

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE DE BATNA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



*Thèse*

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES EN ELECTRONIQUE**

Option : Robotique

*Thème*

---

***Stratégies de commandes avancées pour  
le suivi de trajectoires***

---

*Présentée par :*

*M<sup>elle</sup> AZOUI NAWAL*

*Magister en Electronique de l'Université de Batna, 2009*

*Maître Assistant Classe "A", Université de Batna*

**Jury :**

ABDESSEMED Rachid	Prof.	Univ. Batna	Président
SAIDI Lamir	Prof.	Univ. Batna	Rapporteur
AISSI Salim	MC.A	Univ. Batna	Examineur
HARKAT Mohammed Fouzi	Prof.	Univ. Annaba	Examineur
MESSAI Abderraouf	Prof	Univ. Constantine	Examineur
TAIBI Mahmoud	MC.A	Univ. Annaba	Examineur

**2013/2014**

## **Remerciements**

*Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur Lamir SAIDI, Professeur au département d'électronique de l'université de Batna. Je le remercie très sincèrement pour la confiance qu'il m'a accordée en m'associant aux groupes d'étudiants qui a suivi leurs encadrement avec bienveillance, pour son soutien ainsi que la confiance qu'il a manifesté à mon égard, et pour la patience inouïe qu'il m'a témoignée tout au long de l'élaboration de ce travail. Nos discussions stimulantes ont beaucoup contribué à la clarification des notions ainsi qu'à la bonne présentation de cette thèse. Qu'il reçoive l'expression de ma très grande reconnaissance.*

*Je remercie très sincèrement Monsieur Rachid ABDESSEMED, Professeur au département d'électrotechnique de l'université de Batna, d'avoir accepté la présidence du jury et pour son soutien moral incessant tout le long de la réalisation de ce travail.*

*Je suis très reconnaissante à Monsieur Mohamed Fouzi HARKAT, Professeur à l'université de Annaba, d'avoir accepté d'examiner ma thèse avec attention et rigueur, et dont la participation à la soutenance m'honore beaucoup.*

*Je suis très sensible au fait que monsieur Salim AISSI, Maître de Conférences au département d'électronique de l'université de Batna soit associé pour sa compétence à ce jury.*

*Je remercie également Monsieur Abderraouf MESSAI, Maître de conférences à l'université de Constantine, pour sa disponibilité et pour sa participation à ce jury.*

*J'adresse mes remerciements à Monsieur Mahmoud TAIBI, Maître de conférences à l'université de Annaba, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.*

*Enfin dans le souci de n'oublier personne, que tous ceux qui m'ont aidés, de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral et matériel trouvent dans ces quelques sincères mots l'expression de ma profonde gratitude.*

## **SOMMAIRE**

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	01
------------------------------------	----

<b>CHAPITRE I</b>
-------------------

### **COMMANDE ET PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES**

I.1. Introduction .....	5
I.2. Classification des types de méthodes .....	5
1.2.1 Les méthodes globales.....	5
1.2.2 Les méthodes locales.....	6
1.2.3 Les méthodes mixtes.....	7
1.2.4 Autres méthodes .....	7
I.3. Génération de trajectoires .....	7
1.3.1. Génération de trajectoires en temps minimal par optimisation .....	8
1.3.2. Génération de trajectoires sous contraintes cinématiques .....	9
1.3.3 Génération de trajectoire en ligne.....	10
1.3.4 Génération de trajectoire hors ligne.....	11
1.4 Commande des bras manipulateurs.....	11
I.4.1 Commande dans l'espace libre .....	12
I.4.1.1 Commande par articulation .....	12
I.4.1.2 Commande jacobienne.....	12
I.4.1.3 Commande par découplage non linéaire.....	13
I.4.1.4 Commande fondée sur une fonction de Lyapunov .....	13
I.4.1.5 Commande passive.....	14
I.4.1.6 Commande adaptative .....	14

I.4.1.7	Commande prédictive.....	14
I.4.1.8	Commande robuste .....	15
I.4.1.9	Commande optimale .....	15
1.4.2	Commande dans l'espace contraint .....	15
I.5.	Conclusion .....	16

<b>CHAPITRE II</b>
--------------------

## **COMMANDE PAR BACKSTEPPING**

II.1	Introduction .....	17
II.2	Notions de bases.....	17
II.2.1	Système non linéaires .....	17
II.2.2	Equilibre.....	18
II.2.3	Plan de phase.....	19
II.2.4	Stabilité.....	19
II.3	Méthodes de Lyapunov .....	20
II.3.1	Première méthode de Lyapunov.....	21
II.3.2	Deuxième méthode de Lyapunov .....	21
II.4	Commande backstepping.....	23
II.5	Commande backstepping d'un bras manipulateur à 2DDL .....	24
II.5.1	Représentation d'état du robot .....	25
II.5.2	Commande backstepping non adaptative .....	26
II.5.3	Commande backstepping adaptative .....	30
II.6	Commande backstepping adaptative sur un robot à couple électrique .....	35
II.6.1	Représentation d'état du robot .....	35
II.6.2	Commande backstepping pour le suivi de la trajectoire .....	36
II.6.2.1	Système en boucle fermée.....	43
II.6.2.2	Résultats de simulation .....	43
II.7	Conclusion .....	46

## CHAPITRE III

### **COMMANDE ADAPTATIVE BACKSTEPPING AVEC OBSERVATEUR**

III.1	Introduction .....	47
III.2	Commande adaptative avec observateur .....	48
III.3	Commande backstepping adaptative avec observateur d'un robot .....	
	manipulateur à deux degrés de liberté .....	50
III.3.1	Représentation d'état et propriétés.....	50
III.3.2	Observateur backstepping.....	51
III.3.3	Etude de la stabilité .....	54
III.3.4	Simulations et résultats .....	55
III.4	Commande backstepping adaptative avec observateur d'un robot manipulateur à couple électrique.....	59
III.4.1	Modèle et propriétés.....	59
III.4.2	Observateur.....	60
III.4.4	Résultats et simulations.....	63
III.6	Conclusion.....	68

## CHAPITRE IV

### **COMMANDE PASSIVE**

IV.1	Introduction .....	69
IV.2	Principe de la passivité .....	69
IV.2.1	Système statique passif.....	71
IV.2.2	Système dynamique passif.....	71
IV.2.3	Définition différentielle de la passivité.....	73
IV.2.4	Propriétés .....	73
IV.2.4.1	Connexion parallèle.....	74
IV.2.4.2	Connexion par rétroaction .....	75

IV.2.5 Définition intégrale de la passivité .....	76
IV.3 Commande basée sur le principe de passivité.....	76
IV.3.1 Théorème général .....	77
IV.3.2 Version non adaptative .....	78
IV.3.3 Versions adaptatives .....	79
IV.3.3.1 Approche directe .....	80
IV.3.3.2 Approche composite .....	81
IV.4 Commande adaptative passive d'un bras manipulateur	
IV.4.1 Problématique .....	82
IV.4.2 Elaboration de la loi de commande adaptative .....	83
IV.4.3 Amélioration de la commande passive .....	87
IV.5 Commande adaptative passive d'un bras manipulateur à couple électrique.....	91
IV.6.1 Représentation d'état .....	91
IV.6.2 Loi de commande passive .....	93
IV.7 Conclusion .....	99

<b>CHAPITRE V</b>
-------------------

***COMBINAISON DE LA COMMANDE PASSIVE ET DU  
BACKSTEPPING***

V.1 Introduction .....	100
V.2 Elaboration de la loi de commande .....	100
V.2.1 Commande adaptative .....	103
V.2.2 Loi d'adaptation .....	104
V.3 Amélioration des résultats .....	112
V.4 Conclusion .....	118

## CHAPITRE VI

### **COMMANDE PAR PLATITUDE**

VI.1 Introduction .....	119
VI.2 Platitude dans le cadre de l'algèbre différentielle.....	119
VI.3 Platitude et linéarisation.....	121
VI.3.1 Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique.....	121
VI.3.2 Linéarisation par bouclage dynamique endogène .....	123
VI.4 Platitude et planification de trajectoires.....	124
VI.5 Platitude et poursuite de trajectoires .....	127
VI.6 Commande adaptative basée sur la forme normale 0-plate.....	128
VI.5.1 Notations et Définition .....	129
VI.5.2. Interprétation géométrique .....	134
VI.5.3. Commande plate d'un bras manipulateur à couple électrique .....	136
VI.7 Conclusion .....	141
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>143</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>146</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>159</b>

## **INTRODUCTION GENERALE**

La synthèse d'une loi de commande pour un système non linéaire est un important problème rencontré en automatique. Dans ce cadre, plusieurs techniques de commande ont été élaborées dans la littérature et ont abouti à des résultats intéressants.

L'élaboration d'une loi de commande pour un procédé physique nécessite la prise en compte de certains paramètres tels que le suivi de la consigne, le rejet de la perturbation, une marge de robustesse vis-à-vis de certains paramètres de procédé à piloter. La littérature propose une multitude de structures de commande. Chacune d'elle possède son application et également ses propriétés (cas linéaire, cas non linéaire, procédé stable, consigne d'un type donné, ...etc.). Commander un processus, c'est déterminer les commandes à lui appliquer, de manière à assurer aux variables d'états ou aux sorties qui nous intéressent un comportement précisé par un cahier des charges.

Une loi de commande robuste a pour objectif d'obtenir un fonctionnement acceptable d'un système réel dans son contexte normal d'utilisation. En premier lieu, il est fondamental que le comportement du procédé commandé soit stable. Ainsi, on parlera de stabilité robuste pour une loi de commande lorsque la stabilité de la boucle fermée n'est pas altérée par les écarts entre le modèle utilisé pour la synthèse de la loi de commande et le procédé à commander. Ces imperfections de modèle peuvent être dues à des imprécisions intrinsèques liées à l'incapacité d'avoir une connaissance totale de tous les phénomènes mis en jeu, ou bien à des imprécisions fixées a priori, découlant d'approximations ou de réductions d'ordre, et permettant de mettre en œuvre certaines techniques de synthèse.

Pour obtenir une loi de commande robuste il est donc nécessaire de prendre en compte ces imperfections de modèle. Pour ce faire, le modèle du procédé se compose d'une famille de systèmes (éventuellement non linéaires et de dimension infinie) définie à

partir d'un modèle nominal. Cette famille est donnée en spécifiant soit des perturbations sur le système nominal soit des incertitudes sur le système.

En plus de la stabilité robuste, une loi de commande se doit d'atteindre les objectifs de régulation et de poursuite imposés par le cahier des charges. Ces performances peuvent alors être traduites sous la forme d'un système d'équations dynamiques.

Le problème de la stabilité possède, en matière de commande, une importance fondamentale. La recherche d'une loi de commande garantissant la stabilité d'un système asservi peut se faire à l'aide des fonctions de Lyapunov. Les théorèmes de Lyapunov ont été pendant longtemps des outils importants dans la théorie de la commande non linéaire. Cependant, leur utilisation a été entravée par les difficultés de trouver une fonction de Lyapunov pour un système donné. La méthode de trouver une telle fonction a été souvent laissée à l'imagination et à l'expérience du concepteur [1]. En outre, plus la dynamique non linéaire du système est plus compliquée, plus cette fonction sera difficile à élaborer.

Au cours des deux dernières décennies, on a assisté à un développement extraordinaire dans l'élaboration de lois de commande non linéaires robustes telle que la commande par Backstepping, commande passive, platitude, ...etc.

La méthode de Backstepping est une procédure récursive utilisant la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et dans l'étude de la stabilité. Dans la technique du Backstepping, il s'agit de choisir une fonction de l'état comme étant l'entrée d'un sous système et de procéder de la même manière récursivement jusqu'à obtenir la commande à appliquer au système global. Cette procédure de conception comme son nom en anglais "Backstepping" l'indique, veut dire marche arrière ou étape arrière ; puisque la procédure commence à la sortie du système et fait des pas en arrière à travers des intégrateurs du système en sélectionnant les valeurs désirées des composantes de l'état jusqu'à ce que l'entrée actuelle de la commande soit atteinte. Dans la technique du Backstepping, il s'agit de trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en montrant la stabilité globale. Un problème majeur existe dans le développement de cette approche dite Backstepping. La difficulté réside dans la détermination des matrices de régression et du nombre des paramètres inconnus et augmente avec chaque étape du processus de développement de la méthode du Backstepping. De plus, la supposition de la linéarité en les paramètres ne peut pas être toujours vraie en pratique.

Une deuxième méthode parmi les méthodes basées sur Lyapunov est la commande passive. Cette dernière a été développée par Sadgh et Hürwitz [2], issue des travaux de Slotine et Li [2]. Elle utilise de manière essentielle la structure lagrangienne des systèmes mécaniques pour faire décroître une fonction de Lyapunov.

Le problème de la commande non linéaire de position d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté à couple électrique sera développé en utilisant la méthode du Backstepping et la passivité. On se propose d'appliquer les deux techniques citées précédemment en assurant le contrôle de stabilité asymptotique et le suivi de la trajectoire désirée de position et de vitesse. Un avantage important de ces méthodes est l'exploitation du modèle non linéaire afin d'établir la loi de commande en évitant ainsi l'annulation des différentes non-linéarités utiles [1].

Une autre nouvelle méthodologie a été développée en utilisant le concept de la platitude différentielle pour le suivi de trajectoire. La propriété de platitude d'un système est une notion relativement récente en automatique qui a été proposée et développée, à partir de 1992, par M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon [3]. Cette propriété, qui permet de paramétrer de façon très simple le comportement dynamique d'un système, est basée sur la mise en évidence d'un ensemble de variables fondamentales du système : ses sorties plates.

Ce point de vue, comme nous allons le voir, a de multiples et intéressantes conséquences relativement sur la commande des systèmes. En premier lieu, cela permet de remettre au centre de la commande d'un processus la notion de trajectoire que le système doit exécuter, c'est-à-dire que le mouvement demandé à un système doit avant tout être réalisable par ce système. Cela permet ainsi d'éviter de nombreux problèmes auxquels sont confrontés les automaticiens. L'une des premières étapes de la commande par platitude consistera alors à générer une trajectoire désirée adéquate qui tient compte implicitement du modèle du système. En deuxième lieu, cette commande implique également la conception d'un contrôle par bouclage permettant la poursuite de cette trajectoire. On retrouve ainsi un des principes de base de la boucle de rétroaction : elle sert essentiellement à compenser les erreurs inhérentes à toute modélisation. Nous verrons de plus que, bien qu'utilisant le modèle non linéaire du processus à commander, ce bouclage, élaboré dans l'optique d'une poursuite asymptotique de la trajectoire à réaliser, sera conçu dans un cadre linéaire.

Le concept de platitude a été mis en œuvre dans plusieurs domaines d'application, comme par exemple la commande des réacteurs chimiques [4], la commande des processus thermiques [5], la commande des moteurs [6], la commande de suspension active ou semi active [7], le pilotage automatique d'avion [8], ou encore le pilotage de grue [9]. Il est important de noter que les systèmes plats sont une généralisation des systèmes linéaires commandables dans le sens où tout système linéaire commandable est plat.

Outre l'introduction et la conclusion générales, ce mémoire est organisé en cinq chapitres répartis comme suit :

- Le premier chapitre est dédié à une présentation des méthodes de planification et de généralisation de trajectoires ainsi que les différentes techniques utilisées pour la commande des bras manipulateurs.
- Le chapitre suivant est consacré à l'exposition théorique de la méthode du backstepping et présente une approche générale pour la conception d'une commande adaptative de position pour un robot à couple électrique en utilisant la technique du backstepping seule dans un premier temps puis une association backstepping-observateur dans un second temps.
- Le troisième chapitre est consacré à la présentation théorique de la commande passive et son application sur les robots considérés dans cette thèse.
- Le quatrième chapitre proposera la combinaison de la commande backstepping et la passivité.
- Le cinquième chapitre présentera la théorie de la platitude et l'application de formes normales 0-plates sur notre procédé.

# **CHAPITRE I**

## **COMMANDE ET PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES**

### **I.1. Introduction**

La planification de trajectoire est un sujet d'étude très important en robotique. Elle se base sur trois domaines scientifiques variés. Ces domaines sont la robotique, l'intelligence artificielle et le contrôle. Le problème étudié par la planification de trajectoire, consiste à trouver un chemin "sûr" qui emmène un robot d'une position initiale à une position finale désirée pour effectuer une tâche. Par "sûr" on entend que le robot ne doit pas entrer en collision ni avec les autres objets qui peuvent se trouver sur son chemin, ni avec lui-même. Il ne doit pas non plus passer par des singularités qui risquent de l'endommager ou de faire perdre sa contrôlabilité. Ce problème est très vaste et admet plusieurs variantes comme la planification de trajectoire pour les robots mobiles, la coopération de plusieurs robots, la planification sous contraintes différentielles et la planification des mécanismes à chaînes fermées. Il peut être appliqué dans d'autres domaines que la robotique, tel que la chimie par exemple pour la modélisation des molécules. Une liste plus complète est donnée dans [10].

