

**UNIVERSITE HADJ LAKHDAR- BATNA**

**Faculté de Technologie**

**Département de Génie Industriel**

**Laboratoire d'Automatique et de Productique**

**MEMOIRE**

*Présenté au*

**Département de Génie Industriel**

En vue de l'obtention du diplôme de

**MAGISTER**

*Spécialité: Génie Industriel et Productique*

Présenté Par

**Messaoudi Miloud**

Ingénieur en génie industriel

**Thème :**

**Analyse séquentielle des décisions d'investissement**

Soutenue devant le jury :

<b>M.D. MOUSS</b>	Professeur	Université de Batna	Président
<b>N.K. MOUSS</b>	M.C.A	Université de Batna	Rapporteur
<b>A . YAHA</b>	Professeur	Université – Alger 3	Examineur
<b>A. MECHENENE</b>	M.C.A	Université de Batna	Examineur
<b>A. KAAKIT</b>	M.A	Université de Batna	Co-encadreur

# Analyse séquentielle des décisions d'investissement

MILoud MESSAOUDI

2013



## *Dédicace*

*Jamais cette thèse n'aurait vu le jour,  
sans le soutien et l'affection  
que j'ai pu trouver au sein de ma famille ...*

# *Remerciements*

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon responsable de mémoire le docteur N.K. MOUSS et au co-encadreur Monsieur A. Kaanit, pour leur disponibilité, pour l'aide précieuse et les conseils qu'ils m'ont prodigués et pour la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de sa réalisation.*

*Je tiens à remercier vivement Monsieur T.BENTERCIA, pour son aide et son accompagnement tout au long de ce travail.*

*J'adresse mes remerciements à Messieurs les membres de jury, d'avoir accepté de rapporter sur ce travail et pour avoir bien voulu consacrer de leur temps à l'évaluer.*

*Je remercie enfin tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu par leur amitié.*

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorie de la décision et décision d'investissement</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Théorie de la décision . . . . .	3
1.3 Processus de décision en entreprise . . . . .	4
1.4 Aide à la décision . . . . .	5
1.4.1 Système Interactif d'Aide à la Décision . . . . .	6
1.4.2 Structure d'un système interactif d'aide à la décision . . . . .	7
1.4.3 Systèmes experts . . . . .	9
1.5 Décision d'investissement . . . . .	10
1.5.1 Introduction . . . . .	10
1.5.2 Définition de l'investissement . . . . .	11
1.5.3 Critères d'évaluation des investissement en avenir certain. . . . .	11
1.5.3.1 Valeur actuelle nette (VAN) . . . . .	11
1.5.3.2 Indice de profitabilité (IP) . . . . .	12
1.5.3.3 Délai de récupération du capital investi (DR) . . . . .	13
1.5.3.4 Taux interne de rentabilité (TIR) . . . . .	13
1.5.4 Critères d'évaluation des investissements en avenir aléatoire. . .	13
1.5.5 Arbres de décision . . . . .	14
1.5.5.1 Structure de l'arbre de décision . . . . .	14
1.5.6 Critères d'évaluation des investissements en avenir incertain. . .	15
1.5.6.1 Critère de Laplace-bayes . . . . .	15
1.5.6.2 Critère de Wald . . . . .	15

1.5.6.3	Critère du Maximax . . . . .	15
1.5.6.4	Critère de Savage ou du Minimax regret . . . . .	16
1.5.6.5	Critère d'Hurwitz . . . . .	16
1.6	Conclusion . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Logique floue</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Sous-ensembles flous . . . . .	17
2.2.1	Opérations sur les sous-ensembles flous . . . . .	18
2.2.2	Caractéristiques d'un sous-ensemble flou . . . . .	18
2.2.2.1	<i>Nombres flous</i> . . . . .	19
2.2.2.2	<i>coupes <math>-\alpha</math></i> . . . . .	21
2.3	Principe d'extension . . . . .	22
2.3.1	Arithmétique Floue . . . . .	22
2.3.2	Intervalle Arithmétique . . . . .	24
2.4	Comparaison des nombres flous . . . . .	24
2.5	Probabilités floues . . . . .	24
2.6	Variables linguistiques . . . . .	25
2.7	Système d'Inférence Floue . . . . .	26
2.7.1	Représentation floue des variables d'entrée . . . . .	27
2.7.2	Représentation floue des variables de sortie . . . . .	27
2.7.3	Définition des règles floues . . . . .	28
2.7.4	Inférence à partir de règles floues . . . . .	28
2.7.4.1	<i>Inférence avec une seule règle</i> . . . . .	29
2.7.4.2	<i>Inférence avec plusieurs règles (Mamdani)</i> . . . . .	29
2.8	Conclusion . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Arbres de Décision</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Data mining (fouilles de données) . . . . .	31
3.3	Arbres de décision . . . . .	31
3.3.1	Historique . . . . .	31
3.3.2	Définition . . . . .	32
3.4	Construction des arbres de décision . . . . .	32
3.5	Algorithmes de construction des arbres de décision . . . . .	33
3.5.1	Algorithme ID3 (Induction of Decision Tree) : . . . . .	33
3.5.2	Algorithme C4.5 . . . . .	35
3.5.3	Algorithme CART . . . . .	35
3.5.4	Algorithme CHAID . . . . .	36

3.6	Exemple de construction d'un arbre de décision par ID3 . . . . .	37
3.7	Critères d'arrêt de construction d'un arbre de décision . . . . .	39
3.8	Élagage . . . . .	39
3.9	Pré-élagage . . . . .	40
3.10	Post-élagage . . . . .	40
3.11	Arbres de décision flous . . . . .	40
3.11.1	Algorithme général de construction d'un arbre de décision flou	42
3.11.2	Mesure de discrimination . . . . .	43
3.11.3	Stratégie de partitionnement . . . . .	44
3.11.4	Critère d'arrêt . . . . .	45
3.11.5	Classification . . . . .	45
3.12	Conclusion . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Approche proposée pour un choix d'investissement par la logique floue</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Bases théoriques de l'approche . . . . .	48
4.2.1	Approche basée sur l'espérance mathématique floue . . . . .	48
4.2.2	Approche basée sur l'entropie modifiée floue . . . . .	50
4.2.3	Algorithmes génétiques . . . . .	50
4.3	Cas étudié . . . . .	52
4.3.1	Données . . . . .	52
4.3.2	Fuzzification des données . . . . .	53
4.3.3	Résultats . . . . .	55
4.4	Exemple . . . . .	57
4.4.1	Approche classique . . . . .	58
4.4.2	Approche classique floue . . . . .	59
4.5	Conclusion . . . . .	61
	<b>Conclusion générale</b>	<b>62</b>
	<b>Annexes</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Programmation MATLAB</b>	<b>65</b>
A.1	Programme général de calcul de la VAN et Entropie floues (cas de la cimenterie) . . . . .	65
A.2	Programme général de calcul de la VAN et Entropie floues (cas de l'exemple) . . . . .	68
A.3	Sous-programme entropie . . . . .	72

A.4	Sous-programme probabilité . . . . .	73
A.5	Exemple de programme pour tracer les graphes (Cash-flow) . . . . .	73
	<b>Bibliographie</b>	<b>76</b>

# Table des figures

1.1	<i>Structure d'un SIAD basé sur la connaissance [16]. . . . .</i>	7
1.2	<i>Intégration de systèmes experts attachés aux SIAD [16]. . . . .</i>	10
1.3	<i>Intégration d'un système expert dans un SIAD , séparé [16]. . . . .</i>	10
1.4	<i>Actualisation des flux [15]. . . . .</i>	11
1.5	<i>Structure d'une arbre de décision [15]. . . . .</i>	14
2.1	<i>Caractéristiques d'un sous-ensemble flou. . . . .</i>	19
2.2	<i>Nombre flou triangulaire. . . . .</i>	19
2.3	<i>Nombre flou trapézoïdal. . . . .</i>	20
2.4	<i>Nombre flou d'allure triangulaire <math>\tilde{P}</math>. . . . .</i>	20
2.5	<i>Extension d'une fonction <math>\phi</math>. . . . .</i>	22
2.6	<i>Fonction d'appartenance de la variable taille. . . . .</i>	26
2.7	<i>Structure d'un SIF [3]. . . . .</i>	27
3.1	<i>Évolution de l'entropie [25]. . . . .</i>	35
3.2	<i>Tableau du calcul. . . . .</i>	36
3.3	<i>Arbre de décision final pour la base météo. . . . .</i>	39
3.4	<i>Arbre de décision déterminant si un être humain est petit ou grand. . . . .</i>	41
3.5	<i>Fonction caractéristique de l'ensemble grand pour une femme. . . . .</i>	42
3.6	<i>L'attribut taille pour une femme. . . . .</i>	42
4.1	<i>Mutation et croisement. . . . .</i>	51
4.2	<i>Arbre de décision. Cas étudié. . . . .</i>	53
4.3	<i>Taux d'actualisation flou. . . . .</i>	54
4.4	<i>Représentation floue des probabilités. . . . .</i>	54
4.5	<i>Représentation floue des cash-flows. . . . .</i>	55
4.6	<i>Représentation floue des VAN. . . . .</i>	55
4.7	<i>Représentation floue de l'approche classique. . . . .</i>	56
4.8	<i>Représentation floue d'entropie modifié. . . . .</i>	56

4.9	<i>Arbre de décision. Exemple.</i>	58
4.10	<i>Comparaison par l'approche classique floue.</i>	60
4.11	<i>Résultat par l'approche entropie floue.</i>	61

# Liste des tableaux

1.1	<i>Décision dans l'entreprise [31]. . . . .</i>	5
2.1	<i>Opérations sur les sous-ensembles flous [1]. . . . .</i>	18
3.1	<i>Base Météo. . . . .</i>	37
3.2	<i>Sous-ensemble associé à la valeur ensoleillé de Ciel. . . . .</i>	38
3.3	<i>Sous-ensemble associé à la valeur couvert de Ciel. . . . .</i>	38
3.4	<i>Sous-ensemble associé à la valeur pluvieux de Ciel. . . . .</i>	38
4.1	<i>Scénarii d'investissement. . . . .</i>	52
4.2	<i>Estimation des cash-flow. . . . .</i>	53

# Introduction générale

Dans un contexte concurrentiel fort, les entreprises cherchent en permanence à améliorer leur compétitivité. Celle-ci repose autant sur la qualité des produits ou des services que sur les coûts et les délais de leur prestation. Il est indispensable de pouvoir répondre rapidement aux évolutions du marché. Cette dynamique remarquable du contexte économique semble nécessiter de la part des acteurs d'une organisation une capacité d'adaptation et de réactivité toujours plus grande.

Par ailleurs, la fin du vingtième siècle a été marquée par le passage à une ère nouvelle, l'ère de l'information. Ce passage s'est manifesté à travers l'émergence de technologies informationnelles. Ces dernières, issues du "traitement" de l'information ont déjà profondément transformé les modes de production des biens et des services. Ces mutations profondes liées à la disponibilité et au partage de bases d'informations toujours plus importantes ont eu des conséquences sur le monde de l'entreprise. Les managers doivent prendre et assumer des décisions le plus rapidement possible en prenant en considération de nombreux points de vue.

Ceci a conduit à l'adoption de méthodes quantitatives favorisant la prise de décision correspondant au niveau de toute les fonctions nodales de l'entreprise, compte-tenu de l'efficacité prouvée des techniques quantitatives comme moyen d'amélioration de la performance des entreprises et aidant le manager dans la prise de décisions objectives et rationnelles.

Les méthodes quantitatives englobent l'ensemble des outils, méthodes mathématiques et statistiques ainsi que les techniques informatiques préférant la méthode scientifique dans la prise de décision, loin de tout essai arbitraire et erreur.

L'une de ces méthodes que nous présentons dans ce travail, est *la théorie des ensembles flous* ou *la logique floue*. Ses principes trouvent leur utilité dans plusieurs domaines : (planification, gestion de contraintes (en particulier temporelles), l'aide à la décision (par exemple la décision multicritère), analyse de données floues, systèmes à base de connaissances, traitement d'images [1],...etc).

L'objectif de ce travail est de proposer une solution au problématique concernant le

choix des investissements au futur incertain, en utilisant la théorie des ensembles flous et à l'aide des algorithmes génétiques. Notre idée repose sur l'hypothèse qu'au lieu de prendre des grandeurs incertaines estimées dans le calcul de la valeur actuelle nette (VAN), on transforme ces grandeurs en appliquant les définitions de la logique floue, à des intervalles flous.

Pour cela nous avons traité ce problème par deux approches.

La première est basée sur l'approche classique (espérance mathématique de la VAN) en supposant que toutes les grandeurs sont floues, puis par une représentation floue des résultats en sélectionnant le projet qui maximise l'espérance mathématique. Cette approche a été inspirée des travaux de C.KAHRAMAN [9] et de M. SHAHRIARI [5].

Notre contribution est, donc d'introduire l'outil des algorithmes génétiques a fin de calculer la valeur actuelle nette (VAN) floue dans le contexte d'un arbre de décision, par la résolution d'un système d'optimisation non linéaire qui résulte de la formulation du problème par la théorie des ensembles flous.

Dans la deuxième approche, nous avons proposé une technique de sélection des projets par l'introduction de la notion de l'entropie floue au lieu de calculer l'espérance mathématique.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

- Dans le premier chapitre, nous traitons deux parties. La première constitue le contexte de ce travail, parce que nous proposons un outil d'aide à la décision. Dans la deuxième partie, nous évoquons les différentes méthodes de calcul utilisées pour choisir entre plusieurs investissements.
- Dans le deuxième chapitre, nous présentons les principes de la théorie des ensembles flous et les différentes propriétés utilisées dans le domaine d'aide à la décision.
- Nous présentons dans le troisième chapitre, des notions de base sur les arbres de régression, où on met le point sur la notion de l'entropie comme un outil de sélection et de classement, à fin de l'appliquer dans notre approche.
- Aux derniers chapitres, nous présentons la formulation mathématique de l'approche par la logique floue. Nous traitons deux exemples. Le premier est un exemple pédagogique relatif à la cimenterie de TEBESSA, le second est tiré de la littérature. Puis nous analysons les résultats.

# Théorie de la décision et décision d'investissement

## 1.1 Introduction

La théorie de décision vise à trouver un cadre de référence pour les théories économiques et les modèles de gestion des entreprises publiques ou privées [32]. Comment décrire le comportement d'agents économiques ? Quelle décision prendre dans le cadre d'une gestion rationnelle des ressources et des moyens de production ? Comment investir dans des actifs financiers dont les rendements sont incertains ? Comment inférer des paramètres d'une distribution de probabilités à partir d'un échantillon ? C'est le besoin d'une théorie du comportement rationnel pour les modèles de l'économie et de la gestion qui a été la raison de son succès et des développements qui continuent à voir le jour.

## 1.2 Théorie de la décision

C'est une théorie de mathématiques appliqués ayant pour objet la prise de décision en univers risqué. Un des objectifs de la théorie de la décision est de donner les moyens de construire des descriptions quantifiées des problèmes ainsi que des critères, qui permettent d'y apporter des solutions. Il s'agit donc de rationaliser ces problèmes, ces critères, et donc faire des choix. Cependant, quelque soit le domaine, le ou les agents, doivent faire face à l'incertitude des conséquences de leurs choix. La théorie de la décision se construit de manière à pouvoir intégrer différents types d'incertitude, et nous aurons donc une théorie qui pourra s'appliquer à des agents situés dans des environnements de natures variées. Ainsi, dans la théorie économique, les modèles de gestion font appel à la théorie de la décision dans les situations suivantes :

- Les choix économiques dans les entreprises : c'est un calcul économique qui permet

le choix de facteurs de productions en fonction de leurs coûts, choix de prix de vente, l'évaluation des salaires...etc. Cette théorie s'est étendue grâce à la théorie économique, aux méthodes économétriques et aux résultats de la recherche opérationnelle.

- L'analyse des risques, nécessaire à certains problèmes de prise de décision. C'est l'objet principal de la théorie de la décision individuelle.
- L'étude des situations de conflits d'intérêts, d'origine militaire, est un des moteurs de la recherche opérationnel. C'est un objet de la Théorie des Jeux, qui a vite trouvé sa place dans la théorie économique car elle permet de modéliser le comportement d'agents rationnels ayant des intérêts (le plus souvent) contradictoires.

### **1.3 Processus de décision en entreprise**

Que ce soit une stratégie ou une gestion courante, l'entreprise doit continuellement faire des choix en fonction de ses objectifs parmi plusieurs possibilités d'action.

Les décisions sont classées en fonction de leur horizon temporel (court, moyen ou long terme), de leur degré d'incertitude (avenir certain, incertain ou aléatoire), de leur champ d'application (l'entreprise dans son ensemble, une fonction ou un service) et de leur degré de structuration d'un problème (pas forcément facilement identifiable, ce qui suppose une analyse préalable permettant de structurer le problème avant d'envisager des solutions possibles). En fonction de ces caractéristiques de décision, il a pu être défini trois niveaux de décisions : les décisions stratégiques, les décisions administratives et les décisions opérationnelles qui sont classées par ordre décroissant d'importance dans le tableau (1.1).

Les décisions stratégiques engagent l'avenir de l'entreprise en choisissant les objectifs de politique générale, les activités, les marchés, les manœuvres et les armes stratégiques.

Les décisions administratives ou tactiques en cohérence avec les décisions stratégiques, concernent un type de structure de l'entreprise, l'organisation, l'acquisition et le développement de ses ressources. Ces décisions ont une forte implication pour l'entreprise mais moindre que les décisions stratégiques.

Les décisions opérationnelles rendent opérationnelles les options stratégiques et les choix d'organisation comme la détermination des plannings et des niveaux de production, la définition des prix, l'élaboration des politiques de marketing... Ces décisions sont plus fréquentes, plus répétitives et moins risquées du fait de leurs implications plus localisées que les décisions stratégiques et administratives.

Il existe différentes phases dans un processus de prise de décisions. Pour prendre une décision, on doit faire appel à un processus de résolution de problème qui comporte

Caractéristiques des décisions	Décisions stratégiques	Décisions administratives	Décisions opérationnelles
Horizon temporel	Long terme	Moyen terme	Court terme
Fréquence et degré de répétitivité	Décisions uniques	Fréquence faible, décisions peu répétitives	Décisions très nombreuses et répétitives
Degré d'incertitude de l'information	Très élevé	Élevé	Faible
Degré de réversibilité	Quasi nul	Faible	Élevé
Niveau de décision	Direction générale	Directions fonctionnelles et opérationnelles	Décisions décentralisées (fonction, service)

Tableau 1.1 – *Décision dans l'entreprise* [31].

au moins 4 étapes importante qui sont :

- La définition du problème : c'est à dire que l'on détecte une différence entre ce qui existe et ce qui devrait exister.
- L'évocation de solutions au problème : on répertorie différentes solutions possibles afin d'évaluer ensuite chacune d'entre elles.
- Le choix d'une solution : on évalue chacune des solutions en fonction des objectifs du décideur.
- La planification des différentes actions : mise en œuvre de la solution retenue.

Ce processus de prise de décisions est relativement complexe car des paramètres externes ou internes peuvent le faire varier, tels que la qualité de l'information disponible, la personnalité des décideurs et/ou le fonctionnement de l'organisation.

## 1.4 Aide à la décision

L'aide à la décision est définie comme étant « l'activité de celui (homme d'étude) qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, cherche à obtenir des éléments de réponses aux questions que pose un intervenant (décideur) dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à prescrire, à recommander ou simplement à favoriser un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service duquel cet intervenant se trouve placé, d'autre part » [16]. Cette définition traduit le fait qu'on ne "résout" pas un problème, on aide le décideur à construire une représentation pertinente de la situation.

En général, il n'existe pas de solution optimale qui soit la meilleure pour tous les

critères et tous les acteurs. La notion de solution optimale n'a pas nécessairement de sens. De ce point de vue, l'aide à la décision est loin du *problem solving* et du calcul de la meilleure utilité de la Recherche Opérationnelle. Dans cette définition, on voit clairement apparaître les notions d'explication de la logique décisionnelle et de recommandation.

L'aide à la décision utilise des techniques et des méthodologies issues du domaine des mathématiques appliquées telles que l'optimisation, les statistiques, la théorie de la décision ainsi que des théories de domaines moins formelles telles que l'analyse des organisations et les sciences cognitives. Bien que revêtant un caractère moins normatif que la théorie de la décision, l'aide à la décision est considérée comme une science prenant appui sur trois postulats principaux [16] :

- Postulat de la réalité du premier ordre : les principaux aspects de la réalité sur lesquels l'aide à la décision prend appui se rapportent à des objets de connaissances, objets qui peuvent être regardés comme des données et comme suffisamment stables.
- Postulat du décideur : toute décision est le fait d'un décideur, acteur bien identifié, doté de pleins pouvoirs, agissant en vertu d'un système de préférences rationnel au sens d'un certain corps d'axiomes excluant l'ambiguïté et l'incomparabilité, que l'aide à la décision n'a pas pour objet de modifier.
- Postulat de l'optimum : dans toute situation devant entraîner une prise de décision, il existe au moins une décision optimale, décision pour laquelle, il est possible d'établir objectivement qu'il n'en existe pas de strictement meilleure et ceci demeurant neutre vis-à-vis du processus de décision.

### 1.4.1 Système Interactif d'Aide à la Décision

L'expression SIAD désigne des systèmes automatisés qui assistent le décideur, sans le remplacer, au cours du processus de décisions. Ils permettent au décideur d'avoir accès à de nombreuses connaissances, de les synthétiser et de tester différents choix possibles. Les SIAD sont des outils informatiques d'aide à la décision. Ils se superposent aux systèmes informatiques traditionnels pour faire apparaître les données stratégiques utiles à l'entreprise. Ils doivent donc résumer et modéliser des chiffres et des données significatives. Les tableurs sont à cet effet des outils informatiques d'aide à la décision. Il existe cependant des SIAD plus modernes qui, associés à une base de données, peuvent traiter beaucoup plus de variables et tester les différents choix possibles. Un SIAD est généralement caractérisé par quatre éléments :

- Sa technologie : elle est fondée sur un accès flexible des réseaux de communication et l'utilisation de micro-ordinateurs. Le processus de développement du système est évolutif et requiert une implication intense de l'utilisateur final.

