

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Batna
Faculté de Technologie
Département d'Electronique

Mémoire présenté par :

BENHADDOUCHE DJEMAI
Ingénieur d'Etat en Electronique

En vue de l'obtention du diplôme de :
Magister en Electronique
Option : Contrôle

Thème

**Commande Optimale Appliquée à un Robot
Mobile**

Soutenu le :...../...../2013

Membres du jury

<i>Dr. ARAR Djemai</i>	<i>Président</i>	<i>(M.C. A Université de Batna)</i>
<i>Dr. SLIMANE Nouredine</i>	<i>Rapporteur</i>	<i>(M.C. A Université de Batna)</i>
<i>Dr. BOUTAMINA Brahim</i>	<i>Examineur</i>	<i>(M.C.A Université de Constantine)</i>
<i>Dr. CHAFAA Kheireddine</i>	<i>Examineur</i>	<i>(M.C. A Université de Batna)</i>

Remerciements

Au moment où on achève ce travail, je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour finir ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à monsieur *SLIMANE Noureddine*, mon professeur et mon rapporteur, pour m'avoir efficacement encadré, pour tous ses conseils et ses directives durant toutes les étapes de ce travail.

Je remercie monsieur *ARAR Djemai*, maître de conférences à l'université de *BATNA* pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

J'adresse mes plus sincères remerciements à monsieur *BOUTAMINA Brahim*, maître de conférences à l'université de *CONSTANTINE* et monsieur *CHAFAA Kheireddine* maître de conférences à l'université de *BATNA* pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'être membres de jury de ma thèse.

Je remercie tous mes collègues surtout *FOUZI Bouagal*.

Je tiens aussi à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes années d'études.

Finalement, je tiens à remercier l'ensemble de ma famille pour son soutien durant cette formation.

*A mes parents,
A mes frères et sœurs,
A ma femme et à mes deux petits enfants Mohamed Elseddike et Abd Errahmane,
Je dédie ce mémoire.*

Sommaire

Introduction Générale

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre 1

Etude de quelques capteurs utilisés en robotique mobile

1.1 Introduction :.....	3
1.2 Capteurs en robotique mobile	3
1.2.1 Les capteurs proprioceptifs.....	3
1.2.1.1 Les capteurs de déplacement :.....	4
a) Les odomètres :.....	4
b) Les accéléromètres :.....	4
c) Le radar Doppler :.....	5
1.2.1.2 Les capteurs d'attitude.....	5
a) Le gyroscope et le gyromètre:.....	5
b) Le magnétomètre ou compas magnétique :.....	5
c) Les inclinomètres.....	6
1.2.2 Les capteurs extéroceptifs :.....	6
1.2.2.1 Les capteurs télémétriques :.....	6
a) Les capteurs à ultrasons.....	6
b) Les capteurs à infrarouges.....	8
c) Les capteurs laser.....	9
1.2.2.2 Les systèmes de vision.....	10
a) La stéréovision.....	10
b) Les systèmes de vision omnidirectionnelle.....	11
1.2.3 Autres capteurs.....	14
a) Les capteurs tactiles.....	14
b) Les balises.....	14
c) Le GPS.....	14
1-3 Conclusion.....	15

Chapitre 2

Les différents types de modélisation d'un robot mobile

2.1 Introduction	16
2.2 Classes de robots mobiles à roues.....	16
2.2.1 Robot mobile de type unicycle.....	16
2.2.2 Robot mobile de type tricycle.....	16
2.2.3 Robot mobile de type voiture.....	17
2.2.4 Robot mobile de type omnidirectionnel.....	17
2.2.5 Comparaison des différents types.....	18
2.3 Modélisation du robot mobile de type unicycle.....	18
2.3.1 Modélisation cinématique.....	18
2.3.1.1 Contraintes non holonomes.....	18
2.3.1.2 Roulement sans glissement.....	20
2.3.1.3 Exemple de modélisation cinématique	21
2.3.2 Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC).....	24
2.3.3 Modélisation dynamique.....	26
2.3.3.1 Méthode d'Euler – Lagrange.....	26
2.3.3.1.1 Dynamique des systèmes non holonomes.....	26
2.3.3.1.2 Exemple de modélisation dynamique	28
2.3.3.2 Méthode de Newton – Euler.....	30
2.4 Conclusion.....	37

Chapitre 3

Etude détaillée de la commande optimale LQR

3.1 Introduction.....	38
3.2 Position du problème.....	38
3.3 Classement des problèmes de la commande optimale.....	39
3.3.1 Temps optimal.....	39
3.3.2 Coût optimal.....	40
3.4 Rappel des principes fondamentaux.....	40
3.4.1. Le principe d'optimalité de Bellman.....	40

3.4.2	Le principe d'optimalité de Pontriaguine.....	41
3.4.3	Le principe de moindre action de Maupertuis.....	43
3.5	Commande Linéaire Quadratique.....	44
3.5.1	Commande LQ à horizon fini.....	44
3.5.2	Commande LQ à horizon infini.....	46
3.6	Commande LQ à temps discret.....	46
3.6.1	Commande à horizon fini.....	47
3.6.2	Commande à horizon infini.....	51
3.7	Conclusion.....	52

Chapitre 4

Algorithmes et travaux de simulations

4.1	Introduction.....	54
4.2	Résolution de l'équation de Riccati.....	54
4.2.1	Méthode des vecteurs propres.....	54
4.2.2	Méthode de Schur.....	58
4.2.3	Méthode itérative.....	60
4.3	Algorithmes pour l'obtention des états optimaux et de la commande optimale.....	60
4.3.1	Premier Algorithme	60
a)	Énoncé du problème.....	60
b)	Solution du problème.....	60
c)	Schéma Bloc..	61
d)	Détermination de A et B	61
e)	Choix des matrices de pondération Q et R	62
4.3.2	Deuxième Algorithme	64
a)	Énoncé du problème.....	64
b)	Solution du problème.....	64
c)	Schéma Bloc..	65
4.4	Travaux de simulation.....	66
4.4.1	Première cas : horizon fini.....	66
4.4.1.1	Exemple 1 : $k_f = 10$	66

a) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati.....	66
b) Les états optimaux et la commande optimale.....	66
c) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $[Q_1]$ et $[R_1]$	68
d) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_1]$ et $[R_1]$	68
e) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $[Q_2]$ et $[R_2]$	70
f) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_2]$ et $[R_2]$	70
4.4.1.2 Exemple 2 : $k_f = 20$.....	72
a) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati.....	72
b) Les états optimaux et la commande optimale.....	72
c) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $[Q_1]$ et $[R_1]$	74
d) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_1]$ et $[R_1]$	74
e) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $[Q_2]$ et $[R_2]$	76
f) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_2]$ et $[R_2]$	76
4.4.2 4.4.2 Deuxième cas : horizon infini.....	78
a) Les états optimaux et la commande optimale.....	78
b) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_1]$ et $[R_1]$	79
c) Les états optimaux et la commande optimale, pour $[Q_2]$ et $[R_2]$	80
4.5 Conclusion.....	81

Conclusion Générale

Conclusion Générale.....	82
--------------------------	----

Bibliographie

Bibliographie.....	84
--------------------	----

Annexe

Annexe.....	87
-------------	----

Introduction Générale

Les études sur la commande optimale ont pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de cette discipline, ainsi que les applications dans des domaines très divers. La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie, etc...[13]

L'objectif de ce mémoire est appliqué une type de commande optimale sur des robots mobiles non holonomes. Nous nous intéressons seulement aux robots mobiles de type unicycle, l'avantage de cette structure est qu'elle permet au véhicule de tourner sur place, suivant si les vitesses de rotation des deux roues motrices sont de signe opposées ou pas. Ainsi le robot peut pivoter rapidement, ce qui donne des capacités de déplacement intéressantes. Par conséquent, un asservissement en vitesse est suffisant pour les commander. De ce fait, le modèle considéré pour développer les lois de commandes dans ce mémoire sont basés sur le modèle dynamique du robot mobile de type unicycle.

Différentes méthodes existent pour commander ce type de robots. Dans ce mémoire, nous avons proposé une type de commande optimale qu'est la commande à régulateur linéaire quadratique (LQR) pour commander le robot mobile non holonome, qui représentent un moyen efficace pour la commande des systèmes, la rapidité du traitement, les capacités d'apprentissage et d'adaptation, mais aussi la robustesse de ces approches motivent leur utilisation.

Pour cela, notre travail est organisé comme suit :

Pour une présentation aussi claire que possible de notre travail, on a été emmené à présenter, au premier chapitre, l'étude de quelques capteurs utilisés en robotique mobile, ainsi que l'importance de ces capteurs à l'évaluation de l'environnement et à la navigation du robot mobile.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des différents types de modélisation d'un robot mobile, qui sont le modèle cinématique et le modèle dynamique.

Le troisième chapitre, est entièrement consacré à l'étude de la commande optimale à régulateur linéaire quadratique LQR, dans les deux cas temporels : temps continu et temps discret.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les différentes méthodes de résolution de l'équation de Riccati discrète, les algorithmes dans le cas de l'horizon fini et l'horizon infini, ainsi que les différents résultats de simulation.

Finalement, nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Etude de quelques capteurs utilisés en robotique mobile

1.1 Introduction :

Le robot mobile, pour accomplir sa tâche correctement, doit avoir la capacité de perception ; cette notion en robotique mobile est relative à la capacité du système à recueillir, traiter et mettre en forme des informations utiles au robot pour agir et réagir dans l'environnement qui l'entoure. Alors que pour des tâches de manipulation on peut considérer que l'environnement du robot est relativement structuré, ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit de naviguer de manière autonome dans des lieux très partiellement connus. Aussi, pour extraire des informations utiles à l'accomplissement de sa tâche, il est nécessaire que le robot dispose de nombreux capteurs mesurant aussi bien son état interne que l'environnement dans lequel il évolue. [8]

1.2 Capteurs en robotique mobile :

En robotique mobile, on classe traditionnellement les capteurs en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même ou l'état de son environnement. Dans le premier cas, à l'image de la perception chez les êtres vivants, on parle de proprioception et donc de capteurs proprioceptifs. On trouve par exemple dans cette catégorie les capteurs de position ou de vitesse des roues et les capteurs de charge de la batterie [8]. Les capteurs renseignant sur l'état de l'environnement, donc de ce qui est extérieur au robot lui-même, sont eux appelés capteurs extéroceptifs. Il s'agit de capteurs donnant la distance du robot par rapport aux amers de l'environnement, la température, signalant la mise en contact du robot avec l'environnement, etc...

1.2.1 Les capteurs proprioceptifs

Les capteurs proprioceptifs fournissent, par intégration, des informations élémentaires sur les paramètres cinématiques du robot. Les informations sensorielles gérées dans ce cadre sont généralement des vitesses, des accélérations, des angles de giration, des angles d'attitude [9].

On peut regrouper les capteurs proprioceptifs en deux familles:

- Les capteurs de déplacement qui comprennent les odomètres, les accéléromètres, les radars Doppler, les mesureurs optiques. Cette catégorie permet de mesurer des déplacements élémentaires, des variations de vitesse ou d'accélération sur des trajectoires rectilignes ou curvilignes.
- les capteurs d'attitude, qui mesurent deux types de données : les angles de cap et les angles de roulis et de tangage. Ils sont principalement constitués par les gyroscopes et les gyromètres, les capteurs inertiels composites, les inclinomètres, les magnétomètres. Ces capteurs sont en majorité de type inertiel.

1.2.1.1 Les capteurs de déplacement :

a) Les odomètres :

Les odomètres permettent de fournir une quantification des déplacements curvilignes du robot en mesurant la rotation de ses roues. Le calcul de la position relative du robot est réalisé par intégration des rotations élémentaires des roues.

Les odomètres sont généralement composés de codeurs incrémentaux qui permettent de mesurer les angles de rotation avec une précision qui dépend de la résolution du codeur.

L'information de déplacement nécessitera la connaissance du diamètre des roues, de l'entraxe des roues, de la structure mécanique et cinématique du véhicule.

Ce capteur est fortement utilisé en robotique mobile puisqu'il présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et surtout d'être peu coûteux.

b) Les accéléromètres :

Les accéléromètres, dont un type de fonctionnement est présenté dans la figure 1-1 sont des capteurs qui mesurent les accélérations linéaires. Ils peuvent donc mesurer les déplacements d'un robot mais la double intégration de la mesure pour obtenir une information de position les rendent sensibles aux erreurs de mesure. De plus ils sont sensibles à l'accélération de la pesanteur ce qui les rend sensibles aux variations de l'inclinaison du robot.

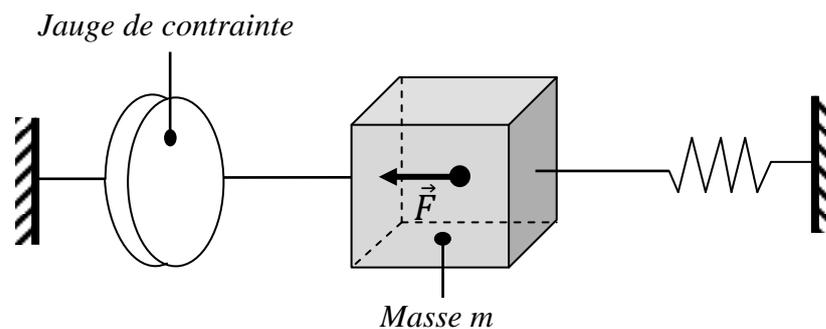


Figure 1-1: Exemple de fonctionnement d'un accéléromètre.

Lors de l'accélération, le mobile de masse m produit une force \vec{F} qui est mesurée par la jauge de contrainte. L'accélération γ est donnée par la formule.

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad (1-2)$$

Cependant les erreurs de modélisation du diamètre de la roue ainsi que les glissements de la roue sur le sol entachent ces mesures d'erreurs. Dans le cas où le robot n'utilise que l'odométrie pour se positionner (*dead reckoning*), cette erreur est cumulée à chaque mesure et se retrouve non bornée [26].

c) Le radar Doppler :

Le radar Doppler fournit une estimation instantanée de la vitesse linéaire d'une plateforme mobile par rapport à un objet de la scène en se basant sur l'effet Doppler-Fizeau. Le principe est de diriger un faisceau électromagnétique de fréquence F vers le sol. Le faisceau reçu après rediffusion sur le sol présente un décalage de fréquence ΔF proportionnel à la vitesse V du déplacement relatif du véhicule par rapport au sol. L'intégration de la mesure de vitesse fournira une estimation du déplacement du mobile. Ce capteur est le plus souvent utilisé en milieu extérieur. Il présente le gros avantage d'être insensible aux glissements des roues ou des chenilles du mobile. En revanche, sa précision se dégrade rapidement avec la diminution de la vitesse. De plus il est généralement lourd à mettre en œuvre, tant du point de vue électronique que du point de vue du traitement des informations reçues.

1.2.1.2 Les capteurs d'attitude

Les capteurs d'attitude permettent d'estimer les paramètres intrinsèques du robot que sont les angles de cap, de roulis et de tangage. Ces capteurs sont principalement de type inertiel.

Ces capteurs ont pour point commun d'être généralement coûteux et sensibles au bruit, d'où une intégration moins fréquente dans les systèmes embarqués que les odomètres.

a) Le gyroscope et le gyromètre:

- **Les gyroscopes :** permettent de mesurer une variation angulaire. Ils sont intéressants en robotique mobile parce qu'ils peuvent compenser les défauts des odomètres. Une erreur d'orientation odométrique peut entraîner une erreur de position cumulative qui peut être diminuée voire compensée par l'utilisation conjointe de gyroscopes. Les gyroscopes très précis sont trop onéreux pour être utilisés en robotique mobile. Cependant, les gyroscopes à fibre optique, connus pour leur grande précision, ont vu leur prix chuter et sont donc devenus une solution attractive pour la navigation en robotique mobile.
- **Le gyromètre :** est un capteur qui permet de mesurer une vitesse angulaire. Il existe plusieurs types de gyromètres: les premiers à avoir fait leur apparition furent mécaniques, aujourd'hui, on utilise surtout des gyromètres laser ou des gyromètres optiques.

b) Le magnétomètre ou compas magnétique :

Le compas magnétique, appelé aussi magnétomètre, indique la direction du nord magnétique. Généralement, la déclinaison magnétique est compensée pour que le capteur délivre en permanence une mesure absolue du cap par rapport à la direction du nord géographique [19]. On distingue :

- les magnétomètres statiques qui mesurent le champ magnétique terrestre suivant deux ou trois axes orthogonaux. Cette catégorie inclut les compas flux gate qui sont les plus

adaptés à la robotique mobile, en raison de leur insensibilité aux chocs et aux vibrations, de leur coût peu élevé et de leur faible consommation.

- les magnétomètres pendulaires qui donnent les composantes horizontales du champ magnétique terrestre suivant deux axes perpendiculaires. Le pendule permet de s'affranchir des mouvements de roulis et de tangage.

L'inconvénient majeur de ces capteurs est leur perturbation par les masses magnétiques environnantes. Il n'est donc pas possible de les utiliser à l'intérieur d'un bâtiment. L'influence magnétique de l'engin porteur peut être éliminée en utilisant une procédure d'auto calibrage.

c) Les inclinomètres

La mesure des angles d'attitude d'un véhicule peut être réalisée avec des inclinomètres. Conçus généralement sur le principe des accéléromètres pendulaires, ces capteurs sont sensibles à la gravité terrestre mais aussi à toute accélération extérieure qui leur est appliquée (mouvements de l'engin, vibrations, chocs). Il n'est pas possible de distinguer a priori la partie due à la gravité de celle due aux accélérations extérieures. Ces capteurs donnent donc une mesure exploitable uniquement sur des véhicules dont on peut négliger l'accélération propre. Par ailleurs, les signaux parasites dus aux chocs et aux vibrations peuvent être éliminés par filtrage passe-bas [19].

1.2.2 Les capteurs extéroceptifs :

Les capteurs extéroceptifs permettent de percevoir le milieu d'évolution du robot. Ils sont généralement le complément indispensable aux capteurs présentés précédemment. Des méthodes de fusion de données seront alors utilisées pour conditionner et traiter les informations sensorielles de natures différentes. Deux familles de capteurs extéroceptifs embarqués peuvent être identifiées : les capteurs télémétriques et les systèmes de vision.

1.2.2.1 Les capteurs télémétriques :

Il existe différents types de capteurs télémétriques qui permettent de mesurer la distance aux éléments de l'environnement, utilisant divers principes physiques.

a) Les capteurs à ultrasons

Le capteur US, aussi appelé télémètre US ou sonar, est le type de capteur le plus couramment utilisé pour mesurer la distance aux obstacles [26]. Son fonctionnement est simple, il est facile à mettre en œuvre et est peu onéreux d'où son utilisation sur un grand nombre de robots mobiles.

Le capteur US mesure le temps que met un train d'ondes pour aller d'un émetteur à un récepteur. Le capteur est composé soit d'un module émetteur/ récepteur soit de deux modules, un émetteur et un récepteur, placés côte à côte dans la direction de propagation. Le signal reçu par le récepteur est l'écho du signal émis. Le temps de vol mesuré est celui de l'aller-retour du

train d'onde. Connaissant la célérité ($c \approx 340m/s$) de ce signal dans l'air, on peut alors calculer la distance parcourue par ce signal et donc la distance D à l'obstacle par la relation :

$$D = \frac{1}{2}cT \quad (1-2)$$

Où T représente le temps de vol du train d'ondes. Cependant la valeur de la célérité varie légèrement en fonction de paramètres comme la température, la pression ou de l'humidité de l'air ce qui fait varier les mesures.

Le capteur le plus utilisé est l'émetteur/récepteur Polaroid [26]. Nous ne donnerons ici que les caractéristiques générales du capteur Polaroid, celles des autres capteurs US étant semblables. La plage de mesure est de 10cm à 10m. L'onde émise par le capteur est un cône d'une ouverture d'environ 25° ce qui entraîne une perte d'intensité proportionnelle à l'inverse du carré de la distance parcourue. Cet angle d'ouverture procure au capteur une bonne vision des obstacles mais il est cependant impossible de donner la direction exacte de l'écho, l'obstacle se situe dans le cône de détection comme le montre la figure (1-2).

Les capteurs US ont trois problèmes majeurs, l'angle d'incidence entre l'onde et l'obstacle, les échos non désirés et la faiblesse de l'écho. Si l'angle d'incidence entre l'obstacle et le signal ne permet pas au signal de retourner vers le capteur, l'obstacle ne sera pas détecté.

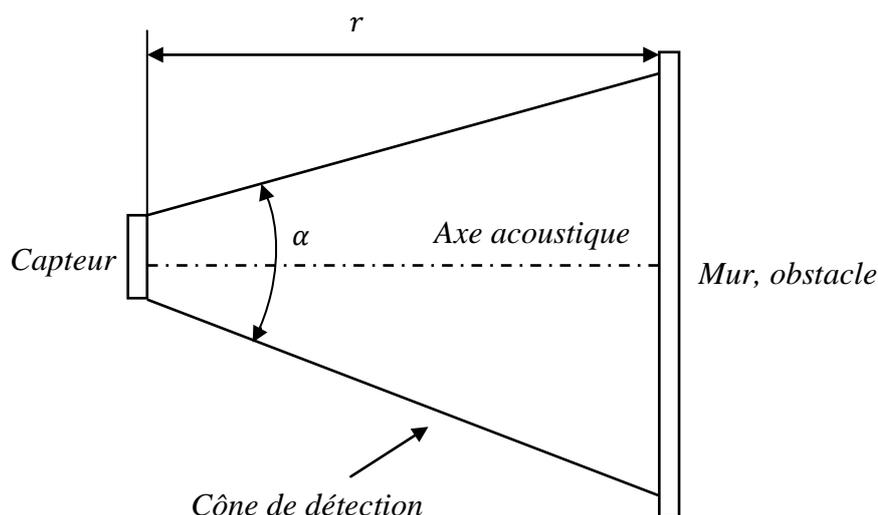


Figure 1-2: Schéma de fonctionnement d'un capteur US.

Quant aux échos non désirés, ils proviennent de rebonds successifs du signal avant d'être captés par le récepteur ou encore d'un signal provenant d'une autre source, d'un autre capteur (on parle alors de *cross-talk*). Ceci entraîne la détection d'obstacles qui n'existent pas. Il est nécessaire d'éviter que plusieurs capteurs US émettent en même temps afin justement d'éviter le phénomène de *cross-talk* même si cela ralentit la vitesse d'acquisition.

L'atténuation de l'écho est due à la matière de l'obstacle, à l'angle d'incidence et à la surface de réflexion. Si la matière est trop absorbante, elle atténuera trop le signal et le récepteur ne pourra plus le capter.

La taille de l'obstacle et plus spécifiquement de la surface créant l'écho doit également être assez grande pour renvoyer suffisamment de signal. Si cette zone est petite comme par exemple pour un pied de table ou de chaise, la quantité de signal retournant vers le récepteur peut être trop faible pour permettre une détection. Il en va de même si l'obstacle est arrondi car la majeure partie du signal ne retourne pas vers le capteur.

Malgré tous ces défauts le capteur US est sans doute le capteur le plus utilisé dans la robotique mobile d'intérieur car il permet de voir à plusieurs mètres pour un coût relativement faible avec une précision suffisante pour éviter les obstacles ou se localiser.

b) Les capteurs à infrarouges

Un autre type de capteur couramment utilisé est le capteur IR (Infra-Rouge). Il existe deux utilisations des capteurs IR qui sont la mesure de distance et l'utilisation comme capteur TOR (Tout Ou Rien) sans contact. Lorsque l'on réalise une mesure de distance, en fait c'est l'angle que fait le rayon lumineux, partant d'une source et arrivant à un récepteur placé sur le même axe et orienté vers la même direction comme le montre la figure (1-3), qui est mesuré. Le récepteur est constitué d'une ligne de capteurs permettant de déterminer l'angle de réflexion. Plus la distance à mesurer est grande, plus l'angle est petit.

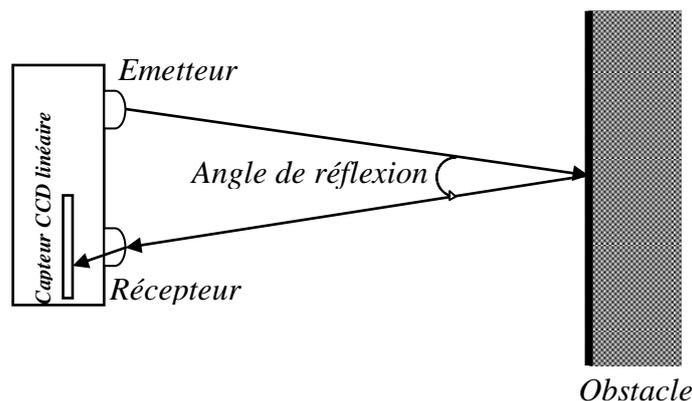


Figure 1-3: Fonctionnement d'un capteur IR à mesure d'angle de réflexion

Il possède également quelques défauts qui sont :

- une portée limitée à environ 1m [26].
- une sensibilité à la couleur de la surface réfléchissante diminuant la précision et la distance maximale mesurable.
- une grande difficulté à voir les surfaces vitrées car le rayon passant au travers.

– une sensibilité à la lumière extérieure, bien qu’une modulation du signal puisse éliminer ce problème.

Il possède cependant une vitesse de mesure bien plus élevée que celle des capteurs US.

La deuxième utilisation des IR donne une information TOR, comme un bumper mais sans contact. Ce capteur est constitué d’une DEL (Diode Electro-Luminescente) IR et d’un photo-transistor, tous deux orientés dans la même direction. Lorsqu’un obstacle se trouve dans le champ d’émission de la DEL et est suffisamment proche pour refléter la lumière vers le phototransistor, celui-ci devient passant et la présence de l’obstacle est détectée.