### **I.2. Classification des méthodes de planification**

Traditionnellement, les méthodes de planification de trajectoires ont été classées en trois types de méthodes qui sont, les méthodes globales, les méthodes locales et les méthodes mixtes.

#### **I.2.1 Les méthodes globales**

Les méthodes globales ([11], [12], [13]) supposent une connaissance totale de l'environnement. Ces méthodes opèrent généralement en deux phases. La première phase

consiste à modéliser l'espace libre accessible par le robot. Ce qui est fait généralement hors ligne une seule fois pour le robot dans son environnement. La deuxième phase se base sur le modèle généré par la première phase afin de trouver une trajectoire. Cette phase correspond à des requêtes effectuées en ligne qui sont rapides, vu que le travail le plus lourd en temps de calcul est effectué hors ligne. Les méthodes globales ne sont pas adaptées aux environnements qui changent lors du déplacement du robot. Tout changement dans l'environnement du robot, nécessite de recalculer la première phase qui est très gourmand en temps de calcul. De plus, le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté du robot.

### **1.2.2 Les méthodes locales**

Pour pallier les problèmes de temps de calcul des méthodes globales et pour permettre la navigation des robots dans des environnements dynamiques, les méthodes locales ont été proposées. L'une des plus populaires de ces méthodes est la méthode des champs de potentiel proposée par [14]. Cette méthode suppose que le robot évolue dans un champ potentiel qui attire le robot vers la position souhaitée, et qui repousse les différentes pièces du robot loin des obstacles présents dans l'environnement. Il existe une autre méthode locale aussi populaire, appelée la méthode des contraintes. Cette méthode, proposée par [15], attire le robot vers son but tout en considérant les obstacles comme étant des contraintes sur le mouvement du robot. A cause du caractère local de ces méthodes qui ne connaissent pas tout leur environnement, le robot peut se bloquer dans un minimum local et ne peut plus avancer vers son but. Les auteurs de [16] ont proposé deux types de méthodes de planification de trajectoires pour les robots sériels. La première méthode [17] est adaptée aux environnements dynamiques et aux robots ayant un grand degré de liberté qui coopèrent dans le même environnement. Elle se base sur la méthode des contraintes pour évoluer vers le but et elle permet d'éviter les minima locaux en choisissant une direction de contournement d'obstacle à chaque fois qu'un minimum local est détecté. Le robot juge qu'il est dans un minimum local, du moment où il n'arrive plus à avancer vers son but qu'il n'a pas atteint encore. La deuxième méthode qu'ils ont proposée est une méthode mixte.

### **I.2.3 Les méthodes mixtes**

Les méthodes mixtes, sont une combinaison des deux types de méthodes globales et locales. La méthode mixte proposée par [18] consiste à utiliser une méthode locale pour avancer vers le but. Dans le cas où une configuration de blocage est rencontrée, une méthode globale prend le relais afin de trouver la meilleure façon de contourner l'obstacle qui bloque le robot. Une fois cet obstacle contourné, le robot continue à évoluer vers son but en utilisant la méthode locale. Cette méthode est adaptée aux robots sériels placés dans des environnements fortement encombrés.

### **I.2.4 Autres méthodes**

Cette dernière décennie, les recherches se sont orientées vers des méthodes de planification de trajectoires basées sur les cartes probabilistes. Ces méthodes ont été introduites par les travaux de [19] afin de remédier au problème de temps de calcul des méthodes globales. Cette méthode permet de modéliser l'espace de travail en choisissant des positions au hasard et en les plaçant dans un diagramme qui représente les chemins sans collisions entre les différentes positions. Pour chaque nouvelle position insérée, les chemins vers les autres positions sont vérifiés et rajoutés dans le diagramme.

D'autres méthodes inspirées de la biologie ont également été proposées, comme par exemple la méthode des réseaux de neurones proposée par [20]. Cette approche présente de bons résultats dans les environnements dynamiques des robots à deux degrés de liberté, par contre, des complications apparaissent pour les robots avec un nombre de degrés de liberté supérieur à deux.

## **I.3. Génération de trajectoires**

La génération de trajectoires est la partie du système de commande qui accepte des instructions de mouvement (déplacement dans un sens vers une position finale sur un certain chemin) et qui produit une série de consignes. De telles consignes peuvent être envoyées directement aux actionneurs ou aux boucles de commande. Les instructions de mouvement typiques contiennent la définition du chemin, les contraintes cinématiques que le robot doit respecter, les temps d'exécution, ... etc. Donc la génération du mouvement doit produire une trajectoire qui suit le chemin de façon uniforme, c'est-à-dire sans

discontinuités de vitesse, et si possible des trajectoires dont les dérivés sont d'ordre supérieur.

Les méthodes de génération de trajectoires peuvent être classées de différentes façons : selon l'espace utilisé, articulaire ou cartésien ; selon que le calcul est effectué en ligne ou hors ligne ; selon le type de données d'entrée et les contraintes imposées : trajectoire rectiligne, suivi de chemin ou point à point ; selon le type de mobilité : bras manipulateur, plate-forme mobile, bras mobiles.

Dans cette thèse, les paragraphes suivants ne traiteront que la planification de trajectoire des bras manipulateurs. Le problème de la génération de trajectoire pour des bras manipulateurs est largement traité dans la littérature, en particulier deux références attirent fortement notre attention [21] et [22].

### **I.3.1 Génération de trajectoires en temps minimal par optimisation**

Le problème de la génération de trajectoire est couramment présenté comme un problème de satisfaction de contraintes : une description polynomiale du chemin à parcourir est utilisée pour minimiser un certain critère de performance. Un polynôme d'ordre 1 peut être utilisé pour des déplacements à vitesses constantes, un polynôme d'ordre trois peut être utilisé pour satisfaire des contraintes de vitesse et un polynôme d'ordre cinq peut être utilisé pour satisfaire des contraintes de position, de vitesse et d'accélération. Le critère le plus couramment utilisé cherche à minimiser le temps de parcours de la trajectoire, ceci transforme le processus de génération de trajectoire en un problème de commande optimale.

D'une manière générale, le problème de commande optimale se traite en deux étapes : génération de trajectoire et asservissement. De cette façon, le calcul de la trajectoire optimale se réduit à optimiser la trajectoire pour satisfaire des contraintes cinématiques de la tâche et des contraintes dynamiques du robot [23], [24], [25], [26], [27], entre autres. Dans [28], la trajectoire en temps minimal est trouvée en choisissant les instants de commutation du couple appliqué à chaque articulation, en considérant qu'au moins un actionneur a le couple saturé. Les auteurs [29] proposent une méthode pour le mouvement point à point qui minimise l'énergie du mouvement en utilisant l'analyse de Fourier pour supprimer les composantes de haute fréquence et par conséquent améliorer la

souplesse du mouvement. Piazzzi présente une méthode pour minimiser le jerk pendant le processus de génération de trajectoire dans l'espace articulaire [30].

### **1.3.2. Génération de trajectoires sous contraintes cinématiques**

D'un point de vue strictement cinématique, les travaux de Paul [31], Taylor [32] et Lin [33] sont des références classiques sur la planification de trajectoire.

En utilisant la représentation par matrice de passage homogène, Paul définit l'équation fondamentale de la manipulation qui relie l'objet à saisir et l'organe terminal avec la configuration du bras manipulateur. En faisant des interpolations en ligne droite pour la position et des rotations autour d'un axe fixe, le mouvement entre deux positions est réalisé, par une séquence de rotation - translation - rotation. Le mouvement est effectué avec des accélérations constantes pour des variations linéaires de vitesse. Pour la transition entre deux segments rectilignes, il propose des changements symétriques d'accélération pendant une période  $2\tau$  ; la méthode garantit la transition entre vitesses de façon continue. La configuration des articulations du bras manipulateur est obtenue à partir des matrices interpolées et une interpolation dans l'espace des configurations est réalisée pour garantir la continuité du mouvement dans l'espace articulaire.

Taylor propose deux méthodes pour les mouvements en ligne droite, la première est une amélioration de la méthode de Paul et utilise des quaternions pour représenter les rotations. Il traite les rotations comme des positions pour obtenir un mouvement uniforme. La transition entre deux segments rectilignes est présentée selon cette nouvelle formulation du problème. La deuxième méthode cherche à corriger au moyen d'une deuxième étape de planification la trajectoire au niveau des articulations.

Lin par contre ne considère pas le mouvement dans l'espace cartésien ; sa méthode considère la transformation du chemin de l'espace cartésien vers l'espace articulaire. En utilisant des splines cubiques et des contraintes en vitesse, accélération et jerk, il cherche la trajectoire qui relie les points. Cette trajectoire est soumise à une étape d'optimisation pour déterminer la trajectoire qui satisfait les contraintes en temps minimal.

### I.3.3 Génération de trajectoire en ligne

Bestaoui propose une méthode qui utilise des polynômes du quatrième degré avec des contraintes en vitesse et en accélération pour des applications en ligne par actualisation de la trajectoire à chaque temps d'échantillonnage [34]. Cette méthode est reprise par les travaux de [35].

[36] propose l'utilisation des polynômes d'ordre 5 pour résoudre le problème de génération de trajectoire avec des conditions initiales et finales d'accélération, de vitesse et de position imposées et des temps de déplacement fixes.

Lloyd considère l'utilisation des polynômes quintiques pour des mouvements en ligne droite entre deux points. Les deux polynômes qui définissent les deux segments consécutifs sont mélangés en utilisant une fonction polynomiale [37].

Les auteurs [38] proposent une amélioration du schéma proposé par Paul avec des mouvements en ligne droite entre points successifs du chemin et des virages pour les transitions. La méthode peut être appliquée aussi bien dans l'espace cartésien que dans l'espace opérationnel. Une contrainte nécessaire pour la réussite de cette méthode porte sur la durée de déplacement sur un segment qui devra être plus grande que la somme des temps de transition.

Bazaz et Tondu introduisent une méthode à trois splines cubiques dans [39]. En utilisant quatre splines cubiques en quatre combinaisons possibles, le mouvement est réalisé entre deux points avec des vitesses (initiale et finale) imposées et des accélérations (initiale et finale) nulles. Dans ses travaux, Tondu aborde le phénomène de promenade autour du chemin par l'augmentation de la dérivé de l'accélération. Cette solution ne peut être retenue dans le contexte où le jerk est borné.

[40] propose une méthode à sept segments cubiques pour relier deux points avec des contraintes en jerk, accélération et vitesse. Cette méthode est traitée uniquement en une dimension. La trajectoire est calculée pour un mouvement point à point. Si la destination change pendant le déplacement, la trajectoire est actualisée en définissant une vitesse de transition avec une accélération nulle. Cette vitesse est calculée à partir des conditions de mouvement courantes à l'instant où la nouvelle destination est définie.

Mcfarlane propose l'utilisation de 7 segments quintiques à la place des segments cubiques [41]. Cette extension est utilisée pour des mouvements en point à point en ligne droite dans l'espace cartésien. Pour un chemin, la méthode proposée considère des mouvements en ligne droite entre points successifs et propose des fonctions polynomiales qui respectent les contraintes pour les relier.

### **I.3.4 Génération de trajectoire hors ligne**

Ce type repose sur une formulation de génération de la trajectoire à suivre en boucle ouverte. Le plus souvent, cette méthode fournit des trajectoires polynomiales en se servant d'un modèle nominal linéaire du procédé considéré. La commande trouvée est alors une inversion du modèle dans laquelle il faut tenir en compte des zéros "instables". La commande ainsi trouvée est appelée commande nominale puisqu'elle ne tient compte que du modèle et rien d'autres.

Une fois la commande nominale pré-calculée, il faut alors rechercher une commande en boucle fermée (c'est-à-dire rechercher un correcteur) permettant de prendre en compte les erreurs de modélisation et les éventuelles perturbations pouvant affecter le procédé.

## **I.4 Commande des bras manipulateurs**

Dans [42], le problème de la commande d'un robot manipulateur peut être formulé comme la détermination de l'évolution des forces généralisées (forces ou couples) que les actionneurs doivent exercer pour garantir l'exécution de la tâche tout en satisfaisant certains critères de performance.

Différentes techniques sont utilisées pour la commande des bras manipulateurs. La conception mécanique du bras manipulateur a une influence sur le choix du schéma de commande. Un robot manipulateur est une structure mécanique complexe dont les inerties par rapport aux axes des articulations varient non seulement en fonction de la charge mais aussi en fonction de la configuration, des vitesses et des accélérations.

La plupart des robots utilisent des servomoteurs électriques comme actionneurs. Dans le cas de servomoteurs ayant de faibles rapports de réduction, ce sont les servomoteurs qui doivent compenser les effets des variations des forces d'inertie et de gravité. Dans le cas de servomoteurs avec de forts rapports de réduction, l'inertie vue par

les moteurs varie beaucoup moins et il est alors possible de modéliser le robot par un système linéaire qui permet de découpler les articulations.

Le problème de la rigidité des articulations est évident lorsqu'on parle d'interaction avec l'environnement ou des collisions. Des imprécisions dans la modélisation de l'environnement peuvent se traduire par des efforts de contact importants qui peuvent endommager les mécanismes internes du robot ou son environnement.

Deux types de mouvements apparaissent quand on parle de commande du bras manipulateur. Un premier type considère que les mouvements nécessaires pour la réalisation de la tâche sont exécutés dans l'espace libre. Le deuxième type considère des mouvements spécifiques avec des forces de contact pour l'organe terminal qui se déplace dans un espace contraint. Toute tâche de robotique de service est réalisée par une combinaison de ces deux types de mouvement. Pour simplifier la commande, les deux types de mouvement sont abordés séparément.

#### **1.4.1 Commande dans l'espace libre**

Nous ne pouvons pas dans le cadre de cette thèse traiter en détails l'ensemble des techniques de commande des bras manipulateurs. Pour une étude plus détaillée, le lecteur pourra se référer à [31], [43], [22], [42] et [44]. Dans les paragraphes suivants, nous présentons juste une vue générale de différentes techniques rapportées dans la littérature.

##### **1.4.1.1. Commande par articulation**

Cette technique est utilisée par des robots manipulateurs qui utilisent des servomoteurs avec de forts rapports de réduction. Lorsque le système présente un comportement linéaire, l'asservissement du mouvement peut être réalisé par des techniques classiques de commande (commande décentralisée de type PID par exemple). Dans [43] et [44], le schéma classique est amélioré avec des signaux d'anticipation pour corriger les effets de la force de gravité et de couplage.

##### **1.4.1.2. Commande jacobienne**

Cette technique est utilisée depuis les travaux de [45] et elle est appelée ainsi car elle utilise la matrice jacobienne inverse du bras manipulateur pour calculer les vitesses de consigne nécessaires aux articulations. Elle est aussi connue sous le nom de commande à

mouvement résolu. Les approches les plus courantes sont : mouvement à vitesse résolue, mouvement à accélération résolue [46] et mouvement à force résolue [47]. La technique de mouvement résolu commande la position de l'organe terminal du manipulateur dans l'espace cartésien par combinaison des mouvements de plusieurs articulations.

Ce type de commande peut se présenter sous la forme d'un schéma cinématique quand les vitesses calculées aux articulations sont utilisées directement comme des consignes pour les boucles de commande de chaque articulation, ou sous la forme d'un schéma dynamique quand le schéma utilise le modèle dynamique pour découpler les articulations.

Son principal inconvénient est l'utilisation de l'inverse de la matrice jacobienne, qui peut devenir singulière dans certaines conditions.

#### **1.4.1.3. Commande par découplage non linéaire**

Cette technique est aussi connue sous les noms de commande dynamique ou commande par couple calculé. Lorsque l'application exige des évolutions rapides avec des contraintes dynamiques, la commande doit prendre en compte les forces d'interaction. Ce type de technique considère l'ensemble des articulations et, pour les découpler, utilise la théorie du découplage non linéaire. Cette théorie utilise le modèle dynamique du robot pour le calcul de la loi de commande, ce qui conduit à des lois de commande centralisées non linéaires. Des signaux d'anticipation peuvent être utilisés pour minimiser des effets non linéaires [48].

Ce type de technique permet la commande dans l'espace des articulations ou dans l'espace cartésien, avec l'avantage que les articulations sont découplées et peuvent évoluer à grandes vitesses avec de fortes inerties. Cette méthode dépend fortement du modèle du système ; elle est donc très sensible aux imprécisions du modèle qui entraînent un découplage imparfait. Ceci constitue son principal inconvénient.

#### **1.4.1.4. Commande fondée sur une fonction de Lyapunov**

Des méthodes basées sur une fonction de Lyapunov ont été utilisées pour la commande des bras manipulateurs de façon satisfaisante pour des tâches de suivi. Particulièrement lorsqu'on cherche à garantir la convergence asymptotique et non à linéariser le système ou à obtenir le découplage [44].