- Le type de décisions à traiter : les bénéfices du SIAD sont maxima lorsque les décisions sont répétitives, lorsque les données à consulter et à traiter sont peu nombreuses, lorsque le problème est complexe et les compétences requises diverses.
- Le langage : le langage de communication du SIAD est celui dit de quatrième génération de type non procédural, c'est à dire que l'utilisateur exprime à l'aide de mots clés ce qu'il souhaite obtenir.
- La convivialité : celle-ci est déterminée par l'interactivité, la puissance, l'accessibilité et la flexibilité du SIAD.

### 1.4.2 Structure d'un système interactif d'aide à la décision

Il n'existe pas d'architecture standard pour un SIAD. Chaque auteur reprend sous le terme de SIAD un ensemble plus ou moins étendu de composants. En effet, plusieurs architectures pour la conception de SIAD ont été proposées. Dans la représentation suivante, une architecture générale est faite de cinq parties distinctes : le système de gestion de base de données, le système de gestion de base de modèles, le système de gestion de base de connaissances (moteur de connaissances), l'interface utilisateur et les utilisateurs (figure 1.1).

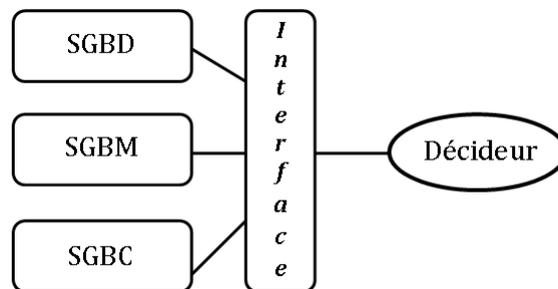


FIGURE 1.1 – Structure d'un SIAD basé sur la connaissance [16].

#### ***Système de gestion et de génération de dialogue (interface utilisateur) :***

C'est un élément clé des fonctionnalités du système global. Il constitue l'interface entre l'utilisateur et le reste du système. Par l'intermédiaire des interfaces gérées par ce module, le décideur accède aux données et aux fonctions de calcul, et le système utilise le même vecteur pour lui communiquer le résultat des manipulations qu'il a effectuées. Les échanges sont d'autant plus favorisés que les représentations des résultats (tout comme le mode de questionnement du système) correspondent aux représentations mentales du décideur. Ainsi, le décideur peut exercer son contrôle et effectuer sa recherche heuristique dans de bonnes conditions.

***Système Gestionnaire de Base de Données (SGBD) :***

Le module « Base de données » assure la fonction de mémoire ; il stocke non seulement les données, de façon permanente ou temporaire, mais il gère également l'enregistrement de données volatiles ainsi que l'effacement de ces données selon le souhait de l'utilisateur. Les données volatiles correspondent aux résultats obtenus au cours de traitements des données. Les données permanentes sont les statistiques ou autres données qui décrivent la situation courante et passée. Parmi ces données, il peut aussi y avoir des estimations concernant l'évolution de certains paramètres environnementaux.

***Système Gestionnaire de Base de Modèles (SGBM) :***

Le module « Modèle de données » contient l'ensemble des modèles et des procédures de calcul utilisés dans les différents traitements standards des données mis à disposition de l'utilisateur. Il peut s'agir d'outils de programmation mathématiques, de modèles de prédiction et de simulation, de modèles financiers et de calcul standards (d'indices et d'indicateurs par exemple) et de procédures de représentation des données. Si les procédures de représentation intègrent une dimension spatiale (cartes géographiques, plan d'usine par exemple) alors on est face à un «*Système Spatial d'Aide à la Décision*».

***Système de Gestion de Base de Connaissances (SGBC ou moteur de connaissances) :***

Il remplit les tâches relatives à la reconnaissance de problèmes et à la génération de solutions finales ou intermédiaires aussi bien que des fonctions relatives à la gestion du processus de résolution de problèmes. Les connaissances qui sont nécessaires pour résoudre un problème ou apporter une aide à la décision sont de deux catégories : (1) Les connaissances de domaine servent à construire une représentation du système qui sera utilisée pour résoudre un problème ou aider à la décision. La modélisation d'un système, processus impliquant experts du domaine et cognitivistes, doit aboutir à un résultat cohérent, ayant un minimum de complétude et qui soit pertinent pour étudier les problèmes abordés. (2) Les connaissances de résolution sont faites de savoirs, de procédures, de lois et de théories qui permettent à partir des connaissances de domaine de trouver une solution ou d'apporter des éléments d'aide à la décision.

***Un utilisateur :***

Il fait partie intégrante du processus de résolution de problèmes.

### 1.4.3 Systèmes experts

Les systèmes experts sont des programmes capables de simuler un raisonnement humain dans un contexte de rationalité limitée. Dans un premier temps, le système acquiert les connaissances de l'expert humain et les stocke au sein d'une base de connaissances. Dans un second temps, lors de l'utilisation du système, le décideur présente au système le problème à résoudre.

L'intérêt d'utiliser des systèmes experts réside dans trois avantages par rapport à l'expert humain [31] :

- le système ne perd jamais de connaissances ;
- le système peut facilement être reproduit ;
- la capacité cognitive du système expert est quasiment illimitée et permet de résoudre des problèmes à moindre coût.

Il est maintenant classique de chercher parmi les outils de l'intelligence artificielle des idées pour améliorer les performances des SIAD. Beaucoup de systèmes experts furent explicitement placés par leurs concepteurs sous le signe de *l'aide à la décision*. D'autres, sont conçus comme le prolongement des techniques de *la décision bayésienne* [16].

Ce chevauchement a conduit des auteurs à suggérer deux modes fondamentaux d'intégration des systèmes experts dans les SIAD qui sont : Intégration des systèmes experts dans les composants du SIAD et Intégration d'un système expert comme un composant séparé [16].

1. Dans le premier mode, l'incorporation des systèmes experts vise à enrichir la fonction des composants particuliers du SIAD. Cette intégration particulière permet aux utilisateurs de réaliser des requêtes de haut niveau telles que des interrogations de type «Comment ?» et «Pourquoi ?» (figure 1.2) .
2. Dans le second modèle, un système expert est ajouté au SIAD initial. Le système expert complète le SIAD dans une ou plusieurs étapes du processus de prise de décision. Le système expert fournit les connaissances du domaine et recommande des stratégies de résolution durant le processus. Une telle intégration peut être conceptualisée tel un expert humain chargé de la formulation de stratégies, de l'interprétation et l'évaluation des alternatives (figure 1.3).

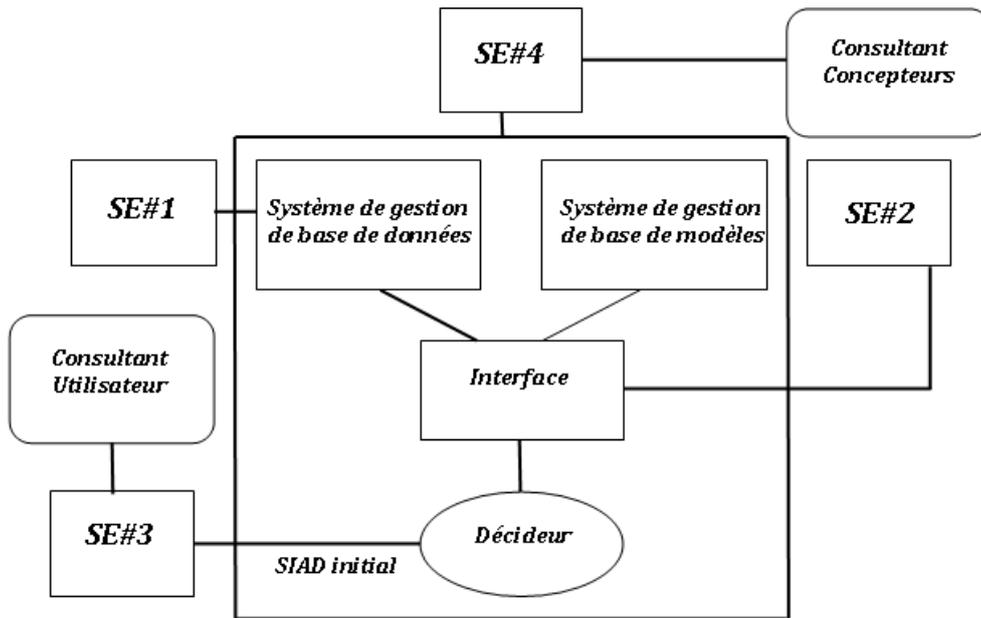


FIGURE 1.2 – Intégration de systèmes experts attachés aux SIAD [16].

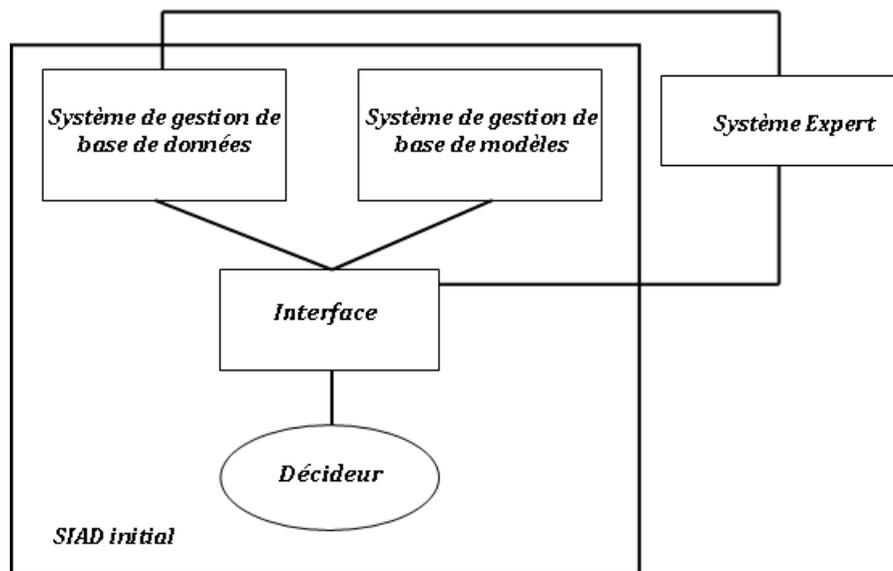


FIGURE 1.3 – Intégration d'un système expert dans un SIAD , séparé [16].

## 1.5 Décision d'investissement

### 1.5.1 Introduction

De toutes les décisions à long terme prises par l'entreprise, la décision d'investissement est certainement la plus importante. L'entreprise doit non seulement investir pour assurer le renouvellement de son matériel de production, c'est à dire essayer d'obtenir des gains de productivité, mais elle doit assurer le développement de son activité en

augmentant sa capacité de production ou, en fabriquant des produits nouveaux.

### 1.5.2 Définition de l'investissement

Pour une entreprise, investir c'est mettre en œuvre aujourd'hui des moyens financiers pour, au travers des activités de production et de vente, générer des ressources financières sur plusieurs périodes ultérieures.

L'idée est que le placement de liquidités dans un projet dans un premier temps, procurera à l'investisseur un retour de liquidités dans un deuxième temps. Ceci sous entend que les gains futurs seront plus importants que les capitaux investis dans le projet.

### 1.5.3 Critères d'évaluation des investissement en avenir certain.

#### Principe général

Évaluer un projet d'investissement conduit à comparer le capital investi à l'ensemble des cash-flows ( $CF$ ) liés au projet. Mais, cette comparaison implique que cette évaluation se fasse à une même date, en général, la date 0. Si l'on veut comparer l'ensemble des cash-flows liés au projet et l'investissement lui-même, il est donc nécessaire d'actualiser (figure 1.4) les flux générés à la date de l'investissement  $I_0$ .

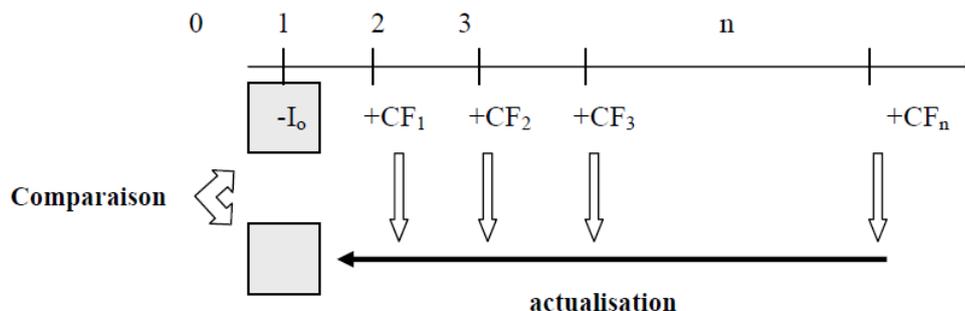


FIGURE 1.4 – Actualisation des flux [15].

Il existe quatre critères principaux d'évaluation : la valeur actuelle nette, l'indice de profitabilité, le délai de récupération du capital et le taux de rentabilité interne.

#### 1.5.3.1 Valeur actuelle nette (VAN)

La VAN est la différence entre les cash-flows actualisés sur la durée de vie du projet et les capitaux investis. Elle se calcul par la relation suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{i=1}^n CF_i (1+t)^{-i} \quad (1.1)$$

Lorsque les flux attendus sur la période considérée sont constants, on a alors :

$$VAN = -I_0 + CF \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \quad (1.2)$$

Où  $I_0$  est le capital investi initialement,  $n$  les années de prévision et  $t$  le taux d'actualisation.

Pour qu'un projet d'investissement soit acceptable, sa VAN doit être strictement positive. Ce projet est d'autant plus intéressant que sa VAN est élevée. Entre plusieurs projets, on choisit celui qui possède la plus grande VAN.

La VAN mesure l'avantage absolu susceptible d'être retiré d'un projet d'investissement. Elle dépend donc de l'importance du capital investi dans le projet. Ainsi, elle ne permet pas de comparer des projets avec des montants de capitaux investis très différents.

Le taux d'actualisation à utiliser est le taux de rentabilité minimum exigé par l'entreprise. Théoriquement, ce taux représente le coût des capitaux utilisés par l'entreprise.

Un projet d'investissement ne pouvant être sélectionné que si sa rentabilité est supérieure au coût des ressources nécessaires à son financement, le choix du taux qui va permettre l'actualisation des flux monétaires reste une question primordiale. Le coût du capital est cette notion de *taux plancher*, seuil minimum au-dessous duquel les projets seront rejetés. Ce taux sert de taux d'actualisation.

C'est le coût de la structure de financement qui permet à l'entreprise de financer un portefeuille d'investissements. Ces capitaux permanents correspondent aux capitaux propres auxquels on ajoute les dettes financières à moyen et long terme.

### 1.5.3.2 Indice de profitabilité (IP)

L'IP mesure l'avantage relatif, c'est à dire pour une unité de capital investi. Pour cela, on divise la somme des cash-flows actualisés par le montant de l'investissement, soit :

$$IP = \frac{\sum_{i=1}^n CF_i (1+t)^{-i}}{I} \quad (1.3)$$

Pour qu'un projet soit acceptable, il faut que son  $IP$  soit supérieur à 1. Lorsque plusieurs projets d'investissements sont possibles, on retient celui qui possède l'indice le plus fort, à condition toutefois qu'il soit supérieur à 1.

### 1.5.3.3 Délai de récupération du capital investi (DR)

C'est le temps au bout duquel le montant cumulé des cash-flows actualisés est égal au montant du capital investi. Le taux d'actualisation est toujours le coût du capital.

Plus le délai de récupération est court, plus le projet est supposé être intéressant en raison :

- du risque couru par l'entreprise : plus l'horizon est éloigné, moins les prévisions sont fiables et plus l'environnement est incertain ;
- de la rentabilité : en général, plus le délai de récupération est court, plus le projet est rentable.

### 1.5.3.4 Taux interne de rentabilité (TIR)

Le TIR est le taux  $t$  pour lequel il y a équivalence entre le capital investi et les cash-flows générés par ce projet. Soit :

$$I = \sum_{i=1}^n CF_i (1+t)^{-i} \quad (1.4)$$

Donc le TIR est le taux pour lequel la VAN est nulle.

Tout projet dont le TIR est inférieur au taux de rentabilité minimum exigé par l'entreprise sera rejeté. Ce taux est appelé « taux de rejet ». Entre plusieurs projets acceptables, le projet possédant le TIR le plus élevé sera retenu.

Si le TIR est égal au taux de rentabilité minimum, le projet est neutre à l'égard de la rentabilité globale de l'entreprise. Par contre, si le TIR est inférieur, la réalisation du projet entraînera la chute de la rentabilité globale de l'entreprise. Aussi, le TIR représente le coût maximum du capital susceptible de financer l'investissement.

## 1.5.4 Critères d'évaluation des investissements en avenir aléatoire.

La prévision des cash-flows peut être réalisée à partir de plusieurs hypothèses relatives à l'environnement. Ainsi, généralement on établit une hypothèse optimiste, une hypothèse moyenne et une hypothèse pessimiste.

A chacune de ces hypothèses correspond une série de cash-flows à partir de laquelle on applique les différents critères d'évaluation. Si, dans le cas de l'hypothèse pessimiste le projet s'avère rentable, il peut alors être accepté sans problème car le risque devient alors très faible. Dans le cas contraire, la décision dépend du degré d'aversion pour le risque du décideur. Mais, cette analyse peut être affinée en recourant aux probabilités, chacune des hypothèses pouvant être probabilisée. Dans ce cas, on peut calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la VAN.

### 1.5.5 Arbres de décision

Les arbres de décision constituent un outil complémentaire pour schématiser une décision dans un univers incertain et dont la structure n'est pas adéquate pour être mise sous forme de tableau. Il s'agit donc d'une technique très utile pour clarifier et donner une ligne directrice à une situation comportant un choix stratégique.

Lorsque le projet implique plusieurs décisions d'investissement qui se succèdent dans le temps, on représente l'ensemble des décisions et des événements par un arbre de décision. Une décision est un choix effectué librement par le décideur. Un événement est imposé de l'extérieur au décideur, il est affecté d'une probabilité.

#### 1.5.5.1 Structure de l'arbre de décision

L'arbre de décision est un graphe orienté qui représente la succession des décisions et des événements. Parmi les sommets du graphe (ou nœuds), on distingue des nœuds de décisions et des nœuds d'événements.

- Nœuds de décisions : Un nœud de décisions représente un choix entre plusieurs décisions. Il est représenté par un carré. Chaque décision conduit à un nœud d'événements. La racine de l'arbre de décision est toujours un nœud de décisions.
- Nœuds d'événements : Un nœud d'événements représente une alternative entre plusieurs événements. Il est représenté par un cercle. À chaque événement sont attachées une VAN et une probabilité. La somme des probabilités affectées aux événements d'un nœud est égale à 1. Pour chaque nœud, on calcule l'espérance mathématique de la VAN (et, éventuellement, la variance) [15].

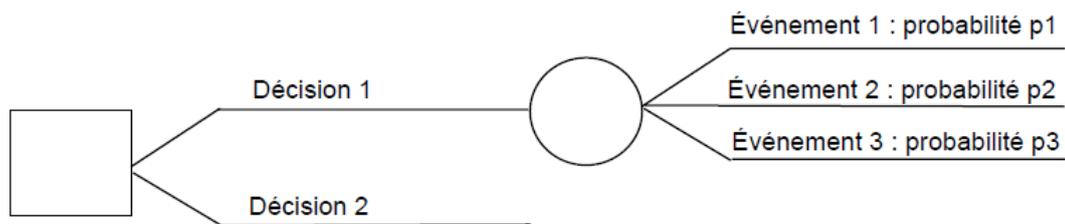


FIGURE 1.5 – Structure d'une arbre de décision [15].

L'alternance entre les carrés (points de décision) et cercles est obligatoire. En effet, une séquence de décisions consécutives sans événements intermédiaires impliquerait que la seconde est automatique : il n'y aurait donc, de ce fait, qu'une seule décision à prendre. Par ailleurs, la présence de deux nœuds d'événements consécutifs signifierait seulement que l'on est en présence d'événements complexes dont les probabilités composées pourraient être calculées.

## 1.5.6 Critères d'évaluation des investissements en avenir incertain.

Lorsque l'investisseur ne peut attribuer des probabilités objectives aux différentes issues possibles pour ses projets, il n'a comme recours que les critères subjectifs. En se basant sur son expérience et sur son intuition, l'investisseur peut attribuer une probabilité subjective aux différentes situations et à leurs conséquences. Notamment, le projet peut provoquer des réactions de la part des entreprises concurrentes. Sa décision dépendra ensuite de son attitude face au risque. Ce cadre de décision prenant en compte le risque et les réactions des autres acteurs est précisément celui étudié dans la théorie des jeux. Plusieurs critères peuvent alors s'appliquer au choix d'investissement.

### 1.5.6.1 Critère de Laplace-bayes

Le critère de Laplace-Bayes consiste à effectuer une simple moyenne arithmétique des gains espérés (ce qui revient à calculer l'espérance en équiprobabilité), associés pour chaque stratégie aux divers états de la nature puis à retenir la stratégie dont la moyenne est la plus élevée.

### 1.5.6.2 Critère de Wald

L'adoption de ce critère correspond à une attitude prudente du preneur de décision : celui-ci cherche à identifier pour chaque stratégie possible l'état de nature qui conduirait aux moins bons résultats. Après quoi, il cherchera à se couvrir en adoptant la stratégie qui est susceptible de lui fournir, si l'évolution de la concurrence s'avère défavorable à l'entreprise, le résultat le moins mauvais possible (le Maximum des Minimum potentiels).

Il consiste à :

- pour chaque décision (ou stratégie), de retenir le résultat le plus faible.
- parmi les moins bons résultats, choisir le plus élevé des moins bons résultats des différentes stratégies.