Ce système est très peu onéreux mais est sensible à la couleur de l’obstacle, à la lumière du jour et de source d’IR importante comme une ampoule à incandescence. Afin d’éviter de mauvaises détections dues à la lumière du jour, il est possible de moduler le signal.

c) Les capteurs laser

Des capteurs lasers sont également utilisés pour mesurer les distances. Ces capteurs fonctionnent soit sur le même principe que les capteurs IR (mesure de l’angle de réflexion) soit sur une mesure indirecte de temps de vol. La faible divergence du rayon laser leur permet d’avoir une mesure ponctuelle plutôt qu’une mesure de zone. Ils sont le plus souvent utilisés dans un scanner laser qui consiste à passer par un miroir tournant incliné à 45° figure (1-4).

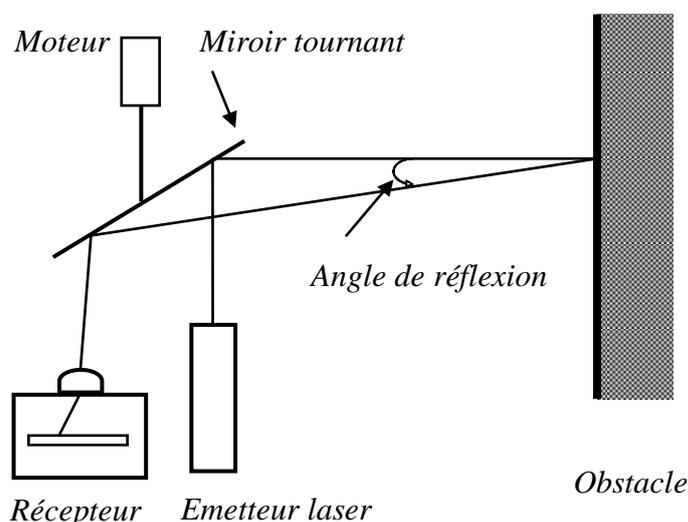


Figure 1-4: Fonctionnement d'un capteur LASER

Les mesures sont alors obtenues en 2D dans le plan de mesure du capteur. Ce système est onéreux et généralement relativement encombrant même s'ils sont des capteurs de petites dimensions. L'angle d'ouverture du scanner laser est généralement de l'ordre de 180° à 240° . Ces capteurs sont plus utilisés en robotique classique [26] que sur les fauteuils roulants car la position de l'utilisateur gêne son installation. En effet, il doit être placé soit entre les jambes

de l'utilisateur, soit devant l'utilisateur ou encore au dessus de l'utilisateur comme sur le Robotic Chariot de ActivMedia Robotics.

1.2.2.2 Les systèmes de vision

Les systèmes de vision en robotique sont basés sur l'utilisation d'une caméra CCD . L'arrivée des capteurs CCD (Charge Coupled Device), en 1975, a été déterminante dans l'évolution de la vision : la rapidité d'acquisition, la robustesse et la miniaturisation sont autant d'avantages qui ont facilité leur intégration. Les systèmes de vision sont très performants en termes de portée, précision et quantité d'informations exploitables. Ils sont de plus les seuls capables de restituer une image sensorielle de l'environnement la plus proche de celle perçue par l'être humain [9].

En revanche, l'inconvénient majeur de tels systèmes de perception se situe au niveau de la gestion du flux important de données exploitables : traiter une image demeure une opération délicate et surtout coûteuse en temps de calcul.

Utilisé seul, un caméra CCD ne peut fournir qu'une information 2D. Les techniques qui vont permettront d'obtenir des informations 3D à partir d'un tel capteur sont généralement liées à l'adjonction d'un autre capteur. Dans ce cadre nous pouvons identifier les techniques suivantes :

- la stéréovision.
- Les systèmes de vision omnidirectionnelle.

a) La stéréovision

La stéréovision consiste à observer une même scène avec deux caméras qui sont éloignées l'une de l'autre et dont on connaît la distance qui les sépare. Connaissant la géométrie exacte du système stéréoscopique, la première étape de reconstruction 3D consiste à mettre en correspondance les deux images. Cette phase réside dans la détermination de couples de points observés dans les deux images, ou dans l'appariement de points d'intérêt. L'information 3D pourra alors être fournie par triangulation.

La stéréovision est basée sur le même principe de reconstitution de la profondeur que la vision chez l'être humain.

La figure (1-5) décrit plus précisément le principe de la stéréovision. Tout point M visible depuis les deux caméras se projette en $P1$ sur le plan image de la première caméra et en $P2$ sur le plan image de la deuxième caméra. Inversement, connaissant deux points en correspondance $P1$ et $P2$, ainsi que la distance D séparant les centres optiques $O1$ et $O2$ des deux caméras, les coordonnées du point P sont données par l'intersection de $(O1p1)$ et $(O2p2)$.

La stéréovision apparaît comme un des moyens de perception les plus performants en robotique. Toute la problématique de la stéréovision réside dans la robustesse de la phase de mise en correspondance des informations : elle est souvent liée à de nombreuses ambiguïtés mais aussi à des temps de calcul très importants (aspect fortement combinatoire de l'appariement).

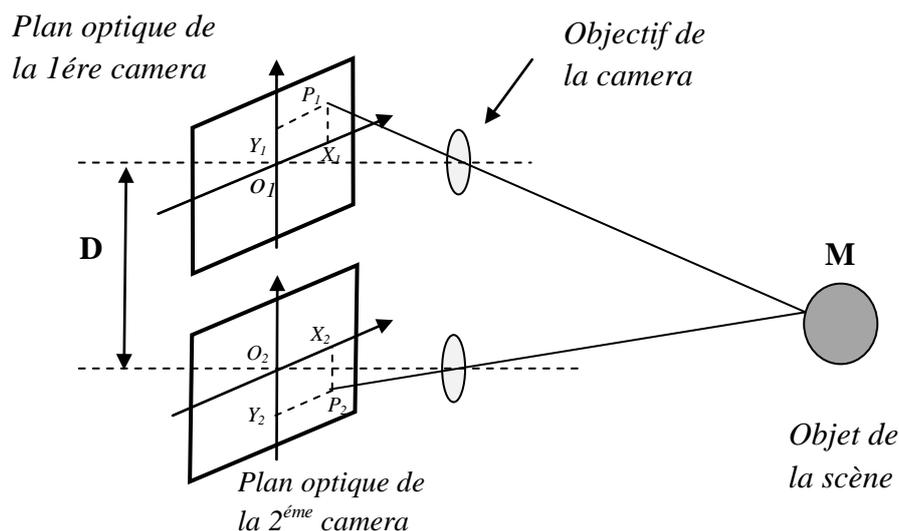


Figure 1-5: principe de la stéréovision.

b) Les systèmes de vision omnidirectionnelle

Ces systèmes de perception associent une caméra CCD et un élément permettant d'obtenir une vue sur 360 degrés de l'environnement. A ce titre ils sont de plus en plus utilisés en robotique mobile au détriment de la vision monoculaire. Suivant l'élément ou les éléments ajoutés à une caméra CCD, on pourra distinguer deux techniques pour obtenir une image omnidirectionnelle.

➤ Génération d'images multiples par utilisation de plusieurs caméras

Cette première technique consiste à utiliser plusieurs caméras couvrant un champ de vision égal à 360 degrés : par exemple quatre caméras séparées par des angles de 90 degrés.

Dans ce cadre, nous pouvons citer le système développé au laboratoire de Bell. AT & T qui intègre quatre caméras conventionnelles et quatre miroirs triangulaires [9]. On dispose donc de quatre images pour pouvoir calculer une image panoramique. Le résultat est une image panoramique à haute résolution (3800 par 480 pixels). Ce capteur possédant un seul point de vue effectif, il permet de calculer n'importe quelle projection planeaire pour obtenir des images purement perspectives.

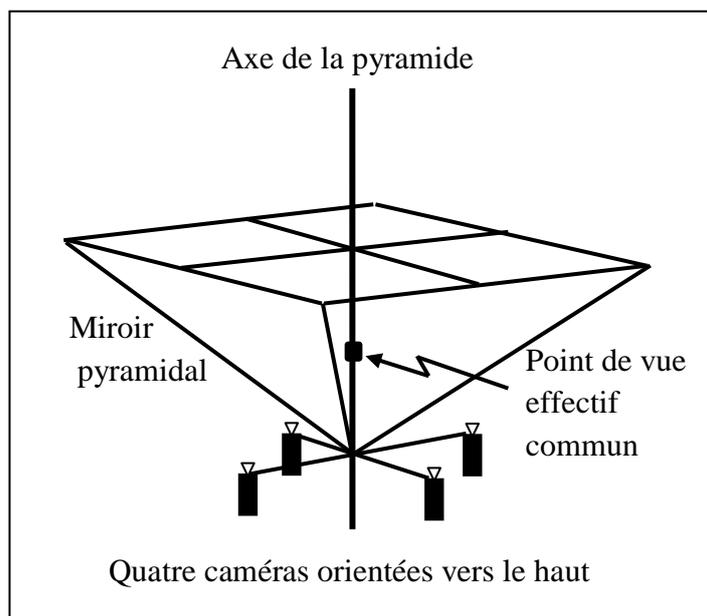


Figure 1-6 : Système utilisant quatre caméras séparées par des angles de 90 degrés.

➤ **Génération d'images multiples par rotation d'une caméra**

Cette technique consiste à faire pivoter une caméra autour d'un axe. Cette méthode permet d'avoir une prise de l'environnement avec une seule caméra, mais il faut effectuer une rotation complète avant d'obtenir une vue sur 360 degrés.

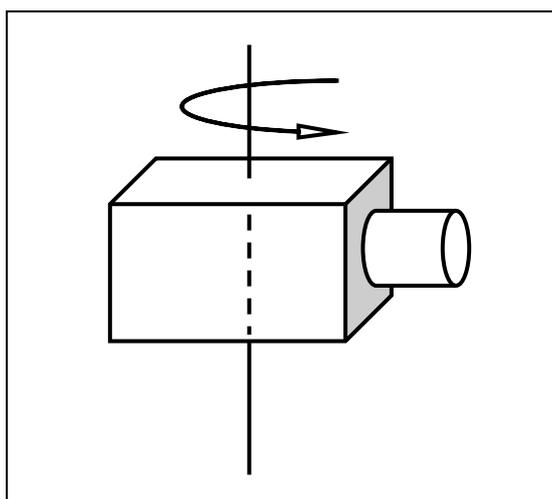


Figure 1-7 : caméra rotative.

La technique de mosaïque peut-être utilisée pour représenter une séquence vidéo, pour construire des panoramas lors d'un déplacement de la caméra et ainsi mémoriser le déplacement, ou bien pour la génération d'image omnidirectionnelle.

De tels systèmes génèrent un volume de données qui nécessite des temps de traitement très importants. En outre, les aspects mécaniques, la gestion du flou dû au

mouvement de la caméra font que ces méthodes sont complexes à mettre en œuvre. Toutefois, quelle que soit la solution envisagée, l'acquisition d'une scène panoramique avec une caméra matricielle ou linéaire reste une méthode lourde à mettre en œuvre.

➤ **Utilisation de miroirs convexes**

Cette méthode consiste à placer un miroir réfléchissant face à la caméra pour obtenir une image qui est la projection omnidirectionnelle 2D de l'environnement. Ces capteurs omnidirectionnels sont appelés capteurs catadioptriques. Ils présentent l'avantage de fournir une vue globale de l'environnement en une seule acquisition. Autre avantage : ils n'ont aucune partie mobile et donc consomment peu d'énergie (pas de mécanisme de rotation et d'orientation). Par contre, le redressement d'image pose problème. Rappelons que la cata-dioptrie est la théorie des systèmes optiques comportant une succession d'éléments réfléchissants et réfractant (dioptries : lentilles...).

Précisons que cette contrainte est importante, car vérifiée, elle permet la reconstruction d'images perspectives géométriquement correctes par la fonction plénoptique calculée au centre de projection effectif [9].

Plusieurs types de miroir peuvent être utilisés pour la vision omnidirectionnelle : miroir sphérique, miroir conique, miroir parabolique et miroir hyperbolique. Une étude concernant le miroir sphérique est présentée ci-dessous.

• **Miroir sphérique**

Une image obtenue à partir d'un miroir sphérique a une résolution qui est bonne dans la région centrale mais la résolution est faible dans la région périphérique. Il s'agit là d'une caractéristique commune avec les objectifs Fish-eye. La zone de vision de ce

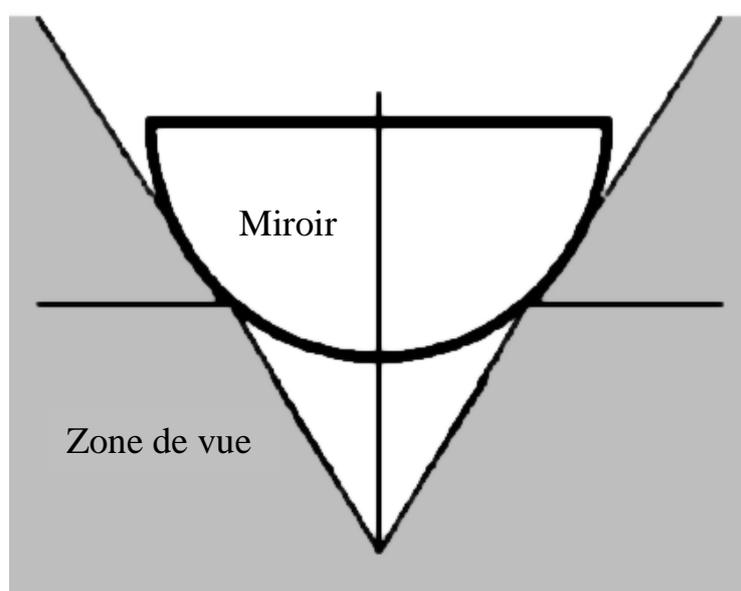


Figure 1-8 : Champ de vision du miroir sphérique.

type de capteur est la plus large parmi tous ceux utilisant des miroirs convexes figure (1-8). Ce capteur est utilisé à des fins de navigation. L'idée est de détecter des changements d'apparence d'amers caractéristiques de l'horizon [9].

Un miroir sphérique est utilisé pour déterminer la position du robot. Le robot possède une base de données d'images omnidirectionnelles qui est comparée à l'image qu'il vient d'acquérir.

1.2.3 Autres capteurs

a) Les capteurs tactiles

Les robots peuvent être équipés de capteurs tactiles, qui sont le plus souvent utilisés pour des arrêts d'urgence lorsqu'il rencontre un obstacle qui n'avait pas été détecté par le reste du système de perception [10].

Ces capteurs peuvent être de simples contacteurs répartis sur le pourtour du robot. Ils ne détectent alors le contact qu'au dernier moment. Il est également possible d'utiliser des petites tiges arquées autour du robot pour servir d'intermédiaire à ces contacteurs, ce qui permet une détection un peu plus précoce et donne ainsi plus de marge pour arrêter le robot.

b) Les balises

Dans certaines applications, il est également possible d'utiliser des balises dont on connaît la position, et qui pourront être facilement détectées par le robot, afin de faciliter sa localisation.

Des techniques très diverses peuvent être utilisées pour ces balises. On peut par exemple utiliser un signal radio, émis de manière omnidirectionnel par la balise. Le robot sera alors équipé d'une antenne directionnelle qui lui permettra de détecter la direction des différentes balises, afin de déduire sa position par triangulation.

On peut également utiliser des codes couleurs ou des codes barres qui pourront être détectés par une caméra.

c) Le GPS

Les besoins de localisation étant omniprésents dans de très nombreux secteurs de la vie actuelle, l'idée d'avoir un système de localisation le plus universel possible a donné lieu à l'apparition du Global Positioning System (GPS). C'est un système de balises dont on a placé les balises sur des satellites en orbite terrestre et qui est par conséquent accessible de quasiment partout à la surface du globe. Ce système permet donc d'avoir une mesure de sa position dans un repère global couvrant la terre avec une précision variant de quelques dizaines de mètres à quelques centimètres suivant les équipements.

Ce système est cependant loin de résoudre tous les problèmes de localisation des robots mobiles. Il fonctionne en effet difficilement dans des environnements urbains, et n'est pas utilisable à l'intérieur des bâtiments. Sa précision est de plus souvent trop faible pour qu'un robot terrestre puisse utiliser ces informations seules. En pratique, il est souvent couplé à un système inertiel qui permet de palier aux pertes du signal GPS et il ne remplace de toute façon pas les capteurs du robot qui lui permettent de percevoir son environnement immédiat,

qui constitue la source d'information principale pour la navigation à court terme (par exemple l'évitement d'obstacles, par opposition à la navigation à long terme qui consiste à rejoindre un but distant).

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a traité l'importance de la perception pour le robot mobile ; qui s'accomplit par les capteurs, qui sont classifiés en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même (capteurs proprioceptifs) ou l'état de son environnement (capteurs extéroceptifs).

Chapitre 2

Les différents types de modélisation d'un robot mobile

2.1 Introduction

La modélisation est un principe ou une technique qui permet d'établir un modèle explicatif d'un phénomène ou d'un comportement en recensant les variables ou les facteurs explicatifs et l'importance relative de chacune de ces variables.

Dans ce chapitre, nous utilisons un robot mobile de type unicycle, et nous présentons deux types de modélisation; la modélisation cinématique et la modélisation dynamique, pour exprimer le mouvement du robot mobile par des équations de vitesse et d'accélération.

2.2 Classes de robots mobiles à roues

Il existe plusieurs classes de robots mobiles à roues déterminées, principalement, par la position et le nombre de roues utilisées.

Nous citerons ici les quatre classes principales de robots à roues. [31]

2.2.1 Robot mobile de type unicycle

Un robot mobile de type unicycle est actionné par deux roues indépendantes, il possède éventuellement des roues folles pour assurer sa stabilité. Son centre de rotation est situé sur l'axe reliant les deux roues motrices.

C'est un robot non-holonyme, en effet il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion.

Sa commande peut être très simple, il est en effet assez facile de le déplacer d'un point à un autre par une suite de rotations simples et de lignes droites. [31] [7]

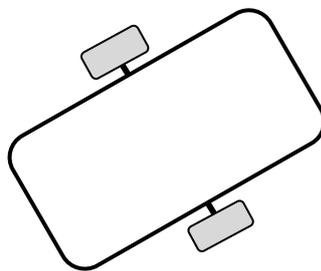


Figure 2- 1 : Robot mobile de type unicycle

2.2.2 Robot mobile de type tricycle

Un robot mobile de type tricycle est constitué de deux roues fixes placées sur un même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal. Le mouvement du robot est donné par la vitesse des deux roues fixes et par l'orientation de la roue orientable. Son centre de rotation est situé à l'intersection de l'axe contenant les roues fixes et de l'axe de

la roue orientable. C'est un robot non-holonyme. En effet, il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues fixes. Sa commande est plus compliquée. Il est en général impossible d'effectuer des rotations simples à cause d'un rayon de braquage limité de la roue orientable. [7] [31]

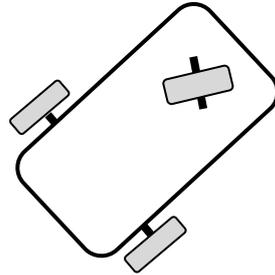


Figure 2- 2 : Robot mobile de type tricycle

2.2.3 Robot mobile de type voiture

Un robot mobile de type voiture est semblable au tricycle, il est constitué de deux roues fixes placées sur un même axe et de deux roues centrées orientables placées elles aussi sur un même axe.

Le robot mobile de type voiture est cependant plus stable puisqu'il possède un point d'appui supplémentaire.

Toutes les autres propriétés du robot voiture sont identiques au robot tricycle, le deuxième pouvant être ramené au premier en remplaçant les deux roues avant par une seule placée au centre de l'axe, et ceci de manière à laisser le centre de rotation inchangé. [7] [31]

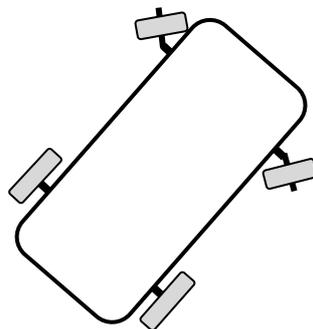


Figure 2- 3 : Robot mobile de type voiture

2.2.4 Robot mobile de type omnidirectionnel

Un robot mobile omnidirectionnel est un robot qui peut se déplacer librement dans toutes les directions. Il est en général constitué de trois roues décentrées orientables placées en triangle équilatéral.

L'énorme avantage du robot omnidirectionnel est qu'il est holonome puisqu'il peut se déplacer dans toutes les directions. Mais ceci se fait au dépend d'une complexité mécanique bien plus grande. [7] [31]

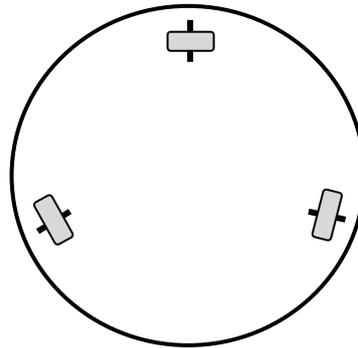


Figure 2- 4 : Robot mobile de type omnidirectionnel

2.2.5 Comparaison des différents types

Nous pouvons observer dans le tableau ci-dessous un récapitulatif des avantages et des inconvénients des différents types de robots à roues. [7] [31]

Type du robot	Avantage	Inconvénient
unicycle	stable rotation sur soi-même complexité mécanique faible	non-holonome
Tricycle	complexité mécanique modérée	non-holonome peu stable pas de rotation sur soi-même
Voiture	stable complexité mécanique modérée	non-holonome pas de rotation sur soi-même
Omnidirectionnel	holonome stable rotation sur soi-même	complexité mécanique importante

Tableau 2- 1 : Comparaison des différents types de robots mobiles

2.3 : Modélisation du robot mobile de type unicycle

2.3.1 Modélisation cinématique

2.3.1.1 Contraintes non holonomes

Définition 1 :

Étant donné un système mécanique dont l'espace de configuration est une variété différentielle Q de dimension n , on appelle *contrainte cinématique* une contrainte sur les

vitesse du type $\langle a(q), \dot{q} \rangle = 0 \forall q \in U(q_0)$ avec $U(q_0)$ un voisinage du point $q_0 \in Q$, et $a(q)$ une forme différentielle (ou champ de vecteurs) de Q dans \mathbb{R}^n .

Parmi les contraintes cinématiques du système, il faut distinguer celles qui sont en fait intégrables et qui peuvent, de ce fait, se ramener à des contraintes sur l'état seulement. [30] [1]

Définition 2 :

Une contrainte cinématique $\langle a(q), \dot{q} \rangle = 0$, est dite *contrainte intégrable* s'il existe une fonction régulière $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dh = a$. Dans ce cas la contrainte est équivalente à la relation statique $h(q) = Cste$.

Remarquons que la propriété d'intégrabilité est une propriété locale. Dans la pratique, un critère qui permet de repérer l'existence de contraintes intégrables est donné par le résultat suivant.

Théorème (2-1) (Théorème d'intégrabilité de Frobenius) :

Soit un système mécanique sur une variété Q de dimension n , soumis à $k \leq n$ contraintes cinématiques indépendantes $\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0, \forall q \in U(q_0), \forall i = 1, \dots, k$.

Et $\{X_1, \dots, X_{n-k}\}$ une famille de champs de vecteurs sur $U(q_0)$ orthogonaux aux a_i . Si $lie(X_i(q))$, est de dimension $(n - p)$ pour tout $q \in U(q_0)$ alors il existe p contraintes intégrables (au sens où l'on peut trouver des fonctions scalaires h_1, \dots, h_p indépendantes et des fonctions $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{p,n}$ telles que $dh_i(q) = \sum_{j=1}^n (\lambda_{ij}(q)a_j(q))$). [19]

Définition 3 :

Un système non holonome est un système mécanique soumis à un ensemble de contraintes cinématiques indépendantes et non intégrables (au sens où il n'existe pas de contrainte intégrable).

$$\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0, \forall q \in U(q_0), \forall i = 1, \dots, k \quad (2-1)$$

En particulier, on appelle *modèle cinématique* du système le modèle

$$\dot{q} = \bar{X}(q)V = \sum_{i=1}^{n-k} (X_i(q)v_i) \quad (2-2)$$

Avec $\{X_1, \dots, X_{n-k}\}$ une famille de champs de vecteurs telle que

$$\langle a_i(q), X_j(q) \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, k, \forall j = 1, \dots, n - k.$$

La variable $V = (v_1, \dots, v_{n-k}) = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ est assimilable à une variable de commande en vitesse. On appelle m (la dimension de l'espace des vitesses instantanées possibles) le nombre de degrés de liberté du système.