#### **1.4.1.5. Commande passive**

Cette technique considère le robot comme un système passif, c'est-à-dire un système qui dissipe de l'énergie. De telles lois de commande permettent de modifier l'énergie naturelle du robot pour qu'il réalise une tâche donnée. En utilisant le formalisme de Hamilton, la commande cherche à minimiser l'énergie du système en utilisant un bloc non linéaire passif dans la boucle de retour. La commande passive tend à être plus robuste que le découplage non linéaire lorsque la technique ne recherche pas à annuler les non-linéarités [42].

#### **1.4.1.6. Commande adaptative**

Ce type de technique vise à corriger les déficiences de la commande par découplage non linéaire comme la connaissance approximative des paramètres du modèle du robot ou pour s'adapter aux différentes conditions opératoires. Ce type de schéma cherche à estimer ou à ajuster en ligne les valeurs des paramètres utilisés dans le calcul de la loi de commande. Un des travaux les plus intéressants sur ce sujet est la commande proposée par [49]. Plusieurs travaux sur la commande adaptative sont présentés dans [50]. Les avantages de ce type de technique sont évidents ; malheureusement la puissance de calcul constitue un inconvénient important.

#### **1.4.1.7. Commande prédictive**

En utilisant le modèle du système et les consignes, ce type de commande est capable de prédire l'évolution du procédé de manière à agir en fonction de l'erreur de prédiction. Trois schémas différents sont proposés dans [51] : point final fixe, horizon fini et une combinaison des deux précédents. Un grand avantage de ce type d'approche est lié au fait que l'erreur de prédiction n'est pas contaminée par les bruits de mesure ; cependant la dépendance au modèle reste forte.

#### 1.4.1.8. Commande robuste

Dans le cas de paramètres fixes, il est connu que la technique de découplage non linéaire peut devenir instable en présence d'incertitudes. Si les paramètres du modèle ne sont pas connus de façon précise et si l'incertitude sur les paramètres admet des bornes connues, alors les techniques de commande robustes peuvent être utilisées. Par exemple, les travaux de Slotine [52] considèrent la technique de modes glissants appelée aussi commande de structure variable. Cette technique utilise une surface de glissement où la stabilité du système est garantie.

#### 1.4.1.9. Commande optimale

Pour réaliser une tâche, il peut exister un grand nombre de solutions. Dans ce cas, il peut être souhaitable de choisir une solution qui satisfasse un certain critère.

La littérature présente différents types de critères pour la commande optimale : la commande en temps minimal [53], [54], [55], la minimisation du jerk pour maximiser la souplesse du mouvement [56], [57], [58], [59] et la minimisation du couple [60], [61], entre autres.

La complexité du problème de commande optimale a motivé les chercheurs pour diviser la tâche en deux étapes : la première étape est la planification de trajectoire suivie d'une étape d'asservissement de la trajectoire [62], [63], [64].

### 1.4.2 Commande dans l'espace contraint

Lorsque l'organe terminal entre en contact avec une surface, la chaîne cinématique du robot est fermée sur l'environnement, et du fait de la raideur de l'ensemble, de faibles variations de position du point de contact peuvent induire des efforts importants. Lorsque le robot est contraint par l'environnement suivant toutes les directions, aucun déplacement de l'organe terminal n'est possible et il ne peut qu'exercer des efforts sur l'environnement ; en revanche, lorsque le robot est dans l'espace libre, l'absence de tout contact empêche la génération d'efforts. Ainsi, les notions de commande en position et de commande en effort s'excluent mutuellement : on ne peut contrôler simultanément une force et un déplacement suivant une même direction. Dans la pratique, on associe un repère de compliance à

l'organe terminal, de façon à ce que pour chacun des 6 degrés de liberté on associe soit une position soit un effort.

## **I.5. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons exposé les différentes méthodes permettant de planifier les mouvements d'un bras manipulateur. Nous avons également fait un tour d'horizon sur les approches de génération de telles trajectoires.

Aussi, du point de vue commande, les méthodes les plus utilisées pour commander de tels systèmes permettant un suivi de trajectoires ont été explicitées de manière concise.

Les chapitres suivants seront dédiés à des commandes récentes permettant de répondre aux exigences de suivi de trajectoires, de robustesse et de rejet de perturbations, qui seront appliquées en robotique.

## **CHAPITRE II**

### **COMMANDE BACKSTEPPING**

#### **II.1 Introduction**

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non-linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non-linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping fait partie de ces nouvelles méthodes de contrôle. Ce chapitre présente, dans un premier temps, une brève introduction des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit la méthode du backstepping.

#### **II.2 Notions de bases**

Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping. La majorité de ces notions sont tirées de la référence [65].

##### **II.2.1 Système non linéaires**

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux

systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en régime permanent, à différents points d'équilibres, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [65]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

### II.2.2 Equilibre

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée  $\dot{x}$  de son vecteur d'état est nulle. Pour un système :

$$\dot{x} = \varphi(x) \quad (\text{II.1})$$

L'état (ou les états) d'équilibre  $x_e$  est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique :

$$\varphi(x) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Pour les systèmes linéaires, on a  $\varphi(x) = Ax$  ce qui implique que  $x = 0$  est un point d'équilibre pour tous les systèmes linéaires. Deux cas différents peuvent survenir, si  $A$  est régulière, alors l'origine est le seul point d'équilibre; Si  $A$  est singulière, ce qui définit un sous-espace où  $Ax = 0$ , alors il existe une région d'équilibre. Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente et l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibres peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

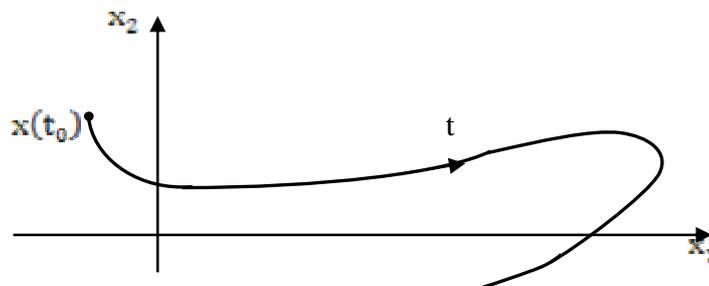


Figure II.1 : Trajectoire d'un système dans le plan de phase

### II.2.3 Plan de phase

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on fait appel à une représentation de ses trajectoires dans l'espace de phase (figure II.1). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. Cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielle (II.1), ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée plus loin dans ce chapitre.

### II.2.4 Stabilité

De façon générale, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité. Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur  $x$  qui possède la position d'équilibre  $x_e$ .

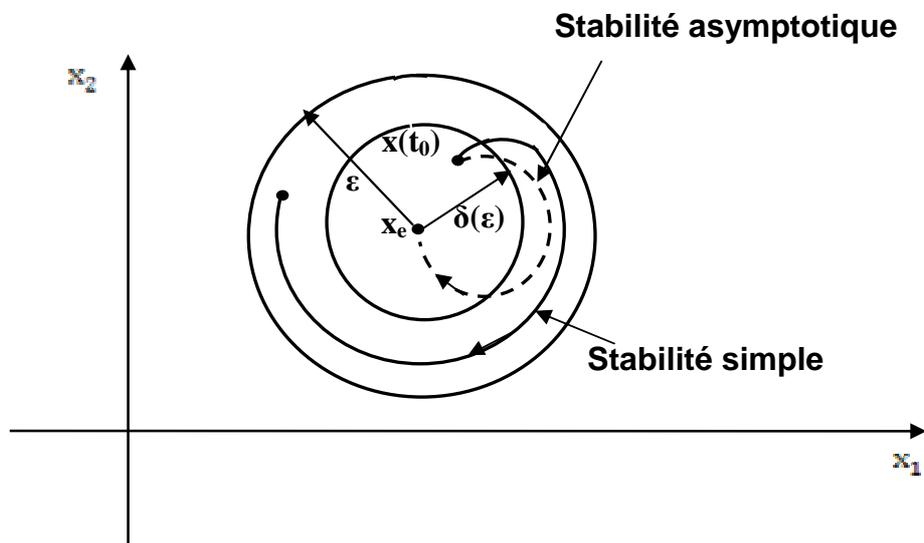


Figure II.2 : Types de stabilité selon Lyapunov

Écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps  $t = t_0$  avec les conditions initiales  $x(t_0)$ , le système aura comme état  $x(t)$ . La position d'équilibre du système est stable (figure II.2) si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 < \sigma$$

et qu'après un certain temps  $t$ , et pour toutes les valeurs  $t > t_0$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\|x(t) - x_e\|^2 < \varepsilon$$

Dans le cas contraire l'équilibre est instable. Il n'est pas nécessaire que l'état  $x(t)$  tende vers  $x_e$  lorsque  $t$  augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers  $x_e$  le système est stable asymptotiquement. Dans le cas où les états n'atteignent pas  $x_e$  mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain seuil  $\varepsilon$  alors le système a une stabilité simple (figure II.2).

### II.3 Méthodes de Lyapunov

Les faibles non-linéarités dans un système à commander sont, la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être mises de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes.

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une fonction de commande de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité. Cette technique sera développée plus en détail à la section II.3. Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fournit un outil très puissant pour tester et trouver des

conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant.

### II.3.1 Première méthode de Lyapunov

Le théorème de stabilité locale de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de linéarisation. Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors il y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéarisé est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité.

Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité d'un point singulier (stabilité locale) et ne donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale) [65]. De plus, dû aux approximations du premier degré (linéarisation), il n'est pas possible de tenir compte de tous les types de phénomènes non-linéaires (organe avec zone morte, plus ou-moins, ...).

### II.3.2 Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante ; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable.

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figures II.3). Les théorèmes suivants, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (Lyapunov 1966). Ceux-ci sont tirés de la thèse de la référence [65].

#### **Théorème II.1 (Stabilité asymptotique)**

*S'il est possible de trouver une fonction  $V(x)$  de signe défini (avec  $V(0)=0$ ), dans un domaine  $D$  comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au*

temps  $\dot{V}$  soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

### Théorème II.2 (Instabilité)

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  dont la dérivée est de signe défini dans un domaine  $D$  contenant l'origine et que  $V$  soit

- définie de même signe que  $\dot{V}$ , ou
- indéfinie en signe l'équilibre est instable.

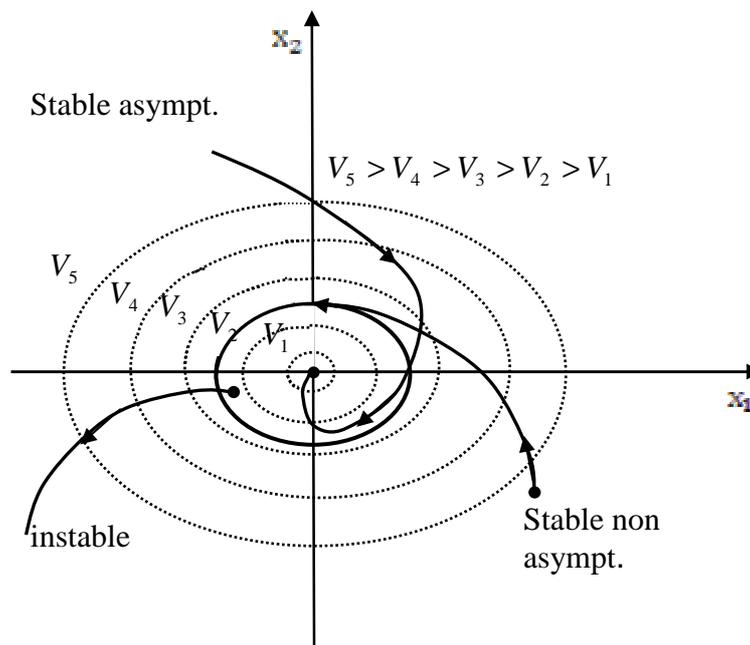


Figure II.3: Contours à énergie constante dans le plan de phase

### Théorème II.3 (Stabilité simple)

S'il est possible de trouver une fonction  $V$  de signe défini dans un domaine  $D$  et dont la dérivée totale  $\dot{V}$  soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement, figure II.3).

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'informations au niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction autour de ces points d'équilibre.

Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état  $x$ , la méthode directe de Lyapunov consiste alors, à chercher une fonction  $V(x)$  (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment. Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables [65]. Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

- Fonction quadratique

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{II.3})$$

où  $P$  est une matrice symétrique définie positive

- Fonction quadratique plus intégrale (Lur'e)

$$V(x) = x^T P x + \int_0^2 \varphi(u) du \quad (\text{II.4})$$

avec  $\varphi$  assujettie à certaines contraintes.

## II.4 Commande backstepping

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos et al [65] et inspiré par les travaux de Feurer et Morse [65] d'une part et Tsiniias [65] et Kokotovii et Sussmann [65] d'autre part. Elle offre une méthode systématique pour effectuer la synthèse d'un contrôleur pour les systèmes non linéaires. L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) soit définie positive et que sa dérivée soit toujours négative. La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. A la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non-linéarité. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \theta + \psi_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta + \psi_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{R-1} &= \varphi_{R-1}(x_1, \dots, x_{R-1})^T \theta + \psi_{R-1}(x_1, \dots, x_{R-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_{R-1}, x_n)^T \theta + \psi_n(x_1, \dots, x_{R-1}, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

où  $\theta$  est le vecteur des paramètres constants. Les  $\psi_i$  et les  $\varphi_i$  sont des fonctions non linéaires connues, avec  $\varphi(0) = 0$  et  $\psi_n(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . De plus, le backstepping permet de garder les non-linéarités utiles [65].

Dans ce qui suit, afin d'explicitier la faisabilité de la commande backstepping, nous allons traiter son application sur deux exemples, en l'occurrence, un robot à deux degrés de liberté et un robot à couple électrique.

## II.5 Commande backstepping d'un bras manipulateur à 2DDL

Les robots manipulateurs sont des systèmes mécaniques dont la dynamique non linéaire est fortement couplée et l'incertitude des paramètres caractéristiques est omniprésente. Si les paramètres initiaux de robot sont bien connus, le couple calculé et les contrôleurs de découplage non linéaires peuvent être employés pour réaliser un suivi satisfaisant de trajectoires [66].

Cependant, la connaissance des valeurs des paramètres initiaux est faible ; dans ce cas une commande adaptative est nécessaire.

Pour ce type de procédé, on va utiliser la commande backstepping pour traiter ces deux cas, c'est-à-dire, le cas de paramètres connus et le cas de paramètres inconnus.

### II.5.1 Représentation d'état du robot

On considère un bras manipulateur rigide à deux degrés de libertés (2DDL) explicité dans l'annexe (A.1). Son modèle dynamique peut être déterminé par l'utilisation de l'équation d'Euler-Lagrange [66] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{II.6})$$

Dans la suite, nous noterons  $q_d(2 \times 1)$  : vecteur de position articulaire désirée.

Les équations de la dynamique (II.6) peuvent s'écrire en utilisant le changement de variable ci-dessous :

$$\begin{cases} q = x_1 \\ \dot{q} = x_2 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{avec } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations (II.6) et (II.7) la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

La représentation (II.8) est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta u + \psi(x_1, x_2)^T \theta \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

avec :

$$\beta = M(q)^{-1},$$

$$u = \tau,$$

$$\psi(x_1, x_2)^T \theta = -M(q)^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)],$$

$$\psi(x_1, x_2)^T = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{bmatrix},$$

$$\psi_1 = l_2^2 \left( -2l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1 + l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2) + l_1 g \cos q_1 \right) - (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) (l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$\psi_2 = l_2^2 l_1 g \cos q_1$$

$$\psi_3 = -(l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \left( -2l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_1 - l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2) + l_1 g \cos q_1 \right) + (l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2 + l_1^2) (l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$\psi_4 = l_1^2 (l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 + l_2 g \cos(q_1 + q_2))$$

$$\theta = \frac{1}{\det M(q)} \begin{bmatrix} m_2^2 \\ m_1 m_2 \end{bmatrix}$$

Dans ce qui suit, on tient compte de  $\hat{\theta}$  qui est l'estimation du paramètre inconnu  $\theta$ . Le changement de variable adopté est décrit par les expressions suivantes :

$$z_1 = x_1 - q_d \tag{II.10}$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 - \dot{q}_d \tag{II.11}$$

Soit la fonction stabilisante  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 z_1 \tag{II.12}$$

avec :

$c_1$  : constante réelle positive appelée gain de la contre réaction.