### 1.5.6.3 Critère du Maximax

Selon la même logique que le critère précédent, il s'agit ici de retenir le meilleur des résultats des différentes stratégies possibles. C'est un critère optimiste qui laisse penser que la nature (l'environnement) est toujours favorable au décideur. Il consiste à :

- retenir, pour chaque décision (ou stratégie) et en fonction de chaque état de la nature, le résultat attendu le plus élevé.
- puis parmi ces résultats, retenir la décision qui donne le résultat le plus important parmi ces meilleurs résultats

#### 1.5.6.4 Critère de Savage ou du Minimax regret

Comme le critère de Wald, le critère de Savage traduit une attitude de prudence de la part du décisionnaire : la méthode consiste à identifier pour chacun des états de nature la stratégie la plus favorable, puis à évaluer le manque à gagner (regret) que représenterait, par rapport à cette stratégie l'adoption de chacune des autres stratégies, enfin à retenir la stratégie conduisant au plus petit des regrets maximum. Il consiste à :

- déterminer les regrets (ou manque à gagner) pour chaque décision : on établit ainsi la matrice des regrets.
- pour chaque décision, retenir le regret le plus élevé.
- et enfin, retenir la décision pour laquelle le regret maximum est le plus faible.

#### 1.5.6.5 Critère d'Hurwitz

Ce critère consiste à calculer pour chacune des stratégies l'espérance du pire et du meilleur de ses résultats potentiels, et à choisir la stratégie pour laquelle celle-ci est la plus grande :

$$E = (1 - p)m + pM \quad (1.5)$$

avec  $m$  le pire des gains,  $M$  le meilleur des gains,  $p$  la probabilité de balance de décision du décideur. Lorsque  $p$  est nul, le critère de Hurwitz se confond avec le critère de Wald, sinon si  $p$  est égal à l'unité, il se confond sur le critère du Maximax.

## 1.6 Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre deux parties. La première constitue le contexte de ce travail, parce que nous proposons un outil d'aide à la décision. Dans la deuxième partie, nous avons évoqué les différentes méthodes de calcul utilisés pour choisir entre plusieurs investissements. Dans ce travail nous utilisons la technique de la valeur actuelle nette.

# Logique floue

## 2.1 Introduction

La logique floue fut développée par LOFTI ZADEH en 1965 à partir de sa théorie des sous-ensembles flous. Les sous-ensembles flous sont une manière mathématique de représenter l'imprécision de la langue naturelle, ils peuvent être considérés comme une généralisation de la théorie des ensembles classiques. La logique floue est aussi appelée "logique linguistique" car ses valeurs de vérité sont des mots du langage courant : "*plutôt vrai, presque faux, loin, si loin, près de, grand, petit...*". La logique floue a pour objectif l'étude de la représentation des connaissances imprécises, des raisonnements approchés et elle cherche à modéliser les notions vagues du langage naturel pour pallier l'inadéquation de la théorie des ensembles classiques dans ce domaine [3].

Dans ce chapitre nous allons décrire les notions de base de la théorie des ensembles flous, leur propriétés ainsi que quelques applications dont nous aurons besoin dans la partie pratique.

## 2.2 Sous-ensembles flous

En théorie des ensembles classiques, l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble est booléenne. Les sous-ensembles flous permettent de connaître le degré d'appartenance d'un élément au sous-ensemble. Un sous-ensemble flou  $A$  d'un ensemble de référence  $X$  est caractérisé par une fonction d'appartenance :

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (2.1)$$

Où  $\mu_A$  est le niveau ou degré d'appartenance d'un élément de l'ensemble de référence  $X$  dans le sous-ensemble flou. On peut définir aussi un sous-ensemble flou  $A$  dans l'ensemble de référence  $X$  comme suit :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (2.2)$$

avec  $\mu_A(x)$  est le degré d'appartenance de  $x$  à  $A$ , avec  $\mu_A(x) \in [0, 1]$ .

Les fonctions d'appartenance peuvent théoriquement prendre n'importe quelle forme. Toutefois, elles sont souvent définies par des segments de droites et dites « linéaires par morceaux » ou « triangulaires (trapézoïdales) ». Les premières fonctions sont très utilisées car :

- Elles sont simples ;
- Elles comportent des points permettant de définir les zones où la notion est vraie, les zones où elle est fausse, ce qui simplifie le calcul.

### 2.2.1 Opérations sur les sous-ensembles flous

Les opérations existant sur les sous-ensembles ordinaires d'un même univers de référence peuvent être utiles aussi pour les sous ensembles flous. Les opérations illustrés dans le tableau suivant est une généralisation des opérations classiques aux sous-ensembles flous et sont les plus couramment utilisées.

Deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $X$

Propriété	Notation
Égalité	$A = B \Rightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$
Inclusion	$(A \subseteq B) \Rightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
Union	$A \cup B \Rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Intersection	$A \cap B \Rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Complément	$\forall x \in X, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
Propriétés de l'union et l'intersection	$A \cap X = A. A \cap \emptyset = \emptyset.$ $A \cup X = X. A \cup \emptyset = A.$ $A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B').$ $A \cup (B \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B').$ $ A  +  B  =  A \cap B  +  A \cup B .$
Propriétés de la complétion	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\bar{\bar{A}} = A$ $\bar{\emptyset} = X$ $\bar{X} = \emptyset$ $ A  +  \bar{A}  =  X $ si $X$ est fini

Tableau 2.1 – Opérations sur les sous-ensembles flous [1].

### 2.2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

- *Noyau* : Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , est noté par :

$$Noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (2.3)$$

- *Support* : Le support d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , est noté par :

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.4)$$

- *Hauteur* : La hauteur d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , est noté par :

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (2.5)$$

On dira alors qu'un sous-ensemble flou est *normalisé* si sa hauteur  $h(A)$  est égale à 1. La figure (2.1) résume les caractéristiques d'un sous-ensemble flou.

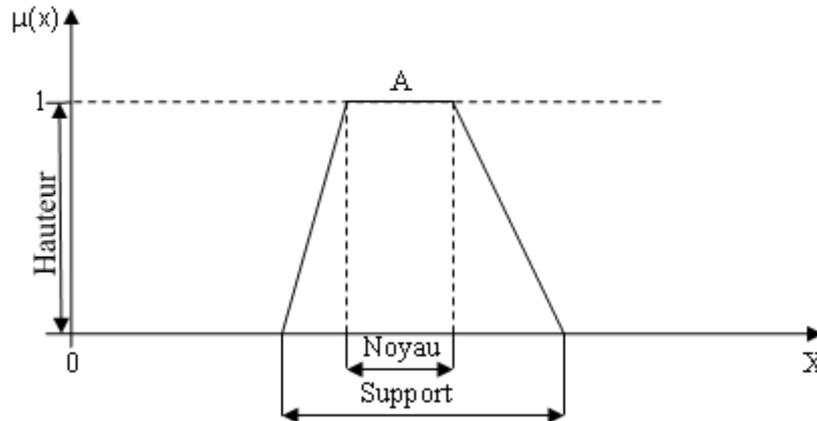


FIGURE 2.1 – Caractéristiques d'un sous-ensemble flou.

### 2.2.2.1 Nombres flous

Un nombre flou triangulaire  $\tilde{N}$  est défini par trois nombres réels  $a < b < c$  où la base du triangle est l'intervalle  $[a, c]$  « support du nombre flou » et le sommet est  $x = b$ . Le nombre flou triangulaire s'écrit sous la forme  $\tilde{N} = (a/b/c)$ . Le nombre flou triangulaire  $\tilde{N} = (1, 2/2/4)$  est illustré dans la figure (2.2).

On observe que  $\tilde{N}(2) = 1$ ,  $\tilde{N}(1, 6) = 0, 5$ .

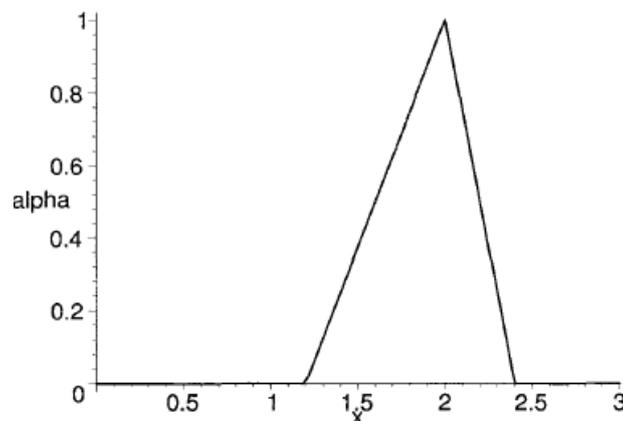


FIGURE 2.2 – Nombre flou triangulaire.

Le nombre flou trapézoïdal  $\tilde{M}$  est défini par quatre nombres  $a < b < c < d$ , où la base du trapèze est l'intervalle  $[a, d]$  « support du nombre flou » et son sommet (où l'appartenance égale à 1) est l'intervalle  $[b, c]$  « noyau du nombre flou ».

On écrit  $\tilde{M} = (a/b, c/d)$  pour les nombres flous trapézoïdaux.

Le nombre flou  $\tilde{M} = (1, 2/2; 2, 4/2, 7)$  est illustré dans la figure (2.3).

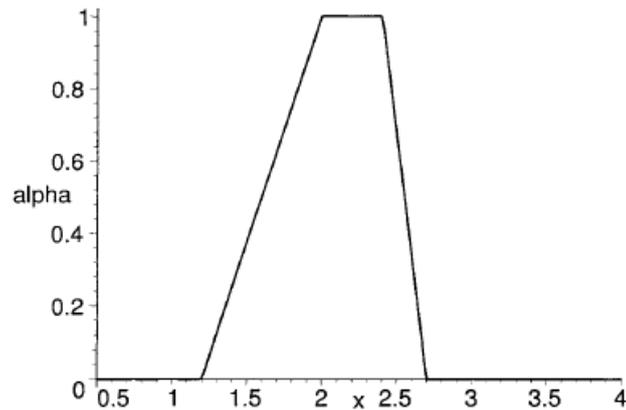


FIGURE 2.3 – Nombre flou trapézoïdal.

Un nombre flou d'allure triangulaire  $\tilde{P}$  est donné par la figure (2.4). Pour dire que  $\tilde{P}$  est un nombre flou d'allure triangulaire, il faut que le graphe soit continu et :

- Monotone et croissant dans l'intervalle  $[1, 2; 2]$ .
- Monotone et décroissant dans l'intervalle  $[2; 2, 4]$ .

On utilise la notation  $\tilde{P} \approx (1, 2/2/2, 4)$  pour représenter le nombre flou d'allure triangulaire  $\tilde{P}$ . De la même façon on définit le nombre flou d'allure trapézoïdal  $\tilde{Q} \approx (1, 2/2; 2, 4/2, 7)$  sa base est  $[1, 2; 2, 7]$  et le sommet est l'intervalle  $[2; 2, 4]$ . Le graphe de  $\tilde{Q}$  est similaire à  $\tilde{M}$  dans la figure (2.3) mais il a les cotés continus et courbés.

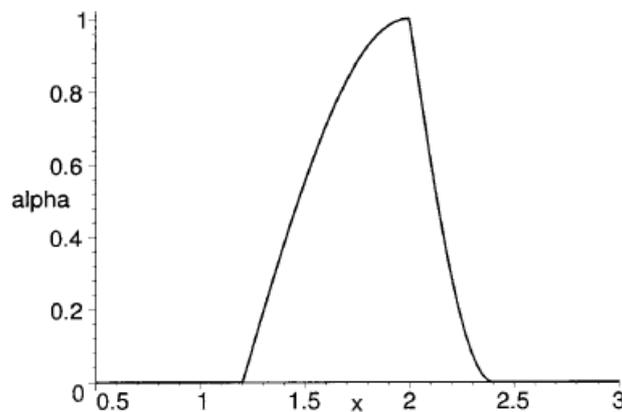


FIGURE 2.4 – Nombre flou d'allure triangulaire  $\tilde{P}$ .

### 2.2.2.2 coupes $-\alpha$

Il peut être utile de décrire un sous-ensemble flou en se référant à des sous-ensembles ordinaires. Une façon de réaliser une approximation d'un sous-ensemble flou consiste à fixer un seuil inférieur sur les degrés d'appartenance. Le sous-ensemble ordinaire  $A_\alpha$  de  $X$  associé à  $A$  pour le seuil  $\alpha$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  avec un degré au moins égal à  $\alpha$ . On dit que  $A_\alpha$  est l' $\alpha$ -Coupe de  $A$ . Formellement :

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.6)$$

et  $A_\alpha$  est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.7)$$

Le théorème de décomposition permet de décrire un sous-ensemble flou quelconque à partir de ses  $\alpha$ -coupes :

Soit  $A$  un sous-ensemble flou d'un univers  $X$ , de fonction d'appartenance  $\mu_A$ . On a :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) \quad (2.8)$$

Pour tout sous-ensemble flou  $A$ ,  $A_\alpha$  est un intervalle fermé et borné pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ . On écrit

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \quad (2.9)$$

Où  $a_1(\alpha)$  est une fonction croissante,  $a_2(\alpha)$  une fonction décroissante de  $\alpha$  avec  $a_1(1) \leq a_2(1)$ . Si  $\tilde{A}$  est un nombre flou d'allure triangulaire ou trapézoïdal donc :

- $a_1(\alpha)$  va être une fonction continue, monotone et croissante dans l'intervalle  $[0; 1]$ .
- $a_2(\alpha)$  une fonction continue, monotone et décroissante dans l'intervalle  $[0; 1]$ ,  
 $0 \leq \alpha \leq 1$ .
- $a_1(1) = a_2(1)$ .

Dans la figure (2.2), on obtient

$$N[\alpha] = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)] \text{ avec } n_1(\alpha) = 1, 2 + 0, 8\alpha, \text{ et } n_2(\alpha) = 2, 4 - 0, 4\alpha \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

De la même façon, dans la figure (2.3)

$$M[\alpha] = [m_1(\alpha), m_2(\alpha)] \text{ où } m_1(\alpha) = 1, 2 + 0, 8\alpha \text{ et } m_2(\alpha) = 2, 7 - 0, 3\alpha \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Les équations  $n_i(\alpha)$  et  $m_i(\alpha)$  sont inverses. Avec l'axe horizontal des (x) et l'axe vertical des (y) l'équation  $n_1(\alpha) = 1, 2 + 0, 8\alpha$  devient  $x = 1, 2 + 0, 8y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . C'est à dire que le segment de droite limité entre les deux points (1,2 ; 0) et (2 ; 1) dans la figure (2.2) est donné comme x en fonction de y alors qu'il est souvent mentionné

comme  $y$  en fonction de  $x$ . C'est la façon dont les  $\alpha$ -coupes d'un nombre flou vont être écrites.

## 2.3 Principe d'extension

Le principe d'extension est utilisé pour étendre une fonction mathématique classique aux ensembles flous. Étant donné une fonction  $\phi$  définie sur un univers classique  $X$ , l'idée de base d'un principe d'extension est de permettre l'utilisation de cette fonction pour des sous-ensembles flous de  $X$ . Connaissant un sous-ensemble flou  $A$  de l'univers  $X$  et une application  $\phi : X \rightarrow Y$ , on veut pouvoir construire l'image de  $A$  par  $\phi$ . C'est donc un principe fondamental pour utiliser les fonctions mathématiques classiques pour des valeurs imprécises.

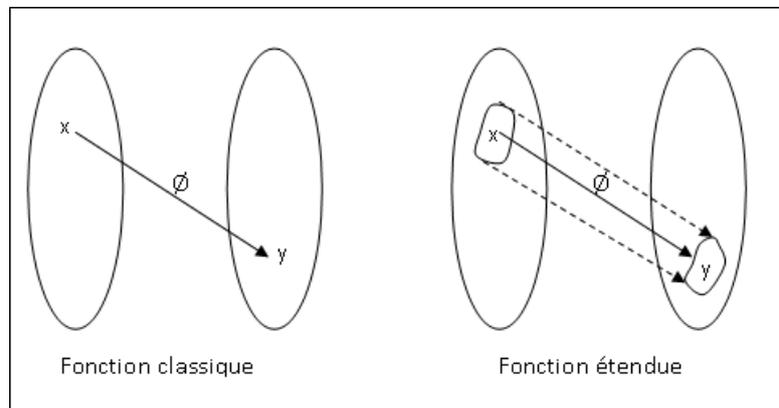


FIGURE 2.5 – Extension d'une fonction  $\phi$ .

**Définition.** Étant donné un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  et une application  $\phi$  de  $X$  vers  $Y$ , le principe d'extension permet de définir un sous-ensemble flou  $B$  de  $Y$  associé à  $A$  par l'intermédiaire de  $\phi$  :

$$\forall y \in Y, \mu_B(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_A(x) \mid y = \phi(x)\} & \text{si } \phi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \phi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.10)$$

Le sous-ensemble flou  $B$  est l'image du sous-ensemble flou  $A$  par la fonction  $\phi$ .

### 2.3.1 Arithmétique Floue

Si  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont deux nombres flous, on aura besoin de les additionner, multiplier, diviser et les soustraire. Il existe deux principales méthodes de calculer  $\tilde{A} + \tilde{B}$ ,  $\tilde{A} - \tilde{B}$ , ...etc.

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux nombres flous, si  $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{C}$  la fonction d'appartenance pour  $\tilde{C}$  est définie par :

$$C(z) = \sup_{x,y} \{ \min(A(x), B(y)) \mid x + y = z \} \quad (2.11)$$

Si on donne  $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$ , donc :

$$C(z) = \sup_{x,y} \{ \min(A(x), B(y)) \mid x - y = z \} \quad (2.12)$$

De la même façon, si  $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$  alors :

$$C(z) = \sup_{x,y} \{ \min(A(x), B(y)) \mid x \cdot y = z \} \quad (2.13)$$

Et si  $\tilde{C} = \tilde{A}/\tilde{B}$

$$C(z) = \sup_{x,y} \{ \min(A(x), B(y)) \mid x/y = z \} \quad (2.14)$$

Dans tous les cas  $\tilde{C}$  est aussi un nombre flou. Dans le cas ou  $\tilde{C} = \tilde{A}/\tilde{B}$ , on suppose que zéro n'appartient pas au support de  $\tilde{B}$ . Si  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont des nombres flous triangulaires (trapézoïdales) donc  $\tilde{A} + \tilde{B}$  et  $\tilde{A} - \tilde{B}$ , vont êtres aussi des nombres flous triangulaires (trapézoïdales), mais  $\tilde{A}/\tilde{B}$ ,  $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$  vont êtres des nombres flous d'allures triangulaires (trapézoïdal).

On a  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux nombres flous. On sait que les  $\alpha$ -coupes sont des intervalles bornés et fermés, donc soit  $A[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ ,  $B[\alpha] = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ . Si  $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$  on a :

$$C[\alpha] = A[\alpha] + B[\alpha]. \quad (2.15)$$

Ainsi, si  $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$  alors,

$$C[\alpha] = A[\alpha] - B[\alpha]. \quad (2.16)$$

Pour tout  $\alpha \in [0; 1]$ , si  $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$  on a,

$$C[\alpha] = A[\alpha] \cdot B[\alpha]. \quad (2.17)$$

Si  $\tilde{C} = \tilde{A}/\tilde{B}$  alors,

$$C[\alpha] = A[\alpha] / B[\alpha]. \quad (2.18)$$

Avec zéro n'appartenant pas à  $B[\alpha]$  pour tout  $\alpha$ . Cette méthode est équivalente à la méthode basée sur le principe d'extension de l'arithmétique floue.

### 2.3.2 Intervalle Arithmétique

Soient  $[a_1; b_1], [a_2; b_2]$  deux intervalles fermés de nombres réels. Si on note par  $(*)$  l'addition, soustraction, multiplication ou la division donc  $[a_1; b_1] * [a_2; b_2] = [\alpha; \beta]$  où

$$[\alpha; \beta] = \{a * b \mid a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2\}. \quad (2.19)$$

Si  $(*)$  est l'opération de division, on suppose que zéro n'appartient pas à l'intervalle  $[a_2; b_2]$ . On peut écrire l'équation précédente sous les formes suivantes :

$$[a_1; b_1] + [a_2; b_2] = [a_1 + a_2; b_1 + b_2] \quad (2.20)$$

$$[a_1; b_1] - [a_2; b_2] = [a_1 - b_2; b_1 - a_2] \quad (2.21)$$

$$[a_1; b_1] / [a_2; b_2] = [a_1; b_1] \cdot \left[ \frac{1}{b_2}; \frac{1}{a_2} \right] \quad (2.22)$$

et

$$[a_1; b_1] \cdot [a_2; b_2] = [\alpha; \beta] \quad (2.23)$$

## 2.4 Comparaison des nombres flous

Ce problème est important en pratique, quand on utilise des nombres flous pour évaluer des situations, ils doivent ensuite être comparés afin de faire un choix et de prendre une décision. Plus de trente approches ont été proposés depuis 1976 [5]. Dans ce travail nous allons utiliser la définition suivante en cas de besoin dans notre application.

**Définition.** Soit  $\gamma = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  un ensemble de nombres flous triangulaires tel que  $A[\alpha] = (a/b/c)$  et  $A[\alpha] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ . On définit une comparaison sur  $\gamma$  par l'introduction de  $A_m$  :

$$A_i < A_j \text{ if } A_{mi} < A_{mj} \quad (2.24)$$

Avec

$$A_m = \frac{a_1(\alpha) + 4 * b + a_2(\alpha)}{6} \quad (2.25)$$

## 2.5 Probabilités floues

Soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ensemble fini et  $P$  la fonction de probabilité définie sur tous les sous-ensembles de  $X$  avec  $P(\{x_i\}) = a_i, 0 \leq i \leq n, 0 \leq a_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

Dans certains problèmes, à cause de la façon dont ils sont présentés, les valeurs de tous les  $a_i$  sont exactes et connues. Par exemple, considérons le lancement d'une pièce

de monnaie ;  $a_1$  est la probabilité d'avoir une « face » ;  $a_2$  la probabilité d'avoir un pile. Supposons que le lancement est parfait, on obtient  $a_1 = a_2 = 0,5$ . Dans ce cas on ne peut pas substituer  $a_1$  et  $a_2$  par un nombre flou. Mais dans plusieurs d'autres problèmes les  $a_i$  ne sont pas connus exactement, ils sont estimés à partir d'un échantillon aléatoire ou ils sont fournis par l'opinion des experts.