2.3.1.2 Roulement sans glissement

Considérons une roue qui roule sans glisser sur un sol plan, comme illustré sur la figure (2-5). $R_0 = (o_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, est un repère fixe associé au sol. $R_r = (o_r, \vec{i}_r, \vec{j}_r, \vec{k}_r)$, est un repère associé à la roue tel que son origine coïncide avec le centre de la roue. L'axe \vec{k}_r reste parallèle à celui du repère fixe \vec{k}_0 , l'axe \vec{j}_r coïncide avec l'axe de roulement de la roue et, finalement, l'axe \vec{i}_r est donné par le produit $\vec{j}_r \wedge \vec{k}_r$. L'angle compris entre \vec{i}_0 et \vec{i}_r est noté θ tandis que φ désigne l'angle entre \vec{i}_r et $\overrightarrow{o_r p}$, avec p un point appartenant au périmètre de la roue. La vitesse angulaire de la roue autour de son axe central est notée $\dot{\varphi}$ et celle autour de l'axe vertical du vecteur directeur \vec{k}_r est notée $\dot{\theta}$. On note x, y les deux premières coordonnées du centre o_r de la roue dans R_0 , et r le rayon de la roue. La configuration de la roue est donnée par : $q = [x, y, \theta, \varphi]^T \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Clairement $\dim(Q) = 4$. [20]

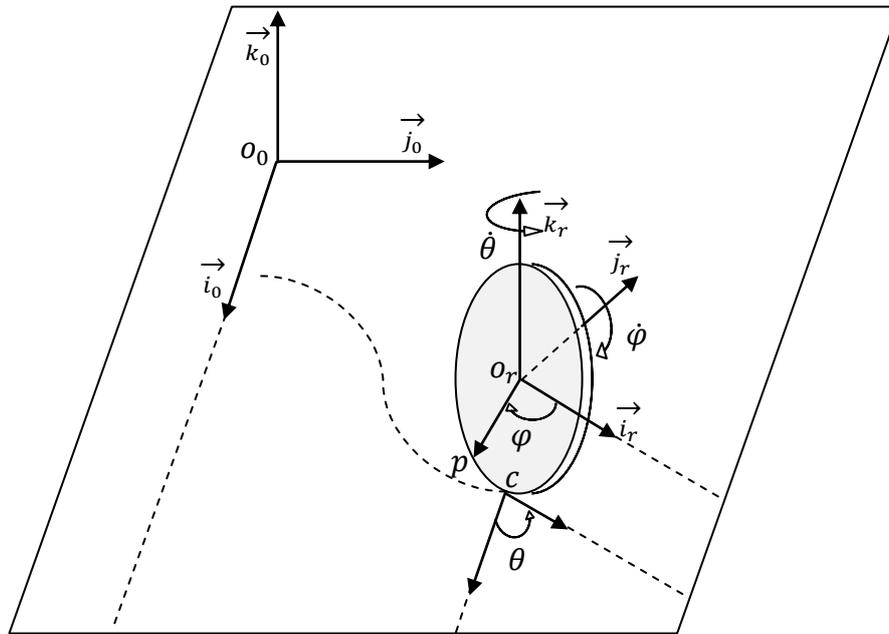


Figure 2- 5 : Caractérisation du roulement sans glissement

Finalement, c désigne le point de la roue en contact avec le sol [20] [24]. La contrainte de roulement sans glissement implique que la vitesse du point c par rapport au repère fixe R_0 est nulle $\vec{V}_{c/R_0} = \vec{0}$. Soit $\vec{\omega}_{r/o} = \dot{\theta} \vec{k}_r + \dot{\varphi} \vec{j}_r$ le vecteur de vitesse angulaire de la roue par rapport au repère fixe R_0 . Par application du théorème classique de composition de vitesses, on a :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{c/R_0} &= \vec{V}_{o_r/R_0} + \vec{\omega}_{r/o} \wedge \overrightarrow{o_r c} = \vec{0} \\ &= \dot{x} \vec{i}_0 + \dot{y} \vec{j}_0 + \left(\dot{\theta} \vec{k}_0 + \dot{\varphi} (-\sin \theta \vec{i}_0 + \cos \theta \vec{j}_0) \right) \wedge (-r \vec{k}_0) \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$= (\dot{x} - r\dot{\phi} \cos \theta)\vec{i}_0 + (\dot{y} - r\dot{\phi} \sin \theta)\vec{j}_0$$

Il en résulte les deux contraintes cinématiques indépendantes

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\phi} \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - r\dot{\phi} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

Ces deux contraintes mènent à l'équation suivant :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-5)$$

Ce qui constitue une contrainte non holonome.

L'intégrabilité des deux contraintes (2-4) est testée en appliquant le théorème (2-1). avec :

$$[a_1(q), a_2(q)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad [X_1(q), X_2(q)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

Après avoir vérifié que $\text{lie}(X_i(q)) = \mathbb{R}^4 \forall q \in Q$ il en résulte que ces contraintes ne sont pas intégrables. On déduit également qu'un modèle cinématique de la roue est donné par

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} v \quad (2-6)$$

Avec $v = (v_1, v_2)^T$, $v_1 = r\dot{\phi}$ la vitesse de roulement et $v_2 = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de la roue autour de l'axe vertical.

2.3.1.3 Exemple de modélisation cinématique

Considérons le robot mobile de type unicycle schématisé sur la figure (2-6). Ce robot est constitué de trois degrés de liberté, soit x , y et θ . Par simplicité, le robot est représenté par sa projection sur un plan parallèle au sol. L'unicycle est équipé de deux roues actionnées indépendamment [15] [20]. Pour modéliser ce système nous considérons le point o' situé au milieu de l'essieu des roues. Un repère $R' = (o'; \vec{x}'; \vec{y}'; \vec{z}')$ est associé à ce point, comme illustré sur la figure (2-6). Un repère inertiel $R = (O; \vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$ est fixé au sol, dont l'axe \vec{z} est vertical. Un vecteur de configuration de l'unicycle incluant le train moteur est donné par : $q = (x, y, \theta, \varphi_d, \varphi_g) \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

$(x;y)$: représente les coordonnées du point o' situé au milieu de l'axe des roues arrières.

θ : L'angle $(\vec{x}; \vec{x}')$; (l'angle d'orientation du robot).

φ_d : L'angle de rotation de la roue droite.

φ_g : L'angle de rotation de la roue gauche.

Soit r le rayon des roues et L la distance entre le point o' et le point milieu de chaque roue.

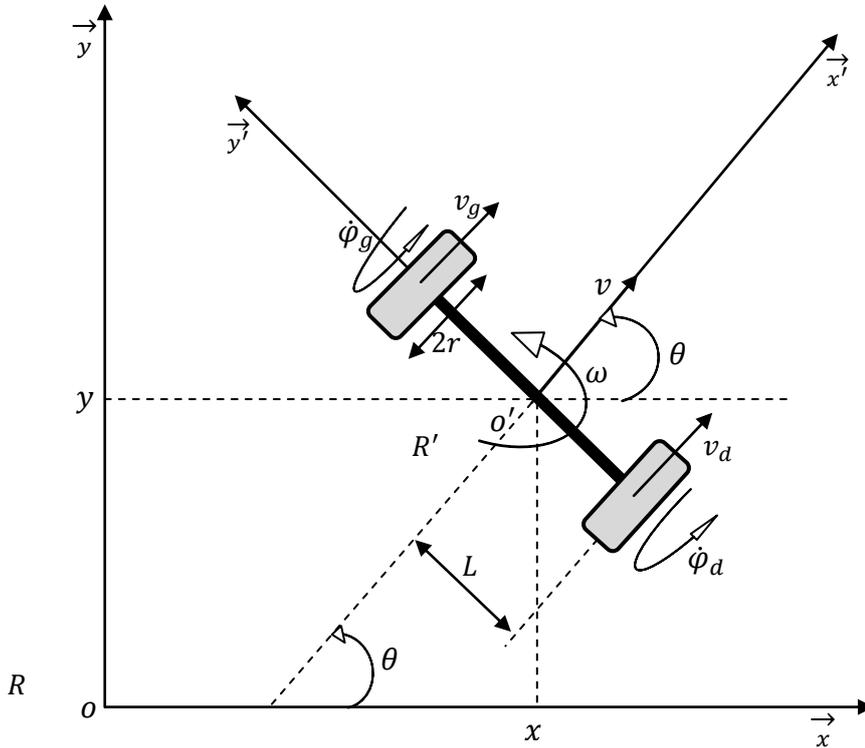


Figure 2- 6 : Représentation cinématique d'un robot mobile de type unicycle

L'application des contraintes (2-4) à chacune des roues donne :

Roue gauche :

$$\begin{cases} \dot{x} - L \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\varphi}_g \cos \theta = 0 \\ \dot{y} + L \dot{\theta} \cos \theta - r \dot{\varphi}_g \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

Roue droite :

$$\begin{cases} \dot{x} + L \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\varphi}_d \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - L \dot{\theta} \cos \theta - r \dot{\varphi}_d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

Soit encore :

$$\begin{cases} (c_1) \quad \dot{x} - L\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\phi}_g \cos \theta = 0 \\ (c_2) \quad \dot{y} - L\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\phi}_g \sin \theta = 0 \\ (c_3) \quad \dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\phi}_d \cos \theta = 0 \\ (c_4) \quad \dot{y} + L\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\phi}_d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2-9)$$

Un examen rapide montre que ces contraintes ne sont pas indépendantes. En les écrivant sous la forme $\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0$, on vérifie en effet que la matrice suivante :

$$A_4(q) = [a_1(q) \dots \dots a_4(q)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -L \cos \theta & -L \sin \theta & L \cos \theta & L \sin \theta \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \cos \theta & -r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

est seulement de rang trois car

$$(\sin \theta \cdot a_1(q) - \sin \theta \cdot a_3(q) - \cos \theta \cdot a_2(q) + \cos \theta \cdot a_4(q) = 0).$$

Il suffit donc de ne considérer que trois de ces contraintes, les trois premières par exemple.

$$A_3(q) = [a_1(q), \dots \dots, a_3(q)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L \cos \theta & -L \sin \theta & L \cos \theta \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Le test d'intégrabilité par application du théorème (2-1) est réalisé avec

$$[X_1(q), X_2(q)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{L}{r} \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Un rapide calcul permet de vérifier que $\dim(\text{Lie}(X_i(q))) = 4 = n-1$. Par application du théorème de Frobenius, on en déduit l'existence d'une contrainte intégrable. En effet, à partir des contraintes $(c_i = 0)$ de (2-9) on a aussi

$$(\cos \theta \cdot (c_3 - c_1) + \sin \theta \cdot (c_4 - c_2) = 0) \quad (2-13)$$

D'où la relation

$$2L\dot{\theta} + r(\dot{\phi}_g - \dot{\phi}_d) = 0 \quad (2-14)$$

dont l'intégration est immédiate et donne

$$2L\theta + r(\varphi_g - \varphi_d) = cste \quad (2-15)$$

La relation (2-15) montre qu'il est par exemple possible d'exprimer φ_d en fonction de φ_g et θ .

Dans la pratique, comme la valeur de l'angle φ_g ne présente pas d'intérêt majeur, on ne retient que le vecteur $q = (x, y, \theta)^T \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ pour caractériser la configuration du robot unicycle. Un modèle cinématique associé est donné par :

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Avec $v = (v_1, v_2)^T$, $v_1 = v = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g)$, la vitesse longitudinale ou d'avancement du robot, et $v_2 = \dot{\theta} = \omega = \frac{r}{2L}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_g)$ sa vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de roulement. La similarité de ce modèle avec le modèle (2-4) de la roue, justifie l'appellation de robot de type unicycle.

2.3.2 Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC)

Le robot que nous étudions (robot de type unicycle) est propulsé par deux moteurs à courant continu (CC). Dans cette section, nous découvrons le modèle d'espace d'état du moteur à courant continu. Ce modèle est ensuite utilisé dans le modèle dynamique de l'équilibrage de robot pour fournir une relation entre la tension d'entrée aux moteurs et le couple de commande nécessaire pour équilibrer le robot. [28]

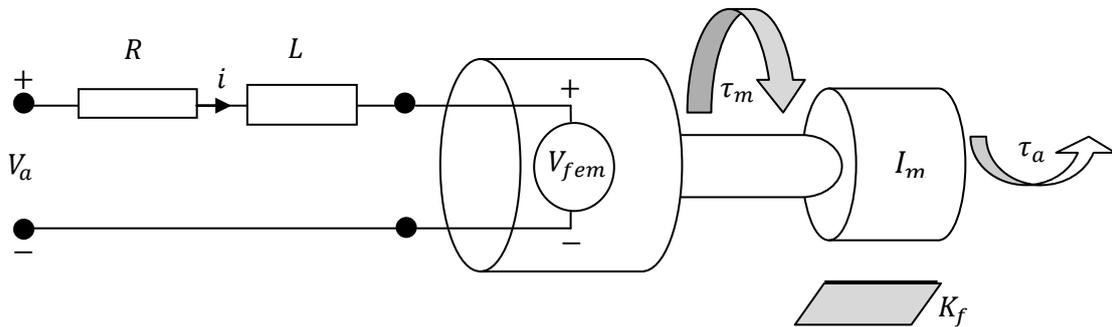


Figure 2-7 : Diagramme d'un moteur à courant continu (CC)

La figure (2-7) illustre un modèle linéaire pour un moteur à courant continu. Lorsqu'une tension est appliquée aux bornes du moteur, un courant i est généré dans le rotor du moteur. Le moteur produit un couple τ_m , qui est proportionnel au courant. Cette relation peut être exprimée en :

$$\tau_m = k_m i \quad (2-17)$$

Une paire de résistance-inductance en série avec une tension de force contre électromotrice, V_{fem} , peut être utilisée pour modéliser le circuit électrique du moteur. Cette tension de force contre électromotrice est produite parce que les bobines du moteur se déplacent dans un champ magnétique. La tension produite peut être approximée par une fonction linéaire de la vitesse de l'arbre, qui peut s'écrire sous la forme :

$$V_{fem} = k_e \omega_m \quad (2-18)$$

A ce point, une équation différentielle linéaire du circuit électrique du moteur à courant continu peut être écrite en utilisant la loi de Kirchoff, la loi stipule que la somme de toutes les tensions dans le circuit doit être égale à zéro. Pour le moteur à courant continu, ce qui peut être écrit comme :

$$V_a - Ri - L \frac{di}{dt} - V_{fem} = 0 \quad (2-19)$$

En appliquant la loi de Newton sur l'arbre du moteur on trouve que :

$$\Sigma M = I_m \dot{\omega}_m = \tau_m - k_f \omega_m - \tau_a \quad (2-20)$$

En substituant l'équation (2-17) et (2-18) dans les équations (2-19) et (2-20), et la réorganisation en termes de dérivées temporelles, conduit aux deux équations fondamentales suivantes qui régissent le mouvement du moteur.

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_a}{L} - \frac{R}{L} i - \frac{k_e}{L} \omega_m \quad (2-21)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{k_m}{I_m} i - \frac{k_f}{I_m} \omega_m - \frac{\tau_a}{I_m} \quad (2-22)$$

Les deux équations sont des fonctions linéaires de la vitesse et du courant et elles comprennent les dérivées premières de la commande. Un modèle simplifié du moteur à courant continu est suffisant pour le cas d'équilibrage du robot. Pour cette raison, l'inductance du moteur et la friction du moteur sont considérées comme négligeables et sont approchées à zéro, donc :

$$i = -\frac{k_e}{R} \omega_m + \frac{1}{R} V_a \quad (2-23)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{k_m}{I_m} i - \frac{\tau_a}{I_m} \quad (2-24)$$

En substituant l'équation (2-23) dans l'équation (2-24), une approximation pour le moteur à courant continu, qui est uniquement fonction de la vitesse actuelle du moteur, de la tension appliquée et du couple appliqué, est obtenue.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{k_m k_e}{I_m R} \omega_m + \frac{k_m}{I_m R} V_a - \frac{\tau_a}{I_m} \quad (2-25)$$

La dynamique du moteur peut être représentée par un modèle d'espace d'état, c'est un système du premier ordre, d'équations différentielles avec les paramètres de position φ , et de la vitesse ω_m . Les entrées du moteur sont alors le couple appliqué et la tension appliquée.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_e}{R I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_m}{R I_m} & -\frac{1}{I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega_m \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

2.3.3 Modélisation dynamique

Les équations du modèle dynamique qui décrivent le mouvement du robot sont données soit par la méthode d'Euler - Lagrange, soit par la méthode de Newton - Euler.

2.3.3.1 Méthode d'Euler – Lagrange

2.3.3.1.1 Dynamique des systèmes non holonomes

Dans cette section, nous présentons le modèle dynamique d'un système mécanique à n dimensions avec k contraintes cinématiques, comme dans l'équation (2-1).

On définit le lagrangien L comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} - U(q) \quad (2-28)$$

Où $B(q)$ est la matrice d'inertie du système mécanique définie et positive. L'équation d'Euler-Lagrange du mouvement est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = A(q) \lambda + S(q) \tau \quad (2-29)$$

Dans laquelle $S(q)$ est une matrice de cartographie de $(n \times m)$, $m = n - k$ entrées externes, τ les forces / couples effectuant des travaux sur q , et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange inconnus. Le terme $A(q) \lambda$ représente le vecteur de contrainte des forces. On suppose que le nombre d'entrées disponibles est égal au nombre de degrés de liberté du système. [5] [14] [29]

Le modèle dynamique du système de contraintes mécaniques est

$$\begin{cases} B(q) \ddot{q} + n(q, \dot{q}) = A(q) \lambda + S(q) \tau \\ A^T(q) \dot{q} = 0 \end{cases} \quad (2-30)$$

Avec

$$n(q, \dot{q}) = \dot{B}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T B(q) \dot{q}) \right)^T + \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q} \right)^T \quad (2-31)$$

Examiner une matrice $X(q)$ dont les colonnes forment une base nulle de $A^T(q)$, comme dans l'équation (2-2), de sorte que $A^T(q)X(q) = 0$. Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être éliminés en multipliant à gauche des deux côtés de l'équation (2-30) par $X^T(q)$, pour obtenir ainsi le modèle dynamique réduit

$$X^T(q)(B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q})) = X^T(q)S(q)\tau \quad (2-32)$$

Comme un ensemble de m d'équations différentielles.

Supposons maintenant que $\det[X^T(q)S(q)] \neq 0$

Ce qui est une hypothèse réaliste dans la plupart des cas pratiques. Il est commode de fusionner des modèles cinématique et dynamiques dans un $(n + m)$ dimensionnel réduit, le modèle d'espace d'état du formulaire.

$$\begin{cases} \dot{q} = X(q)v \\ \dot{v} = M^{-1}(q)m(q, v) + M^{-1}(q)X^T(q)S(q)\tau \end{cases} \quad (2-33)$$

où $v \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de réduction des vitesses et

$$M(q) = X^T(q)B(q)X(q) > 0 \quad (2-34)$$

$$m(q, v) = X^T(q)B(q)\dot{X}(q)v + X^T(q)n(q, X(q)v) \quad (2-35)$$

avec :

$$\dot{X}(q)v = \sum_{i=1}^m \left(v_i \frac{\partial X_i(q)}{\partial q} \right) X(q)v \quad (2-36)$$

Il est possible d'effectuer une linéarisation partielle de la réduction d'espace d'états du modèle intermédiaire d'une rétroaction non linéaire pour calculer le couple

$$\tau = [X^T(q)S(q)]^{-1}(M(q)a + m(q, v)) \quad (2-37)$$

où $a \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'accélération réduite. Le système résultant est

$$\begin{cases} \dot{q} = X(q)v \\ \dot{v} = a \end{cases} \quad (2-38)$$

Où les n premières équations forment le modèle cinématique et les m équations suivantes agissent comme une extension dynamique. Notons que le couple d'entrée calculé dans l'équation (2-37) nécessite la mesure de v , ce qui peut ne pas être directement accessible. Toutefois, on peut calculer v par pseudo inversion du modèle cinématique à condition que q et \dot{q} sont mesurables.

$$v = (X^T(q)X(q))^{-1}X^T(q)\dot{q} \quad (2-39)$$

Définissant le vecteur d'état $x = (q, v) \in \mathbb{R}^{n+m}$ et le vecteur d'entrée $u = a \in \mathbb{R}^m$, le modèle d'espace d'état du système en boucle fermée peut être réécrit sous forme compacte

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} X(q)v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u \quad (2-40)$$

C'est à dire un système de contrôle non linéaire, aussi connu comme le modèle cinématique du second ordre du système de contrainte mécanique. En résumé, pour les systèmes non holonomes, il est possible d'annuler des paramètres dynamiques par réaction non linéaire, en supposant que (i) le modèle dynamique est exactement connu, et (ii) l'état du système complet est mesurable. Si c'est le cas, le problème de contrôle peut être directement résolu au niveau vitesse, à savoir, par v , synthétisée de manière que le modèle cinématique

$$\dot{q} = X(q)v \quad (2-41)$$

se comporte comme on le souhaite. Lorsque v est disponible, l'équation (2-37) peut être utilisée pour obtenir l'entrée de commande au niveau τ force généralisée, à condition que v est suffisamment lisse (au moins différentiable, puisque $a = \dot{v}$ apparaît).

2.3.3.1.2 Exemple de modélisation dynamique

Soit m la masse du l'unicycle, I le moment d'inertie autour de l'axe vertical, τ_1 la force motrice et τ_2 le couple de direction [5]. Avec la contrainte non holonome exprimée dans l'équation (2-5), le modèle dynamique (2-30) prend la forme

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta & -\cos \theta & 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2-42)$$

Ensuite, nous procédons à la procédure de réduction présentée dans la section précédente. Depuis

$$X(q) = S(q)$$

$$X^T(q)S(q) = I_2$$

$$X^T(q)B\dot{X}(q) = 0$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{q} = X(q)v \\ \dot{v} = M^{-1}(q)\tau \end{cases} \quad (2-43)$$

C'est à dire, les cinq équations dynamiques

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \cos \theta \\ \dot{y} = v_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = v_2 \\ \dot{v}_1 = \frac{\tau_1}{m} \\ \dot{v}_2 = \frac{\tau_2}{I} \end{cases} \quad (2-44)$$

En laissant

$$\tau = M(q)u = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u \quad (2-45)$$

Le modèle dynamique linéarisé partiellement est obtenu sous forme

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cos \theta \\ v_1 \sin \theta \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 = f(\xi) + g_1 u_1 + g_2 u_2 \quad (2-46)$$

Avec le vecteur d'état $\xi = (x, y, \theta, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^5$. En calculant les crochets de Lie

$$[g_1, f] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [g_2, f] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [g_2, [f, [g_1, f]]] = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il est évident que le modèle dynamique de l'unicycle satisfasse à la fois l'accessibilité et la contrôlabilité sous des conditions de petits intervalles de temps. En effet, les champs de vecteurs

$$g_1, g_2, [g_1, f], [g_2, f], [g_2, [f, [g_1, f]]]$$

s'étendent sur un espace de dimension cinq à chaque ξ , et satisfont les conditions du théorème (2-1).

2.3.3.2 Méthode de Newton - Euler

Le but de cette section est la dérivation d'une modèle dynamique d'espace d'états du robot mobile à roues décrivant les relations dynamiques entre les coordonnées de configuration et les couples produits par les moteurs. Nous considérons que le robot se déplace avec des petites vitesses qui vont nous permettre de négliger les frottements et les effets Coriolis.

Pour trouver les équations du mouvement, nous allons utiliser la méthode de Newton-Euler et trouver l'accélération des centres de masse. Ici, le robot se compose de trois corps rigides : le corps du robot et les deux roues. A cet effet, nous allons utiliser les coordonnées du système pour exprimer les accélérations des trois organes. [3]

Supposons que les coordonnées de l'accélération inertielle de l'origine du corps de système est :

$$a_0 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

Et les coordonnées de la vitesse et l'accélération angulaire du corps de système sont :

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}_R \quad (2-48)$$

Nous allons désigner par $c = [c \ 0 \ 0]^T_R$ la distance entre le centre de masse du corps du robot et l'origine du cadre du corps du robot. L'accélération du centre de la masse du corps du robot est exprimée par :

$$a_r = a_0 + \alpha c - \omega^2 c$$

$$\begin{bmatrix} a_{rx} \\ a_{ry} \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \ddot{x}_r - c \dot{\theta}^2 \\ \ddot{y}_r + c \ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (2-49)$$

Nous allons désigner par le $d_d = [0 \ -L \ 0]^T_R$ la distance entre le centre de masse de la roue droite du robot et l'origine du châssis du robot. L'accélération du centre de masse de la roue droite du robot est exprimée par :

$$a_{Rd} = a_0 + \alpha d_d - \omega^2 d_d$$

$$\begin{bmatrix} a_{Rdx} \\ a_{Rdy} \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \ddot{x}_r + L\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_r + L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (2-50)$$

Et de même pour la roue gauche

$$a_{Rg} = a_0 + \alpha d_g - \omega^2 d_g$$

$$\begin{bmatrix} a_{Rgx} \\ a_{Rgy} \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \ddot{x}_r - L\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_r - L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (2-51)$$

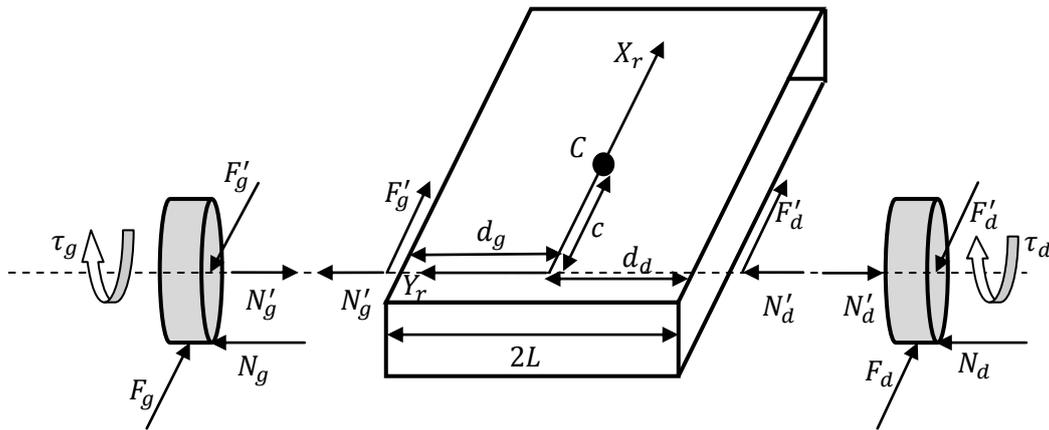


Figure 2-8 : Diagramme dissocié du corps

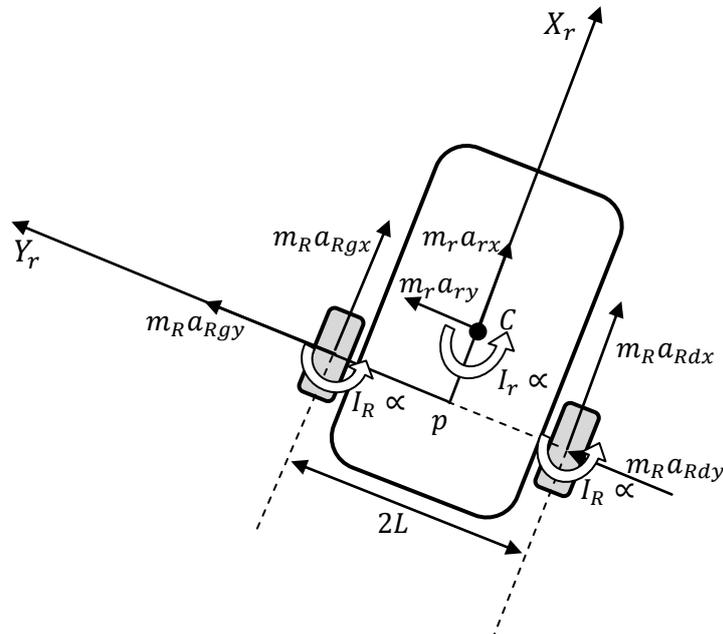


Figure 2-9 : Diagramme des accélérations

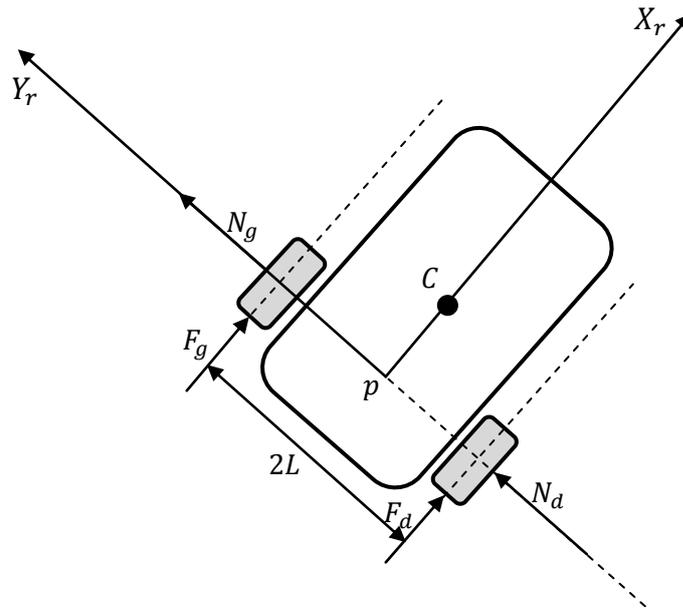


Figure 2-10 : Diagramme des forces

D'après les figures (2-8), (2-9) et (2-10) on peut utiliser la loi du mouvement de Newton. La somme des forces dans le sens X_r est :

$$\begin{aligned}
 \sum F_{X_r} &= F_d + F_g = m_R a_{Rdx} + m_R a_{Rgx} + m_r a_{rx} \\
 &= m_R (\ddot{x}_r + L\ddot{\theta}) + m_R (\ddot{x}_r - L\ddot{\theta}) + m_r (\ddot{x}_r - c \dot{\theta}^2) \\
 &= (m_r + 2m_R) \ddot{x}_r - m_r c \dot{\theta}^2
 \end{aligned}
 \tag{2-52}$$