### II.5.2 Commande backstepping non adaptative

Le système peut être formulé en utilisant les nouvelles variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \tag{II.13}$$

$$\dot{z}_2 = u + M(q)^{-1} [C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (\text{II.14})$$

Pour le système d'équations (II.13) et (II.14), on va concevoir une loi de commande  $u = \alpha_2(x_1, x_2)$  tout en assurant que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit définie négative :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{II.15})$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov sera donc :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ \dot{V} &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left( u + z_1 + M(q)^{-1} (C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \right) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Pour atteindre la négativité de  $\dot{V}$  le long de la trajectoire, on va choisir la commande  $u$  comme suit :

$$u = -c_2 z_2 - z_1 - M(q)^{-1} (C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \ddot{q}_d \quad (\text{II.17})$$

$$\text{avec :} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 \quad ; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} = c_1$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2(x_1, x_2)$  s'écrit comme suit :

$$\alpha_2(x_1, x_2) = -c_2 z_2 - z_1 - M(q)^{-1} (C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d \quad (\text{II.18})$$

alors :

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \quad (\text{II.19})$$

avec  $c_2$  est une constante réelle positive.

Ce qui signifie que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable. Alors le système en boucle fermée résultant est linéaire stable. On décrit le système sous sa forme matricielle par :

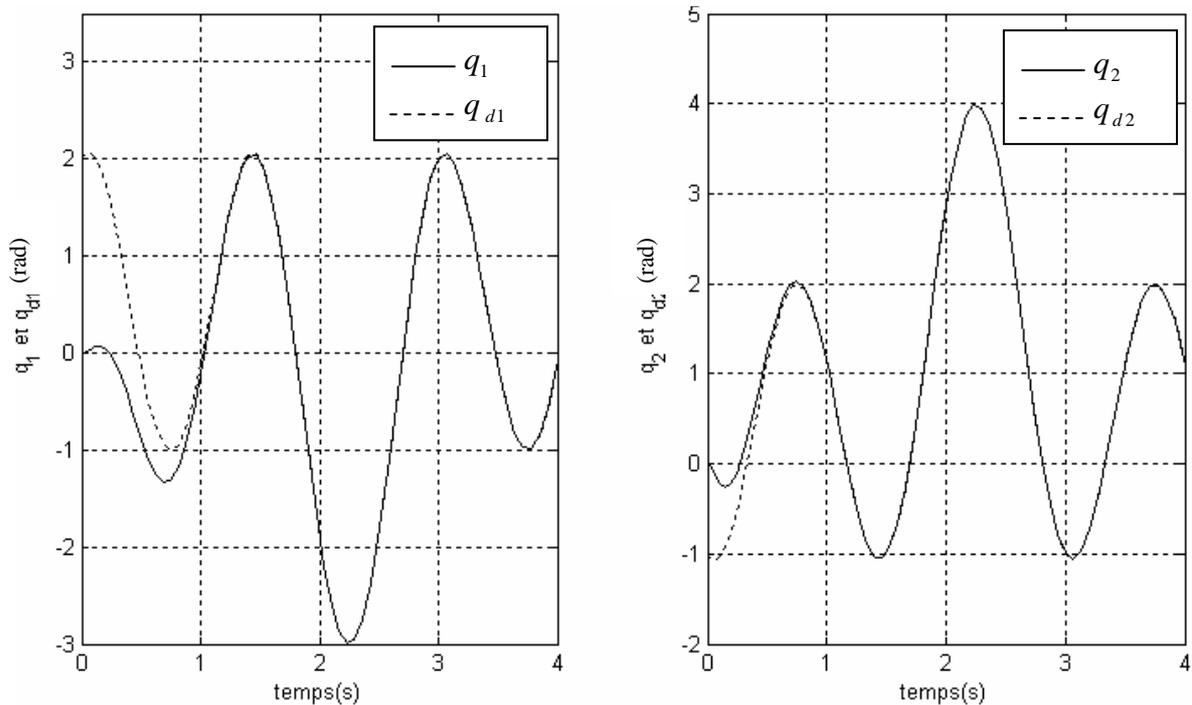
$$\dot{Z} = AZ \quad (\text{II.20})$$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{ et } \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

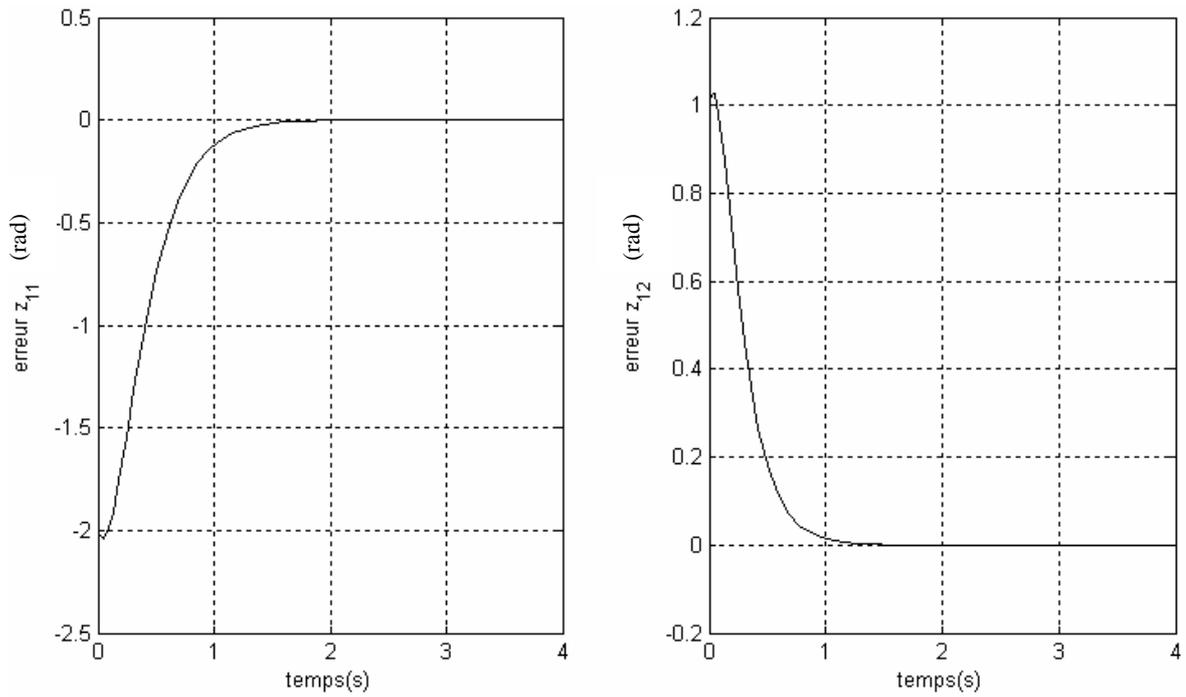
Pour établir les simulations, nous avons pris les paramètres de synthèse suivants :

$$l_1 = 0.432 \text{ m}; l_2 = 0.432 \text{ m}; m_1 = 15.5; m_2 = 11.5; \text{ kg}; g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

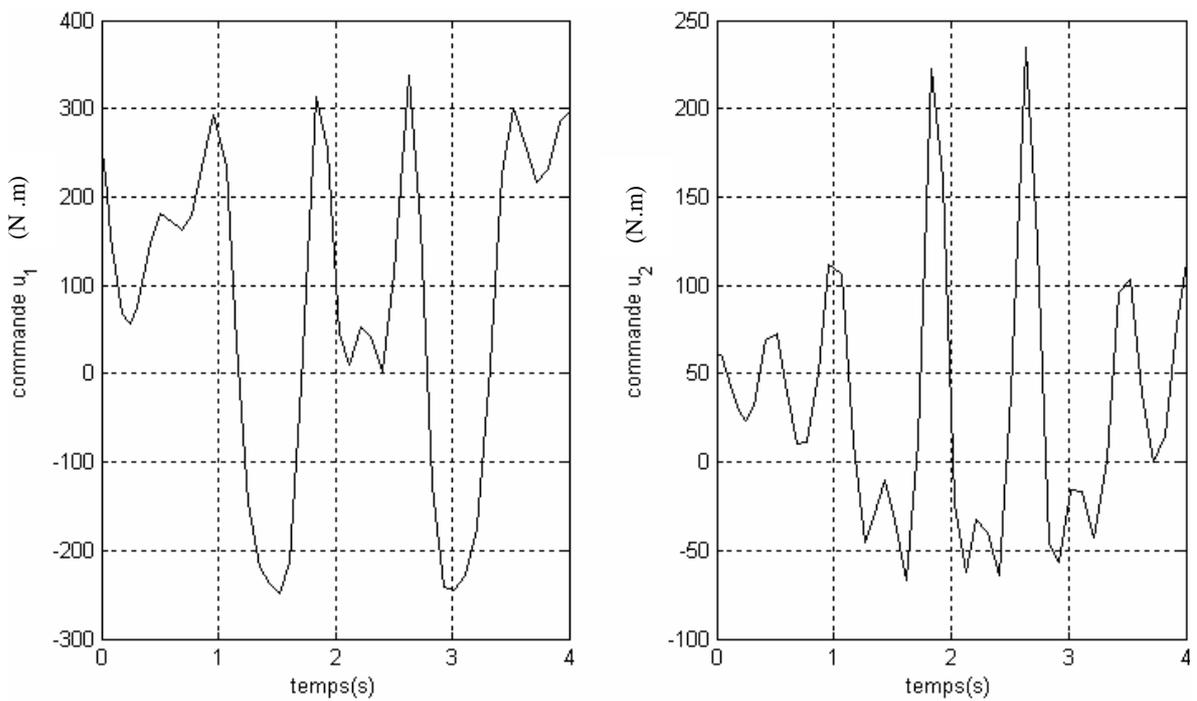
$$c_{11} = 4; c_{12} = 10; c_{21} = 5; c_{22} = 5;$$



Figures II.4 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures II.5 : Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour les deux articulations



Figures II.6 : Couple d'entrée pour les deux articulations

Les figures (II.4), (II.5) et (II.6) représentent le résultat de la commande par backstepping lorsque tous les paramètres sont bien connus.

Le suivi de la trajectoire désirée est réalisé après 1 seconde et une erreur presque nulle est atteinte après 2 secondes. Concernent le couple d'entrée, la valeur de la commande est très satisfaisante ; à noter que cette dernière n'est valable que pour les systèmes connus avec précision.

Dans ce qui suit, on supposera maintenant que les masses de notre robot ne sont pas bien connues, la commande adaptative par backstepping est alors appliquée pour résoudre ce problème.

### II.5. 3 Commande backstepping adaptative

La dynamique des erreurs sera donc :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (\text{II.21})$$

$$\dot{z}_2 = u + \psi^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d \quad (\text{II.22})$$

La fonction de Lyapunov est choisie comme suit :

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.23})$$

$$\text{avec } \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

On dénote par  $\Gamma$  le gain d'adaptation. Alors la dérivée de  $\dot{V}$  est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ u + z_1 + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d \right] \\ &\quad + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left[ \Gamma \psi z_2 - \dot{\hat{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) ; \quad \tau_2 = \psi z_2 \quad (\text{II.25})$$

Pour que le système soit globalement stable ( $\dot{V} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ ) il faut que :

$$u + z_1 + \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{q}_d = -c_2 z_2$$

alors la loi de commande sera comme suit :

$$u = -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \ddot{q}_d \quad (\text{II.26})$$

L'expression de la fonction stabilisante  $\alpha_2$  s'écrit :

$$\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) = -z_1 - c_2 z_2 - \psi(x_1, x_2)^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (\text{II.27})$$

Etant donné que :

$$u = \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}, q_d, \dot{q}_d) + \ddot{q}_d \quad (\text{II.28})$$

alors l'équilibre  $x_1 = q_d$  est globalement asymptotiquement stable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = q_d$  ; le

système en boucle fermée résultant est linéaire stable comme l'indique sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^T \end{bmatrix} \tilde{\theta} \quad (\text{II.29})$$

Ce qui nous permet d'avoir le diagramme fonctionnel suivant qui représente la commande adaptative du système en boucle fermée :

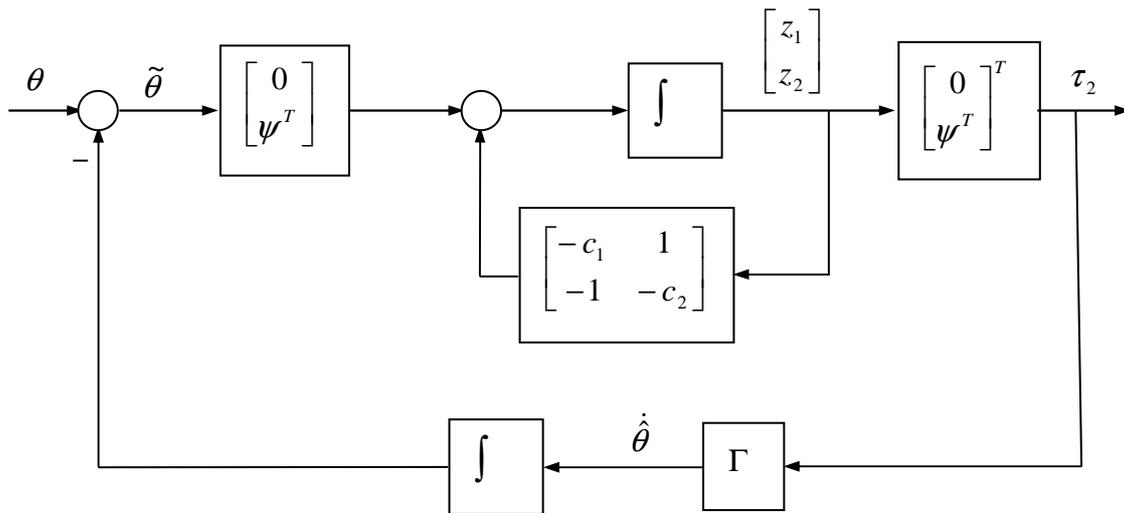
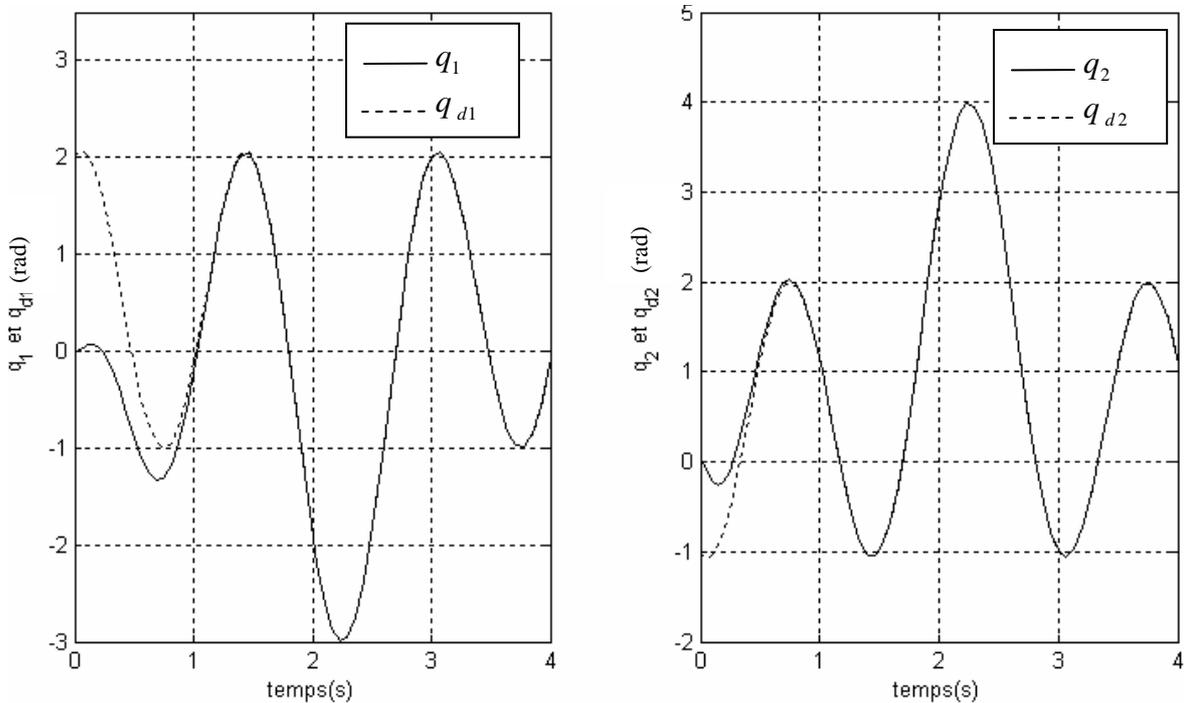
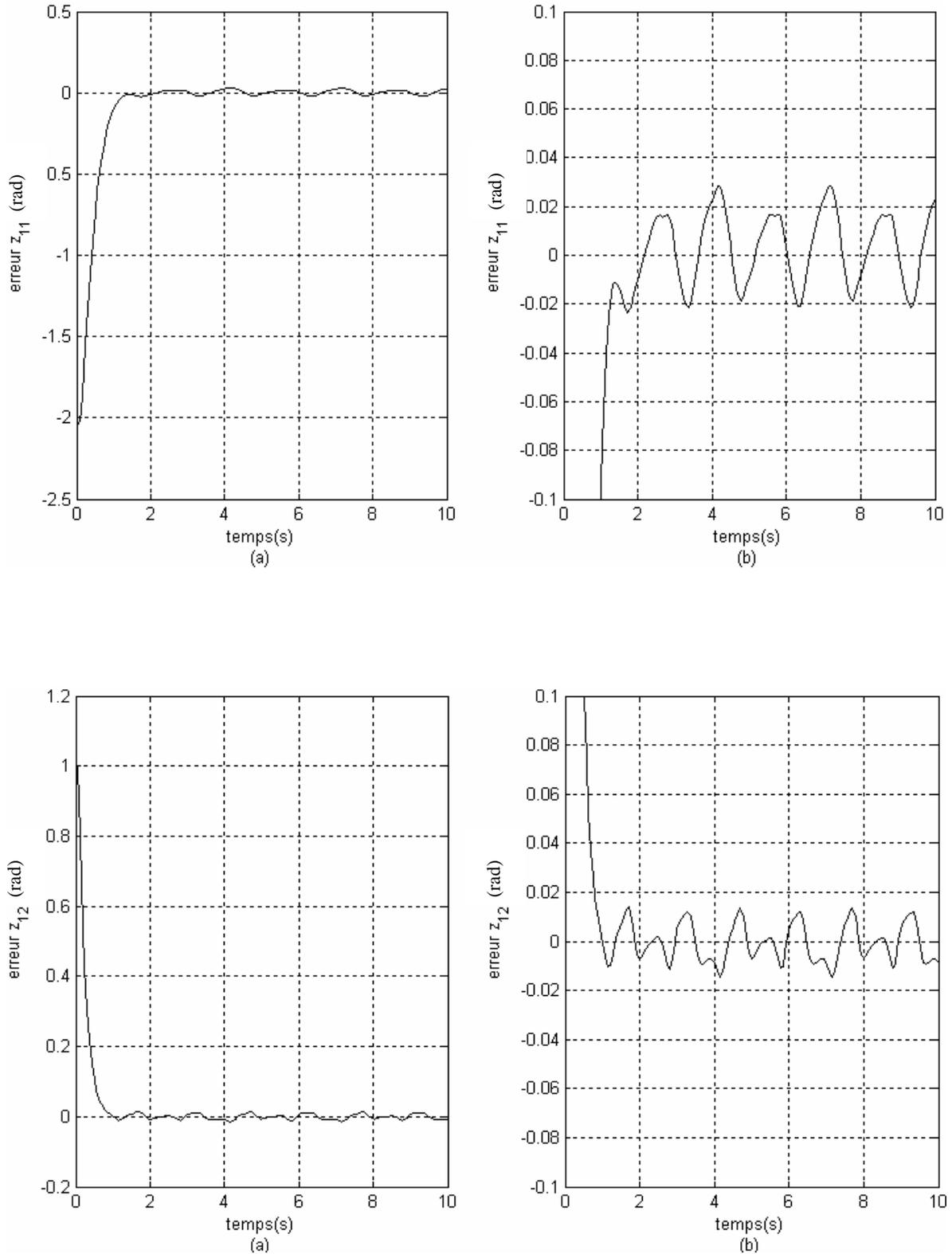