Supposons qu'on ne sait pas les valeurs des  $a_i$  et on ne possède aucune donnée pour estimer ses valeurs. On peut obtenir des valeurs pour les  $a_i$  fournis par un groupe des experts ou un seul.

Premièrement on suppose qu'on a un seul expert et il va estimer la valeur d'une probabilité  $P$ . Soit  $a$  la valeur pessimiste de  $P$ , ou la plus petite valeur possible, et soit  $c$  la valeur optimiste de  $P$ , ou la plus grande valeur possible de  $P$ , et soit  $b$  la valeur la plus acceptable de  $P$ . Puis on demande à cet expert de donner des valeurs pour  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et on construit le nombre triangulaire flou  $(a/b/c)$  pour représenter  $P$ .

Si on a un groupe de  $N$  experts pour estimer la valeur de  $P$ , nous les sollicitons des valeurs de  $a_i, b_i$  et  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Soient  $a, b, c$  les moyennes des  $a_i, b_i, c_i$  respectivement. Puis on construit le nombre flou triangulaire  $(a/b/c)$ .

## 2.6 Variables linguistiques

En logique floue les concepts des systèmes sont normalement représentés par des variables linguistiques. Une variable linguistique est une variable dont les valeurs sont des mots ou des phrases utilisées couramment dans une langue naturelle ou un langage artificiel. Une variable linguistique est définie par :

$$(X, U, T(X), \mu_x)$$

Où  $X$  désigne le nom de la variable,  $U$  est l'univers du discours associé à la variable  $X$  (appelé aussi référentiel,  $T(X) = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  est l'ensemble des valeurs linguistiques de la variable  $X$  (appelé également termes linguistiques ou étiquettes linguistiques) et, finalement,  $\mu_x$  sont les fonctions d'appartenance associées à l'ensemble de termes linguistiques.

**Exemple.** On considère la taille d'un être humain, donc la variable linguistique *taille* sera définie comme suit :

$$(Taille, U = \{40, 220\}, T(X) = \{T_{x1}, T_{x2}, T_{x3}\}, \mu = \{\mu_{x1}, \mu_{x2}, \mu_{x3}\})$$

Où  $U$  est l'univers des tailles humaines défini en centimètres, l'ensemble  $T$  est constitué de trois étiquettes linguistiques :  $T_{x1} = petite$ ,  $T_{x2} = moyenne$  et  $T_{x3} = grande$ , et les

fonctions d'appartenances définies par chaque terme linguistique  $\mu_{petite}$ ,  $\mu_{moyenne}$ ,  $\mu_{grande}$ . Nous illustrons cet exemple dans la Figure (2.6) où on représente la variable linguistique taille de l'être humain. La définition de chaque sous-ensemble flou repose sur l'intuition des tailles humaines. Si une personne mesure 1m70 cela se traduira par différents degrés d'appartenances à chacun des sous-ensembles flous :

$$\mu_{petite} = 0, \mu_{moyenne} = 1, \mu_{grande} = 0.$$

Nous pouvons conclure que cette personne appartient au sous-ensemble des personnes de taille moyenne. Par contre une autre personne de taille 1m72 a les appartenances suivantes :

$$\mu_{petite} = 0, \mu_{moyenne} = 0,95, \mu_{grande} = 0,04.$$

Cette personne peut donc être considérée à la fois de taille moyenne et grande avec une plus forte appartenance à la taille "moyenne". Si nous voulons traiter cet exemple pour un domaine en particulier, la définition de sous-ensembles changera.

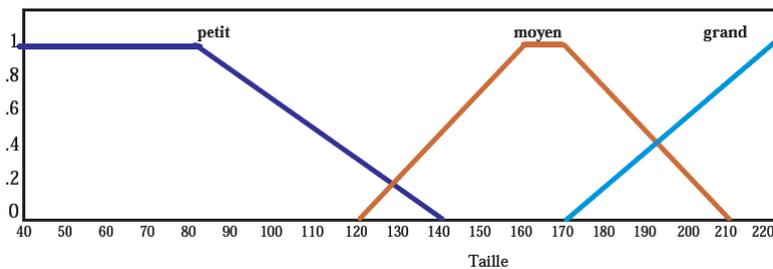


FIGURE 2.6 – Fonction d'appartenance de la variable taille.

## 2.7 Système d'Inférence Floue

Un Système d'Inférence Floue (SIF) a pour but de transformer les données d'entrée en données de sortie à partir de l'évaluation d'un ensemble des règles. Les entrées sont issues du processus de fuzzification et l'ensemble de règles normalement sont définies par le savoir-faire de l'expert. Un SIF (figure 2.7) est constitué de trois étapes : a) Fuzzification, b) Inférence et c) Défuzzification. La fuzzification, consiste à caractériser les variables linguistiques utilisées dans le système. Il s'agit donc d'une transformation des entrées réelles en une partie floue définie sur un espace de représentation lié à l'entrée. Cet espace de représentation est normalement un sous-ensemble flou. Durant l'étape de la fuzzification, chaque variable d'entrée et de sortie est associée à des sous-ensembles flous.

La deuxième étape est le moteur d'inférence, qui est un mécanisme permettant de condenser l'information d'un système au travers d'un ensemble de règles définies pour la

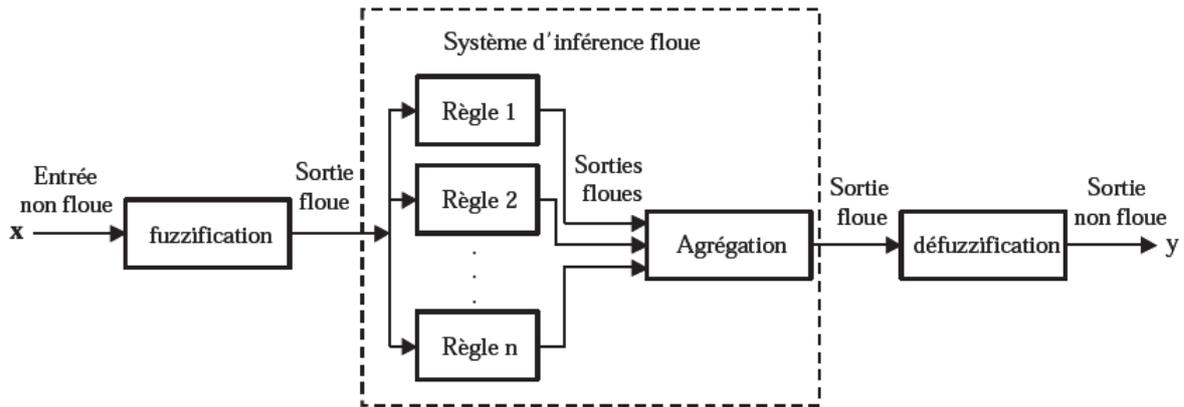


FIGURE 2.7 – Structure d'un SIF [3].

représentation d'un problème quelconque. Chaque règle délivre une conclusion partielle qui est ensuite agrégée aux autres règles pour fournir une conclusion (agrégation). Les règles constituent le système d'inférence floue, dans la suite de ce chapitre nous donnons une description de règles floues dans un cadre plus formel. La troisième étape est la défuzzification, cette opération est l'inverse de la fuzzification et permet de transformer les sorties floues de l'inférence en une valeur non floue comme réponse finale du SIF.

### 2.7.1 Représentation floue des variables d'entrée

Pour montrer le processus de fuzzification, il faut d'abord savoir combien de variables d'entrée seront définies dans le SIF. Nous rappelons qu'une variable d'entrée (taille, température, pression, angle, vitesse, humidité,... etc.) est un paramètre réel qui prend ses valeurs dans un univers bien déterminé.

**Exemple.** Prenons deux variables d'entrée : Vitesse et Distance qui décrivent les règles de conduite automobile à l'approche d'un carrefour contrôlé par des feux tricolores. La représentation (définition) de chaque variable suit le quadruple :

$$(Vitesse, [0; 80], \{Minimale, Normale, Maximale\}, \{\mu_{Minimale}, \mu_{Normale}, \mu_{Maximale}\})$$

$$(Distance, [0; 70], \{Courte, Moyenne, Longue\}, \{\mu_{Courte}, \mu_{Moyenne}, \mu_{Longue}\})$$

### 2.7.2 Représentation floue des variables de sortie

Toute variable de sortie doit être fuzzifiée car les sorties sont liées aux variables d'entrées. Pour cela il faut également savoir le nombre de variables de sortie et définir correctement l'univers du discours.

**Exemple.** Nous définissons une variable de sortie : Freiner. Le quadruplet pour cette variable de sortie est défini de la même manière que pour les variables d'entrée :

$$(Freiner, [0, 50], \{Doucement, Fortement\}, \{\mu_{Doucement}, \mu_{Fortement}\})$$

Qui représente l'univers  $[0, 50]$ , c'est-à-dire la force de freinage notée en Newtons.

### 2.7.3 Définition des règles floues

Le nombre de règles dans un SIF dépend du nombre de variables (d'entrée et de sortie). Les règles floues sont généralement du type "SI . . . ALORS" et permettent de représenter les relations entre les variables d'entrée et de sortie. Plus précisément une règle floue  $R$  est définie de la forme suivante :

$$\text{Si } x \text{ est } A \text{ Alors } y \text{ est } B$$

où  $A$  et  $B$  sont des variables linguistiques définies dans un univers du discours  $X$  et  $Y$ . La première partie de la règle " $x$  est  $A$ " est l'antécédent et la deuxième partie de la règle " $y$  est  $B$ " est le conséquent. Les règles floues, peuvent être simples avec antécédent et conséquent simples ou bien composées de la forme :

$$R : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1 \text{ et } x_2 \text{ est } A_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } A_n \text{ Alors } y \text{ est } B$$

Ou de la forme :

$$R : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1 \text{ et } x_2 \text{ est } A_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ n'est pas } A_n \text{ Alors } y \text{ est } B$$

Considérons à titre illustratif une règle floue : "Si la distance au feu est courte et la vitesse de la voiture est maximale alors il faut freiner Fortement".

### 2.7.4 Inférence à partir de règles floues

Le but de l'inférence floue est de déterminer les sorties du système à partir des entrées floues issues de la fuzzification des entrées réelles. Étant donné une collection de règles, le mécanisme d'inférence consiste à dériver un ensemble flou de sorties à partir de l'agrégation des conclusions de l'ensemble des règles floues.

### 2.7.4.1 Inférence avec une seule règle

Dans le cas où une seule règle floue serait activée l'inférence repose sur la valeur d'appartenance ( $\mu$ ) associé à la variable linguistique d'entrée. La définition pour ce cas est comme suit :

Règle 1 : **Si**  $x_1$  est  $A_1$  et **Si**  $x_2$  est  $A_2$  **Alors**  $y$  est  $B$

Dans le cas d'inférence d'une seule règle le degré d'appartenance de la variable linguistique de sortie ( $B$ ) est défini comme suit :

$$\mu_B(y) = \text{poids de la règle 1} = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2))$$

### 2.7.4.2 Inférence avec plusieurs règles (Mamdani)

Dans le cas où plusieurs règles floues seraient activées l'inférence repose sur les différentes valeurs d'appartenance ( $\mu$ ) associés aux variables linguistiques d'entrée. La définition pour l'activation de plusieurs règles est comme suit :

Règle 1 : **Si**  $x_1$  est  $A_{11}$  et **Si**  $x_2$  est  $A_{12}$  **Alors**  $y$  est  $B_1$

Règle 2 : **Si**  $x_1$  est  $A_{21}$  et **Si**  $x_2$  est  $A_{22}$  **Alors**  $y$  est  $B_2$

Dans le cas où  $B_1$  et  $B_2$  sont la même valeur de la variable de sortie  $y$ , on combine les inférences des deux règles à l'aide de l'opérateur max. Si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux valeurs différentes, chaque règle donne un sous-ensemble flou sur la valeur de sortie  $y$  et on agrège les conclusions des deux règles.

## 2.8 Conclusion

La logique floue est l'une des techniques utilisées dans le domaine d'aide à la décision, elle a donné des résultats encourageants dans plusieurs disciplines.

L'arithmétique floue, nous donne une possibilité de manipuler des intervalles, au lieu d'utiliser des grandeurs incertaines. A l'aide de cette technique nous obtenons des résultats plus réalistes.

La notion de probabilité floue est une solution au problème d'affectation des probabilités concernant un événement qui se produira au futur.

# Arbres de Décision

## 3.1 Introduction

Nous rencontrons souvent des situations de prise de décisions, dans notre vie quotidienne ou dans l'environnement de travail. Parfois il est très difficile de prendre la bonne décision. Dans la pratique, nous employons habituellement nos expériences antérieures pour prendre une décision. Mais parfois l'engagement dans des expériences nous fait perdre du temps et de l'argent.

Heureusement, le développement de l'apprentissage automatique a permis de rendre la prise de décision plus facile et plus efficace.

Il existe beaucoup d'approches et de techniques de prise de décision, parmi elles, les arbres de décision qui sont une des techniques les plus populaires de l'apprentissage automatique et de la fouilles de données (Data mining). L'apprentissage par arbre de décision se situe dans le cadre de l'apprentissage supervisé, où la classe de chaque objet dans la base est donnée. Le but est de construire un modèle à partir d'un ensemble d'exemples associés aux classes pour trouver une description pour chaque classe à partir des propriétés communes entre les exemples.

Ce chapitre comporte deux parties : dans un premier temps, on présente les techniques de création d'un arbre de décision classique, son élagage et quelques définitions comme l'entropie, le gain d'information et l'algorithme de développement de l'arbre comme l'ID3 ; dans la deuxième partie on présente l'arbre de décision flou comme une extension de l'arbre de décision classique.

Notre objectif est de mettre le point sur l'utilisation de la notion de l'entropie comme une mesure pour le classement des éléments dans un arbre de décision de régression.

## 3.2 Data mining (fouilles de données)

Le Data mining est un domaine pluridisciplinaire permettant, à partir d'une très importante quantité de données brutes, d'en extraire de façon automatique ou semi-automatique des informations cachées, pertinentes et inconnues auparavant en vue d'une utilisation industrielle ou opérationnelle de ce savoir. Il peut également mettre en avant les associations et les tendances et donc servir d'outil de prévisions au service de l'organe décisionnel.

Le Data mining a aujourd'hui une grande importance économique du fait qu'elle permet d'optimiser la gestion des ressources (humaines et matérielles).

Le processus complet de fouille de données comprend plusieurs étapes [11] :

1. collecte des informations et organisation de ces informations dans une base de données ;
2. nettoyage de la base de données : attributs sans valeur, ayant une valeur invalide (bruit), normalisation...etc ;
3. sélection des attributs utiles ;
4. extraction d'information d'une base de données (Knowledge Discovery in Databases, ou KDD) ;
5. visualisation des données : histogramme, arbre, visualisation 3D et plus généralement, exploration interactive de données ;
6. évaluation des résultats de l'extraction de connaissance.

On peut citer plusieurs techniques utilisées dans ce domaine, tel que les réseaux de neurone, les réseaux bayésiens ainsi que les arbres de décision que nous allons étudier dans ce chapitre.

## 3.3 Arbres de décision

### 3.3.1 Historique

La construction des arbres de décision à partir de données est une discipline relativement ancienne. Les statisticiens en attribuent la paternité à MORGAN et SONQUIST (1963) qui, les premiers, ont utilisé les arbres de régression dans un processus de prédiction et d'explication (AID – Automatic Interaction Détection). Il s'en est suivi toute une famille de méthodes, étendues jusqu'aux problèmes de discrimination et classement, qui s'appuyaient sur le même paradigme de la représentation par arbres. Il est considéré généralement que cette approche a connu son apogée avec la méthode CART (Classification and Regression Tree) [10].

En apprentissage automatique, la plupart des travaux s'appuient sur la théorie de l'information. Il est d'usage de citer la méthode ID3 de Quinlan qui, lui même, rattache ses travaux à ceux de HUNT (1962). QUINLAN a été un acteur très actif dans la deuxième moitié des années 80 avec un grand nombre de publications où il propose un ensemble d'heuristiques pour améliorer le comportement de son système. Son approche a pris un tournant important dans les années 90 lorsqu'il présenta la méthode C4.5 qui est l'autre référence incontournable dès lors que l'on veut citer les arbres de décision (1993) [10].

### 3.3.2 Définition

Un arbre de décision est une structure qui est souvent utilisée pour représenter des connaissances. Il permet de remplacer ou d'assister un expert humain dans la détermination des propriétés d'un objet, c'est l'opération de classement (en anglais : classification). Un arbre de décision est une représentation d'une procédure de décision pour déterminer la classe d'un objet donné. En général, à chaque nœud interne de l'arbre, il y a un test (question) qui correspond à un attribut dans la base d'apprentissage, et une branche correspondante à chacune des valeurs possibles de l'attribut. À chaque nœud de feuille, il y a une valeur de classe. Les arbres de décision sont construits à partir d'un ensemble d'apprentissage.

## 3.4 Construction des arbres de décision

L'idée centrale qui préside à la construction d'un arbre de décision consiste à diviser récursivement les objets de l'ensemble d'apprentissage en utilisant des tests définis à l'aide des attributs jusqu'à ce que l'on obtienne des feuilles ne contenant (idéalement) que des objets appartenant tous à la même classe. Pour diviser l'ensemble d'apprentissage, on choisit des attributs qui vont minimiser l'impureté dans les sous-arbres ; autrement dit, qui maximisent l'information apportée par les réponses. C'est-à-dire que pour chaque attribut qui n'a pas encore été utilisé, on calcule l'impureté qui reste après son utilisation. Celui qui laisse le moins de désordre est choisi comme étant le prochain nœud de l'arbre de décision ; on répète le processus sur chaque nouveau nœud. Le processus s'arrête quand les feuilles de l'arbre ainsi obtenu contiennent des exemples d'un seul concept (classe) ou quand aucun test n'apporte plus d'amélioration [13].

En général l'algorithme de construction d'arbre de décision se divise en 3 étapes :

- Décider si un nœud est terminal : tous les exemples (un ou plus) appartiennent

à la même classe (il y a moins d'un certain nombre d'erreurs).

- Sélectionner un test à associer à un nœud.
- Affecter une classe à une feuille. On attribue la classe majoritaire à une feuille.

Nous pouvons résumer l'algorithme de construction d'un arbre de décision comme suit :

Construire-arbre(S, L) :

Entrées :

S: un ensemble d'apprentissage.

L: liste d'attributs.

Sortie: un arbre de décision.

Si un critère d'arrêt est vérifié

créer une feuille avec la classe la plus probable.

Sinon: Choisir le meilleur attribut A dans L (gain d'information)

Partitionner S en n sous-ensembles selon les valeurs de A.

Créer un nœud pour A.

Pour toutes les valeurs de A : construire-arbre(S<sub>i</sub>, L-A)

Fin si.

## 3.5 Algorithmes de construction des arbres de décision

### 3.5.1 Algorithme ID3 (Induction of Decision Tree) :

ID3 est un algorithme pour découvrir des modèles de classification de la donnée, aussi appelé arbres de décisions. Ils ont été présentés par J. ROSS QUINLAN en 1975.

Par donnée on entend ici un ensemble représentable sous forme de table : Cette représentation de la donnée est celle rencontrée dans les bases de données relationnelles, ce qui permet en général une application facile de ces algorithmes aux bases de données.

Les tests placés dans un nœud par l'algorithme ID3 concernent exclusivement le test de la valeur d'un seul attribut. ID3 fonctionne récursivement : il détermine un attribut à placer en racine de l'arbre. Cette racine possède autant de branches que cet attribut prend de valeurs. À chaque branche est associé un ensemble d'exemples dont l'attribut prend la valeur qui étiquette cette branche ; on accroche alors au bout de cette branche l'arbre de décision construit sur ce sous-ensemble des exemples et en considérant tous les attributs excepté celui qui vient d'être mis à la racine. Par cette procédure, l'ensemble des exemples ainsi que l'ensemble des attributs diminuent petit à petit au long de la descente dans l'arbre.

Ayant l'idée de l'algorithme, il reste à résoudre une question centrale : quel attribut placer en racine ? Une fois cette question résolue, on itérera le raisonnement pour les

sous-arbres.

Les données qui atteignent un certain nœud de l'arbre de décision doivent être plus homogènes que les données atteignant un nœud ancêtre. Pour cela, nous avons besoin de définir quelques notions. Commençons par l'entropie introduite initialement par SHANNON [1948].

**Définition 3.1.** Soit un ensemble  $X$  d'exemples dont une proportion  $p_+$  sont positifs et une proportion  $p_-$  sont négatifs. tel que  $p_+ + p_- = 1$ . L'entropie de  $X$  est :

$$H(X) = -p_+ \log_2 p_+ - p_- \log_2 p_- \quad (3.1)$$

Remarques :

1.  $0 \leq H(X) \leq 1$ .
2. Si  $p_- = 0$  ou  $p_+ = 0$  alors  $H(X) = 0$ ; ainsi, si tous les exemples sont soit tous positifs, soit tous négatifs, l'entropie de la population est nulle.
3. Si  $p_+ = p_- = 0,5$  alors  $H(X) = 1$ ; ainsi, s'il y a autant de positifs que de négatifs, l'entropie est maximale.

En résumé, l'entropie mesure l'hétérogénéité d'une population du point de vue de la classe de ses membres. Elle se mesure en bits. C'est en fait une mesure de la quantité d'information qu'il y a dans  $X$  du point de vue de la classe de ses éléments.

La définition précédente de l'entropie se généralise aisément à un attribut pouvant prendre plus de deux valeurs distinctes :

**Définition 3.2.** Pour une classe prenant  $n$  valeurs distinctes (numérotées de 1 à  $n$ ) ; notons  $p_{i \in [1,n]}$  la proportion d'exemples dont la valeur de cet attribut est  $i$  dans l'ensemble d'exemples considéré  $X$  :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^{i=n} p_i \log_2 p_i \quad (3.2)$$

Cette formule explique la quantité d'information. S'il n'y a qu'une seule classe, l'entropie est nulle. Si les  $n$  classes sont équiprobables, elle vaut  $\log_2(n)$  où  $n$  est le nombre de classes. Pour partitionner l'ensemble d'apprentissage  $X$ , on va calculer l'information gagnante par attribut en utilisant la formule de l'entropie conditionnelle :

On choisit l'attribut qui maximise le gain d'information, c'est-à-dire qui minimise l'entropie. Après avoir choisi un attribut test, on doit partitionner l'ensemble en sous-ensembles selon les valeurs possibles de cet attribut. On crée les branches correspondant à chaque valeur de l'attribut, on crée des nœuds pour chaque sous-ensemble non vide et on répète le processus pour chaque nouveau nœud jusqu'à ce qu'on arrive à un critère d'arrêt. Dans ce cas, on crée une feuille et on associe à cette feuille la classe la plus

probable. La figure suivante montre l'évolution des valeurs de l'entropie en fonction des probabilités.