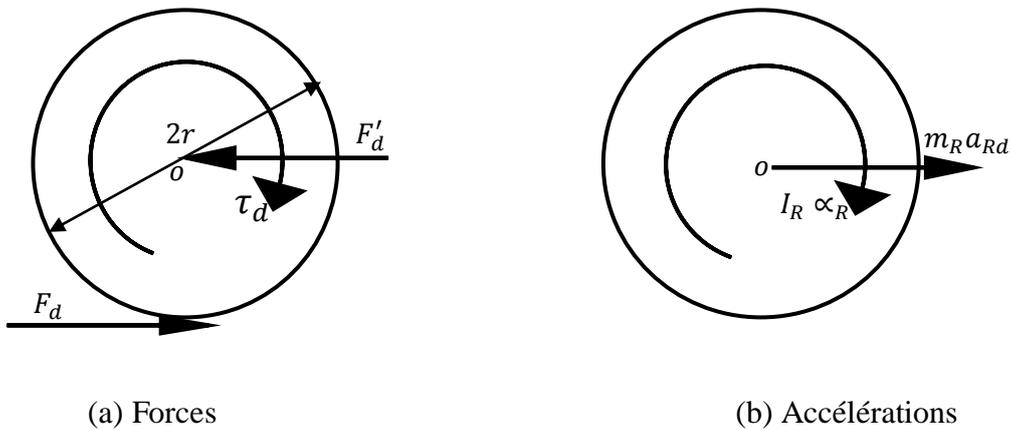


Figure 2-11 : Diagramme des forces et des accélérations pour la roue droite

Encore une fois, en utilisant la loi du mouvement de Newton, la somme des forces dans la direction Y_r est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sum F_{Y_r} &= N_d + N_g = m_R a_{Rdy} + m_R a_{Rgy} + m_r a_{ry} \\
&= m_R (\ddot{y}_r + L\dot{\theta}^2) + m_R (\ddot{y}_r - L\dot{\theta}^2) + m_r (\ddot{y}_r + c \ddot{\theta}) \\
&= (m_r + 2m_R) \ddot{y}_r + m_r c \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{2-53}$$

La somme des moments autour du point p dans le sens Z_r est :

$$\begin{aligned}
\sum M_p &= (F_d - F_g)L = (I_r + 2I_R)\ddot{\theta} + m_R a_{Rdx}L - m_R a_{Rgx}L + m_r a_{ry}c \\
&= (I_r + 2I_R)\ddot{\theta} + m_R (\ddot{x}_r + L\ddot{\theta})L - m_R (\ddot{x}_r - L\ddot{\theta})L + m_r c (\ddot{y}_r + c \ddot{\theta}) \\
&= (I_r + 2I_R + 2m_R L^2 + m_r c^2)\ddot{\theta} + m_r c \ddot{y}_r
\end{aligned} \tag{2-54}$$

En observant les figures (2-11) (a) et (b), on peut écrire la somme des moments autour du centre de masse de la roue droite dans la direction Y_r

$$\sum M_o = -F_d r + \tau_d = I_{Ry} \alpha_R = I_{Ry} \frac{1}{r} (\ddot{x}_r + L\ddot{\theta}) \tag{2-55}$$

Il en résulte ce qui suit pour la force de traction F_d sur la roue droite

$$F_d = \frac{1}{r} \left(\tau_d - \frac{I_{Ry}}{r} (\ddot{x}_r + L\ddot{\theta}) \right) \tag{2-56}$$

Un résultat similaire pour la force de traction de la roue gauche F_g peut être réalisé

$$F_g = \frac{1}{r} \left(\tau_g - \frac{I_{Ry}}{r} (\ddot{x}_r - L\ddot{\theta}) \right) \tag{2-57}$$

où τ_d et τ_g sont les couple d'entraînement de la roue droite et la roue gauche, respectivement. Puis ces couples sont introduits dans le système, et nous allons écrire les équations du mouvement en termes de ces couples. Cet objectif est atteint en substituant les équations (2-56) et (2-57) dans les équations (2-52), (2-53) et (2-54). Les équations dynamiques résultantes du mouvement sont :

$$\begin{cases}
(m_r + 2m_R + \frac{2I_{Ry}}{r^2}) \ddot{x}_r - m_r c \dot{\theta}^2 = \frac{1}{r} (\tau_d + \tau_g) \\
(m_r + 2m_R) \ddot{y}_r + m_r c \ddot{\theta} = N_d + N_g \\
(I_r + 2I_R + 2m_R L^2 + I_{Ry} \frac{2L^2}{r^2} + m_r c^2) \ddot{\theta} + m_r c \ddot{y}_r = \frac{L}{r} (\tau_d - \tau_g)
\end{cases} \tag{2-58}$$

La force de pneu latérale $N_d + N_g$ peut être déterminée par la recherche d'une relation cinématique qui permet de calculer l'accélération latérale \dot{y}_r . La contrainte non holonome définie dans l'équation. (2-5) peut être utilisée pour déterminer la composante d'accélération latérale \dot{y}_r . La contrainte non holonome est répétée ici.

$$\dot{y}_r = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2-59)$$

\dot{y}_r est égal à zéro en raison à la condition de non-glissement, \dot{y}_r pourrait être différent de zéro en vertu de certaines conditions. L'accélération latérale est obtenue en différentiant l'équation (2-59).

$$\ddot{y}_r = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta - \dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{x}_r \quad (2-60)$$

L'équation (2-46) implique que

$$\dot{y} = \dot{x} \tan \theta \quad (2-61)$$

La différenciation de l'équation ci-dessus dans

$$\ddot{y} = \ddot{x} \tan \theta + \dot{x} \dot{\theta} (1 + (\tan \theta)^2) \quad (2-62)$$

En substituant cette équation dans. (2-61), on obtient

$$\ddot{y}_r = \dot{\theta}(\dot{x}(1 + (\tan \theta)^2) \cos \theta - \dot{x}_r) \quad (2-63)$$

Cependant, nous avons $\dot{x} = \dot{x}_r \cos \theta - \dot{y}_r \sin \theta$ et $\dot{y}_r = 0$. L'utilisation de ces relations avec l'équation ci-dessus montre que la composante de l'accélération latérale du robot devient

$$\ddot{y}_r = 0 \quad (2-64)$$

L'équation (2-64) nous permet de négliger la deuxième équation dynamique et de simplifier la troisième équation dynamique (2-58). Enfin, les équations dynamiques du mouvement pour le robot se réduisent à ce qui suit :

$$\begin{cases} \left(m_r + 2m_R + \frac{2I_{Ry}}{r^2} \right) \dot{v} - m_r c \omega^2 = \frac{1}{r} (\tau_d + \tau_g) \\ \left(I_r + 2I_R + 2m_R L^2 + I_{Ry} \frac{2L^2}{r^2} + m_r c^2 \right) \dot{\omega} = \frac{L}{r} (\tau_d - \tau_g) \end{cases} \quad (2-65)$$

Où $v = \dot{x}_r$ et $\omega = \dot{\theta}$

Nous allons maintenant définir la variable d'état généralisée

$$q_g = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

Le système complet (cinématique + dynamique) devient alors

$$\dot{q}_g = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \cos q_3 \\ q_4 \sin q_3 \\ q_5 \\ \frac{m_r c q_5^2}{m} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{rm} & \frac{1}{rm} \\ \frac{L}{rI} & -\frac{L}{rI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_g \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

Où

$$\begin{cases} m = \left(m_r + 2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) \\ I = \left(I_r + 2I_R + 2L^2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) + m_r c^2 \right) \end{cases} \quad (2-68)$$

Dans ce qui suit nous allons considérer que le centre de gravité du robot est situé sur l'axe des roues, dans ce cas, nous avons $c = 0$.

Donc :

$$\begin{cases} m = \left(m_r + 2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) \\ I = \left(I_r + 2I_R + 2L^2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) \end{cases} \quad (2-69)$$

Le couple de sortie aux roues du robot est atteint [16] :

$$\tau = -\frac{k_m k_e}{R} \dot{\varphi} + \frac{k_m}{R} V_a \quad (2-70)$$

Donc le couple de sortie à la roue droite du robot est :

$$\tau_d = -\frac{k_m k_e}{R} \dot{\varphi}_d + \frac{k_m}{R} V_{ad} \quad (2-71)$$

Et à la roue gauche est :

$$\tau_g = -\frac{k_m k_e}{R} \dot{\varphi}_g + \frac{k_m}{R} V_{ag} \quad (2-72)$$

Remplaçons les valeurs de τ_d et τ_g dans l'équation (2-65) on trouve :

$$\begin{cases} \left(m_r + 2m_R + \frac{2I_{Ry}}{r^2} \right) \dot{v} = -\frac{k_m k_e}{rR} (\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g) + \frac{k_m}{rR} (V_{ad} + V_{ag}) \\ \left(I_r + 2I_R + 2m_R L^2 + I_{Ry} \frac{2L^2}{r^2} \right) \dot{\omega} = -\frac{Lk_m k_e}{rR} (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_g) + \frac{Lk_m}{rR} (V_{ad} - V_{ag}) \end{cases} \quad (2-73)$$

On a :

$$v = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g) \quad \text{et} \quad \omega = \frac{r}{2L} (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_g)$$

Donc l'équation (2-73) devient comme suit :

$$\begin{cases} m\dot{v} + 2\frac{k_m k_e}{r^2 R} v - \frac{k_m}{Rr} (V_{ad} + V_{ag}) = 0 \\ I\dot{\omega} + 2\frac{L^2 k_m k_e}{r^2 R} \omega - \frac{Lk_m}{Rr} (V_{ad} - V_{ag}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = -2\frac{k_m k_e}{mr^2 R} v + \frac{k_m}{mRr} (V_{ad} + V_{ag}) \\ \dot{\omega} = -2\frac{L^2 k_m k_e}{Ir^2 R} \omega + \frac{Lk_m}{IRr} (V_{ad} - V_{ag}) \end{cases} \quad (2-74)$$

Enfin, le modèle dynamique du robot est :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{k_m k_e}{mr^2 R} & 0 \\ 0 & -2\frac{L^2 k_m k_e}{Ir^2 R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{mRr} & \frac{k_m}{mRr} \\ \frac{Lk_m}{IRr} & -\frac{Lk_m}{IRr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ad} \\ V_{ag} \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

Sous la forme :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (2-76)$$

L'équation (2-76) représente l'équation des états du système (robot unicycle) en temps continu. En temps discret l'équation (2-76) est représentée comme suit :

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (2-77)$$

tel que :

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} v(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2\frac{k_m k_e}{mr^2 R} & 0 \\ 0 & -2\frac{L^2 k_m k_e}{Ir^2 R} \end{bmatrix}, X(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{mRr} & \frac{k_m}{mRr} \\ \frac{Lk_m}{IRr} & -\frac{Lk_m}{IRr} \end{bmatrix} \text{ et } U(k) = \begin{bmatrix} V_{ad}(k) \\ V_{ag}(k) \end{bmatrix}$$

2.4 Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre la classification des robots mobiles à roues ainsi que la modélisation du robot unicycle. Le modèle cinématique d'un unicycle est en général connu, mais nous avons essayé de rappeler les principales étapes. La structure des contraintes cinématiques découlant du roulement pur des roues est du reste analysé, il est démontré que ces contraintes sont en général non holonomes et par conséquent réduisent la mobilité locale du robot. Le modèle cinématique associé aux contraintes est introduit pour décrire les mouvements instantanés admissibles, et les conditions sont données dans lesquelles il peut être mis en forme en chaîne.

Enfin, le modèle linéaire d'un moteur à courant continu est présenté. Le modèle dynamique, qui concerne les mouvements du robot est présenté par deux méthodes, la méthode d'Euler- Lagrange et la méthode de Newton- Euler.

Chapitre 3

Etude détaillée de la commande optimale LQR

3.1 Introduction

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le 19^{ème} siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité. [12]

3.2 Position du problème

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (3-1)$$

et de condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux u et x sont des fonctions de \mathbb{R} vers respectivement \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état (3-1) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit un critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (3-2)$$

avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et ϕ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. On peut noter que différentes présentations existent dans la littérature :

➤ **La présentation de Mayer et de Lagrange :** [2]

La présentation de Mayer et de Lagrange est donnée sous la forme d'un système $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u \in U$, $t \in [t_0, t_f]$, l'objectif étant de minimiser le coût

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (3-3)$$

Lorsque $\theta(x_f, t_f) = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle $J(t_f, u)$, donc :

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (3-4)$$

on parlera de présentation de **Lagrange** .

Et lorsque $\phi(x(t), u(t), t) = 0$,

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) \quad (3-5)$$

on parlera de présentation de **Mayer**.

➤ **La présentation de Bolza :**

L'avantage de la présentation de **Bolza** est que cette dernière regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de **Lagrange** et de **Mayer**. [16]

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (3-6)$$

Les trois formulations (3-4), (3-5) et (3-6) sont équivalentes dans le sens où on peut toujours se ramener de l'une à l'autre.

En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et de x , d'autres contraintes peuvent intervenir (sans pour autant remettre en cause le critère choisi). Typiquement :

- l'instant final peut être imposée ou libre ;
- la commande peut appartenir à un ensemble $u \in U \neq \mathbb{R}^m$;
- des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f \in X$.

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u} minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (3-7)$$

On notera alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (3-8)$$

la valeur du critère.

3.3 Classement des problèmes de la commande optimale

On peut classer les fonctions objectives en deux critères physiques de performance. [17]

3.3.1 Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $\phi(x, u, t) = 1$, $\theta(x_f, t_f) = 0$ et le temps final t_f est libre dans l'expression de

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (3-9)$$

3.3.2 Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (3-10)$$

Evidemment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de performance, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal. Dans certains problème de contrôle optimal, il peut s'avérer utile et efficace de s'intéresser tout d'abord au problème de minimisation du temps de transfert afin de pouvoir traiter correctement le problème de minimisation du coût. On comprend bien qu'une minimisation de la consommation d'énergie se doit de ne pas engendrer de temps de transfert prohibitif à l'égard du temps de transfert minimum.

Si dans l'expression de J , ϕ est proportionnelle à u^2 on parle alors d'un coût quadratique.

Si u est un contrôle scalaire et ϕ proportionnelle à u , on parle de problème de contrôle à coût d'approvisionnement (Fuel cost).

Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$ ne dépendent pas explicitement du temps, c'est-à-dire $\dot{x} = f(x, u)$, on parle dans ce cas de problème autonome.

Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

3.4 Rappel de principes fondamentaux

3.4.1. Le principe d'optimalité de Bellman [22] [25]

Soit le système d'équation d'état défini par la relation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3-11)$$

On considère le critère de performance suivant (3-12) associé au système (3-11) :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (3-12)$$

On définit alors, sur l'horizon temporel $[t_0, t_f]$, la commande optimale \tilde{u} , conduisant au critère optimisé :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u[t_0, t_f]} J(x_0, t_0, u) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (3-13)$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman stipule que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ contient nécessairement la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$, partant cette fois de la condition initiale $x_1 = x(t_1)$.

Le critère peut dès lors s'écrire sous la forme :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u[t_0, t_f], x_1} \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \quad (3-14)$$

Ce résultat permet d'obtenir une solution optimale en découplant l'intervalle d'optimisation et en résolvant récursivement le problème.

3.4.2. Le principe d'optimalité de Pontriaguine

Considérons à nouveau le système (3-11) et le critère de performance (3-12). L'Hamiltonien correspondant est défini par :

$$H(x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (3-15)$$

où λ est dénommé vecteur d'état adjoint.

Le principe du minimum de Pontriaguine stipule que la trajectoire optimale minimise l'Hamiltonien du système :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}, t) \leq H(x, u, \lambda, t) \quad \forall u \in U \quad (3-16)$$

En faisant appel au calcul des variations, on définit un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale.

Ces équations correspondent aux équations canoniques de Hamilton qui régissent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint, et sont données par :

Pour l'état :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \quad (3-17)$$

Pour l'état adjoint :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \quad (3-18)$$

On leur ajoute les conditions aux limites (en t_0 et en t_f), dites équations de transversalité :

À l'origine :

$$\left(H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left(-\lambda(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 = 0 \quad (3-19)$$

À l'arrivée :

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f}\right) \delta t_f + \left(-\lambda(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f}\right)^T \delta x_f = 0 \quad (3-20)$$

En fonction de la nature du problème considéré, on peut aussi préciser d'autres relations additionnelles :

- si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (3-21)$$

- si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (3-22)$$

➤ **Lien avec le calcul des variations**

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$. En s'appuyant sur le calcul des variations [12], on est amené à introduire un multiplicateur de Lagrange λ , qui est une fonction du temps, et l'Hermicien :

$$H(x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (3-23)$$

Le critère s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\phi(x, u, t) + \lambda^T (f(x, u, t) - \dot{x})) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T x dt - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\ &= \tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x) dt \end{aligned} \quad (3-24)$$

où $\tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) = \theta(x_f, t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0)$.

Le calcul des variations permet de donner des conditions nécessaires pour résoudre ce problème.

Prenons la première variation de \tilde{J} .

$$\delta \tilde{J} = \delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) + \delta_u^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right) dt \quad (3-25)$$

Où δ_x et δ_u sont des variations de \tilde{x} et de \tilde{u} , l'état et la commande optimaux.

L'optimum est atteint quand la première variation est nulle, ceci implique que :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation de Hamilton - Jacobi})$$

$$\delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) = 0 \text{ à } t = t_0 \text{ et } t = t_f, \text{ qui sont des conditions de transversalité}$$

3.4.3 Principe de moindre action de Maupertuis

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique [12], le principe de moindre action énoncée par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (3-26)$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (3-27)$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (3-28)$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \lambda^T \dot{q} \quad (3-29)$$

et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{\lambda} \quad (3-30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \quad (3-31)$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant $\dot{\lambda}$ grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3-32)$$

3.5 Commande Linéaire Quadratique

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique [12] [18]. La commande optimale est un retour d'état.

3.5.1 Commande LQ à horizon fini

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (3-33)$$

avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (3-34)$$

Les matrices Q , R et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0^2$ [12] [26]. L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T A(t)x + \lambda^T B(t)u + \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (3-35)$$

L'hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

- équation de l'état adjoint

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)\lambda - Q(t)x \quad (3-36)$$

- condition de transversalité

$$\lambda(t_f) = S x_f \quad (3-37)$$

- absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda + R(t)u = 0 \quad (3-38)$$

De l'équation (3-38), on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (3-39)$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x + -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (3-40)$$

Les équations (3-36) et (3-40) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

Posons $\lambda = p(t)x$ avec, d'après (3-37), la condition finale $p(t_f) = S$. L'équation (3-36) s'écrit alors :

$$\dot{\lambda} = -A^T(t)p(t)x - Q(t)x = -(A^T(t)p(t) + Q(t))x \quad (3-42)$$

Avec $\dot{\lambda} = \dot{p}x + p\dot{x}$ et l'équation d'état (3-33) du système, l'équation (3-42) s'écrit alors (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations) :

$$(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q)x = 0 \quad (3-43)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de **Riccati** suivante :

$$\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q = 0 \quad (3-44)$$

avec la condition finale $p(t_f) = S$.

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q)x = 0 \quad (3-45)$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T p x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (3-46)$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \quad (3-47)$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \left(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (x^T p x) dt \right) \quad (3-48)$$

Soit, avec la condition de transversalité $p(t_f) = S$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_0^T p(t_0) x_0 \quad (3-49)$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(t_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} x_0^T p(t_0) x_0 \quad (3-50)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -L(t)x$ avec :

$$L = -R^{-1} B^T p \quad (3-51)$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, L varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A, B, Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $p(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

3.5.2 Commande LQ à horizon infini

Intéressons nous ici au cas du système LTV (linéaire à temps variant) précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (3-52)$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $L(t)$ tel que les valeurs propres de $A - BL$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable. Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Lx$ où L est exprimé par l'équation (3-51) et où p vérifie l'équation algébrique de *Riccati* :

$$p + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q = 0 \quad (3-53)$$

3.6 Commande LQ à temps discret

L'utilisation d'un correcteur se fait dans la majorité du temps de manière numérique. En passant dans le domaine discret [11] [27], l'équation dynamique (3-33) devient :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (3-54)$$

avec la condition initiale

$$x(k = k_0) = x(k_0) = x_0 \quad (3-55)$$

et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2}x^T(k_f)F(k_f)x(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (3-56)$$

ou

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^n(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (3-57)$$

où $F(k_f)$ et $Q(k)$ sont des matrices d'ordre $n \times n$ symétriques, semi-définie positive, et $R(k)$ est matrice d'ordre $r \times r$ symétrique, définie positive. Le problème à résoudre n'est plus un problème en temps continu. Si on étudie le problème à horizon fini, il suffit de trouver les $n+1$ ou $k_f + 1$ valeurs de la commande pour chaque pas de temps.

3.6.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini

On doit alors résoudre un problème de minimisation classique sous contraintes et on utilisera la formulation conventionnelle basée sur l'écriture du Lagrangien. [12] [27] [11]

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k) + \lambda^T(k+1)(-x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k)) \right) \quad (3-58)$$

et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)\lambda(k+1) = 0 \quad (3-59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - \lambda(k) + A^T(k)\lambda(k+1) = 0 \quad (3-60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0 \quad (3-61)$$

L'équation de la commande (3-59) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \quad (3-62)$$

Alors l'équation (3-61) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \\
 &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)(-A^{-T}(k)Q(k)x(k) + A^{-T}(k)\lambda(k)) \\
 &= (A(k) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)Q(k))x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)\lambda(k)
 \end{aligned} \tag{3-63}$$

Par utilisation de l'équation (3-60), nous trouvons

$$\lambda(k+1) = -A^{-T}(k)Q(k)x(k) + A^{-T}(k)\lambda(k) \tag{3-64}$$

Les équations (3-63) et (3-64) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T}Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} \tag{3-65}$$

où

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BR^{-1}B^T \\ QA^{-1} & A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \tag{3-66}$$

La dernière commande $u(n)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré ; sa valeur optimale est donc nulle :

$$u(n) = 0 \tag{3-67}$$

On a ainsi d'après l'équation (3-59):

$$\lambda(k+1) = 0 \tag{3-68}$$

et d'après l'équation adjointe (3-60):

$$\lambda(n) = Q(n)x(n), \text{ où } n = k_f \Rightarrow \lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) \tag{3-69}$$

aussi d'après les équations (3-56), (3-57) et (3-67)

$$Q(n) = Q(k_f) = F(k_f) \tag{3-70}$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon n élevé.

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et λ . On peut aussi adopter la démarche suivante, basée sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe :

$$\lambda(k) = p(k)x(k) \quad (3-71)$$

où $p(k)$ est une matrice qu'il faudra déterminer, partant de (3-60), on obtient :

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)x(k+1) \quad (3-72)$$

Et on a

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)x(k+1)p(k+1) \\ &= [I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k)x(k) \end{aligned} \quad (3-73)$$

En substituant (3-73) dans (3-72), on obtient:

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k)x(k) \quad (3-74)$$

Depuis, cette relation (3-74) doit valoir pour toutes les valeurs de $x(k)$, nous avons

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k) \quad (3-75)$$

Cette relation (3-75) est appelée Equation différentielle de Riccati (DRE). Alternativement, nous pouvons exprimer (3-75) par :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)[p^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k) \quad (3-76)$$

Où, nous supposons que l'inversion de $p(k)$ existe pour tout $k \neq k_f$. La dernière condition pour résoudre la matrice DRE (3-75) ou (3-76) est obtenue à partir de (3-69), (3-70) et (3-71).

$$\lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) = p(k_f)x(k_f) \Rightarrow Q(k_f) = p(k_f) = F(k_f) \quad (3-77)$$

Dans l'équation (3-75), le terme $p(k)$ est sur le côté gauche et $p(k+1)$ est sur le côté droit et par conséquent, il doit être résolu récursivement à partir de l'état final (3-77). Du fait que $Q(k_f)$ et $F(k_f)$ sont supposées semi-définies positives, nous pouvons montrer que la matrice de Riccati $p(k)$ est définie positive.

