$

$$Z = 0.00$$

➤ Moments d'inertie: [g.mm²]

$$L_{xx} = 97025.85 \quad L_{xy} = 0.00 \quad L_{xz} = 0.13$$

$$L_{yx} = 0.00 \quad L_{yy} = 24457423.09 \quad L_{yz} = 0.00$$

$$L_{zx} = 0.13 \quad L_{zy} = 0.00 \quad L_{zz} = 24419267.56$$

Pièce N° 06 :

➤ Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1

➤ Masse = 85.48 [g]

➤ Centre de gravité: [mm]

$$X = -0.00$$

$$Y = 0.00$$

$$Z = -0.00$$

➤ Moments d'inertie: [g.mm²]

$$I_{xx} = 7937.51 \quad I_{xy} = -0.02 \quad I_{xz} = 0.00$$

$$I_{yx} = -0.02 \quad I_{yy} = 13687.49 \quad I_{yz} = 0.01$$

Pièce N° 07 :

➤ Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1

➤ Masse = 26994.74 [g]

➤ Centre de gravité: [mm]

$$X = 0.00$$

$$Y = 0.00$$

$$Z = 40.50$$

➤ Moments d'inertie: [g.mm²]

$$I_{xx} = 544940252.90 \quad I_{xy} = 0.00 \quad I_{xz} = 0.00$$

$$I_{yx} = 0.00 \quad I_{yy} = 544940252.90 \quad I_{yz} = 0.00$$

$$I_{zx} = 0.00 \quad I_{zy} = 0.00 \quad I_{zz} = 998569648.77$$

Pièce N° 08 :

➤ Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1

➤ Masse = 2304.20 [g]

➤ Centre de gravité: [mm]

$$X = -106.33$$

$$Y = 0.00$$

$$Z = -0.00$$

➤ Moments d'inertie: [g.mm²]

$$I_{xx} = 127346.57$$

$$I_{xy} = -0.01$$

$$I$$

$$I_{xz} = 0.02$$

$$I_{yx} = -0.01$$

$$I_{yy} = 4841124.24$$

$$I_{yz} = -0.00$$

$$I_{zx} = 0.02$$

$$I_{zy} = -0.00$$

$$I_{zz} = 4837072.77$$

Pièce N° 09 :

➤ Système de coordonnées de sortie : Système de coordonnées1

➤ Masse = 1613.36 [g]

➤ Centre de gravité: [mm]

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = 0$$

➤ Moments d'inertie: [g.mm²]

$$L_{xx} = 219262.11$$

$$L_{xy} = -0.08$$

$$L_{xz} = -0.17$$

$$L_{yx} = -0.08$$

$$L_{yy} = 11169009.67$$

$$L_{yz} = 0.25$$

$$L_{zx} = -0.17$$

$$L_{zy} = 0.25$$

$$L_{zz} = 11158434.66$$

Les paramètres géométriques :

$$L_1 = 300[mm], L_2 = 400[mm], L_3 = 55[mm], a = 170[mm], R_1 = 150[mm], R_2 = 120[mm]$$

$$d = 50[mm], d' = 55[mm]$$

$$\alpha \left[0 \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{4\pi}{3} \right], \gamma = 10^\circ$$

La matrice centrifuge :

$$B_{11} = \frac{1}{2} \left(m_3 L_1^2 + 3 \left(I_{zz_2} + m_6 L_1^2 + m_5 L_1^2 + m_2 (y_2^2 + x_2^2) + m_4 L_1^2 \right) \right) \left(\theta_1' \right)^2 \theta_1'' +$$

$$\frac{1}{2} \left(m_9 C_1 (C_1 \rho + C_2) \phi'(\rho)^2 + \left(I_{zz_8} + m_9 (C_1 \rho + C_2)^2 + m_9 (y_8^2 + x_8^2) + I_{zz_9} \right) \phi' \phi'' + \phi'' I_{zz_9} \right)$$