Figure II.7 : Commande adaptative du système bouclé

Pour les simulations qui suivent, nous avons pris les mêmes paramètres de synthèse que ceux du cas de la commande backstepping non adaptative.

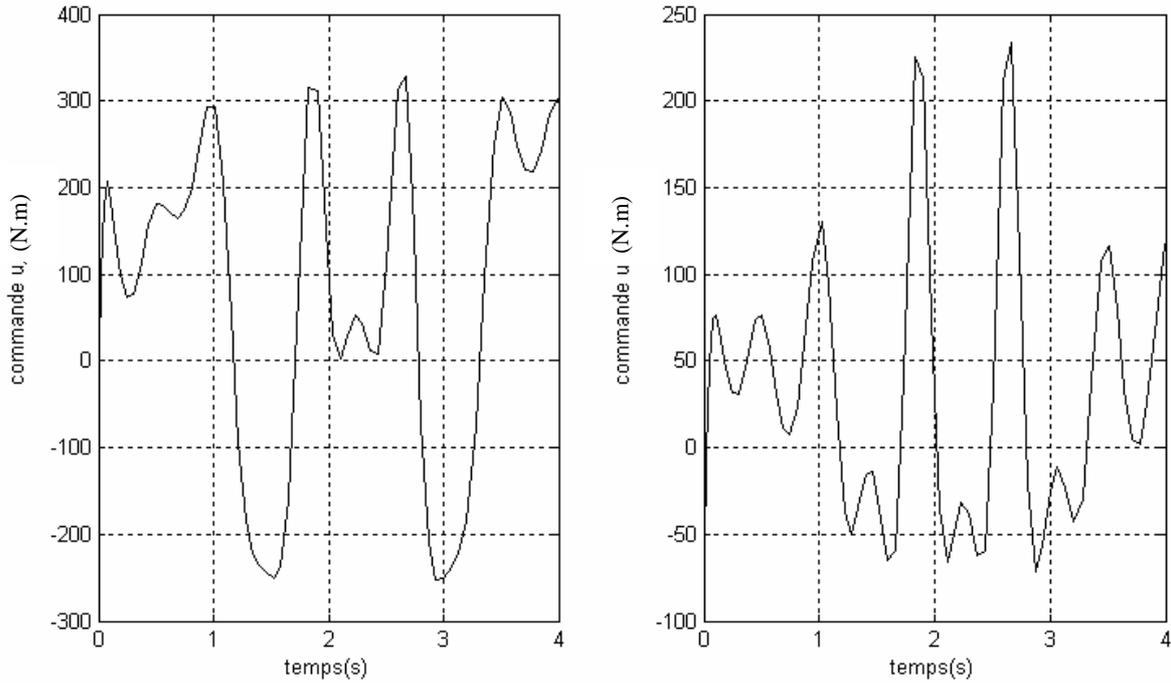


Figures II.8 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations

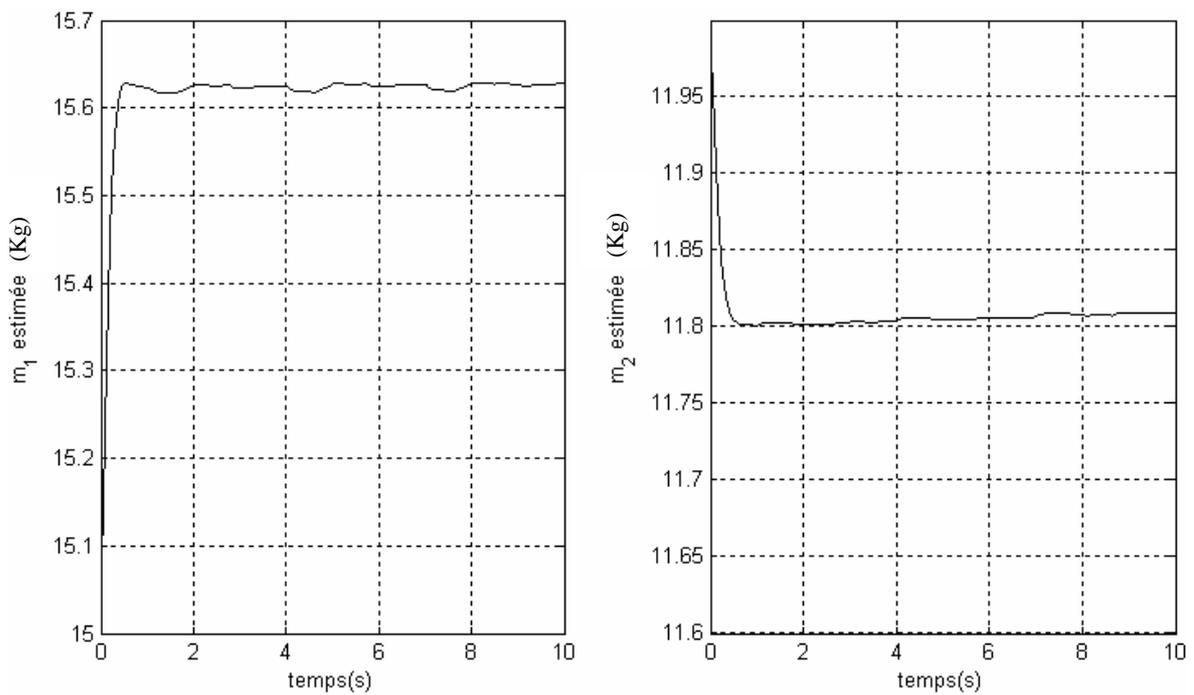


Figures II.9 : (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour les deux articulations

( b : Zoom sur l'amplitude)



Figures II.10 : Commande d'entrée pour les deux articulations



Figures II.11 : Paramètres estimés

Les figures (II.8), (II.9), (II.10) et (II.11) montre les résultats de la commande adaptative par backstepping.

L'erreur de suivi de la trajectoire est acceptable, elle est entre 0.02 et -0.02 mais l'estimation de la valeur inconnue de masse est acceptable.

La figure (II.10) montre une bonne valeur du couple d'entrée mais elle est chahutée.

## II.6 Commande backstepping adaptative sur un robot à couple électrique

Dans cette deuxième application on va concevoir une commande backstepping adaptative pour les robots manipulateurs à commande électrique dont les paramètres mécaniques et électriques sont incertains.

On considère un robot à deux degrés de liberté contrôlé électriquement et explicité dans l'annexe (A.2) dont les équations dynamiques peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

### II.6.1 Représentation d'état du robot

On choisit les vecteurs d'états comme suit :

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2]^T \quad (\text{II.31})$$

et

$$\zeta_3 = [I_1 \quad I_2]^T \quad (\text{II.32})$$

avec :

$$\zeta_1 = [q_1 \quad q_2]^T \quad (\text{II.33})$$

$$\zeta_2 = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \quad (\text{II.34})$$

En utilisant les équations (II.30), (II.31) et (II.32) la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 - M^{-1}G(\zeta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(\zeta_1)K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = -L^{-1}R\zeta_3 - L^{-1}K_m\zeta_2 - L^{-1}v \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Cette dynamique peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f(\zeta) + g(\zeta)\zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = f_1(\zeta, \zeta_3) + g_1(\zeta, \zeta_3)v \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

où  $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\zeta_3 \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .

$\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  représentent respectivement, le vecteur d'état des positions ( $q$ ), des vitesses ( $\dot{q}$ ) et des courants ( $I$ ).

## II.6.2 Commande backstepping pour le suivi des trajectoires

Pour assurer la stabilité asymptotique du système, la technique backstepping consiste, pour une sortie donnée, à fixer une fonction de stockage puis calculer les fonctions candidates stabilisantes valides pour chaque étape du système. Dans notre cas, nous avons seulement une étape. Notre objectif est de trouver une loi de commande  $v$  permettant de stabiliser l'état du système (II.30). On considère la sortie suivante :

$$y = \beta(\zeta_3 - \zeta_{3d}) - \alpha_0(\zeta) \quad (\text{II.37})$$

$\beta = \bar{I}$  est la matrice identité. La fonction candidate est :

$$V(\zeta, \zeta_3) = W(\zeta) + \frac{1}{2} y^T y \quad (\text{II.38})$$

et la fonction de stockage est telle que :

$$W(\zeta) = \frac{1}{2} (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{II.39})$$

La fonction stabilisante est :

$$\alpha_0(\zeta) = \beta(\zeta_3 - \zeta_{3d}) - (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \quad (\text{II.40})$$

Les dérivées de  $W(\zeta)$ ,  $V(\zeta, \zeta_3)$  et  $y$  sont comme suit :

$$\dot{W}(\zeta) = (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \quad (\text{II.41})$$

$$\dot{V}(\zeta, \zeta_3) = (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) + y^T \dot{y} \quad (\text{II.42})$$

$$\dot{y} = (\dot{\zeta}_3 - \dot{\zeta}_{3d}) - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \dot{\zeta} \quad (\text{II.43})$$

Substituant  $\dot{W}(\zeta)$  dans  $\dot{V}(\zeta, \zeta_3)$ , on obtient :

$$\dot{V}(\zeta, \zeta_3) = (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) + y^T \left( \dot{\zeta}_3 - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \dot{\zeta} \right) \quad (\text{II.44})$$

En remplaçant  $\dot{\zeta}_3$  et  $\dot{\zeta}$  par leurs expressions dans (II.44), on parvient à :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\zeta, \zeta_3) = & (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \\ & + y^T \left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

avec :

$$\dot{V}(\zeta, \zeta_3) \leq y^T v \quad (\text{II.46})$$

En considérant (II.46), ceci implique le cas limite suivant :

$$\begin{aligned} & (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \\ & + y^T \left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \leq y^T v \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Par arrangement, on obtient :

$$\begin{aligned} & y^T \left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \\ & \leq y^T v - (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Par développement, on parvient à :

$$y^T \left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \leq y^T (v - (\zeta_1 - \zeta_{1d}))$$

et par simplification, on aboutit à :

$$\left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \leq v - (\zeta_1 - \zeta_{1d})$$

avec  $v = -y$

En considérant (II.37) et (II.40) on obtient :

$$y = (\zeta_2 - \zeta_{2d}) \quad (\text{II.49})$$

D'où la forme finale

$$\left( -L^{-1}(R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L^{-1}v - \dot{\zeta}_{3d} - \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) \right) \leq -(\zeta_2 - \zeta_{2d}) - (\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{II.50})$$

En employant une fonction non singulière  $g_1(\zeta, \zeta_3) \neq 0$  pour tout  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ , nous obtenons la loi de commande du modèle (II.35) :

$$v = (R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L \left[ \dot{\zeta}_{3d} + \frac{\partial \alpha_0(\zeta)}{\partial(\zeta)} \left( \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C\zeta_2 - M^{-1}G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \right) - (\zeta_2 - \zeta_{2d}) - (\zeta_1 - \zeta_{1d}) \right] \quad (\text{II.51})$$

Par la différentiation de  $\alpha_0(\zeta)$  on obtient la loi de commande backstepping finale suivante :

$$v = (R\zeta_3 + K_m \zeta_2) + L \left[ \dot{\zeta}_{3d} - (\zeta_2 - \zeta_{2d}) - (\zeta_1 - \zeta_{1d}) + M^{-1}C\zeta_2 + M^{-1}G - M^{-1}K_r \zeta_3 \right] \quad (\text{II.52})$$

La stabilité globale du système en boucle fermée est assurée par la récursivité naturelle de la technique du backstepping. Si on considère que tous les paramètres sont connus, en plus des positions désirées, des trajectoires des vitesses et des accélérations, l'expression

du courant désiré  $I_d$  peut être obtenue à partir de l'expression du modèle dynamique (II.30) comme suit :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I_d + K_r \tilde{I} \\ LI + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{II.53}) \text{ où } \tilde{I} \text{ est l'erreur sur le courant.}$$

De la relation  $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I_d + K_r \tilde{I}$  le manipulateur peut être vu comme un sous système commandé par  $K_r I_d$  et affecté d'une perturbation  $K_r \tilde{I}$ . Ainsi, en transformant les coordonnées en variables d'états, nous avons [67] :

$$\zeta_{3d} = K_r^{-1} \{ M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + C(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2^* + G(\zeta_1) - K_d \varepsilon \} \quad (\text{II.54})$$

avec  $\zeta_2^*$  et  $\varepsilon$  sont définis dans la succession des explications qui suivront.

De la même manière on a :

$$\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1 - \zeta_{1d}, \tilde{\zeta}_2 = \zeta_2 - \zeta_{2d} \text{ et } \tilde{\zeta}_3 = \zeta_3 - \zeta_{3d}$$

où  $\varepsilon$  est l'erreur, l'indice  $d$  désigne la variable d'état désirée et le symbole  $\square$  indique l'erreur.

Autrement, si nous considérons que les paramètres mécaniques sont inconnus, des estimations des inerties et des masses sont alors nécessaires. Le procédé d'estimation des paramètres sera décrit dans la section suivante.

Quand le robot se déplace, les paramètres des masses et d'inertie ne peuvent pas être connus avec précision. Ainsi, il est nécessaire de trouver une méthode fiable afin d'estimer efficacement ces paramètres. L'estimation peut être faite selon des méthodes adaptatives directes ou indirectes.

Dans notre cas, l'approche directe est utilisée. Elle est caractérisée par un algorithme de commande, qui est modifié directement par une loi d'adaptation. Cette loi d'adaptation modifie la dynamique estimée afin d'éliminer l'erreur de position et de vitesse.