Pour obtenir la commande optimale en boucle fermée, nous éliminons $\lambda(k+1)$ à partir de la relation de la commande (3-62) et la relation d'état (3-63) et en utilisant la transformation (3-69).

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)]x(k) \quad (3-78)$$

Ici, A^{-T} est l'inverse transposé de A et nous supposons que l'inverse de $A(k)$ existe. Cette dernière relation est la version souhaitée pour la commande optimale en boucle fermée en fonction de l'état. Nous pouvons écrire la relation de la commande optimale en boucle fermée (3-78) sous une forme simplifiée

$$u(k) = -L(k)x(k) \quad (3-79)$$

Où,

$$L(k) = R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)] \quad (3-80)$$

Il s'agit de la relation requise pour la loi de commande de rétroaction optimale et le gain de rétroaction $L(k)$ est appelé le "gain de Kalman". L'état optimal $x^*(k)$ est obtenu en substituant la commande optimale $u^*(k)$ donné par (3-79) dans l'équation d'état initial (3-54) en tant que

$$x(k+1) = (A(k) - B(k)L(k))x(k) \quad (3-81)$$

Les autres formes de la (DRE) :

D'autres formes qui ne nécessitent pas l'inversion de la matrice $A(k)$ pour l'équation (3-75) et la commande optimale (3-79) sont obtenues comme suit :

On a la relation suivante : [32] [23] [11]

$$[A_1^{-1} + A_2A_4A_3]^{-1} = A_1 - A_1A_2[A_3A_1A_2 + A_4^{-1}]^{-1}A_3A_1 \quad (3-82)$$

En utilisant la relation (3-82) dans (3-76), on obtient pour l'équation (DRE) :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)[p(k+1) - p(k+1)B(k)[B^T(k)p(k+1)B(k) + R(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)]A(k) \quad (3-83)$$

Ensuite, on utilise la commande optimale (3-62) et la transformation (3-69), pour obtenir

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)x(k+1) \quad (3-84)$$

qui, lors de l'utilisation de l'équation d'état (3-54) devient

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)[A(k)x(k) + B(k)u(k)] \quad (3-85)$$

Après une réorganisation, on obtient

$$[I + R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)B(k)]u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)A(k)x(k) \quad (3-86)$$

Multipliant à gauche par $R(k)$ et en résolvant pour $u(k)$,

$$u(k) = -L_a(k)x(k) \quad (3-87)$$

où $L_a(k)$, appelé matrice de gain de Kalman est

$$L_a(k) = [R(k) + B^T(k)p(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)A(k) \quad (3-88)$$

Notons à partir de la loi de commande de rétroaction optimale (3-87) que les gains de Kalman sont tributaires de la solution de la matrice (DRE) (3-83) impliquant les matrices du système et des matrices de l'indice de performance. Enfin., la commande optimale en boucle fermée (3-87) avec l'état (3-54) nous donne le système optimal

$$x(k+1) = (A(k) - B(k)L_a(k))x(k) \quad (3-89)$$

En utilisant la relation du gain (3-88), on obtient une nouvelle forme de la fonction (3-83) qui est :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[A(k) - B(k)L_a(k)] \quad (3-90)$$

Faisons maintenant quelques constatations:

- Il existe plusieurs formes de la matrice (DRE) données par (3-74) ou (3-76), (3-83) et (3-90).
- La matrice de gain de Kalman n'a elle que deux formes données, la première forme (3-80), qui va de pair avec la (DRE) (3-75) ou (3-76) et la seconde forme (3-88) qui correspond à l'équation différentielle de Riccati (3-83) ou (3-90).

3.6.2 Commande LQ à temps discret à horizon infini

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k_0}^{k_f} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (3-91)$$

Comme k_f tend vers l'infini, nous avons la matrice de Riccati $p(k)$ qui atteint une valeur de régime permanent \bar{p} . Autrement dit,

$$p(k) = p(k+1) = \bar{p} \quad (3-92)$$

Donnant l'équation algébrique de Riccati (ARE) qui s'écrit :

$$\bar{p} = Q + A^T \bar{p} [I + BR^{-1}B^T \bar{p}]^{-1} A \quad (3-93)$$

ou en utilisant l'équation (3-76), on aura :

$$\bar{p} = Q + A^T [\bar{p}^{-1} + BR^{-1}B^T]^{-1} A \quad (3-94)$$

La commande optimale de retour d'état (3-78) devient

$$u(k) = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q] x(k) = -\bar{L}x(k) \quad (3-95)$$

où, le gain de Kalman (3-80) devient

$$\bar{L} = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q] \quad (3-96)$$

Autre forme:

Une autre forme de l'équation algébrique de Riccati (ARE) (3-93) est obtenue en considérant l'état stable de la forme différentielle (DRE) (3-83) qui est :

$$\bar{p} = Q + A^T [\bar{p} - \bar{p}B[B^T \bar{p}B + R]^{-1}B^T \bar{p}] A \quad (3-97)$$

La commande optimale (3-87) devient

$$u(k) = -\bar{L}_a x(k) \quad (3-98)$$

Où, la matrice de gain optimal (3-88) devient

$$\bar{L}_a = [R + B^T \bar{p}B]^{-1} B^T \bar{p} A \quad (3-99)$$

La commande optimale (3-98) avec l'Etat (3-54) nous donne le système optimal

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}_a(k)]x(k) \quad (3-100)$$

3.7 Conclusion

Nous avons discuté dans ce chapitre de la commande optimale d'une manière générale et plus particulièrement de la commande quadratique linéaire. Les principaux critères utilisés dans l'application de la commande optimale se résument au temps et à un indice de performance ou à un cout. Quelques principes fondamentaux d'optimalité tels que le principe de Bellman, le principe de Pontriaguine et le principe de moindre action de Maupertuis sont aussi présentés.

Enfin, nous avons détaillés un type de commande optimale qui est appliquée à des systèmes linéaires, qu'est la commande LQR. Comme nous l'avons mentionné deux types de

commande LQR, à temps continu et à temps discret sont présentés. Les deux cas horizon fini et horizon infini sont aussi discutés pour les deux types d'équations de Riccati.

Chapitre 4

Algorithmes et travaux de simulation

4.1 Introduction

Le modèle dynamique du véhicule (robot unicycle) dans le cas discret est représenté par l'équation :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (4-1)$$

Ici, $x \in R^n$ est le vecteur d'état du véhicule et $u \in R^m$ est la commande (vecteur d'entrée). L'objectif est de résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (4-2)$$

où, $R \in R^{m \times m}$ est la matrice de pondération d'entrée de commande et $Q \in R^{n \times n}$ est la matrice de pondération d'état. Afin de minimiser la fonction de coût quadratique, nous commençons par calculer $p(k) \in R^{n \times n}$ qui est la solution de l'équation de Riccati,

4.2 Solution de l'équation de Riccati.

Il existe différentes méthodes pour résoudre l'équation de Riccati. Dans ce qui suit nous étudions trois méthodes pour la solution de cette équation.

1. Méthode des vecteurs propres.
2. Méthode de Schur.
3. Méthode itérative.

4.2.1 Méthode des vecteurs propres.

La solution de l'équation différentielle de Riccati est critique pour le système de régulateur linéaire quadratique. Alternativement, on peut obtenir une solution analytique de la DRE. Ecrivons le système hamiltonien (3-66) survenant dans le système de commande LQR à temps invariant [11] [4] [6].

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

Ici, la matrice hamiltonien H est

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BR^{-1}B^T \\ QA^{-1} & A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

Notons que

$$H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = I \quad (4-12)$$

Les conditions aux limites (3-76) sont reproduites ici à partir de (3-55) et (3-77)

$$x(k = k_0) = x_0; \lambda(k = k_f) = p(k = k_f)x(k_f) \quad (4-13)$$

Aussi, en essayant d'obtenir l'équation différentielle de Riccati, nous avons supposé une transformation (3-71) entre l'Etat et l'état adjoint comme

$$\lambda(k) = p(k)x(k); \forall k \leq k_f \quad (4-14)$$

Maintenant, nous allons montrer que la solution $p(k)$ de l'équation de Riccati (3-83) peut être obtenue en termes de valeurs et vecteurs propres de la matrice hamiltonien H . Définissons d'abord

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \text{ telle que } J^{-1} = -J \quad (4-15)$$

Maintenant, en utilisant (4-11), (4-12) et (4-15), il est facile de montrer que :

$$H^T J H = J \quad (4-16)$$

En multipliant à droite l'équation ci-dessus par H^{-1} on aura :

$$H^T J = J H^{-1} \quad (4-17)$$

puis en multiplions à gauche par J^{-1} on obtient l'équation suivante :

$$J^{-1} H^T J = H^{-1} \quad (4-18)$$

et en utilisant (4-15), nous obtenons :

$$H^{-1} = -J H^T J \quad (4-19)$$

Maintenant, en remplaçant les quantités sur le côté droit de l'équation précédente, on obtient :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T} Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

où A^{-T} est la transposée de A^{-1} . Maintenant, nous montrons que si μ est une valeur propre de H , alors $\frac{1}{\mu}$ est également une valeur propre de H . D'abord, si μ est une valeur propre avec un vecteur propre correspondant $[f, g]^T$ on a :

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BR^{-1}B^T \\ QA^{-1} & A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

Ce qui donne par une simple transposition :

$$\begin{bmatrix} A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T & -QA^{-1} \\ -A^{-1}BR^{-1}B^T & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

En utilisant (4-19), nous avons

$$[H^{-T}] \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} g \\ -f \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

Cela montre que μ est aussi une valeur propre de H^{-T} , et donc de H^{-1} . Nous savons d'après l'algèbre matricielle élémentaire que si α est une valeur propre d'une matrice A , alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une valeur propre de la matrice A^{-1} . Par conséquent $\frac{1}{\mu}$ est une valeur propre de H^{-1} d'où le résultat trouvé. Cela signifie que les valeurs propres de H peuvent être organisées comme suit :

$$D = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Où M est une matrice diagonale de Jordan contenant n valeurs propres à l'extérieur du cercle unité et M^{-1} est une matrice diagonale contenant n valeurs propres à l'intérieur du cercle unité qui signifie que M^{-1} est stable. Maintenant, nous notons que D peut être rédigée dans des termes d'une matrice non singulière W dont les colonnes sont les vecteurs propres de H comme

$$W^{-1}HW = D \quad (4-25)$$

Introduisons maintenant une transformation en

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

Puis, en utilisant (4-24), (4-26) et le système hamiltonien (4-10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} &= W^{-1} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = W^{-1}H \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = W^{-1}HW \begin{bmatrix} V(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} V(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-27}$$

La solution de (4-27) en fonction des conditions finales se trouve en premier

$$\begin{bmatrix} V(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} \tag{4-28}$$

Ensuite, pour que les conditions finales soient rendues, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{(k_f-k)} & 0 \\ 0 & M^{-(k_f-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(k_f) \\ Z(k_f) \end{bmatrix} \tag{4-29}$$

Ici, puisque M est instable (c'est à dire qu'elle ne va pas à zéro) $(k_f - k) \rightarrow \infty$ nous écrivons (4-29) de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} V(k_f) \\ Z(k_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-(k_f-k)} & 0 \\ 0 & M^{-(k_f-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} \tag{4-30}$$

Ensuite, au temps final k_f en utilisant (4-14) et (4-26), nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda(k_f) &= W_{21}V(k_f) + W_{22}Z(k_f) = p(k_f)x(k_f) = F(k_f)x(k_f) \\
&= F(k_f)[W_{11}V(k_f) + W_{12}Z(k_f)]
\end{aligned} \tag{4-31}$$

Dont la solution devient

$$Z(k_f) = T(k_f)V(k_f) \tag{4-32}$$

où,

$$T(k_f) = -[W_{22} - F(k_f)W_{12}]^{-1}[W_{21} - F(k_f)W_{11}] \tag{4-33}$$

Maintenant, en utilisant (4-30) et (4-32)

$$Z(k) = M^{-(k_f-k)}Z(k_f) = M^{-(k_f-k)}T(k_f)V(k_f) = M^{-(k_f-k)}T(k_f)M^{-(k_f-k)}Z(k_f) \tag{4-34}$$

Cela signifie que pour chaque valeur de k ,

$$Z(k) = T(k)V(k) \quad (4-35)$$

où,

$$T(k) = M^{-(k_f-k)}T(k_f)M^{-(k_f-k)} \quad (4-36)$$

Maintenant, nous relierons $p(k)$ (4-14) avec $T(k)$ (4-35) en utilisant d'abord (4-26) et (4-14) pour obtenir

$$\lambda(k) = W_{21}V(k) + W_{22}Z(k) = p(k)x(k) = p[k][W_{11} + W_{12}T(k)]V(k) \quad (4-37)$$

Puis en utilisant (4-35)

$$[W_{21} + W_{22}T(k)]V(k) = p[k][W_{11} + W_{12}T(k)]V(k) \quad (4-38)$$

Depuis celle-ci doit tenir bon pour tout $x(0)$ et donc pour tout $V(k)$, conduisant à

$$p(k) = [W_{21} + W_{22}T(k)][W_{11} + W_{12}T(k)]^{-1} \quad (4-39)$$

Enfin, nous avons la solution analytique non récursive (4-39) de l'équation différentielle de Riccati (3-83). Notons que la solution (4-39) exige les relations (4-36) et (4-33) ainsi que les valeurs propres (4-24), vecteurs propres (4-25) et la matrice de coût finale donnée $F(k_f)$.

État stable

Pour le temps final $k_f \rightarrow \infty$, l'équation différentielle de Riccati (3-83) devient l'équation algébrique de Riccati (3-97). Maintenant, trouvons l'expression analytique de la solution \bar{p} de l'équation algébrique de Riccati. Comme $(k_f - k) \rightarrow \infty$, $M^{-(k_f-k)} \rightarrow 0$, puisque M^{-1} est stable. Cela signifie que dans (4-36) $T(k) \rightarrow 0$. Ensuite, la solution stationnaire de (4-39) donne

$$\bar{p} = W_{21}W_{11}^{-1} \quad (4-40)$$

Notons que la solution permanente précédente (4-40) exige des valeurs propres instables (4-24) et les vecteurs propres (4-25). Ainsi, nous avons la solution analytique de l'équation algébrique de Riccati.

4.2.2 Méthode de Schur

Cette méthode utilise certains vecteurs de Schur pour résoudre l'équation algébrique de Riccati à temps discret [6] [17].

Théorème (4-1) : (la forme canonique de Schur): Soit $\Gamma \in R^n$ ont dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une similitude de transformation unitaire N telle que $N^H \Gamma N$ est triangulaire supérieure avec les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans cet ordre.

En fait, il est possible de ne travailler que sur \mathbb{R} par la réduction à la forme triangulaire avec quasi-supérieur avec 2×2 blocs de diagonale correspondant à des valeurs propres complexes conjuguées et des blocs 1×1 correspondant aux valeurs propres réelles. Nous nous référons à cette forme canonique comme la forme de Schur réelle (RSF) .

Théorème (4-2) (RSF): Soit $\Gamma \in R^n$. Alors il existe une similitude N de transformation orthogonale telle que $N^T \Gamma N$ est quasi-triangulaire supérieure. En outre, N peut être choisi de telle sorte que les blocs diagonaux 2×2 et 1×1 apparaissent dans un ordre quelconque.

Si dans le théorème (4-2) nous partitionnons $N^T \Gamma N$ en $\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}$ où $s_{11} \in R^{k \times k}$ $0 < k < n$, nous désignerons les k premiers vecteurs de N les vecteurs de Schur correspondant à $\sigma(s_{11}) \subseteq \sigma(\Gamma)$. Les vecteurs de Schur correspondant aux valeurs propres de s_{11} construisent l'espace propre correspondant à ces valeurs propres même si certaines sont multiples.

Nous allons utiliser cette propriété pour résoudre l'équation algébrique de Riccati (3-97). On suppose que (A, B) est une paire stabilisable et que A est inversible.

Sous les théorèmes (4-1) et (4-2) l'équation (3-97) accepte une solution unique non négative et la méthode proposée ci-dessous sera dirigée vers la recherche de cette solution.

Considérons la matrice hamiltonienne inverse (4-20) qui est :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A + B^T R^{-1} B A^{-T} Q & -B^T R^{-1} B A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix}$$

Nos hypothèses garantissent que H^{-1} n'a pas de valeurs propres sur le cercle unité. Ainsi, d'après le théorème (4-2) nous pouvons trouver une transformation orthogonale $N \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ qui met H^{-1} à RSF

$$N^T H^{-1} N = S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

où

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

Il est possible de montre que le spectre de s_{11} se trouve à l'intérieur du cercle unité alors que le spectre de s_{22} se situe en dehors du cercle unité. Encore une fois N est partitionnée comme dans (4-42). Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème (4-3): En ce qui concerne la notation et les hypothèses ci-dessus:

- ✓ n_{11} est inversible et $p = n_{21} n_{11}^{-1}$ solution de l'équation (3-97) avec $p = p^T \geq 0$.
- ✓ $\delta(s_{11}) = \delta(A - B(R + B^T p B)^{-1} B^T p A)$

$$\begin{aligned}
&= \delta(A - BR^{-1}B^T(p - Q)) \\
&= \delta(A - BR^{-1}B^T(p^{-1} + Q)^{-1}A), \text{ où } p \text{ est inversible.}
\end{aligned}$$

Qui présente le spectre en boucle fermée.

4.2.3 Méthode itérative

Traditionnellement, la solution de la (DRE) (3-83) est obtenue par itération d'une manière récursive en utilisant la condition finale (3-77).

4.3 Algorithmes pour l'obtention des états optimaux et la commande optimale

Nous présentons deux algorithmes, le premier pour le système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon fini et le second algorithme pour le système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon infini.

4.3.1 Premier Algorithme

La procédure sommaire du système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon fini se fait de la manière suivante :

a) Énoncé du problème

Compte tenu de la matrice des états

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (4-43)$$

L'indice de performance comme

$$J = \frac{1}{2}x^T(k_f)F(k_f)x(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (4-44)$$

Et les conditions aux limites

$$x(k = k_0) = x_0; x(k_f) \text{ est libre et } k_f \text{ est libre} \quad (4-45)$$

Le problème est de trouver la commande, l'état et l'indice de performance optimaux en boucle fermée.

b) Solution du problème.

Étape 1: Résolution de l'équation différentielle de Riccati (DRE)

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k + 1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k + 1)]^{-1}A(k) \quad (4-46)$$

à condition finale

$$p(k = k_f) = F(k_f) \quad (4-47)$$

Étape 2: calcul de l'état optimal $x(k)$ à partir de

$$x(k+1) = [A(k) - B(k)L(k)]x(k) \quad (4-48)$$

avec la condition initiale $x(k = k_0) = x_0$, où

$$L(k) = R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)] \quad (4-49)$$

Étape 3: obtention de la commande optimale $u(k)$ à partir de

$$u(k) = -L(k)x(k) \quad (4-50)$$

où $L(k)$ est le gain de Kalman.

Étape 4: obtention de l'indice de performance optimal du système

$$J = \frac{1}{2} x^T(k)p(k)x(k) \quad (4-51)$$

c) Schéma Bloc

Maintenant on peut dessiner un schéma bloc du système de régulation de l'état linéaire à temps discret à horizon fini.

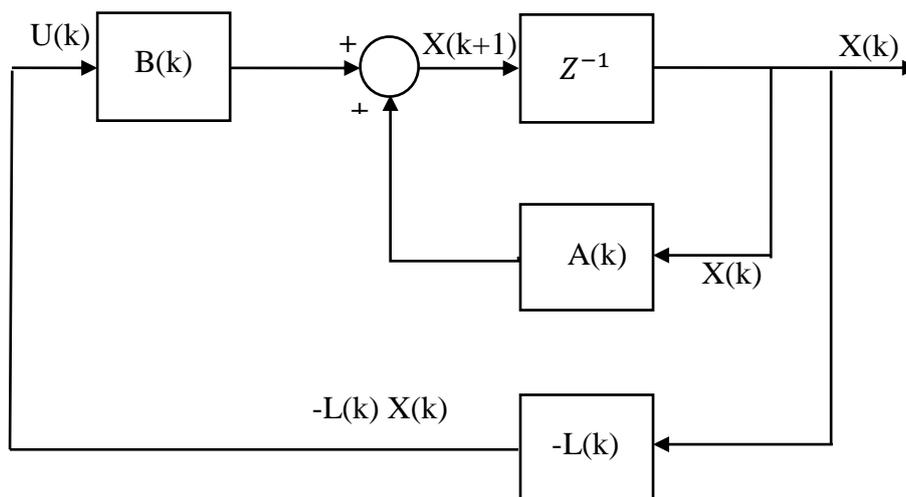


Figure 4-1: Commande optimale en boucle fermée pour régulation linéaire à temps discret à horizon fini.

d) Détermination de A et B

A et B sont à déterminer par la relation physique entre les composants [1] :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

D'après les propriétés de notre système, le calcul des matrices A et B est effectué de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2\frac{k_m k_e}{m r^2 R} & 0 \\ 0 & -2\frac{L^2 k_m k_e}{I r^2 R} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{m R r} & \frac{k_m}{m R r} \\ \frac{L k_m}{I R r} & -\frac{L k_m}{I R r} \end{bmatrix}$$

Où

$$m = \left(m_r + 2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) \text{ et } I = \left(I_r + 2I_R + 2L^2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right)$$

A.N

$$A = \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix}$$

Ensuite, on remplace

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

e) Choix des matrices de pondération Q et R

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangée le gain L [12]. En effet, soit p solution de (3-97) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\tilde{Q} = \alpha Q$ et $\tilde{R} = \alpha R$. On vérifie que $\tilde{p} = \alpha p$ est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet : $\tilde{L} = \tilde{R}^{-1} B^T \tilde{p} = R^{-1} B^T p = L$. Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de n scalaires pour l'état et de m scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de médication des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

- Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
- Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire α (accélération avec $\alpha > 1$ et décélération avec $\alpha < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.

- d. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.

Les étapes b, c et d peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier de charges.

Ainsi, nous remplaçons les valeurs des matrices A , B , Q et R dans l'équation différentielle de Riccati, on trouve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{21}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix} \\ &\times \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix}^T \right]^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-53)$$

Maintenant, nous utilisons la procédure donnée ci-dessus:

Exemple 1 : $k_f = 10$

Étape 1: Résoudre l'équation différentielle de Riccati (4-54). Pour la condition finale $k_f = 10$ on trouve :

$$\begin{bmatrix} p_{11}(10) & p_{12}(10) \\ p_{21}(10) & p_{22}(10) \end{bmatrix} = F(10) = Q \quad (4-54)$$

Étape 2: la commande optimale $u(k)$ est obtenue à partir de (4-50)

$$[u(k)] = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_{11}(k) & l_{12}(k) \\ l_{21}(k) & l_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

où $L(k) = \begin{bmatrix} l_{11}(k) & l_{12}(k) \\ l_{21}(k) & l_{22}(k) \end{bmatrix}$ est donné par l'équation (4-48).

Étape 3: Utilisation de la commande optimale (4-55) les états optimaux sont calculés en résolvant l'équation d'état (4-48) en avant dans le temps. Il s'agit d'un processus itératif dans la direction vers l'arrière.

Exemple 2 : $k_f = 20$

Nous répétons les mêmes trois étapes précédentes où $k_f = 20$.

Notons que :

$$p(k_f) = F(k_f) = F(20) = Q \quad (4-56)$$

4.3.2 Deuxième Algorithme

La procédure sommaire du système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon infini se fait de la manière suivante :

a) Énoncé du problème

Compte tenu de la matrice des états

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4-57)$$

L'indice de performance comme

$$J(k_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (4-58)$$

Où $k_f = \infty$

Le problème est trouver la commande, l'état et l'indice de performance optimaux.

b) Solution du problème.

Étape 1: Résolution de l'équation algébrique de Riccati (ARE)

$$\bar{p} = Q + A^T \bar{p} [I + BR^{-1}B^T \bar{p}]^{-1} A \quad (4-59)$$

Où

$$\bar{p} = Q + A^T [\bar{p} - \bar{p}B[B^T \bar{p}B + R]^{-1}B^T \bar{p}] A \quad (4-60)$$

Étape 2: calcul de l'état optimal $x(k)$ à partir de

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}]x(k) \quad (4-61)$$

Ou de

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}_a]x(k) \quad (4-62)$$

avec la condition initiale $x(k = k_0) = x_0$,

$$\bar{L} = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q] \quad (4-63)$$

et

$$\bar{L}_a = [R + B^T \bar{p} B]^{-1} B^T \bar{p} A \quad (4-64)$$

Étape 3: Obtention de la commande optimale $u(k)$ à partir de

$$u(k) = -\bar{L}x(k) \quad (4-65)$$

Ou de

$$u(k) = -\bar{L}_a x(k) \quad (4-66)$$

Étape 4: Obtention de l'indice de performance optimal

$$J(k_0) = \frac{1}{2} x^T(k) \bar{p} x(k) \quad (4-67)$$

c) Schéma Bloc

Le schéma bloc du système de régulation de l'état linéaire à temps discret à horizon infini est représenté sur la figure suivante :

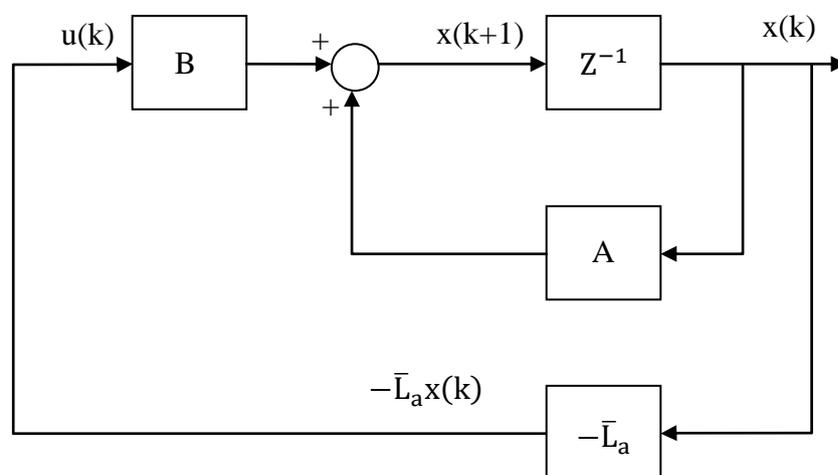


Figure 4-2 : Commande optimale en boucle fermée pour le système de régulation de l'état stable en temps discret à horizon infini

Nous avons déjà identifié les différentes matrices de l'état (4-1) et l'indice de performance (4-2), qui sont A , B , Q et R , sauf que nous avons maintenant $F(k_f) = 0$. Ensuite, la solution de l'équation algébrique de Riccati (4-60), la commande optimale (4-66) et les états optimaux (4-62) sont résolus en utilisant MATLAB.

