



République algérienne démocratique et populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université HADJLAKHDAR -BATNA-  
Faculté des sciences de l'ingénieur  
Département génie industriel

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

PRESENTE AU

Laboratoire d'Automatique et Productique

LAP

*En vue de l'obtention d'un diplôme de magister*

**Spécialité**

Génie Industriel

Par

**BENFARHI Amor**

**Ingénieur d'état en Génie Industriel**

Thème :

---

# **Réseaux d'automates stochastiques pour l'évaluation de performances de systèmes de production**

---

Directeur de mémoire: **Dr .N.K. MOUSS**

## **JURY**

Pr. L.H. MOUSS	MC. Université de BATNA	Président
Dr. N. K. MOUSS	MC. Université de BATNA	Rapporteur
Pr. M. DJEBABRA	Pr. Université de BATNA	Examineur
Pr. M. DJEGHABA	Pr. Université de ANNABA	Examineur
Dr. A. LOUCHENE	MC. Université de BATNA	Examineur
M. HAOUES	MA. Université de BATNA	Co-encadreur

**2012**

## Remerciements

*Je remercie DIEU tout puissant pour la santé, la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant ces années d'études.*

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'équipe gestion industrielle et logistique (GIL) du laboratoire d'automatique et productique (LAP) du département Génie Industriel - Université de Batna.*

*Je souhaiterais adresser mes premiers remerciements à ma directrice de mémoire, Dr Nadia Kinza Mouss pour avoir assuré la direction de ce mémoire et pour ses encouragements tout au long de ces années de travail.*

*Mes vifs remerciements vont également à Pr L.H. Mouss pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de mon mémoire.*

*Je suis également très honoré par la présence du Pr. M.Djeghaba, professeur de l'Université de ANNABA dans ce jury. Je lui suis reconnaissant pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.*

*Je remercie le Pr. M.Djebabra, professeur à l'institut d'Hygiène et Sécurité Industrielle de l'Université Batna, d'avoir accepté de participer à ce jury et aussi pour ses précieux conseils sur le contenu du mémoire.*

*Je veux aussi remercier le Dr A.Louchene pour avoir accepté de s'intéresser à mon travail.*

*Je ne pourrais jamais oublier de remercier M. M.Haoues pour ses conseils et pour leur disponibilité.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants du département Génie Industriel.*

*Mes remerciements vont également à l'ensemble du personnel de l'office national de l'assainissement O.N.A.*

*Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire.*

# ***Dédicace***

*JE DEDIE CE MEMOIRE :*

*A mes parents*

*A ma femme*

*A mon fils Iyed*

*A mes sœurs*

*A mes frères*

*A mes amis*

# Table des matières

Table des matières .....	i
Liste des figures .....	iv
Liste des tableaux .....	v
Liste des abréviations .....	vi
<b>Introduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre I : État de l'art</b>	
1. Introduction.....	03
2. L'évaluation des performances .....	03
2.1. Introduction a l'évaluation des performances .....	03
2.2. Méthodes d'Évaluation de Performances.....	03
2.3. Formalismes de Modélisation.....	04
3. Objectifs de ce mémoire.....	09
4. Conclusion.....	11
<b>Chapitre II : Introduction aux réseaux d'automates stochastiques</b>	
1. Introduction.....	12
2. Définition.....	12
3. Caractéristiques .....	12
4. Description des réseaux d'automates stochastiques .....	13
4.1. Description Informelle des RAS .....	13
4.1.1. Éléments d'un RAS.....	13
4.1.2. Représentation graphique des réseaux d'automates stochastiques .....	15
4.1.3. Descripteur Markovien .....	16
4.1.3.1. Modèle avec transitions locales .....	16
4.1.3.2. Modèles avec transitions locales et événements synchronisant .....	16
4.2. Description formelle des RAS .....	17
4.2.1. Définitions générales .....	17
4.2.2. RAS à temps continu .....	18
4.2.2.1. Définitions de base .....	18
4.2.2.2. Descripteur markovien .....	21
4.2.3. RAS à temps discret.....	25
4.2.3.1. Définitions de base .....	25
4.2.3.2. Construction de la chaîne de Markov équivalente .....	27
5. Conclusion .....	29
<b>Chapitre III : Modélisation des systèmes de production par les RAS</b>	
1. Introduction .....	30
2. Système de production .....	30
2.1. Définition .....	30
2.2. Les composants d'un système de production .....	30
2.3. Topologies des cellules de production .....	32
2.3.1. La cellule de production série .....	32
2.2. La cellule de production convergence stocks amont-machine .....	33
2.3. La cellule de production divergence machine-stocks aval .....	33

3. Hypothèse de travail .....	34
4. Modèles génériques de référence associés aux différents types de cellules .....	37
4.1. La cellule de production série.....	37
4.2. La cellule convergence stocks amont-machine .....	39
4.3. La cellule divergence machine-stocks aval .....	41
5. Modélisation d'un système de production manufacturier.....	43
5.1. Décomposition du système de production .....	44
5.2. La modélisation des cellules de production par les RAS .....	45
5.2.1. La première cellule de production .....	46
5.2.1.1. Description de la cellule de production .....	46
5.2.1.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	46
5.2.2. La deuxième cellule de production .....	47
5.2.2.1. Description de la cellule de production .....	47
5.2.2.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	48
5.2.3. La troisième cellule de production .....	48
5.2.3.1. Description de la cellule de production .....	48
5.2.3.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	49
5.2.4. La quatrième cellule de production .....	49
5.2.4.1. Description de la cellule de production.....	49
5.2.4.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	50
5.2.5. Les Cellules virtuelle ajoutés au système de production.....	51
5.2.5.1. Cellule virtuelle N°0.....	51
5.2.5.1.1. Description de la cellule de production .....	51
5.2.5.1.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	51
5.2.5.2. Cellule virtuelle N°5.....	52
5.2.5.1.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS.....	52
6. Algorithme de Génération Automatique de Descripteur Markovien GADM .....	52
6.1. Principe de l'algorithme .....	53
6.2. Illustration et application de l'algorithme GADM.....	54
6.2.1. Application à la première cellule.....	55
6.2.2. Application à la deuxième cellule .....	56
6.2.3. Application à la troisième cellule .....	57
6.2.3. Application à la quatrième cellule .....	58
7. Conclusion .....	60
<b>Chapitre IV: Résolution du Descripteur Markovien par les RAS</b>	
1. Introduction .....	61
2. Résolution modulaire des descripteurs Markovien .....	61
2.1. Les paramètres à propager.....	61
2.2. Principe de propagation amont aval.....	61
2.3. Hypothèses et notations.....	62
2.4. Algorithme PAMAV-RAS.....	64
2.4.1. Étape I : Initialisation .....	64
2.4.2. étape II : Propagation vers l'amont .....	65
2.4.3. étape III : Propagation vers l'aval .....	66

2.4.4. étape IV : Condition d'arrêt .....	66
2.5. Application de l'algorithme PAMAV-RAS sur l'exemple de l'étude.....	67
2.5.1. Étape I : Initialisation .....	67
2.5.2. Étape II : Propagation vers l'amont .....	69
2.5.3. Étape III : propagation des taux de dépôt vers l'aval .....	73
2.5.4. Étape IV : Condition d'arrêt.....	84
3. Conclusion.....	86

### **Chapitre V: Prédiction des performances**

1. Introduction .....	87
2. Les indicateurs de performance .....	87
2.1. Définitions .....	87
2.2. Les attributs de la sûreté de fonctionnement .....	88
2.2.1. La Disponibilité .....	89
2.2.2. La Fiabilité .....	92
2.2.3. Maintenabilité .....	92
2.3. Autres indicateurs de performance .....	93
2.3.1. La productivité .....	93
3. Tableau de bord des indicateurs de performances et de sûreté de fonctionnement.....	95
4. Conclusion .....	96
<b>Conclusion générale</b> .....	97
<b>Bibliographie</b> .....	99

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Processus d'évaluation de performance .....	04
Figure 2.1: Modèle RAS avec événement local.....	14
Figure 2.2: Modèle RAS avec événement synchronisant.....	14
Figure 3.1 : Cellule de production série .....	32
Figure 3.2 : Cellule de production demi-série Amont.....	32
Figure 3.3 : Cellule de production demi-série Aval.....	33
Figure 3.4 : Cellule de production convergence stocks amont-machine.....	33
Figure 3.5 : Cellule divergence machine-stocks aval.....	34
Figure 3.6 : Cellule série.....	37
Figure 3.7 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule série.....	38
Figure 3.8 : Cellule convergence stocks amont-machine.....	39
Figure 3.9 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule convergente	40
Figure 3.10 : Cellule divergence machine-stocks aval.....	41
Figure 3.11 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule divergente	42
Figure 3.12 : Système de production de cette étude.....	44
Figure 3.13 : Système de production décomposé.....	45
Figure 3.14 : La première cellule de production.....	46
Figure 3.15 : Modèles RAS pour la première cellule de production.....	47
Figure 3.16 : La deuxième cellule de production.....	48
Figure 3.17 : Modèles RAS pour la deuxième cellule de production.....	48
Figure 3.18 : La troisième cellule de production.....	49
Figure 3.19 : Modèles RAS pour la troisième cellule de production.....	49
Figure 3.20 : La quatrième cellule de production.....	50
Figure 3.21 : Modèles RAS pour la quatrième cellule de production.....	50
Figure 3.22 : La Cellule virtuelle $C_0$ .....	51
Figure 3.23 : Modèles RAS pour la cellule virtuelle $C_0$ .....	51
Figure 3.24 : La Cellule virtuelle $C_5$ .....	52
Figure 3.25 : Modèles RAS pour la cellule virtuelle $C_0$ .....	52
Figure 3.26 : Algorithme GADM.....	53
Figure 4.1 : Le principe de la propagation amont aval selon PAMAV-RAS.....	62
Figure 4.2 : Représentation des interactions entre les cellules.....	63
Figure 5.1 : Disponibilité opérationnelle de chaque machine.....	89
Figure 5.2 : Disponibilité propre de chaque machine.....	90
Figure 5.3 : Disponibilité totale de chaque machine.....	91
Figure 5.4 : La productivité propre de chaque machine.....	94
Figure 5.5 : La productivité opérationnelle de chaque machine.....	95

## Liste des Tableaux

Tableau 1.1 : Extrait des travaux portant sur les RdPSGSyI.....	06
Tableau 1.2 : Extrait des travaux portant sur les RdPSGSyI au niveau du LAP.....	07
Tableau 1.3 : Extrait des travaux portant sur les RAS.....	09
Tableau 1.4 : Extrait des travaux portant sur les RAS au niveau du LAP.....	09
Tableau 4.1 : Paramètres du système de production.....	63
Tableau 4.2 : Les taux de dépôt et de retrait de toutes les itérations.....	85
Tableau 4.3 : Les probabilités d'états des machines.....	86
Tableau 5.1 : Tableau de bord des indicateurs de performance.....	96

## Liste des Abréviations

<b>SdP</b>	<b>S</b> ystème <b>d</b> e <b>P</b> roduction
<b>RdP</b>	<b>R</b> éseaux <b>d</b> e <b>P</b> étri
<b>RDPS</b>	<b>R</b> éseaux <b>d</b> e <b>P</b> étri <b>S</b> tochastiques
<b>RdPSGSyI</b>	<b>R</b> éseaux <b>d</b> e <b>P</b> étri <b>S</b> tochastiques <b>G</b> énéralisés à <b>S</b> ynchronisations <b>I</b> nternes
<b>DEREC</b>	<b>D</b> Ecomposition <b>R</b> EComposition
<b>ALOSURF</b>	Atelier <b>L</b> ogiciel de <b>S</b> UReté de <b>F</b> onctionnement
<b>PdM</b>	<b>P</b> rocessus <b>d</b> e <b>M</b> arkov
<b>RdPSG</b>	<b>R</b> éseaux <b>d</b> e <b>P</b> étri <b>S</b> tochastiques <b>G</b> énéralisés
<b>PAMAV</b>	<b>P</b> ropagation <b>A</b> Mont <b>A</b> Val
<b>SdF</b>	<b>S</b> ûreté <b>d</b> e <b>F</b> onctionnement
<b>RAS</b>	<b>R</b> éseaux <b>d</b> ' <b>A</b> utomates <b>S</b> tochastiques
<b>SAN</b>	<b>S</b> tochastique <b>A</b> utomata <b>N</b> etworks
<b>GADM</b>	<b>G</b> énération <b>A</b> utomatique de <b>D</b> escripteur <b>M</b> arkovien
<b>GIL</b>	<b>G</b> estion <b>I</b> ndustrielle et <b>L</b> ogistique
<b>LAP</b>	<b>L</b> aboratoire <b>d</b> ' <b>A</b> utomatique et <b>P</b> roductique
<b>TT</b>	<b>T</b> emps <b>T</b> otal
<b>TR</b>	<b>T</b> emps <b>R</b> equis
<b>TBF</b>	<b>T</b> emps de <b>B</b> on <b>F</b> onctionnement
<b>TAP</b>	<b>T</b> emps <b>d</b> ' <b>A</b> rrêt <b>P</b> ropre
<b>NAP</b>	<b>N</b> ombre <b>d</b> ' <b>A</b> rrêt <b>P</b> ropres
<b>NPR</b>	<b>N</b> ombre de <b>P</b> ièces <b>R</b> éalisées
<b>DO</b>	<b>D</b> isponibilité <b>O</b> opérationnelle
<b>DP</b>	<b>D</b> isponibilité <b>P</b> ropre
<b>DT</b>	<b>D</b> isponibilité <b>T</b> otale
<b>IO</b>	<b>I</b> ndisponibilité <b>O</b> opérationnelle
<b>IP</b>	<b>I</b> ndisponibilité <b>P</b> ropre
<b>IT</b>	<b>I</b> ndisponibilité <b>T</b> otale
<b>FP</b>	<b>F</b> réquences des arrêts <b>P</b> ropres
<b>TF</b>	<b>T</b> emps de <b>F</b> onctionnement <b>M</b> oyen
<b>TPM</b>	<b>T</b> emps de <b>P</b> anne <b>M</b> oyen
<b>PP</b>	<b>P</b> roductivité <b>P</b> ropre
<b>PO</b>	<b>P</b> roductivité <b>O</b> opérationnelle

## Introduction Générale

Avec la mondialisation et la globalisation des échanges marchands, l'unité de production doit aujourd'hui faire face à plusieurs contraintes, comme les délais, la qualité et la complexification des produits, etc. Ces différentes contraintes rendent les systèmes de productions très complexes.

Face à ces contraintes, les études d'évaluation des performances des systèmes de production est devenue obligatoire pour les industriels et ceci pour des raisons aussi bien de coût que de productivité. Ces études doivent être réalisées dès la phase de conception. Aussi, l'évaluation des performances est une étape clé dans n'importe quelle étude de conception. En se basant sur les résultats de l'évaluation des performances, il est possible de prendre des décisions et de réaliser des compromis pour l'optimisation du système de production global.

Aussi pour réaliser une étude d'évaluation des performances, Il est nécessaire de posséder une représentation du système à étudier, c'est-à-dire un modèle. L'extraction des paramètres de performances se fait alors soit par simulation, soit par analyse. Dans notre travail, nous ne nous intéressons qu'aux méthodes analytiques, qui sont des outils d'évaluation des performances permettant une simplification du modèle et proposant des solutions dans des délais très courts.

Pour cela, l'outil de modélisation choisi doit permettre de simplifier les modèles et de représenter les mécanismes particuliers des systèmes de production les plus fréquemment rencontrés telle que la synchronisation et le parallélisme.

Dans la littérature, peu nombreux sont les outils correspondant à ces exigences. Parmi eux on trouve, les Réseaux de Pétri Stochastique (RdPS) largement utilisés dans la SdF des SdP. En effet, ils offrent à la fois une puissance de description des systèmes et une richesse de traitement et d'interprétation des modèles résultants. De plus, comme ils intègrent un aspect stochastique, ils permettent de prendre en compte des notions aussi aléatoires tel que le taux de panne d'une machine, Cependant, la complexité des systèmes manufacturiers actuels est telle, que l'utilisation classique de ces outils présente certaines limites. Son principal inconvénient est qu'il nécessite la génération du graphe de marquage accessibles par les RdPS qui, pour des systèmes complexes, peut être d'une part très longue, et d'autre part conduire à des processus de Markov contenant un nombre d'états trop élevé pour être analysés directement.

Pour contourner ce problème, nous proposons l'utilisation d'un nouveau formalisme pour la modélisation des systèmes de production manufacturier à haut niveau. Où le système est représenté sous forme de sous-systèmes qui interagissent, cet outil est appelé réseaux d'automates stochastiques, introduit au début des années 80 par Brigitte Plateau ils sont appliqués principalement dans les systèmes informatique et de télécommunication parallèles.

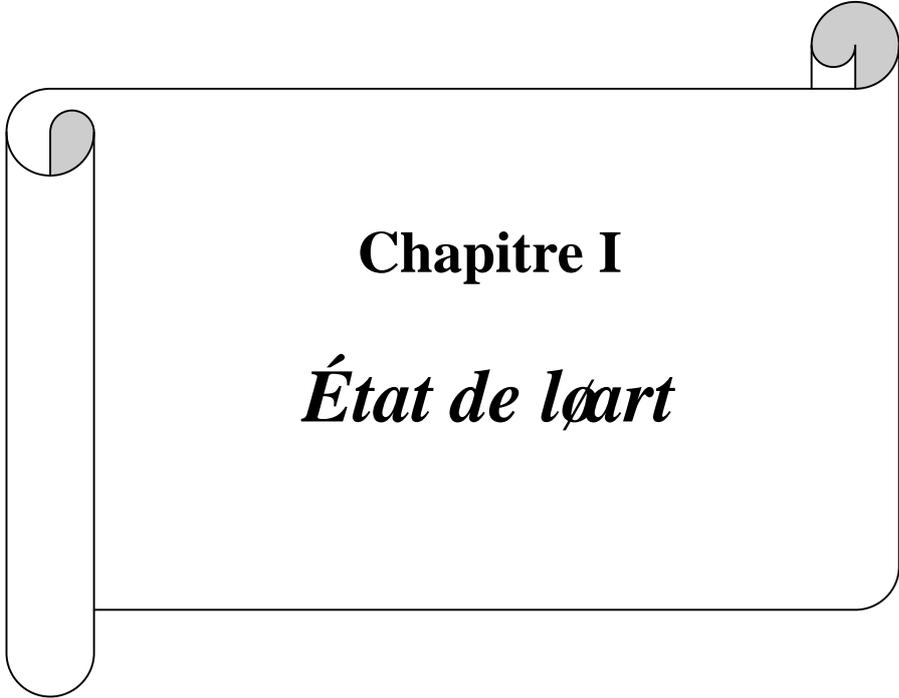
Avec cet outil, on va faire la modélisation modulaire et fonctionnelle pour opérer une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle du système de production, les différents modules résultants de cette modélisation modulaire sont synchronisés entre eux par le biais des événements synchronisant.

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique et Productique (LAP) de l'université de Batna, ce thème a été proposé par Dr.N.K.Mouss et M. Haoues.

Notre premier objectif consiste à modéliser les systèmes de productions manufacturiers par le formalisme des réseaux d'automates stochastiques.

Le mémoire est divisé en cinq chapitres :

- Dans le premier chapitre nous présentons un état de l'art des recherches sur les différents outils de modélisation utilisés pour l'évaluation des performances des systèmes de production.
- Le deuxième chapitre se concentre sur la présentation du formalisme des réseaux d'automates stochastiques.
- Le troisième chapitre traite l'approche modulaire par les RAS. Nous donnons des modèles génériques de référence pour chaque cellule du SdP. A partir de ce modèle, on va générer les descripteurs markovien pour chaque cellule.
- Dans le but de pouvoir analyser les performances de systèmes de production, nous proposons dans le quatrième chapitre une méthode de résolution numérique permettant de calculer la distribution stationnaire du modèle markovien de chaque cellule du système de production.
- Le cinquième chapitre traite des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production. Dans ce chapitre nous avons détaillés ceux que nous pouvons extraire à partir des résultats obtenus par l'analyse markovienne.



# **Chapitre I**

## ***État de l'art***

## **1. Introduction :**

L'objectif de notre travail est d'évaluer les performances des systèmes de production, ces systèmes de production ont connu et connaissent toujours une évolution rapide due au développement technologique, à cause de ce progrès ces derniers sont devenus de plus en plus complexes, aussi leur modélisation est devenue très complexe, et ce qui rend la résolution et l'analyse des modèles très longue et difficile.

Notre travail porte sur une modélisation modulaire pour faciliter l'évaluation des performances des systèmes de production manufacturiers complexes. Pour cela, nous présentons dans ce chapitre un état de l'art des travaux de recherches sur les différents outils de modélisation utilisés pour l'évaluation des performances des SdP.

## **2. L'évaluation des performances :**

La modélisation et l'évaluation des performances des SdP restent une préoccupation principale des différentes communautés scientifiques et en particulier celle du génie industriel. Aussi Ceci nécessite l'utilisation de méthodes permettant de décrire l'évolution des facteurs de performance du système et en fonction de cela de décider s'il est nécessaire de modifier le système pour améliorer ses performances ou non.

### **2.1. Introduction à l'évaluation des performances :**

L'évaluation des performances s'intéresse au calcul des indices de performance d'un système. Ces indices changent d'un système à l'autre.

L'évaluation des performances d'un SdP peut se faire à deux phases :

- En conception : Quand le système n'existe pas.
- En exploitation : Pour modifier ce système.

### **2.2. Méthodes d'évaluation de Performances :**

L'évaluation des performances se fait en deux étapes, une étape de modélisation et une étape d'analyse des performances. (Figure 1.1).

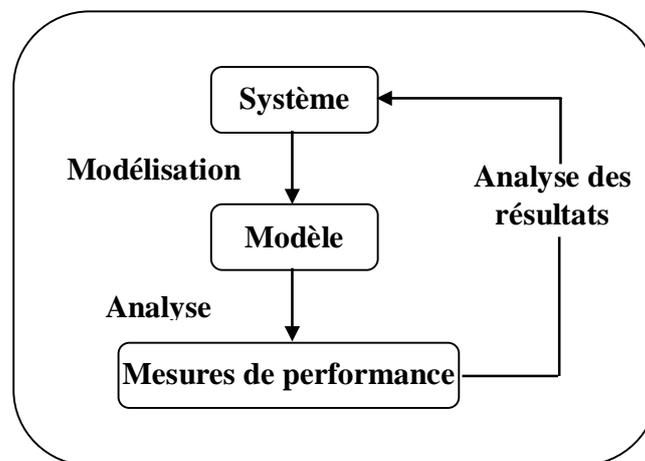
#### 1. La modélisation :

La modélisation est une abstraction mathématique d'un système réel, elle consiste à représenter un système réel par un modèle mathématique. Un modèle détaillé donne des résultats précis mais il présente une difficulté à l'analyse et l'inverse pour un modèle moins détaillé (résultats peu précis mais une analyse facile).

## 2. L'analyse :

On distingue deux types d'analyse :

- Analyse qualitative qui permet la vérification d'une manière précise des propriétés comportementales et structurelles du système telle que le non blocage, la vivacité ...etc.
- Analyse quantitative s'intéresse au calcul des indices de performance. On distingue deux familles de méthodes d'analyse quantitative : Par simulation, Par outils analytique.



**Figure 1.1 :** *Processus d'évaluation de performance*

Les outils reconnus pour l'évaluation des performances des systèmes de production sont la simulation et les outils analytiques tels que les chaînes de Markov, les réseaux de files d'attente, les réseaux de Pétri stochastiques, etc.

Nous effectuons dans ce qui suit un tour d'horizon des principaux formalismes de modélisation couramment utilisés en évaluation des performances.

### **2.3. Formalismes de Modélisation :**

Historiquement, les recherches en modélisation et évaluation de performances sont toujours deux sujets très liés. En général, la modélisation permet de représenter un système de production par des paramètres et de considérer les relations entre ces différents paramètres.

Les travaux les plus anciens viennent de l'analyse directe des processus stochastiques [Trivedi, 82] et plus généralement des chaînes de Markov [Stewart, 94]. Ce formalisme des chaînes de

Markov est un des formalismes de modélisation le plus ancien et aussi un des plus employés dans l'évaluation de performance.

Vers la fin des années 50, Jackson a développé une nouvelle approche basée sur les réseaux de files d'attente [Jackson, 57] et [Jackson, 63]. Les recherches dans ce domaine ont connu un formidable essor jusqu'à la fin des années 70, ce formalisme est devenu très populaire à la fin des années 80, notamment avec les travaux de [Little, 61] et [Baskett, 75].

Le domaine d'application des réseaux de files d'attente classiques est toutefois assez limité. Pour traiter des problèmes plus complexes comme la synchronisation.

De manière à répondre à la complexité des nouvelles générations de systèmes de production, plusieurs techniques et formalismes de modélisation de haut-niveau ont été développés au cours des dernières années. La forme structurée de ces formalismes de haut-niveau permet de prendre en compte l'aspect compositionnel et hiérarchique des systèmes.

Un grand nombre d'approches a adopté les Réseaux de Pétri (RdP) comme formalisme de base qui permet de modéliser le comportement de systèmes et de capturer divers phénomènes qui les caractérisent. Des extensions ont été ajoutées aux RdP comme par exemple les réseaux de Pétri stochastiques (RDPS) [Florin, 85] qui sont souvent utilisés pour la modélisation et l'évaluation de performances des systèmes de production (avoir un modèle avec lequel on peut faire à la fois une analyse qualitative et quantitative). Plusieurs travaux, faisant l'étude de cet outil, ont été proposés. Nous pouvons les classer en trois classes :

**1. Méthodes de transformation des RDPS, de décomposition et d'agrégation des états du RDPS** [Dutheillet, 89], [Dutheillet, 92], [Henderson, 89].

Les travaux de [SALMI, 01] ont introduit une nouvelle méthode d'analyse des RDPS non bornés. Cette méthode s'appuie sur une technique de décomposition du RDPS en des sous-réseaux ayant au plus une place non bornée et analysables, soit à l'aide de la méthode matricielle géométrique de [Haverkort, 95], ou bien à l'aide de la méthode d'approximation stochastique définie en [Salmi, 00].

**2. Méthodes de calcul de solutions en forme produit, s'inspirant des techniques d'analyse des files d'attente** [Donatellia, 91], [Florin, 88], [Florin, 89].

**3. Méthodes de calcul des bornes consistant à rechercher des solutions approchées** [Truffet, 95], [Zuberek, 89].

Face à la complexité des systèmes de production manufacturiers actuel, l'utilisation des outils classique présente certaines limites. En effet, le processus de Markov obtenus pour ces systèmes complexes présente un nombre d'états important qui rend leur analyse très longs (voir même impossibles). Pour contourner ce problème, plusieurs travaux ont utilisé les structures modulaires des systèmes de production pour opérer une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle. Dans ce sens, plusieurs travaux ont utilisés un nouvel outil qui permet de réaliser une modélisation modulaire et fonctionnelle d'un système. Cet outil est appelé Réseaux de Pétri Stochastiques Généralisés à Synchronisations Internes (RdPSGSyI). Parmi ces travaux on cite :

Un extrait de ces travaux est résumé par le tableau suivant.

<i>Auteur</i>	<i>Résumé des travaux</i>
[Olivier, 95]	<p>Il a proposé une méthode approchée dédiée aux systèmes de production manufacturiers et s'appuyant sur certaines de leurs caractéristiques. C'est une méthode très rapide, car elle réduit considérablement les dimensions des systèmes à analyser et, de plus, conserve le sens de variation. Ces deux points lui permettent, d'une part, de fournir des résultats sur des systèmes pour lesquels les méthodes traditionnelles sont inefficaces et, d'autre part, d'effectuer une analyse de sensibilité.</p> <p>Il a adopté une démarche de type décomposition mais avec une philosophie ascendante. Dans ce but, un nouvel outil appelé Réseaux de Pétri Stochastiques Généralisés à Synchronisations Internes a été mis au point. Il permet une description modulaire et fonctionnelle d'un système. Le système est représenté par modules dont les fonctionnements dépendent de signaux qu'ils s'échangent entre eux.</p> <p>Lors du passage à la représentation markovienne. Il a regroupé plusieurs modules entre eux afin de créer une cellule. Ce regroupement s'appuie sur un algorithme qui permet d'obtenir une représentation markovienne de la cellule. C'est l'algorithme de décomposition recomposition qui permet d'effectuer simultanément le regroupement des modules en cellules et le calcul des processus de Markov qui leur sont associés.</p> <p>Concernant le calcul de la distribution stationnaire du modèle markovien cellulaire, il a présenté un algorithme de résolution itératif qui s'appuie sur les spécificités des systèmes de production et sur les propriétés du régime permanent des processus de Markov.</p> <p>Enfin, il a effectué le calcul des attributs de la sûreté de fonctionnement sur un exemple et les résultats son comparés à ceux obtenus par une analyse traditionnelle.</p>
[Sassine, 98] Et [Simeu, 98]	<p>Ces travaux s'intéressent à l'étude et à l'intégration de la fonction maintenance dans les systèmes de production manufacturiers dans le but d'accroître leurs performances. Trois politiques de maintenance ont été considérées (corrective, préventive et mixte). L'approche de modélisation modulaire proposée, qui découpe le système étudié en plusieurs cellules élémentaires, est basée sur les réseaux de Pétri stochastiques et les processus de Markov.</p> <p>Il a donné une représentation modulaire et fonctionnelle du système de production manufacturier. L'obtention de résultats quantitatifs par l'analyse nécessite le passage à une autre représentation plus adapté, c'est-à-dire le processus de Markov. Pour générer le modèle markovien il a utilisé une méthodologie baptisé DEREK (DEcomposition Recomposition) ; il décompose le système complet en plusieurs modules, il modélise chaque module à part, ensuite il recompose ces différents modules enfin il déduit le PdM de tout le système.</p>

**Tableau 1.1** : Extrait des travaux portant sur les RdPSGSyI

Dans le même axe de recherche, d'importants travaux ont été réalisés au niveau de l'équipe de recherche GIL (Gestion Industrielle et Productique) du LAP (Laboratoire d'Automatique et Productique) de l'université de Batna (Département de Génie Industriel). Parmi eux on cite :

<i>Auteur</i>	<i>Résumé des travaux</i>
<b>[Fritas, 05]</b>	Il a choisi la méthode KANBAN comme méthode de gestion de production et les Réseaux de Pétri comme outil de modélisation. L'objectif de cette étude est en effet l'amélioration de la gestion des systèmes de production, avec le dilemme : Limitation de la taille des stocks est la bonne satisfaction des demandes. Pour cela, il a utilisé les RdP aux quel il a associé un mécanisme de décision, basé sur les critères Kanban, consécutif aux perturbations de type panne machine.
<b>[Haoues, 05] et [Haoues, 07]</b>	Ces travaux traitent de la modélisation et l'évaluation de performances des SdP à événement discrets par approche analytique. Ainsi il traite le problème de la disponibilité et de la productivité d'un SdP face à un événement non attendu dû à une perturbation interne de type panne-machine. Pour cela, il a utilisé une approche consiste à l'utilisation conjointe et complémentaire de l'outil Réseau de Pétri Stochastique Généralisés à Synchronisations Internes (RDPSGSyI) et les processus de markov (PdM). Chaque élément du SdP est représenté par un RdPSG où les liens de synchronisation entre machine et stock sont réalisés par des émissions et réceptions de signaux. Il a appliqué l'algorithme de DEcomposition- REComposition baptisée DEREK pour générer le PdM simplifié de chaque cellule élémentaire. Pour la phase résolution il a utilisé l'algorithme PAMAV pour trouver les résultats finaux des vecteurs de distribution stationnaire de chaque cellule.
<b>[Benferroudj, 10]</b>	Dans ce travail elle a profité de la structure modulaire du SdP pour opérer une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle. Dans ce cas la, elle a utilisé les Réseaux de Pétri Stochastique Généralisés à Synchronisation Internes (RdPSGSyIs). Ces derniers permettent de réaliser une modélisation modulaire et fonctionnelle. Chaque fonctionnalité du système est décrite par un RdPSG et, ces différents réseaux sont synchronisés entre eux par le biais d'émissions/réceptions de données. Les signaux de synchronisation sont émis par les places lorsqu'elles contiennent au moins une marque et sont reçus par les transitions. Pour générer le PdM d'un RdPSGSyI, synchronisés entre eux. Elle a utilisé l'algorithme de DEcomposition- REComposition baptisée DEREK afin de déduire les chaînes de Markov relatives à chaque cellule élémentaire. Ensuite, pour calculer la distribution stationnaire du système complet. Elle a choisie une méthode de calcul itératif basée sur la propagation des fréquences moyennes de franchissement des transitions de fin d'usinage des machines vers les cellules en aval, ce qui représente les taux moyens de dépôts dans le stock aval. De même, les fréquences moyennes de franchissement des transitions de chargement des machines à propager vers l'amont, soit les taux moyens de retrait du stock amont. Les résultats obtenus, par l'analyse markovienne permettent d'en déduire quelques indicateurs de SdF.