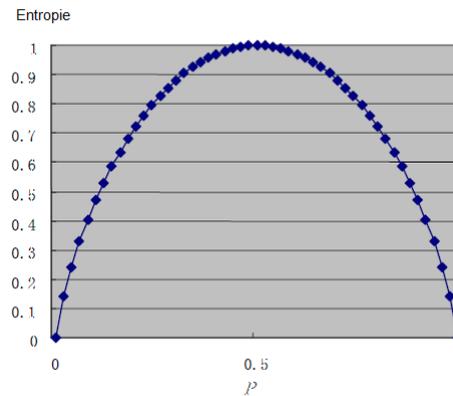


FIGURE 3.1 – Évolution de l'entropie [25].

### 3.5.2 Algorithme C4.5

C4.5 est une extension de l'algorithme de base d'ID3. Dans cette méthode, il y a deux phases : La première consiste à construire l'arbre de décision jusqu'au bout en divisant récursivement l'ensemble d'apprentissage selon la méthodologie expliquée. Une fois l'arbre construit, une phase d'élagage est appliquée. L'idée est d'élaguer les branches qui augmentent le taux d'erreurs de classement dans l'arbre de décision. Le processus d'élagage sera expliqué dans la suite. La fonction d'impureté utilisée par C4.5 pour construire un arbre de décision est le ratio du gain (équation 3.3), qui consiste à diviser l'information mutuelle par l'entropie de l'attribut testé.

$$\text{gainRatio} = \frac{IM(A, C)}{H(A)} \quad (3.3)$$

### 3.5.3 Algorithme CART

Le critère Gini est la mesure de segmentation de l'algorithme CART (Classification and Regression Tree), cet algorithme construit des arbres binaires, c'est-à-dire que les nœuds non terminaux ont seulement 2 branches. Lorsqu'un attribut a plusieurs valeurs possibles, on doit faire des regroupements pour être en mesure de partitionner en deux. Un bon critère d'éclatement doit prendre soin que l'éclatement soit fait à un nœud qui réduit le coût des erreurs de classification de l'arbre. L'index Gini est utile lorsque le problème comporte plusieurs classes. Il est donné par la relation suivante :

$$Gini(S) = 1 - \sum_j^x freq(C_j, S)^2 \quad (3.4)$$

### 3.5.4 Algorithme CHAID

Dans son tutoriel sur les arbres de décision, R. Rakotomalala [10] nous explique le fonctionnement de l'algorithme CHAID. C'est un algorithme de construction d'arbre développé vers 1980, il a été l'un des premiers algorithmes à être implanté dans des logiciels commerciaux. CHAID utilise le test du Khi-Deux. Il traite les attributs discrets avant les attributs continus.

Pour chacun des attributs candidats, on construit un tableau de fréquence par classe selon les valeurs que cet attribut peut prendre (figure 3.2).

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \frac{(n_{kl} - \frac{n_k * n_l}{n})^2}{\frac{n_k * n_l}{n}} \quad (3.5)$$

Où  $n_{kl}$  représente le nombre d'éléments appartenant à la classe  $y_k$  pour la valeur  $x_l$ ,  $n_k$  représente la sommation du nombre d'éléments de toutes les classes pour une certaine valeur de l'attribut,  $n_l$  représente la sommation du nombre d'éléments des valeurs possibles pour l'attribut calculé pour une certaine classe et  $n$  représente le nombre d'exemples dans le jeu d'apprentissage.

$Y/X$	$x_1$	$x_l$	$x_L$	$\Sigma$
$y_1$		$\vdots$		
$y_k$	$\dots$	$n_{kl}$	$\dots$	$n_l$
$y_K$		$\vdots$		
$\Sigma$		$n_k$		$n$

FIGURE 3.2 – *Tableau du calcul.*

On choisit comme nœud, l'attribut qui optimisera le test du Khi Deux. De plus, CHAID utilise une technique de pré-élagage, c'est-à-dire qu'on arrête la croissance de l'arbre lorsque le test remplit une certaine condition.

### 3.6 Exemple de construction d'un arbre de décision par ID3

Sur un exemple, on montre la construction d'un arbre de décision par l'algorithme ID3. Considérons l'ensemble d'apprentissage donné dans le tableau (3.1). L'objectif est de décider de jouer ou non selon l'état des attributs (Ciel, Température, Humidité et Vent).

Pour construire l'arbre de décision à partir de l'ensemble d'apprentissage donné, on va chercher l'attribut le plus pertinent qui maximise le gain d'information :

id	Ciel	Température	Humidité	Vent	Décision
1	Ensoleillé	Élevée	Haute	Faux	A
2	Ensoleillé	Élevée	Haute	Vrai	A
3	Couvert	Élevée	Haute	Faux	B
4	Pluvieux	Moyenne	Haute	Faux	B
5	Pluvieux	Basse	Normale	Faux	B
6	Pluvieux	Basse	Normale	Vrai	A
7	Couvert	Basse	Normale	Vrai	B
8	Ensoleillé	Moyenne	Haute	Faux	A
9	Ensoleillé	Basse	Normale	Faux	B
10	Pluvieux	Moyenne	Normale	Faux	B
11	Ensoleillé	Moyenne	Normale	Vrai	B
12	Couvert	Moyenne	Haute	Vrai	B
13	Couvert	Élevée	Normale	Faux	B
14	Pluvieux	Moyenne	Haut	Vrai	A

Tableau 3.1 – Base Météo.

$$IM(Décision, Ciel) = H(Décision) - H(Décision | Ciel) = 0.940 - 0.694 = 0.246.$$

$$IM(Décision, Température) = H(Décision) - H(Décision | Température) = 0.940 - 0.910 = 0.030.$$

$$IM(Décision, Humidité) = H(Décision) - H(Décision | Humidité) = 0.940 - 0.786 = 0.154.$$

$$IM(Décision, Vent) = H(Décision) - H(Décision | Vent) = 0.940 - 0.891 = 0.049.$$

L'attribut qui maximise le gain d'information est *Ciel*. Donc, *Ciel* est la racine de l'arbre de décision. L'ensemble d'apprentissage sera partitionné en trois sous-ensembles selon les trois valeurs de *Ciel*, qui sont *ensoleillé*, *pluvieux* et *couvert*. Les trois sous-ensembles sont donnés dans les tableaux (3.2), (3.3), (3.4).

Pour continuer la construction de l'arbre, on recommence le processus en choisissant d'autres attributs pertinents pour chaque sous-ensemble d'apprentissage (tableaux 3.2, 3.3, 3.4). Ce processus s'arrête quand les feuilles de l'arbre ainsi obtenu contiennent

id	Ciel	Température	Humidité	Vent	Décision
1	Ensoleillé	Élevée	Haute	Faux	A
2	Ensoleillé	Élevée	Haute	Vrai	A
8	Ensoleillé	Moyenne	Haute	Faux	A
9	Ensoleillé	Basse	Normale	Faux	B
11	Ensoleillé	Moyenne	Normale	Vrai	B

Tableau 3.2 – Sous-ensemble associé à la valeur *ensoleillé* de *Ciel*.

id	Ciel	Température	Humidité	Vent	Décision
3	Couvert	Élevée	Haute	Faux	B
7	Couvert	Basse	Normale	Vrai	B
12	Couvert	Moyenne	Haute	Vrai	B
13	Couvert	Élevée	Normale	Faux	B

Tableau 3.3 – Sous-ensemble associé à la valeur *couvert* de *Ciel*.

des exemples d'un seul concept ou quand aucun test ne donne d'améliorations.

Dans le sous-ensemble correspondant à la valeur *ensoleillé* de l'attribut *Ciel* (tableau 3.2), l'attribut le plus pertinent est *Humidité*. Donc, le sous-ensemble est partitionné en deux sous-ensembles selon les valeurs haute et normale de l'*humidité*. Dans le tableau (3.3), nous remarquons que tous les objets appartiennent à la classe B ; dans ce cas, le processus s'arrête dans cette branche et on crée une feuille avec la classe B. Dans le sous-ensemble correspondant à la valeur *pluvieux* de l'attribut *Ciel* (tableau 3.2), c'est l'attribut *Vent* qui maximise le gain et le sous-ensemble est partitionné en deux sous-ensembles selon les valeurs vrai et faux du Vent. L'arbre de décision final obtenu est donné dans la figure (3.3).

id	Ciel	Température	Humidité	Vent	Décision
4	Pluvieux	Moyenne	Haute	Faux	B
5	Pluvieux	Basse	Haute	Faux	B
6	Pluvieux	Basse	Haute	Vrai	A
10	Pluvieux	Moyenne	Normale	Faux	B
14	Pluvieux	Moyenne	Normale	Vrai	A

Tableau 3.4 – Sous-ensemble associé à la valeur *pluvieux* de *Ciel*.

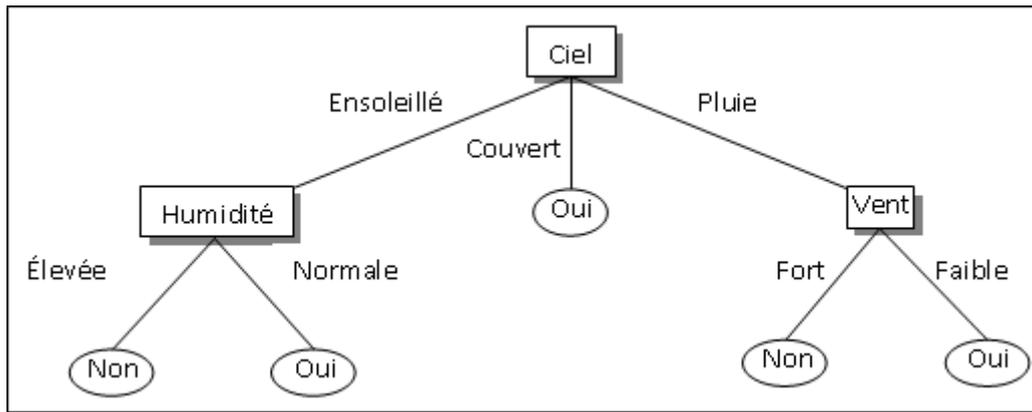


FIGURE 3.3 – Arbre de décision final pour la base météo.

### 3.7 Critères d'arrêt de construction d'un arbre de décision

Il y a plusieurs critères d'arrêt possibles lors de la construction d'un arbre de décision.

- Tous les objets appartiennent à la même classe ou il n'y a plus d'attribut à utiliser.
- La profondeur de l'arbre atteint une limite fixée (=nombre d'attributs utilisés).
- Le nombre de feuilles atteint un maximum fixé.
- Le nombre d'instances par nœud est inférieur à un seuil fixé.
- Le gain d'information maximum obtenu est inférieur à un seuil fixé.
- La qualité de l'arbre n'augmente plus de façon sensible. Par exemple, aucun attribut n'améliore la qualité de l'arbre.

Le fait de construire l'arbre jusqu'au bout selon le premier critère ci-dessus, jusqu'à ce qu'aucun attribut ne reste à utiliser ou tous les objets appartiennent à la même classe, favorise les feuilles ayant peu d'objets et diminue la fiabilité de l'arbre lors du classement d'un nouvel exemple. Par conséquent, le taux d'erreurs de classement augmente. Le premier critère n'aide donc pas à construire l'arbre de décision le plus simple. Les autres critères aident à stopper la construction lorsqu'un seuil est atteint, comme le nombre d'instances par feuille, la profondeur de l'arbre et le nombre de feuilles dans l'arbre. Ces critères se situent dans le cadre de l'élagage et plus précisément dans son premier type appelé pré-élagage.

### 3.8 Élagage

La phase d'élagage consiste à enlever les feuilles les moins significatives de l'arbre. Cette phase est exécutée après la construction de l'arbre. On considère que la racine

de l'arbre comprend au moins deux feuilles. Tant qu'il existe un sous arbre que l'on peut remplacer par une feuille, sans faire croître l'estimation de l'erreur réelle, alors on élague ce sous arbre. On doit savoir si les nœuds fils sont des feuilles ou des sous-arbres. Si tous les nœuds sont des feuilles, on remplace la racine du sous-arbre par une feuille, si l'erreur de la nouvelle feuille est plus petite que celle de l'ancien sous-arbre.

Pour créer la feuille de remplacement, on crée la liste des possibilités d'éléments des feuilles du sous-arbre et on prend la valeur la plus fréquente pour le nom de l'étiquette et le(s) autre(s) dans le tableau Étiquette des autres possibilités. On remonte ensuite jusqu'à la racine jusqu'à ce qu'on ne puisse plus remplacer un sous-arbre par une feuille.

### 3.9 Pré-élagage

Le pré-élagage se produit pendant la construction de l'arbre, il agit comme un critère d'arrêt dans l'expansion de l'arbre. Il consiste à fixer une condition d'arrêt pour arrêter la construction. Cette condition limite l'expansion d'une branche, c'est-à-dire que les attributs restants ne permettent plus de diviser les exemples. Si on n'effectuait pas cet arrêt exceptionnel, la branche croîtrait en prenant les attributs restants. Les exemples restants au niveau du nœud que le seuil atteint seraient les mêmes que celle au niveau du nœud terminal. Dans les algorithmes C4.5 et CART, lorsque la mesure de segmentation est égale à zéro ou à l'infini, on doit créer un nœud terminal. Il vaut mieux arrêter la phase d'expansion de la branche que de continuer sans avoir d'apport significatif dans la classification.

### 3.10 Post-élagage

Dans cette approche, l'arbre de décision est simplifié en supprimant un ou plusieurs de ses sous-arbres et en les remplaçant par des feuilles. On construit l'arbre de décision jusqu'au bout et ensuite on l'élague. On estime les erreurs de classification à chaque nœud. Le sous-ensemble est remplacé par une feuille (classe) ou par la branche la plus fréquente. On commence par le fond de l'arbre et on examine chacun des sous-arbres (non-feuille) ; si le remplacement de ce sous-arbre par une feuille ou par sa branche la plus fréquente conduit à prévoir un taux d'erreur plus bas, dans ce cas, on élague le sous-arbre.

### 3.11 Arbres de décision flous

Les arbres de décision flous sont issus des arbres de décision. La construction d'un arbre de décision est une méthode d'apprentissage inductif supervisé. L'apprentissage

inductif supervisé nécessite de disposer d'une base d'exemples étiquetés encore appelée base d'apprentissage. Chaque exemple de la base est décrit par un ensemble d'attributs et une étiquette lui est associée. Cette étiquette représente la classe de l'exemple. A partir de cette base, l'apprentissage inductif supervisé consiste à trouver une loi générale servant de règle de décision pour associer à tout élément inconnu, décrit par le même ensemble d'attributs, une classe.

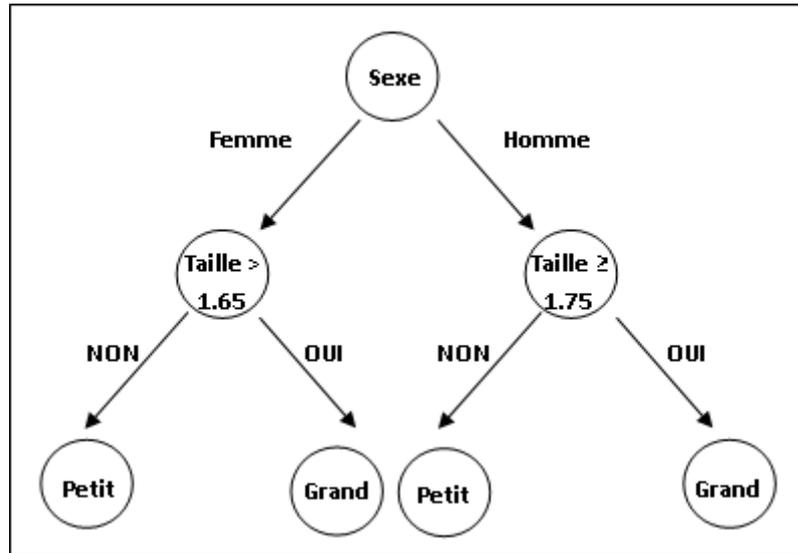
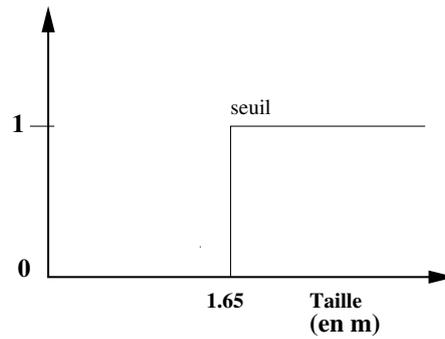
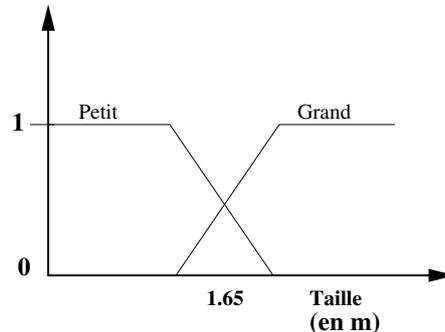


FIGURE 3.4 – Arbre de décision déterminant si un être humain est petit ou grand.

Les arbres de décision sont très performants et très populaires pour le traitement de données décrites par des attributs symboliques (le nombre de valeurs possibles est fini) comme l'attribut sexe sur la figure (3.4). Cependant, comme l'explique C. MARSALA [14], les arbres de décision ont des difficultés à traiter les attributs numériques. En effet, les attributs numériques ont potentiellement une infinité de valeurs, il n'est donc pas possible d'avoir une base exhaustive pour les valeurs d'un tel attribut et de construire des nœuds ayant autant d'arcs sortants que de valeurs possibles. Des méthodes existent pour surpasser ce problème. La plus courante est de déterminer des seuils utilisés comme tests de comparaison. Les tests sur l'attribut taille sur la figure (3.4) en sont un exemple. Cependant, leur détermination est difficile, sensible au bruit et à l'incertitude et l'imprécision des données.

FIGURE 3.5 – *Fonction caractéristique de l'ensemble grand pour une femme.*

Pour apporter une solution à ces problèmes, certains travaux, proposent d'intégrer des techniques issues de la théorie des sous-ensembles flous dans le processus de construction des arbres de décision. Les attributs sont alors décrits par des sous-ensembles flous, appelés modalités floues. Les arcs de l'arbre sont alors associés à ces modalités floues. La figure (3.5) illustre la fonction caractéristique de l'ensemble grand pour une femme, le seuil situé à 1,65m est arbitraire. La figure (3.6) illustre les fonctions d'appartenance aux modalités floues petit et grand décrivant l'attribut taille pour une femme. Dans ce cas, l'individu n'appartient pas forcément soit à l'une, soit à l'autre de ces modalités, mais peut appartenir plus ou moins chacune d'entre elles.

FIGURE 3.6 – *L'attribut taille pour une femme.*

### 3.11.1 Algorithme général de construction d'un arbre de décision flou

Un exemple  $e_i$  d'une base d'apprentissage  $\xi$  est un couple  $(x, u)$ , où  $x$ , représentation de l'objet, est décrit par un ensemble d'attributs  $A$ . Chaque attribut  $A_j \in A$  peut prendre une valeur  $v_{jl}$  parmi un ensemble  $\{v_{j1}, \dots, v_{jm_j}\}$  de valeurs possibles.  $x$  est donc un N-uplet de couples attribut-valeur  $(A_j, v_{jl})$ .  $u$  représente la classe de  $x$  et appartient à un ensemble  $C = \{c_1, \dots, c_K\}$ .  $K$  désigne le nombre de classes possibles pour un objet.

L'algorithme générique de construction des arbres de décision se base sur la constatation que tous les algorithmes de construction de ces arbres à partir d'une base d'apprentissage fonctionnent d'une manière équivalente. Ils se différencient uniquement par la manière de choisir un attribut à l'étape 1, de partitionner la base à l'étape 2 et de mesurer le critère d'arrêt à l'étape 3. La construction des arbres de décision dans ces algorithmes s'effectue de manière descendante. C'est-à-dire qu'ils partent de la racine pour aboutir aux feuilles. L'algorithme proposé est le suivant [14] :

Étant donné une mesure de discrimination  $H$ , une stratégie de partitionnement  $P$  et un critère d'arrêt  $T$ , une base d'apprentissage  $\xi$ , composés d'exemples  $e_i$  dont la représentation de l'objet est donnée par un ensemble d'attributs  $A$  :

1. À l'aide de la mesure de discrimination  $H$ , choisir un attribut  $A_j \in A$ , de modalités  $\{v_{j1}, \dots, v_{jm_j}\}$ , pour partitionner la base d'apprentissage  $\xi$ . Un nœud  $\eta(A_j)$  est créé dans l'arbre, portant un test sur la valeur de  $A_j$ .
2. Suivant la stratégie  $P$ , partitionner la base d'apprentissage courante ( $\xi$  au départ de l'algorithme) avec cet attribut en créant autant de sous base  $\xi_l$  que l'attribut possède de modalité  $v_{jl}$  :

$$\xi = \bigcup_{l=1 \dots m_j} \xi_l \quad (3.6)$$

avec  $\xi_l = \{e_i \in \xi | e_i(A_j) = v_{jl}\}$ . Chaque valeur  $v_{jl}$  de l'attribut libelle un arc issu de ce nœud  $\eta(A_j)$ , associé à la sous-base  $\xi_l$ .