4.4 Travaux de simulation

4.4.1 Premier cas : Horizon fini

4.4.1.1 Exemple 1 : $k_f = 10$

a) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati

Les coefficients de la matrice $p(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$ de Riccati sont présentés sur la figure (4-3).

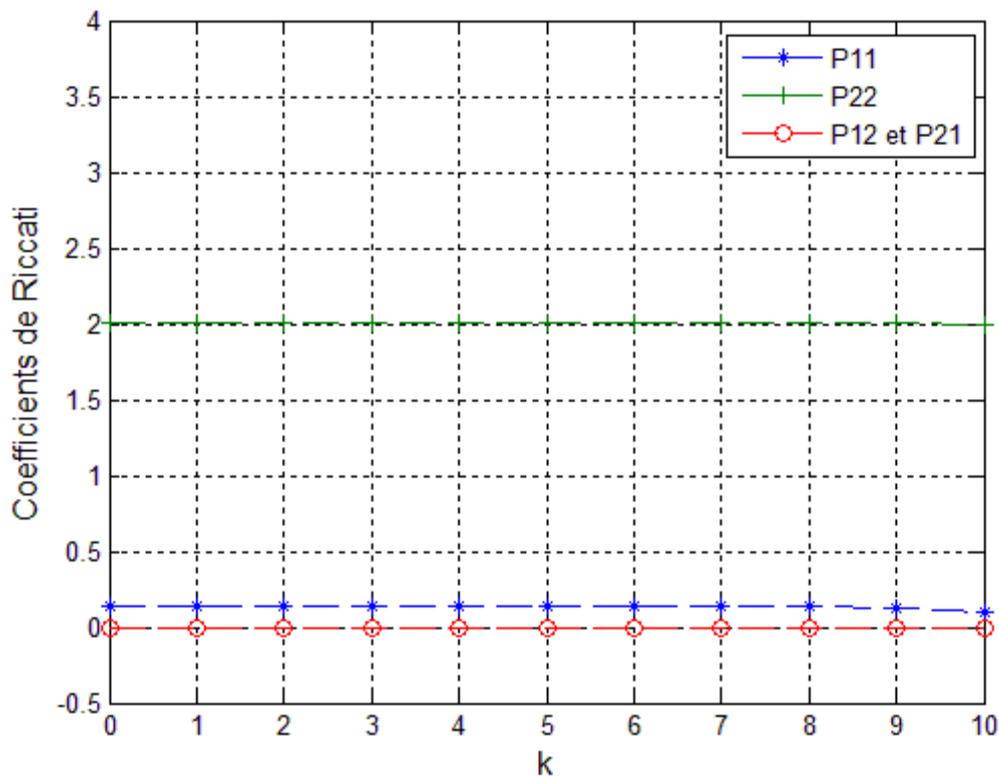


Figure 4-3 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$.

b) Les états optimaux et la commande optimale

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-4) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-5).

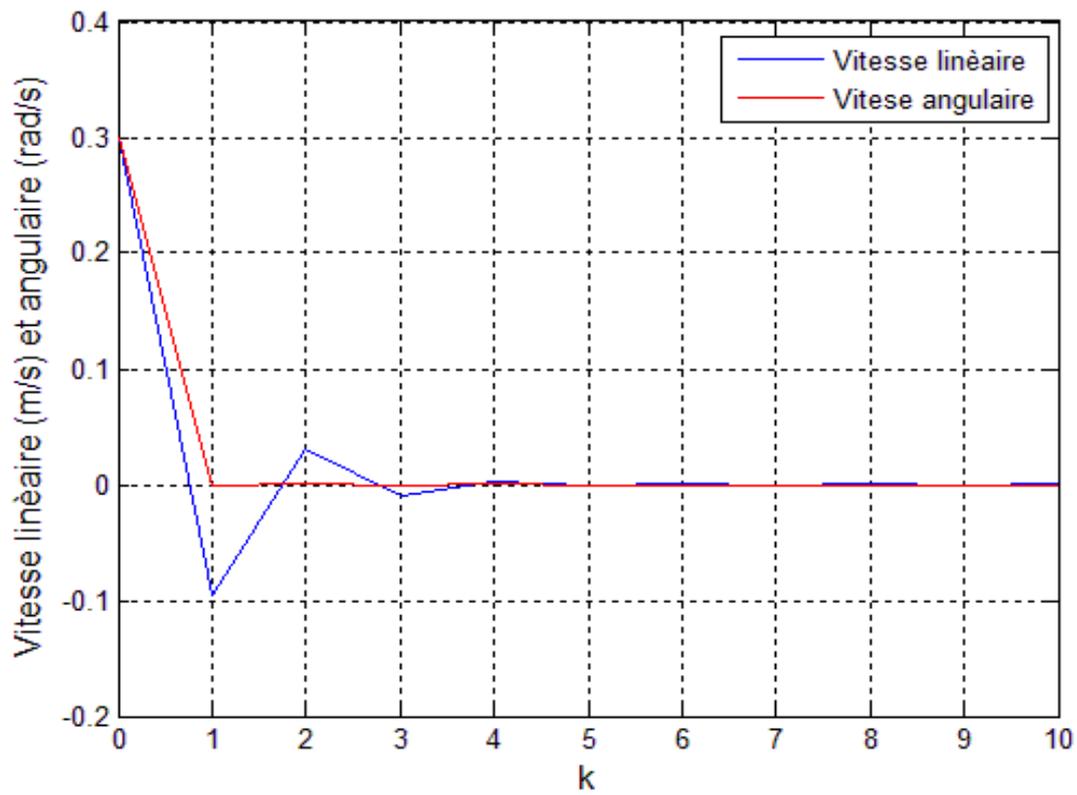


Figure 4-4: Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

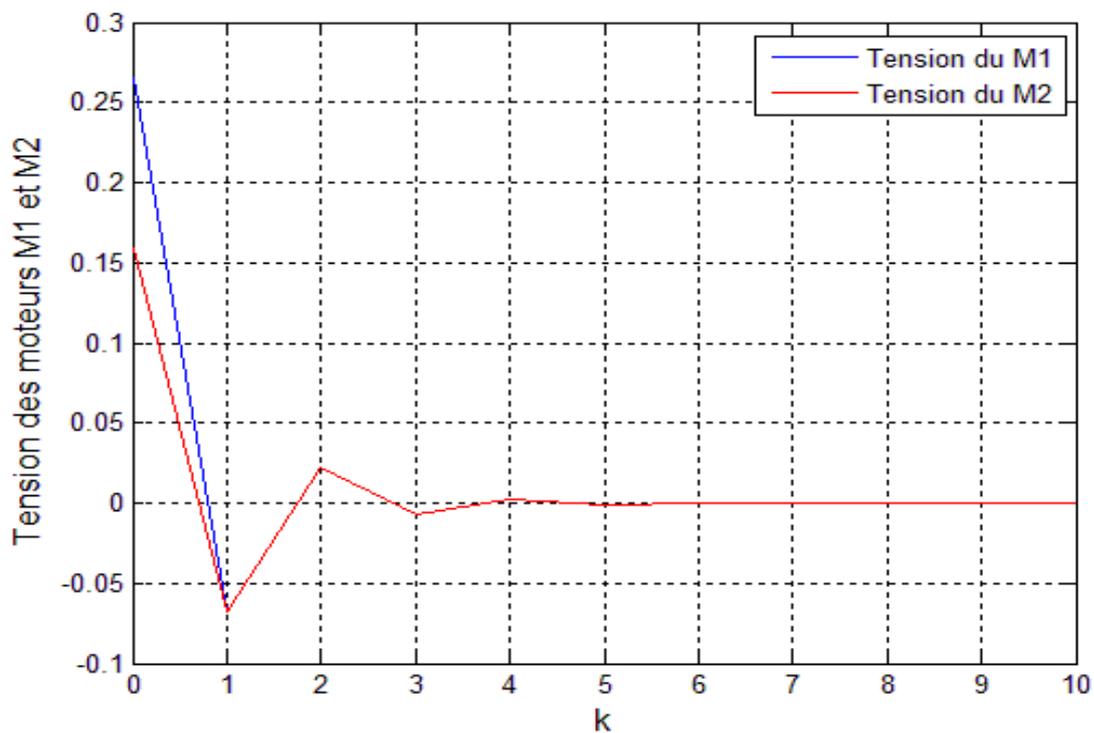


Figure 4-5 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

- c) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $([Q_1] = [Q] + [I])$ et $([R_1] = [R] + [I])$, où $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati après la variation des matrices de pondération Q et R sont présentés sur la figure (4-6).

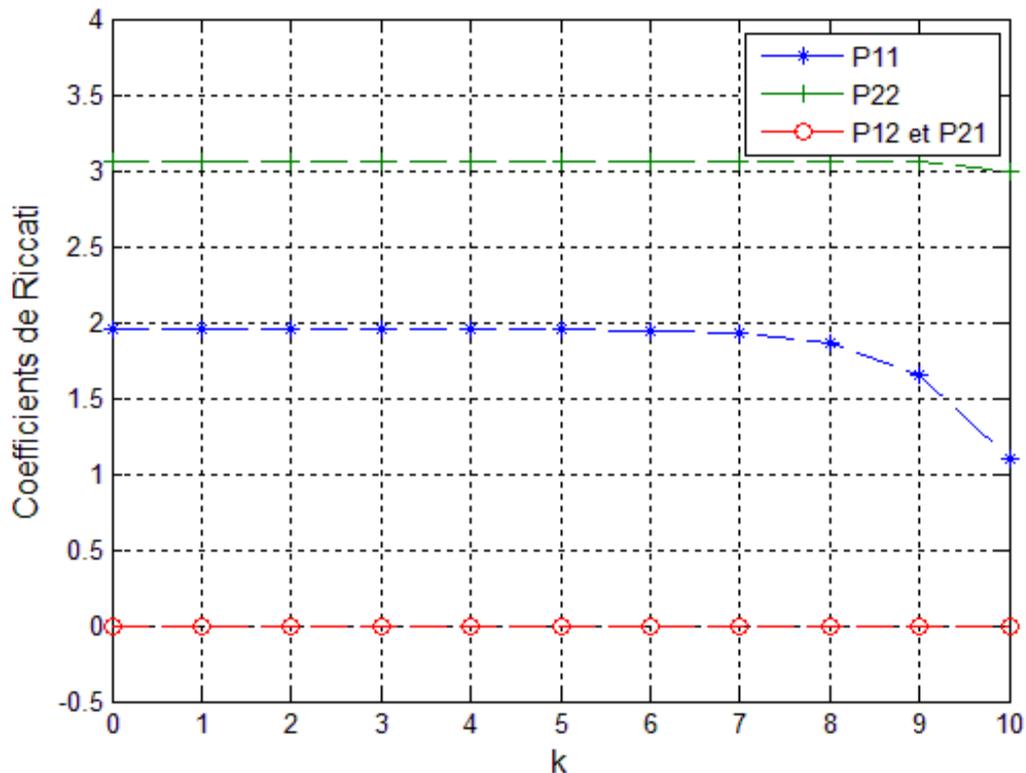


Figure 4-6 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après variation de Q et R

- d) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_1] = [Q] + [I])$ et $([R_1] = [R] + [I])$, où $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-7) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-8).

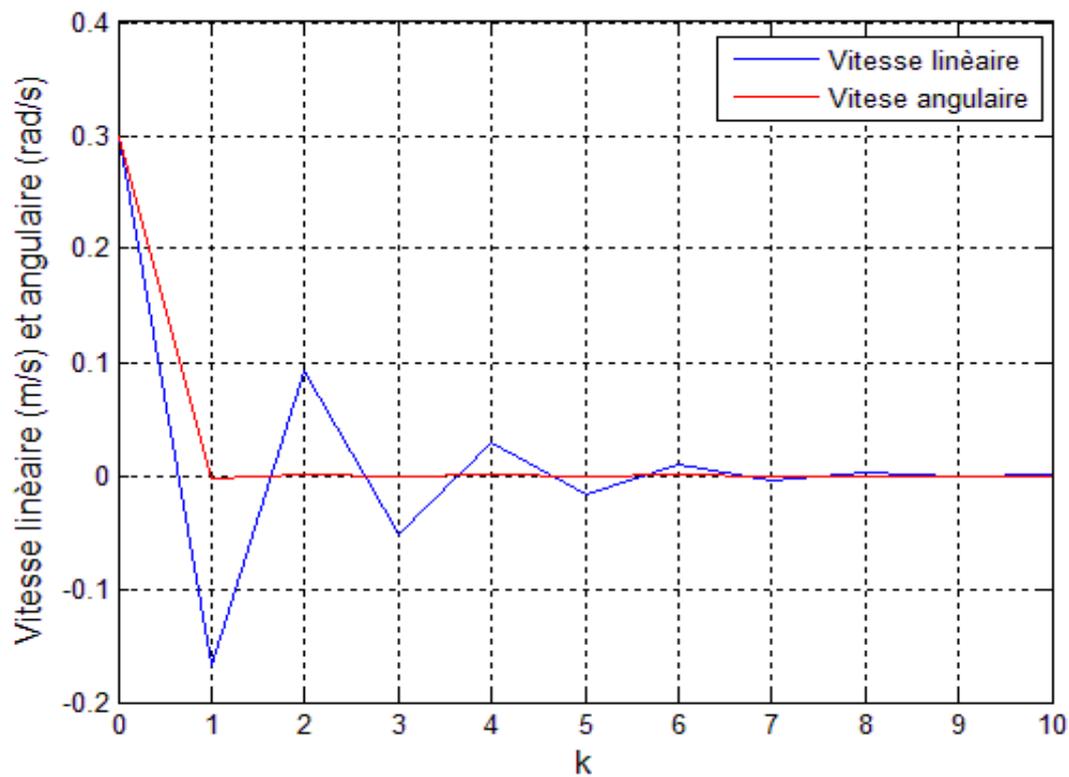


Figure 4-7 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

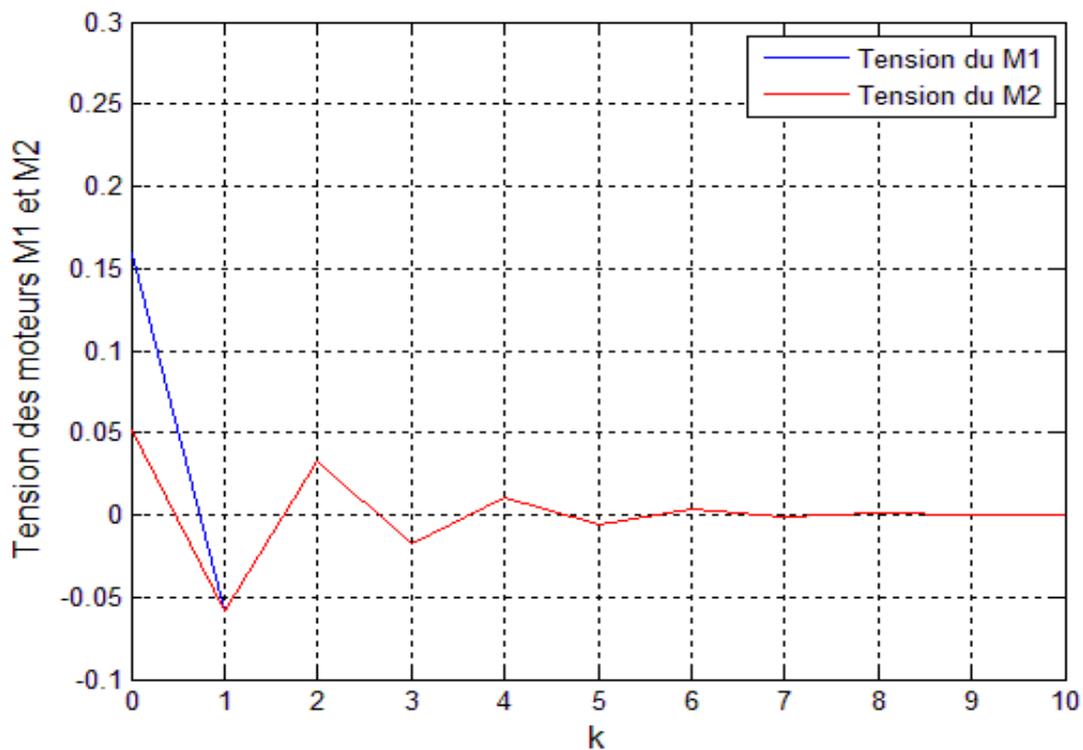


Figure 4-8 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

e) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $([Q_2] = [Q] + [\beta])$ et

$$([R_2] = [R] + [\beta]), \text{ où } [\beta] = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 \\ 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati après la variation des matrices de pondération Q et R sont présentés sur la figure (4-9).

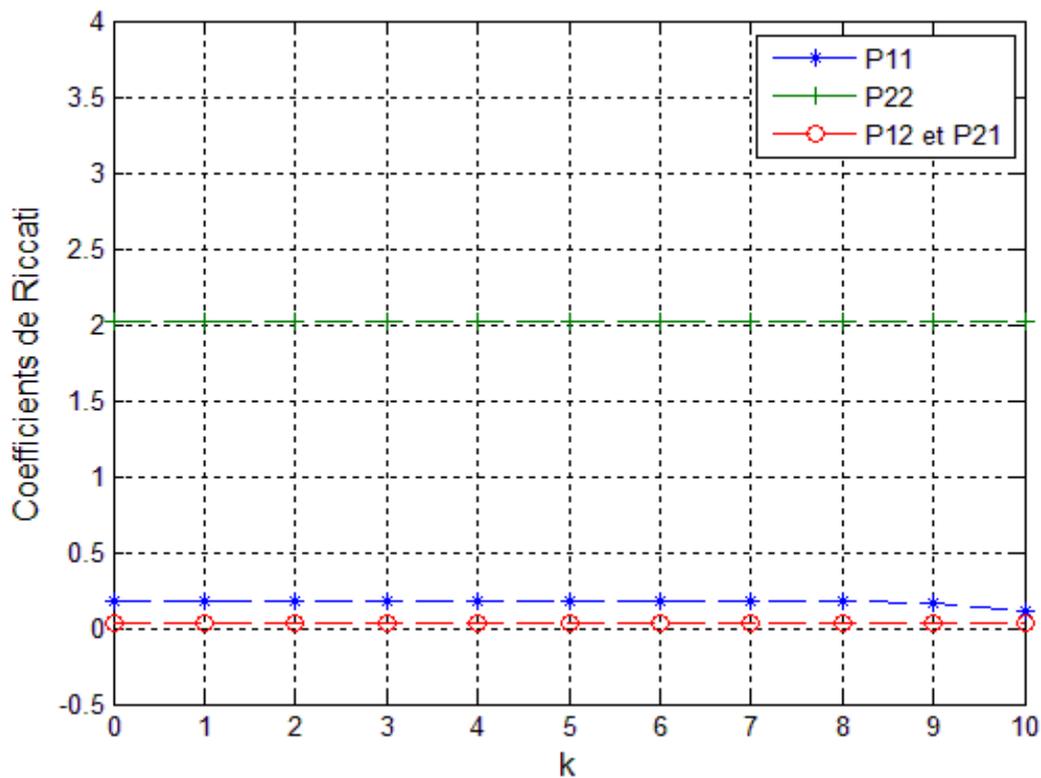


Figure 4-9 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après variation de Q et R

f) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_2] = [Q] + [\beta])$ et

$$([R_2] = [R] + [\beta])$$

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-10) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-11).

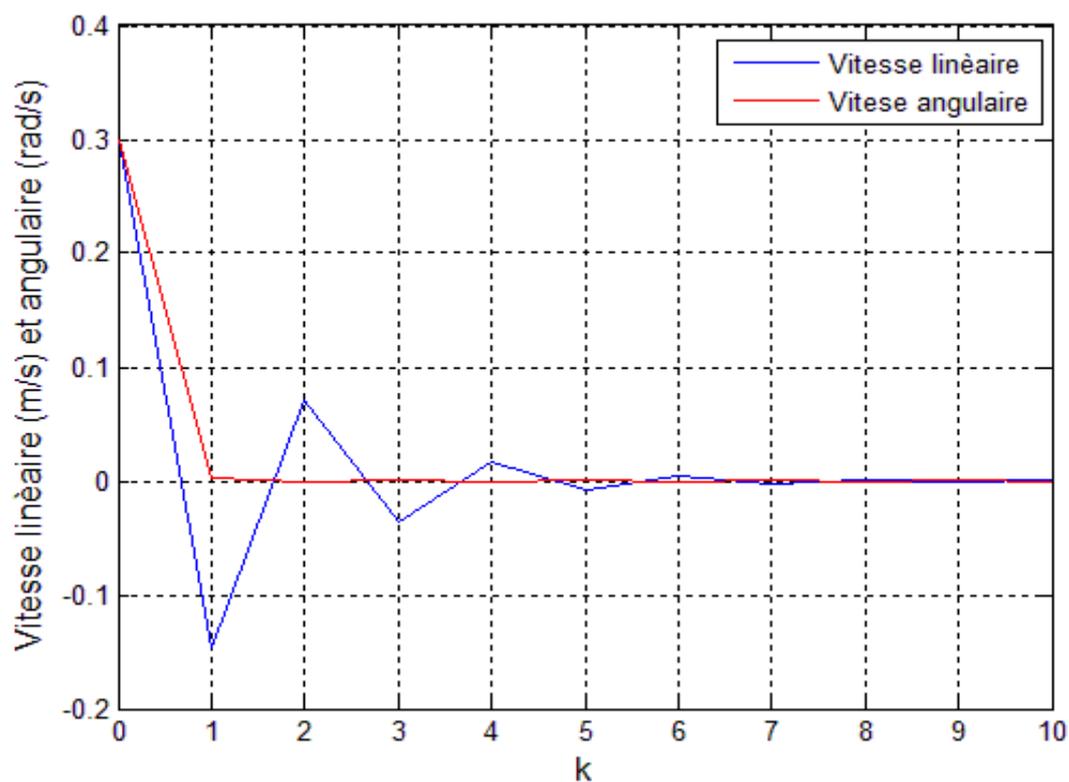


Figure 4-10 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

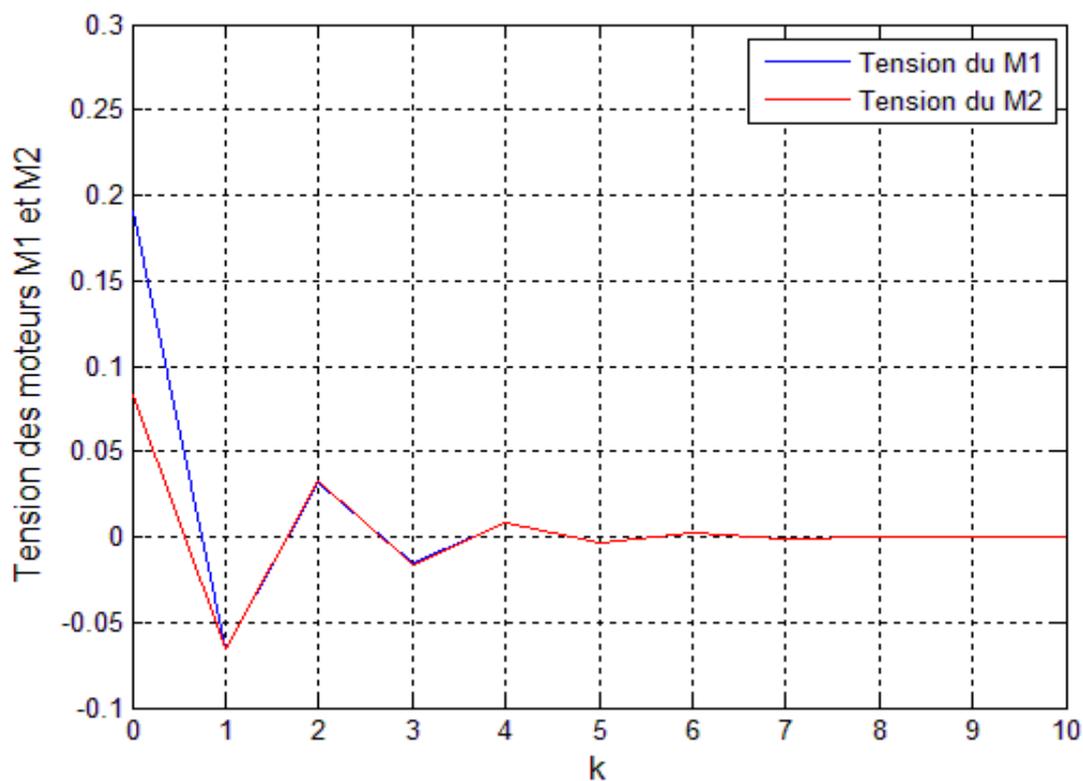


Figure 4-11 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

4.4.1.2 Exemple 2 : $k_f = 20$

a) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati

Les coefficients de la matrice $p(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$ de Riccati sont présentés sur la figure (4-12).