**Tableau 1.2 :** Extrait des travaux portant sur les RdPSGSyI au niveau du LAP

Tous ces travaux ont suivi une approche modulaire qui nous semble être intéressante lors de la modélisation par des RdPS. Pour notre travail, nous souhaitons suivre la même démarche des travaux présentés précédemment, mais avec l'utilisation d'un autre outil de modélisation,

pour cela nous nous sommes intéressés au formalisme de modélisation modulaire très puissant, les Réseaux d'Automates Stochastiques (RAS).

Le formalisme des Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN - Stochastique Automata Networks) permet à la fois de structurer l'approche par composants (automates) et de modéliser les délais.

Dans la majorité des travaux, le formalisme RAS est employé pour la modélisation et l'évaluation de systèmes informatiques parallèles et distribués. Parmi ces travaux on cite :

<i>Auteur</i>	<i>Résumé des travaux</i>
<b>[Mokdad, 97]</b>	Pour pallier aux problèmes de complexité en temps et en espace de la résolution numérique des grandes chaînes, elle a étudiée les propriétés structurelles du graphe de la chaîne, par l'utilisation du principe de réduction des états. Une diminution appréciable de la complexité de résolution peut être obtenue. Elle a ensuite appliqué cette technique aux RAS.
<b>[Fernandes, 98]</b>	Le but de cette thèse est de proposer des techniques numériques visant à optimiser les méthodes itératives d'évaluation de performances de modèles Markoviens. Ces techniques s'appliquent à des modèles où la matrice de transition de la chaîne de Markov associée est stockée sous un format tensoriel. Dans cette thèse le formalisme RAS est employé pour la description des modèles. L'évaluation de performances cherchée est la détermination de l'état stationnaire de la chaîne de Markov. Ils ont définis une algèbre tensorielle généralisée et démontrent des propriétés qui servent de base aux algorithmes de résolution de la chaîne de Markov. Le principal apport de cette thèse réside dans l'efficacité des ces algorithmes qui sont de type itératif. Ceci est fait à deux niveaux : la réduction du coût de chaque itération et la réduction du nombre d'itérations nécessaire à la convergence.
<b>[Benoit, 03]</b>	La problématique de son thèse de doctorat concerne l'évaluation des performances des systèmes informatiques parallèles et distribués à grand espace d'états. L'objectif est d'améliorer les formalismes existant, ainsi que les méthodes et algorithmes, dans le but de pouvoir traiter des modèles de plus en plus complexes. Cette thèse présente le formalisme des RAS à temps continu, et propose un nouveau formalisme pour modéliser les systèmes à temps discret. Le principal objectif de ces travaux consiste à améliorer les méthodes et algorithmes existants sur le formalisme SAN, dans le but de pouvoir évaluer les performances de systèmes informatiques à grand espace d'états. L'évaluation de performance cherchée réside dans la détermination de l'état stationnaire de la chaîne de Markov. Elle a utilisée pour cela des méthodes itératives, et l'opération de base est la multiplication d'un vecteur par le descripteur du RAS. Les coûts de cette opération sont souvent très élevés lorsque l'espace d'états est grand, tant au niveau du temps d'exécution que de la place mémoire utilisée. Elle a présentée des améliorations de l'algorithme classique en tenant compte du fait que dans de nombreux modèles, la proportion d'états accessibles est faible. Les méthodes et algorithmes développés au cours de la thèse ont été implémentés dans le logiciel PEPS 2003. Ils ont défini aussi dans [Benoit, 05] un formalisme de RAS pour les modèles à temps discret qui gère des événements en conflit, et ils ont proposés un algorithme de génération de la chaîne de Markov équivalente à partir du RAS.
<b>[Brenner, 08]</b>	Leonardo Brenner et Brigitte Plateau ont testés l'efficacité de méthodes de détection du régime stationnaire pour l'analyse de la disponibilité ponctuelle des grands modèles.

<i>Auteur</i>	<i>Résumé des travaux</i>
[Afonso, 09]	<p>Dans cette thèse de doctorat il est intéressé, à l'évaluation de performance pour la première phase du cycle de vie du système. Plus particulièrement à la conception des systèmes informatiques parallèles et distribués. L'objectif de son thèse consiste à proposer des méthodes pour la génération de l'espace d'états atteignables de modèles compositionnels à temps continu qui utilisent des taux fonctionnels.</p> <p>Au cours de cette thèse il a donné des présentations et des définitions du formalisme des RAS à temps continu afin de proposer des méthodes pour la génération de l'espace d'états atteignables de modèles décrits par ce formalisme. Ensuite il a présenté les définitions et notations du formalisme des RAS à temps discret, ainsi que la proposition d'une algèbre tensorielle adaptée à la composition parallèle de ce formalisme, afin de présenter une méthode de multiplication d'un vecteur par le descripteur d'un modèle décrit par les RAS à temps discret.</p>

**Tableau 1.3 :** Extrait des travaux portant sur les RAS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire rentre dans le cadre des travaux de recherche de l'équipe GIL (Gestion Industrielle et Logistique) du Laboratoire d'Automatique et Productique (LAP). Un des axes de recherche de cette équipe est les Réseaux d'Automates Stochastiques pour l'évaluation de performance des systèmes de production. Ce thème a été proposé par Dr.N.K.Mouss et M. Haoues. Plusieurs étudiants ont travaillé avec nous et on a partagé le même axe de recherche :

<i>Auteur</i>	<i>Résumé des travaux</i>
[Titah, 09] et [Driss, 09]	<p>Ils ont proposé quelques exemples pédagogiques des systèmes de production pour illustrer et tester la possibilité de modélisation des SdP par les RAS. A travers ces exemples les étudiants ont présentés les différents types d'interaction entre les sous-systèmes.</p> <p>Les systèmes de production modélisés sont :</p> <p>Un système de production avec palettisation qui utilise seulement la synchronisation.</p> <p>Un système de production composé par R cellules élémentaires identiques, chaque cellule est constitué d'une machine et d'un stock (<math>M_n \otimes S_n</math>). Chaque machine ne peut traiter qu'une seule pièce à la fois. Les stocks sont de capacité finie <math>c_n</math>. Cet exemple présente une modélisation avec un mécanisme de blocage et priorité (la modélisation de nombre de pièces).</p> <p>Dans le travail [Titah, 09] a modélisé que l'état de stock, plus précisément l'état des stocks amont des machines.</p>

**Tableau 1.4 :** Extrait des travaux portant sur les RAS au niveau du LAP

### 3. Objectifs de ce mémoire :

Dans la présentation précédente nous avons fait un balayage sur les différents travaux en modélisation et prédiction de performances.

Lorsqu'on parle de simplicité, de lisibilité, une idée s'impose, pourquoi ne pas remplacer un grand modèle complexe et lourd par un ensemble de petits modèles plus simples à analyser ?

[Olivier, 95] par l'utilisation de l'approche RdPSGSyI ne cherche pas à générer des systèmes décomposables mais directement des systèmes décomposés. Donc l'application de cet outil sur les systèmes de production permet alors une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle. Dans notre travail nous supposons qu'un système de production est composé par un ensemble de cellules élémentaires de plusieurs types. Pour cela, [Simeu, 98] dans son HdR a présentée les différents types de cellules les plus souvent rencontrés dans les systèmes de production manufacturiers, qui seront la base pour la phase de décomposition de n'importe quel système de production (chapitre 3).

Pour la phase de décomposition fonctionnelle, nous suivons une approche modulaire basée non pas sur les RdP mais sur les RAS.

Les différents modules résultants de la modélisation modulaire avec cet outil sont synchronisés entre eux par le biais des événements synchronisants. Nous présentons la modélisation des systèmes de production soumis à des paramètres aléatoires (tels que les pannes ou les réparations, etc.).

L'obtention des résultats quantitatifs par l'analyse nécessite le passage à une autre représentation plus adaptée, c'est-à-dire les matrices de transition pour chaque modèle plus précisément pour chaque partie du modèle (la partie locale et la partie synchronisante), puis nous déduisons les descripteurs markovien cellulaires.

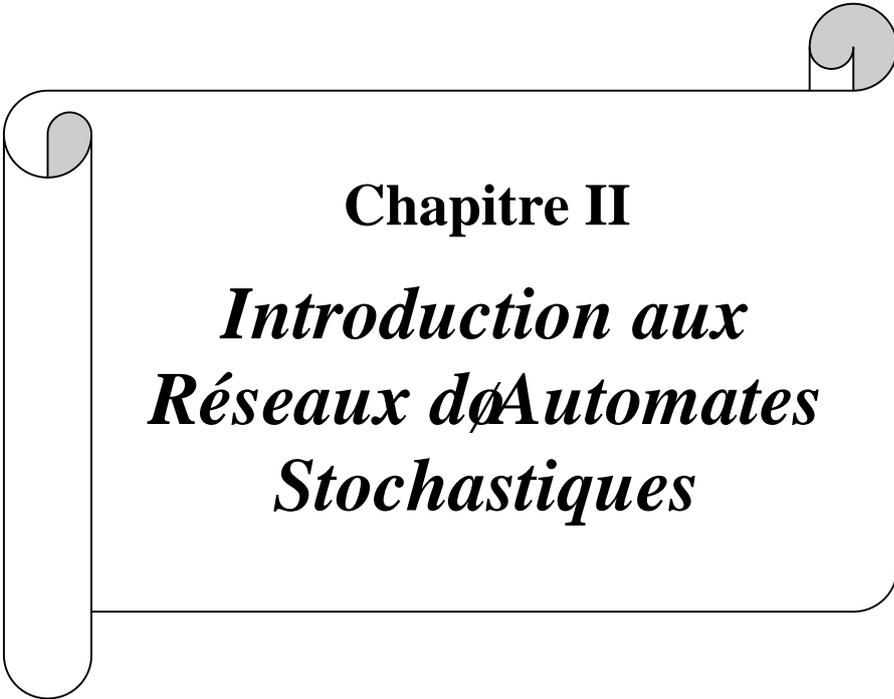
Donc, on ne calcule pas le descripteur markovien du système global, parce que le moindre accroissement de la complexité du système de production se traduit par une explosion du nombre d'états des modèles RAS. Pour contourner ce problème d'explosion combinatoire, nous utilisons une méthode du calcul itératif basée sur la propagation des informations d'une cellule vers une autre.

En effet, la forme cellulaire obtenue après découpage est telle que chaque cellule interagit fortement avec celles qui la précèdent ainsi qu'avec celles qui la suivent les unes parce qu'elles alimentent en pièces ses stocks d'entrée, les autres parce qu'elles puisent des pièces dans ses stocks de sortie. Cette forte interaction impose que la méthode de résolution soit du type itérative car seules les méthodes itératives sont capables, au cours des passages successifs, de véhiculer les contraintes d'une cellule à une autre. Cette méthode permet de calculer la distribution stationnaire du modèle markovien pour le système de production global.

Le long de ce chapitre, nous avons rappelé les méthodes et outils d'évaluation des performances des systèmes en termes de probabilités d'états de composants du SdP (stocks en amont, machines et stocks aval). Cependant, l'achèvement de cette évaluation n'est possible qu'avec la traduction des probabilités sous forme d'indicateurs significatifs dont l'analyse constitue une aide à la prise de décision.

#### **4. Conclusion :**

Un état de l'art de certains travaux traitants de la modélisation et l'évaluation des performances des systèmes de production a été présenté. Ce qui nous a permis de choisir le formalisme RAS pour la modélisation du système de production choisi pour notre étude.



**Chapitre II**

*Introduction aux  
Réseaux d'Automates  
Stochastiques*

**1. Introduction :**

Les réseaux d'automates stochastiques restent parmi les outils de modélisation les moins développés. Les recherches sur les RAS ont été introduites par Brigitte Plateau dans les années 80 [Plateau, 84].

Ces réseaux sont basés sur l'idée que le système modélisé peut se décomposer sous la forme de plusieurs sous-systèmes. Chacun de ces sous-systèmes peut évoluer indépendamment et peut interagir avec les autres en se synchronisant ou en faisant varier la valeur de ses transitions en fonction des états des autres sous-systèmes, ce comportement étant typiquement celui d'un système parallèle.

Dans ce chapitre, nous détaillons cet outil et nous montrons comment un système est décrit par un RAS.

**2. Définition :**

- Les RAS [Plateau, 91] est un formalisme de haut niveau qui permet la modélisation des systèmes complexes à grand espace d'états.
- Un RAS est constitué d'un ensemble d'automates. Chaque automate est ainsi caractérisé par un ensemble d'états et un ensemble de transitions, étiquetées par des événements, qui permettent de changer l'état de l'automate [Fernandes, 94].

**3. Caractéristiques :**

- Avec le formalisme des RAS nous pouvons décrire des modèles équivalents à des chaînes de Markov sans pour autant tomber dans les difficultés habituelles.
- Les RAS réduisent énormément les besoins de stockage de la matrice de transition de la chaîne de Markov équivalente.
- Les RAS permettent d'avoir une vision modulaire du système étudié, et de modéliser ensuite les interactions entre les différentes composantes du système.
- Les RAS permettent de modéliser efficacement le comportement dynamique d'un système en spécifiant l'ensemble de toutes les transitions possibles entre les différents états de ce système.

#### 4. Description des réseaux d'automates stochastiques :

Pour une meilleure description des RAS, Nous présentons d'abord le formalisme de façon informelle [Benoit, 03], [FERNANDES, 98], [Afonso, 09], sans préoccupation théorique, ensuite, une description formelle est rappelée [Plateau, 85].

##### 4.1. Description Informelle des RAS :

Le principe de base des RAS, est la description d'un système comme un ensemble de sous-systèmes. Chacun de ces sous-systèmes est modélisé comme un automate stochastique. L'interaction entre les sous-systèmes est modélisée par des règles établies entre les états internes de chaque automate.

Nous décrirons dans ce qui suit les réseaux d'automates stochastiques de façon informelle [Benoit, 03], [FERNANDES, 98], [Afonso, 09], pour comprendre l'outil de modélisation.

##### 4.1.1. Éléments d'un RAS :

Nous présenterons tout d'abord la notion d'automates, d'états et d'événements, qui sont à la base des RAS.

###### ★ Automate :

Est un ensemble d'états reliés entre eux par un ensemble de transitions, ces transitions sont étiquetées par des événements.

###### ★ L'état global :

L'état d'un RAS est défini comme la combinaison de tous les états internes de chaque automate.

###### ★ L'état interne (local) :

Ces états correspondent aux différents états possibles du sous-système modélisé par l'automate.

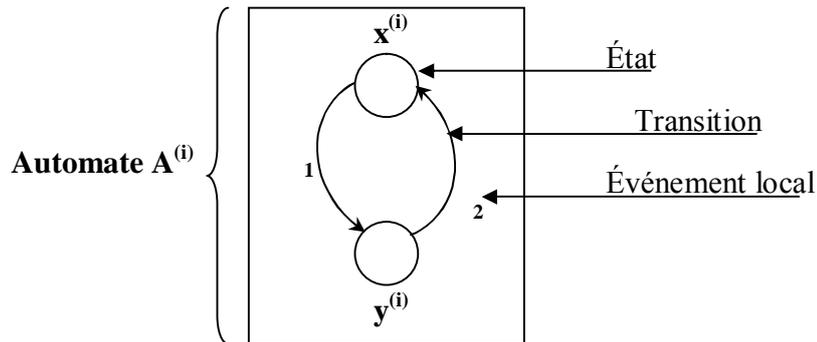
###### ★ L'évènement :

Chaque transition est étiquetée par un événement, qui permet de changer l'état interne d'un ou de plusieurs automates.

On a deux types d'évènement ; l'évènement local et l'évènement synchronisant.

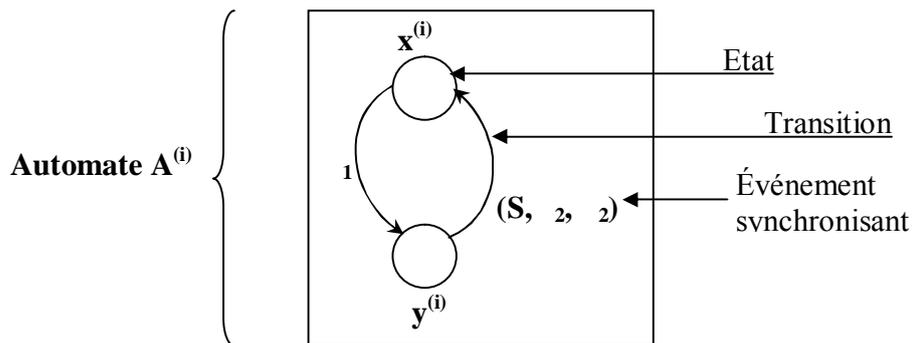
- a. **l'évènement local** : Présente le changement de l'état interne d'un seul automate (il concerne qu'un seul automate).

Un taux de franchissement est associé à chaque événement local (figure 2.1).



**Figure 2.1:** *Modèle RAS avec événement local*

**b. événement synchronisant :** changement simultané de l'état interne de plusieurs automates (au moins deux automates). L'exemple de la figure 2.2 possédant un événement synchronisant.



**Figure 2.2:** *Modèle RAS avec événement synchronisant*

★ **Transition :**

Chaque automate est caractérisé par un ensemble de transitions.

Dans les RAS on a trois types de transitions

**a. transition locale :**

Chaque transition locale possède un taux de franchissement, c'est-à-dire les arcs ont comme étiquette le taux de franchissement correspondant à la transition.

**b. transition synchronisée :**

- Un événement synchronisant est associé à un ensemble de transitions synchronisées.
- Un taux de franchissement doit être associé à chaque transition synchronisée.

- La synchronisation dans le RAS peut aussi être vue comme une relation de type maître esclave. Dans ce cas, un des automates est arbitrairement choisi comme maître (ou principal) et les autres comme esclaves (ou secondaires).
- Les transitions synchronisées ont besoin d'une structure plus complexe qu'un simple taux de transition, cette structure est appelée triplet de synchronisation.

Ce dernier est composé de :

- L'identificateur de l'événement synchronisant,
  - Un taux de franchissement,
  - Une probabilité d'occurrence.
- Les étiquettes des arcs de l'automate maître possèdent des taux correspondants à l'occurrence de l'événement synchronisant. Les étiquettes des arcs des automates esclaves auront des taux égaux à un (1).
  - Un automate peut être choisi comme maître d'un événement et comme esclave d'un autre.
  - En plus du taux associé à l'événement synchronisant, les transitions causées par un même événement synchronisant partant d'un même état local, doivent posséder une probabilité de choix entre elles. La somme de ces probabilités doit être égale à un (1).

### **c. Transition fonctionnelle :**

Une transition fonctionnelle possède un taux de franchissement variable. Ce taux, est une fonction de l'état interne d'autres automates.

### **4.1.2. Représentation graphique des réseaux d'automates stochastiques :**

Pour représenter graphiquement un RAS, on suit les étapes suivantes :

- ▲ On peut associer un graphe à chaque automate.
- ▲ Les cercles du graphe correspondent aux états locaux de l'automate,
- ▲ Les transitions sont représentées par des arcs (flèches),
- ▲ Les arcs sont étiquetés par une liste d'événements.
- ▲ Si plusieurs événements distincts produisent le même changement d'état local dans un automate. Alors, nous avons formellement une transition par événement, et l'arc du graphe représente toutes ces transitions en même temps.

### 4.1.3. Descripteur Markovien :

Le descripteur markovien selon [Haïscam, 01], [Benoit, 03] et [Fernandes, 98] est le nom donné au générateur infinitésimal de la chaîne de Markov associé au système de production.

Le concept de descripteur Markovien se base sur l'algèbre tensorielle. Ce descripteur facilite le passage à une description compacte du générateur infinitésimal correspondant à la chaîne de Markov.

Nous donnons les différents cas possibles concernant les modèles des RAS pour le calcul du descripteur markovien.

#### 4.1.3.1. Modèle avec transitions locales :

➤ **Matrice de transition locale :**

On associe à chaque automate ( $A^{(i)}$ ) une matrice de transition locale ( $Q_i^{(i)}$ ).

➤ **Générateur de l'automate équivalent « Q » :**

C'est l'équivalent à la somme tensorielle des matrices de transition locales des automates  $A^{(i)}$ .

$$Q = Q_i = \bigoplus_{i=1}^n Q_i^{(i)}$$

#### 4.1.3.2. Modèles avec événements synchronisant :

Chaque événement synchronisant du modèle correspond à une paire de matrices pour chaque automate.

- La première matrice, appelée matrice positive  $Q_{s^+}^{(i)}$  (exprime les taux positifs), elle décrit l'occurrence de l'événement synchronisant.

**Caractéristiques de la matrice positive :**

- Elle est dite *positive* car ne contenant que des termes positifs.
- Les matrices positives correspondant à l'automate maître contiennent les taux d'occurrence de l'événement synchronisant.
- L'existence de probabilités associées à une transition aura pour effet la multiplication du taux correspondant par la probabilité. Les matrices des automates esclaves contiennent un taux égal à un (1).

- La deuxième matrice, appelée matrice négative  $Q_s^{(i)}$  (exprime les taux négatifs), doit faire l'ajustement diagonal correspondant aux taux exprimés dans la matrice d'occurrence.

**Caractéristiques de la matrice négative :**

- Contient des taux négatifs seulement dans la matrice de l'automate maître.

Étant donné que les automates non concernés par un événement synchronisant ne changent pas d'état lors de l'occurrence de cet événement, leurs matrices positives et négatives sont réduites à la matrice identité.

- **Formule du descripteur markovien :**

Le descripteur markovien s'exprime par:

★ **Partie locale :** Correspondant aux transitions locales.

Cette partie est définie, par une somme tensorielle des matrices locales de chaque automate.

★ **Partie synchronisante :** Correspondant aux événements synchronisant.

Chaque événement correspondra à deux produits tensoriels, un pour les matrices positives et l'autre pour les matrices négatives.

Le descripteur sera donné par la somme ordinaire de matrices représentant une partie locale et une partie synchronisante.

$$Q = Q_l + Q_{s^+} + Q_{s^-}$$

## 4.2. Description formelle des RAS :

Maintenant nous présentons un ensemble de définitions [Benoit, 03] et [Fernandes, 98] qu'on va les utiliser tout au long de ce mémoire. Nous commençons par la présentation de quelques définitions générales.

### 4.2.1. Définitions générales :

Nous considérons la formalisation d'un RAS comportant  $N$  automates stochastiques  $\mathbf{A}^{(i)}$ ,  $i = 1..N$ , et un ensemble d'événements  $\varepsilon$ . C'est une chaîne de Markov à  $N$  composantes, et ces composantes ne sont pas forcément indépendantes (présence possible de taux fonctionnels et d'événements synchronisant).

Un automate stochastique  $\mathbf{A}^{(i)}$  est constitué de :

- ♣ Un ensemble d'états locaux  $\mathbf{S}^{(i)}$  ;
- ♣ Un ensemble de transitions  $\mathbf{T}^{(i)}$ .

$n_i$  : est le nombre des états locaux de l'automate ( $n_i = |S^{(i)}|$ ), et  $x^{(i)} \in S^{(i)}$  est un état local de l'automate.

L'espace d'états produit du RAS est  $\hat{S} = S^{(1)} \times \dots \times S^{(N)}$ . Un état global du RAS est un vecteur  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) \in \hat{S}$ , l'espace d'états produit est l'ensemble des états globaux du RAS.

Le nombre d'états globaux est  $|\hat{S}| = \prod_{i=1}^N n_i$

Nous donnons maintenant des définitions spécifiques aux RAS à temps continu, puis à temps discret.

#### 4.2.2. RAS à temps continu :

La caractéristique principale des RAS à temps continu est : « Le délai de franchissement des transitions dans ces RAS suit une distribution exponentielle, ce qui permet de modéliser un ensemble important de systèmes ayant des activités concurrentes [Benoit, 03] ».

##### 4.2.2.1. Définitions de base :

Les transitions dans les automates sont déclenchées par l'occurrence des événements  $\varepsilon$ .

Nous détaillons dans ce qui suit ces notions d'événement et de transition.

##### Définition 1 :

Un événement  $e \in E$  est défini par :

- ♣ Un taux de franchissement  $\lambda_e$ , qui est une fonction de  $\hat{S}$  dans  $\mathbb{R}^+$  ;
- ♣ Un ensemble d'automates impliqués par cet événement  $O_e$  (l'occurrence de  $e$  entraîne une modification de l'état local de chacun de ces automates) ;
- ♣ Un automate maître  $A^{(\eta_e)} \in O_e$ .

L'événement  $e$  est local à l'automate  $A^{(\eta_e)}$  si  $O_e$  est réduit à un automate  $A^{(\eta_e)}$ . Sinon, l'événement est synchronisant.

Notons qu'un taux de franchissement constant peut être vu comme une fonction qui a toujours la même évaluation, quels que soient les arguments.

**Définition 2 :**

Pour chaque automate  $A^{(i)}$ , une transition  $t^{(i)}$  est définie par :

- ▲ Un état de départ  $x_{t^{(i)},\text{dep}} \in S^{(i)}$  et un état d'arrivée  $x_{t^{(i)},\text{arr}} \in S^{(i)}$  ;
- ▲ Un événement associé à la transition  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e \in \mathcal{E}$  ;
- ▲ Une probabilité de routage  $\pi_{t^{(i)}}$ , qui est une fonction de  $\hat{S}$  dans  $[0, 1]$ . Si  $x \in \hat{S}$ ,  $\pi_{t^{(i)}}(x)$ , est la fonction évaluée pour l'état  $x$ .

$T^{(i)}$  : est l'ensemble des transitions.

Notons qu'un même événement  $e$  peut être associé à plusieurs transitions (le cas d'un événement synchronisant), ou d'un événement possible dans plusieurs états locaux distincts d'un même automate (donc générant plusieurs transitions dans cet automate).

De plus, pour tout état global  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$  et tout événement  $e \in \mathcal{E}$ , si nous considérons le sous ensemble des transitions  $t^{(i)} \in T^{(i)}$  telles que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ , alors la somme des probabilités de routage correspondant à ces transitions, évaluées pour l'état  $x$ , doit être égale à 1.

Il faut également remarquer que, dans certains cas, plusieurs événements peuvent conduire à partir d'un état de départ donné vers un même état d'arrivée. Dans ce cas, l'arc du graphe représentant le RAS est étiqueté par une liste d'événements, mais formellement nous définissons une transition de  $T^{(i)}$  pour chaque événement de la liste.

**Définition 3 :**

Dans un état global  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) \in \hat{S}$ , l'événement  $e \in \mathcal{E}$  est possible si et seulement si, pour tout automate  $A^{(i)} \in O_e$ , il existe au moins une transition  $t^{(i)} \in T^{(i)}$  telle que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ .

Dans ce cas, l'événement  $e$  a lieu avec un taux  $\lambda_e(x)$  (taux fonctionnel évalué pour l'état de départ), et le nouvel état du RAS  $x' = (x'^{(1)}, \dots, x'^{(N)}) \in \hat{S}$  est défini par :

- ▲ Pour tout  $A^{(i)} \in O_e$ , pour chaque transition  $t^{(i)}$  telle que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ , la probabilité que  $x'^{(i)} = x_{t^{(i)},\text{arr}}$  est  $\pi_{t^{(i)}}(x)$  ;

- ▲ Pour les autres automates  $A^{(i)}$ ,  $x^{(i)} = x^{(i)}$ .

L'événement  $e$  est réalisable si et seulement si il est possible et son taux de franchissement  $\lambda_e(x)$  n'est pas nul. Les nouveaux états du RAS possibles lorsque  $e$  a lieu (correspondant à des probabilités de routage non nulles) sont les états successeurs de  $x$  par l'événement  $e$ .

**Définition 4 :**

- ▲ La fonction d'accessibilité  $F$  d'un réseau d'automate stochastique est une fonction de  $\hat{S}$  dans  $[0, 1]$  ;
- ▲ Un état global  $x$  est accessible si et seulement si  $F(x) = 1$ ;
- ▲  $S$  est l'ensemble des états accessibles du RAS ;  $S \subset \hat{S}$ .

$F$  possède certaines propriétés, nous ne pouvons pas définir n'importe quelle fonction d'accessibilité pour n'importe quel RAS. Nous choisissons arbitrairement un état initial  $x \in \hat{S}$ , qui est accessible ( $x \in S$ ). A partir de cet état, nous pouvons calculer les états successeurs de  $x$ , à savoir tous les états  $x' \in \hat{S}$  pour lesquels il existe un événement réalisable  $e$  tel que  $x'$  est un successeur de  $x$  par l'événement  $e$ .

Nous pouvons ainsi calculer  $F$  itérativement. Cette fonction d'accessibilité peut également être donnée lors de la définition d'un RAS, mais il faut alors s'assurer de son exactitude.

La fonction d'accessibilité  $F$  est bien définie si et seulement si l'ensemble des états accessibles  $S$  forment un graphe de transition fortement connexe.

A partir d'un RAS, nous pouvons construire un unique automate équivalent, dont les états sont uniquement les états accessibles du RAS. Sa matrice de transition est le générateur de la chaîne de Markov correspondant au RAS.

Nous présentons maintenant la procédure de construction du descripteur.

#### 4.2.2.2. Descripteur markovien :

Le descripteur Markovien est une formule algébrique qui permet une écriture compacte du générateur infinitésimal de la chaîne de Markov correspondante à un RAS par le biais d'une formulation mathématique [Plateau, 84].

Le comportement de chaque automate  $A^{(i)}$ ,  $i = 1 \dots N$  est décrit par un ensemble de matrices carrées, toutes de dimension  $\eta_i$ .

Soit  $\mathcal{ES}$  l'ensemble des événements synchronisants ( $\mathcal{ES} \subset \mathcal{E}$ ).

Pour  $i = 1 \dots N$  et  $e \in \mathcal{ES}$ , nous donnons quelques notations :

- $Q_i^{(i)}$  c'est la matrice de transition locale ;
- $Q_{e^+}^{(i)}$  la matrice de synchronisation positive de  $A^{(i)}$ , qui représente l'événement synchronisant  $e$ , et ses taux de franchissement si  $A^{(i)}$  est le maître de l'événement ;
- $Q_{e^-}^{(i)}$  la matrice de synchronisation négative de  $A^{(i)}$ , qui correspond à une mise à jour des éléments diagonaux pour l'événement  $e$ .

Nous associons donc à chaque automate  $1 + 2|\mathcal{ES}|$  matrices.

- $Q_j^{(i)}(x^{(i)}; y^{(i)})$  l'élément de la matrice  $Q_j^{(i)}$  dans la ligne  $x^{(i)}$  et la colonne  $y^{(i)}$ , avec  $i \in [1.. N]$  et  $j \in \{l; e^+; e^-\}$  ;
- $I_{n_i}$  la matrice identité de taille  $n_i$ , avec  $i \in [1.. N]$  ;

#### Définition 5 :

Considérons l'automate  $A^{(i)}$  et deux états locaux  $x^{(i)}; y^{(i)} \in S^{(i)}$ . Le taux local de transition de  $x^{(i)}$  vers  $y^{(i)}$  est noté  $\eta[x^{(i)}; y^{(i)}]$ .

Notons  $T L^{(i)}(x^{(i)}; y^{(i)})$  le sous ensemble de l'ensemble des transitions  $T^{(i)}$  tel que pour toute transition  $t^{(i)} \in T L^{(i)}(x^{(i)}; y^{(i)})$ , on ait  $x_{t^{(i)}, \text{dep}} = x^{(i)}$ ,  $x_{t^{(i)}, \text{arr}} = y^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = \{A^{(i)}\}$ . C'est le sous ensemble des transitions de l'automate  $A^{(i)}$  qui vont de l'état  $x^{(i)}$  vers l'état  $y^{(i)}$  par un événement local. Alors :

$$\tau_l[x^{(i)}; y^{(i)}] = \sum_{t^{(i)} \in \mathcal{T}L^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)})} \lambda_{\text{evt}_{t^{(i)}}} \times \pi_{t^{(i)}}$$

Notons que lorsqu'il n'existe pas d'arc étiqueté par un événement local allant de  $x^{(i)}$  vers  $y^{(i)}$  dans le graphe de l'automate  $A^{(i)}$ ,  $\tau_l[x^{(i)}; y^{(i)}] = 0$  (somme sur un ensemble vide).