3. À l'aide du critère d'arrêt  $T$ , vérifier la condition d'arrêt sur chaque sous-base  $\xi_l$  créée. Une sous-base qui vérifie la condition d'arrêt donne naissance à une feuille  $f$  dans l'arbre à laquelle on associe des degrés de représentativité  $df_{c_k}$  pour chaque classe  $c_k \in C$ .
4. Recommencer en 1 avec les sous-bases qui ne vérifient pas le critère d'arrêt.

A chaque étape de construction d'un nœud de l'arbre, le choix de l'attribut est très important. En effet, chaque attribut n'a pas le même pouvoir discriminant relativement aux classes. Ils ne sépareront donc pas les éléments de la base d'apprentissage de la même manière. L'objectif est de déterminer à chaque nœud l'attribut permettant de déterminer au mieux la classe des éléments de la base d'apprentissage. En sélectionnant d'abord les attributs possédant un fort pouvoir discriminant, l'arbre de décision sera moins profond et plus efficace. La mesure du pouvoir discriminant d'un attribut se fait grâce à une mesure de discrimination.

### 3.11.2 Mesure de discrimination

Dans le cadre classique, comme nous l'avons vu dans la section précédente, il existe plusieurs mesure de discrimination, l'entropie, l'indice de *Gini*,...etc. Dans le cadre

fou, la mesure de discrimination la plus utilisée est l'entropie d'événements flous encore appelée entropie étoile. C'est une extension de l'entropie de SHANNON. Elle est obtenue en remplaçant dans la formule de l'entropie classique, la mesure de probabilité classique par une mesure de probabilité d'événements flous. La probabilité d'événement fou généralement utilisé est celle de ZADEH :

**Définition 3.3.** Étant donné un ensemble fou  $\nu = \{e_1, \dots, e_n\}$  de fonction d'appartenance  $\mu$ , chaque élément  $e_i$  de  $\nu$  est associé à une probabilité (classique) d'occurrence  $P(e_i)$ .  $\nu$  est assimilé à un événement fou. La probabilité de l'événement fou  $\nu$  est définie par :

$$P^*(\nu) = \sum_{i=1}^n \mu(e_i)P(e_i) \quad (3.7)$$

L'entropie étoile  $H_s^*(C)$  est alors donnée par la formule suivante :

$$H_s^*(C) = - \sum_{k=1}^K P^*(c_k) \log(P^*(c_k)) \quad (3.8)$$

Pour calculer la probabilité  $P^*(c_k)$ , on utilise le même raisonnement que dans le cadre classique. Il faut cependant prendre en compte que les exemples de la base d'apprentissage ont un degré d'appartenance  $x_j^N$  au nœud  $N$  différent selon le nœud. On commence donc par calculer la fonction d'appartenance du sous-ensemble fou intersection du sous-ensemble fou représentant l'appartenance des exemples au nœud  $N$  et du sous-ensemble fou représentant l'appartenance des exemples à la classe  $c_k$  en considérant  $c_k$  comme une modalité floue décrivant l'ensemble  $C$  des classes possibles.

### 3.11.3 Stratégie de partitionnement

Dans la construction d'un arbre de décision classique, il n'existe pas d'alternative pour partitionner la base d'apprentissage. Lors de la construction d'un nœud  $N$ , l'attribut  $A_j$  qui lui est associé à  $m_j$  valeurs possibles. La base  $\xi^N$  est alors partitionnée en  $m_j$  sous-bases  $\xi_j^N$  telles que :

$$\forall e_i \in \xi^N, \text{ si } e_i(A_j) = v_{jl} \text{ alors } e_i \in \xi_l^N, 1 \leq l \leq m_j \quad (3.9)$$

et

$$\xi = \bigcup_{l=1 \dots m_j} \xi_l^N$$

En revanche dans le cas fou, diverses stratégies peuvent être utilisées. La plus courante, est de répartir tous les éléments de la base dans toutes les sous-bases en leur

affectant un degré d'appartenance. Une autre stratégie est d'utiliser une  $\alpha$ -coupe pour réaliser un partitionnement classique.

L'algorithme présenté dans la section 3.11.1 ne précise pas dans le cas flou comment sont obtenues les modalités floues associées au arcs, ni à quel moment. Or, c'est à partir des fonctions d'appartenances de ces modalités floues que sont déterminés les degrés d'appartenance des exemples à chacune des sous-bases ou que sont déterminées les  $\alpha$ -coupe.

Ils existent deux techniques pour obtenir ces modalités floues. La première consiste à demander à un expert du domaine auquel est appliqué l'arbre de décision flou, de déterminer la forme et la position des sous-ensembles flous décrivant les attributs. Cette technique a pour avantage de donner une représentation des données en parfaite adéquation avec le problème, mais nécessite de disposer d'un expert pour chaque domaine auquel on veut appliquer sa méthode de construction d'arbres de décision flous. La seconde technique consiste à extraire automatiquement des données les modalités floues.

Un autre choix à effectuer est à quel moment on extrait ces modalités floues. En effet, celles-ci peuvent être extraites une unique fois avant le lancement de l'algorithme, ou alors, elles peuvent être redéterminées à chaque nœud. Dans le cas où les modalités sont définies par un expert, la seconde possibilité est, bien entendu, difficile à mettre en œuvre.

#### 3.11.4 Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt permet de décider s'il est nécessaire de continuer pour un ensemble d'exemple de la base d'apprentissage à développer l'arbre. Les raisons de l'arrêt peuvent être un nombre trop faible d'exemple dans l'ensemble considéré ou bien si tous les exemples de l'ensemble ont la même classe  $c_k$ , ou tout du moins un nombre suffisant relativement au nombre d'exemples dans l'ensemble. Les critères sont les mêmes pour les arbres de décision flous en adaptant l'évaluation de ces critères.

#### 3.11.5 Classification

Un chemin dans un arbre de décision classique équivaut à une règle de production du type si [prémisse] alors [conclusion]. La prémisse correspond à une conjonction des tests réalisés sur les valeurs des attributs sur le chemin considéré. La conclusion est la valeur de la classe associée à la feuille terminant le chemin. Dans le cadre classique le résultat d'un test sur une valeur d'un attribut est binaire. Soit la valeur de l'attribut correspond à celle attendue, soit elle ne correspond pas. Dans le cadre flou, le résultat d'un tel test est une réponse graduelle. Il faut donc adapter la méthode de classification

pour déterminer qu'elle est la meilleure classification possible en fonction de l'arbre de décision flou. La méthode consiste à mesurer la similarité de chacune des valeurs des attributs de l'élément à classer avec les modalités floues présentes dans les tests de l'arbre de décision. La similarité de l'élément à chaque prémisse peut alors être calculée permettant d'inférer des conclusions.

Les entrées sont considérées comme des objets décrits de façon précise (non floue) dans leur espace de représentation et que l'univers de sortie  $C$  des classes est une variable catégorielle non ordonnée. Pour chacun des chemins de l'arbre de décision flou, il extrait une règle de classification  $R_f$ , où  $f$  est la feuille terminant le chemin, de la forme :

si  $e$  satisfait les conditions conduisant à  $f$  alors  $s_{fc_1} = d_{fc_1}$ .et ....et

$$s_{fc_K} = d_{fc_K}$$

$s_{fc_K}$  est le score associé à la classe  $c_K$  pour la feuille  $f$ .  $d_{fc_K}$  est le degré de représentativité de la classe  $c_K$  associé la feuille  $f$  lors de la construction de l'arbre. On associe la probabilité conditionnelle d'obtenir la classe à laquelle ils correspondent sachant que les conditions permettant d'arriver jusqu'à  $f$  sont satisfaites, c'est-à-dire  $P^*(c_K \setminus f)$ .

Ces règles constituent un système d'inférence floue. Elles utilisent le formalisme des règles de Takagi-Sugeno. Ceci nous permet de calculer le score associé à la classe  $c_K$  en utilisant la formule suivante :

$$s_{fc_K} = \frac{\sum_{f=1}^F \mu_f(e) * d_{fc_K}}{\sum_{f=1}^F \mu_f(e)} \quad (3.10)$$

$F$  est le nombre de feuilles de l'arbre et donc le nombre de règles du système d'inférence floue.  $\mu_f(e)$  représente le degré d'appartenance de  $e$  à la feuille  $f$  et le degré d'activation de la prémisse de la règle produite à partir du chemin menant à  $f$ .

## 3.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les méthodes qui permettent de construire un arbre de décision ainsi que les méthodes d'élagage (pré-élagage, post-élagage). Nous avons également expliqué la notion de l'entropie comme une mesure de classement.

Nous remarquons qu'on peut s'inspirer de la notion de l'entropie floue pour l'utiliser dans l'approche proposé des choix des investissements, en remplaçant les valeurs actuelles nettes par des ensemble flous.

# Approche proposée pour un choix d'investissement par la logique floue

## 4.1 Introduction

Nous avons vus au premier chapitre, que dans un avenir incertain probabiliste, lorsque le projet implique plusieurs décisions au futur, on utiliseras les arbres de décisions par le calcul de l'espérance mathématique dans chaque nœud.

Beaucoup d'études et de recherches s'orientent vers l'adoption d'autres outils et techniques pour quantifier l'aspect incertain du futur ou le risque dans la prise de décision. Parmi ces techniques, on distingue la théorie des ensembles flous.

Dans ce travail, nous proposons premièrement d'appliquer la théorie des ensembles flous, pour calculer l'espérance mathématique dans chaque nœud, en considérant les grandeurs utilisées dans le calculs (cash-flows, probabilités et taux d'actualisation) comme flous.

Cette approche a été inspirée de deux travaux. Le premier est celui de C.KAHRAMAN [9], ou il a travaillé sur le profit espéré flou en aboutissant à un problème linéaire à résoudre. Le deuxième est celui de M. SHAHRIARI [5] qui a comparé entre plusieurs VAN floues séparées, en fuzzifiant toutes les grandeurs.

Notre contribution est, donc d'introduire l'outil des algorithmes génétiques a fin de calculer la valeur actuelle nette (VAN) floue dans le contexte d'un arbre de décision flou, par la résolution d'un système d'optimisation non linéaire qui résulte de la formulation du problème par la théorie des ensembles flous.

Deuxièmement, nous proposons d'introduire la mesure d'entropie floue utilisée dans l'algorithme ID3 (les arbres de régression) au lieu de l'espérance mathématique.

L'utilisation de la notion d'entropie comme critère de sélection en économétrie est déjà une méthode ressentie. Notons dans ce contexte les travaux de D.S.Hooda [19] et X.

Huang [20]. À partir de cette idée et en se basant sur les travaux de A-Y. Chang [17] et T. Bentercia [18], pour mesurer la performance d'une grandeur dans un environnement probabiliste flou par l'entropie, que nous avons inspiré notre travail.

Le problème d'optimisation non linéaire rencontré dans les deux approches sera résolu par les algorithmes génétiques sous MATLAB.

Pour mieux illustrer notre approche, nous traitons deux exemples. Le premier est un exemple pédagogique relatif à la cimenterie de TEBESSA, le second est tiré de la littérature.

## 4.2 Bases théoriques de l'approche

### 4.2.1 Approche basée sur l'espérance mathématique floue

Le calcul classique par arbre de décision des choix d'investissement, utilise l'espérance mathématique de la VAN ou du profit espéré. Le décideur cherche à maximiser l'espérance mathématique à chaque nœud d'événement. le calcul se fait en remontant le temps de la fin vers le début. L'arbre est progressivement modifié en éliminant, à chaque nœud de décision, les branches de décisions dominées.

Donc pour un nœud de  $n$  événements on a :

$$E(VAN) = \sum_{i=1}^n p_i * VAN_i \quad (4.1)$$

L'application de la théorie des ensemble flous sur l'équation (4.1), permet de rendre les grandeurs (cash-flows, probabilités et taux d'actualisation) comme des intervalles au lieu de les prendre comme des chiffres exactes. Ces intervalles vont être définis par les décideurs en fonction des données de l'environnement économique et financier de l'entreprise.

Donc l'expression floue de l'équation (4.1) sera comme suit :

$$E(\tilde{VAN}) = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i * V\tilde{A}N_i \quad (4.2)$$

Avec :

$E(\tilde{VAN})$  : espérance mathématique floue d'un événement (scénario) de «  $i$  » choix.

$V\tilde{A}N_i$  : valeur actuelle nette floue du choix  $i$ .

$\tilde{p}_i$  : probabilité floue du choix  $i$ .

La représentation floue des grandeurs de calcul, sous forme de coupes- $\alpha$  sera de la façon suivante :

- Pour les probabilités :  $\tilde{P}_i = [P_{i\min}(\alpha), P_{i\max}(\alpha)]$
- pour les cash-flows :  $\tilde{CF}_i = [cf_{i\min}(\alpha), cf_{i\max}(\alpha)]$
- Pour le taux d'actualisation :  $\tilde{T} = [t_{\min}(\alpha), t_{\max}(\alpha)]$ .

D'autre part l'expression classique de la VAN est donnée par :

$$VAN = -I_0 + \sum_{i=1}^n cf_i (1+t)^{-i} \quad (4.3)$$

Avec :

$I_0$  : Coût initial de l'investissement ;

$n$  : Nombre d'années.

$t$  : Taux d'actualisation.

Donc l'écriture de la VAN sous forme de nombre flou est la suivante :

$$V\tilde{A}N = [-I_0 + \sum_{i=1}^n cf_{i\min} (1+t_{\max})^{-i}, -I_0 + \sum_{i=1}^n cf_{i\max} (1+t_{\min})^{-i}] \quad (4.4)$$

Pour le cas étudié les cash-flows sont supposés identiques, donc l'équation (4.3) devient :

$$VAN = -I_0 + CF * \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \quad (4.5)$$

L'écriture sous forme de coupes- $\alpha$  nous donne alors :

$$V\tilde{A}N_i = \left[ -I_0 + \frac{1 - (1+t_{\max}(\alpha))^{-n}}{t_{\max}(\alpha)} * CF_{\min}(\alpha), -I_0 + \frac{1 - (1+t_{\min}(\alpha))^{-n}}{t_{\min}(\alpha)} * CF_{\max}(\alpha) \right] \quad (4.6)$$

Pour calculer l'espérance mathématique flou d'un scénario «  $S$  » de «  $i$  » choix, on aura besoin de formuler un problème d'optimisation non linéaire de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(V\tilde{A}N)_s = [e_{s\min}(\alpha), e_{s\max}(\alpha)] \\ \text{sous les contraintes} \\ \tilde{P}_i \in [P_{i\min}(\alpha), P_{i\max}(\alpha)] \\ \tilde{CF}_i \in [cf_{i\min}(\alpha), cf_{i\max}(\alpha)] \\ \tilde{T} \in [t_{\min}(\alpha), t_{\max}(\alpha)], \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

## 4.2.2 Approche basée sur l'entropie modifiée floue

Cette approche ou l'entropie modifiée consiste à remplacer les probabilités dans la formule de l'espérance par l'entropie floue.

Donc l'équation (4.1) sera de la forme :

$$EM = \sum_{i=1}^n V\tilde{A}N_i * H(\tilde{C}_i) \quad (4.8)$$

Avec :

$\tilde{EM}$  :L'entropie modifiée d'un événement de «  $i$  » choix.

$V\tilde{A}N_i = [van_{i\min}(\alpha), van_{i\max}(\alpha)]$  : La valeur actuelle nette floue du choix  $i$  représentée sous forme de coupes- $\alpha$ .

$H(\tilde{C}_i) = -\tilde{p}_i * \log_2 \tilde{p}_i$  : L'entropie floue du choix  $i$  de probabilité  $p_i$ .

En suivant la même démarche de l'approche classique floue, on aura le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \tilde{EM} = [em_{\min}(\alpha), em_{\max}(\alpha)] \\ \text{sous les contraintes} \\ \tilde{P}_i \in [P_{i\min}(\alpha), P_{i\max}(\alpha)] \\ \tilde{C}F_i \in [cf_{i\min}(\alpha), cf_{i\max}(\alpha)] \\ \tilde{T} \in [t_{\min}(\alpha), t_{\max}(\alpha)], \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous proposons, pour résoudre les systèmes précédents, d'utiliser les algorithmes génétiques sous MATLAB à cause de leur adaptabilité à résoudre ce genre de problèmes. (voir annexe A).

## 4.2.3 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et de l'évolution naturelle : croisements, mutations, sélection,...etc.

Un algorithme génétique recherche le ou les extremums d'une fonction définie sur un espace de données. Pour l'utiliser, on doit disposer des cinq éléments suivants :

1. Un principe de codage de l'élément de population. Cette étape associe à chacun des points de l'espace d'état d'une structure de données. Elle se place généralement après une phase de modélisation mathématique du problème traité. La qualité du codage des données conditionne le succès des algorithmes génétiques.

2. Un mécanisme de génération de la population initiale. Ce mécanisme doit être capable de produire une population d'individus non homogène qui servira de base pour les générations futures. Le choix de la population initiale est important car il peut rendre plus ou moins rapide la convergence vers l'optimum global. Dans le cas où l'on ne connaît rien du problème à résoudre, il est essentiel que la population initiale soit répartie sur tout le domaine de recherche.
3. Une fonction à optimiser. Celle-ci retourne une valeur de  $\mathbb{R}^+$  appelée *fitness* ou fonction d'évaluation de l'individu.
4. Des opérateurs permettant de diversifier la population au cours des générations et d'explorer l'espace d'état. L'opérateur de croisement recompose les gènes d'individus existant dans la population, l'opérateur de mutation a pour but de garantir l'exploration de l'espace d'états.
5. Des paramètres de dimensionnement : taille de la population, nombre total de générations ou critère d'arrêt, probabilités d'application des opérateurs de croisement et de mutation.

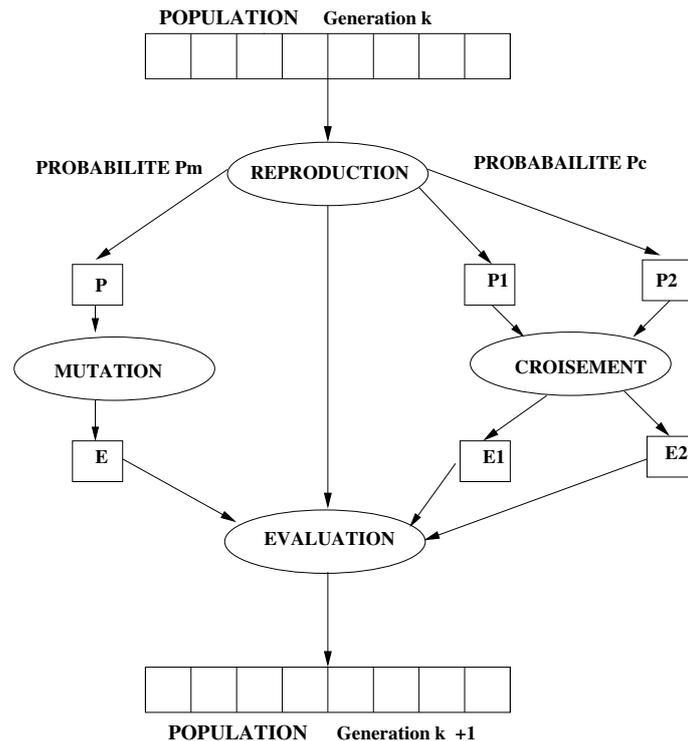


FIGURE 4.1 – Mutation et croisement.

Le principe général du fonctionnement d'un algorithme génétique est représenté sur la figure (4.1) : on commence par générer une population d'individus de façon aléatoire. Pour passer d'une génération  $k$  à la génération  $k + 1$ , les trois opérations suivantes sont répétées pour tous les éléments de la population  $k$ . Des couples de parents P1 et P2

sont sélectionnés en fonction de leurs adaptations. L'opérateur de croisement leur est appliqué avec une probabilité  $P_C$  (généralement autour de 0.6) et génère des couples d'enfants  $C1$  et  $C2$ . D'autres éléments  $P$  sont sélectionnés en fonction de leur adaptation. L'opérateur de mutation leur est appliqué avec la probabilité  $P_m$  ( $P_m$  est généralement très inférieur à  $P_C$ ) et génère des individus mutés  $P'$ . Le niveau d'adaptation des enfants ( $C1, C2$ ) et des individus mutés  $P'$  sont ensuite évalués avant l'insertion dans la nouvelle population. Différents critères d'arrêt de l'algorithme peuvent être choisis :

- Le nombre de générations que l'on souhaite exécuter peut être fixé a priori.
- L'algorithme peut être arrêté lorsque la population n'évolue plus ou plus suffisamment rapidement.

## 4.3 Cas étudié

### 4.3.1 Données

La direction de la cimenterie de TEBESSA a décidé d'acquérir de nouveaux matériels afin d'augmenter la capacité de production. Ils avaient deux scénarii d'investissements, soit l'augmentation de capacité et ce par une deuxième ligne ou par une extension, soit par l'expédition avec une rénovation complète ou partielle de l'ensacheuse.

Le tableau (4.1) montre les scénarii prévus par l'administration et les coûts ainsi que les probabilités affectés a chaque choix d'investissement.

Le tableau (4.2) donne les estimations des cash-flows qui correspondent à chaque choix d'investissement pour les cinq prochains années. On suppose que les cash-flows sont identiques.

Scénarios	Choix	Coûts (*10 <sup>6</sup> DA)	Prévisions de production Tonne/an	Probabilités
Augmentation de capacité	2 <sup>ème</sup> ligne	12000	1 * 10 <sup>6</sup>	0,65
	Extension	8000	500000	0,35
Expédition	Rénovation complète	1400	150000	0,7
	Rénovation partielle ensacheuse	1400	75000	0.3

Tableau 4.1 – Scénarii d'investissement.

Projet	Coûts	1	2	3	4	5
A	12000	4200	4200	4200	4200	4200
B	8000	2100	2100	2100	2100	2100
C	2000	630	630	630	630	630
D	1400	315	315	315	315	315

Tableau 4.2 – Estimation des cash-flow.

L'arbre de décision de cet exemple est donnée par la figure (4.2). C'est un problème élémentaire (t=0), représentant un nœud de décision, comportant deux scénarios possibles, dans chaque scénario on trouve deux choix possibles.