$$B_{12} = -\frac{3}{2}L_1(x_5m_5 + L_2m_6)\left(\cos(\theta_{23}^i - \theta_1^i) + \cos(\theta_{23}^i - \theta_1^i)\right)\theta_1''$$

$$B_{13} = -\frac{3}{2}L_1(m_6L_2 + m_5x_5)\left(\cos(\theta_2^i - \theta_{13}^i) + \cos(\theta_{23}^i - \theta_1^i)\right)\theta_1''$$

$$B_{23} = 3Lx_{z5}\left(-\cos(\theta_3^i) + Lx_{z5}\sin(\theta_3^i)\right)$$

$$B_{22} = B_{33} = 0$$

$$B_{3,2} = \frac{3}{4}\left(Iyy_5 - Lxx_5 + m_5x_5^2 + m_6L_2^2\right)\sin(2\theta_3^i) + \frac{3}{2}Lxy_5\cos(2\theta_3^i)$$

$$B_{21} = -\frac{3}{2}L_1(m_6L_2 + m_5x_5)\left(-\sin(\theta_{23}^i - \theta_1^i) - \sin(\theta_2^i - \theta_{13}^i) + \cos(\theta_{23}^i - \theta_1^i) + \cos(\theta_2^i - \theta_{13}^i)\right)\theta_1''$$

$$B_{31} = -\frac{3}{2}L_1(m_6L_2 + m_5x_5)\left(-\sin(\theta_{23}^i - \theta_1^i) + \sin(\theta_2^i - \theta_{13}^i) + \cos(\theta_{23}^i - \theta_1^i) - \cos(\theta_2^i - \theta_{13}^i)\right)\theta_1''$$

La matrice Coriolis :

$$C_{11,2} = C_{11,3} = C_{12,1} = C_{13,1} = C_{21,2} = C_{21,3} = C_{22,1} = C_{31,2} = C_{31,3} = C_{32,1} = C_{32,3} = C_{33,1} = C_{33,2} = 0$$

$$C_{12,3} = C_{13,2} = 3L_1(m_5x_5 + m_6L_2)\left(\cos(\theta_{13}^i - \theta_2^i) - \cos(\theta_1^i - \theta_{23}^i)\right)\theta_1''$$

$$C_{22,3} = C_{23,2} = 3\left(\frac{1}{2}\left(-Iyy_5 + Lxx_5 - m_5x_5^2 - m_6L_2^2\right)\sin(2\theta_3^i) - Lxy_5\cos(2\theta_3^i)\right)$$

Avec :

$$\theta_1'' = \frac{d\theta_1^i}{d\rho_i} = \frac{\rho_i}{a\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}$$

$$\theta_1''' = \frac{d^2\theta_1^i}{d\rho_i^2} = \frac{1}{a\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}$$

$$\frac{d\phi_i}{d\rho_i} = -\frac{H_1\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{2\sqrt{(\rho_i^2 - H_1^2)}}$$

$$\frac{d^2\phi_i}{d\rho_i^2} = \frac{H_1(E_1^2 + E_2^2)\rho_i}{2\left((E_1^2 + E_2^2)\rho_i^2 - H_1^2\right)^{3/2}}$$

Références Bibliographiques:

- [1] K. Lee and D. Shah, "Kinematic analysis of a three degree of freedom in parallel actuated manipulator," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. IV, no. 3, 1988.
- [2] F. Pierrot, «robots pleinement parallèle légers: conception, modélisation et commande,» *Thèse de l'université des sciences et techniques du Languedoc*, avril 1991.
- [3] P. W.L.V., "Position controlling apparatus". United States Patent 2,286,571, 16 Juin 1942.
- [4] A. I. N. R and T. J. Duffy, "A forward and reverse displacement analysis of a 6-dof in parallel manipulator," *Mes. Mach. Theory*, vol. 29, no. 11, pp. 115-124, 1994.
- [5] L. J.P et G. Ahmed., «Contribution à l'étude d'un nouveau robot parallèle 2-delta à 6ddl avec découplage,» *These de doctorat*, 11 05 1995.
- [6] R. CLAVEL, «ROBOYS PARALLELES,» *TECHNIQUES DE L'INGENIEUR, TRAITE MESURES ET CONTROLE*, 1994.
- [7] T. L-W, "Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs," *ARK*, pp. 401-410, 22-26 Juin 1996.
- [8] Z. P.B., D. S. P. and R. T., "The design of a 3 dof parallel robot with pneumatic drives," *In 27th Int. Symp. on Industrial Robots (ISIR)*, pp. 707-710, 6-8 Octobre 1996.
- [9] D. G. R., J. T. P. and L. A.B, "Three dof parallel robots for linear and spherical positioning," *ISRAM*, pp. 15-17, 655-660 aout 1994.
- [10] M. T and V. A., "Analysis of a closed space mechanism with three degree of mobility," *COBEM*, vol. XI, p. Rio de Janeiro, 1991.
- [11] H. J.M and e. S. F, "Star, a new concept in robotics," *ARK*, pp. 176-183, 7-9 September 1992.
- [12] H. J.M and K. M., "The novel 3-RUU wrist with no idle pair," *Workshop on Fundamental Issues and Future Research*, 3-4 Octobre 2002.
- [13] R. C, L. C. et N. N., «A parallel redundant manipulator: SPEED-R-MAN and its control,» *In ISRAM*, pages 285-291, Santa-Fe, 11-13 Novembre 1992.
- [14] N. N, «Analyse et commande d'une famille de robots manipulateurs a structure parallèle et redondante,» *Thèse de doctorat. Ecole national supérieure de l'aéronautique et de*

l'espace, Toulouse, 2 décembre 1993.

- [15] M. K. and N. K., "Parallel drive of manipulator arm," *In 8th RoManSy, pages 140-147, Cracovie, 2-6 Juillet 1990.*
- [16] N. K.E., "Robot". United States , Neos Product HB Norrtälje Suède. Patent 4,732,525, 22 Mars 1988.
- [17] T. G.S., "The GEC Tetrabot-a new serial-parallel assembly robot," *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pages 437-439,, pp. 437-439, 24-29 Avril 1988.*
- [18] M. K. and Al., "New robotic mechanism using a parallel moving platform," *In IMACS/SICE Int,Sump. On robotics, mechatronics, and manufacturing systems, pp. 425-430, 16-20 septembre 1992.*
- [19] R. L., A. Z. and F. M., "Design and singularity analysis of a 3-translational-dof in-parallel manipulator.," *ASME J. of Mechanical Design, vol. III, no. 124, pp. 419-426, Septembre 2002.*
- [20] W. P and C. D., "Kinematic analysis of a new parallel machine-tool: the Orthoglide.," *In ARK, pp. 305-314, 25-29 Juin 2000.*
- [21] H. e. D. Pham, «proc. 5th Wld cong. Theory mach. Mech. Montreal (1979)».
- [22] E. Fichter., «A Stewart Platform base manipulator general theory and practical construction.,» *The international journal of robotics research, Vol 5, N°2,été 1986.*
- [23] J. Merlet., «Parallel manipulators,» *Part 1, theory. Rapport de recherché 646, INRIA, Mars 1987.*
- [24] C. G. e. J. Angeles, «ASME J Mech. Transm. Automn. Des. 100(1), 35-41 (1988).».
- [25] W. D. P. S.Guegan., «Modélisation Dynamique d'un Robot Parallèle à 3-DDL :L'Orthoglide.,» *Institut de recherche en communication et cybernétique de nantes, BP 92101 1, rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 03, France 2007.*
- [26] P. F. Nguyen C.C., «Dynamic analysis of a 6 d.o.f. CKCM robot end-effector for dual-arm telerobotsystems.,» *Robotics and Autonomous Systems, 1989, Vol. 5, p.377-394..*
- [27] M.Ait-Ahmed, «Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles.,» *Thèse de doctorant, 1993, LAAS, Toulouse..*
- [28] H. H. G. A. Bhattacharya S., "An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type