### Définition 6 :

Les éléments de la matrice de transition locale de l'automate  $A^{(i)}$  sont définis par :

$$\star \quad \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in \mathcal{S}^{(i)} \mid x^{(i)} \neq y^{(i)}$$

$$Q_l^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = \tau_l[x^{(i)}, y^{(i)}];$$

Cette définition correspond aux éléments non diagonaux de la matrice de transition locale (taux des événements locaux),

$$\star \quad \forall x^{(i)} \in \mathcal{S}^{(i)}$$

$$Q_l^{(i)}(x^{(i)}, x^{(i)}) = - \sum_{y^{(i)} \in \mathcal{S}^{(i)}, y^{(i)} \neq x^{(i)}} \tau_l[x^{(i)}, y^{(i)}];$$

Cette définition correspond aux éléments diagonaux (ajustement diagonal des taux des événements locaux).

Nous passons maintenant aux événements synchronisant.

### Définition 7 :

Considérons l'automate  $A^{(i)}$ , l'événement  $e \in \mathcal{E}\mathcal{S}$  et deux états locaux  $x^{(i)}, y^{(i)} \in \mathcal{S}^{(i)}$ . Le taux synchronisant de transition associé à l'événement  $e$  de  $x^{(i)}$  vers  $y^{(i)}$  est noté  $\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}]$ .

- S'il existe une transition  $t^{(i)} \in \mathcal{T}^{(i)}$ , telle que  $x_{t^{(i)}, \text{dep}} = x^{(i)}$ ,  $x_{t^{(i)}, \text{arr}} = y^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ ,

Alors :

$$\circ \quad \text{Si } i = \eta_e \text{ (} A^{(i)} \text{ est l'automate maître), } \tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] = \lambda_e \times \pi_{t^{(i)}};$$

$$\circ \quad \text{Sinon } \tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] = \pi_{t^{(i)}}.$$

- Sinon, s'il n'existe pas de transition étiquetée par l'événement synchronisant  $e$  allant de  $x^{(i)}$  vers  $y^{(i)}$  dans l'automate  $A^{(i)}$ ,  $\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] = 0$ .

**Définition 8 :**

Les matrices de synchronisation positive sont définies par :

$$\star \quad \forall A^{(i)} \notin O_e$$

$$Q_{e^+}^{(i)} = I_{n_i} ;$$

Cette définition correspond aux automates non concernés par l'événement synchronisant e.

$$\star \quad \forall A^{(i)} \in O_e, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)}$$

$$Q_{e^+}^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = \tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] ;$$

Cette définition correspond aux automates concernés par l'événement e.

La même formulation est utilisée pour tous les automates concernés  $A^{(i)} \in O_e$ , qu'ils soient maîtres ou esclaves. C'est la définition du taux synchronisant  $\tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}]$  qui diffère.

**Définition 9 :**

Les matrices de synchronisation négative (représentant l'ajustement arithmétique nécessaire pour construire un générateur), pour  $e \in \mathcal{ES}$ , sont définies par :

$$\star \quad \forall A^{(i)} \notin O_e$$

$$Q_{e^-}^{(i)} = I_{n_i} ;$$

Cette définition correspond aux automates non concernés par l'événement synchronisant e.

$$\star \quad \forall x^{(\eta_e)} \in S^{(\eta_e)}$$

$$Q_{e^-}^{(\eta_e)}(x^{(\eta_e)}, x^{(\eta_e)}) = - \sum_{y^{(\eta_e)} \in S^{(\eta_e)}, y^{(\eta_e)} \neq x^{(\eta_e)}} \tau_e[x^{(\eta_e)}, y^{(\eta_e)}] ;$$

Cette définition correspond aux éléments diagonaux de la matrice de l'automate maître de l'événement e,

$$\star \quad \forall A^{(i)} \in O_e \text{ tel que } i \neq \eta_e, \forall x^{(i)} \in S^{(i)}$$

$$Q_{e^-}^{(i)}(x^{(i)}, x^{(i)}) = \sum_{y^{(i)} \in S^{(i)}, y^{(i)} \neq x^{(i)}} \tau_e[x^{(i)}, y^{(i)}] ;$$

Cette définition correspond aux automates esclaves.

$$\star \quad \forall A^{(i)} \in O_e, \forall x^{(i)}, y^{(i)} \in S^{(i)} \text{ et } x^{(i)} \neq y^{(i)}$$

$$Q_e^{(i)}(x^{(i)}, y^{(i)}) = 0$$

Cette définition correspond aux éléments non diagonaux des matrices des automates concernés par l'événement synchronisant e. Ces éléments sont tous nuls, ce sont des matrices diagonales.

**Définition 10 :**

Le générateur Markovien Q correspondant à la chaîne de Markov associée à un RAS est défini par la formule tensorielle appelée Descripteur Markovien :

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q_i^{(i)} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left( \bigoplus_{i=1}^N Q_{e^+}^{(i)} + \bigoplus_{i=1}^N Q_{e^-}^{(i)} \right)$$

Étant donné que toute somme tensorielle est équivalente à une somme de produits tensoriels particuliers, le descripteur peut être décrit par :

$$Q = \sum_{j=1}^{(N+2|\mathcal{E}|)} \bigoplus_{i=1}^N Q_j^{(i)}$$

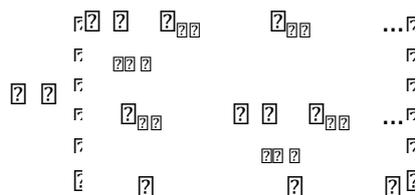
Avec  $|\mathcal{E}|$  est le nombre d'événements synchronisant, nous utilisons comme ensemble d'identificateurs des événements synchronisants  $\mathcal{E}$  l'intervalle  $[1.. E]$ , où  $E = |\mathcal{E}|$ .

- Alors  $Q_j^{(i)} = I_{n_i}$  pour  $j \leq N$  et  $j \neq i$  ;
- $Q_i^{(i)}$  pour  $j \leq N$  et  $j = i$  ;
- $Q_{(j-N)^+}^{(i)}$  pour  $N < j \leq N + E$  ;
- $Q_{(j-(N+E))^-}^{(i)}$  pour  $j > N + E$  ;

Chaque élément  $a_{ij}$  pour  $i, j \in \mathbb{N}$  de la matrice représente le taux de transition de l'état i à l'état j.

Pour  $i = j$

$a_{ij}$  est le complément à zéro de la somme de tous les autres éléments de la ligne i.



Donc la somme des éléments de chaque ligne de cette matrice doit être égale à 0.

### 4.2.3. RAS à temps discret :

Les systèmes à temps discret sont plus délicats à modéliser, car plusieurs événements peuvent avoir lieu pendant une même unité de temps (événements en conflit).

#### 4.2.3.1. Définitions de base :

Nous allons maintenant détailler plusieurs définitions de base [Benoit, 03], [Benoit, 05] concernant les réseaux d'automate stochastique.

Ces définitions contenant des petites modifications par rapport aux définitions précédentes (RAS à temps continu), pour prendre en compte la différence de modélisation.

#### Définition 11 :

Un événement  $e \in E$  est défini par :

- ★ Une probabilité de transition  $pt_e$ , qui est une fonction de  $\hat{S}$  dans  $[0, 1]$  ;
- ★ Une priorité  $prio_e$ , qui détermine comment agir en cas de conflit. C'est un entier strictement positif, 1 est la priorité maximum et  $+\infty$  la priorité minimum.
- ★ Un ensemble d'automates impliqués par cet événement  $O_e$  (l'occurrence de  $e$  entraîne une modification de l'état local de chacun de ces automates).

L'événement  $e$  est local à l'automate  $A$  si  $O_e$  est réduit à un automate  $A$ . Sinon, l'événement est synchronisant.

Notons qu'une probabilité de transition constante peut être vue comme une fonction qui a toujours la même évaluation, quels que soient les arguments. La loi d'occurrence d'un événement est une variable aléatoire indépendante de Bernoulli.

Pour permettre la simultanéité des événements, autrement dit nous voulons pouvoir rendre un événement possible dans certains états même si cet événement ne peut en fait avoir lieu que si un autre événement plus prioritaire a eu lieu avant. Nous introduisons pour cela un état particulier qui peut être adjoint à tout automate.

#### Définition 12 :

Pour chaque automate  $A^{(i)}$ , une transition  $t^{(i)}$  est définie par :

- ★ Un état de départ  $x_{t(i),\text{dep}} \in S^{(i)}$  et un état d'arrivée  $x_{t(i),\text{arr}} \in S^{(i)} \cup \emptyset$ ;
- ★ Un événement associé à la transition  $\text{evt}_{t(i)} = e \in \mathcal{E}$  ;
- ★ Une probabilité de routage  $\pi_{t(i)}$ , qui est une fonction de  $\hat{S}$  dans  $[0, 1]$ . Si  $x \in \hat{S}$ ,  $\pi_{t(i)}(x)$  est la fonction évaluée pour l'état.

$T^{(i)}$  est l'ensemble des transitions.

Notons qu'un même événement  $e$  peut être associé à plusieurs transitions. C'est le cas d'un événement synchronisant, ou d'un événement possible dans plusieurs états locaux distincts d'un même automate (donc générant plusieurs transitions dans cet automate).

De plus, pour tout état global  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$  et tout événement  $e \in \mathcal{E}$ , si nous considérons le sous ensemble des transitions  $t^{(i)} \in T^{(i)}$  telles que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$ ,  $x_{t^{(i)},\text{arr}} \in S^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ , alors la somme des probabilités de routage correspondant à ces transitions, évaluées pour l'état, doit être égale à 1. Ces probabilités de routage sont des variables aléatoires indépendantes de toutes les autres variables aléatoires du modèle.

Une transition ne peut mener à l'état vide que s'il n'existe pas d'autres transitions définies par le même état de départ et le même événement, dont l'état d'arrivée est différent de l'état vide.

En effet, dans ce dernier cas, l'événement est possible depuis l'état de départ donc il est inutile de rajouter une transition menant à l'état vide, cette dernière ne servant qu'à rendre possible l'événement depuis l'état de départ.

Il faut également remarquer que, dans certains cas, plusieurs événements peuvent conduire à partir d'un état de départ donné dans un même état d'arrivée. Dans ce cas, l'arc du graphe représentant le RAS est étiqueté par une liste d'événements, mais formellement nous définissons une transition de  $T^{(i)}$  pour chaque événement de la liste.

### Définition 13 :

Dans un état global  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) \in \hat{S}$ , l'événement  $e \in \mathcal{E}$  est possible si et seulement si, pour tout automate  $A^{(i)} \in O_e$ , il existe au moins une transition  $t^{(i)} \in T^{(i)}$  telle que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$ , et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ .

Dans ce cas,  $e$  est réalisable depuis  $x$  si et seulement si, pour tout automate  $A^{(i)} \in O_e$ , il existe au moins une transition  $t^{(i)} \in T^{(i)}$  telle que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$ ,  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ ,  $x_{t^{(i)},\text{arr}} \in S^{(i)}$  et  $\text{pt}_e(x) \neq 0$

Soit  $EP(x)$  l'ensemble des événements possibles dans l'état  $x$ .

L'événement  $e \in EP(x)$  réalisable qui a la priorité maximum dans cet ensemble a lieu avec la probabilité  $\text{pt}_e(x)$  (probabilité de transition fonctionnelle évaluée pour l'état de départ), et le nouvel état du RAS  $x' = (x'^{(1)}, \dots, x'^{(N)}) \in \hat{S}$  est défini par :

- Pour  $A^{(i)} \in O_e$ , pour chaque transition  $t^{(i)}$  telle que  $x_{t^{(i)},\text{dep}} = x^{(i)}$  et  $\text{evt}_{t^{(i)}} = e$ , nous avons  $x'^{(i)} = x_{t^{(i)},\text{arr}}$  avec la probabilité de routage  $\pi_{t^{(i)}}(x)$  ;
- Pour les autres automates  $A^{(i)}$ , nous avons  $x'^{(i)} = x^{(i)}$ .

$x'$  est un état intermédiaire.

Dans le même intervalle de temps, tous les événements de  $EP(x)$  sont susceptibles d'avoir lieu, du plus prioritaire au moins prioritaire. Après avoir atteint l'état intermédiaire  $x'$ , nous considérons que  $EP(x)$  est diminué de l'événement  $e$  qui a eu lieu. Nous recommençons alors cette procédure tant qu'il y a des événements dans  $EP(x)$ , pour l'événement le plus prioritaire, à partir de l'état intermédiaire  $x'$ . A chaque étape, l'état de départ que nous examinons est appelé l'état courant.

Une transition vers l'état vide permet de rendre un événement possible dans un état donné, sans qu'il soit réalisable. Ainsi, il pourra avoir lieu uniquement si un événement plus prioritaire a lieu avant, et si l'événement est réalisable depuis l'état intermédiaire atteint par l'occurrence de ce dernier événement.

Comme pour les modèles à temps continu, certains états peuvent ne pas être accessibles.

#### 4.2.3.2. Construction de la chaîne de Markov équivalente :

Nous détaillons ici comment construire la chaîne de Markov à temps discret.

Les états de la chaîne de Markov sont les états accessibles du RAS. C'est un sous-ensemble de  $\hat{S}$ . Pour construire les transitions de la chaîne de Markov, nous étudions les états de départ les uns après les autres, et nous calculons les probabilités d'aller dans un autre état.

Nous obtenons ainsi toutes les transitions partant de l'état  $x$ . Cet état est donc par définition accessible. Au démarrage de l'algorithme, l'état courant  $y = x$ , et nous examinons alors tous les événements  $e \in EP(x)$ , du plus au moins prioritaire.

- Si  $e$  est réalisable depuis  $y$ , il peut avoir lieu ou non, avec les probabilités respectives  $pt_e(y)$  et  $1 - pt_e(y)$ . S'il n'a pas lieu, l'état courant ne change pas. Sinon, nous obtenons une liste d'états intermédiaires qui peuvent être obtenus par différents routages.
- Si  $e$  n'est pas réalisable, la probabilité qu'il n'ait pas lieu est 1. On reste donc dans le même état.

A partir de tous les états intermédiaires obtenus (nouveaux états courants), nous traitons les événements de  $EP(x)$  qui suivent par ordre de priorité.

Remarquons que nous décidons ainsi de la sémantique lorsque plusieurs événements arrivent dans le même intervalle de temps. Après avoir déclenché le plus prioritaire, on atteint un état intermédiaire, et nous regardons si l'événement de  $EP(x)$  suivant (par ordre de priorité) est réalisable depuis cet état.

Lorsque la liste d'événements est épuisée, l'état atteint est un état de la chaîne de Markov, obtenu éventuellement par l'occurrence simultanée de plusieurs événements (les événements de  $EP(x)$  qui ont eu lieu). Le problème est de générer tous les états d'arrivées possibles, avec la probabilité qu'on arrive dans chaque état. Nous obtenons ainsi toutes les transitions de la chaîne de Markov partant de l'état  $x$ .

Pour définir formellement cela, nous introduisons une nouvelle structure, qui est une liste de couples constitués d'un état et d'une probabilité. Pour une liste donnée, nous disposons donc d'un ensemble d'états accessibles et de la probabilité d'être dans chaque état.

**Définition 14 :**

Une liste d'états accessibles pondérés par des probabilités est une liste de couples (état, probabilité), notée  $[(s_1, p_1), (s_2, p_2), \dots]$ .

- $[\ ]$  est la liste vide ;
- $[(s, p)]$  est la liste contenant l'état  $s$  auquel nous associons la probabilité  $p$ ;

- $[(s_i, p_i)]_{i \in [1..k]}$  est la liste contenant  $k$  états  $s_1, \dots, s_k$  auxquels nous associons les probabilités  $p_i$  ( $i \in [1..k]$ )

Nous définissons dans la définition 16 des opérations sur ces listes.

### Définition 15 :

Nous disposons de plusieurs opérations sur les listes d'états accessibles pondérés par des probabilités :

- L'ajout d'un couple (état, probabilité) dans la liste :
  - ▲  $(s, p) \cup [ ] = [(s, p)]$
  - ▲  $(s_{k+1}, p_{k+1}) \cup [(s_i, p_i)]_{i \in [1..k]} = [(s_i, p_i)]_{i \in [1..k+1]}$
- La fonction combine  $((s, p), L)$  regarde s'il y a déjà une occurrence de  $s$  dans  $L$ , et si c'est le cas, additionne la probabilité de  $s$  dans  $L$  avec  $p$  :
  - ▲  $\text{Combine}((s, p), [ ]) = [(s, p)]$
  - ▲  $\text{Combine}((s, p), (s', p') \cup L) =$ 
    - ◊ Si  $s = s'$  alors  $\text{Combine}((s, p + p'), L)$
    - ◊ Sinon  $(s', p') \cup \text{Combine}((s, p), L)$
- La fonction compresse prend une liste comme paramètre, et ne laisse qu'une seule entrée par état distinct dans la liste résultat.
  - ▲  $\text{Comprime}([ ]) = [ ]$
  - ▲  $\text{Comprime}((s, p) \cup L) = \text{Combine}((s, p), \text{Comprime}(L))$

### 5. Conclusion :

Dans ce chapitre, Nous avons effectué un état de l'art d'un outil d'évaluation de performances basé sur la modélisation modulaire qui est les réseaux d'automates stochastiques. Pour cela, nous avons abordé un certain nombre de propriétés et de règles concernant les RAS pour la modélisation et l'évaluation des performances des systèmes de production. Cette démarche permet de réduire considérablement les dimensions des modèles.

Et nous avons remarqué que le formalisme RAS peut être utilisés pour modéliser des systèmes à échelle de temps continu ou discret.



**Chapitre III**

***Modélisation des  
systèmes de production  
par les RAS***

**1. Introduction :**

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les Réseaux d'Automates Stochastiques et les techniques d'analyses associées.

Pour ce chapitre, nous présentons tout d'abord quelques types de systèmes de production et leurs décompositions cellulaires possibles, puis, les modèles génériques et les modèles RAS de chaque cellule élémentaire.

**2. Système de production :****2.1. Définition :**

Spérandio [Sperandio, 05] a défini un système de production comme une organisation d'éléments interagissant dans le but de réaliser des fonctions (économiques, financières, sociales) déterminées. L'intérêt d'une telle approche est de rendre explicites, d'une part, les relations entre le système et son environnement, et d'autre part les relations entre les fonctions externes (c'est-à-dire vis-à-vis du marché) du système et son organisation interne.

**2.2. Les composants d'un système de production :**

Un système de production est conçu pour fabriquer un ensemble de produits. La fabrication d'un produit nécessite une suite de transformation élémentaire appelée opération.

Chaque opération peut être exécutée par une ou plusieurs machines. L'exécution d'une opération nécessite éventuellement la présence d'un ou plusieurs outils.

Les déplacements d'un produit au sein du système s'effectuent à des moyens de transports.

Donc on peut dire qu'un système de production est composé de plusieurs éléments. Ces éléments peuvent être une machine ou des stocks, etc.

**a. Machine :**

La machine est un équipement essentiel dans un système de production permettant d'effectuer une ou plusieurs tâches sur des produits.

Plusieurs types de machine [Sadok, 10] sont définis comme suit :

- Les machines mono-tâche qui ne sont capables de réaliser qu'un seul type d'opération sur un ou différents produits.
- Les machines multitâches qui peuvent faire plusieurs types d'opérations différentes.
- Les machines dédiées qui font une ou plusieurs opérations sur un même produit.

Les pièces produites par les machines sont généralement placées dans un stock.

Une machine est symbolisée par 

#### **b. Stock :**

Un stock est l'ensemble des matières premières, marchandises, fournitures, produits semi-finis, produits finis, produits en cours, emballages, etc.

La capacité d'un stock peut être limitée ou illimitée (au cours de ce mémoire on considère tous les stocks ont des capacités limités). Dans un système de production, les stocks peuvent être classer selon leurs position par rapport à la machine. Donc nous pouvons retrouver :

- Les stocks amont se trouvent en amont de la machine, ce type de stock alimentent les machines par les pièces.
- Les stocks aval se trouvent en aval de la machine, ce type de stock reçoit les pièces fabriquées par les machines.

Une stock est symbolisée par 

Pour déplacer les produits entre le stock amont et la machines ou entre une machine et un stock aval, nous avons besoin d'un moyen de transport ou de manutention.

#### **c. Moyen de transport:**

Les moyens de transport assurent les déplacements des produits au sein d'un système de production. Les moyens de transports les plus utilisés sont les convoyeurs, les chariots, et les ponts roulants. Nous pouvons citer :

- Les chariots filoguidés qui permettent d'assurer le déplacement d'un produit d'un point quelconque de l'atelier à un autre.
- Les robots qui effectuent des déplacements pour des produits légers.
- Des convoyeurs qui sont utilisés pour le déplacement de produits lourds ou à fort débit.

Ces moyens de transport ont une capacité bien déterminée c'est-à-dire le nombre de pièces est fini.

L'ensemble de ces différents éléments (stocks amont, machines, moyens de transport, stocks aval) forment des cellules de production. Plusieurs types de cellules de production peuvent être définis telque les cellules série, les cellules convergentes et les cellule divergentes.

### 2.3. Topologies des cellules de production :

Dans ce mémoire on considère que chaque cellule de n'importe quel type est composée par une seule machine  $M_i$  avec ses stocks amont et aval.

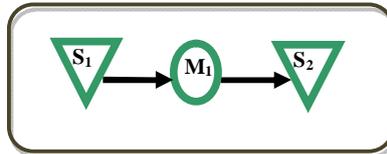
Elle est notée  $S_{jk}M_iS_{(j+1)k}$  où :

- $i$  est le numéro de la machine principale,
- $jk$  est le nombre de stocks en amont ,
- $(j+1)k$  est le nombre de stocks en aval.

Nous allons maintenant présenter les différents types de cellules les plus souvent rencontrés dans les systèmes de production [Simeu, 98].

#### 2.3.1. La cellule de production série :

C'est la cellule la plus simple. Cette cellule est composée d'un stock amont  $S_{(1)}$ , une machine  $M_1$  et un stock aval  $S_{(2)}$ . Ces trois modules sont placés en série (figure 3.1).

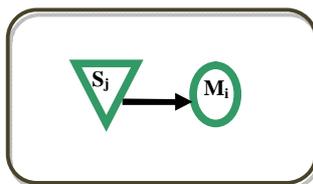


*Figure 3.1 : cellule de production série*

Il existe d'autres sous formes de la cellule série

La cellule demi-série, est un groupement d'une machine avec un stock, on distingue :

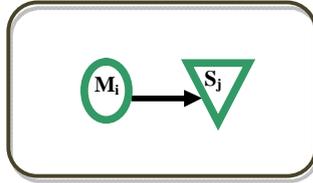
- ✓ **Cellule de production demi-série Amont :**  
Où le stock est en amont de la machine (figure 3.2).



*Figure 3.2 : cellule de production demi-série Amont*

✓ **Cellule demi-série Aval :**

Où le stock est en aval de la machine (figure 3.3).

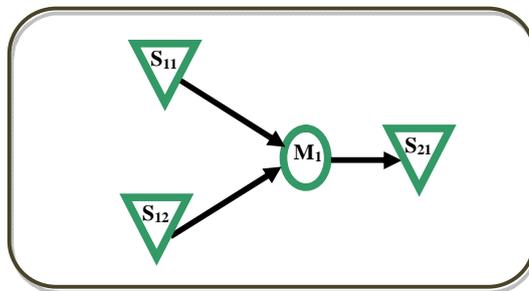


*Figure 3.3 : cellule de production demi-série Aval*

On peut dire que, la cellule de production série c'est le groupement de la cellule de production demi-série amont et la cellule de production demi-série aval pour une même machine  $M_i$ .

**2.2. La cellule de production convergence stocks amont-machine :**

Cette cellule assure la synchronisation entre les différents stocks amont pour éviter le blocage des pièces (arrivée de plusieurs pièces vers la machine en même temps), cette opération assure le passage de  $n$  pièces entre  $n$  stocks amont et la machine. La figure 3.4 représente une cellule convergence stocks amont-machine.

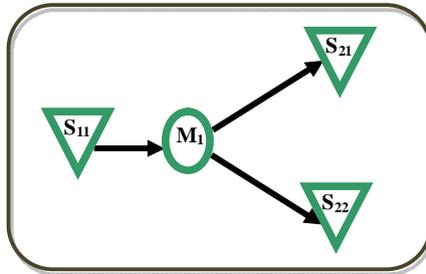


*Figure 3.4 : cellule de production convergence stocks amont-machine*

**2.3. La cellule de production divergence machine-stocks aval :**

La cellule de production est dite divergente lorsqu'à partir d'une seule machine  $M_i$ , on obtient un nombre  $k$  de stocks aval. Dans ce cas la machine  $M_i$  assure la parallélisations, c'est-à-dire qu'elle envoie les pièces vers d'autres cellules parallèles.

Un autre cas c'est la séparation, les pièces passent dans la machine  $M_i$  puis ils ont séparées vers d'autres ateliers pour subir des opérations différentes. La figure 3.5 représente une cellule convergence stocks amont-machine.



**Figure 3.5 :** cellule divergence machine-stocks aval

Dans la partie précédente nous avons présenté les types de cellules de production les plus connues qui composent un système de production. Maintenant nous allons proposer des modèles génériques pour ces différentes cellules de production afin de les utiliser comme des modèles de référence pour la modélisation des systèmes de production.

### 3. Hypothèses de travail :

Plusieurs hypothèses pratiques ont été prises en considération lors du développement des différents modèles des cellules de production qui seront utilisés durant cette étude.

- ✓ Les différents stocks des cellules ont des capacités limitées.
- ✓ Lorsqu'un stock est plein, plus aucune pièce ne peut y entrer. Cela introduit des blocages dans les autres cellules amont et éventuellement des pertes des pièces à l'entrée du système de production. On distingue principalement deux types de blocage : le blocage avant service et le blocage après service.

Dans notre étude on s'intéresse exclusivement au blocage avant service, une pièce avant de commencer son service sur une machine donnée doit tout d'abord s'assurer qu'il y a une place libre dans le stock amont de la machine de destination. Si c'est le cas, son service commence. Dans le cas contraire, la pièce doit attendre la libération d'une place en aval avant de commencer son service.

- ✓ On note qu'un système de production est composé d'un ensemble de cellules de production.
- ✓ Chacune de ces cellules est composée d'une machine, un ou plusieurs stocks amont et un ou plusieurs stocks aval.

- ✓ La machine retire des pièces à partir d'un ou de plusieurs stocks amont, puis elle les dépose dans un ou plusieurs stocks aval.
- ✓ Les stocks aval de la cellule de production « i » correspond aux stocks amont de la cellule qui lui succède ; ce stock est appelé stock intermédiaire. On peut le considérer comme un stock aval pour la machine  $M_i$  et en même temps c'est un stock amont pour la machine de la cellule qui lui succède.
- ✓ Tous les stocks amont et aval ont des capacités finies.
- ✓ Chaque machine  $M_i$  est caractérisée par :
  - $\varepsilon_{(i)}$  : Taux moyen de chargement ;
  - $\delta_{(i)}$  : Taux moyen de sortie ;
  - $\lambda_{(i)}$  : Taux moyen de panne ;
  - $\mu_{(i)}$  : Taux moyen de réparation.

Ces taux sont exprimés par nombre d'évènements par unité de temps.

- ✓ Chacun des composants de la cellule de production est modélisé par un automate :
  - L'automate  $A^{(jk)}$  représente le stock amont  $S_{jk}$  de la machine  $M_i$ .
  - L'automate  $A^{((j+1)k)}$  représente le stock aval  $S_{(j+1)k}$  de la machine  $M_i$ .
  - L'automate  $A^{(i)}$  représente la machine  $M_i$ .

Les états internes des automates  $A^{(jk)}$  et  $A^{((j+1)k)}$  représentent l'état du stock de ces automates. Par exemple, l'état (0) indique que le stock est vide et l'état (1) représente que le stock contient une pièce.

La taille de chaque automate  $A^{(jk)}$  et  $A^{((j+1)k)}$  est donnée par le nombre de pièce dans le stock, donc égale à  $c_i$ .

- ✓ Les fonctions : On a utilisé plusieurs fonctions

- La fonction de chargement  $f_c$  :

On parle dans ce cas du stock amont, il existe au moins une pièce disponible dans le stock amont pour la charger sur la machine  $M_i$ . Cette fonction est définie par la formule suivante :

$$f_c^{(i)}(\vec{x}) = \delta \left( \left[ \sum_{n=1}^k x^{in} \geq 1 \right] \right)$$

$$\begin{cases} \text{Si } b \text{ est vraie } & \delta(b) = 1 \\ \text{Si } b \text{ est fausse } & \delta(b) = 0 \end{cases}$$

Vaut 1 lorsque le retrait d'une pièce du stock amont vers la machine est possible, c'est-à-dire il existe au moins une pièce disponible dans ce stock, et 0 lorsque le stock amont est vide.

▪ La fonction de déchargement  $f_L$  :

On parle dans ce cas du stock aval, il existe au moins une place libre dans le stock aval. Cette fonction est définie par la formule suivante :

$$f_L^{(i)}(\tilde{x}) = \delta \left( \left[ \sum_{n=1}^k x^{in} \leq C_i - 1 \right] \right)$$

$C_i$  c'est la capacité du stock

Cette fonction exprime le fait qu'une machine ne peut déposer une pièce dans son stock aval que si le nombre de pièces dans ce stock n'a pas atteint la capacité maximale, c'est-à-dire qu'il existe au moins une place libre pour déposer une nouvelle pièce produite par la machine  $M_i$ . Cette fonction représente le mécanisme de blocage.

▪ Fonction de priorité :

Cette fonction est utilisée dans le cas où, la cellule de production produit plusieurs classes ( $k$  classes) de pièces. Dans ce cas une pièce ne peut être servie que s'il n'y a aucune pièce d'une classe prioritaire.

Cette priorité exprime par une fonction de l'état des autres automates qui représentant la même file. Supposons que la priorité entre les classes est fonction de l'indice de la classe (la classe  $k = 1$  est prioritaire sur la classe  $k = 2$  qui est elle-même prioritaire sur la classe  $k = 3$  et ainsi de suite). Dans ce cas, la fonction blocage à cause de la priorité pour un automate  $A(i,k)$  s'exprime comme suit :

$$g^{(ik)}(\tilde{x}) = \delta \left( \left[ \sum_{m=1}^{k-1} x^{im} = 0 \right] \right)$$

L'interprétation de cette fonction est qu'il ne doit pas y avoir des pièces prioritaires sur la classe  $k$  dans la cellule de production. Notons que dans ce cas,  $g^{(k)} = 1$ , car la classe  $k = 1$  est prioritaire sur toutes les autres classes.

Bien que cette politique de choix des clients prioritaires soit assez générique pour la plupart des cas pratiques.

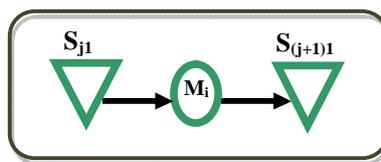
Dans la section suivante on va proposer quelques modèles génériques pour les différents types de cellules présentés dans la section précédente.

#### 4. Modèles génériques de référence associés aux différents types de cellules :

Au système de production formé par un ensemble de cellules élémentaires nous appliquons la modélisation modulaire, dans cette étude nous construisons des modèles RAS génériques de référence prenant en compte toutes les combinaisons possibles, que nous rencontrons souvent dans les systèmes de production.

##### 4.1. La cellule de production série $S_{j1}M_iS_{(j+1)1}$ :

Considérons une cellule composée d'un stock amont  $S_{j1}$ , une machine  $M_i$ , un stock aval  $S_{(j+1)1}$  la capacité des stocks (stocks amont et aval) est  $n$ . La cellule est représentée dans la figure 3.6. Cet exemple illustre l'utilisation des événements synchronisant et locaux dans un modèle.