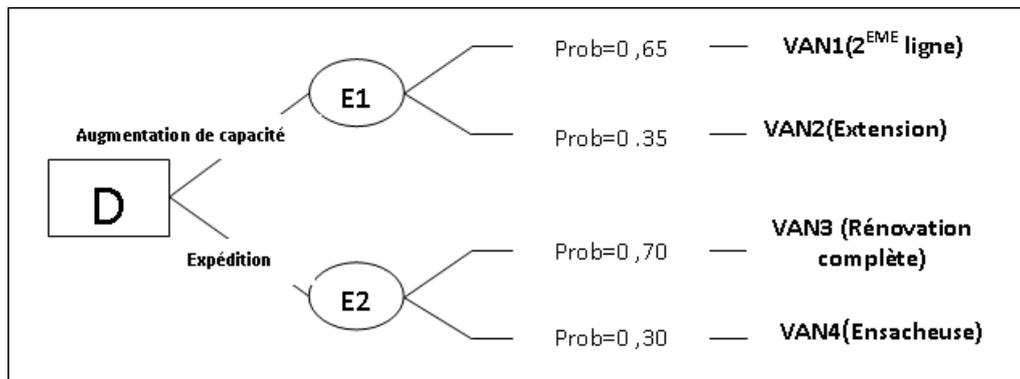


FIGURE 4.2 – Arbre de décision. Cas étudié.

### 4.3.2 Fuzzification des données

Premièrement nous commençons par la fuzzification des données du problème :

- *Le taux d'actualisation* (figure 4.3) : Nous admettons un intervalle de 10% à 15%, donc la représentation sous forme de nombre flou nous donne :

$$\tilde{T} = [t_{min}(\alpha), t_{max}(\alpha)] = [0,02\alpha + 0,1; 0,15 - 0,03\alpha].$$

Pour représenter graphiquement cette expression nous utilisons le logiciel MATLAB, on aura le graphe suivant :

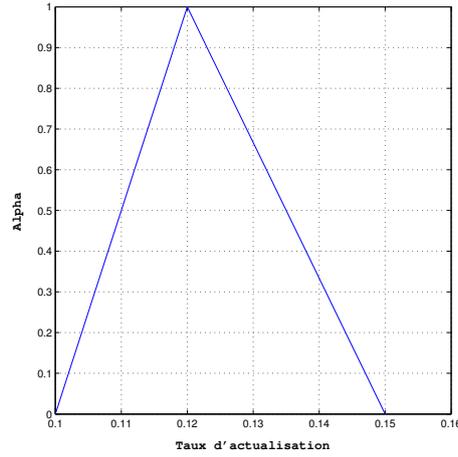


FIGURE 4.3 – Taux d'actualisation flou.

– Les probabilités (figure 4.4) :

$$P_1 = [P_{1min}(\alpha), P_{1max}(\alpha)] = [0,05\alpha + 0,6; 0,75 - 0,1\alpha]$$

$$P_2 = [P_{2min}(\alpha), P_{2max}(\alpha)] = [0,1\alpha + 0,25; 0,4 - 0,05\alpha]$$

$$P_3 = [P_{3min}(\alpha), P_{3max}(\alpha)] = [0,05\alpha + 0,65; 0,75 - 0,05\alpha]$$

$$P_4 = [P_{4min}(\alpha), P_{4max}(\alpha)] = [0,07\alpha + 0,23; 0,35 - 0,05\alpha]$$

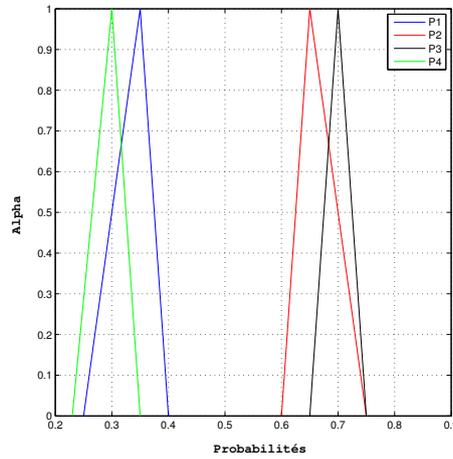


FIGURE 4.4 – Représentation floue des probabilités.

– Les cash-flows (figure 4.5) :

$$\tilde{C}F_1 = [cf_{1min}(\alpha), cf_{1max}(\alpha)] = [200\alpha + 4000; 4500 - 300\alpha]$$

$$\tilde{C}F_2 = [cf_{2min}(\alpha), cf_{2max}(\alpha)] = [200\alpha + 1900; 2400 - 300\alpha]$$

$$\tilde{C}F_3 = [cf_{3min}(\alpha), cf_{3max}(\alpha)] = [30\alpha + 600; 660 - 30\alpha]$$

$$\tilde{CF}_4 = [cf_{4min}(\alpha), cf_{4max}(\alpha)] = [15\alpha + 300; 330 - 15\alpha]$$

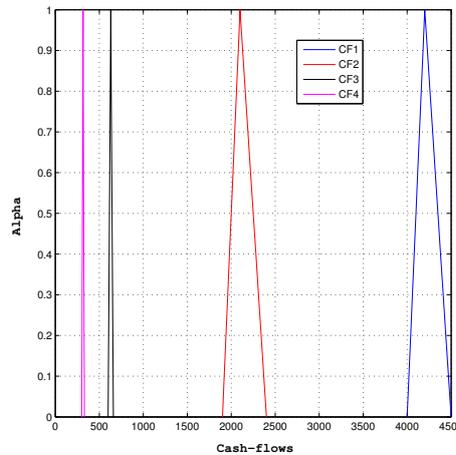


FIGURE 4.5 – Représentation floue des cash-flows.

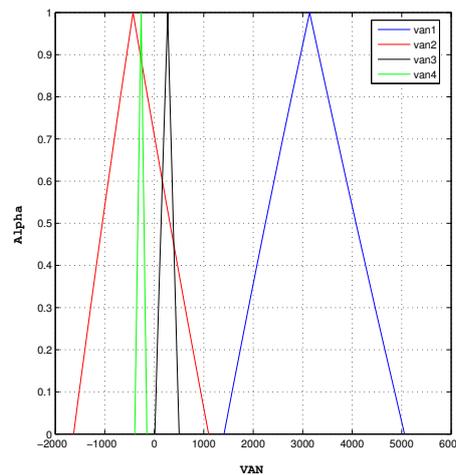


FIGURE 4.6 – Représentation floue des VAN.

### 4.3.3 Résultats

Les résultats obtenus sont illustrés par les figures

L'étape d'interprétation des résultats est très importante, dans le processus de fuzzification et défuzzification car, à partir de cette étape, des décisions vont être prises. À cette fin, beaucoup d'approches ont été proposées pour la comparaison des nombres flous.

L'une des méthodes de comparaison la plus courante et que nous allons l'utiliser est celle du *centre de gravité*.

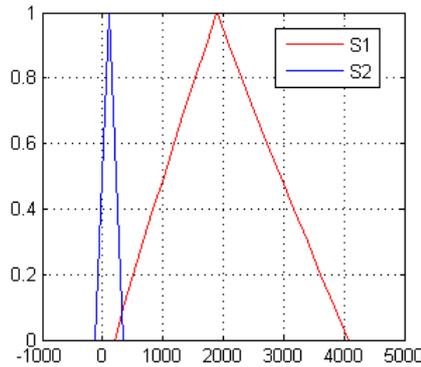


FIGURE 4.7 – Représentation floue de l'approche classique.

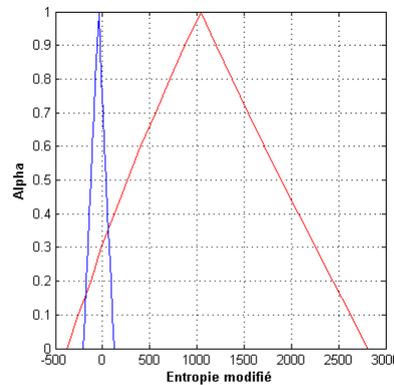


FIGURE 4.8 – Représentation floue d'entropie modifiée.

En comparant les deux nombres flous décrivant les scénarios, on remarque que le premier scénario (augmenter la capacité, graphe en rouge) est favorable par rapport au deuxième (rénovation).

Les deux approches nous donnent les mêmes résultats (décisions) à cause de l'écart important entre les deux scénarios. Mais on constate un décalage des deux nombres flous représentant l'approche de l'entropie modifiée vers la gauche.

Nous allons confirmer ces observations par la défuzzification des deux nombres flous par la méthode du centre de gravité. L'expression générale de cette méthode est donnée par :

$$EM = 1/2 * \int_0^1 [(a\alpha + b) + (a_1\alpha + b_1)]d\alpha \quad (4.10)$$

Tel que  $(a\alpha + b)$  et  $(a_1\alpha + b_1)$  sont les fonctions inverses des deux bornes inférieure et supérieure du nombre flou décrivant l'entropie modifiée de chaque scénario.

Pour le premier scénario,  $EM = 1131,6 * 10^6 DA$ .

Pour le deuxième scénario,  $EM = 61,82 * 10^6 DA$ .

Faisons la comparaison avec la méthode classique en calculant l'espérance mathématique de chaque scénario :

$$E(VAN)_1 = P_1 * VAN_1 + P_2 * VAN_2$$

Pour le premier scénario,  $E(VAN)_1 = 1890,574 * 10^6 DA$ .

Pour le premier scénario,  $E(VAN)_2 = 110 * 10^6 DA$ .

Essayons maintenant de calculer de la même façon l'entropie de la VAN par l'équation suivante :

$$EN(VAN) = VAN_1 * P_1 * (-\log_2 P_1) + VAN_2 * P_2 * (-\log_2 P_2)$$

On aura pour le scénario 1 :  $EN(VAN) = 1040,50 * 10^6 DA$ .

Pour le scénario 2 :  $EN(VAN) = 40 * 10^6 DA$ .

Nous constatons que malgré que les décisions sont inchangées, l'approche par l'entropie floue a diminué les gains espérés.

## 4.4 Exemple

La capacité de production de la société « S » est saturée à la suite du succès rencontré par le lancement récent d'un de ses nouveaux produits. Le flux de trésorerie annuelle dégagé est de 200 *KU*. Cette société anticipe la poursuite de la croissance des ventes de ce produit, mais l'intensité de la croissance dépend de la conjoncture économique.

Compte tenu de cette incertitude, la société a le choix entre trois politiques :

- Ne pas faire d'investissement : Dans ce cas le flux de trésorerie annuelle obtenu sera de 200 *KU*.
- Construire une usine moyenne : Le montant de l'investissement est alors de 500 *KU*. Cet investissement lui permettrait de faire face à l'évolution de la demande en cas de conjoncture modérée. Le flux de trésorerie annuelle obtenu sera de 300 *KU*. Par ailleurs, et si nécessaire, la société pourrait mettre en place une année plus tard une extension pour un montant de 400 *KU*. Cet extension ne pourra être réalisée que la première année pour des raisons de contrainte financière. Le flux de trésorerie dégagé après mise en service de l'extension serai de 700 *KU*, en cas de conjoncture favorable.
- Construire une usine de taille importante d'un montant de 1000 *KU*. Les flux attendus sont de 700 *KU* par an si le conjoncteur est favorable.

L'horizon considéré est de cinq ans. Le taux d'actualisation est de 10%.

La première année, il y a 40% de chance que la conjoncture soit favorable. Dans ce dernier cas, il y a 60 % de chance qu'elle le reste pour les années suivantes.

A contrario, si la conjoncture défavorable (c'est-à-dire modérée) en première année (probabilité de 60%), il y a une probabilité de 90% qu'elle le reste pendant les quatre autres années.

Calculer l'espérance mathématique des valeurs actuelles nettes des différentes politiques d'investissement.

Nous allons traiter cet exemple par trois approches, la première c'est l'approche classique (équation 4.1), puis par l'approche classique floue et enfin par l'approche proposée (équation 4.9), puis nous procéderons à la comparaison entre les résultats obtenus.

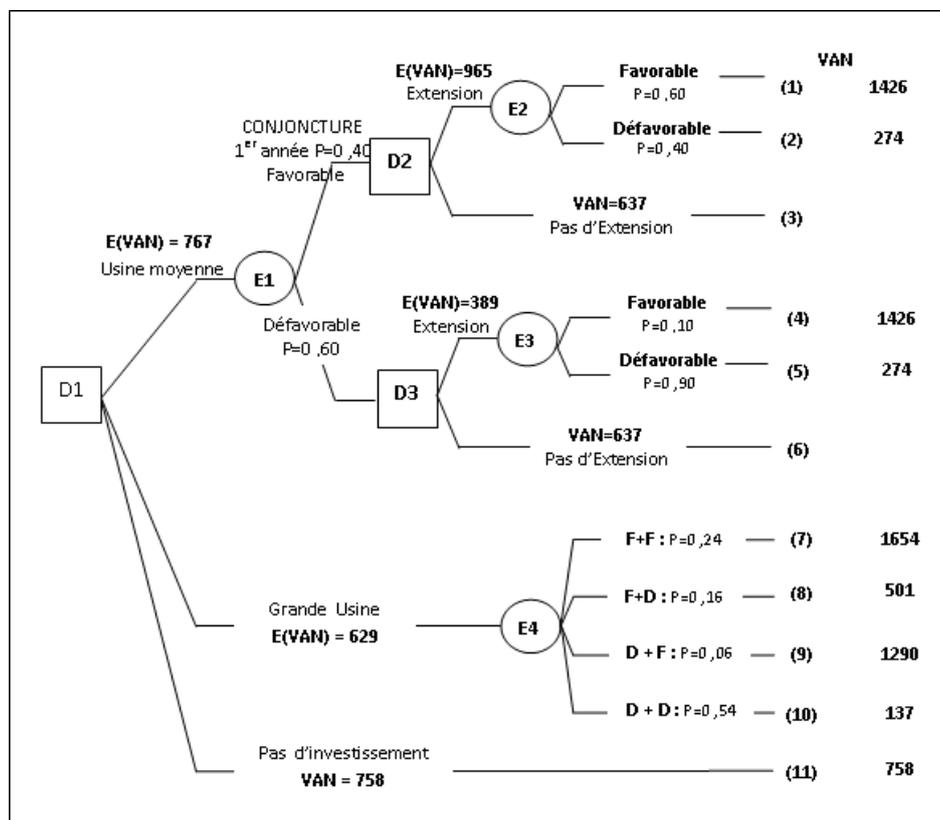


FIGURE 4.9 – Arbre de décision. Exemple.

#### 4.4.1 Approche classique

$$VAN_1 = -500 - 400 * 1.1^{-1} + 300 * 1.1^{-1} + [700 * (1 - 1.1^{-4})/0.1] * 1.1^{-1} = 1426.3$$

$$VAN_2 = -500 - 400 * 1.1^{-1} + 300 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 273.6$$

$$VAN_3 = -500 + 300 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 637.26$$

$$VAN_4 = -500 - 400 * 1.1^{-1} + 300 * 1.1^{-1} + [700 * (1 - 1.1^{-4})/0.1] * 1.1^{-1} = 1426.3$$

$$VAN_5 = -500 - 400 * 1.1^{-1} + 300 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 273.6$$

$$VAN_6 = -500 + 300 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 637.26$$

$$VAN_7 = -1000 + 700 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 1654$$

$$VAN_8 = -1000 + 700 * 1.1^{-1} + [300 * (1 - 1.1^{-4})/0.1] * 1.1^{-1} = 501$$

$$VAN_9 = -1000 + 300 * 1.1^{-1} + [700 * (1 - 1.1^{-4})/0.1] * 1.1^{-1} = 1290$$

$$VAN_{10} = -1000 + 300 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 137$$

$$VAN_{11} = 200 * (1 - 1.1^{-5})/0.1 = 758.2$$

Donc la décision à faire est celle de procéder à une usine moyenne, puis si la conjoncture est favorable dans la première année on entamera à l'extension sinon ne pas faire l'extension.

#### 4.4.2 Approche classique floue

L'expression de l'espérance mathématique floue, est donnée par :

$$E(\tilde{VAN}) = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i * V\tilde{A}N_i$$

La formulation du problème par la théorie des ensembles flous, nous donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\tilde{VAN}) = [e_{min}(\alpha), e_{max}(\alpha)] \\ \text{sous les contraintes} \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ \tilde{P}_i \in [P_{imin}(\alpha), P_{imax}(\alpha)] \\ \tilde{CF}_i \in [cf_{imin}(\alpha), cf_{imax}(\alpha)] \\ \tilde{T} \in [t_{min}(\alpha), t_{max}(\alpha)], \end{array} \right.$$

Fuzzification des données

- Taux d'actualisation :

$$\tilde{T} = [t_{min}(\alpha), t_{max}(\alpha)] = [0, 02\alpha + 0, 08; 0, 14 - 0, 04\alpha].$$

- Cash-flows :

$$CF_1 = [cf_{1min}(\alpha), cf_{1max}(\alpha)] = [100\alpha + 200; 400 - 100\alpha]$$

$$CF_2 = [cf_{2min}(\alpha), cf_{2max}(\alpha)] = [150\alpha + 550; 900 - 200\alpha]$$

- Probabilités

$$P_1 = [P_{1min}(\alpha), P_{1max}(\alpha)] = [0, 2\alpha + 0, 4; 0, 7 - 0, 1\alpha]$$

$$P_2 = [P_{2min}(\alpha), P_{2max}(\alpha)] = [0, 1\alpha + 0, 3; 0, 55 - 0, 15\alpha]$$

$$P_4 = [P_{4min}(\alpha), P_{4max}(\alpha)] = [0, 05\alpha + 0, 6; 0, 75 - 0, 1\alpha]$$

Après comparaison des événements et élimination des décisions dominées, on aura à comparer les nombres flous désignant l'événement  $E_1$  (Graphe en noir) c'est à dire faire une usine moyenne et la décision de ne pas investir (Graphe en rouge) (figure 4.10).

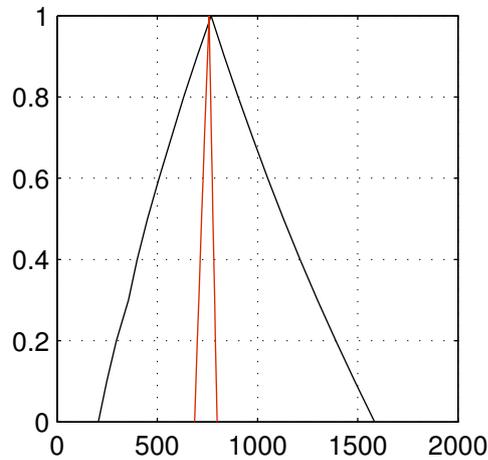


FIGURE 4.10 – Comparaison par l'approche classique floue.

#### Résultats par l'approche classique floue :

- Nous remarquons que la fonction d'appartenance (triangle) décrivant l'événement  $E_1$ , a un large support (base) par rapport au deuxième, c'est à cause des intervalles des probabilités et les cash-flows ainsi que le taux d'actualisation. Par contre, l'autre événement (ne pas investir) ne dépend que d'un seul intervalle qui est le taux d'actualisation.
- Après la défuzzification des deux nombres flous, nous concluons que la décision à retenir est celle de procéder à une usine moyenne, mais vue que les valeurs des espérances de la VAN sont voisines, le décideur peut hésiter à prendre une décision. C'est l'avantage de cette représentation puisqu'elle donne une vision plus claire des deux décisions ainsi que les risques qu'elles peuvent générer.
- Dans ce cas, le décideur peut procéder à une usine moyenne parce que, dans le pire des cas le projet est rentable (le triangle est intégralement dans la partie positive).

### Résultats par l'approche entropie floue :

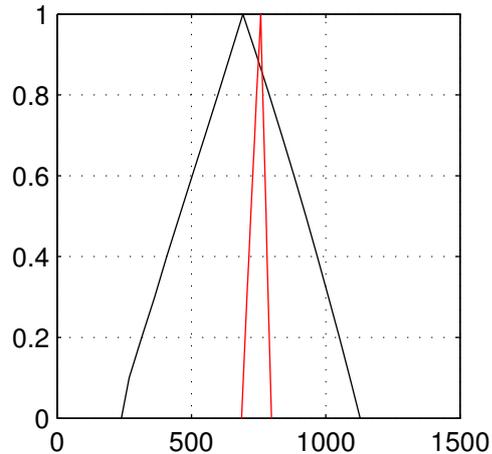


FIGURE 4.11 – Résultat par l'approche entropie floue.

Contrairement aux deux méthodes précédentes, la décision qui maximise l'espérance mathématique de la VAN est celle de ne pas investir.

Nous constatons que, par cette approche l'espérance mathématique de la VAN a diminuée par rapport à l'approche classique floue. Donc cette méthode minimise les gains espérés ou les VAN.

## 4.5 Conclusion

L'approche floue de choix des investissements nous a permis de prendre une vision claire sur le risque que peut caractériser un investissement, ce risque concernant les fluctuations des grandeurs utilisées. En d'autre terme, au lieu de prendre des valeurs estimées (non certaines), on les remplace par des intervalles flous. C'est pour cette raison que l'étape de détermination des intervalles est importante et doit être prise par des experts.

L'approche classique floue a donné des résultats voisins de celle de l'approche classique (VAN espérée).

L'approche par l'entropie floue a diminué les VAN espérées par rapport au deux approches classique et floue.

# Conclusion générale

La décision d'investissement est une décision de nature stratégique, et à ce titre, elle engage l'avenir de l'entreprise. Une mauvaise orientation peut condamner la survie de la société. Il y a à cela deux raisons essentielles :

- l'investissement est un choix irréversible : il est difficile de céder des biens, souvent spécifiques, en cas de surcapacité de production ;
- l'investissement nécessite des fonds substantiels : si les flux monétaires sont inférieurs aux flux anticipés, des problèmes de trésorerie apparaîtront car il faut de toute façon, supporter les charges fixes.

C'est pourquoi les décideurs doivent avoir des données exactes pour décider d'investir, ce qui est impossible. La théorie des ensemble flous nous fourni un outil d'aide à la décision très puissant.

L'utilisation des techniques informatiques et des algorithmes génétiques nous permet d'aboutir à un modèle décisionnel clair et efficace.