On considère la première équation dynamique du système (II.30), l'estimation utilisée des paramètres est basée sur la stratégie de calcul du courant désiré. Ainsi, l'expression du courant désiré prend la forme suivante :

$$\zeta_{3d} = K_r^{-1} \hat{Y}p - K_d \varepsilon \quad (\text{II.55})$$

avec :

$$\hat{Y}p = \hat{M}(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + \hat{C}(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2^* + \hat{G}(\zeta_1) \quad (\text{II.56})$$

où  $p$  est un vecteur égal à  $[p_1 \quad p_2]^T$ .

La fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V = \frac{1}{2} (\varepsilon^T M(\zeta_1) \varepsilon + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p}) \quad (\text{II.57})$$

tel que :

$$\varepsilon = \zeta_2 - \zeta_{2d} + \Lambda(\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{II.58})$$

où :

$\Gamma = \text{diag}[\Gamma_1 \quad \Gamma_2]$  et  $\Lambda = \text{diag}[\Lambda_1 \quad \Lambda_2]$  sont deux matrices diagonales définies positives.

et  $\tilde{p}$  est un vecteur d'erreur d'estimation des paramètres  $p_i$  de dimensions  $2 \times 1$  :

$$\tilde{p} = p - \hat{p} \quad (\text{II.59})$$

Considérons  $\zeta_2^* = \zeta_{2d} - \Lambda(\zeta_1 - \zeta_{1d})$ , on obtient :

$$\varepsilon = \zeta_2 - \zeta_2^* \quad (\text{II.60})$$

$V$  étant positive ; de plus on a :

$$\dot{V} = \varepsilon^T \left( M(\zeta_1) \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \dot{M}(\zeta_1) \varepsilon \right) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{II.61})$$

Puisque  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  est symétrique, la forme quadratique  $\varepsilon^T (\dot{M} - 2C) \varepsilon$  est égale à zéro, et on peut alors écrire :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{M}(\zeta_1) \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T C(\zeta_1, \zeta_2) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.62})$$

et

$$\dot{V} = \boldsymbol{\varepsilon}^T (M(\zeta_1) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + C(\zeta_1, \zeta_2) \boldsymbol{\varepsilon}) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{II.63})$$

En substituant  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  dans (II.63), on parvient à :

$$\dot{V} = \boldsymbol{\varepsilon}^T (M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2 - M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + C(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2 - C(\zeta_1, \zeta_2) \dot{\zeta}_2^*) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{II.64})$$

En considérant  $M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2 + C(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2 + G(\zeta_1) = K_r \zeta_{3d}$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\varepsilon}^T (K_r \zeta_{3d} - C(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2 - G(\zeta_1) - M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + C(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2 - C(\zeta_1, \zeta_2) \dot{\zeta}_2^*) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^T (K_r \zeta_{3d} - G(\zeta_1) - M(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* - C(\zeta_1, \zeta_2) \dot{\zeta}_2^*) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

En substituant (II.54) dans l'expression (II.65), on obtient :

$$\dot{V} = \boldsymbol{\varepsilon}^T (\tilde{M}(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + \tilde{C}(\zeta_1, \zeta_2) \dot{\zeta}_2^* + \tilde{G}(\zeta_1) - K_d \boldsymbol{\varepsilon}) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{II.66})$$

$$\text{où} \quad \tilde{M} = \hat{M} - M \quad ; \quad \tilde{C} = \hat{C} - C \quad ; \quad \tilde{G} = \hat{G} - G$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\varepsilon}^T (Y \tilde{p} - K_d \boldsymbol{\varepsilon}) + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \\ &= -\boldsymbol{\varepsilon}^T K_d \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{p}^T (Y^T \boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}) \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

(II.67) peut s'écrire en utilisant les deux expressions qui suivent :

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\varepsilon}^T K_d \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \quad (\text{II.68})$$

et

$$\tilde{p}^T (Y^T \varepsilon + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}}) = 0 \quad (\text{II.69})$$

Ce qui suggère la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma \hat{Y}^T \varepsilon \quad (\text{II.70})$$

Comme on l'avait mentionné, l'estimation des paramètres sera donnée exclusivement dans l'espace articulaire. En utilisant un changement de variable, on a

$$K_r I_d = \hat{M}(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + \hat{C}(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2^* + \hat{G}(\zeta_1) = \hat{Y}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_2^*, \dot{\zeta}_2^*) p \quad (\text{II.71})$$

où  $Y \in R^{n \times r}$  et  $p \in R^r$ .  $Y$  est une matrice des fonctions connues des coordonnées généralisées et ses dérivées, et  $p$  est un vecteur constant de dimension  $r$  des paramètres du robot. Les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  sont fonction des masses  $m_i$  du robot.

Soit :

$$Y^T = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + l_1^2) \dot{\zeta}_{21}^* + (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(q_2)) \dot{\zeta}_{22}^* & & \\ + (-2l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2) \zeta_{21}^* + (-l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2) \zeta_{22}^* & & l_1^2 \dot{\zeta}_{21}^* + l_1 g \cos q_1 \\ + (l_2 g \cos(q_1 + q_2) + l_1 g \cos q_1) & & \\ & (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \dot{\zeta}_{21}^* + (l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1) \zeta_{21}^* & 0 \\ & + l_2^2 \dot{\zeta}_{22}^* + l_2 g \cos(q_1 + q_2) & \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}$$

### II.6.2.1 Système en boucle fermée

En considérant les équations obtenues auparavant, le système en boucle fermée prend la structure fonctionnelle explicitée ci-dessous :

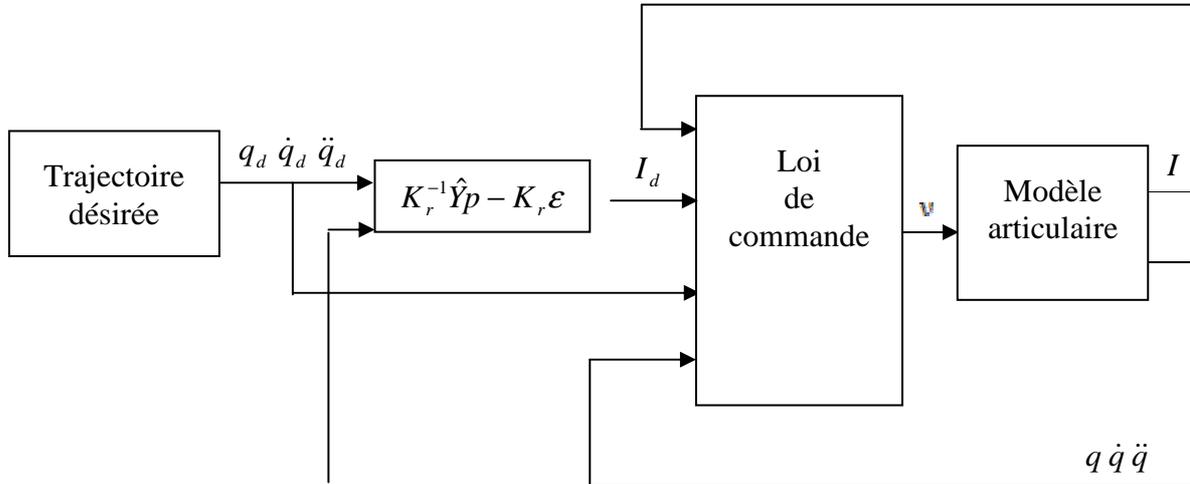
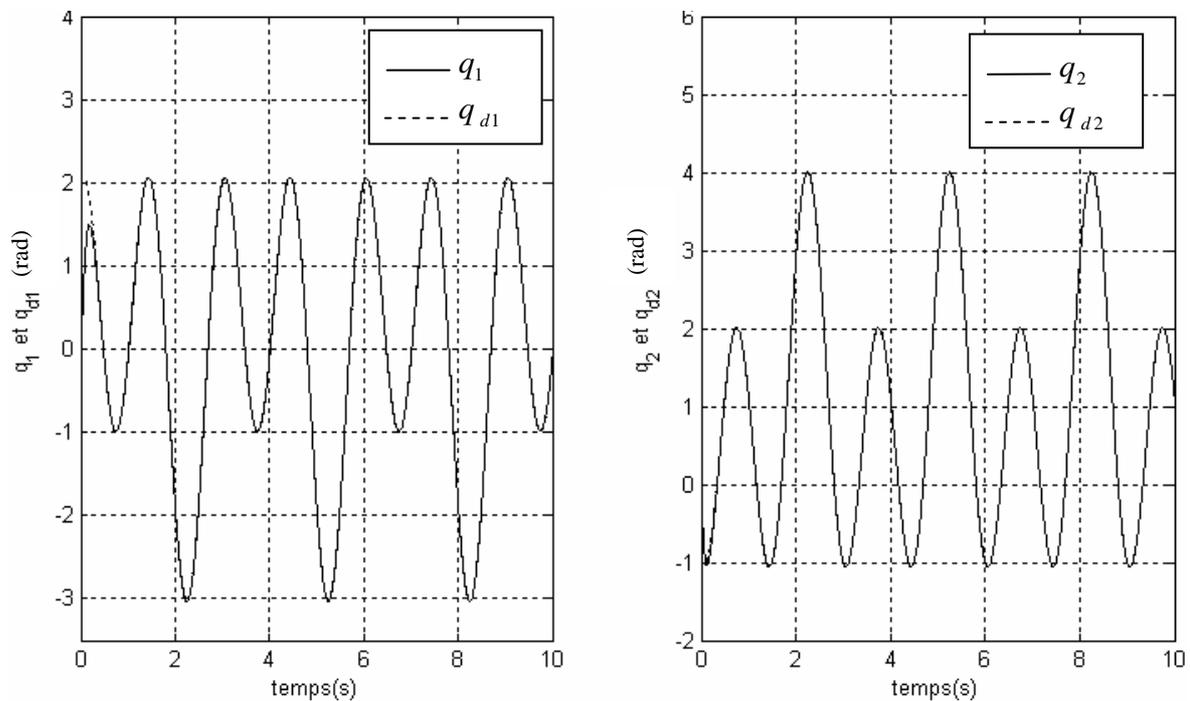


Figure II.12 : Système en boucle fermée

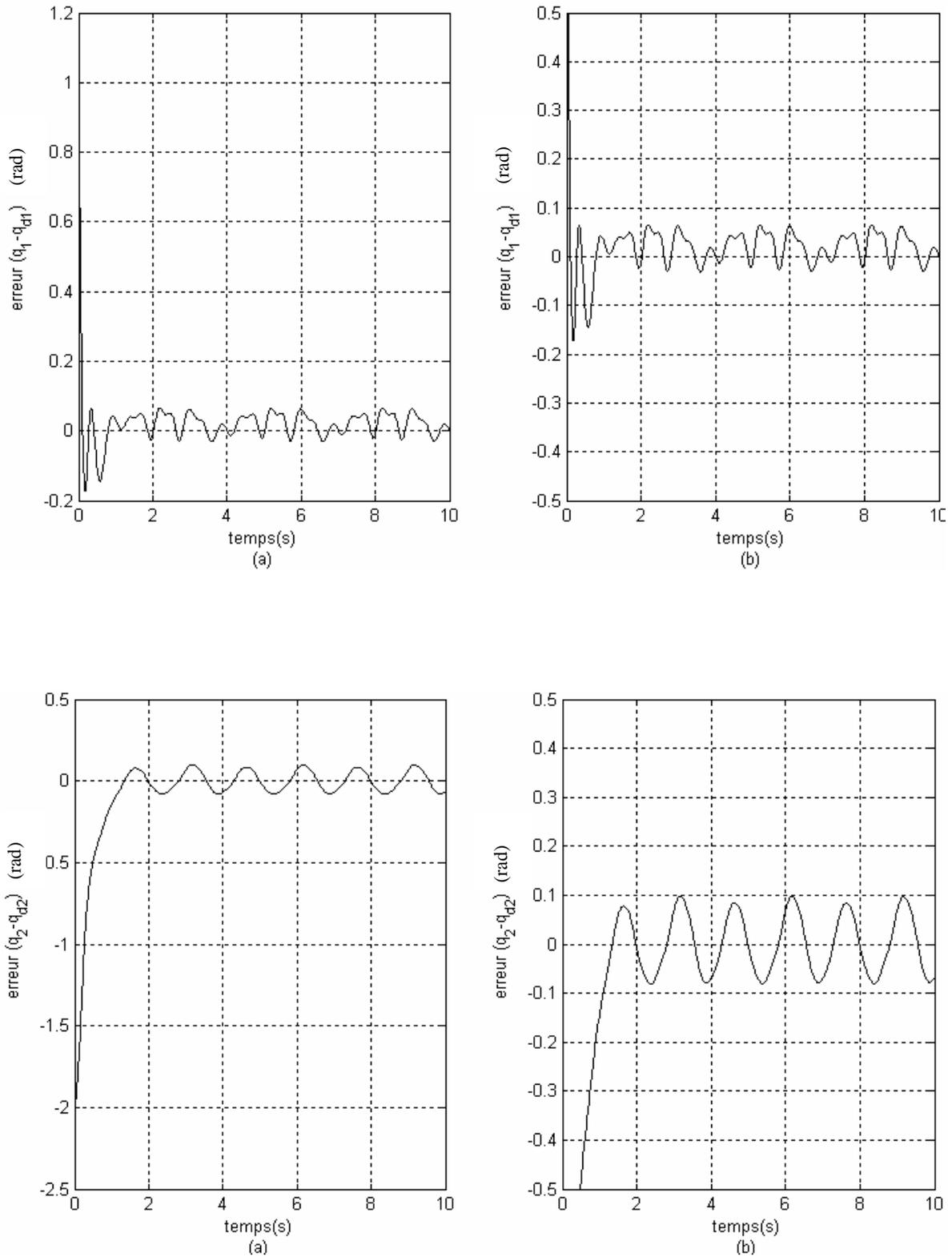
### II.6.2.2. Résultats de simulation

Pour établir les simulations ci-dessous, nous avons pris les gains d'adaptations suivants:

$$\Gamma_1 = 100 ; \Gamma_2 = 100 ; K_{d1} = 400 ; K_{d2} = 400 ; \Lambda_1 = 50 ; \Lambda_2 = 10$$