*Figure 3.6 : cellule série*

La figure 3.7 représente de façon générique les automates des différents modules de la cellule série

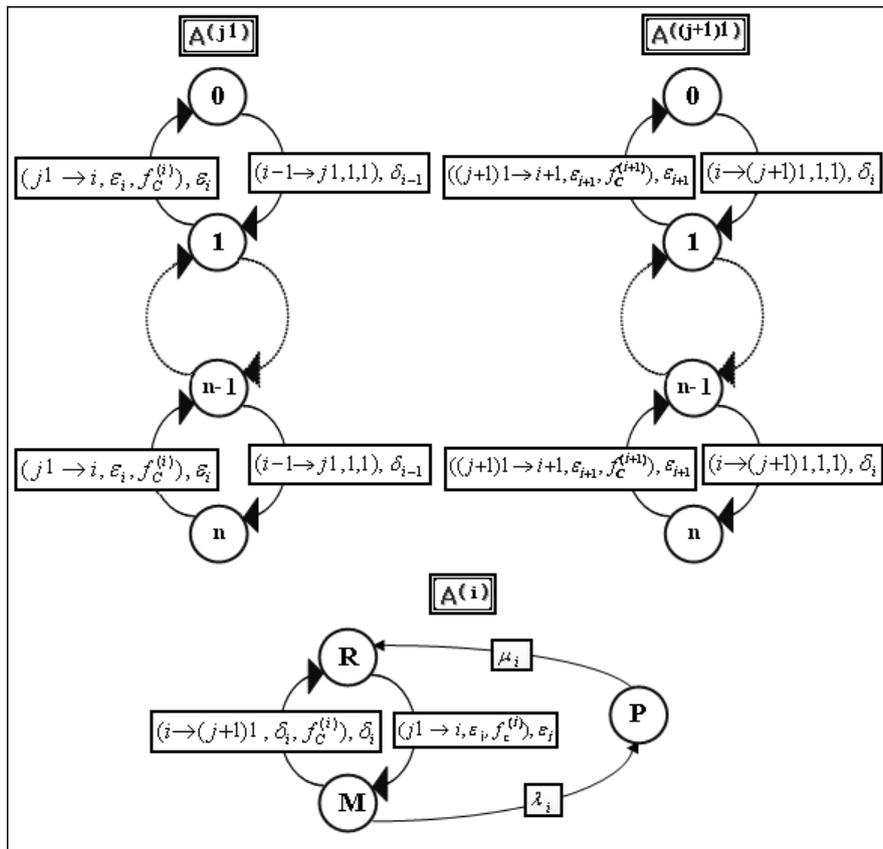


Figure 3.7 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule série

- modèle générique de référence du module stock amont  $A(j1)$ , les étiquettes des arcs de droites représentent l'arrivée des pièces de l'extérieur vers le stock amont  $S_{(j1)}$  avec un taux local  $\delta_{i-1}$  ou d'un triplet de synchronisation  $(i-1 \rightarrow j1, 1, 1)$ , les étiquettes des arcs de gauches du stock amont  $(j1 \rightarrow i, \varepsilon_i, f_c^{(i)})$  représentent le départ des pièces du stock  $S_{j1}$  vers la machine  $M_i$ .
- modèle générique de référence du module stock aval  $A^{((j+1)1)}$ , les étiquettes des arcs de droites représentent l'arrivée des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval  $S_{(j+1)1}$  avec un taux local  $\delta_i$  ou d'un triplet de synchronisation  $(i \rightarrow (j+1)1, 1, 1)$ , les étiquettes des arcs de gauches du stock aval  $((j+1)1 \rightarrow i+1, \varepsilon_{i+1}, f_c^{(i+1)})$  représentent le départ des pièces du stock  $S_{(j+1)1}$  vers la machine  $M_{i+1}$ .
- modèle générique de référence du module machine  $A^{(i)}$ , la machine  $M_i$  est représentée par trois états différents, l'état de repos ( $R$ ), de marche ( $M$ ) et de panne ( $P$ ).

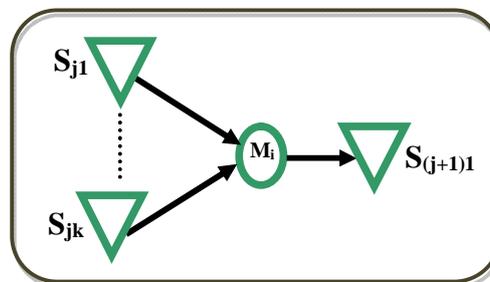
L'étiquette de l'arc de droit ( $R \rightarrow M$ ) représente le passage de la machine d'un état de repos vers un état de marche, ce passage se réalise avec l'arrivée d'une pièce vers la machine  $M_i$  avec un taux local de chargement  $\varepsilon_i$  ou avec un triplets de synchronisation  $(j, k, i, I, I)$ .

L'étiquette de l'arc de gauche ( $M \rightarrow R$ ) représente le départ des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval  $S_{(j+1)1}$  avec un taux local de service  $\delta_i$  ou avec un triplet de synchronisation  $(i \rightarrow (j+1)1, \delta_i, fc(i))$ .

L'étiquette de l'arc inférieur ( $M \rightarrow P$ ) représente le passage de la machine  $M_i$  vers un état de panne avec un taux local de panne  $\lambda_i$ , par contre l'étiquette de l'arc supérieur ( $P \rightarrow R$ ) représente un taux local de réparation  $\mu_i$

#### 4.2. La cellule convergence stocks amont-machine $S_{jk}M_iS_{(j+1)1}$ :

Cette cellule assure la synchronisation entre les différents stocks amont pour éviter le blocage des pièces (arrivée de plusieurs pièces vers la machine en même temps), cette opération assure le passage de  $n$  pièces entre  $n$  stocks amont et la machine. La cellule convergence stocks amont-machine se présente sous la forme donnée par la figure 3.8.



*Figure 3.8 : cellule convergence stocks amont-machine*

La figure 3.9 représente de façon générique les automates des différents modules de la cellule convergence stocks amont-machine

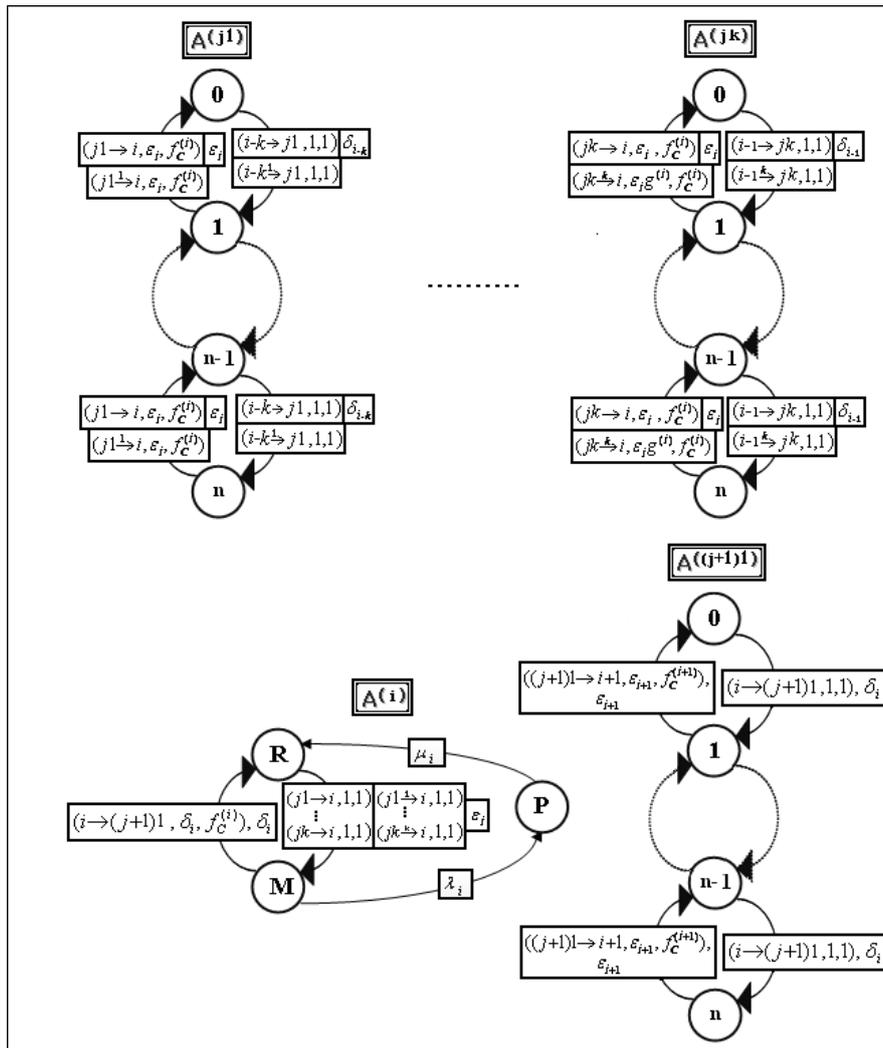


Figure 3.9 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule convergente

- modèles génériques de référence des modules stocks amont  $A^{(1k)} \dots A^{(jk)}$ , les étiquettes des arcs de droit représentent l'arrivée des pièces de l'extérieur vers les stocks amont ( $S_{(j1)} \dots S_{(jk)}$ ) avec des taux locaux ( $\delta_{i-k} \dots \delta_{i-1}$ ) ou des triplets de synchronisation  $[(i-k \rightarrow j1, 1, 1) \dots (i-1 \rightarrow jk, 1, 1)]$ . Les étiquettes des arcs gauche du stock amont représentent le départ des pièces des stocks amont ( $S_{(j1)} \dots S_{(jk)}$ ) vers la machine  $M_i$  avec un taux local ( $\epsilon_i$ ) ou des triplets de synchronisation  $[(j1 \rightarrow i, \epsilon_i, f_c^{(i)}) \dots (jk \rightarrow i, \epsilon_i, f_c^{(i)})]$ .
- modèle générique de référence du module machine  $A^{(i)}$ , la machine  $M_i$  est représentée par trois états différents, l'état de repos ( $R$ ), de marche ( $M$ ) et de panne ( $P$ ). L'étiquette de l'arc de droite ( $R \rightarrow M$ ) représente le passage de la machine d'un état de repos vers un état de marche, ce passage se réalise avec l'arrivée d'une pièce vers la

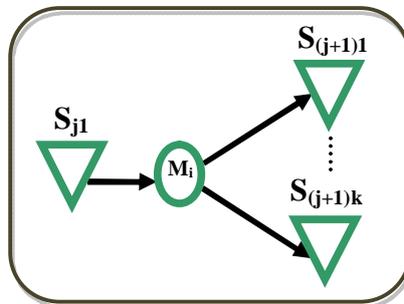
machine  $M_i$  avec un taux local de chargement  $\varepsilon_i$  ou avec des triplets de synchronisation  $[(j_1 \rightarrow i, 1, 1) \dots (j_k \rightarrow i, 1, 1)]$ .

L'étiquette de l'arc de gauche ( $M \rightarrow R$ ) représente le départ des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval  $S_{(j+1)1}$  avec un taux local de service  $\delta_i$  ou avec un triplet de synchronisation  $(i \rightarrow (j+1)1, \delta_i, f_c(i))$ .

L'étiquette de l'arc inférieur ( $M \rightarrow P$ ) représente le passage de la machine  $M_i$  vers un état de panne avec un taux local de panne  $\lambda_i$ , par contre l'étiquette de l'arc supérieur ( $P \rightarrow R$ ) représente un taux local de réparation  $\mu_i$ .

- modèle générique de référence du module stock aval  $A^{((j+1)1)}$ , les étiquettes des arcs de droites représentent l'arrivée des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval  $S_{(j+1)k}$  avec un taux local de service  $\delta_i$  ou avec un triplet de synchronisation  $(i \rightarrow (j+1)1, 1, 1)$ . Les étiquettes des arcs de gauche du stock aval représentent le départ des pièces du stock  $S_{(j+1)1}$  vers la machine  $M_{i+1}$  avec un taux local de chargement de service  $\varepsilon_{i+1}$  ou avec un triplet de synchronisation  $((j+1)1 \rightarrow i+1, \varepsilon_{i+1}, f_c^{(i+1)})$ .

#### 4.3. La cellule divergence machine-stocks aval $S_{j1}M_iS_{(j+1)k}$ :



*Figure 3.10 : cellule divergence machine-stocks aval*

La figure 3.11 représente de façon générique les automates des différents modules de la cellule divergence machine-stocks aval

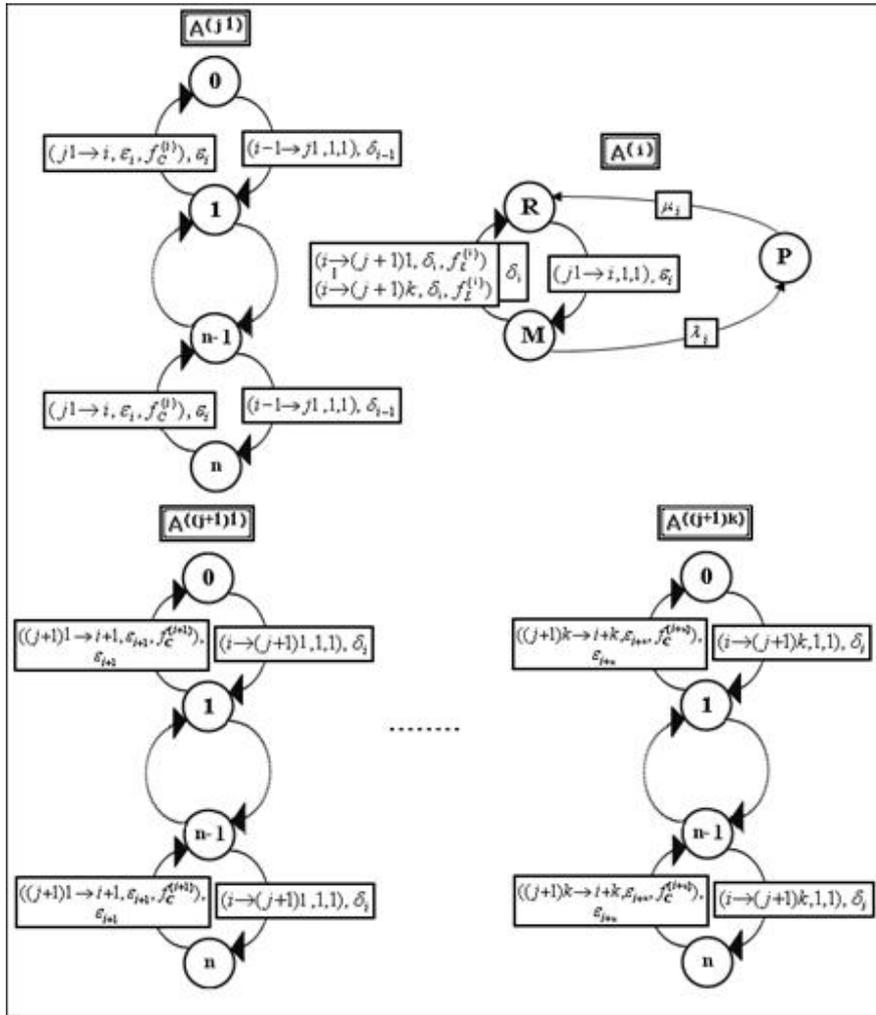


Figure 3.11 : modèles génériques de référence des différents modules de la cellule divergente

- modèle générique de référence du module stock amont  $A^{(j)1}$ , les étiquettes des arcs de droites représentent l'arrivée des pièces de l'extérieur vers le stock amont  $S_{(j)1}$  avec un taux local  $\delta_{i-1}$  ou avec un triplet de synchronisation  $(i-1 \rightarrow j1, 1, 1)$ . Les étiquettes des arcs gauches du stock amont représentent le départ des pièces du stock  $S_{j1}$  vers la machine  $M_i$  avec un taux local de chargement  $\epsilon_i$  ou avec un triplet de synchronisation  $(j1 \rightarrow i, \epsilon_i, f_c^{(j)})$ .
- modèles génériques de référence des modules stocks aval  $A^{(j+1)1} \dots A^{(j+1)k}$ , les étiquettes des arcs de droite représentent l'arrivée des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval  $(S_{(j+1)1} \dots S_{(j+1)k})$  avec un taux local de service  $\delta_i$  ou avec des triplets de synchronisation  $[(i \rightarrow (j+1)1, 1, 1) \dots (i \rightarrow (j+1)k, 1, 1)]$ . Les étiquettes des arcs de gauches du stock aval représentent le départ des pièces des stocks  $(S_{(j+1)1} \dots S_{(j+1)k})$  vers les machines  $M_{i+1} \dots$

$M_{i+k}$  avec des taux de chargement locaux  $(\varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{i+k})$  ou avec des triplets de synchronisation  $[((j+1)1 \rightarrow i+1, \varepsilon_{i+1}, f_c^{(i+1)}) \dots ((j+1)k \rightarrow i+k, \varepsilon_{i+k}, f_c^{(i+k)})]$ .

- modèle générique de référence du module machine  $A^{(i)}$ , la machine  $M_i$  est représentée par trois états différents, l'état de repos ( $R$ ), de marche ( $M$ ) et de panne ( $P$ ).

L'étiquette de l'arc de droite ( $R \rightarrow M$ ) représente le passage de la machine d'un état de repos vers un état de marche, ce passage se réalise avec l'arrivée d'une pièce vers la machine  $M_i$  avec un taux local de chargement  $\varepsilon_i$  ou avec des triplets de synchronisation  $(j1 \rightarrow i, 1, 1)$ .

L'étiquette de l'arc de gauche ( $M \rightarrow R$ ) représente le départ des pièces de la machine  $M_i$  vers le stock aval ( $S(j+1)1 \dots S(j+1)k$ ) avec un taux local de service  $\delta_i$  ou avec des triplets de synchronisation  $[(i \rightarrow (j+1)1, \delta_i, fl(i)) \dots (i \rightarrow (j+1)k, \delta_i, fl(i))]$ .

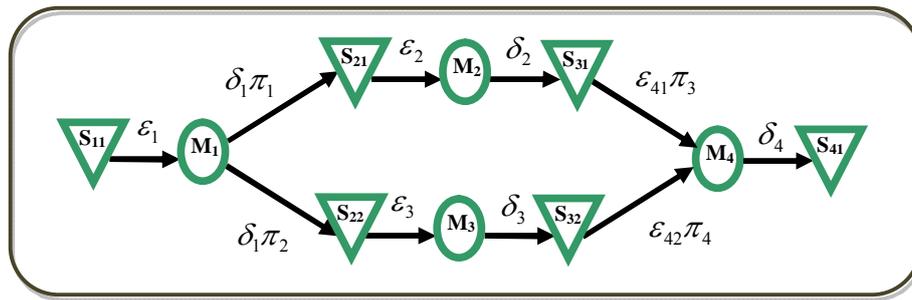
L'étiquette de l'arc inférieur ( $M \rightarrow P$ ) représente le passage de la machine  $M_i$  vers un état de panne avec un taux local de panne  $\lambda_i$ , par contre l'étiquette de l'arc supérieur ( $P \rightarrow R$ ) représente un taux local de réparation  $\mu_i$ .

### 5. Modélisation d'un système de production manufacturier :

Le système de production sélectionné pour notre étude (voire figure 3.12) est composé de quatre cellules élémentaires, la cellule  $c_1$  est composé d'un stock amont, une machine et deux stocks aval (cellule divergente), chacune des cellules  $c_2$  et  $c_3$  est constituée d'un stock amont, une machine et un stock aval (cellules séries), la cellule  $c_4$  est constituée de deux stock amont, une machine et un stock aval (cellule convergente).

Les pièces arrivent de l'extérieur avec un taux de chargement  $\varepsilon_0$  vers la cellule  $c_1$  et ils sont servis vers les cellules qui succèdent la cellule  $c_1$  avec un taux de service  $\rho_0$ , dans ce cas les pièces passent soit vers la cellule  $c_2$  avec une probabilité  $p_1$  ou vers la cellule  $c_3$  avec une probabilité  $p_2$  le traitement se fait dans les deux machines  $M_2$  ou  $M_3$ , puis les pièces se dirigent vers la cellule 4 avec une probabilité  $p_3$  pour les pièces venant de la cellule  $C_2$  et  $p_4$  pour ceux venant de la cellule  $C_3$ .

Enfin les pièces finies se dirigent vers l'extérieur.



*Figure 3.12 : Système de production de cette étude*

### 5.1. Décomposition du système de production :

Dans la littérature, plusieurs approches et modèles sont développés utilisant des outils de modélisation notamment les réseaux de Petri, les files d'attente, etc. Mais toutes ces approches sont basées sur la décomposition du modèle du système de production global [Benferroudj, 10], [Fritas, 05], [Haoues, 05], [Simeu, 98], [Olivier, 95], en utilisant les Réseaux de Petri Stochastique Généralisés à Synchronisation Internes (RdPSGSyIs).

L'une de nos contributions dans ce mémoire est la suivante : au lieu de modéliser le système de production complet, puis le décomposer en module, on a décomposé dans une première étape le système de production complet en sous-système, appelés cellules, puis on modélise chacune de ces cellules par l'outil de modélisation modulaire RAS.

Nous allons faire une décomposition du système de production en cellules élémentaires avant de le modéliser.

Dans notre cas, on a un système de production qui contient quatre machines, donc il sera décomposé en quatre cellules élémentaires (voir figure 3.13).

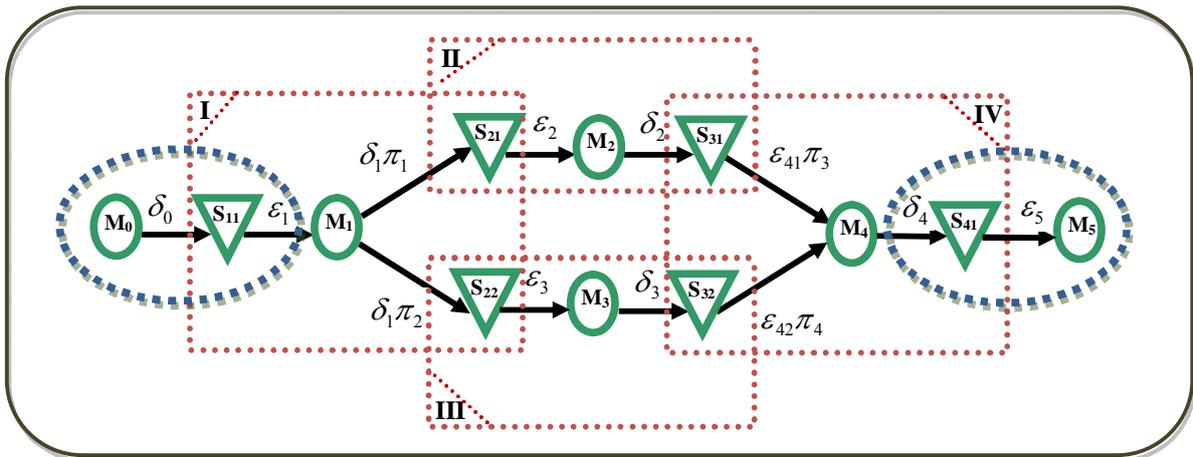
Nous allons prendre les trois types de cellules présentées dans la section précédente de ce chapitre, comme base à la décomposition.

Chaque cellule est composée par :

- une machine « i » ;
- un ou plusieurs stocks amont ;
- un ou plusieurs stocks aval.

Donc le système de production est décomposable en quatre cellules de production élémentaires :

- ✓ La première cellule : c'est cellule de production divergente machine-stocks aval de type  $S_{11}M_iS_{22}$ .
- ✓ La deuxième cellule : c'est cellule de production série de type  $S_{21}M_iS_{31}$ .
- ✓ La troisième cellule : c'est cellule de production série de type  $S_{22}M_iS_{32}$ .
- ✓ La quatrième cellule : c'est cellule convergence stocks amont-machine de type  $S_{32}M_iS_{41}$ .



**Figure 3.13** : Système de production décomposé

On ajoute deux Cellules de production virtuelles  $C_0$  et  $C_5$  aux deux extrémités du système de production, pour éviter le problème de capacité limité au stock d'entrée  $S_{11}$  et au stock de sortie  $S_{41}$ .

## 5.2. La modélisation des cellules de production par les RAS :

On va présenter dans ce qui suit, un exemple de système de production pour illustrer les caractéristiques des réseaux d'automates stochastiques et montrer la possibilité de modéliser n'importe quel système de production par les réseaux d'automates stochastiques.

Les différents évènements synchronisant de ce système sont :

- L'évènement synchronisant  $(11 \quad 1)$  représente le départ d'une pièce de la cellule (0) vers la cellule (1) et plus précisément, le départ d'une pièce de stock  $S_{11}$  vers la machine  $M_1$ .
- L'évènement synchronisant  $(21 \quad 2)$  représente le départ d'une pièce de la cellule (1) vers la cellule (2).

- L'événement synchronisant (22 3) représente le départ d'une pièce de la cellule (1) vers la cellule (3).
- L'événement synchronisant (31 4) représente le départ d'une pièce de la cellule (2) vers la cellule (4).
- L'événement synchronisant (32 4) représente le départ d'une pièce de la cellule (3) vers la cellule (4).
- L'événement synchronisant (41 5) représente le départ d'une pièce de la cellule (4) et son entrée à la cellule (5).

### 5.2.1. La première cellule de production :

#### 5.2.1.1. Description de la cellule de production :

La pièce se dirige du stock  $S_{11}$  vers la machine  $M_1$  de la cellule (1) avec un taux de chargement  $\delta_1$  dans ce cas l'événement (11 1) synchronise l'automate  $A^{(11)}$  et  $A^{(1)}$  ou l'automate  $A^{(11)}$  est un émetteur de cet événement avec un triplet de synchronisation (11 1,  $\delta_1$ ),  $A^{(1)}$  sera le récepteur avec un triplet de synchronisation (11 1, 1,1) ; après le traitement de la pièce par la machine  $M_1$ , elle se dirige soit vers le stock aval  $S_{21}$  ou  $S_{22}$  avec un taux de service  $\delta_1$  multiplié par la probabilité de routage  $\pi_1$  (respectivement  $\pi_2$ ), dans ce cas les automates  $A^{(21)}$  et  $A^{(22)}$  passent de l'état (0) à l'état (1).

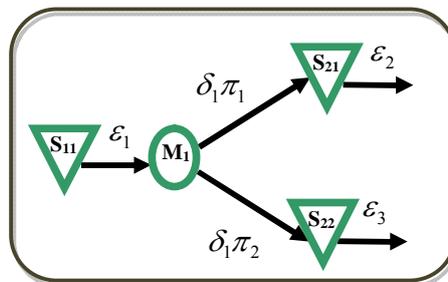


Figure 3.14 : La première cellule de production

#### 5.2.1.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS :

Avant de modéliser la cellule de production, il faut rappeler que cette cellule est composée par trois types de composants, un stock amont  $S_{11}$ , une machine  $M_1$  et deux stocks avals  $S_{21}$  et  $S_{22}$ .

Chacun de ces composants est modélisé par un automate.

Les états internes des automates ( $A^{(11)}$ ,  $A^{(21)}$  et  $A^{(22)}$ ) représentent les états des stocks, dans notre cas la capacité maximale des stocks est fixée à un pour des raisons de simplicité.

L'état  $I$  indique qu'il y a  $I$  pièces dans le stock ;

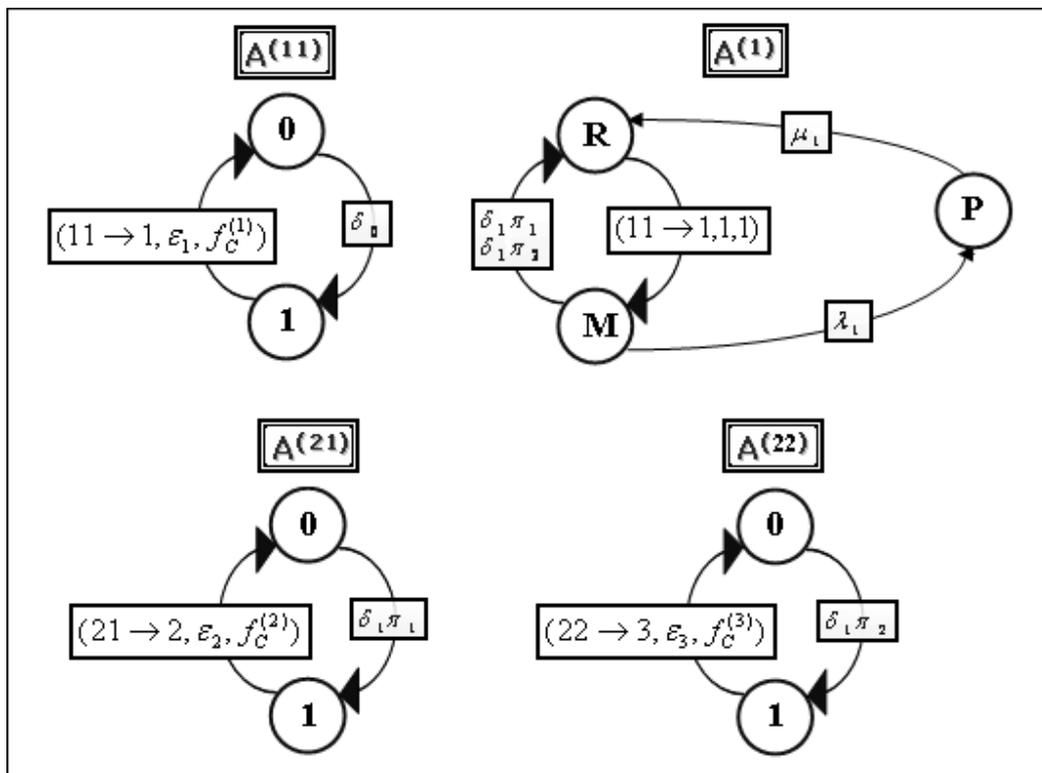
Les états internes de l'automate ( $A^{(1)}$ ) représentent les états de la machine (Repos, Marche et Panne).

La transition  $11 \rightarrow 1$  représente le chargement d'une pièce par la machine  $M_1$ .

$11 \rightarrow 1$ : Est un événement synchronisant représentant le départ d'une pièce du stock amont  $S_{11}$  vers la machine  $M_1$ , son taux d'occurrence est  $\varepsilon_1$ ;

Le triplet de synchronisation de l'événement  $11 \rightarrow 1$  de l'automate émetteur « maître » est  $(11 \rightarrow 1, \varepsilon_1, 1)$  et dans l'automate récepteur « esclave »  $(11 \rightarrow 1, 1, 1)$ .

Les automates pour ce modèle sont décrits dans la *figure 3.15*.



*Figure 3.15 : Modèles RAS pour la première cellule de production.*

### 5.2.2. La deuxième cellule de production :

#### 5.2.2.1. Description de la cellule de production :

La pièce passe du stock  $S_{21}$  vers la machine  $M_2$  avec un taux de chargement  $\varepsilon_2$  dans ce cas l'événement  $(21 \rightarrow 2)$  synchronise l'automate  $A^{(21)}$  et  $A^{(2)}$  où l'automate  $A^{(21)}$  est un émetteur de

cet événement avec un triplet de synchronisation  $(21 \rightarrow 2, \varepsilon_2, f^{(2)})$ ,  $A^{(2)}$  sera le récepteur avec un triplet de synchronisation  $(21 \rightarrow 2, 1, 1)$ , après le traitement de la pièce par la machine  $M_2$ , elle se dirige vers le stock aval  $S_{31}$  avec un taux de service  $\delta_2$ , dans ce cas l'automate  $A^{(31)}$  passe de l'état (0) à l'état (1).