- parallel manipulators., " *Mechanism and Machine Theory*, Janvier 1997, Vol. 32(1), p.79-89..
- [29] N. D. U. M. Bhattacharya S., «A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator.,» *Mechanism and Machine Theory*, October 1998, Vol. 33(7), p.957-964..
- [30] L. C.-X. L. C.-N. Liu M.-J., «Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator.,» *IEEE. Transaction on Robotics and Automation*, February 2000, Vol. 16(1), p.94-98..
- [31] B. E. Codourey A., «A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robot.,» *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico, U.S., 21-28 Avril 1997*, p.1612-1618..
- [32] T. L-W, «Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work.,» *Journal of Mechanical design*, March, 2000, Vol. 122, p.3-9..
- [33] B. T. Reboulet C., «Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators.,» *ICAR, Pise, Italy, 19-22 juin 1991*, p.1153-1157..
- [34] G. C. M, «Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of parallel manipulators.,» *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, New York U.S., 1993, Vol.(1)*, p.883-889..
- [35] M. T. Dasgupta B., «A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator.,» *Mechanism and Machine Theory*, Novembre 1998, Vol. 33(8), p.1135-1152..
- [36] D. B. e. C. P., «A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators.,» *Mechanism and Machine Theory*, Août 1999, Vol. 34(6), p.801-824..
- [37] J. Z., «Study of the effect of leg inertia in Stewart platform.,» *In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Atlanta, 2-6 Mai 1993*, p.121-126..
- [38] G. S. Khalil W., «A novel solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart manipulators.,» *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Washington D.C., May 2002..*
- [39] I. A. a. N. R and T. J. Duffy, "A forward and reverse displacement analysis of a 6-doof in parallel manipulator., " *IEEE*, vol. III, no. 12, pp. 123-200, 12-15 Mars 1990.

Résumé : L'usage des robots parallèles en robotique s'impose progressivement en raison de l'intérêt considérable qu'il procure en rigidité, rapidité et légèreté. ..Etc.

Pour notre part, nous avons proposé une nouvelle structure parallèle delta à 3ddl que nous avons nommé robot Delta-LRP

Nous avons pu modéliser analytiquement cette structure et introduire par la suite deux modèles géométriques complets permettant d'établir les relations entre les coordonnées de l'effecteur terminal, les variables articulaires passives et les variables articulaires actives.

Enfin, nous avons traité le modèle dynamique de notre structure, aussi bien le modèle dynamique direct et modèle dynamique inverse. Par le calcul des forces des actionneurs pour que l'organe terminal atteigne une vitesse et une accélération données la relation inverse sera aussi étudiée

Mots clés : robot delta, nouvelle structure, modèle géométrique, modèle dynamique, espace de travail

Abstract: The: use of the parallel robots in robotics is essential gradually because of the considerable interest which it gets in rigidity, speed and lightness...Etc.

For our part, we proposed a new structure parallel delta with 3dof which we named robot Delta-LRP

We could model this structure analytically and introduce two complete geometrical models thereafter allowing to establish the relations between the coordinates of the final effector, the articular variables passive and the active articular variables.

In end we treated the dynamic model of our structure, as well the direct dynamic model and dynamic model reverses by the calculation of the forces of the actuators so that the final body reaches a given speed and an acceleration the relation reverses will be also studied.

Key words: Robot Delta, New Structure, Model Geometrical, Dynamic Modeling, Workspace

ملخص: نهتم في هذه المذكرة بدراسة ربات جديد من صنف دلتا ذي ثلاث درجات حرية مستقيمة. نعطي في البداية نظرة عامة عن الروبوتات المتوازية العامة و الروبوتات المتوازية ذات ثلاث درجات حرية مستقيمة من صنف دلتا ومن خلال ذلك قمنا باقتراح نموذج جديد من صنف دلتا وفي الأخير دراسة الأنماط الهندسية ، الحركية و الديناميكية المباشرة و الغير مباشرة لهذا الروبوت.

الكلمات المفتاحية : ربات دلتا، العبارة الهندسية، العبارة التحليلية الديناميكية ، فضاء الاشتغال.