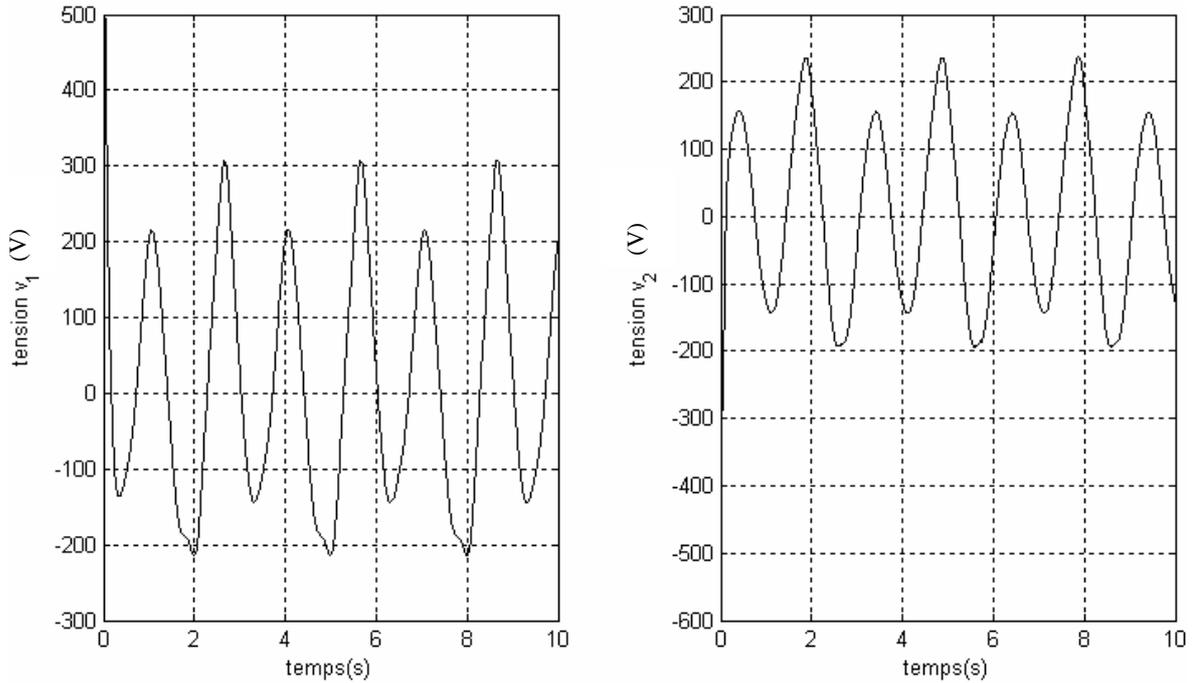


Figures II.13 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations

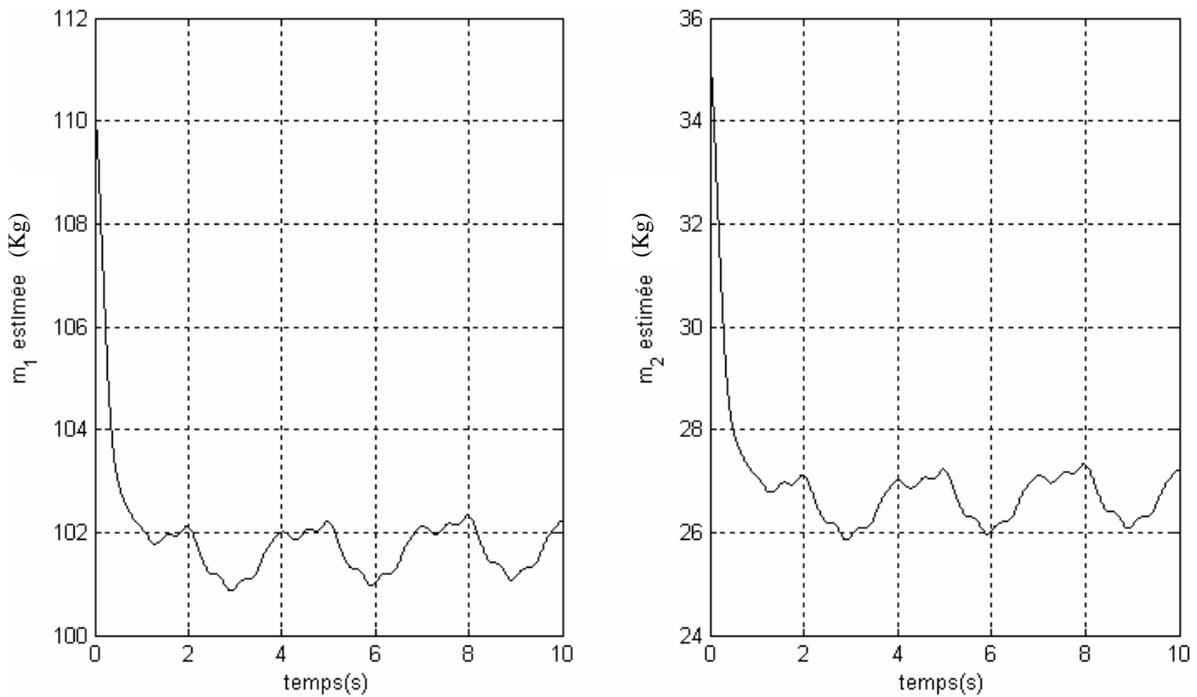


Figures II.14 : (a) Erreur de suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations

(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures II.15 : Tensions d'entrée pour les deux articulations



Figures II.16 : Paramètres estimés

Les résultats des figures II.13, II.14, II.15 et II.16 montrent l'efficacité de la commande backstepping adaptative sur le robot à couple électrique. Le suivi de la trajectoire est réalisé avec une erreur entre 0.1 et -0.1 et une estimation acceptable de la valeur inconnue des masses. La tension d'entrée est un peu élevée au démarrage.

On peut conclure, en considérant ces résultats, que l'algorithme appliqué au robot à couple électrique garantit asymptotiquement la stabilité globale du système.

## II.7 Conclusion

Après un bref rappel sur les systèmes non linéaires ainsi que sur les fonctions de Lyapunov, ce chapitre a été consacré au développement de la commande backstepping et son application en robotique. Deux applications ont fait l'objet d'un développement pour approuver l'efficacité de cette technique. Nous l'avons appliquée sur un robot à deux degrés de liberté et sur un robot à couple électrique. Les résultats obtenus sont encourageants, les erreurs de suivi sont acceptables. La commande est relativement élevée pour la proposition expérimentale. Ce désavantage peut être réduit par élimination de quelques non-linéarités dans la commande du système [68]. Aussi, cette procédure permet d'obtenir de façon constructive une loi de commande qui assure la stabilité du système en boucle fermée via une fonction de Lyapunov.

# **CHAPITRE III**

## **COMMANDE BACKSTEPPING ADAPTATIVE AVEC OBSERVATEUR**

### **III.1 Introduction**

Ce chapitre est dédié à la commande backstepping basé sur la présence d'un observateur.

Le problème d'observabilité a une importance pratique, car certaines variables internes sont quelques fois inaccessibles à la mesure ou «coûteuse» à mesurer. La plupart du temps, soit par impossibilité physique d'introduire un capteur, soit pour des équations de coût, on ne peut pas mesure tous les états. [69]

On va voir comment on peut, à partir des mesures faites sur l'entrée et la sortie du processus, reconstruire (on dit aussi observer), le vecteur d'état complexe  $x$ , noté alors  $\hat{x}$ . Le sous- système, qui réalise cette reconstruction, est appelé observateur.

L'observateur a comme entrée les entrées et les sorties du processus réel et comme sortie la valeur estimée (reconstruite) de l'état de processus (Figure III.1).

Le problème de l'observateur consiste donc à reconstruire, pour un processus donné, un système défini par ses équations d'état, dont la sortie donne une estimation de l'état réel du processus. Cette estimation comporte une erreur qui doit tendre vers zéro. Quand cette propriété est satisfaite, l'observateur est asymptotique.



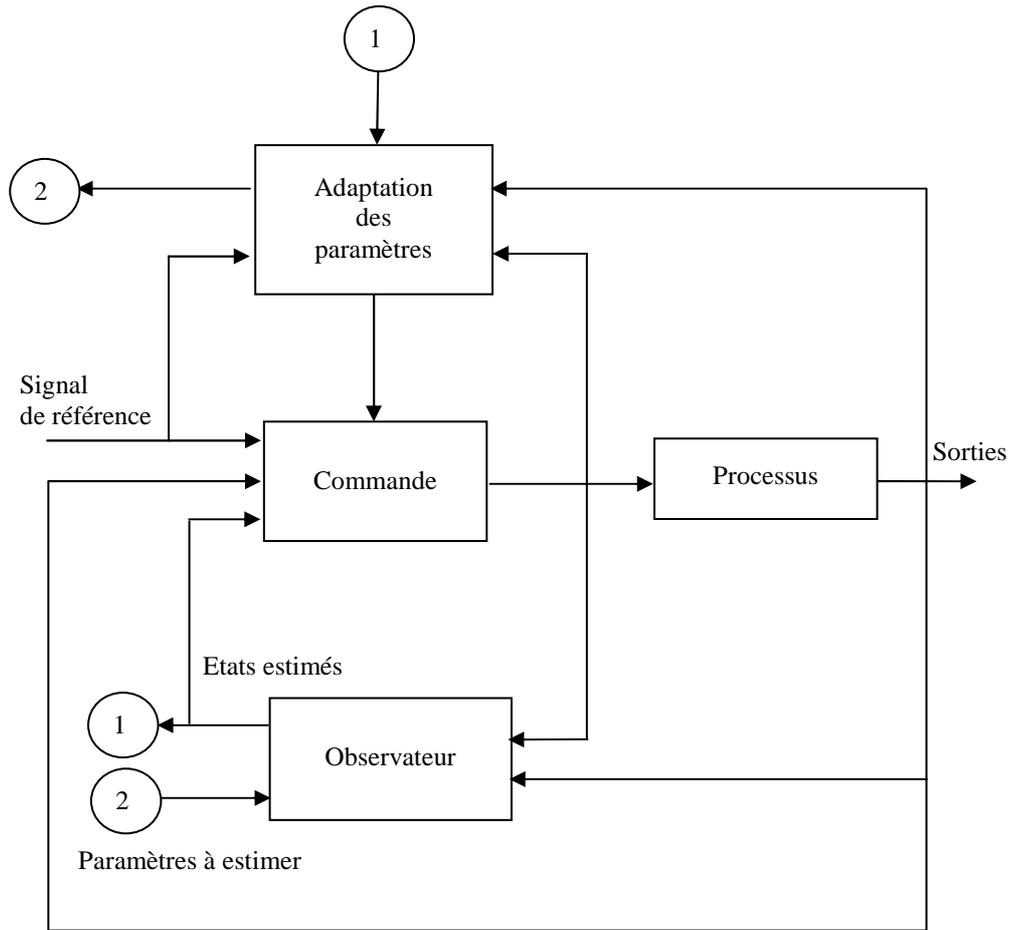


Figure III.3 : Schéma de principe de la commande adaptative avec observateur

Dans le but de faire la synthèse de la commande adaptative backstepping avec observateur, les hypothèses suivantes sont supposées réalisées :

1. La plupart des états ne sont pas disponibles ;
2. La fonction de sortie  $y = h(x)$  doit être définie ;
3. Les non-linéarités du système sont fonctions de grandeurs mesurables.

Ces conditions supplémentaires permettent au système de prendre la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(y)^T \theta, \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(y)^T \theta, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \varphi_{n-1}(y)^T \theta, \\
 \dot{x}_n &= \beta(x)u + \varphi_n(y)^T \theta, \\
 y &= x_1.
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

tel que chaque  $\varphi_i : R \rightarrow R^p$  est un vecteur de fonctions non linéaires, et  $\theta \in R^p$  est un vecteur de paramètres constants.

Dans le but de concevoir un observateur, le système (III.1) peut être représenté par la somme :

- d'une partie connue linéaire,
- d'une partie non linéaire inconnue,
- d'une fonction de commande.

$$\dot{x} = \underbrace{Ax}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\varphi^T(y)\theta}_{\text{Non linéaire inconnue}} + \underbrace{\beta g(y)u}_{\text{Commande}} \quad (\text{III.2})$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \varphi(y) = [\varphi_1^T(y) \quad \varphi_2^T(y) \quad \cdots \quad \varphi_i^T(y) \quad \cdots \quad \varphi_n^T(y)]$$

$$\beta^T = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad 1]; x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_n]^T; \theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_i \quad \cdots \quad \theta_p]^T.$$

### III.3 Commande backstepping adaptative avec observateur d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté

Pour cette application, on va montrer comment le problème de la commande adaptative d'un robot manipulateur à deux degré de liberté va être résolu en utilisant la technique du backstepping avec un observateur de vitesse en supposant que seules les positions des segments sont mesurables.

#### III.3.1 Représentation d'état et propriétés

Considérons le modèle dynamique suivant d'un bras manipulateur à 2DDL explicité dans l'annexe (A.1) :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (\text{III.3})$$

Le vecteur d'état peut être décrit par  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$

La représentation d'état du système sans frottement peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M^{-1}(x_2)[\tau - C(x_1, x_2)x_1 - G(x_2)] \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Ce type de robot possède les propriétés suivantes [70],[71] :

- Propriété 1 :  $M(q)$  est symétrique positive définie,  $\exists M_M \geq M_m > 0$  tel que  $M_m I_n < \|M(q)\| < M_M I_n, \forall q \in R^n$  avec  $I_n$  matrice identité  $2 \times 2$ .
- Propriété 2 :  $C(q, \dot{q})\dot{q}_2 = C(q, \dot{q})\dot{q}_1$ .
- Propriété 3 :  $\|C(q, \dot{q})\| < C_M \|\dot{q}\|$  avec  $C_M$  une constante positive.
- Propriété 4 :  $N(q, \dot{q}) = M(q) - 2C(q, \dot{q})$  est symétrique, et  $\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})$ .
- Propriété 5 :  $M(q)\psi + C(q, \zeta)\zeta + G(q) = \varphi_0(q, \zeta, \psi) + \varphi(q, \zeta, \psi)\theta$  où  $\zeta, \psi \in R^p$  et  $\theta \in R^p$  vecteur de paramètres inconnus.

### III.3.2 Observateur backstepping

On note que la vitesse du robot est limitée par une valeur constante  $\omega_{\max}$  tel que

$$\|\dot{q}\| < \omega_{\max} \quad \forall t \geq 0.$$

On considère l'erreur et sa dérivée suivantes :

$$z_1 = q - q_d \quad (\text{III.5})$$

$$\dot{z}_1 = x_1 - \dot{q}_d$$

L'idée principale du backstepping est de choisir l'une des variables d'état comme étant la commande virtuelle.

$$\zeta_1 = \hat{x}_1 = z_2 + \alpha_1 \quad (\text{III.6})$$

$\zeta_1$  représente la somme de l'erreur  $z_2$  et la fonction stabilisante  $\alpha_1$ . Alors on peut déduire à partir de l'équation (III.6) que :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \tilde{x}_1 - \dot{q}_d \quad (\text{III.7})$$

avec :  $x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$

La fonction stabilisante est choisie telle que :

$$\alpha_1 = -C_1 z_1 - D_1 z_1 + \dot{q}_d \quad (\text{III.8})$$

avec  $C_1 \in R^{2 \times 2}$  matrice positive et toujours diagonale, et  $D_1 \in R^{2 \times 2}$  positive diagonale tels que :

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{diag}[c_{11}, c_{12}] \\ D_1 &= \text{diag}[d_{11}, d_{12}] \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

avec :

$$\begin{aligned} c_{1i} &> 0 \quad (i = 1, 2) \\ d_{1i} &> 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Sachant que le terme  $-D_1 z_1$  est rajouté pour compenser  $\tilde{x}_1$ , on peut écrire (III.7) sous la forme suivante :

$$\dot{z}_1 = -(C_1 + D_1)z_1 + z_2 + \tilde{x}_1 \quad (\text{III.10})$$

L'étape suivante consiste à représenter la dynamique de  $z_2$  en utilisant l'équation (III.6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\zeta}_1 - \dot{\alpha}_1 \\ &= \dot{\hat{x}}_1 + (C_1 + D_1)\dot{z}_1 - \ddot{q}_d \\ &= -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)(z_2 + \tilde{x}_1) - \ddot{q}_d + \hat{M}(q)^{-1} [\tau - \hat{C}(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - \hat{G}(q)] + K \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

L'équation de l'observateur est donnée par l'équation suivante et son schéma est explicité par la figure III.9 :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) + K \tilde{x}_1 \quad (\text{III.12})$$

$$\psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) = \hat{M}(q)^{-1} [\tau - \hat{C}(q, \hat{x}_1) \hat{x}_1 - \hat{G}(q)] \quad (\text{III.13})$$

tel que  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  est l'erreur d'observation et  $K > 0$  est la matrice diagonale de gain.

Le paramètre estimé utilisé en (III.12) et (III.13) est obtenu à partir de la loi d'adaptation :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) \tilde{x}_1 \quad (\text{III.14})$$

tel que  $\varphi^T$  est déduite de la propriété (5).