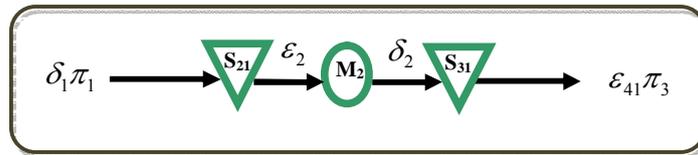


Figure 3.16 : La deuxième cellule de production

**5.2.2.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS:**

Les automates pour ce modèle sont décrits dans la figure 3.17

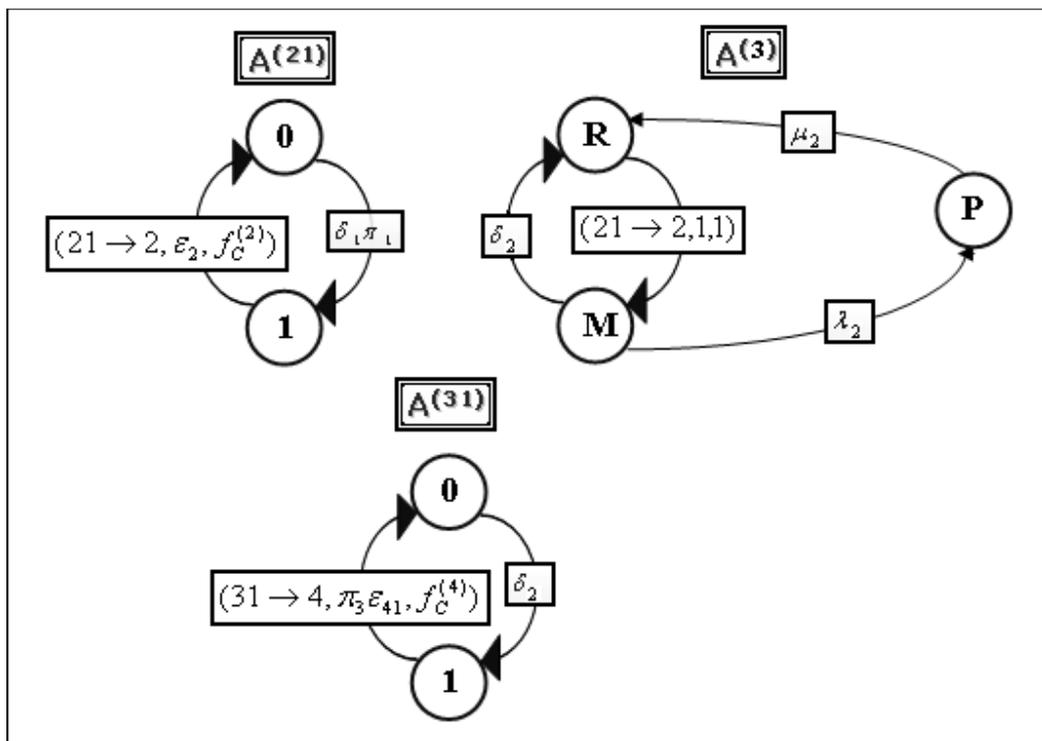


Figure 3.17 : Modèles RAS pour la deuxième cellule de production.

**5.2.3. La troisième cellule de production :**

**5.2.3.1. Description de la cellule de production :**

Les pièces passent du stock amont  $S_{22}$  vers la machine  $M_3$  avec un taux de chargement  $\varepsilon_3$  dans ce cas l'événement  $(22 \rightarrow 3)$  synchronise l'automate  $A^{(22)}$  et  $A^{(3)}$ , où l'automate  $A^{(22)}$  est un émetteur

de cet événement avec un triplet de synchronisation  $(22 \rightarrow 3, \varepsilon_3, f^{(3)})$ ,  $A^{(3)}$  sera le récepteur avec un triplet de synchronisation  $(22 \rightarrow 3, 1, 1)$ , après le traitement de la pièce par la machine  $M_3$ , elle se dirige vers le stock aval  $S_{32}$  avec un taux de service  $\delta_3$ , dans ce cas l'automate  $A^{(3)}$  passe de l'état (0) à l'état (1).

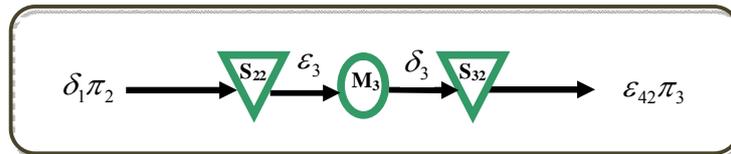


Figure 3.18 : La troisième cellule de production

**5.2.3.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS:**

Les automates pour ce modèle sont décrits dans la figure 3.19

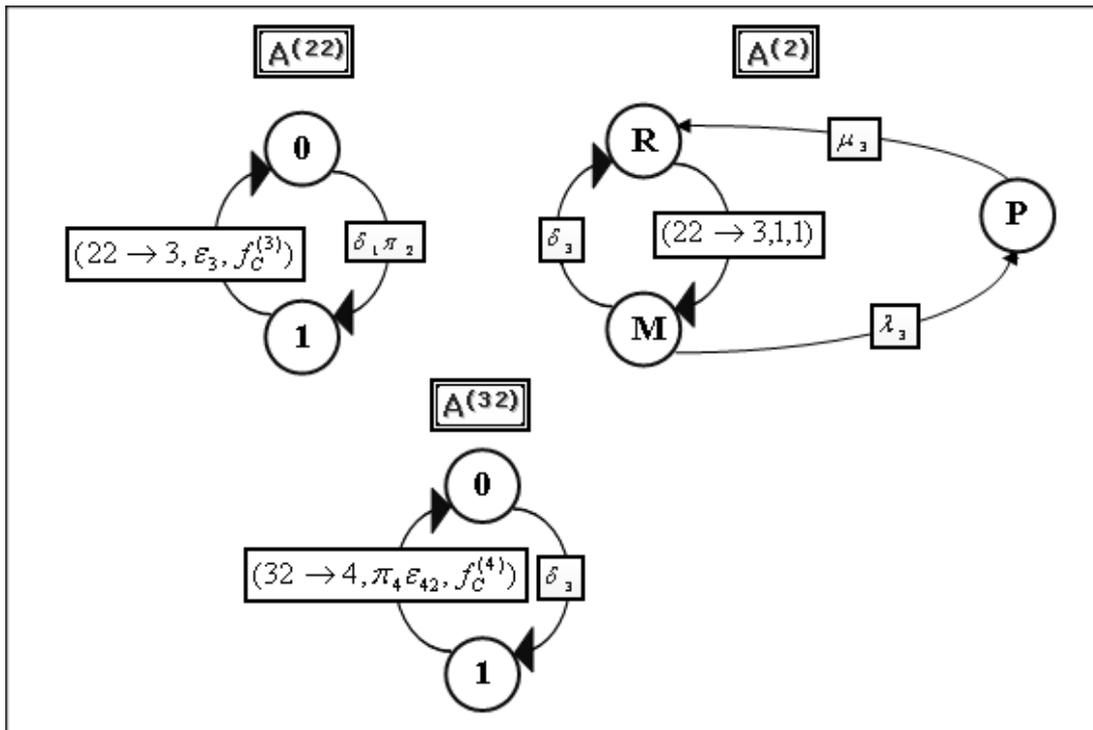


Figure 3.19 : Modèles RAS pour la troisième cellule de production.

**5.2.4. La quatrième cellule de production :**

**5.2.4.1. Description de la cellule de production :**

Les pièces se dirigent vers la machine  $M_4$  avec un taux de service  $\varepsilon_{41}$ ,  $\varepsilon_{42}$  multiplié par la probabilité de routage  $\pi_3$  (respectivement  $\pi_4$ ). Dans ce cas on a deux événements :

- L'événement  $(31 \rightarrow 4)$  synchronise l'automate  $A^{(31)}$  et  $A^{(4)}$ , où  $A^{(31)}$  est un émetteur de cet événement avec un triplet de synchronisation  $(31 \rightarrow 4, \pi_3 \varepsilon_{41}, \quad)$ , donc  $A^{(4)}$  sera le récepteur avec un triplet  $(31 \rightarrow 4, 1, 1)$ ,
- L'événement  $(32 \rightarrow 4)$  synchronise l'automate  $A^{(32)}$  et  $A^{(4)}$ , où  $A^{(32)}$  est un émetteur de cet événement avec un triplet de synchronisation  $(32 \rightarrow 4, \pi_4 \varepsilon_{42}, \quad)$ , donc  $A^{(4)}$  sera le récepteur avec un triplet  $(32 \rightarrow 4, 1, 1)$ ,

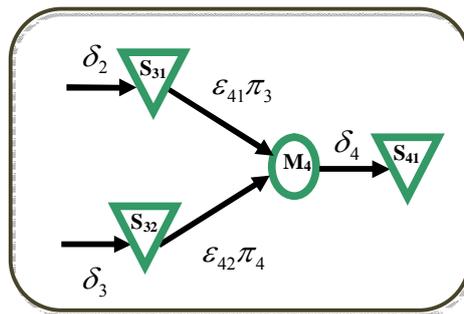


Figure 3.20 : La quatrième cellule de production

5.2.4.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS:

Les automates pour ce modèle sont décrits dans la figure 3.21

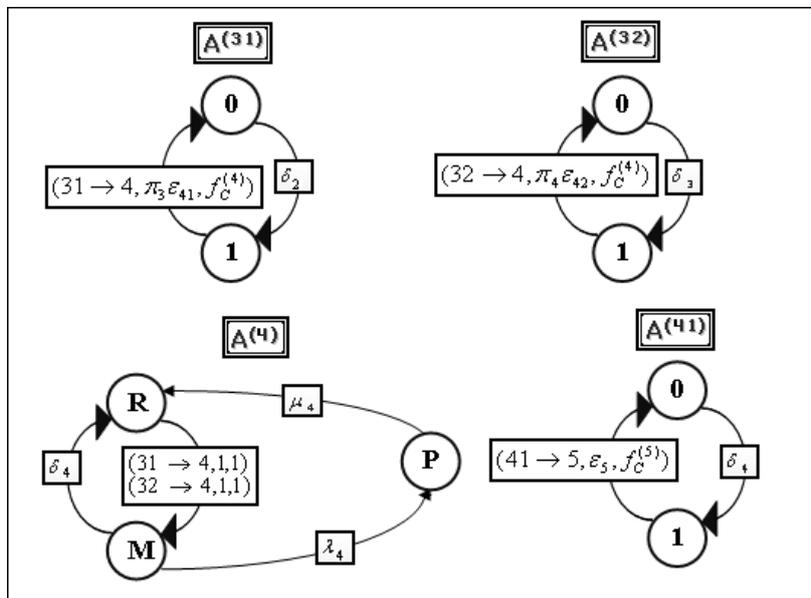


Figure 3.21 : Modèles RAS pour la quatrième cellule de production.

**5.2.5. Les Cellules virtuelle ajoutés au système de production :**

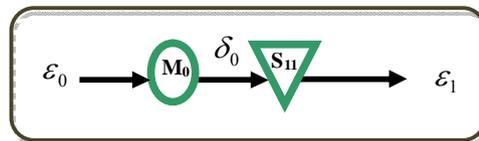
Nous avons ajouté à notre système de production deux cellules virtuelles en amont et en aval, pour éviter le problème de modélisation d'un stock de capacité illimité par les réseaux d'automates stochastiques.

Ces deux cellules virtuelle sont la cellule demi-série Aval (figure 3.3) et demi-série Amont (figure 3.2).

**5.2.5.1. Cellule virtuelle  $C_0$  :**

**5.2.5.1.1. Description de la cellule de production :**

Cette cellule  $C_0$  (figure 3.22) est constituée d'une machine  $M_0$  suivie par un stock aval  $S_{11}$ .

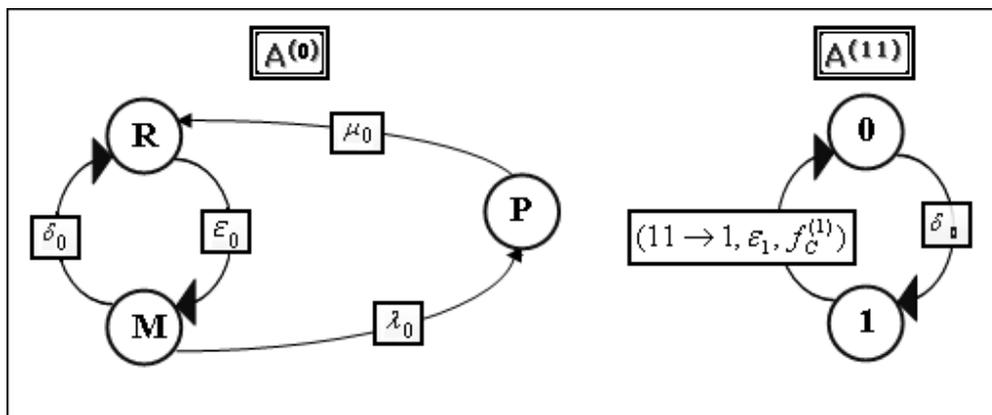


*Figure 3.22: La Cellule virtuelle  $C_0$*

**5.2.5.1.2. Modélisation de la cellule de production par les RAS :**

On suppose qu'une pièce arrive de l'extérieur vers la machine  $M_0$  avec un taux de chargement  $\epsilon_0$ , l'automate  $A^{(0)}$  passe de l'état de repos ( $R$ ) à l'état de marche ( $M$ ), une fois le traitement de la pièce par la machine  $M_0$  est terminé la pièce se dirige vers le stock  $S_{11}$  avec un taux de service  $\delta_0$ , dans ce cas l'automate  $A^{(1)}$  passe de l'état ( $0$ ) à l'état ( $1$ ).

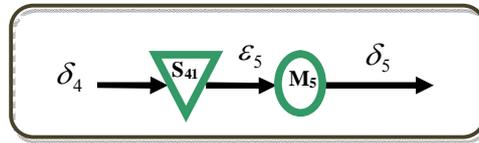
Les automates pour ce modèle sont décrits dans la figure 3.23.



*Figure 3.23 : Modèles RAS pour la cellule virtuelle  $C_0$ .*

**5.2.5.2. Cellule virtuelle  $C_5$  :**

La cellule  $C_5$  (figure 3.24) est constituée du stock  $S_{41}$  et de la machine  $M_5$ .

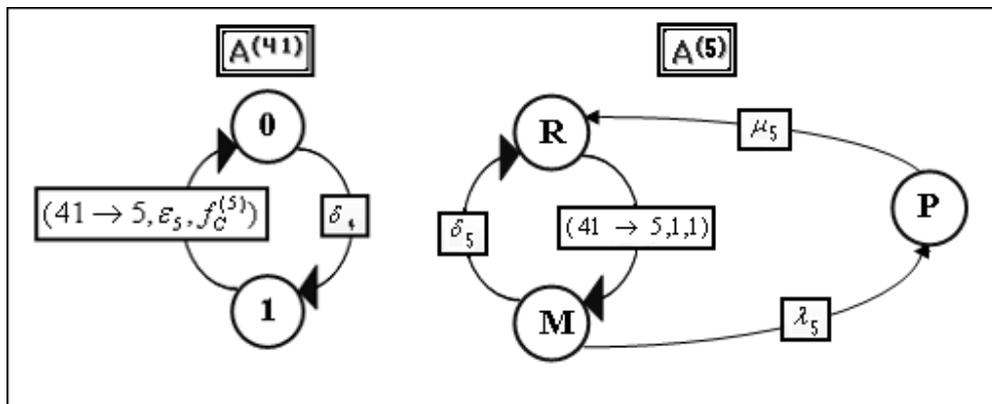


*Figure 3.24 : La Cellule virtuelle  $C_5$*

**5.2.5.1.2. Modélisation de la cellule  $C_5$  par les RAS :**

Une fois le traitement de la pièce terminé par la machine  $M_4$  la pièce se dirige vers la cellule  $C_5$  via le stock  $S_{41}$  où la machine  $M_5$  va assurer le traitement de la pièce, puis elle va la déposer à l'extérieur avec un taux de service  $\delta_5$ , dans ce cas l'événement  $(41 \rightarrow 5)$  synchronise l'automate  $A^{(41)}$  et  $A^{(5)}$  où  $A^{(4)}$  est un émetteur de cet événement avec un triplet de synchronisation  $(41 \rightarrow 5, \epsilon_5, f^{(4)})$  et  $A^{(5)}$  est un récepteur avec un triplet  $(41 \rightarrow 5, 1, 1)$ .

Les automates pour ce modèle sont décrits dans la figure 3.25.



*Figure 3.25 : Modèles RAS pour la cellule virtuelle  $C_5$ .*

**6. Algorithme de Génération Automatique de Descripteur Markovien GADM :**

L'obtention des résultats quantitatifs par l'analyse nécessite le passage à une autre représentation plus adaptée, c'est-à-dire les matrices de transition. Dans ce qui suit on va présenter la démarche que nous avons adoptée pour passer à la représentation Markovienne.

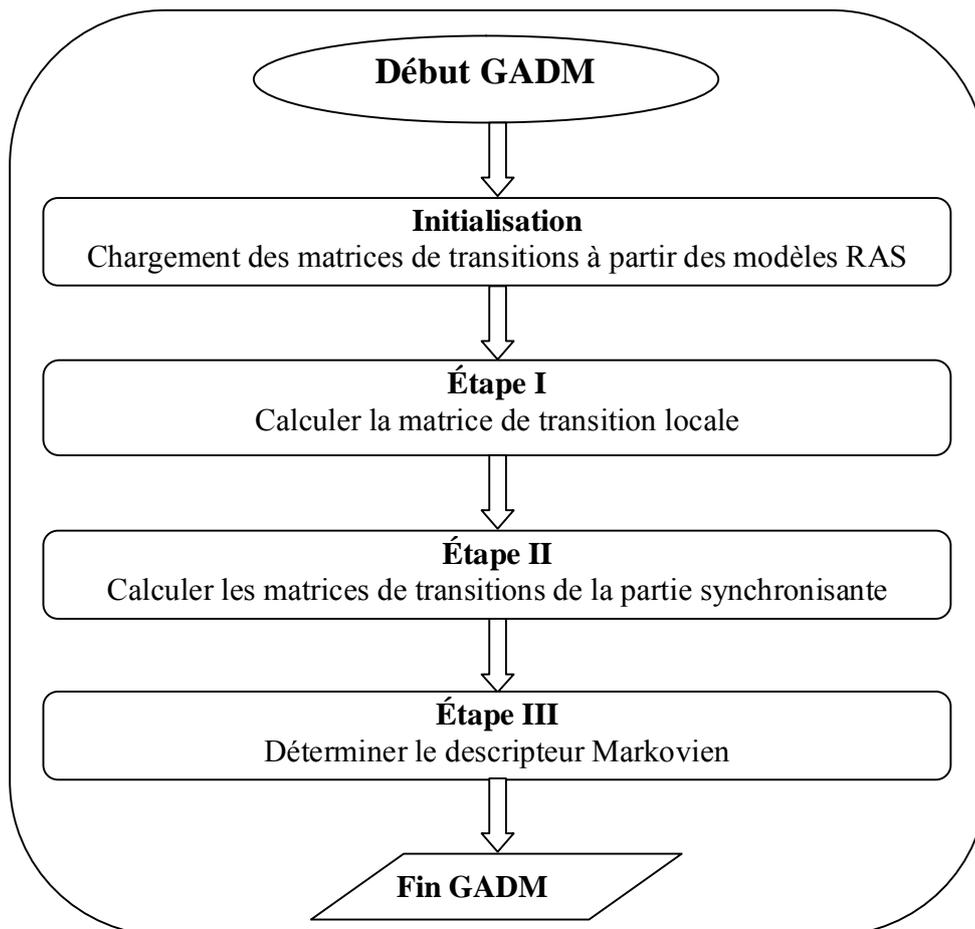
**6.1. Principe de l'algorithme :**

Pour générer le descripteur markovien d'un réseau d'automates stochastique, la démarche est la suivante :

- Chargement des matrices de transition en partant des modèles RAS ;
- Calcul des transitions locales pour chaque modèle RAS ;
- Calcul des transitions synchronisant positive et négative pour chaque modèle RAS ;
- Calcul de descripteur markovien.

Cette approche est baptisée GADM (Génération Automatique de Descripteur Markovien). Après la modélisation du système de production par les RAS, on calcul les matrices de transitions de chaque module à part, puis on déduit le descripteur markovien du système de production.

La figure 3.26 décrit le principe de l'algorithme de Génération Automatique de Descripteur Markovien.



**Figure 3.26 :** *Algorithme GADM*

**Initialisation :**

Le comportement de chaque automate  $A^{(i)}$ ,  $i = 1 \dots N$  est décrit par un ensemble de matrices carrées, toutes de dimension  $\eta_i$ .

**Étape I : Calculer la matrice de transition locale :**

- ▲ On regroupe tous les taux des événements locaux de chaque automate  $A^{(i)}$  dans une matrice de transition locale  $Q_l^{(i)}$ .
- ▲ Les automates non concernés par un événement locale ont des matrices identités

**Étape II :**

Étape II.1 : Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant ;

Étape II.2 : Chaque événement synchronisant du modèle correspond à une paire de matrices pour chaque automate :

Étape II.2.1 : La partie synchronisante positive

$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix}$  la matrice de transition synchronisante positive de  $A^{(i)}$ .

Étape II.2.2 : La partie synchronisante négative

$\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix}$  la matrice de transition synchronisante négative de  $A^{(i)}$ .

Les automates non concernés par un événement synchronisant ont des matrices identités pour les matrices positives et négatives.

**Étape III :**

Le générateur Markovien  $Q$  correspondant à la chaîne de Markov associée aux réseaux d'automates stochastiques est défini par la formule tensorielle appelée Descripteur Markovien:

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q_l^{(i)} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left( \bigotimes_{i=1}^N Q_{e^+}^{(i)} + \bigotimes_{i=1}^N Q_{e^-}^{(i)} \right)$$

**6.2. Illustration et application de l'algorithme GADM :**

Nous allons appliquer chacune de ces étapes à des exemples permettant d'illustrer les différentes caractéristiques.

**6.2.1. Application à la première cellule :**

On va appliquer l'algorithme GADM sur la première cellule (cellule divergence machine-stocks aval) comme il est expliqué ci-dessous :

**Étape I :** Matrices de transition locale

$$Q_i^{11} = \begin{bmatrix} -\delta_0 & \delta_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_i^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & -\delta_1 - \lambda_1 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}, \quad Q_i^{21} = \begin{bmatrix} -\delta_1 - \pi_1 & \delta_1 + \pi_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_i^{22} = \begin{bmatrix} -\delta_1 - \pi_2 & \delta_1 + \pi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape II :** les matrices de transition synchronisante

L'évènement :  $11 \rightarrow 1$  :

**Étape II.1 :** Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant

L'automate est le maître de l'évènement  $11 \rightarrow 1$

**Étape II.2 :**

**Étape II.2.1 :** La partie synchronisante positive

$$Q_{11 \rightarrow 1}^{11+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^{21+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^{22+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.2.2 :** La partie synchronisante négative

$$Q_{11 \rightarrow 1}^{11-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^{21-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{11 \rightarrow 1}^{22-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape III :** le descripteur Markovien :

$$Q_1 = [Q_i^{11} \oplus Q_i^1 \oplus Q_i^{21} \oplus Q_i^{22}] + [Q_{11 \rightarrow 1}^{+} + Q_{11 \rightarrow 1}^{-}]$$

$Q_1 =$

*	$\delta_1\pi_2$	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	*	0	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	*	$\delta_1\pi_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0	0
$\delta_1$	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	$\delta_1\pi_1$	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0	0
0	$\delta_1$	0	0	0	*	0	$\delta_1\pi_1$	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0	0	0
0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0
0	0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	0	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0
$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0	0
0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	0	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$	0
0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$
0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_0$
0	0	0	0	$\varepsilon_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\varepsilon_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	0	$\delta_1\pi_1$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\varepsilon_1$	0	0	0	0	0	0	0	*	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	$\delta_1\pi_1$	$\lambda_1$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	0	$\delta_1\pi_1$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_1$	0	0	0	*	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_1\pi_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	*

**6.2.2. Application à la deuxième cellule :**

Application de l'algorithme GADM sur la deuxième cellule (cellule série)

**Étape I :** Matrices de transition locale

$$Q_i^{21} = \begin{bmatrix} -\delta_1\pi_1 & \delta_1\pi_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 & -\delta_2 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}, Q_i^{31} = \begin{bmatrix} -\delta_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape II :** les matrices de transition synchronisante

L'évènement : 21 → 2 :

**Étape II.1 :** Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant

L'automate est le maître de l'évènement  $21 \rightarrow 2$

**Étape II.2 :**

**Étape II.2.1 :** La partie synchronisante positive

$$Q_{21 \rightarrow 2}^{21+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix}, Q_{21 \rightarrow 2}^{2+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{21 \rightarrow 2}^{31+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.2.2 :** La partie synchronisante négative

$$Q_{21 \rightarrow 2}^{21-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}, Q_{22 \rightarrow 2}^{2-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{21 \rightarrow 2}^{31-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape III :** le descripteur Markovien :

$$Q_2 = [Q_i^{21} \oplus Q_i^2 \oplus Q_i^{31}] + [Q_{21 \rightarrow 2}^+ + Q_{21 \rightarrow 2}^-]$$

	OR0	OR1	OM0	OM1	OP0	OP1	IR0	IR1	IM0	IM1	IP0	IP1
OR0	*	$\delta_2$	0	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$	0	0	0	0	0
OR1	0	*	0	0	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$	0	0	0	0
OM0	$\delta_2$	0	*	$\delta_2$	$\lambda_2$	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$	0	0	0
OM1	0	$\delta_2$	0	*	0	$\lambda_3$	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$	0	0
OP0	$\mu_2$	0	0	0	*	$\delta_2$	0	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$	0
OP1	0	$\mu_2$	0	0	0	*	0	0	0	0	0	$\delta_1 \pi_1$
IR0	0	0	$\varepsilon_2$	0	0	0	*	$\delta_2$	0	0	0	0
IR1	0	0	0	$\varepsilon_2$	0	0	0	*	0	0	0	0
IM0	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$	0	*	$\delta_2$	$\lambda_3$	0
IM1	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$	0	*	0	$\lambda_3$
IP0	0	0	0	0	0	0	$\mu_2$	0	0	0	*	$\delta_2$
IP1	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_2$	0	0	0	*

**6.2.3. Application à la troisième cellule :**

**Étape I :** Matrices de transition locale

$$Q_i^{22} = \begin{bmatrix} -\delta_1 \pi_2 & \delta_1 \pi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_i^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta_3 & -(\delta_3 + \lambda_3) & \lambda_3 \\ \mu_3 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}, Q_i^{32} = \begin{bmatrix} -\delta_3 & \delta_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape II :** les matrices de transition synchronisante

L'évènement :  $22 \rightarrow 3$  :

**Étape II.1 :** Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant

L'automate est le maître de l'évènement  $22 \rightarrow 3$

**Étape II.2 :**

**Étape II.2.1 :** La partie synchronisante positive

$$Q_{22 \rightarrow 3^+}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 \end{bmatrix}, Q_{22 \rightarrow 3^+}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{22 \rightarrow 3^+}^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.2.2 :** La partie synchronisante négative

$$Q_{22 \rightarrow 3^-}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3 \end{bmatrix}, Q_{22 \rightarrow 3^-}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{22 \rightarrow 3^-}^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape III :** le descripteur Markovien :

$$Q_3 = [Q_i^{22} \oplus Q_i^3 \oplus Q_i^{32}] + [Q_{22 \rightarrow 3^+} + Q_{22 \rightarrow 3^-}]$$

	ORO	OR1	OMO	OM1	OP0	OP1	IRO	IR1	IMO	IM1	IPO	IP1
ORO	*	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_1\pi_2$	0	0	0	0	0
OR1	0	*	0	0	0	0	0	$\delta_1\pi_2$	0	0	0	0
OMO	$\delta_3$	0	*	$\delta_3$	$\lambda_3$	0	0	0	$\delta_1\pi_2$	0	0	0
OM1	0	$\delta_3$	0	*	0	$\lambda_3$	0	0	0	$\delta_1\pi_2$	0	0
OP0	$\mu_3$	0	0	0	*	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_1\pi_2$	0
OP1	0	$\mu_3$	0	0	0	*	0	0	0	0	0	$\delta_1\pi_2$
IRO	0	0	$\varepsilon_3$	0	0	0	*	$\delta_3$	0	0	0	0
IR1	0	0	0	$\varepsilon_3$	0	0	0	*	0	0	0	0
IMO	0	0	0	0	0	0	$\delta_3$	0	*	$\delta_3$	$\lambda_3$	0
IM1	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_3$	0	*	0	$\lambda_3$
IPO	0	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	*	$\delta_3$
IP1	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	*

#### 6.2.4. Application à la quatrième cellule :

**Étape I :** Matrices de transition locale

$$Q_i^{31} = \begin{bmatrix} -\delta_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_i^{32} = \begin{bmatrix} -\delta_3 & \delta_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_i^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta_4 & -(\delta_4 + \lambda_4) & \lambda_4 \\ \mu_4 & 0 & -\mu_4 \end{bmatrix}, Q_i^{41} = \begin{bmatrix} -\delta_4 & \delta_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape II :** les matrices de transition synchronisante

**Étape II.A :** L'évènement :  $31 \rightarrow 4$  :

**Étape II.A.1 :** Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant

L'automate est le maitre de l'évènement  $31 \rightarrow 4$

**Étape II.A.2 :**

**Étape II.A.2.1 :** La partie synchronisante positive

$$Q_{31 \rightarrow 4^+}^{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi_4 \varepsilon_{41} & 0 \end{bmatrix}, Q_{31 \rightarrow 4^+}^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{31 \rightarrow 4^+}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{31 \rightarrow 4^+}^{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.A.2.2 :** La partie synchronisante négative

$$Q_{31 \rightarrow 4^-}^{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi_4 \varepsilon_{41} \end{bmatrix}, Q_{31 \rightarrow 4^-}^{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{31 \rightarrow 4^-}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{31 \rightarrow 4^-}^{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.B :** L'évènement :  $32 \rightarrow 4$  :

**Étape II.B.1 :** Identifier l'automate émetteur de l'évènement synchronisant

L'automate est le maitre de l'évènement  $32 \rightarrow 4$

**Étape II.B.2 :**

**Étape II.B.2.1 :** La partie synchronisante positive

$$Q_{32 \rightarrow 4^+}^{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{32 \rightarrow 4^+}^{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi_4 \varepsilon_{42} & 0 \end{bmatrix}, Q_{32 \rightarrow 4^+}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{32 \rightarrow 4^+}^{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Étape II.B.2.2 :** La partie synchronisante négative

$$Q_{32 \rightarrow 4^-}^{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{32 \rightarrow 4^-}^{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi_4 \varepsilon_{42} \end{bmatrix}, Q_{32 \rightarrow 4^-}^4 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{32 \rightarrow 4^-}^{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

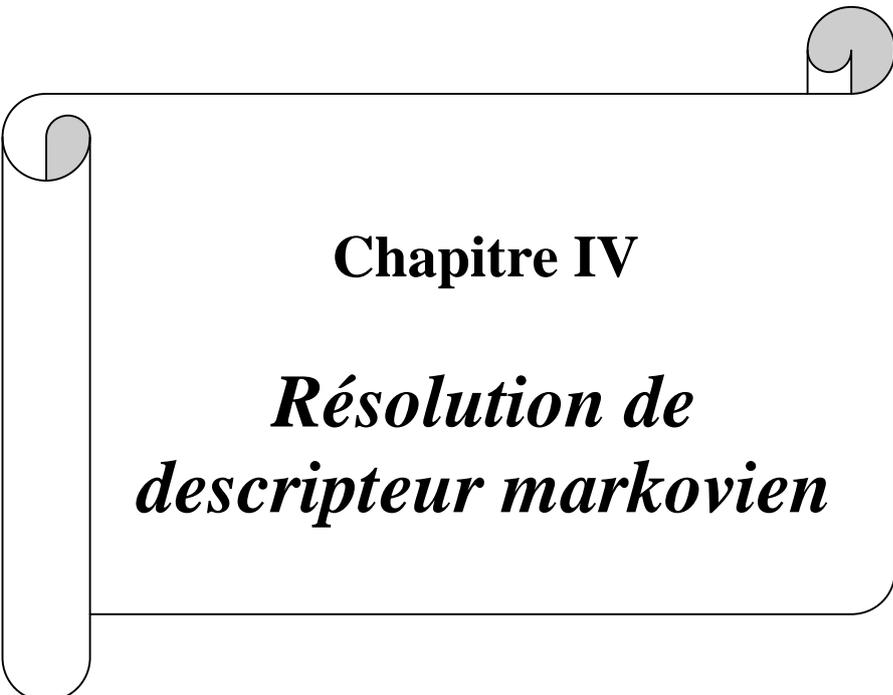
**Étape III :** le descripteur Markovien :

$$Q_4 = [Q_i^{31} \oplus Q_i^{32} \oplus Q_i^4 \oplus Q_i^{41}] + [Q_{31 \rightarrow 4^+} + Q_{31 \rightarrow 4^-} + Q_{32 \rightarrow 4^+} + Q_{32 \rightarrow 4^-}]$$

	00R000R	100M0	00M1	00P000P	101R001R	101M0	01M1	01P001P	110R010R	110M0	10M1	10P010P	111R011R	111M011M	111P011P				
00R0	*	$\delta_4$	0	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0	0	0	0	0
00R1	0	*	0	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0	0	0	0	0
00M0	$\delta_4$	0	*	$\delta_4$	$\lambda_4$	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0	0	0
00M1	0	$\delta_4$	0	*	0	$\lambda_4$	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0	0
00P0	$\mu_4$	0	0	0	*	$\delta_4$	0	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0
00P1	0	$\mu_4$	0	0	0	*	0	0	0	0	0	$\delta_3$	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0
01R0	0	0	$\pi_4 \epsilon_{42}$	0	0	0	*	$\delta_4$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0	0
01R1	0	0	0	$\pi_4 \epsilon_{42}$	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$	0	0
01M0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*	$\delta_4$	$\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$
01M1	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*	0	$\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$
01P0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0	0	0	*	$\delta_4$	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$
01P1	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	$\delta_2$
10R0	0	0	$\pi_3 \epsilon_{41}$	0	0	0	0	0	0	0	0	*	$\delta_4$	0	0	0	$\delta_3$	0	0
10R1	0	0	0	$\pi_3 \epsilon_{41}$	0	0	0	0	0	0	0	0	*	0	0	0	0	$\delta_3$	0
10M0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*	$\delta_4$	$\lambda_4$	0	0	$\delta_3$
10M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*	0	$\lambda_4$	0	$\delta_3$
10P0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0	0	0	*	$\delta_4$	0	$\delta_3$
10P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0	0	0	*	0	$\delta_3$
11R0	0	0	0	0	0	0	0	$\pi_3 \epsilon_{41}$	0	0	0	0	0	$\pi_4 \epsilon_{42}$	0	0	0	*	$\delta_4$
11R1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\pi_3 \epsilon_{41}$	0	0	0	0	0	$\pi_4 \epsilon_{42}$	0	0	0	*
11M0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*	$\delta_4$
11M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\delta_4$	0	*
11P0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0	0
11P1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_4$	0

**7. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté l’approche suivie dans ce travail. Elle consiste en la décomposition du SdP choisi en cellule élémentaires puis la modélisation de ces cellules par les RAS, qui sont utilisés généralement pour la modélisation des systèmes informatiques.