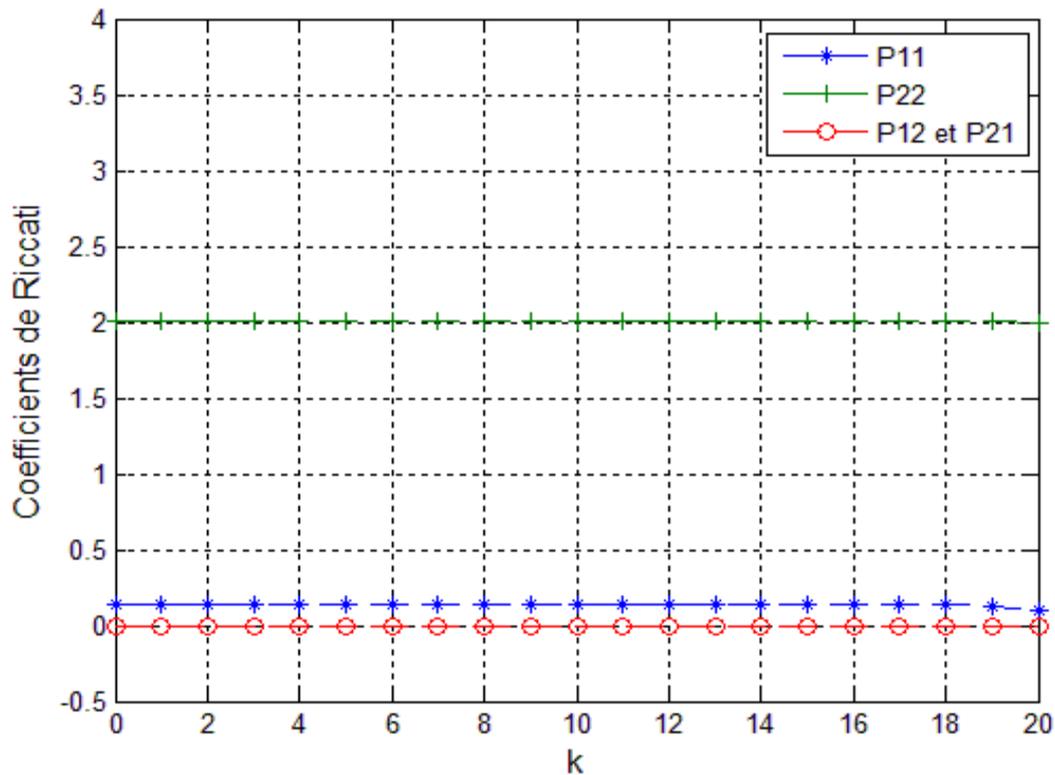


Figure 4-12 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$.

b) Les états optimaux et la commande optimale

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-13) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-14).

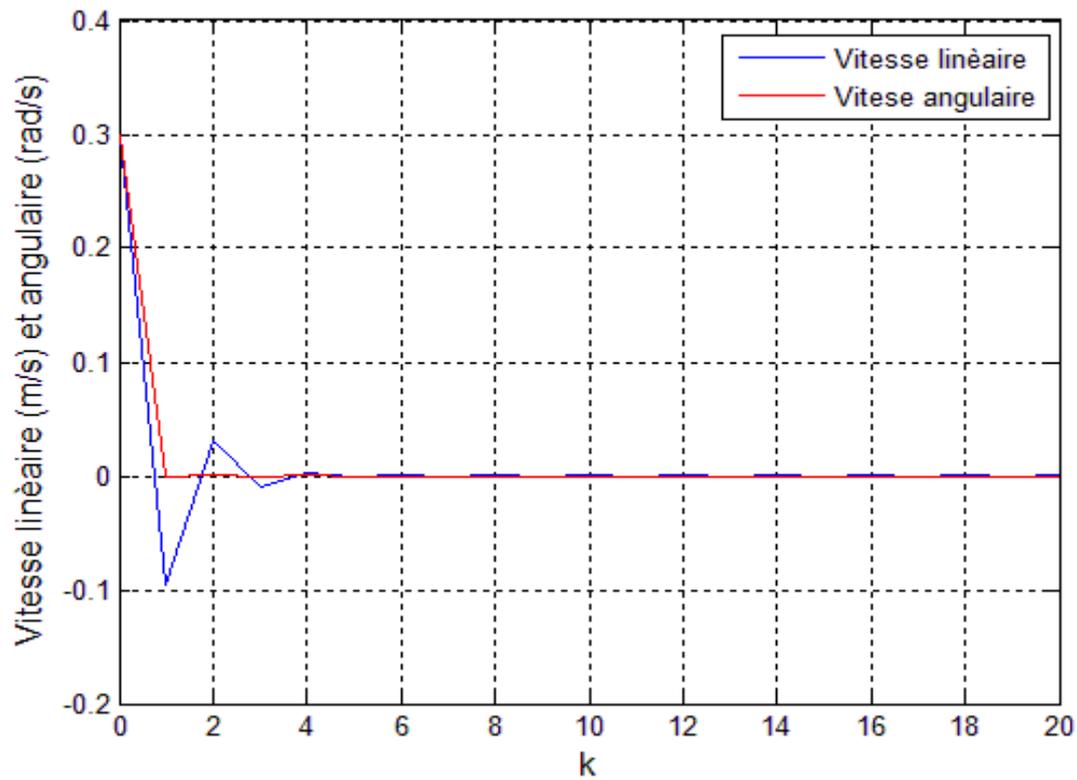


Figure 4-13: Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

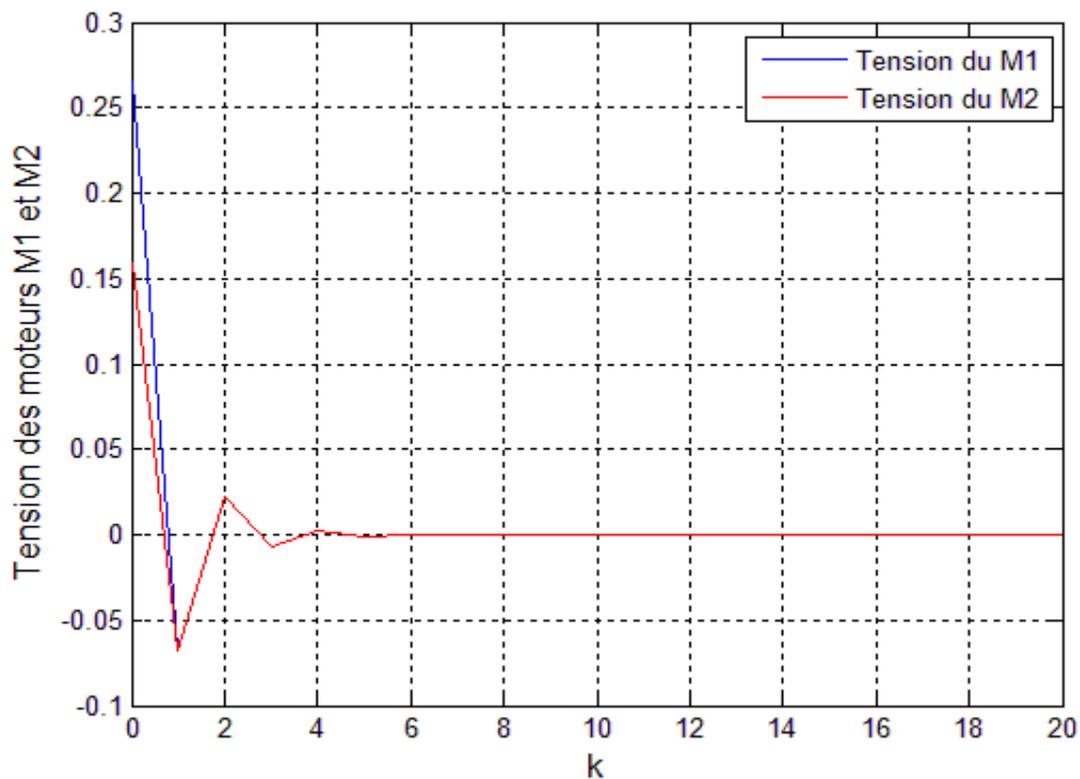


Figure 4-14 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

c) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $([Q_1] = [Q] + [I])$ et

$$([R_1] = [R] + [I]), \text{ où } [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati après la variation des matrices de pondération Q et R sont présentés sur la figure (4-15).

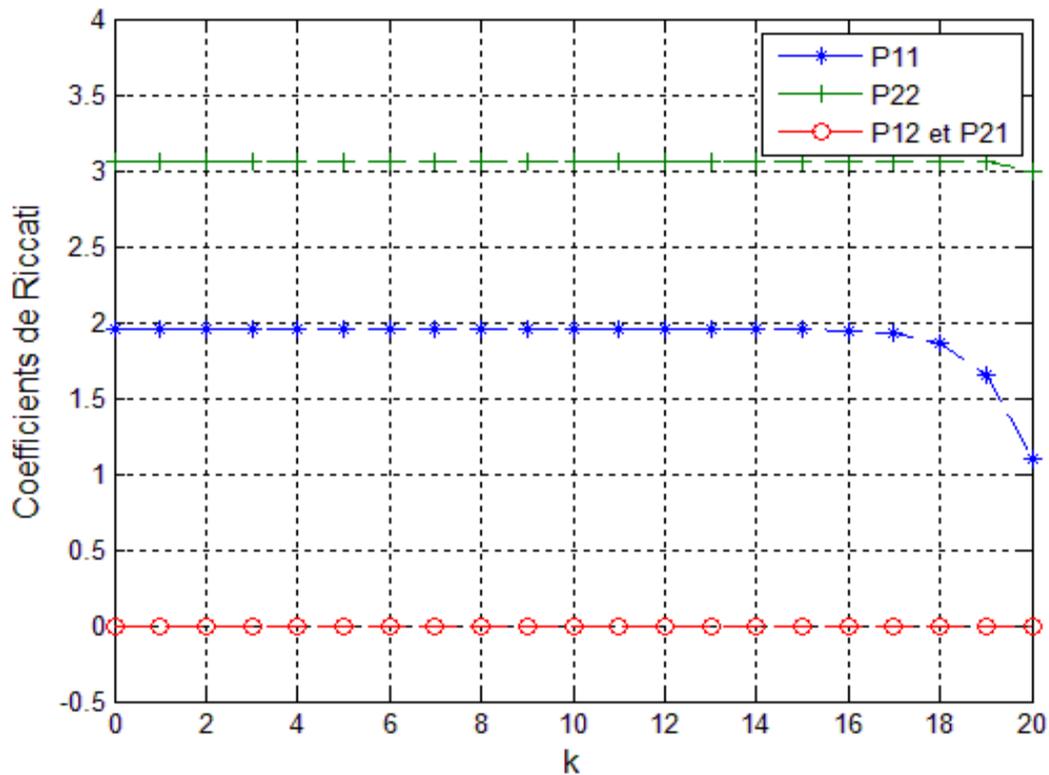


Figure 4-15 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après la variation de Q et R

d) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_1] = [Q] + [I])$ et

$$([R_1] = [R] + [I]), \text{ où } [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-16) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-17).

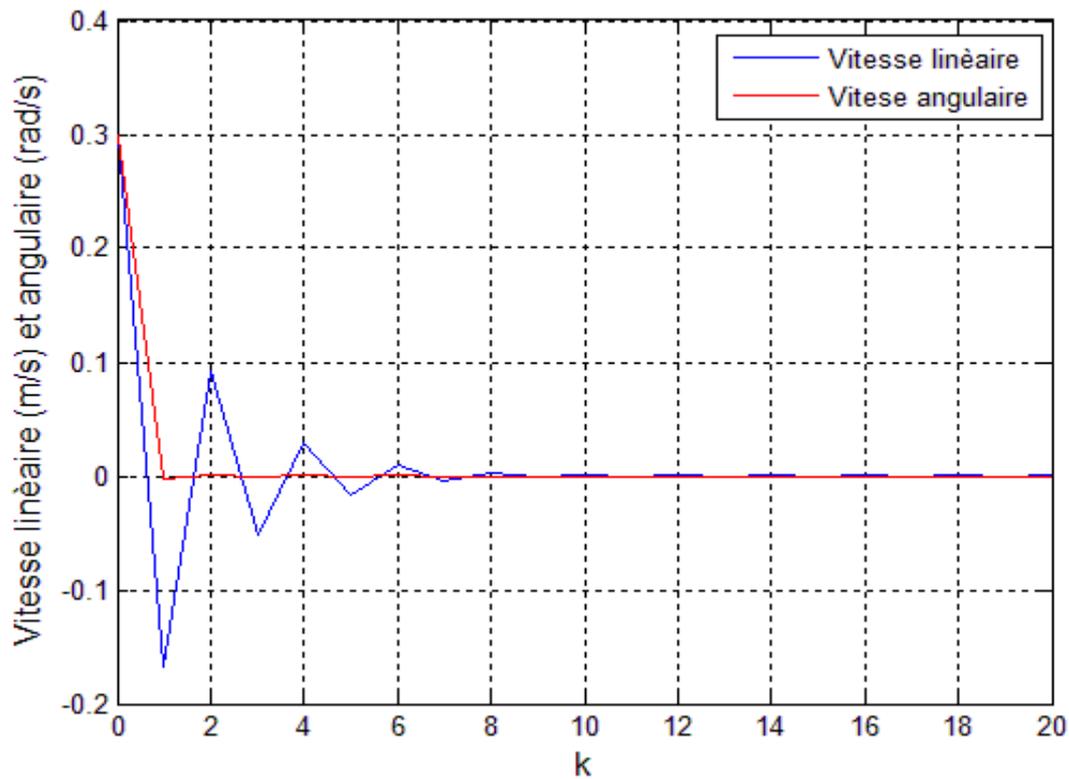


Figure 4-16 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

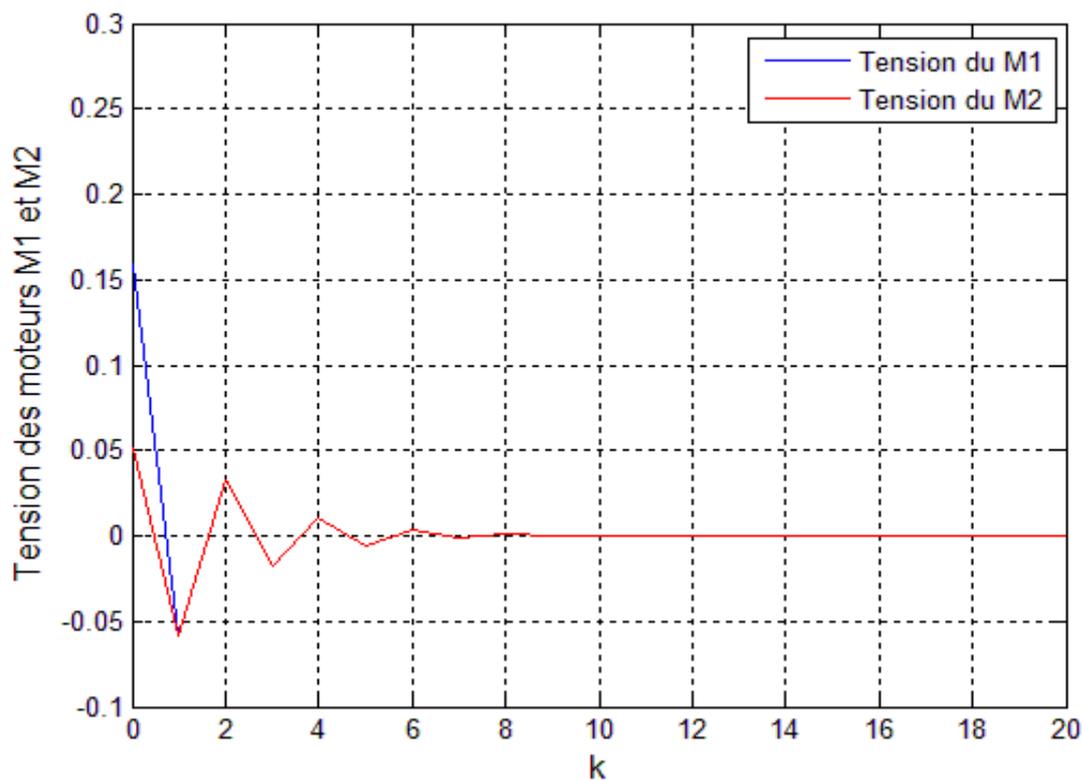


Figure 4-17 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

e) Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati, pour $([Q_2] = [Q] + [\beta])$ et

$$([R_2] = [R] + [\beta]), \text{ où } [\beta] = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 \\ 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice $p(k)$ de Riccati après la variation des matrices de pondération Q et R sont présentés sur la figure (4-18).

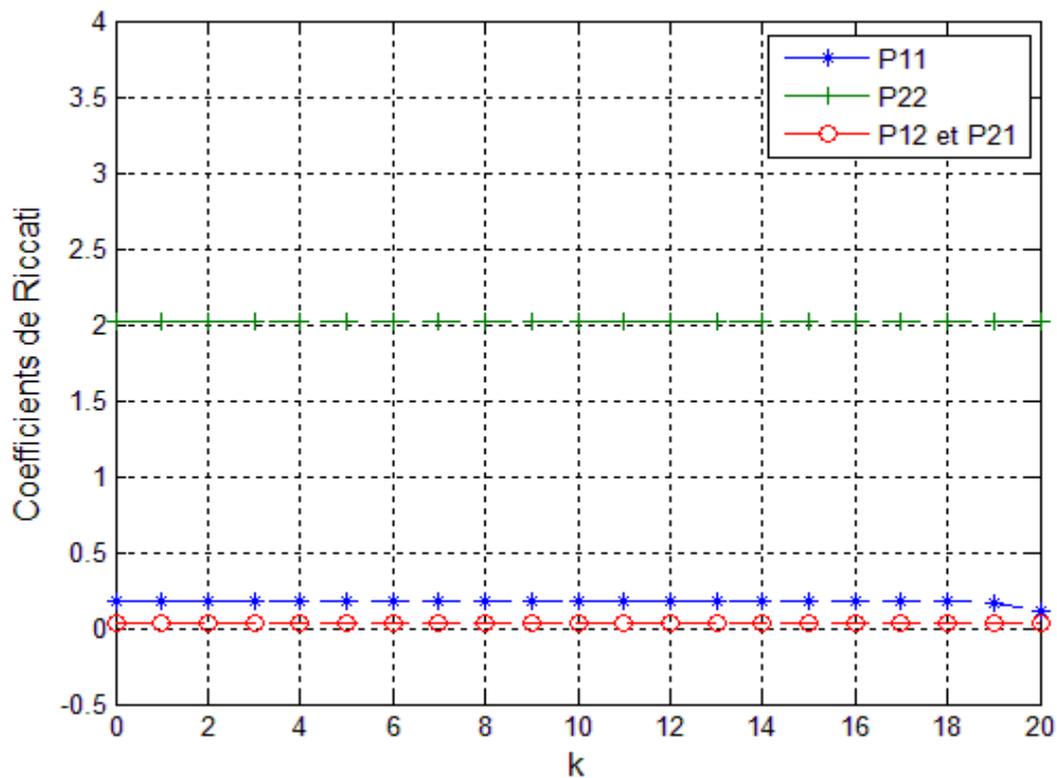


Figure 4-18 : Coefficients de la matrice de Riccati ; $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après variation de Q et R

f) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_2] = [Q] + [\beta])$ et

$$([R_2] = [R] + [\beta])$$

Les états optimaux sont tracés sur la figure (4-19) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-20).

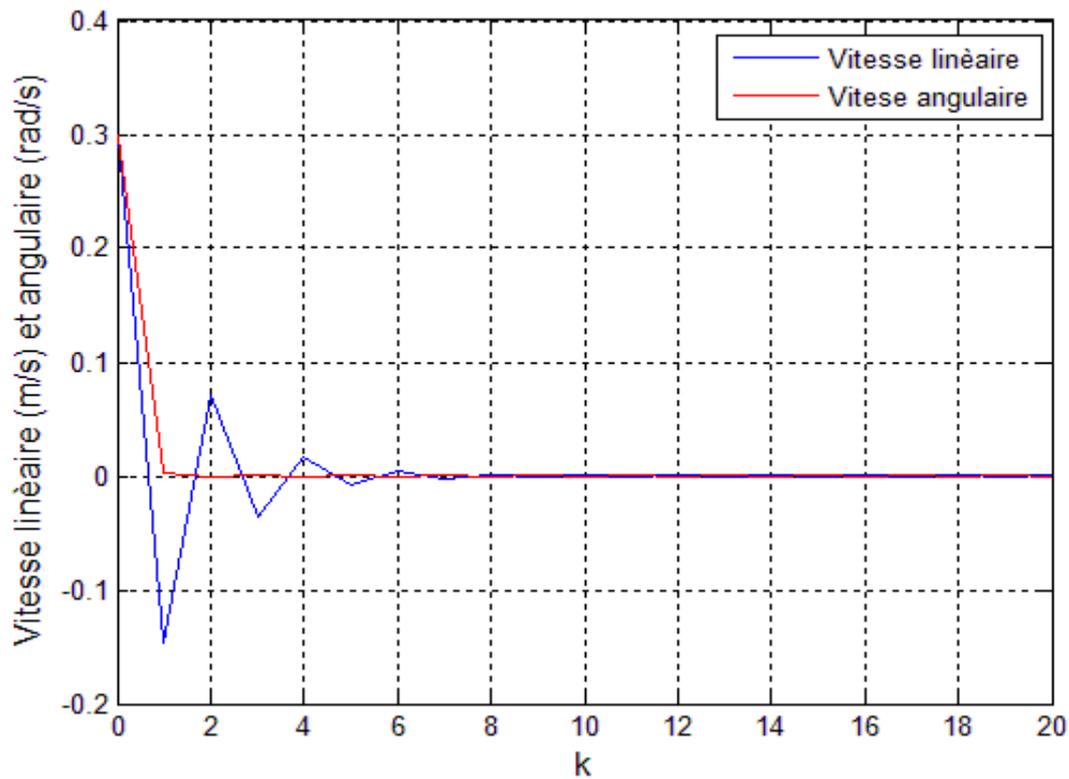


Figure 4-19 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

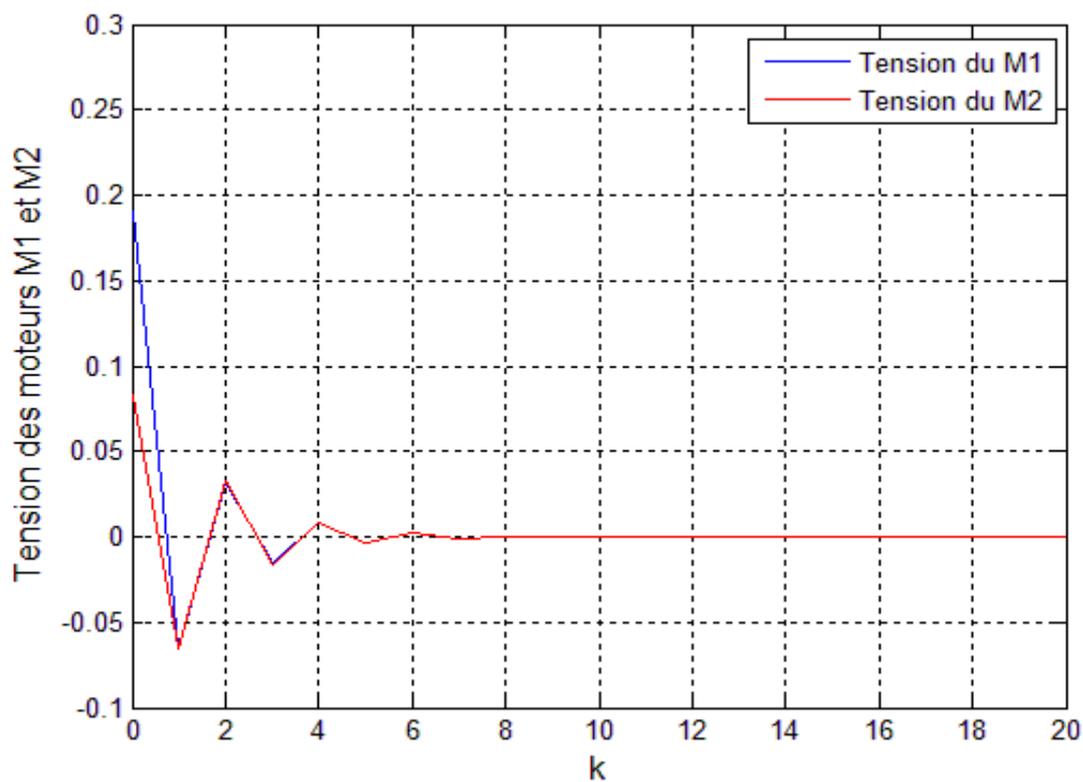


Figure 4-20 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

4.4.2 Deuxième cas : Horizon infini

a) Les états optimaux et la commande optimale

Les états optimaux sont tracés dans la figure (4-21) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-22).