L'idée de ce travail est de s'inspirer de la notion de la l'entropie pour l'introduire dans le choix des investissements. Le but est de proposer une technique d'aide a la décision pour le choix des investissements en avenir incertain ou risqué, avec l'introduction des technique de la logique floue.

Nous avons proposé deux approches pour le choix des investissements :

La première étant basée sur l'approche classique (VAN espéré), nous avons ainsi fuzzifié toute les grandeurs utilisée (Cash-flow, taux d'actualisation, probabilités).

La deuxième est basée sur la notion de l'entropie flou modifiée comme mesure de sélection des investissements.

Après la formulation du problème nous obtenons un système d'optimisation non linéaire. Pour le résoudre, nous avons utilisé les algorithmes génétiques que nous avons trouvé très efficaces.

L'approche floue du choix des investissement nous a permis de prendre une vision claire, sur le risque que peut caractériser un investissement concernant les fluctuations des grandeurs de calcul.

L'approche classique floue a donnée des résultats voisins de celle de l'approche classique (VAN espérée), mais avec une représentation graphique qui supervise l'étendue du projet.

L'approche par l'entropie floue a diminuer les VAN espérées par rapport au deux approches classique et floue.

Nous proposons comme perspective, de concevoir un système expert à base de logique floue avec une interface graphique conviviale, facilitant la prise de décision dans l'entreprise.

# Annexes

## Programmation MATLAB

### A.1 Programme général de calcul de la VAN et Entropie floues (cas de la cimenterie)

```

%%%%%%%%%Calcul floue finale%%%%%%%%%
clc;
clear all;
% Scenario I %
%Problème de minimisation%
Aeq1 = [0 0 1 1
        0 0 0 0
        0 0 0 0
        0 0 0 0];
beq1=[1;0;0;0];
options=gaoptimset('StallGenLimit',200,'PlotFcns',@gaplotbestf,\
'Generations',200,'PopulationSize',100,'EliteCount',5);
x11=[];
fmin1=[];
alpha1=[];
for alpha=0:0.1:1
lb1=[-12000+((4000+200*alpha)*(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))\
/(0.15-0.03*alpha));-8000+((1900+200*alpha)*\
(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))/(0.15-0.03*alpha));\
0.05*alpha+0.6;0.1*alpha+0.25];
ub1=[-12000+((4500-300*alpha)*(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))\
/(0.10+0.02*alpha));-8000+((2400-300*alpha)*(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))\
/(0.10+0.02*alpha));0.75-0.1*alpha;0.4-0.05*alpha];

```

```

[x,fval,exitflag] =ga(@entropy1,4,[],[],Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x11=[x11 x];
alpha1=[alpha1 alpha];
fmin1=[fmin1 fval];
end;
% Problème de maximisation
x22=[];
alpha2=[];
fmax1=[];
for alpha=1:-0.1:0
lb1=[-12000+((4000+200*alpha)*(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))\
/(0.15-0.03*alpha));-8000+((1900+200*alpha)*\
(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))/(0.15-0.03*alpha));\
0.05*alpha+0.6;0.1*alpha+0.25];
ub1=[-12000+((4500-300*alpha)*(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))\
/(0.10+0.02*alpha));-8000+((2400-300*alpha)*\
(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))/(0.10+0.02*alpha));\
0.75-0.1*alpha;0.4-0.05*alpha];
[x,fval,exitflag]=ga(@entropymax1,4,[],[],Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x22=[x22 x];
alpha2=[alpha2 alpha];
fmax1=[fmax1 -fval];
end;
% Courbe
alphafin=[alpha1 alpha2];
fminmax1=[fmin1 fmax1];
plot(fminmax1,alphafin,'r');
plot(fmin1,alpha1);
hold on;
plot(fmax1,alpha2);
hold on;
grid on;
% Scenario 2
% Problème de minimisation
Aeq1 = [0 0 1 1
        0 0 0 0
        0 0 0 0
        0 0 0 0];

```

```

beq1 = [1;0;0;0];
options = gaoptimset('StallGenLimit',200,'PlotFcns',\
@gaplotbestf,'Generations',200,'PopulationSize',100,'EliteCount',5);
x33=[];
fmin2=[];
alpha3=[];
for alpha=0:0.1:1
lb1=[-2000+((600+30*alpha)*(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))\
/(0.15-0.03*alpha));-1400+((300+15*alpha)*\
(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))/(0.15-0.03*alpha));\
0.05*alpha+0.65;0.07*alpha+0.23];
ub1=[-2000+((660-30*alpha)*(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))\
/(0.10+0.02*alpha));-1400+((330-15*alpha)*\
(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))/(0.10+0.02*alpha));\
0.75-0.05*alpha;0.35-0.05*alpha];
[x,fval,exitflag]=ga(@entropy1,4,[],[],Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x33=[x33 x];
alpha3=[alpha3 alpha];
fmin2=[fmin2 fval];
end;
%% Problème de maximisation
x44=[];
alpha4=[];
fmax2=[];
for alpha=1:-0.1:0
lb1=[-2000+((600+30*alpha)*\
(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))/(0.15-0.03*alpha));\
-1400+((300+15*alpha)*(1-(1.15-0.03*alpha)^(-5)))\
/(0.15-0.03*alpha));0.05*alpha+0.65;0.07*alpha+0.23];
ub1=[-2000+((660-30*alpha)*(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))\
/(0.10+0.02*alpha));-1400+((330-15*alpha)*\
(1-(1.10+0.02*alpha)^(-5)))/(0.10+0.02*alpha));\
0.75-0.05*alpha;0.35-0.05*alpha];
[x,fval,exitflag]=ga(@entropymax1,4,[],[],\
,Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x44=[x44 x];
alpha4=[alpha4 alpha];
fmax2=[fmax2 -fval];

```

```

end;
% Courbe
alphafin2=[alpha3 alpha4];
fminmax2=[fmin2 fmax2];
hold on;
plot(fminmax2,alphafin2,'b');
plot(fmin1,alpha1);
hold on;
plot(fmax1,alpha2);
hold on;
grid on;

```

## A.2 Programme général de calcul de la VAN et Entropie floues (cas de l'exemple)

```

%%%Calcul floue finale %%
clc;
clear all;
% Scenario I
% Problème de minimisation
Aeq1 = [0 0 1 1
        0 0 0 0
        0 0 0 0
        0 0 0 0];
beq1 = [1;0;0;0];
options =gaoptimset('StallGenLimit',200,'PlotFcns',\
@gaplotbestf,'Generations',200,'PopulationSize',100,'EliteCount',5);
x11=[];
fmin1=[];
alpha1=[];
for alpha=0:0.1:1
lb1=[-500-(400/(1.14-0.04*alpha))+(200+100*alpha)/(1.14-0.04*alpha)\
+(((550+150*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-4))\
/(0.14-0.04*alpha)))*(1/(1.14-0.04*alpha));\
-500-(400/(1.14-0.04*alpha))+(200+100*alpha)*\
(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5))/(0.14-0.04*alpha));\
0.2*alpha+0.4;0.1*alpha+0.3];

```

```

ub1=[-500-(400/(1.08+0.02*alpha))+\
(400-100*alpha)/(1.08+0.02*alpha)+\
(((900-200*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-4))\
/(0.08+0.02*alpha)))*(1/(1.08+0.02*alpha));\
-500-(400/(1.08+0.02*alpha))+((400-100*alpha)\
*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5)))/(0.08+0.02*alpha));\
0.7-0.1*alpha;0.55-0.15*alpha];
[x,fval,exitflag]=ga(@entropy1,4,[],[],Aeq1,\
beq1,lb1,ub1,[],options);
x11=[x11 x];
alpha1=[alpha1 alpha];
fmin1=[fmin1 fval];
end;
% Problème de maximisation
x22=[];
alpha2=[];
fmax1=[];
for alpha=1:-0.1:0
lb1=[-500-(400/(1.14-0.04*alpha))+(200+100*alpha)\
/(1.14-0.04*alpha)+(((550+150*alpha)*\
(1-(1.14-0.04*alpha)^(-4)))/(0.14-0.04*alpha)))*\
(1/(1.14-0.04*alpha));-500-(400/(1.14-0.04*alpha))\
+((200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5))\
/(0.14-0.04*alpha));0.2*alpha+0.4;0.1*alpha+0.3];
ub1=[-500-(400/(1.08+0.02*alpha))+((400-100*alpha)\
/(1.08+0.02*alpha)+(((900-200*alpha)*\
(1-(1.08+0.02*alpha)^(-4)))/(0.08+0.02*alpha)))*\
(1/(1.08+0.02*alpha));-500-(400/(1.08+0.02*alpha))\
+((400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5))\
/(0.08+0.02*alpha));0.7-0.1*alpha;0.55-0.15*alpha];
[x,fval,exitflag]=ga(@entropymax1,4,[],[],\
Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x22=[x22 x];
alpha2=[alpha2 alpha];
fmax1=[fmax1 -fval];
end;
% Courbe
alphafin=[alpha1 alpha2];

```

```

fminmax1=[fmin1 fmax1];
hold on;
plot(fminmax1,alphafin,'r');
plot(fmin1,alpha1);
hold on;
plot(fmax1,alpha2);
hold on;
grid on;
v11=[];
alpha2=[];
for alpha=0:0.1:1
v=-500+((200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5)))/(0.14-0.04*alpha));
v11=[v11 v];
alpha2=[alpha2 alpha];
end;
v22=[];
alpha3=[];
for alpha=1:-0.1:0
v=-500+((400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5)))/(0.08+0.02*alpha));
v22=[v22 v]; alpha3=[alpha3 alpha];
end;
alphafinp=[alpha2 alpha3];
y=[v11 v22];
plot(y,alphafinp,'b');
hold on;
grid on;
% Scenario 2
% Problème de minimisation
Aeq1 = [0 0 1 1
        0 0 0 0
        0 0 0 0
        0 0 0 0];
beq1 = [1;0;0;0];
options = gaoptimset('StallGenLimit',200,'PlotFcns',@gaplotbestf,\
'Generations',200,'PopulationSize',100,'EliteCount',5);
x33=[];
fmin2=[];
alpha3=[];

```

```

for alpha=0:0.1:1
lb1=[(-500-(400/(1.14-0.04*alpha)))+(200+100*alpha)/(1.14-0.04*alpha)\
+(((550+150*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-4))/(0.14-0.04*alpha)))*\
(1/(1.14-0.04*alpha)))*(0.2*alpha+0.4)*(-log2(0.2*alpha+0.4))+\
(-500-(400/(1.14-0.04*alpha)))+(200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^\
(-5))/(0.14-0.04*alpha)))*(0.1*alpha+0.3)*(-log2(0.1*alpha+0.3));\
-500+((200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5))/(0.14-0.04*alpha));\
0.1*alpha+0.3;0.2*alpha+0.4];
ub1=[(-500-(400/(1.08+0.02*alpha)))+(400-100*alpha)/(1.08+0.02*alpha)+\
(((900-200*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-4))/(0.08+0.02*alpha)))*\
(1/(1.08+0.02*alpha)))*(0.7-0.1*alpha)*(-log2(0.7-0.1*alpha))+\
(-500-(400/(1.08+0.02*alpha)))+(400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^\
(-5))/(0.08+0.02*alpha)))*(0.55-0.15*alpha)*(-log2(0.55-0.15*alpha));\
-500+((400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5))/(0.08+0.02*alpha));\
0.55-0.15*alpha;0.7-0.1*alpha];
[x,fval,exitflag]
=ga(@entropy1,4,[],[],Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);
x33=[x33 x];
alpha3=[alpha3 alpha];
fmin2=[fmin2 fval];
end;
% % Problème de maximisation
x44=[];
alpha4=[];
fmax2=[];
for alpha=1:-0.1:0
lb1=[(-500-(400/(1.14-0.04*alpha)))+(200+100*alpha)/(1.14-0.04*alpha)\
+(((550+150*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-4))/(0.14-0.04*alpha)))*\
(1/(1.14-0.04*alpha)))*(0.2*alpha+0.4)*(-log2(0.2*alpha+0.4))+\
(-500-(400/(1.14-0.04*alpha)))+(200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)\
^(-5))/(0.14-0.04*alpha)))*(0.1*alpha+0.3)*(-log2(0.1*alpha+0.3));\
-500+((200+100*alpha)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5))/(0.14-0.04*alpha));\
0.1*alpha+0.3;0.2*alpha+0.4];
ub1=[(-500-(400/(1.08+0.02*alpha)))+(400-100*alpha)/(1.08+0.02*alpha)\
+(((900-200*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-4))/(0.08+0.02*alpha)))*\
(1/(1.08+0.02*alpha)))*(0.7-0.1*alpha)*(-log2(0.7-0.1*alpha))+\
(-500-(400/(1.08+0.02*alpha)))+(400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)\
^(-5))/(0.08+0.02*alpha)))*(0.55-0.15*alpha)*(-log2(0.55-0.15*alpha));\

```

```

-500+((400-100*alpha)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5))/(0.08+0.02*alpha));
0.55-0.15*alpha;0.7-0.1*alpha];
[x,fval,exitflag] =ga(@entropymax1,4,[],[],Aeq1,beq1,lb1,ub1,[],options);\
x44=[x44 x];
alpha4=[alpha4 alpha];
fmax2=[fmax2 -fval];
end;
% Courbe
alphafin2=[alpha3 alpha4];
fminmax2=[fmin2 fmax2];
hold on;
plot(fminmax2,alphafin2,'black');
plot(fmin1,alpha1);
hold on;
plot(fmax1,alpha2);
grid on;
%%%%%%%%%% Choix de ne Pas investir %%%%%%%%%%
v55=[];
alpha5=[];
for alpha=0:0.1:1
v=((200)*(1-(1.14-0.04*alpha)^(-5))/(0.14-0.04*alpha));
v55=[v55 v];
alpha5=[alpha5 alpha];
end;
v66=[]; alpha6=[];
for alpha=1:-0.1:0
v=((200)*(1-(1.08+0.02*alpha)^(-5))/(0.08+0.02*alpha));
v66=[v66 v]; alpha6=[alpha6 alpha];
end;
alphafin5=[alpha5 alpha6];
y=[v55 v66];
plot(y,alphafin5,'g');
hold on;
grid on;

```

### A.3 Sous-programme entropie

```
function z = entropy1(p)
```

```

sum=0; for i=1:1:2
sum=sum-p(i)*p(i+2)*log2(p(i+2));
end;
z=sum;

```

## A.4 Sous-programme probabilité

```

function z = prob(p)
sum=0;
for i=1:1:2
sum=sum-p(i)*p(i+2);
end;
z=sum;

```

## A.5 Exemple de programme pour tracer les graphes (Cash-flow)

```

x11=[]; alpha1=[];
for alpha=0 :0.1 :1
x=4000+200*alpha;
x11=[x11 x];
alpha1=[alpha1 alpha];
end;
x22=[];
alpha2=[];
for alpha=1 :-0.1 :0
x=4500-300*alpha;
x22=[x22 x];
alpha2=[alpha2 alpha];
end;
alphafin=[alpha1 alpha2];
y=[x11 x22];
plot(y,alphafin,'b');
hold on;
grid on;
x33=[];
alpha3=[];

```

```

for alpha=0 :0.1 :1
x=1900+200*alpha ;
x33=[x33 x] ;
alpha3=[alpha3 alpha] ;
end ;
x44=[] ;
alpha4=[] ;
for alpha=1 :-0.1 :0
x=2400-300*alpha ;
x44=[x44 x] ;
alpha4=[alpha4 alpha] ;
end ;
alphafin1=[alpha3 alpha4] ;
y=[x33 x44] ;
plot(y,alphafin1,'r')
x55=[] ; alpha5=[] ;
for alpha=0 :0.1 :1
x=600+30*alpha ;
x55=[x55 x] ;
alpha5=[alpha5 alpha] ;
end ;
x66=[] ;
alpha6=[] ;
for alpha=1 :-0.1 :0
x=660-30*alpha ;
x66=[x66 x] ;
alpha6=[alpha6 alpha] ;
end ;
alphafin3=[alpha5 alpha6] ;
y=[x55 x66] ;
plot(y,alphafin3,'black') ;
hold on ;
x77=[] ;
alpha7=[] ;
for alpha=0 :0.1 :1
x=300+15*alpha ;
x77=[x77 x] ;
alpha7=[alpha7 alpha] ; end ;

```

```
x88=[];  
alpha8=[];  
for alpha=1 :-0.1 :0  
x=330-15*alpha;  
x88=[x88 x];  
alpha8=[alpha8 alpha];  
end;  
alphafin4=[alpha7 alpha8];  
y=[x77 x88];  
plot(y,alphafin4,'g')  
hold on;
```

# Bibliographie

- [1] B.BERNADETTE, M.CHRISTOPHE « *Logique floue, principes, aide à la décision* ». Édition DUNOD, 2012.
- [2] JAMES J.BACKLEY. « *Fuzzy probabilities, new approach and applications* ». Édition SPRINGER, 2005.
- [3] EDMUNDO B.H. « *logique floue et algorithmes génétiques pour le pré - traitement de données de biopuces et la sélection de gènes* » Thèse de doctorat. Laboratoire d'Étude et de Recherche en Informatique d'Angers. 2008.
- [4] L. GACÔGNE « *Logique floue et applications* » Conservatoire National des Arts et métiers. FRANCE. Novembre 2003.
- [5] M. SHAHRIARI « *Mapping Fuzzy Approach in Engineering Economics* ». International Research Journal of Finance and Economics ISSN 1450-2887 Issue 81 (2011).
- [6] GEORGE J.K et YUAN « *Fuzzy sets and fuzzy logic Theory and applications* » Prentice HALL PTR. 1995.
- [7] MICHAEL H. « *Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications* » Édition SPRINGER, 2005.
- [8] TIMOTHY J. ROSS « *fuzzy logic with engineering applications* » Édition John Wiley & Sons Ltd. 2004.
- [9] C. KAHRAMAN « *Fuzzy Engineering Economics and Investment Analysis Techniques* » Édition SPRINGER, 2008.
- [10] RICCO RAKOTOMALALA « *Arbres de Décision* » Laboratoire ERIC Université Lumière Lyon 2. Revue MODULAD, 2005.
- [11] PH. PREUX « *Fouille de données : Notes de cours* » Université de Lille 3. Mai 2011.
- [12] ALAIN GIRARD « *Exploration d'un algorithme génétique et d'un arbre de décision à des fins de catégorisation* » Mémoire présenté à l'université du QUÉBEC à trois-rivières. Avril 2007.

- 
- [13] H.LAMIS « *Une approche probabiliste pour le classement d'objets incomplètement connus dans un arbre de décision* » Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble I. Octobre 2008.
- [14] B. FRANÇOIS « *Modélisation des formes et de leur contexte graphique par arbres de décision flous pour la conception d'interfaces stylo* » DEA informatique. Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires. Décembre 2003.
- [15] L.LANGLOIS, C.BONNIER, M.BRINGER « *Contrôle de gestion* » Collection LMD et Professionnel. Éditions BERTI, Alger 2008.
- [16] A. ADLA « *Aide à la Facilitation pour une prise de Décision Collective : Proposition d'un Modèle et d'un Outil* » Thèse de doctorat. Université de Toulouse. Juin 2010.
- [17] A-Y. CHANG , D.J. WHITEHOUSE , S-L. CHANG, Y-C HSIEH « *An approach to the measurement of single- machine flexibility* » International Journal of Production Research. Vol.39, No.8, pp. 1589-1601, 2001.
- [18] T.BENTERCIA, L H. MOUSS, M.D. MOUSS, M.E. BENBOUZID « *Modeling and Evaluation of Single Machine Flexibility Using Fuzzy Entropy and Genetic Algorithm Based Approach* » Main technical program at IEEE ETFA'2011. 978-1-4577-0018-7/11©2011 IEEE.
- [19] D.S.HOODA, M. STEHLÍK « *Portfolio Analysis of Investments in Risk Management* » The Open Statistics and Probability Journal.3, 21-26. 2001.
- [20] X. HUANG « *An Entropy Method for Diversified Fuzzy Portfolio Selection* » International Journal of Fuzzy Systems, Vol. 14, No. 1, March 2012.
- [21] E.LEHRER , R. SMORODINSKY « *Relative entropy in sequential decision problems* » Journal of Mathematical Economics 33. 425–439. ELSEVIER. 2000.
- [22] R.M. GRAY « *Entropy and Information Theory* » Edition SPRINGER Verlag 1990.
- [23] A. GOLAN « *Information and Entropy Econometrics — A Review and Synthesis* » Foundations and Trends in Econometrics, vol 2, no 1–2, pp 1–145, 2006.
- [24] B. DEVILLE « *Decision Trees for Business Intelligence and Data Mining* » SAS Institute Inc. Cary, NC, USA 2006.
- [25] G. Liang « *A comparative study of three Decision Tree algorithms : ID3, Fuzzy ID3 and Probabilistic Fuzzy ID3* » Bachelor Thesis Informatics & Economics Erasmus University Rotterdam, the Netherlands Augustus, 2005.
- [26] T.H. DANG « *Mesures de discrimination et leurs applications en apprentissage inductif* » Thèse de doctorat de l'Université de Paris 6. juillet 2007.

- [27] K. MATIAŠKO, J. BOHÁČIK, V. LEVASHENKO, Š. KOVALÍK « *Learning fuzzy rules from fuzzy decision trees* » Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 4, , No. 2. 2006.
- [28] Y. BROSTAUX « *Étude du classement par forêts aléatoires d'échantillons perturbés à forte structure d'interaction* » Thèse de doctorat. Faculté Universitaire des sciences agronomiques de GEMBOUX. BELGIQUE 2005.
- [29] C. OLARU , L. WEHENKEL « *A complete fuzzy decision tree technique* » Fuzzy Sets and Systems 138 221 – 254. ELSEVIER. 2003.
- [30] L. CORNEZ « *Discrimination automatique à base de connaissances expertes d'événements sismiques* » Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. TOULOUSE, 2007.
- [31] D. MOUNIEN, S. MOINEAUX « *Outils informatiques et l'aide à la prise de décision en entreprise* » Master 2 Informatique et Mathématiques de l'Organisation et de la Décision. Université d'AVIGNON, 2008.
- [32] R. KAST « *La théorie de la décision* » Éditions La Découverte. Paris, 1993.