**Chapitre IV**

***Résolution de  
descripteur markovien***

**1. Introduction :**

Dans ce chapitre, on calcule la distribution stationnaire du modèle markovien du système de production complet choisi pour notre étude. En partant des descripteurs markoviens cellulaires.

**2. Résolution modulaire des descripteurs Markovien :**

Afin de calculer la distribution stationnaire du modèle markovien du système de production complet, nous utilisons l'algorithme PAMAV [Olivier, 95], [Simeu, 98] auxquels nous avons apporté certaines modifications. Autrement dit nous l'adaptions aux RAS. Cette approche est de nature itérative, en partant de la forme cellulaire du système étudié.

La forme modulaire à laquelle nous avons aboutit à partir des modèles RAS est telle que chaque cellule interagit fortement avec celles qui la précèdent ainsi qu'avec celles qui lui succèdent ; Cette forte interaction impose une méthode de résolution de type itératif car seules ces méthodes sont capables de véhiculer ces contraintes au cours de passage successifs d'une cellule à une autre.

On résout séparément les descripteurs markovien cellulaire, puis on propage les résultats vers les cellules suivante pour la propagation vers l'aval et jusqu'aux cellules précédentes pour la propagation vers l'amont.

**2.1. Les paramètres à propager :**

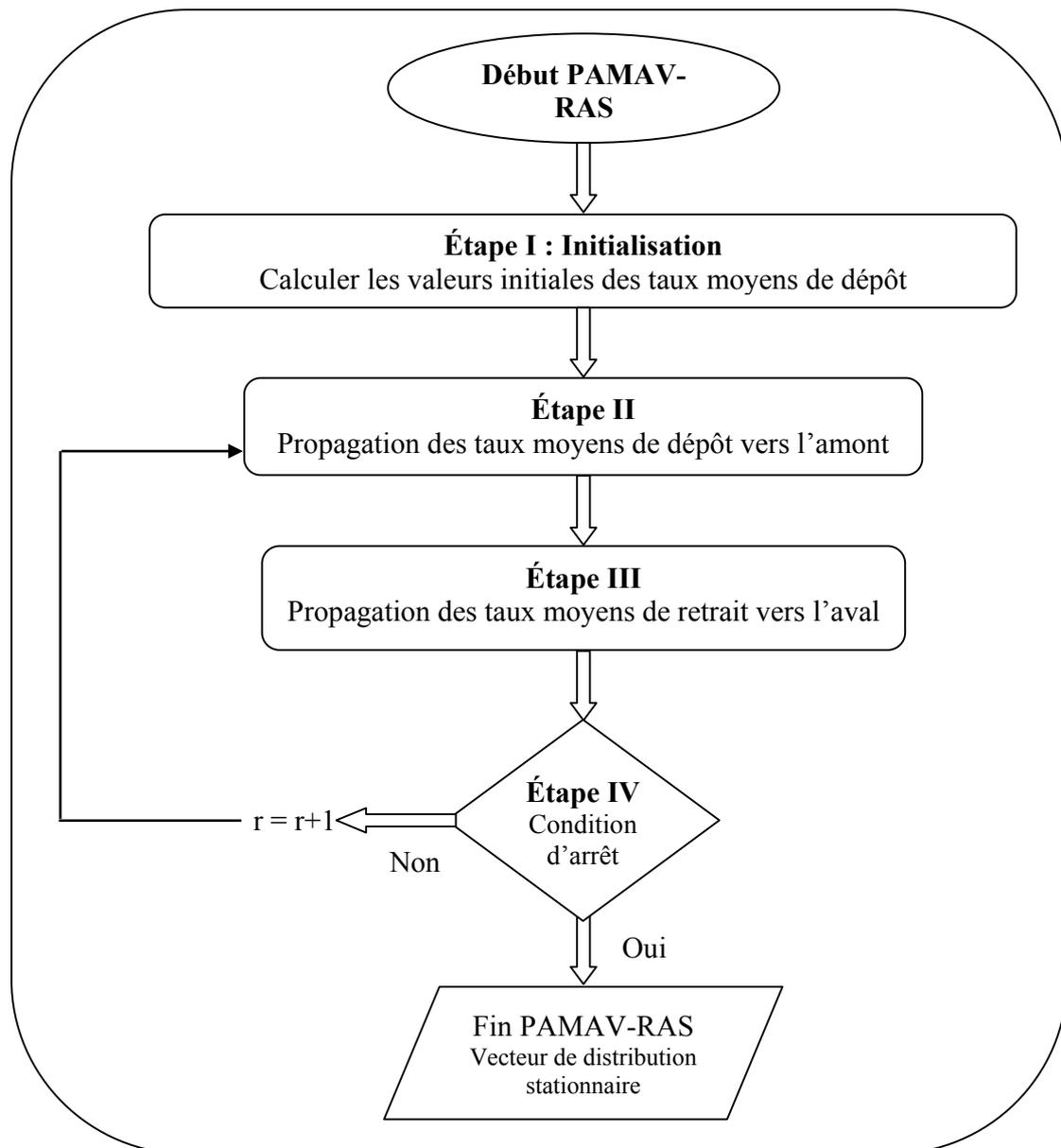
On a vu que chaque cellule fournit des pièces à celles qui lui succèdent et s'alimente en pièces auprès de cellules qui la précèdent, donc les paramètres à propager vers les cellules en aval sont les fréquences moyenne de transition de service des machines, et vers les cellules en amont les fréquences moyenne de transition de chargement des machines.

**2.2. Principe de propagation amont aval :**

Connaissant les paramètres à propager et il ne reste que la méthode de propagation.

- Avant d'entamer la première itération, il faut introduire dans le programme des valeurs initiales, ces valeurs peuvent être quelconques et ne modifie pas les valeurs de solutions obtenues.
- Comme pour tout algorithme itératif il faut définir une condition d'arrêt.
- Pour chaque itération il faut propager les informations nécessaires vers l'amont puis vers l'aval successivement. Ces informations sont les taux de dépôt et les taux de retrait qui sont les inconnues que l'algorithme PAMAV-RAS doit identifier.

Le principe de cet algorithme est résumé dans la Figure 4.1.



**Figure 4.1** : le principe de la propagation amont aval selon PAMAV-RAS

Nous donnons maintenant quelque hypothèse avant d'entamer la description de cet algorithme qui assure la propagation vers l'amont et vers l'aval.

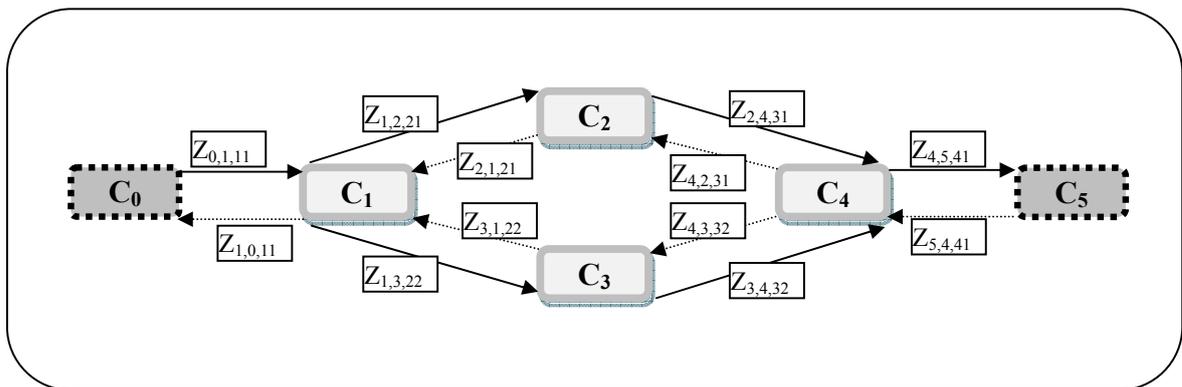
### 2.3. Hypothèses et notations :

On note :

- ${}^{\circ}S(C_i)$  : Ensemble des stocks amont de la cellule  $(C_i)$ .
- $S^{\circ}(C_i)$  : Ensemble des stocks aval de la cellule  $(C_i)$ .

- $\text{pred}(C_i)$  : Prédécesseur de la cellule ( $C_i$ ).
- $\text{succ}(C_i)$  : successeur de la cellule ( $C_i$ ).
- $S_k$  : appelé stock intermédiaire, c'est le stock commun entre deux cellules adjacentes. C'est un stock aval pour la première cellule et en même temps c'est un stock amont pour la deuxième cellule.
- $D_{\text{vid}_M}$  : Le débit à vide de la machine
- La cellule ( $C_j$ ) est un successeur pour la cellule ( $C_i$ ).
- $\tau_{(i,j,k)}$  : taux moyen de dépôt d'une pièce dans le stock  $S_k$ .
- $\tau_{(j,i,k)}$  : taux moyen de retrait d'une pièce du stock  $S_k$ .

On mentionne sur la figure 4.2 tout les taux moyens de dépôt et de retrait du SdP étudié.



**Figure 4.2 :** Représentation des interactions entre les cellules

De la figure 4.2 on observe que les taux moyen de dépôt et de retrait s'assemblent par paires, à chaque taux moyen de dépôt correspond un taux moyen de retrait.

L'ensemble des paramètres correspondent à notre système de production sont données dans le tableau 4.1 :

		$^{\circ}S$	$S^{\circ}$	pred	succ
Cellule	C1	$S_{11}$	$S_{21}, S_{22}$	$C_0$	$C_2, C_3$
	C2	$S_{21}$	$S_{31}$	$C_1$	$C_4$
	C3	$S_{22}$	$S_{32}$	$C_1$	$C_4$
	C4	$S_{31}, S_{32}$	$S_{41}$	$C_2, C_3$	$C_5$

**Tableau 4.1 :** paramètres du système de production

Nous présentons ce qui suit la modification apportée à l'algorithme afin de calculer la distribution stationnaire.

#### 2.4. Algorithme PAMAV-RAS :

Cet algorithme comprend quatre étapes :

- 1- La première initialise des paramètres à propager dans le système.
- 2- La deuxième calcule des taux moyens de retrait par la propagation des taux moyens de dépôt vers l'amont.
- 3- La troisième calcule des taux moyens de dépôt par la propagation des taux moyens de retrait vers l'aval.
- 4- La dernière représente la condition d'arrêt de cette propagation.

##### 2.4.1. Étape I : Initialisation

Nous allons donner comme valeur initiale à chaque taux de dépôt, la somme des débits à vide des machines qui alimentent le stock  $S_k$ .

La matrice des taux de transition est la suivante :

	R	M	P
R	$-\varepsilon$	$\varepsilon$	0
M	$\delta$	$-(\delta+\lambda)$	$\lambda$
P	$\mu$	0	$-\mu$

Les calculs sont faits sous Matlab, le vecteur de distribution stationnaire est le suivant :

$$[Pr] = \begin{bmatrix} Pr\_R \\ Pr\_M \\ Pr\_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu(\delta + \lambda)}{\mu(\delta + \lambda) + \varepsilon(\lambda + \mu)} \\ \frac{\mu * \varepsilon}{\mu(\delta + \lambda) + \varepsilon(\lambda + \mu)} \\ \frac{\lambda * \varepsilon}{\mu(\delta + \lambda) + \varepsilon(\lambda + \mu)} \end{bmatrix}$$

Cette étape se résume par deux pas :

Le débit à vide de la machine isolée ( $D_{vid\_M}$ ) est le nombre de pièces sortant de la machine.

Ceci se traduit par le produit de la probabilité que la machine soit en marche ( $Pr\_M$ ) avec le taux moyen de service de la machine ( $\delta$ ). Ce qui nous donne :

$$Pas\ 1.1 : D_{vid\_M} = Pr\_M * \delta = \frac{\mu * \varepsilon * \delta}{\mu(\delta + \lambda) + \varepsilon(\lambda + \mu)}$$



Pour tout stock  $S_k$ , calculer  $\tau_{(i,j,k)}$

$$\text{Pas 1.2 : } \tau_{(i,j,k)} = \sum_{M_q} D\_vid\_M(M_q)$$

Ensuite, nous calculons les taux de retrait  $\tau_{(i,j,k)}$  afin de les propager vers l'amont.

#### 2.4.2. Étape II : Propagation vers l'amont :

Cette étape permet de calculer les taux de retrait  $\tau_{(j,i,k)}$ , puis les propager d'une cellule  $C_j$  vers tous ses prédécesseurs.

Pour  $j = n$  à 1 et SI  $\text{pred\_C}_j \neq \emptyset$  faire :

Pas II.1 : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $\text{Pr}_j$

Pas II.1.1 : Lire les matrices  $[Q_j]$  et  $[A_j]$

Pas II.1.2 : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $\text{Pr}_j$

$$\text{Pr}_j = Q_j \setminus A_j$$

Pas II.1.3 :

Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

Pas II.2 : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred\_C}_j = \{C_i\};$$

Pour chaque cellule  $C_i$  faire :

Pas II.3 : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S\_k = \{x\}$$

Pour chaque stock  $S_k$  faire :

Pas II.4 : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$q\_S\_k = \{M_q\};$$

Pour toute machine  $M_q$  telle que  $M_q$  appartient à  $S_k$  faire :

Pas II.5 : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_s(M_q) = \text{Pr}_R * \epsilon_j$$

Pas II.6 : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau_{(i,j,k)} = F\_s(M\_q) / \text{Pr\_pds\_S}_k$$

Fin pour  $S_k$

Fin pour  $C_i$

Fin pour  $j$



### 2.4.3. Étape III : Propagation vers l'aval :

Cette étape permet de calculer les taux de dépôt  $\tau_{(i,j,k)}$ , puis les propager d'une cellule  $C_i$  vers tous ses successeurs.

Pour  $i = 1$  à  $n$  et SI  $\text{succ\_}C_i \neq \emptyset$  faire :

Pas III.1 : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

Pas III.1.1 : Lire les matrices  $[Q_i]$  et  $[A_i]$

Pas III.1.2 : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

$$Pr_i = Q_i \setminus A_i$$

Pas III.1.3 :

Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une place libre dans le stock  $S_k$ .

Pas III.2 : Calculer l'ensemble des successeurs de la cellule  $C_i$

$$\text{succ\_}C_i = \{C_j\};$$

POUR chaque cellule  $C_j$  faire :

Pas III.3 : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{x\}$$

Pour chaque stock  $S_k$  faire :

Pas III.4 : Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$$q_{S_k} = \{M_q\};$$

Pour toute machine  $M_q$  telle que  $M_q$  appartient à  $q_{S_k}$  faire :

Pas III.5 : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_s(M_q) = Pr_R * \epsilon_i$$

Pas III.6 : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau_{(j,i,k)} = F_s(M_q) / Pr_{pls\_}S_k$$

Fin pour  $S_k$

Fin pour  $C_j$

Fin pour  $i$

### 2.4.4. Étape IV : Condition d'arrêt

Tout algorithme itératif doit posséder une condition d'arrêt, c'est-à-dire un test permettant de mettre fin aux itérations.

Pour chaque taux, on calcule l'écart par rapport à la valeur trouvée à la précédente itération

$$\underline{\text{Pas IV.1}} : Z\_d(j,:) = Z(i,:) - Z(i-1,:)$$

$$\underline{\text{Pas IV.2}} : Z\_d(j,:) = Z\_d(j,:) * Z\_d(j,:)$$

$$\underline{\text{Pas IV.3}} : \text{somme} = \text{sum}(Z\_d(j,:))$$

$$\underline{\text{Pas IV.4}} : \text{condition\_arrêt} = \text{sqrt}(\text{somme})$$

## 2.5. Application de l'algorithme PAMAV-RAS sur l'exemple de l'étude :

Maintenant que les descripteurs markovien cellulaires sont calculés dans la partie précédente, nous allons dérouler l'algorithme PAMAV-RAS et Nous allons détailler les itérations de cet algorithme :

### Itération n°0 :

#### 1.5.1. Étape I : Initialisation

Nous prenons comme paramètre les valeurs numériques suivantes :

- *Taux de chargement de la machine :*

$$\epsilon_0 = 300; \epsilon_1 = 302; \epsilon_2 = 281; \epsilon_3 = 272; \epsilon_4 = 241; \epsilon_{41} = 260; \epsilon_{42} = 250; \epsilon_5 = 240;$$

- *Taux de service de la machine :*

$$\delta_0 = 305; \delta_1 = 300; \delta_2 = 281; \delta_3 = 270; \delta_4 = 243; \delta_5 = 240;$$

- *probabilité :*

$$\pi_1 = 0.75; \pi_2 = 0.25; \pi_3 = 0.75; \pi_4 = 0.25;$$

- *Taux de panne de la machine :*

$$\lambda_0 = 0.0045; \lambda_1 = 0.0058; \lambda_2 = 0.00033; \lambda_3 = 0.0113; \lambda_4 = 0.0016; \lambda_5 = 0.0017;$$

- *Taux de réparation de la machine :*

$$\mu_0 = 0.1347; \mu_1 = 0.1146; \mu_2 = 0.5; \mu_3 = 0.4513; \mu_4 = 0.1886; \mu_5 = 0.1532;$$

- *Précision des calculs :*

$$\alpha = 10e-4;$$

Nous allons donner comme valeur initiale à chaque taux de dépôt, la somme des débits à vide des machines qui alimentent le stock  $S_k$

Les matrices des taux de transition sont les suivantes :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_0\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_0 & \varepsilon_0 & 0 \\ \delta_0 & -(\delta_0 + \lambda_0) & \lambda_0 \\ \mu_0 & 0 & -\mu_0 \end{array} \right. \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_2\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 & 0 \\ \delta_2 & -(\delta_2 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{array} \right. \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_4\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_4 & \varepsilon_4 & 0 \\ \delta_4 & -(\delta_4 + \lambda_4) & \lambda_4 \\ \mu_4 & 0 & -\mu_4 \end{array} \right. \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_1\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \delta_1 & -(\delta_1 + \lambda_1) & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{array} \right. \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_3\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_3 & \varepsilon_3 & 0 \\ \delta_3 & -(\delta_3 + \lambda_3) & \lambda_3 \\ \mu_3 & 0 & -\mu_3 \end{array} \right. \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{R} \quad \text{M} \quad \text{P} \\ \text{[B}_5\text{]} = \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{M} \\ \text{P} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\varepsilon_5 & \varepsilon_5 & 0 \\ \delta_5 & -(\delta_5 + \lambda_5) & \lambda_5 \\ \mu_5 & 0 & -\mu_5 \end{array} \right. \end{array}
 \end{array}$$

Les calculs sont faits sous Matlab,

**Pas 1.1** : Le débit à vide de la machine isolée

- Débit à vide de la machine M<sub>0</sub> isolée

$$D_{vide}(M_0) = \frac{\mu_0 * \varepsilon_0 * \delta_0}{\mu_0 * (\delta_0 + \lambda_0) + \varepsilon_0 * (\lambda_0 + \mu_0)} = 148.7740$$

- Débit à vide de la machine M<sub>1</sub> isolée

$$D_{vide}(M_1) = \frac{\mu_1 * \varepsilon_1 * \delta_1}{\mu_1 * (\delta_1 + \lambda_1) + \varepsilon_1 * (\lambda_1 + \mu_1)} = 146.7705$$

- Débit à vide de la machine M<sub>2</sub> isolée

$$D_{vide}(M_2) = \frac{\mu_2 * \varepsilon_2 * \delta_2}{\mu_2 * (\delta_2 + \lambda_2) + \varepsilon_2 * (\lambda_2 + \mu_2)} = 140.0371$$

- Débit à vide de la machine M<sub>3</sub> isolée

$$D_{vide}(M_3) = \frac{\mu_3 * \varepsilon_3 * \delta_3}{\mu_3 * (\delta_3 + \lambda_3) + \varepsilon_3 * (\lambda_3 + \mu_3)} = 133.8139$$

- Débit à vide de la machine M<sub>4</sub> isolée



$$D_{vide}(M_4) \frac{\mu_4 \varepsilon_4 \delta_4}{\mu_4(\delta_4 + \lambda_4) + \varepsilon_4(\lambda_4 + \mu_4)} = 163.6411$$

Pour tout stock  $S_{i,j}$ , calculer  $Z_{i,j,k}$

$$\text{Pas 1.2 : } Z_{i,j,k} = \sum_{M_q} D_{vide}(M_q)$$

$$\tau_{0,1,11}^{(0)} = D_{vide}(M_0) = 148.7740$$

$$\tau_{1,2,21}^{(0)} = D_{vide}(M_1) = 146.7705$$

$$\tau_{1,3,22}^{(0)} = D_{vide}(M_1) = 146.7705$$

$$\tau_{2,4,31}^{(0)} = D_{vide}(M_2) = 140.0371$$

$$\tau_{3,4,32}^{(0)} = D_{vide}(M_3) = 133.8139$$

$$\tau_{4,5,41}^{(0)} = D_{vide}(M_4) = 163.6411$$

Ensuite, nous remplaçons les nouvelles valeurs des taux de dépôt  $\tau_{(i,j,k)}$  dans les descripteurs cellulaires, afin de les propager vers l'amont.

### 1.5.2. Étape II : Propagation vers l'amont

Cette étape permet de calculer les taux de retrait  $\tau_{(j,l,k)}$ , puis les propager d'une cellule  $C_j$  vers tous ses prédécesseurs.

#### Étape II : propagation des taux de retrait vers l'amont

On a  $n = 6$  machines, donc 6 cellules (dont, deux cellules sont virtuelle  $C_0$  et  $C_5$ ).

**Pour  $j = 5$  à 1 et (SI  $\text{pred}(C_j) \neq \emptyset$ ) faire :**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

*Pas II.1.1* : Lire les matrices  $[Q_5]$  et  $[C_5]$

$$[Q_j] = [Q_5];$$

$$[C_j] = [C_5];$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$$\text{Pr}_5 = [0.2499 ; 0.2499 ; 0.0002 ; 0.2499 ; 0.2499 ; 0.0000];$$

*Pas II.1.3* :

Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr}_{pds\_S41} = \text{Pr}_5(4,1) + \text{Pr}_5(5,1) + \text{Pr}_5(6,1)$$

$$\text{Pr}_{pds\_S41} = 0.4999$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_5) = \{C_4\}$$

**Pour  $C_4$  faire**

*Pas II.3* :



Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{41\}$$

**Pour  $S_{41}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{41}^\circ = \{M_5\}$$

**Pour  $M_5$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

( $\text{Pr}_5(4, 1)$ : est le seul état où  $M_4$  est au repos, et au moins une pièce disponible dans  $S_{41}$ )

$$F_{\text{dum}_M5} = \text{Pr}_5(4, 1) * \epsilon_5 ;$$

$$F_{\text{dum}_M5} = 59.9858$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(5,4,41) = F_{\text{dum}_M5} / \text{Pr}_{\text{pds}_S41}$$

$$\tau(5,4,41) = 119.9994$$

**Fin  $M_5$  ;**

**Fin  $S_{41}$  ;**

**Fin  $C_4$  ;**

**Fin  $j = 5$  ;**

**Pour  $j = 4$  et  $\text{pred}(C_4) = \{C_2, C_3\} \neq \emptyset$**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

*Pas II.1.1* : Lire les matrices [Q4] et [C5]

$$[QJ] = [Q4]$$

$$[CJ] = [C4]$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_4$

$$\text{Pr}_4 = [0.0451 ; 0.0427 ; 0.0434 ; 0.0427 ; 0.0355 ; 0.0431 ; 0.0428 ; 0.0427 ; 0.0428 ; 0.0427 ; 0.0431 ; 0.0431 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0194 ; 0.0431 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0427 ; 0.0431 ; 0.0431]$$

*Pas II.1.3* :

Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr}_{\text{pds}_S31} = \text{Pr}_4(13, 1) + \text{Pr}_4(14, 1) + \text{Pr}_4(15, 1) + \text{Pr}_4(16, 1) + \text{Pr}_4(17, 1) + \text{Pr}_4(18, 1) + \text{Pr}_4(19, 1) + \text{Pr}_4(20, 1) + \text{Pr}_4(21, 1) + \text{Pr}_4(22, 1) + \text{Pr}_4(23, 1) + \text{Pr}_4(24, 1)$$

$$\text{Pr}_{\text{pds}_S31} = 0.4904$$

$$\begin{aligned} \text{Pr\_pds\_S32} &= \text{Pr\_4}(7, 1) + \text{Pr\_4}(8, 1) + \text{Pr\_4}(9, 1) + \text{Pr\_4}(10, 1) + \text{Pr\_4}(11, 1) + \text{Pr\_4}(12, 1) \\ &+ \text{Pr\_4}(19, 1) + \text{Pr\_4}(20, 1) + \text{Pr\_4}(21, 1) + \text{Pr\_4}(22, 1) + \text{Pr\_4}(23, 1) + \text{Pr\_4}(24, 1) \\ \text{Pr\_pds\_S32} &= 0.5142 \end{aligned}$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_4) = \{C_3, C_2\}$$

**Pour  $C_3$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{31\}$$

**Pour  $S_{41}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{31}^\circ = \{M_4\}$$

**Pour  $M_4$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{dum\_M4}} = (\text{Pr\_4}(19, 1) + \text{Pr\_4}(20, 1)) * \epsilon_{41}$$

$$F_{\text{dum\_M4}} = 22.2203$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(4,2,31) = F_{\text{dum\_M4}} / \text{Pr\_pds\_S31}$$

$$\tau(4,2,31) = 45.3117$$

**Pour  $C_2$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{32\}$$

**Pour  $S_{32}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{32}^\circ = \{M_4\}$$

**Pour  $M_4$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{dum\_M4}} = (\text{Pr\_4}(19, 1) + \text{Pr\_4}(20, 1)) * \epsilon_{42}$$

$$F_{\text{dum\_M4}} = 21.3656$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(4,3,32) = F_{\text{dum\_M4}} / \text{Pr\_pds\_S32}$$

$$\tau(4,3,32) = 41.5483$$

**Fin  $M_4$ ;**

**Fin  $S_{31}$ ; Fin  $S_{32}$ ;**

**Fin  $C_3$  ;**

**Fin  $C_2$  ;**

**Fin  $j = 4$  ;**

**.....continuer jusqu'à  $j=1$**

**Pour  $j = 1$  et  $\text{pred}(C_j) = \{C_l\} \neq \emptyset$  ;**

Pas II.1 : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

Pas II.1.1 : Lire les matrices [Q5] et [C5]

[QJ] = [Q1] ;

[CJ] = [C1] ;

Pas II.1.2 : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$\text{Pr}_1 = [0.0342 ; 0.0409 ; 0.0368 ; 0.0513 ; 0.0314 ; 0.0266 ; 0.0243 ; 0.0513 ; 0.0523 ; 0.0355 ; 0.0593 ; 0.0513 ; 0.0305 ; 0.0332 ; 0.0272 ; 0.0513 ; 0.0324 ; 0.0381 ; 0.0357 ; 0.0513 ; 0.0512 ; 0.0513 ; 0.0512 ; 0.0513 ]$  ;

Pas II.1.3 : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$\text{Pr\_pds\_S11} = \text{Pr}_1(13,1) + \text{Pr}_1(14,1) + \text{Pr}_1(15,1) + \text{Pr}_1(16,1) + \text{Pr}_1(17,1) + \text{Pr}_1(18,1) + \text{Pr}_1(19,1) + \text{Pr}_1(20,1) + \text{Pr}_1(21,1) + \text{Pr}_1(22,1) + \text{Pr}_1(23,1) + \text{Pr}_1(24,1)$

$\text{Pr\_pds\_S11} = 0.5048$

Pas II.2 : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$\text{pred}(C_l) = \{C_0\}$

**Pour  $C_0$  faire**

Pas II.3 : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$S_k = \{11\}$

**Pour  $S_{41}$  faire**

Pas II.4 : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$S_{11}^\circ = \{M_1\}$

**Pour  $M_1$  faire**

Pas II.5 : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$F\_dum\_M1 = (\text{Pr}_1(13,1) + \text{Pr}_1(14,1) + \text{Pr}_1(15,1) + \text{Pr}_1(16,1)) * \epsilon_1$  ;

$F\_dum\_M1 = 42.9605$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(1,0,11) = F\_dum\_M1/Pr\_pds\_S11$$

$$\tau(1,0,11) = 85.1063$$

**Fin S<sub>II</sub>** ;

**Fin C<sub>0</sub>**;

**Fin j = 1** ;

**Pour j = 0 et pred (C<sub>0</sub>) = Ø** ;

Après cette itération on obtient la première ligne de la matrice Z qui englobe les taux de dépôts et de retrait

$$Z = [148.7740 \ 146.7705 \ 146.7705 \ 140.0371 \ 133.8139 \ 163.6411 \ 85.1063 \ 99.3674 \ 97.8853 \\ 45.3117 \ 41.5483 \ 119.9994]$$

Dans ce qui suite, nous allons détailler le déroulement de la dernière itération de l'algorithme PAMAV-RAS

**Itération n°18 :**

### 2.5.3. Étape III : propagation des taux de dépôt vers l'aval

On à  $n = 6$  machine, donc 6 cellules.