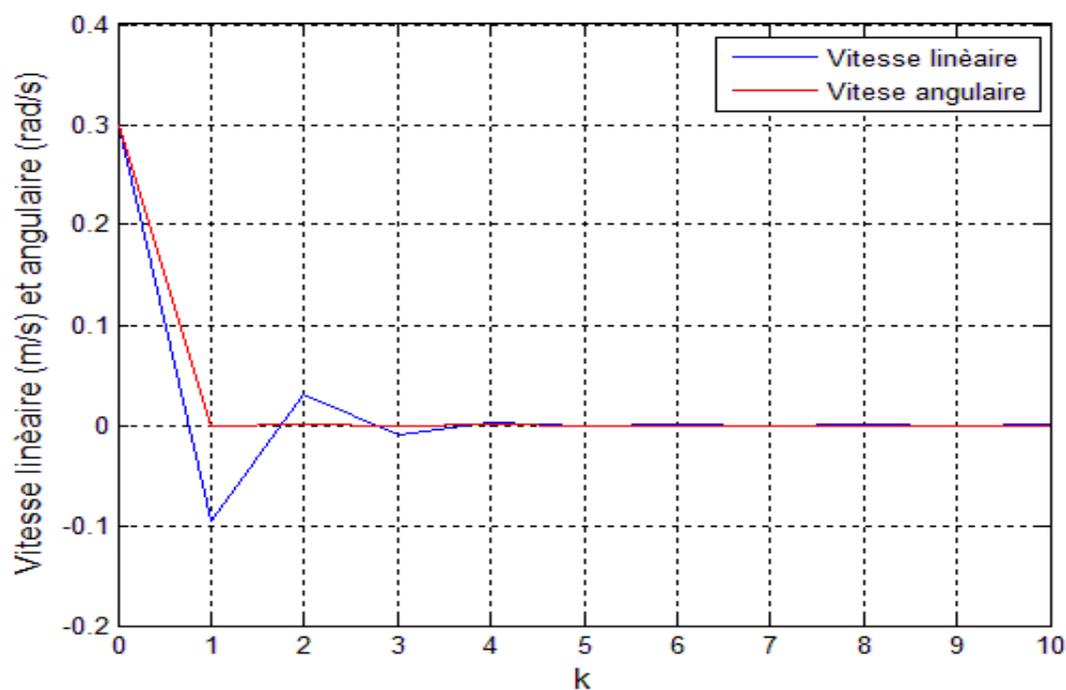


Figure 4-21 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire)

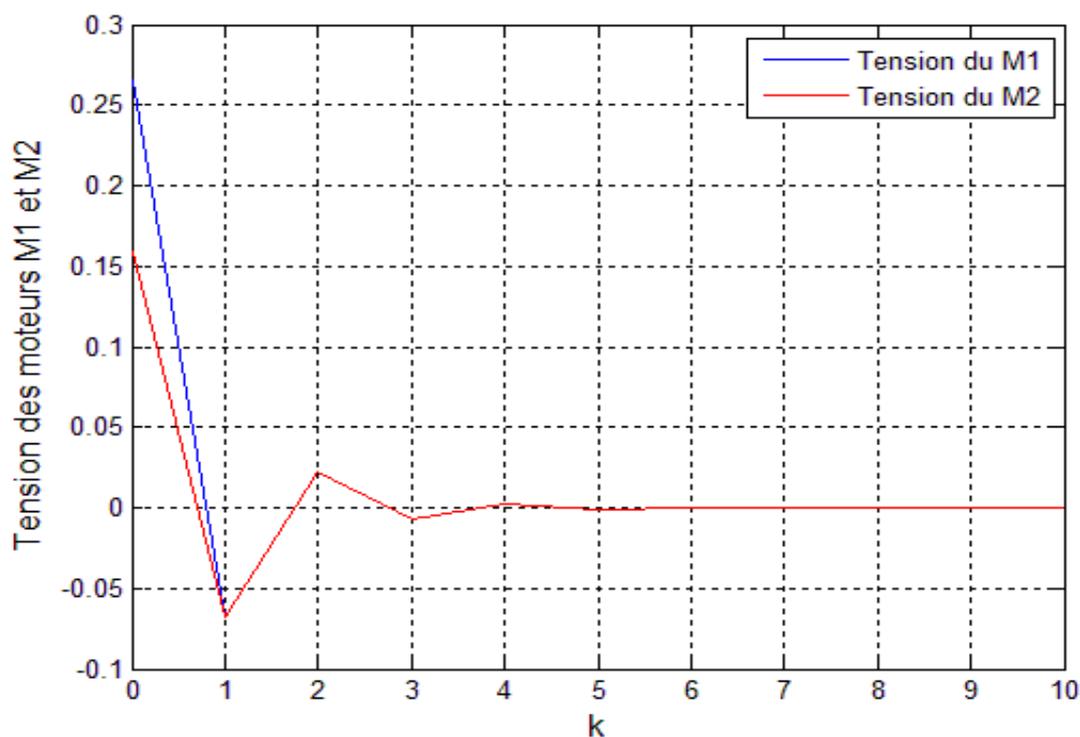


Figure 4-22 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

- b) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_1] = [Q] + [I])$ et $([R_1] = [R] + [I])$, où $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Les états optimaux sont tracés dans la figure (4-23) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-24).

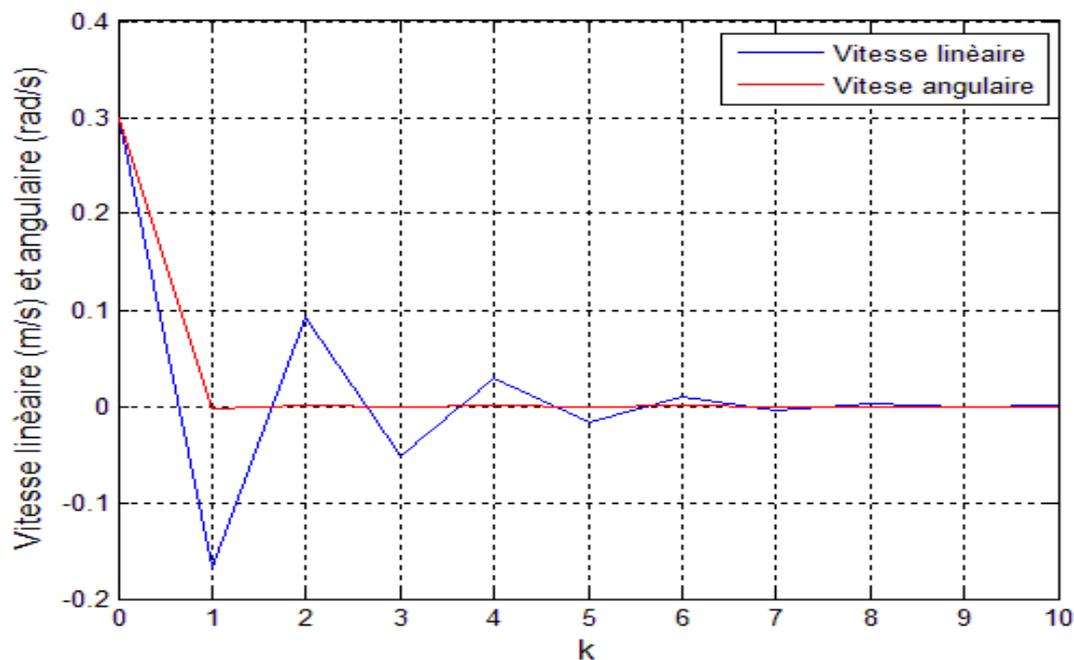


Figure 4-23 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

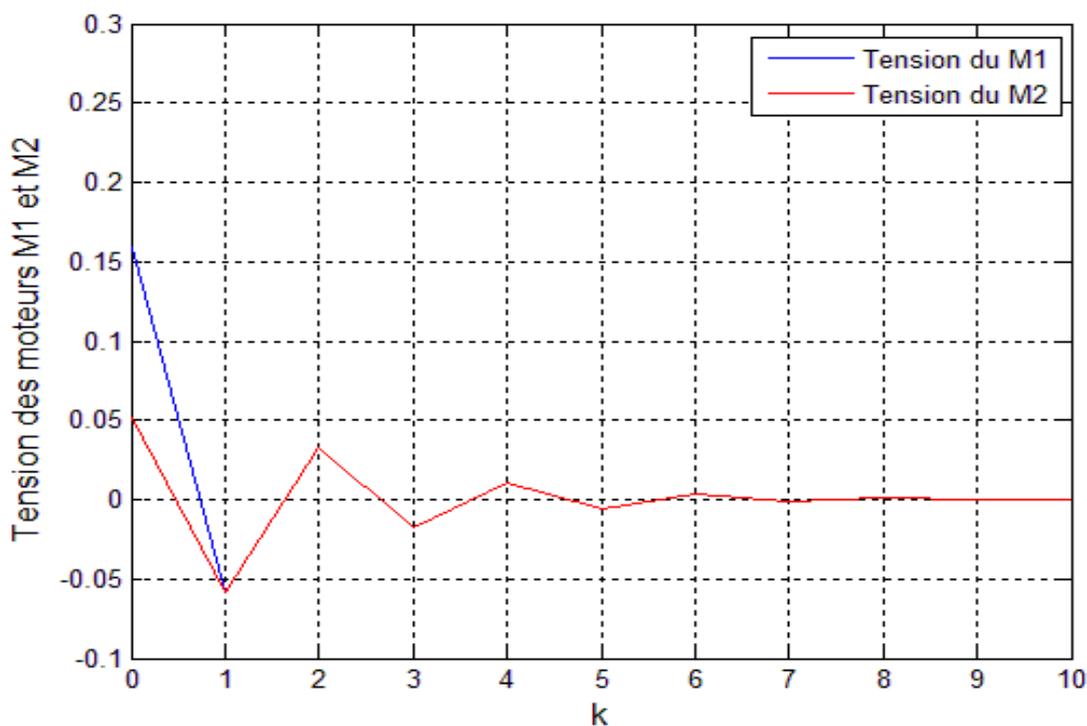


Figure 4-24 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

c) Les états optimaux et la commande optimale, pour $([Q_2] = [Q] + [\beta])$ et

$$([R_2] = [R] + [\beta]), \text{ où } [\beta] = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 \\ 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Les états optimaux sont tracés dans la figure (4-25) et la commande optimale est représentée sur la figure (4-26).

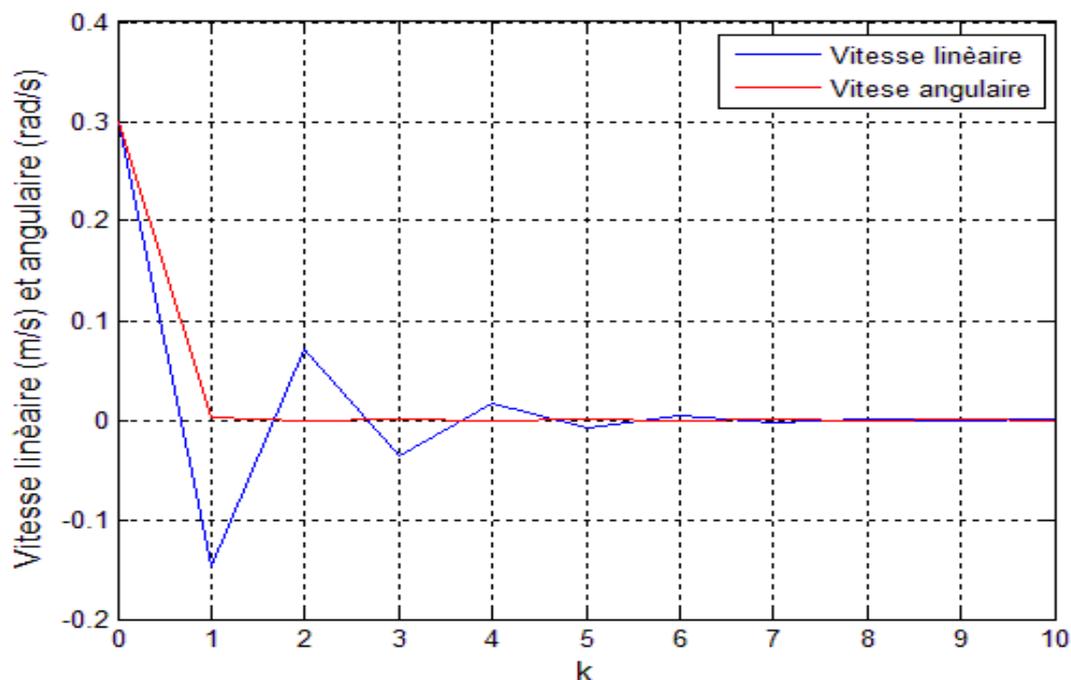


Figure 4-25 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

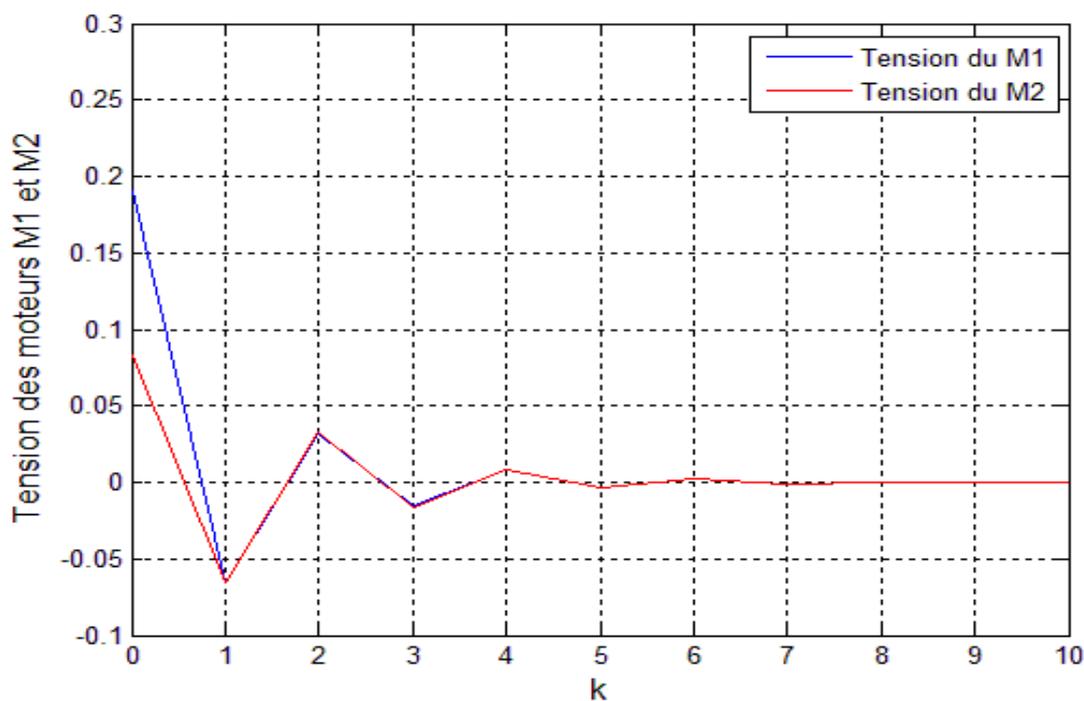


Figure 4-26 : Commande optimale ($u_1(k)$ = tension du moteur M1 de la roue droite et $u_2(k)$ = tension du moteur M2 de la roue gauche)

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté trois méthodes pour la solution de l'équation de Riccati discrète, une méthode itérative pour la solution de l'équation différentielle (DRE) et deux méthodes, la méthode de Schur et la méthode des vecteurs propres, pour la solution de l'équation algébrique (ARE). Ainsi nous avons élaboré deux algorithmes pour l'obtention des états optimaux et la commande optimale, dans les deux cas de structuration du temps, le cas de l'horizon fini et le cas de l'horizon infini. Enfin Nous représentons les coefficients de la matrice de Riccati, ainsi que les états optimaux et la commande optimale, puis à chaque fois nous changeons les valeurs des matrices de pondération $[Q]$ et $[R]$ par l'addition de la matrice unité $[I]$ et la matrice $[\beta]$ à chacune d'elle, qui a conduit à une augmentation du temps de la commande optimale. De là, nous concluons que les valeurs de $[Q]$ et $[R]$ doivent aussi petites que possible pour obtenir une commande optimale en un minimum de temps.

Conclusion Générale

Dans ce travail de recherche que nous avons accompli, on a essayé d'appliquer une commande optimale à régulateur linéaire quadratique (LQR), à temps discret, sur un robot mobile de type unicycle.

Nous avons commencé notre travail par l'étude de quelques types de capteurs utilisés en robotique mobile, qui sont nécessaires pour que le robot fasse son travail correctement, ces capteurs généralement classés en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même ou l'état de son environnement.

Pour appliquer la commande optimale sur le robot mobile, il est nécessaire d'avoir un modèle du robot. Pour cela nous avons étudié dans le deuxième chapitre les différents types de modélisation d'un robot mobile de type unicycle, qui sont le modèle cinématique et le modèle dynamique. Dans le modèle cinématique on s'est appuyé sur les contraintes cinématiques ou les contraintes sur les vitesses du robot, mais pour le modèle dynamique on s'est appuyé sur les lois de la dynamique, où nous avons utilisé deux méthodes, la méthode d'Euler-Lagrange et la méthode de Newton-Euler.

Dans le troisième chapitre nous avons fait une étude détaillée de la commande optimale LQR, en commençant par mentionner le problème de la commande optimale utilisant les trois méthodes fondamentales, ensuite nous avons traité cette commande LQR, qui formule que le système est linéaire et la commande quadratique et où la commande correspond à un retour d'état. Nous avons aussi étudié la commande LQR dans les deux cas de configuration du temps, commande à temps continu et commande à temps discret.

Pour résoudre les problèmes de minimisation sous contraintes classiques nous avons utilisé l'écriture Hamiltonienne pour le temps continu et l'écriture Lagrangienne pour le temps discret. La solution optimale de l'écriture Hamiltonienne est vérifiée par trois conditions qui sont la condition de l'état adjoint, la condition de transversalité et la condition de l'absence de contraintes sur la commande. Avec ces conditions on est arrivé à formuler l'équation différentielle de Riccati (DRE), de même pour l'écriture Lagrangienne la solution optimale vérifie ces trois équations à partir desquelles on arrive à l'équation Riccati discrète.

Pour obtenir la commande optimale et les états optimaux, il a fallu résoudre l'équation de Riccati, et c'est ce que nous avons réalisé au début du quatrième chapitre. Nous avons présenté trois méthodes pour la résolution de l'équation de Riccati discrète, la méthode itérative pour résoudre l'équation différentielle (DRE) dans l'horizon fini et deux autres

méthodes, la méthode de Schur et la méthode des vecteurs propres pour résoudre l'équation algébrique de Riccati (ARE), à l'horizon infini.

Deux algorithmes ont été élaborés pour l'obtention des états optimaux et la commande optimale. La commande optimale et les états optimaux sont résolus en utilisant le logiciel Matlab.

Les résultats des travaux de simulation obtenus sont les coefficients de la matrice de Riccati, les états optimaux et la commande optimale. Nous remarquons que les coefficients de la matrices de Riccati sont supérieurs ou égaux à zéro ($p_{ij}(k) \geq 0$) et $p_{12}(k) = p_{21}(k)$, cela montre que $p(k) = p^T(k)$ et $p(k) \geq 0$. Nous avons remarqué aussi que lorsqu'on change les valeurs des matrices de pondération $[Q]$ et $[R]$ par l'addition de la matrice unité $[I]$ ou d'une quelconque matrice $[\beta]$, on constate que la durée d'application du signal de commande augmente. De là, nous concluons que les valeurs de $[Q]$ et $[R]$ doivent être aussi petites que possible pour avoir un signal de commande optimal en un minimum d'itérations, c'est-à-dire en un temps relativement court de l'application de la commande.

Comme le choix des valeurs des matrices Q et R influent beaucoup sur les résultats trouvés, on pense dans des travaux futurs utiliser une méthode intelligente d'optimisation basée sur les essaims de particules (Particle Swarm Optimisation) pour améliorer ces travaux.

Bibliographie

- [1] A. Droniou, T. Quenolle, A. Schumacher, " *Filters LQR*". Télécom Paris Tech Parcours ROSE, 7 mars 2011
- [2] Abdelkader Merakeb, "*Optimisation multicritères en contrôle optimal : Application au véhicule électrique*". Thèse de Doctorat. Spécialité : mathématique. Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou. Soutenu le : 14/06/2011.
- [3] Alaa Dib. "*Commande non linéaire et asservissement visuel de robots autonomes*". Thèse de Doctorat spécialité : physique. Soutenu le : 21/10/2011.
- [4] Alain Giulieri – Claude A. Bozzo, "*Analyse des méthodes de résolution numérique de l'équation discrète de Riccati – application à l'opérateur de Riccati rapide*". Septième colloque sur le traitement du signal et ses applications, Nice du 28 Mai au 2 Juin 1979.
- [5] Alessandro De Luca and Giuseppe Oriolo, "*Modeling and control of nonholonomic mechanical systems*". Dipartimento di Informatica e Sistemistica Università degli Studi di Roma "La Sapienza" Via Eudossiana 18, 00184 Roma, Italy.
- [6] Anil Kunnappillil Madhusudhanan, Matteo Corno, Bram Bonsen and Edward Holweg, "*Solving Algebraic Riccati Equation Real Time for Integrated Vehicle Dynamics Control*". 2012 American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada June 27-June 29, 2012.
- [7] Belkhadria Khemisti, "*commande d'un robot mobile par réseaux de neurones artificiels*" Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de magister en électronique. Option : Robotique. Université El Hadj Lakhdar Batna.
- [8] Bernard BAYLE, "*Robotique mobile*". Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg Université Louis Pasteur. Année 2008–2009.
- [9] Cyril Drocourt, "*Localisation et modélisation de l'environnement d'un robot mobile par coopération de deux capteurs omnidirectionnels*". Thèse pour l'obtention du grade de Docteur de l'Université de technologie de Compiègne. Discipline : Robotique. Soutenu le : 22/02/2002.
- [10] David Filliat, "*Robotique Mobile*". École Nationale Supérieure de Techniques Avancées Paris Tech. Année 2011.
- [11] Desineni Subbaram Naidu, " *Optimal Control Systems*". Idaho State University Pocatello. Idaho, USA. June 2002.

-
- [12] Edouard Laroche, " *Commande Optimale* ". Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg. Anne 2009-2010.
- [13] Emmanuel Trélat, " *Commande Optimale* ". Université d'Orléans. Anne 2007-2008.
- [14] Giuseppe Oriole, " *Control of non holonomic systems* ". Dottorato di Ricerca in Ingegneria dei Sistemi, Dis, Università di Roma "Lasapienza".
- [15] Julien Beaudry, " *Conception et Contrôle d'un Robot Mobile à Vitesses Différentielles* ". Rapport de projet de fin d'études soumis comme condition partielle à l'obtention du diplôme de baccalauréat en ingénierie. Ecole Polytechnique de Montréal. Soutenu le : 05/12/2001.
- [16] Khenniche Ghania, " *Théorie et application du calcul des variations en commande optimale* ". Mémoire de Magister Présenté à l'Université 20 Août 55, Skikda Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingéniorat. Spécialité : Mathématiques. Soutenu le : 04/06/2007.
- [17] Laub, A.J, " *A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations* ".
- [18] Mariam Baroudi, " *Contrôle d'un bras robotique flexible* ". Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en ingénierie. Université du Québec. Année 2010.
- [19] Marie-José Aldon, " *Capteurs et méthodes pour la localisation des robots mobiles* ". Université de Montpellier II.
- [20] Mauro Eduardo Maya Mendez. " *Commande référencée capteur des robots non holonomes* ". Thèse pour obtenir le grade de Docteur en Sciences Spécialité Informatique Temps Réel, Automatique et Robotique. L'École Nationale Supérieure des Mines de Paris Sophia Antipolis. Soutenu le : 05/04/2007.
- [21] Michel Llibre, " *Trajectoires optimales* ". Institut supérieur de l'Aéronautique et de l'espace. Novembre 2010.
- [22] Mohamed Bilel Ben Slimen, " *Conception de lois de commande structurées (hiérarchisées, décentralisées) pour les chaînes de traction pilotées* ". Thèse de Doctorat. Discipline : Automatique. Ecole polytechnique de l'Université de Nantes. Soutenu le : 13/10/2011.
- [23] Nicholas Assimakis, " *Discrete Time Riccati Equation Recursive Multiple Steps Solutions* ". Department of Electronics Technological Educational Institute of Lamia, Greece . Année 2009.

-
- [24] Nicolas Morette, "*Contribution à la Navigation de robots mobiles : approche par modèle direct et commande prédictive*". Thèse pour obtenir le grade de : Docteur de l'université d'Orléans, Discipline : Robotique. Soutenue le : 18/12/2009.
- [25] Pierre Riedinger, "*Contribution à la commande des systèmes complexes*". Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Institut National Polytechnique de Lorraine. Spécialité : Automatique et Traitement du Signal. Présenté publiquement le 4 juin 2010.
- [26] Régis Grasse, "*Aide à la navigation pour les personnes handicapées : reconnaissance de trajets*". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Metz. Discipline : Automatique. Soutenue le: 05/10/2007.
- [27] Rémi Vial, "*Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways*". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Grenoble. Spécialité : Génie électrique. Soutenue le: 26/01/2012.
- [28] Rich Chi Ooi, "*Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot*". Faculty of Engineering and Mathematical Sciences, University of Western Australia. November 2003
- [29] R. Fierro* and F. L. Lewis, "*Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping Kinematics into Dynamics*". Automation and Robotics Research Institute The University of Texas. September 20, 1996.
- [30] Sabiha Amin Wadoo, "*Feedback Control and Nonlinear Controllability of Nonholonomic Systems*". Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters of Science in Electrical Engineering. Jan 9, 2003.
- [31] Stéphane Lens, "*Locomotion d'un robot mobile*". Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade d'Ingénieur Civil Informaticien Année académique 2007-2008. Université de Liège.
- [32] Vladimir Kucera, "*The Discrete Riccati Equation of Optimal Control*". Ústav teorie informace a automatizace ČSA V (Institute of Information Theory and Automation — Czechoslovak Academy of Sciences), Vyšehradská 49, Praha 2. Année 1972.

Annexe

a) Les paramètres du robot

$r = 0,051$ (m); Rayon de roue

$m_R = 0,03$ (kg); Masse de roue

$m_r = 1,13$ (kg) ; la masse de corps du robot

$I_R = 0.000039$ (kg.m²); inertie de la roue

$I_r = 0,0041$ (kg.m²); inertie de corps du robot

$I_{Ry} = 0.00003$ (kg.m²); inertie de la roue par rapport au l'axe y

$L = 0,15$ (m); Longueur au centre de la masse de corps du robot

$$m = \left(m_r + 2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) = 1.213068 \text{ kg}$$

$$I = \left(I_r + 2I_R + 2L^2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) = 0.006047 \text{ kg.m}^2$$

b) Les paramètres des moteurs

$k_m = 0.06123$ (Nm / A); Constante du moteur

$k_e = 0.06087$ (Vs / rad); constant EMF Retour

$R = 3$ (ohms); Résistance Terminal nominale

V_{ad} : La tension appliquée au moteur M1 pour commander la roue droite

V_{ag} : La tension appliquée au moteur M2 pour commander la roue gauche