**Pour i=0 à 5 et (SI succ (C<sub>i</sub>) ≠ Ø) faire :**

*Pas III.1* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire Pr<sub>i</sub>

*Pas III.1.1* : Lire les matrices [Q<sub>i</sub>] et [C<sub>i</sub>]

$$[Q_i] = [Q_0];$$

$$[C_i] = [C_0];$$

*Pas III.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire Pr<sub>i</sub>

$$Pr_0 = [0.1667 ; 0.1667 ; 0.1667 ; 0.1667 ; 0.1667 ; 0.1667]$$

*Pas III.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une place libre dans le stock

$S_k$ .

$$Pr\_pls\_S11 = Pr_0(1, 1) + Pr_0(3, 1) + Pr_0(5, 1);$$

$$Pr\_pls\_S11 = 0.5000$$

*Pas III.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule C<sub>i</sub>

$$succ(C_0) = \{C_1\}$$

**Pour C<sub>1</sub> faire :**

*Pas III.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{S_{11}\}$$

**Pour  $S_{11}$  faire :**

*Pas III.4* : Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$${}^{\circ}S_{11} = \{M_0\}$$

**Pour  $M_0$  faire :**

*Pas III.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{fum}_M0} = Pr_0(1, 1) * \epsilon_0 ;$$

$$F_{\text{fum}_M0} = 50.0000$$

*Pas III.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(0,1,11) = F_{\text{fum}_M0} / Pr_{\text{pls}_S11} ; \tau(0,1,11) = 100.0000$$

**Fin  $M_0$  ;**

**Fin  $S_{11}$  ;**

**Fin  $C_1$  ;**

**Fin  $i = 0$  ;**

**Pour  $i=1$  et ( $SI \text{ succ}(C_i) \neq \emptyset$ ) faire :**

*Pas III.1* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

*Pas III.1.1* : Lire les matrices  $[Q_i]$  et  $[C_i]$

$$[Q_i] = [Q_1];$$

$$[C_i] = [C_1];$$

*Pas III.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

$$Pr_1 = [0.0369 ; 0.0421 ; 0.0421 ; 0.0598 ; 0.0369 ; 0.0270 ; 0.0282 ; 0.0598 ; 0.0369 ; 0.0130 ; 0.0201 ; 0.0598 ; 0.0369 ; 0.0421 ; 0.0352 ; 0.0598 ; 0.0369 ; 0.0421 ; 0.0502 ; 0.0598 ; 0.0369 ; 0.0421 ; 0.0352 ; 0.0598];$$

*Pas III.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une place libre dans le stock

$S_k$ .

$$Pr_{\text{pls}_S21} = Pr_1(1, 1) + Pr_1(2, 1) + Pr_1(5, 1) + Pr_1(6, 1) + Pr_1(9, 1) + Pr_1(10, 1) + Pr_1(13, 1) + Pr_1(14, 1) + Pr_1(17, 1) + Pr_1(18, 1) + Pr_1(21, 1) + Pr_1(22, 1) ;$$

$$Pr_{\text{pls}_S21} = 0.4301$$

$$Pr_{\text{pls}_S22} = Pr_1(1, 1) + Pr_1(3, 1) + Pr_1(5, 1) + Pr_1(7, 1) + Pr_1(9, 1) + Pr_1(11, 1) + Pr_1(13, 1) + Pr_1(15, 1) + Pr_1(17, 1) + Pr_1(19, 1) + Pr_1(21, 1) + Pr_1(23, 1) ;$$

$$Pr_{\text{pls}_S22} = 0.4329$$

*Pas III.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_i$

$$\text{succ}(C_1) = \{C_2, C_3\}$$

**Pour  $C_2$  faire :**

*Pas III.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{S_{21}\}$$

**Pour  $S_{21}$  faire :**

*Pas III.4 :* Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$$^{\circ}S_{21} = \{M_1\}$$

**Pour  $M_1$  faire :**

*Pas III.5 :* Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{fum}_M1} = (Pr_1(1, 1) + Pr_1(2, 1) + Pr_1(13, 1) + Pr_1(14, 1)) * \epsilon_1$$

$$F_{\text{fum}_M1} = 6.8242e-008$$

*Pas III.6 :* Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(1,2,21) = F_{\text{fum}_M1} / Pr_{\text{pls}_S21} ;$$

$$\tau(1,2,21) = 1.5865e-007$$

**Pour  $C_3$  faire :**

*Pas III.3 :* Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{S_{22}\}$$

**Pour  $S_{31}$  faire :**

*Pas III.4 :* Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$$^{\circ}S_{22} = \{M_1\}$$

**Pour  $M_1$  faire :**

*Pas III.5 :* Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{fum}_M1} = (Pr_1(1, 1) + Pr_1(2, 1) + Pr_1(13, 1) + Pr_1(14, 1)) * \epsilon_1$$

$$F_{\text{fum}_M1} = 6.8242e-008$$

*Pas III.6 :* Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(1,3,22) = F_{\text{fum}_M1} / Pr_{\text{pls}_S22} ;$$

$$\tau(1,3,22) = 1.5765e-007$$

**Fin  $M_1$ ;**

**Fin  $S_{21}$  ; Fin  $S_{22}$  ;**

**Fin  $C_2$  ; Fin  $C_3$ ;**

**Fin  $i = 1$  ;**

**Pour  $i=2$  et (SI succ ( $C_i$ )  $\neq \emptyset$ ) faire :**

*Pas III.1 :* Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

*Pas III.1.1 :* Lire les matrices  $[Q_i]$  et  $[C_i]$

$$[Q_i] = [Q_2];$$

$$[C_i] = [C_2];$$

*Pas III.1.2 :* Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $Pr_i$

$$\Pr_2 = [ 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0832 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ] ;$$

*Pas III.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une place libre dans le stock  $S_k$ .

$$\Pr_{\text{pls\_S31}} = \Pr_2(1,1) + \Pr_2(3,1) + \Pr_2(5,1) + \Pr_2(7,1) + \Pr_2(9,1) + \Pr_2(11,1)$$

$$\Pr_{\text{pls\_S31}} = 0.4999$$

*Pas III.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_i$

$$\text{succ}(C_2) = \{C_4\}$$

**Pour  $C_4$  faire :**

*Pas III.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_{k=} = \{S_{31}\}$$

**Pour  $S_{31}$  faire :**

*Pas III.4* : Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$${}^{\circ}S_{31} = \{M_2\}$$

**Pour  $M_2$  faire :**

*Pas III.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{fum\_M2}} = (\Pr_2(1,1) + \Pr_2(7,1)) * \epsilon_2 ;$$

$$F_{\text{fum\_M2}} = 9.2096e-007$$

*Pas III.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(2,4,31) = F_{\text{fum\_M2}} / \Pr_{\text{pls\_S31}}$$

$$\tau(2,4,31) = 1.8422e-006$$

**Fin  $M_2$  ;**

**Fin  $S_{31}$  ;**

**Fin  $C_4$  ;**

**Fin  $i = 2$  ;**

**Pour  $i=3$  et (SI  $\text{succ}(C_i) \neq \emptyset$ ) faire :**

*Pas III.1* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $\Pr_i$

*Pas III.1.1* : Lire les matrices  $[Q_i]$  et  $[C_i]$

$$[Q_i] = [Q_3] ;$$

$$[C_i] = [C_3] ;$$

*Pas III.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité stationnaire  $\Pr_i$

$$\Pr_3 = [ 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0832 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ] ;$$



$$\text{Pr\_pls\_S41} = \text{Pr}_4(1,1) + \text{Pr}_4(3,1) + \text{Pr}_4(5,1) + \text{Pr}_4(7,1) + \text{Pr}_4(9,1) + \text{Pr}_4(11,1) + \text{Pr}_4(13,1) + \text{Pr}_4(15,1) + \text{Pr}_4(17,1) + \text{Pr}_4(19,1) + \text{Pr}_4(21,1) + \text{Pr}_4(23,1) ;$$

$$\text{Pr\_pls\_S41} = 0.5102$$

*Pas III.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule Ci

$$\text{succ}(C_4) = \{C_3\}$$

**Pour  $C_5$  faire :**

*Pas III.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules Ci et Cj

$$S_k = \{S_{41}\}$$

**Pour  $S_{41}$  faire :**

*Pas III.4* : Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock

$${}^\circ S_{41} = \{M_4\}$$

**Pour  $M_4$  faire :**

*Pas III.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F_{\text{fum\_M4}} = (\text{Pr}_4(1,1) + \text{Pr}_4(2,1) + \text{Pr}_4(13,1) + \text{Pr}_4(14,1)) * \epsilon_4 ;$$

$$F_{\text{fum\_M4}} = 104.0739$$

*Pas III.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(4,5,41) = F_{\text{fum\_M4}} / \text{Pr\_pls\_S41} ;$$

$$\tau(4,5,41) = 203.9700$$

**Fin  $M_4$ ;**

**Fin  $S_{41}$  ;**

**Fin  $C_5$ ;**

**Fin  $i = 4$  ;**

**Étape II : propagation des taux de retrait vers l'amont**

**Pour  $j = 5$  à  $0$  et (SI  $\text{pred}(C_j) \neq \emptyset$ ) faire :**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

Pas II.1.1 : Lire les matrices  $[Q_5]$  et  $[C_5]$

$$[Q_j] = [Q_5];$$

$$[C_j] = [C_5] ;$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$$\text{Pr}_5 = [0.2500 ; 0.2500 ; 0.0002 ; 0.2500 ; 0.2500 ; 0.0000] ;$$

*Pas II.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr\_pds\_S41} = \text{Pr}_5(4,1) + \text{Pr}_5(5,1) + \text{Pr}_5(6,1)$$

$$\text{Pr\_pds\_S41} = 0.4999$$



$$\text{Pr\_pds\_S31} = 0.4490$$

$$\text{Pr\_pds\_S32} = \text{Pr}_4(7, 1) + \text{Pr}_4(8, 1) + \text{Pr}_4(9, 1) + \text{Pr}_4(10, 1) + \text{Pr}_4(11, 1) + \text{Pr}_4(12, 1) + \text{Pr}_4(19, 1) + \text{Pr}_4(20, 1) + \text{Pr}_4(21, 1) + \text{Pr}_4(22, 1) + \text{Pr}_4(23, 1) + \text{Pr}_4(24, 1) ;$$

$$\text{Pr\_pds\_S32} = 0.4898$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_4) = \{C_3, C_2\}$$

**Pour  $C_3$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{31\}$$

**Pour  $S_{41}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{31}^\circ = \{M_4\}$$

**Pour  $M_4$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_dum\_M4 = (\text{Pr}_4(19, 1) + \text{Pr}_4(20, 1)) * \epsilon_{41} ;$$

$$F\_dum\_M4 = 5.0875e-012$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(4,2,31) = F\_dum\_M4 / \text{Pr\_pds\_S31} ;$$

$$\tau(4,2,31) = 1.1331e-011$$

**Pour  $C_2$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{32\}$$

**Pour  $S_{32}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{32}^\circ = \{M_4\}$$

**Pour  $M_4$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_dum\_M4 = (\text{Pr}_4(19, 1) + \text{Pr}_4(20, 1)) * \epsilon_{42} ;$$

$$F\_dum\_M4 = 1.1800e-012$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(4,3,32) = F\_dum\_M4 / \text{Pr\_pds\_S32} ;$$

$$\tau(4,3,32) = 2.4093e-012$$

**Fin  $M_4$ ;**

**Fin  $S_{31}$  ; Fin  $S_{32}$  ;**

**Fin  $C_3$  ; Fin  $C_2$  ;**

**Fin  $j = 4$  ;**

**Pour  $j = 3$  et  $\text{pred}(C_3) = \{C_1\} \neq \emptyset$  ;**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

Pas II.1.1 : Lire les matrices  $[Q_5]$  et  $[C_5]$

$$[Q_j] = [Q_3]$$

$$[C_j] = [C_3]$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$$\text{Pr}_3 = [ 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0832 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ] ;$$

*Pas II.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr\_pds\_S22} = \text{Pr}_3(7, 1) + \text{Pr}_3(8, 1) + \text{Pr}_3(9, 1) + \text{Pr}_3(10, 1) + \text{Pr}_3(11, 1) + \text{Pr}_3(12, 1) ;$$

$$\text{Pr\_pds\_S22} = 0.5000$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_3) = \{C_1\}$$

**Pour  $C_1$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

**Pour  $S_{22}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{22}^\circ = \{M_3\}$$

**Pour  $M_3$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_dum\_M3 = (\text{Pr}_3(7, 1) + \text{Pr}_3(8, 1)) * \epsilon_3 ;$$

$$F\_dum\_M3 = 8.1871e-007$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(3,1,22) = F\_dum\_M3 / \text{Pr\_pds\_S22} ;$$

$$\tau(3,1,22) = 1.6374e-006$$

**Fin  $S_{22}$ ;**

**Fin  $C_1$ ;**

**Fin  $j = 3$  ;**

**Pour  $j = 2$  et  $\text{pred}(C_2) = \{C_1\} \neq \emptyset$  ;**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

Pas II.1.1 : Lire les matrices  $[Q_2]$  et  $[C_2]$

$$[Q_j] = [Q_2]$$

$$[C_j] = [C_2]$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$$\text{Pr}_2 = [ 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0832 ; 0.0833 ; 0.0833 ; 0.0833 ] ;$$

*Pas II.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr\_pds\_S21} = \text{Pr}_2(7, 1) + \text{Pr}_2(8, 1) + \text{Pr}_2(9, 1) + \text{Pr}_2(10, 1) + \text{Pr}_2(11, 1) + \text{Pr}_2(12, 1) ;$$

$$\text{Pr\_pds\_S21} = 0.5000$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_2) = \{C_1\}$$

**Pour  $C_1$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S_k = \{21\}$$

**Pour  $S_{21}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{21}^\circ = \{M_2\}$$

**Pour  $M_2$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_dum\_M2 = (\text{Pr}_2(7, 1) + \text{Pr}_2(8, 1)) * \epsilon_2 ;$$

$$F\_dum\_M2 = 9.2088e-007$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(2,1,21) = F\_dum\_M2 / \text{Pr\_pds\_S21} ;$$

$$\tau(2,1,21) = 1.8418e-006$$

**Fin  $S_{22}$ ;**

**Fin  $C_I$ ;**

**Fin  $j = 3$  ;**

**Pour  $j = 1$  et  $\text{pred}(C_I) = \{C_I\} \neq \emptyset$  ;**

*Pas II.1* : vecteurs de probabilité d'état  $\text{Pr}_j$

*Pas II.1.1* : Lire les matrices  $[Q_1]$  et  $[C_1]$

$$[Q_j] = [Q_1];$$

$$[C_j] = [C_1];$$

*Pas II.1.2* : Calculer le vecteur de probabilité d'état  $\text{Pr}_5$

$$\text{Pr}_1 = [ 0.0300 ; 0.0341 ; 0.0341 ; 0.0786 ; 0.0300 ; 0.0218 ; 0.0241 ; 0.0786 ; 0.0300 ; 0.0105 ; 0.0164 ; 0.0786 ; 0.0300 ; 0.0341 ; 0.0286 ; 0.0786 ; 0.0300 ; 0.0341 ; 0.0483 ; 0.0786 ; 0.0300 ; 0.0341 ; 0.0286 ; 0.0786 ] ;$$

*Pas II.1.3* : Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_k$ .

$$\text{Pr\_pds\_S11} = \text{Pr}_1(13, 1) + \text{Pr}_1(14, 1) + \text{Pr}_1(15, 1) + \text{Pr}_1(16, 1) + \text{Pr}_1(17, 1) + \text{Pr}_1(18, 1) + \text{Pr}_1(19, 1) + \text{Pr}_1(20, 1) + \text{Pr}_1(21, 1) + \text{Pr}_1(22, 1) + \text{Pr}_1(23, 1) + \text{Pr}_1(24, 1) ;$$

$$\text{Pr\_pds\_S11} = 0.5334$$

*Pas II.2* : Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la cellule  $C_j$

$$\text{pred}(C_I) = \{C_0\}$$

**Pour  $C_0$  faire**

*Pas II.3* : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$

$$S\_k = \{11\}$$

**Pour  $S_{11}$  faire**

*Pas II.4* : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock

$$S_{11}^\circ = \{M_1\}$$

**Pour  $M_1$  faire**

*Pas II.5* : Calculer la fréquence moyenne de transition de service de machine

$$F\_dum\_M1 = (\text{Pr}_1(13,1) + \text{Pr}_1(14,1) + \text{Pr}_1(15,1) + \text{Pr}_1(16,1)) * \epsilon_1 ;$$

$$F\_dum\_M1 = 7.3901e-008$$

*Pas II.6* : Déduire le taux moyen de retrait

$$\tau(1,0,11) = F\_dum\_M1 / \text{Pr\_pds\_S11} ;$$

$$\tau(1,0,11) = 1.3854e-007$$

**Fin  $S_{II}$  ;**

**Fin  $C_0$ ;**

**Fin  $j = 1$  ;**

#### **2.5.4. Étape IV : Condition d'arrêt**

Nous allons donner dans le tableau 4.1 les valeurs des taux de retrait et de dépôt pour chaque itération jusqu'au moment où le critère d'arrêt est vérifié (Les résultats de ces tableaux ont été obtenus au bout de dix huit itérations),  $\alpha$  c'est la précision qui a été fixée à  $\alpha = 10^{-4}$ .

Itération n°	$\tau_{j,i,k}$						$\tau_{i,j,k}$						Critère d'arrêt	
	Z_1_0_11	Z_2_1_21	Z_3_1_22	Z_4_2_31	Z_4_3_32	Z_5_4_41	Z_0_1_11	Z_1_2_21	Z_1_3_22	Z_2_4_31	Z_3_4_32	Z_4_5_41		
0	85.1063	99.3674	97.8853	45.3117	41.5483	119.9994	148.7740	146.7705	146.7705	140.0371	133.8139	163.6411	1.0000	
1	22.2383	35.9647	35.5283	8.0426	6.8301	59.9994	100.0000	27.8591	27.1744	36.9977	32.0454	182.1310	264.9394	
2	5.6813	13.0329	12.9010	1.4505	1.1336	29.9996	100.0000	7.2924	7.0917	13.3140	11.2523	196.6484	65.7132	
3	1.4739	4.7276	4.6861	0.2632	0.1888	14.9997	100.0000	1.8499	1.7969	4.8048	4.0218	201.4658	24.2283	
4	0.4063	1.7160	1.7022	0.0478	0.0315	7.4998	100.0000	0.4840	0.4730	1.7366	1.4589	203.1013	9.8848	
5	0.1208	0.6230	0.6181	0.0087	0.0052	3.7499	100.0000	0.1377	0.1364	0.6287	0.5379	203.6588	4.3744	
6	0.0376	0.2261	0.2241	0.0016	0.0009	1.8749	100.0000	0.0426	0.0426	0.2279	0.1996	203.8566	2.0414	
7	0.0120	0.0820	0.0809	0.0003	0.0001	0.9375	100.0000	0.0136	0.0136	0.0826	0.0734	203.9284	0.9822	
8	0.0120	0.0820	0.0809	0.0003	0.0001	0.9375	100.0000	0.0136	0.0136	0.0826	0.0734	203.9284	0.4807	
9	0.0038	0.0297	0.0290	0.0001	0.0000	0.4687	100.0000	0.0044	0.0044	0.0299	0.0266	203.9548	0.2375	
10	0.0012	0.0106	0.0102	0.0000	0.0000	0.2344	100.0000	0.0014	0.0014	0.0108	0.0095	203.9645	0.1180	
11	0.0004	0.0038	0.0035	0.0000	0.0000	0.1172	100.0000	0.0005	0.0004	0.0038	0.0033	203.9680	0.0588	
12	0.0001	0.0013	0.0012	0.0000	0.0000	0.0586	100.0000	0.0001	0.0001	0.0013	0.0011	203.9693	0.0293	
13	0.0000	0.0004	0.0004	0.0000	0.0000	0.0293	100.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0004	203.9698	0.0147	
14	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0146	100.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0001	203.9699	0.0073	
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0073	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	203.9700	0.0037	
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0037	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	203.9700	0.0018	
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0018	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	203.9700	0.0009	<b>STOP</b>

Tableau 4.2 : les taux de dépôt et de retrait de toutes les itérations.

Ces résultats ont été obtenus à l'aide d'un programme implémenté sous MATLAB,  
Les résultats des tableaux précédents ont été obtenus au bout de dix huit itérations.

Lorsque la condition d'arrêt est atteinte, nous obtenons les résultats du tableau suivant :

<b>Machines</b>	<b>M<sub>0</sub></b>	<b>M<sub>1</sub></b>	<b>M<sub>2</sub></b>	<b>M<sub>3</sub></b>	<b>M<sub>4</sub></b>	<b>M<sub>5</sub></b>
Pr <sub>R</sub>	0.3333	0.3480	0.3333	0.3333	0.3877	0.4999
Pr <sub>M</sub>	0.3333	0.3453	0.3333	0.3333	0.2858	0.4999
Pr <sub>P</sub>	0.3333	0.3067	0.3333	0.3333	0.3265	1.8760e-004

**Tableau 4.3** : *les probabilités d'états des machines.*

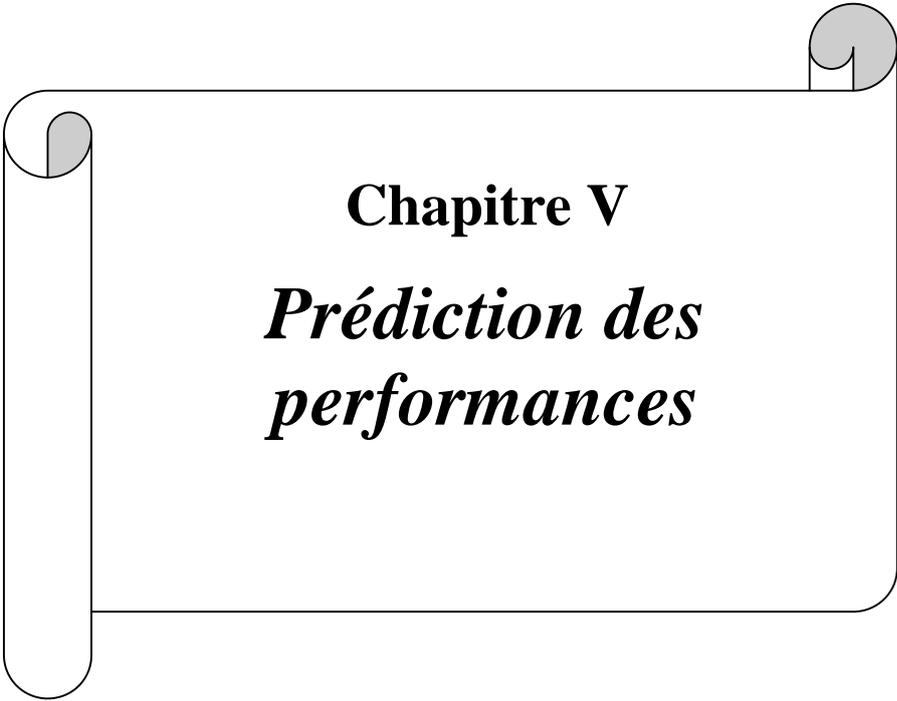
Nous déduisons et analysons d'autres résultats dans le prochain chapitre.

### 3. Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons donné une approche pour la génération automatique du descripteur markovien pour les quatre cellules à partir de l'algorithme de GADM.

Puis, nous avons modifiée et adaptée l'algorithme en PAMAV-RAS, afin de calculer la distribution stationnaire du système de production complet.

Le long des chapitres précédents, nous nous sommes focalisé sur la modélisation et le traitement des RAS. L'étape suivante est bien la traduction des grandeurs probabilistes évaluées sous forme d'indicateurs de performance. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.



**Chapitre V**

***Prédiction des performances***

## 1. Introduction :

Le chapitre précédent, présente une résolution des modèles RAS d'un système de production à l'aide de l'algorithme PAMAV-RAS, ce dernier permet de calculer les probabilités d'état des éléments qui composent le système de production.

Dans ce chapitre, nous traduisons ces probabilités en termes d'indicateurs significatifs, l'évaluation et l'analyse de ces indicateurs nous aident à prendre des décisions en ce qui concerne les actions de correction, dont le but d'améliorer les performances et le niveau de la sûreté de fonctionnement d'un système de production.

## 2. Les indicateurs de performance :

L'indicateur de performance est un outil d'évaluation de performance qui est apparu à partir des années 1980, et qui permet aux concepteurs de vérifier le niveau de satisfaction d'un comportement considéré.

[AFGI, 92] propose la définition suivante : « un indicateur de performance est une donnée quantifiée, qui mesure l'efficacité ou l'efficience de tout ou partie d'un processus ou d'un système (réel ou simulé) par rapport à une norme, un plan ou un objectif déterminé et accepté dans le cadre d'une stratégie d'entreprise ». Selon [Berrah, 02] « les indicateurs de performance sont les instruments du pilotage ».

Nous allons définir dans ce qui suite un certain nombre de notions [olivier, 95] nécessaire pour le calcul des indicateurs de performance.

### 2.1. Définitions :

Nous choisissons comme unité de temps de référence l'heure. On appelle  $Pr_{R_i}$ ,  $Pr_{M_i}$  et  $Pr_{P_i}$  les probabilités de Repos, Marche et Panne de la machine  $M_i$  fournies par l'algorithme PAMAV-RAS dans le chapitre précédent.

<b>Temps total (TT)</b>	C'est le temps de référence couvrant toute la durée de fonctionnement du système de production manufacturier.
<b>Temps requis (TR)</b>	C'est le temps pendant lequel le système de production est effectivement engagé avec la volonté de produire. Les modèles que nous avons utilisés n'intègrent pas les différentes politiques de maintenance, donc ne prenons pas en compte les arrêts du système autres que ceux induits par défaillances. Aussi, dans ce cas le temps requis est équivalent au temps total.
<b>Temps de Bon Fonctionnement (TBF)</b>	C'est le temps pendant lequel le système produit des pièces sans anomalies tant au niveau de son fonctionnement propre qu'au niveau de la qualité des pièces produites. On appelle TBF_Mi le temps de bon fonctionnement de la machine Mi. On calcule ce temps, à partir des résultats de l'analyse markovien par : $TBF\_Mi = Pr\_Mi * TT$
<b>Temps d'arrêt propre (TAP)</b>	Ce temps concerne les arrêts d'une machine qui sont dus d'une part à ses propres défaillances et, d'autre part, aux périodes d'arrêt pour maintenance. Comme nos modèles ne prennent pas encore en compte les aspects maintenance. Le temps d'arrêt et le temps de panne sont identiques. $TAP = TP$ On calcule TAP par : $TAP = TP = Pr\_Pi * TT$
<b>Nombre d'arrêt propres (NAP)</b>	C'est le nombre d'arrêt d'une machine qui sont dus soit à ses propres défaillances soit aux arrêts pour maintenance. Pour les mêmes raisons que pour le temps d'arrêt propre, nous confondrons nombres d'arrêts propres et nombre de pannes soit : $NAP = NP$ On calcule ce paramètre à partir des résultats de l'analyse itérative par : $NAP = NP = Pr_{pi} * \mu_i * TT$
<b>Nombre de pièces réalisées (NPR)</b>	Ce paramètre concerne soit une machine soit le système complet. On notera NPR le nombre de pièces réalisées par le système complet et NPR_Mi le nombre de pièces réalisées par la machine Mi. On a : $NPR\_Mi = Pr_{Mi} * \delta_i * TT$ Le nombre de pièces réalisées par le système total est : $NPR = \sum_i NPR\_Mi = Pr_{Mi} * \delta_i * TT$

Nous avons vu, au cours de ce travail, que l'évaluation des performances d'un système de production est faite par des indicateurs tels que : la disponibilité, la fiabilité et la maintenabilité. Pour chacune de ces catégories, nous allons donner quelques indicateurs avec leurs modes de calcul.

## 2.2. Les attributs de la sûreté de fonctionnement :

La sûreté de fonctionnement permet d'établir le degré de fonctionnement que l'on peut attribuer à un système dans le cadre de la mission qu'il doit assurer. Elle est liée à tout le cycle de vie du système de production,

- A sa disponibilité ;
- A la fiabilité ;
- A la maintenabilité de ces machines ;
- Etc...

Nous allons maintenant, à partir des paramètres définis ci-dessus donner le moyen de calculer quelques uns des attributs de sûreté de fonctionnement.

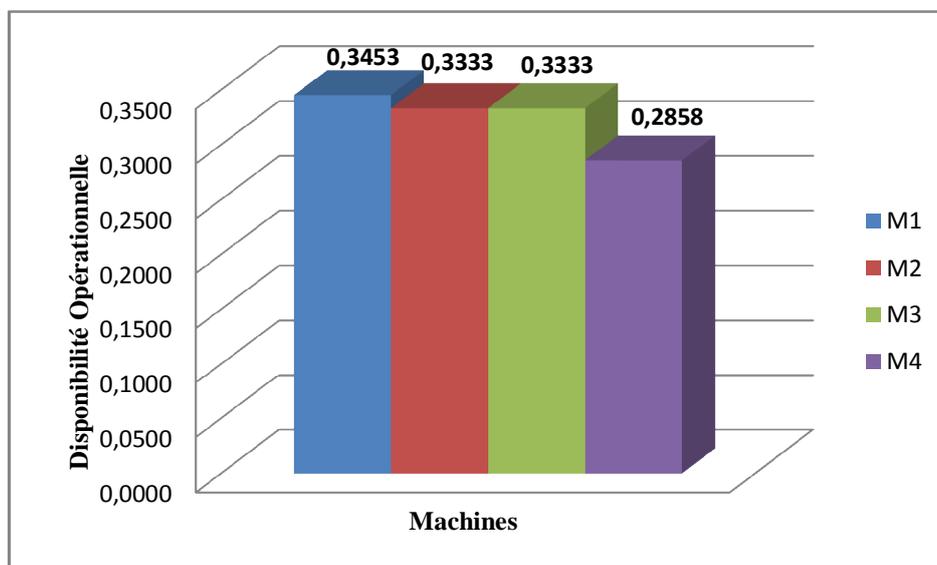
### 2.2.1. La Disponibilité :

Les indicateurs relatifs à la disponibilité sont :

- **Disponibilité opérationnelle (DO) :**

Machines	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
Disponibilité Opérationnelle	0.3453	0.3333	0.3333	0.2858

Les résultats de calcul de la disponibilité opérationnelle de chaque machine du système de production sont représentés par l'histogramme suivant :



**Figure 5.1 :** *disponibilité opérationnelle de chaque machine*

La disponibilité opérationnelle du système complet est la plus petite disponibilité opérationnelle de ses machines de sortie, soit :

$$DOT_{Mi} = \min(DO_{Mi}) = 0.2858$$

Nous remarquons que les valeurs de la disponibilité opérationnelle du système étudié varient entre 0.2858 pour la machine M4 et 0.3453 pour la machine M1.

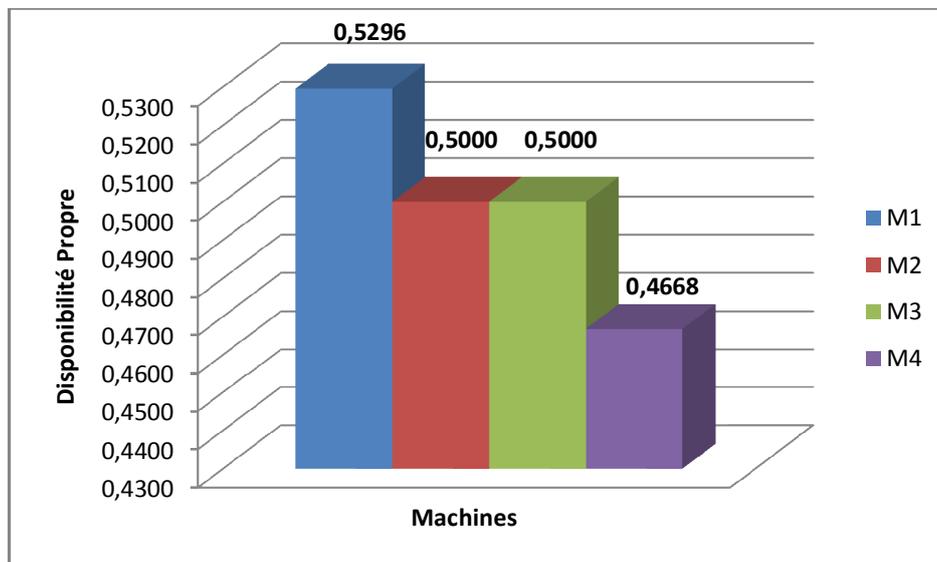
Il n'est pas souhaitable que cet indicateur soit proche de 1, ce qui indiquerait que la machine est saturée et qu'il n'y a plus aucune marge pour réagir, notamment à des commandes urgentes ou à une augmentation de volume de production.

À l'inverse, une disponibilité opérationnelle faible ne signifie pas forcément que la machine soit disponible et que la réactivité soit élevée.

- **Disponibilité propre (DP) :**

Machines	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
<b>Disponibilité Propre</b>	<b>0.5296</b>	<b>0.5000</b>	<b>0.5000</b>	<b>0.4668</b>

Les résultats de calcul de la disponibilité propre pour chaque machine du système de production sont récapitulés par l'histogramme suivant :



**Figure 5.2 :** *disponibilité propre de chaque machine*

On constate que les valeurs obtenues de la disponibilité propre de chaque machine sont des valeurs moyennes. Ces valeurs varient entre 0.4668 pour la machine M4 et 0.5296 pour la machine M1.

On peut justifier ces valeurs moyennes par le fait que les probabilités de panne des machines sont presque égales aux probabilités de marche des machines.

$$DP_{Mi} = \frac{Pr_{Mi}}{Pr_{Mi} + Pr_{Pi}}$$

Si  $Pr_{Mi} \cong Pr_{Pi}$  Dans ce cas on peut remplacer  $Pr_{Pi}$  par  $Pr_{Mi}$  dans la formule de  $DP_{Mi}$

$$DP_{Mi} \cong \frac{Pr_{Mi}}{2 * Pr_{Mi}} \cong 0.5$$

- **Disponibilité totale (DT) :**

Pour chaque machine  $M_i$ , nous avons calculé la disponibilité totale comme suit :

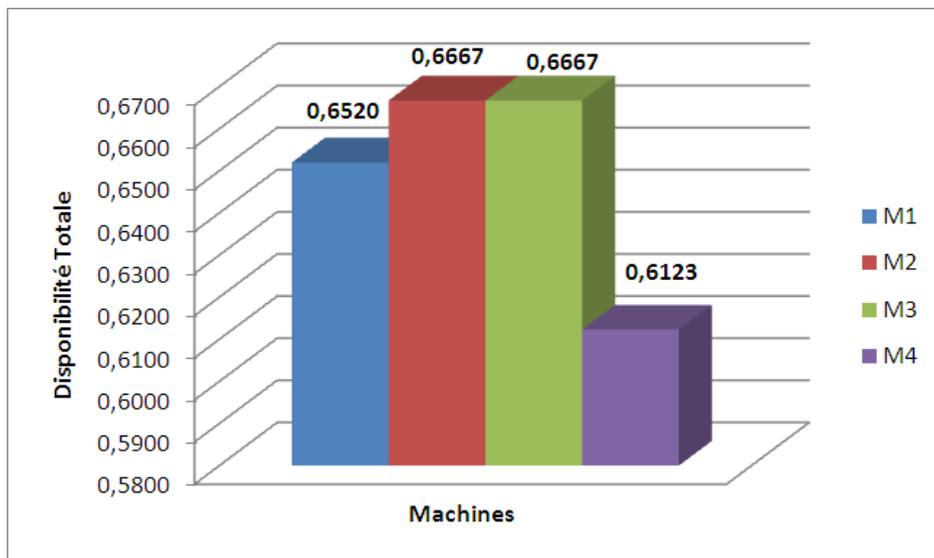
$$DT_{M1} = 1 - Pr_{R1} = 1 - 0.3480 = 0.6520$$

$$DT_{M2} = 1 - Pr_{R2} = 1 - 0.3333 = 0.6667$$

$$DT_{M3} = 1 - Pr_{R3} = 1 - 0.3333 = 0.6667$$

$$DT_{M4} = 1 - Pr_{R4} = 1 - 0.3877 = 0.6123$$

Les résultats de la disponibilité totale des différentes machines de système de production sont représentés dans l'histogramme de la figure suivante :



**Figure 5.3 :** *disponibilité totale de chaque machine*

### 2.2.2. La Fiabilité :

L'évaluation de la fiabilité est plus complexe que la disponibilité. C'est pourquoi nous sommes limités à quelques indicateurs tels que la fréquence des arrêts propres et Temps de Fonctionnement Moyen.

- **Fréquences des Arrêts Propres (FP) :**

$$FP_{M1} = Pr_{p1} * \mu_1 = 0.3067 * 0.1146 = 0.0351 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M2} = Pr_{p2} * \mu_2 = 0.3333 * 0.5 = 0.1667 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M3} = Pr_{p3} * \mu_3 = 0.3333 * 0.4513 = 0.1504 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M4} = Pr_{p4} * \mu_4 = 0.3265 * 0.1886 = 0.0616 \text{ Arrêt / heure}$$

- **Temps de Fonctionnement Moyen (TF) :**

$$TF_{M1} = \frac{Pr_{M1}}{Pr_{F1} * \mu_1} = 9.8376 \text{ h}$$

$$TF_{M2} = \frac{Pr_{M2}}{Pr_{P2} * \mu_2} = 1.9994 \text{ h}$$

$$TF_{M3} = \frac{Pr_{M3}}{Pr_{P3} * \mu_3} = 2.2161 \text{ h}$$

$$TF_{M4} = \frac{Pr_{M4}}{Pr_{P4} * \mu_4} = 4.6396 \text{ h}$$

### 2.2.3. Maintenabilité :

La maintenabilité peut être caractérisée par le temps de panne moyen

- **Temps de panne moyen (TPM) :**

$$TPM_{M1} = \frac{1}{\mu_1} = 8.7260$$

$$TPM_{M2} = \frac{1}{\mu_2} = 2.0000$$

$$TPM_{M3} = \frac{1}{\mu_3} = 2.2158$$

$$TPM_{M4} = \frac{1}{\mu_4} = 5.3022$$

### 2.3. Autres indicateurs de performance :

Nous allons maintenant donner d'autres indicateurs de performance.

#### 2.3.1. La productivité :

On définit d'abord la notion de productivité propre.

- **La productivité propre (PP) :**

La productivité propre d'une machine c'est la quantité des pièces que la machine peut les usiner lorsqu'elle est engagée à produire.

Cette notion est définie pour chaque machine  $M_i$  par :

$$PP_{M_i} = \frac{\text{nbre de pièces réalisées par } M_i}{\text{Temps de bon Fonctionnement de } M_i + \text{Temps d'arrêt propre de } M_i}$$

$$= \frac{Pr_{M_i} * \delta_i * TT}{Pr_{M_i} * TT + Pr_{P_i} * TT} = \frac{Pr_{M_i} * \delta_i}{Pr_{M_i} + Pr_{P_i}}$$

Ce paramètre est exprimé par pièces/heure.

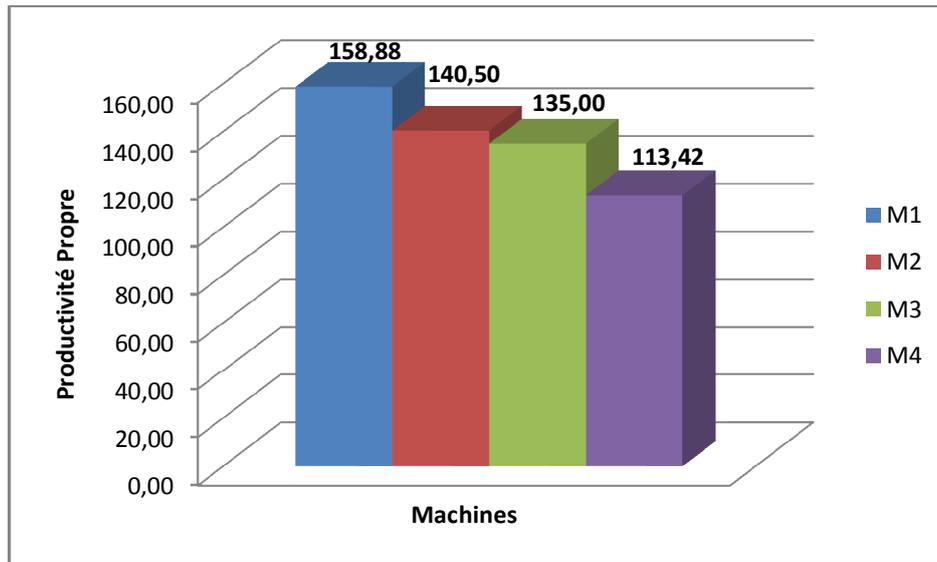
$$PP_{M_1} = \frac{Pr_{M_1} * \delta_1}{Pr_{M_1} + Pr_{P_1}} = 158.8804 \text{ pièces/heure}$$

$$PP_{M_2} = \frac{Pr_{M_2} * \delta_2}{Pr_{M_2} + Pr_{P_2}} = 140.5 \text{ pièces/heure}$$

$$PP_{M_3} = \frac{Pr_{M_3} * \delta_3}{Pr_{M_3} + Pr_{P_3}} = 135 \text{ pièces/heure}$$

$$PP_{M_4} = \frac{Pr_{M_4} * \delta_4}{Pr_{M_4} + Pr_{P_4}} = 113.4238 \text{ pièces/heure}$$

Les résultats de calcul de la productivité propre de chaque machine  $M_i$  de système de production sont présentés dans l'histogramme de la figure suivante :



**Figure 5.4 :** La productivité propre de chaque machine

- **La productivité Opérationnelle(PO) :**

C'est la quantité des pièces usiné par une machine pendant toute la durée de fonctionnement du système de production, y compris les arrêts induits.

Cette notion est défini pour chaque machine  $M_i$  par :

$$PO_{M_i} = \frac{\text{nbre de pièces réalisées par } M_i}{\text{Temps total}} = \frac{Pr_{M_i} * \delta_i * TT}{TT} = Pr_{M_i} * \delta_i$$

Ce paramètre est exprimé par pièces/heure.

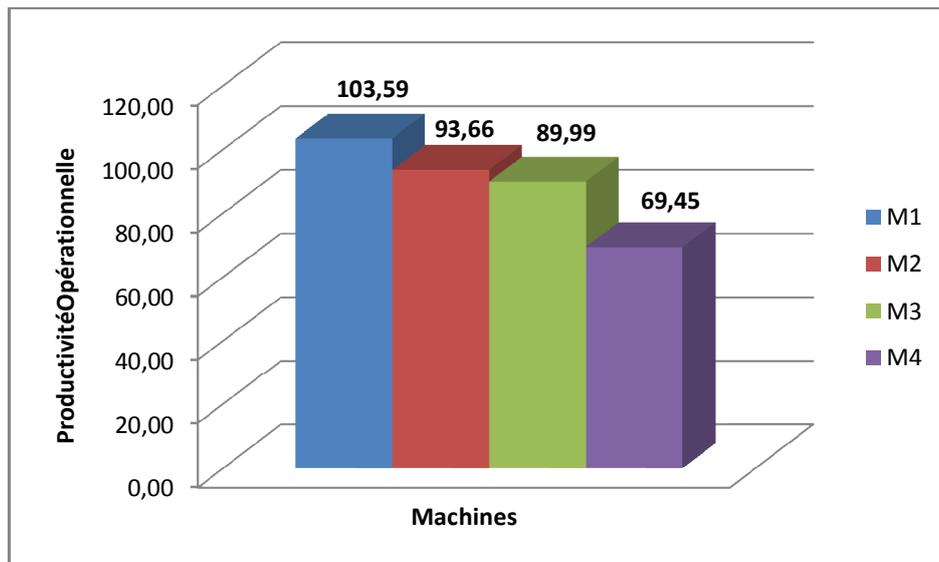
$$PO_{M_1} = Pr_{M_1} * \delta_1 = 103.59 \text{ pièces/heure}$$

$$PO_{M_2} = Pr_{M_2} * \delta_2 = 93.6573 \text{ pièces/heure}$$

$$PO_{M_3} = Pr_{M_3} * \delta_3 = 89.9910 \text{ pièces/heure}$$

$$PO_{M_4} = Pr_{M_4} * \delta_4 = 69.4494 \text{ pièces/heure}$$

Les résultats de calcul de la productivité opérationnelle de chaque machine  $M_i$  de système de production sont représentés dans l'histogramme de la figure suivante :



**Figure 5.5 :** La productivité opérationnelle de chaque machine

Pour tout le système de production, on ne prend en compte que les machines à sa sortie, la productivité opérationnelle du système complet est :

$$PO_S = \sum_i PO_{M_i} \text{ Avec } M_i \text{ en sortie de système de production}$$

$$PO_S = PO_{M_4} = 69,4494 \text{ pièces/heure}$$

Avec  $M_4$  en sortie de système de production.

### 3. Tableau de bord des indicateurs de performances et de sûreté de fonctionnement :

Dans un système de production, les indicateurs de performance participent à la formation de tableaux de bord, qui sont destinés aux responsables des différents centres de décision impliqués dans le processus de production. Le rôle de chaque tableau de bord établi est d'informer le décideur concerné sur la performance réalisée et d'attirer son attention sur les dérives du système.

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes valeurs des indicateurs de performance obtenues.

<i>Paramètres</i>	<i>Machine 1</i>	<i>Machine 2</i>	<i>Machine 3</i>	<i>Machine 4</i>
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.3453	0.3333	0.3333	0.2858
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.2858			
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.5296	0.5000	0.5000	0.4668
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.6520	0.6667	0.6667	0.6123
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.6547	0.6667	0.6667	0.7142
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.2858			
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.4704	0.5000	0.5000	0.5332
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.3480	0.3333	0.3333	0.3877
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	0.0351	0.1667	0.1504	0.0616
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	9.8376	1.9994	2.2161	4.6396
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	8.7260	2.0000	2.2158	5.3022
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	158.8804	140.5	135	113.4238
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	103.59	93.6573	89.9910	69.4494
$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	69.4494			

**Tableau 5.1** : *tableau de bord des indicateurs de performance*

#### 4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présentés les principaux indicateurs de performance des SdF. L'intérêt est porté dans un premier temps sur les attributs de SdF. Dans un second temps, nous avons complété ces attributs de SdF par d'autres indicateurs de performance des SdF qui sont traduisent essentiellement la productivité des SdP.

Enfin, l'ensemble des indicateurs analysés et commentés sont regroupés dans un tableau de bord qui nous a permis de mieux capitaliser la performance de l'exemple retenu dans ce mémoire.

Par ailleurs, il est important de rappeler que ces indicateurs ne permettent pas d'assurer la compétitivité et la réussite de l'entreprise. Ils ne sont qu'un outil de compréhension, maîtrise, pilotage, autrement dit un outil d'aide à la décision dans l'entreprise. Donc ces divers indicateurs constituent une aide précieuse pour suivre les performances de l'outil de production, et pour prendre des décisions et pour mesurer les améliorations.

## Conclusion générale et perspectives

L'apport scientifique de ce mémoire se situe essentiellement à deux niveaux:

- ✓ Au niveau de la phase modélisation des systèmes, notre première contribution est matérialisée par la modélisation des systèmes de production par le formalisme des réseaux d'automates stochastiques.
- ✓ Au niveau de la phase traitement des systèmes où nous utilisons une méthode itérative de calcul approché et nous avons adopté l'algorithme de propagations amont et aval PAMAV, dans le but de pouvoir résoudre des modèles RAS.

A partir de ces deux principales contributions, nous pouvons conclure que le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire de magister nous a permis :

- i. De proposer le formalisme des réseaux d'automates stochastiques pour la phase modélisation des systèmes de production que nous avons adapté aux systèmes de production manufacturiers.
- ii. Dans ce contexte, nous avons présenté dans le chapitre deux les différentes caractéristiques des réseaux d'automates stochastiques.

Pour s'assurer de l'efficacité de la modélisation, nous avons choisi comme modèles d'étude, un système de production pédagogique avec une structure qui joue un rôle très important pour faire apparaître les principales caractéristiques des systèmes de production.

- iii. De développer une procédure adéquate pour le traitement des RAS.

En effet, le troisième chapitre a permis d'analyser et de détailler les démarches de décomposition du SdP en plusieurs cellules et leur modélisation. Donc, nous sommes partis d'un système de production dont nous avons obtenu une représentation modulaire grâce aux RAS. Sous cette forme et pour obtenir des résultats par l'analyse, nous sommes passés à la représentation markovienne cellulaire, puis nous avons calculé le vecteur de probabilité stationnaire des descripteurs markovien cellulaire.

Cette représentation cellulaire est intéressante pour deux principales raisons :

- Au lieu d'avoir un seul énorme descripteur markovien, nous en avons plusieurs descripteurs markovien cellulaire que nous avons analysé facilement.

## Conclusion générale et perspectives

---

- Un autre avantage, si les paramètres d'un élément stock amont, machine ou stock aval sont modifiés, nous n'avons pas à recalculer tout le descripteur mais seulement celle de la cellule dans laquelle il apparaît.

Ensuite, nous avons proposé une adaptation de l'algorithme itératif PAMAV de recherche de la distribution stationnaire du système sous sa forme cellulaire. Cet algorithme que nous avons baptisé PAMAV-RAS a besoin de tous les paramètres des composants afin de calculer les probabilités d'états de ses éléments.

Enfin, ces résultats obtenus par l'analyse markovienne nous ont permis d'en déduire quelques indicateurs de performance.

Pour mettre un terme provisoire à notre étude, de nombreuses perspectives sont envisageables suite à ces travaux, parce qu'un mémoire de magister ne suffit pas pour répondre exhaustivement aux éléments constitutifs de cette problématique. La suite de ce travail peut être vue sous plusieurs volets :

- Ce mémoire ne constitue qu'une étude préliminaire, démontrant cependant la faisabilité de modéliser les systèmes de production par le formalisme RAS. Nous projetons de développer un modèle de décomposition des systèmes adéquats permettant ainsi de modéliser des systèmes de production manufacturiers complexe.
- Calculer les attributs non stationnaires de la SdF à l'image de la disponibilité instantanée.

## Bibliographie

[**AFGI, 92**] : Association Française de Gestion Industrielle., “Evaluer pour évoluer, les indicateurs de performance au service du pilotage”, ouvrage collectif AFGI, 1992.

[**Afonso 09**] : Afonso Henrique CORRÊA DE SALES. « Réseaux d’Automates Stochastiques: Génération de l’espace d’états atteignables et Multiplication vecteur-descripteur pour une sémantique en temps discret ». Thèse de doctorat en Informatique présentée à l’INPG, 10 Septembre 2009.

[**Baskett, 75**] : F.Baskett, K.M.Chandy, R.R.Muntz, F.G.Palacios. «Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers». Journal of the ACM, vol. 22, no. 2, 1975.

[**Benferroudj 10**] : H.Benferroudj, « Modélisation stochastique pour l’évaluation des indicateurs de la sûreté de fonctionnement d’un système de production Cas de l’entreprise DOMELEC ». Mémoire de magister en génie industriel, université de Batna 2010.

[**Benoit, 03**] : A.Benoit. « Méthodes et algorithmes pour l’évaluation des performances des systèmes informatiques à grand espace d’états ». Thèse de doctorat présentée à l’INPG, Grenoble, 18 Juin 2003.

[**Benoit, 05**] : A.Benoit, B.Plateau et W.Stewart. Support de cours. « Réseaux d’automates stochastiques à temps discret », Laboratoire Informatique et Distribution, Grenoble 2005

[**Berrah, 02**] : L.Berrah, « L’indicateur de performance: concepts et applications ». Cepadant, 2002.

[**Boudaoud, 11**] : S.Boudaoud et S.Boudjelal. « Algorithme itératif pour la résolution des modèles Réseaux d’automates stochastiques ». Mini projet de Méthodologie et initiation à la recherche, Université de Batna, 2011.

[**Brenner 08**] : Leonardo Brenner, Brigitte Plateau. «Efficacité de méthodes de détection du régime stationnaire pour l’analyse de la disponibilité ponctuelle des grands modèles ». Laboratoire d’Informatique de Grenoble, Projet MESCAL .Aussois, 1 Juin 2008.

[**Donatellia, 91**] : S.Donatellia and M.Sereno. « On the product form solution for Stochastic Petri Nets», 1991.

[**Driss, 09**] : Driss Imen. Modélisation d’une cellule de production convergente : blocage et priorité. Mini projet de Méthodologie et initiation à la recherche, Université de Batna, 2009.

**[Dutheillet, 89]** : C.Dutheillet and S.Haddad. Aggregation of states in coloured Petri nets: Application to a multiprocessor architecture, 1989.

**[Dutheillet, 92]** : C.Dutheillet. Symétrie dans les réseaux de Petri colores : Définitions, analyse et application a l'évaluation des performances. Thèse de Doctorat, université Paris 6, 1992.

**[Fernandes, 94]** : P.Fernandes, B.Plateau. Stochastic automata networks SAN: modelling and evaluation. Proceedings of the second process algebras and performance modeling workshop, 1994;

**[Fernandes, 98]** : Paulo Henrique Lemelle Fernandes. « Méthodes numériques pour la solution de systèmes markoviens à grand espace d'états ». Thèse de doctorat présentée à l'INPG, Grenoble, février 1998.

**[Florin, 85]** : G.Florin, S.Natkin. Les réseaux de Petri stochastiques. Techniques et Sciences Informatiques, vol 4, no. 1, 1985.

**[Florin, 88]** : G.Florin and S.Natkin. Solutions en forme produit matriciel pour les réseaux de files d'attente synchronisés fermes monovalués. Rapport de recherche CEDRIC, 1988.

**[Florin, 89]** : G.Florin and S.Natkin. Matrix product form solution for closed synchronised queuing networks, 1989.

**[Fritas 05]** : Fritas Rafik , Modélisation et analyse par réseaux de pétri d'un système de production géré en KANBAN Cas pratiques : Entreprise Bouteille A Gaz Batna. Mémoire de magister en génie industriel, 2005.

**[Haïscam, 01]** : Haïscam Abdallah, Moulaye Hamza. Sensibilité de mesures transitoires des réseaux d'automates stochastiques : approche parallèle. Rapport de recherche de l'INRIA. Juin 2001.

**[Haoues, 05]** : Mohamed Haoues “ L'utilisation conjointe des réseaux de petri stochastiques et des processus de Markov pour la modélisation, l'analyse et l'évaluation des performances d'un système de production Cas pratiques : Entreprise Bouteille A Gaz Batna”. Mémoire de magister en génie industriel, université de Batna 2005.

**[Haoues, 07]** : Haoues Mohammed, Mouss Kinza Nadia et Mouss Leila Hayet ; L'utilisation conjointe des réseaux de pétri stochastiques et des processus de Markov pour l'évaluation des performances d'une ligne d'emboutissage. CPI 2007, Rabat, Maroc

**[Haverkort, 95]** : B.R.Haverkort. Matrix-geometric solution of infinite stochastic Petri nets. In Proc. Of the 1st Int'l Computer Performance and dependability symposium. Computer Society Press, 1995.

**[Henderson, 89]** : W.Henderson and P.G.Taylor. Agregation methods in exact performance analysis of Stochastic Petri Nets, 1989.

**[Jackson, 57]** : J.R.. Networks of waiting lines. OperationsResearch, vol. 5, 1957.

**[Jackson, 63]** : J.R.Jackson. "Jobshop-like queueing systems". Management Science, vol. 10, 1963.

**[Little, 61]** : J.D.C.Little. "A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$ ". Operations Research, vol. 9, 1961.

**[Mokdad, 97]** : L. N. Mokdad, Calcul de la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov par réduction des états : une approche illustrée par l'exemple. Séminaires d'Informatique de l'URCA. Décembre 1997.

**[Olivier, 95]** : Olivier Daniel, les réseaux de pétri stochastiques pour l'évaluation des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes manufacturiers, Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l'INPG, 26/01/1995.

**[Plateau, 84]** : B.Plateau. De l'Evaluation du Parallélisme et de la Synchronisation. Paris-Sud,Orsay, 1984. (thèse de doctorat)

**[Plateau, 85]** : B. Plateau. On the stochastic structure of parallelism and synchronization models for distributed algorithms. In Proc. ACM Sigmetrics Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems, Austin, Texas, 1985.

**[Plateau, 91]** : B. Plateau and K. Atif. Stochastic automata networks for modelling parallel systems, 1991.

**[Sadok, 10]** : T.Sadok, « Impact du délai de livraison sur le niveau de stock : une approche basée sur la méthode ». Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l'IPA, décembre 2010.

**[Salmi, 00]** : N. Salmi and M. Ioualalen. «Méthode d'approximation stochastique pour l'évaluation des performances d'un réseau de Pétri Stochastiques une place non bornée ». USTHB, Institut d'Informatique, 2000.

**[Salmi, 01]** : N.Salmi et M.Ioualalen. « Méthode conjointe de décomposition et de calcul des bornes pour l'évaluation des performances d'un réseau de pétri stochastique non borne ». 3ème Conférence Francophone de Modélisation et SIMulation, Conception, Analyse et Gestion des Systèmes Industriels, MOSIM'01 - du 25 au 27 avril 2001 - Troyes (France)

**[Sassine, 98]** : C.Sassine « Intégration des politiques de maintenance dans les systèmes de production manufacturiers ». Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à

l'INPG, 02/07/1998.

**[Simeu, 98]** : Zineb Simeu-Abazi “Sur la sûreté de fonctionnement des systèmes de production”. Mémoire de HDR présentée à l'INPG, 1998.

**[Sperandio, 05]** : S.Sperandio S. “Usage de la modélisation multi-vue d'entreprise pour la conduite des systèmes de production”, Thèse de l'Université de Bordeaux1. 2005.

**[Stewart, 94]**: W.J.Stewart. Introduction to the numerical solution of Markov chains. Princeton University Press, 1994.

**[Titah, 09]** : M.Titah et S.Boufelaas. Les RAS pour l'évaluation des performances des systèmes de production manufacturiers. Mémoire d'ingénieur, Université de Batna, 2009.

**[Trivedi, 82]** : K.Trivedi. Probability & statistics with reliability, queueing and computer science applications. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

**[Truffet, 95]** : L.Truffet. Méthodes de calcul de bornes stochastiques sur des modèles de systèmes et de réseaux. Thèse de Doctorat présentée à l'université Paris 6, Novembre 1995.

**[Zuberek, 89]** : W.M.Zuberek. Performance evaluation using unbounded Timed Petri Nets, 1989, Canada.

## Les concepts de la sûreté de fonctionnement:

### 1. La Disponibilité :

Rappelons que la disponibilité est l'aptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche dans des conditions de temps déterminées sous les aspects combinés de sa fiabilité, maintenabilité et de l'organisation de sa maintenance. Notons qu'une haute disponibilité exige une excellente fiabilité, mais aussi une bonne maintenabilité. La disponibilité c'est une valeur (un pourcentage ou une probabilité).

Les indicateurs relatifs à la disponibilité sont :

- **Disponibilité opérationnelle (DO) :**

C'est l'aptitude de la machine à accomplir sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système. C'est le rapport entre le temps de bon fonctionnement et le temps requis, c'est-à-dire pour nous, le temps total. Pour une machine  $M_i$ , la disponibilité opérationnelle vaut :

$$DO_{M_i} = \frac{\text{temps de bon fonctionnement de } M_i}{\text{temps total}} = \frac{Pr_{M_i} * TT}{TT} = Pr_{M_i} \quad (\text{sans unité})$$

- **Disponibilité propre (DP) :**

C'est l'aptitude de la machine à accomplir sa tâche uniquement pendant le temps de son engagement propre à fonctionner.

N.B : on ne prend pas en compte les temps d'attente ou arrêt pour causes externes.

Pour chaque machine  $M_i$ , on définit la disponibilité propre comme suit :

$$DP_{M_i} = \frac{\text{temps de bon fonctionnement de } M_i}{\text{temps de bon fonctionnement de } M_i + \text{temps d'arrêt propre de } M_i}$$

$$= \frac{Pr_{M_i} * TT}{Pr_{M_i} * TT + Pr_{P_i} * TT} = \frac{Pr_{M_i}}{Pr_{M_i} + Pr_{P_i}} \quad (\text{sans unité})$$

- **Disponibilité totale (DT) :**

C'est l'aptitude de la machine  $M_i$  à s'engager totalement pour accomplir sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système de production.

Pour chaque machine  $M_i$ , on définit la disponibilité totale comme suit :

$$DT_{M_i} = 1 - Pr_{R_i} \quad (\text{Sans unité})$$

### 2. L'indisponibilité :

Les notions de l'indisponibilité sont les compléments aux notions de la disponibilité.

L'indisponibilité est représentée par les indicateurs suivants :

- **Indisponibilité opérationnelle (IO) :**

Cette notion peut être définie pour une machine  $M_i$  :

$$IO_{M_i} = 1 - DO_{M_i} = 1 - Pr_{M_i} \quad (\text{Sans unité})$$

$$IO_{M_1} = 1 - DO_{M_1} = 1 - Pr_{M_1} = 1 - 0.3453 = 0.6547$$

$$IO_{M_2} = 1 - DO_{M_2} = 1 - Pr_{M_2} = 1 - 0.3333 = 0.6667$$

$$IO_{M_3} = 1 - DO_{M_3} = 1 - Pr_{M_3} = 1 - 0.3333 = 0.6667$$

$$IO_{M_4} = 1 - DO_{M_4} = 1 - Pr_{M_4} = 1 - 0.2858 = 0.7142$$

Ainsi que pour le système complet

$$IO_S = 1 - \min_t(DO_{M_i}) = 1 - 0.2858 = 0.7142$$

- **Indisponibilité propre (IP) :**

$$IP_{M_i} = 1 - DP_{M_i} = 1 - \frac{Pr_{M_i}}{Pr_{M_i} + Pr_{p_i}} = \frac{Pr_{p_i}}{Pr_{M_i} + Pr_{p_i}} \quad (\text{Sans unité})$$

$$IP_{M_1} = 1 - DP_{M_1} = 1 - 0.5296 = 0.4704$$

$$IP_{M_2} = 1 - DP_{M_2} = 1 - 0.5000 = 0.5000$$

$$IP_{M_3} = 1 - DP_{M_3} = 1 - 0.5000 = 0.5000$$

$$IP_{M_4} = 1 - DP_{M_4} = 1 - 0.4668 = 0.5332$$

- **Indisponibilité totale (IT) :**

$$IT_{M_i} = 1 - DT_{M_i} \quad (\text{sans unité})$$

$$IT_{M_1} = 1 - DT_{M_1} = 1 - 0.6520 = 0.3480$$

$$IT_{M_2} = 1 - DT_{M_2} = 1 - 0.6667 = 0.3333$$

$$IT_{M_3} = 1 - DT_{M_3} = 1 - 0.6667 = 0.3333$$

$$IT_{M_4} = 1 - DT_{M_4} = 1 - 0.6123 = 0.3877$$

Remarquons aussi, que l'indisponibilité des machines dépend également des conditions de leurs utilisations. En effet, l'utilisation des machines avec leur régime maximum augmente la fréquence d'apparition des pannes au niveau des machines.

### 3. La Fiabilité :

La fiabilité est la probabilité qu'une machine réalise sa tâche, de manière satisfaisante, sous des conditions données et pendant une période de temps déterminé.

Dans ce qui suit nous donnons quelques notions permettant d'évaluer la fiabilité d'un système de production.

- **Fréquences des Arrêts Propres (FP) :**

On définit FP pour la machine  $M_i$  par :

$$FP_{M_i} = \frac{\text{nombre d'arrêts propres}}{\text{temps total}} = \frac{Pr_{p_i} * \mu_i * TT}{TT} = Pr_{p_i} * \mu_i \quad (\text{Arrêt / heure})$$

$$FP_{M1} = Pr_{p1} * \mu_1 = 0.3067 * 0.1146 = 0.0351 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M2} = Pr_{p2} * \mu_2 = 0.3333 * 0.5 = 0.1667 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M3} = Pr_{p3} * \mu_3 = 0.3333 * 0.4513 = 0.1504 \text{ Arrêt / heure}$$

$$FP_{M4} = Pr_{p4} * \mu_4 = 0.3265 * 0.1886 = 0.0616 \text{ Arrêt / heure}$$

- **Temps de Fonctionnement Moyen (TF) :**

Pour la machine Mi, on définit Temps de Fonctionnement Moyen la par :

$$TF_{Mi} = \frac{\text{Temps de bon Fonctionnement de Mi}}{\text{nbre d'arrêts propres}} = \frac{Pr_{Mi} * TT}{Pr_{pi} * \mu_i * TT} = \frac{Pr_{Mi}}{Pr_{pi} * \mu_i} \quad (\text{heure})$$

$$TF_{M1} = \frac{Pr_{M1}}{Pr_{p1} * \mu_1} = 9.8376 \text{ h}$$

$$TF_{M2} = \frac{Pr_{M2}}{Pr_{p2} * \mu_2} = 1.9994 \text{ h}$$

$$TF_{M3} = \frac{Pr_{M3}}{Pr_{p3} * \mu_3} = 2.2161 \text{ h}$$

$$TF_{M4} = \frac{Pr_{M4}}{Pr_{p4} * \mu_4} = 4.6396 \text{ h}$$

#### 4. Maintenabilité :

C'est, dans des conditions données d'utilisation, l'aptitude d'une machine à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir sa tâche. La maintenabilité peut être caractérisée par le temps de panne moyen.

- **Temps de panne moyen (TPM) :**

Le temps de panne moyen de la machine Mi se calcule comme suit :

$$TPM_{Mi} = \frac{\text{Temps d'arrêt propre de Mi}}{\text{nbre d'arrêts propres de Mi}} = \frac{Pr_{pi} * TT}{Pr_{pi} * \mu_i * TT} = \frac{1}{\mu_i}$$

$$TPM_{M1} = \frac{1}{\mu_1} = 8.7260$$

$$TPM_{M2} = \frac{1}{\mu_2} = 2.0000$$

$$TPM_{M3} = \frac{1}{\mu_3} = 2.2158$$

$$TPM_{M4} = \frac{1}{\mu_4} = 5.3022$$