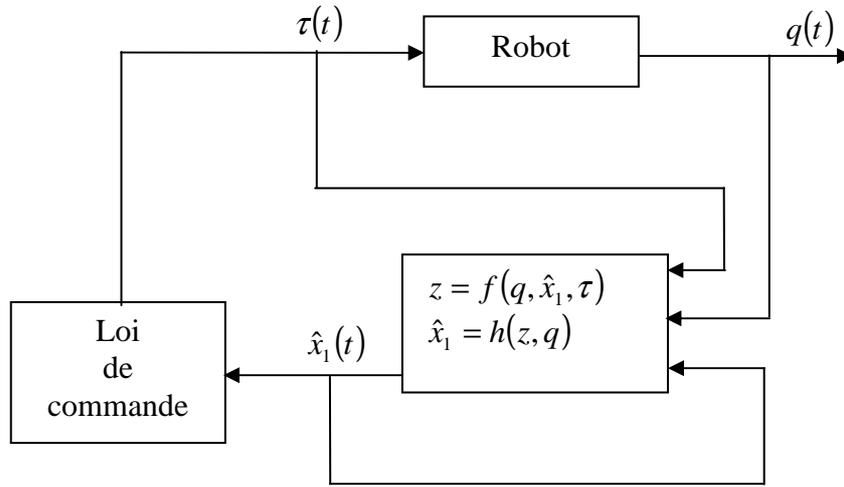


Figure III.4 : Diagramme bloc de la commande avec observateur

On choisit la loi de commande suivante :

$$u = \tau = -\hat{M}(q) \left[ -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1) z_2 - \ddot{q}_d + C_2 z_2 + D_2 z_2 + z_1 \right] + \hat{C}(q, \hat{x}_1) \hat{x}_1 + \hat{G}(q) \quad (\text{III.15})$$

avec  $C_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  matrice positive et diagonale. A partir des équations (III.13) et (III.14), on aura :

$$\dot{z}_2 = -C_2 z_2 - D_2 z_2 - z_1 + \Omega \tilde{x}_1 \quad (\text{III.16})$$

tels que :

$$\Omega = (C_1 + D_1) + K$$

$$D_2 \in R^{2 \times 2}$$

$$D_2 = \text{diag}[d_{21} \omega_1^T \omega_1, d_{22} \omega_2^T \omega_2]$$

$$\Omega^T = [\omega_1, \dots, \omega_n] \text{ et } d_i > 0 (i = n+1, \dots, 2n)$$

### III.3.3 Etude de la stabilité

En tenant compte des équations (III.10) et (III.16), la dynamique de l'erreur peut s'écrire :

$$\dot{z} = -(C_z + D_z)z + W \tilde{x}_1 \quad (\text{III.17})$$

$$M(q) \dot{\tilde{x}}_1 = -C(q, x_1)x_1 + C(q, \hat{x}_1)\hat{x}_1 - M(q)K \tilde{x}_1 - \varphi(q, \hat{x}_1, \psi) \tilde{\theta} \quad (\text{III.18})$$

avec :

$$z = [z_1 \quad z_2]^T, \quad C_z = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad W = [I \quad \Omega]^T$$

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} (z^T z + \tilde{x}_1^T M(q) \tilde{x}_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}) \quad (\text{III.19})$$

En utilisant les équations (III.17) et (III.18), la dérivée de  $V$  aura l'expression :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T (M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1)) \hat{x}_1 \\ & + \tilde{x}_1^T \left( \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, x_1) \right) \tilde{x}_1 - \tilde{\theta}^T \left( \varphi^T(q, \tilde{x}_1, \psi) \tilde{x}_1 + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

avec l'ajout du terme nul  $\frac{1}{4} (\tilde{x}_1^T P \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \tilde{x}_1)$  et l'utilisation de l'équation (III.14) et la

propriété (4), on aura :

$$\dot{V} = -z^T C_z z - z^T D_z z + z^T W \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T \left( M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4} P \right) \tilde{x}_1 \quad (\text{III.21})$$

On définit la matrice  $P$  par :

$$P = pI \quad (\text{III.22})$$

avec :

$$p = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} \quad (\text{III.23})$$

Sachant que :

$$-z^T D_z z + z^T W \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^T P \tilde{x}_1 \leq 0 \quad (\text{III.24})$$

On peut déduire la dérivée de Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -z^T C_z z - \tilde{x}_1^T \left( M(q)K + C(q, x_1) - C(q, \tilde{x}_1) - \frac{1}{4}P \right) \tilde{x}_1 \\ &\leq -z^T C_z z - \left( M_M(q)K + C_M \omega_{\max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4}P \right) \|\tilde{x}_1\|^2 \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

La condition qui satisfait la stabilité est telle que :

$$M_M K + C_M \omega_{\max} - C_M \|\tilde{x}_1\| - \frac{1}{4}P > 0 \quad (\text{III.26})$$

ce qui permet d'écrire :  $\dot{V} \leq 0$ .

### III.3.4 Simulations et résultats

Pour établir les simulations qui suivent, nous avons pris les paramètres de synthèse suivants :

$$C_1 = 0.1 I; C_{21} = 0.1; C_{22} = 300; D_1 = 4; D_2 = 10; T = 1 I; K_1 = 10; K_2 = 10;$$

$$m_2(0) = 1 \text{ kg}; q_1(0) = 0; q_2(0) = 0;$$

avec les fonctions représentatives suivantes :

$$\varphi^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2)\ddot{q}_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_2 - (2l_1l_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_2^2) + (l_2gc_{12} + l_1gc_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_1 + l_2^2\ddot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_1^2 + l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = (\hat{M}(q(t)))^{-1} [\tau(t) - \hat{C}(q(t), \hat{x}_1(t))\hat{x}_1(t) - \hat{G}(q(t))]$$

$$\hat{M}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}l_2^2 + 2\hat{\theta}l_1l_2c_2 + (m_1 + \hat{\theta})l_1^2 & \hat{\theta}l_2^2 + \hat{\theta}l_1l_2c_2 \\ \hat{\theta}l_2^2 + \hat{\theta}l_1l_2c_2 & \hat{\theta}l_2^2 \end{bmatrix}$$

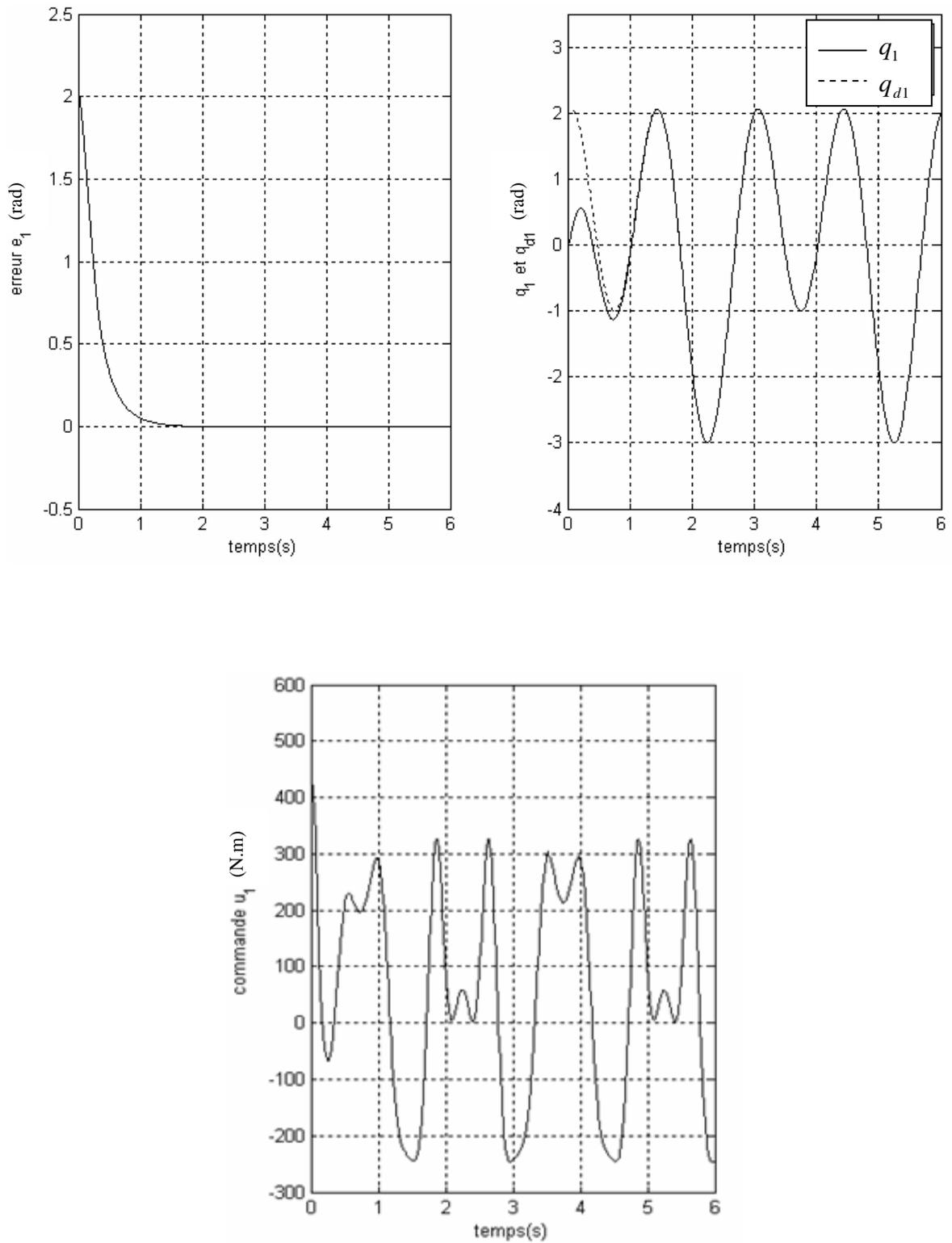
$$\hat{C}(q, \hat{x}_1) = \begin{bmatrix} -2\hat{\theta}l_1l_2s_2\hat{x}_{12} & -\hat{\theta}l_1l_2s_2\hat{x}_{12} \\ \hat{\theta}l_1l_2s_2\hat{x}_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}l_2gc_{12} + (m_1 + \hat{\theta})l_1gc_1 \\ \hat{\theta}l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

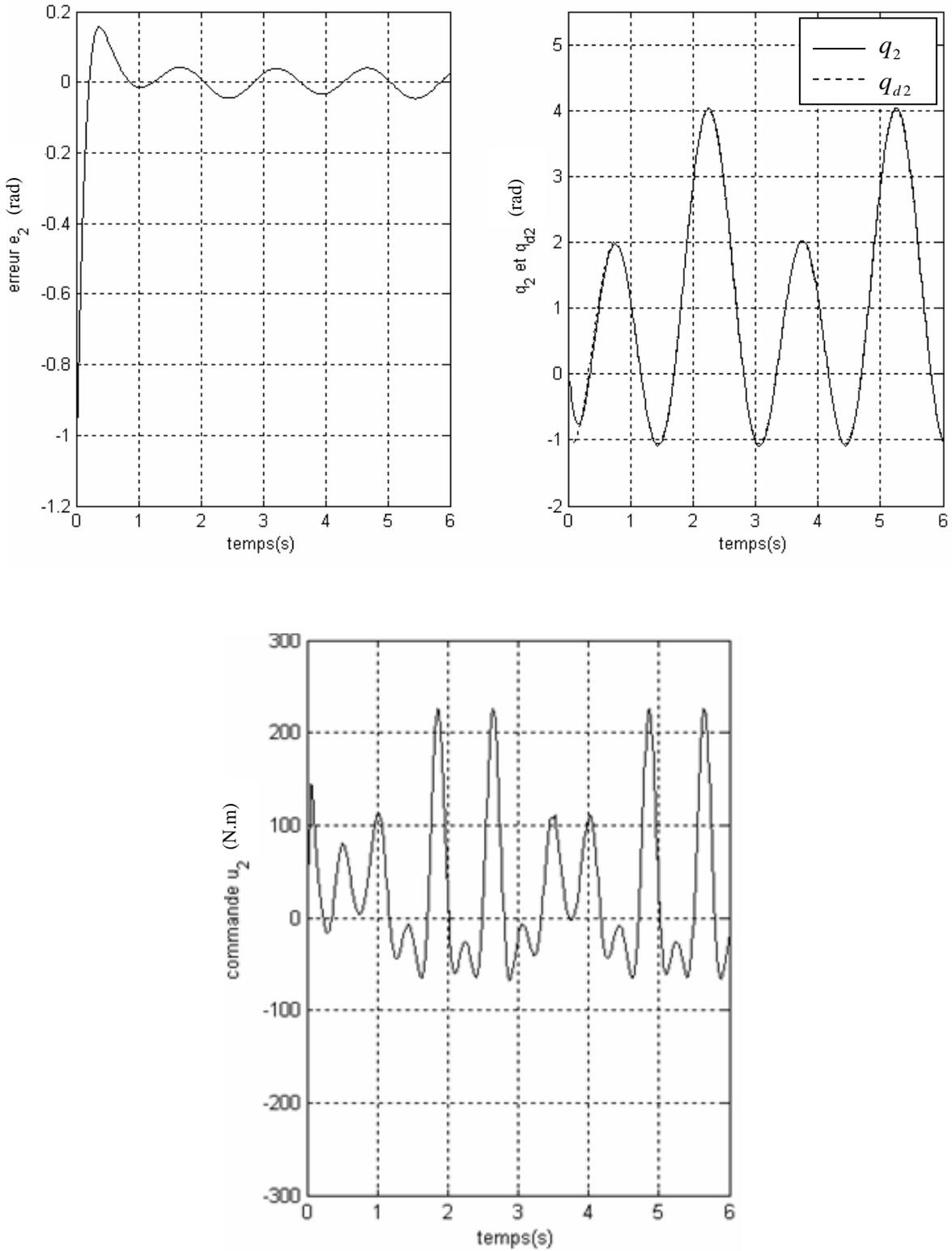
$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2)\psi_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2)\psi_2 - (2l_1l_2s_2\hat{x}_{11}\hat{x}_{12} + l_1l_2s_2\hat{x}_{12}^2) + (l_2gc_{12} + l_1gc_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2)\psi_1 + l_2^2\psi_2 + l_1l_2s_2\hat{x}_{11}^2 + l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

d'où  $\theta = m_2$  .



Figures III.5 : Résultats de simulation pour la première liaison



Figures III.6 : Résultats de simulation pour la deuxième liaison

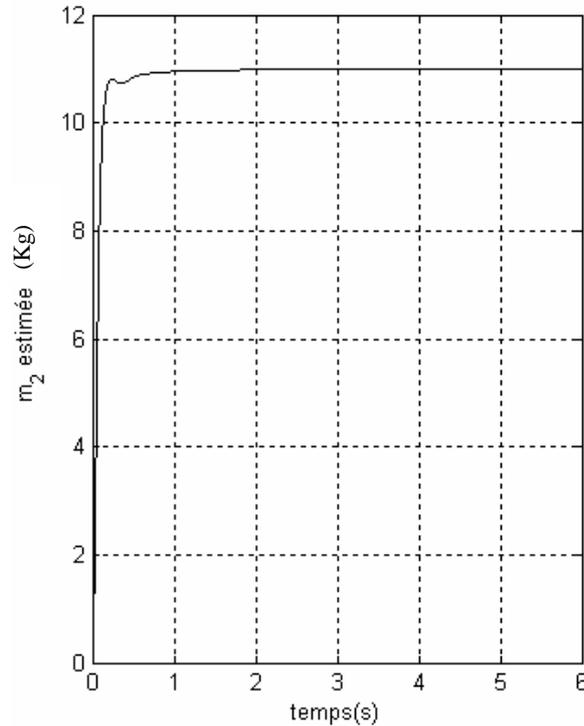


Figure III.7 : Paramètre estimé

Les résultats des figures III.5, III.6 et III.7 montrent un bon comportement de la commande adaptative avec observateur proposé, même si le couple d'entrée a un pic élevé dans la première seconde, due à l'erreur de la vitesse initiale estimée.

### III.4 Commande backstepping adaptative avec observateur d'un robot manipulateur à couple électrique

La commande de backstepping avec observateur de vitesse peut résoudre aussi le problème de l'erreur de poursuite de la trajectoire désirée d'un bras manipulateur à couple électrique à deux degrés de liberté en supposant que seules les positions des segments sont mesurable.

#### III.4.1 Modèle et propriétés

Le modèle dynamique de ce type de robot en tenant compte l'expression du couple électrique  $\tau = K_r I$  est sous la forme :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Le vecteur d'état peut être décrit par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; x_1 = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ I \end{bmatrix} \text{ et } x_2 = \begin{bmatrix} q \\ \int I \end{bmatrix}$$

La représentation d'état du système sans frottement peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = C_e(x_1, x_2)x_1 + G_e(x_2) + L^{-1}U \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

où :

$$C_e(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -M^{-1}C(q, \dot{q}) & M^{-1}K_r \\ -L^{-1}K_m & -L^{-1}R \end{bmatrix}; G_e(x_2) = \begin{bmatrix} -M^{-1}G(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}.$$

Ce type de robot possède les mêmes propriétés que le robot précédant sauf la propriété (5) qui est légèrement différente. Cette dernière, qu'on notera propriété 6 est telle que :

$$- \text{Propriété 6: } M_{eq}(q)\psi + C_{eq}(q, \zeta)\zeta + G_{eq}(q) = \varphi_0(q, \zeta, \psi) + \varphi(q, \zeta, \psi)\theta$$

où :

$$M_{aq} = \begin{bmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}; C_{eq} = \begin{bmatrix} C(q, \dot{q}) & -K_r \\ K_m & R \end{bmatrix} \text{ et } G_{eq} = \begin{bmatrix} G(q) \\ 0 \end{bmatrix}$$

### III.4.2 Observateur

On note que la vitesse du robot est limitée par une valeur constante  $\omega_{\max}$  tel que  $\|\dot{q}\| < \omega_{\max}$   $\forall t \geq 0$ .

On considère l'erreur et sa dérivée suivantes :

$$z_1 = x_2 - x_{2d} \quad (III.29)$$

$$\dot{z}_1 = x_1 - x_{1d}$$

tels que :

$$x_{2d} = \begin{bmatrix} q_d \\ \int I_d \end{bmatrix} \text{ et } x_{1d} = \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ I_d \end{bmatrix}$$

L'idée principale du backstepping est de choisir une des variables d'état comme étant la commande virtuelle.

$$\zeta_1 = \hat{x}_1 = z_2 + \alpha_1 \quad (III.30)$$

$\zeta_1$  représente la somme de l'erreur  $z_2$ .  $\alpha_1$  est la fonction stabilisante. On peut déduire à partir de l'équation (III.30) :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \tilde{x}_1 - x_{1d} \quad (III.31)$$

$$\text{avec : } x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$$

La fonction stabilisante est choisie de sorte que :

$$\alpha_1 = -C_1 z_1 - D_1 z_1 + x_{1d} \quad (III.32)$$

avec  $C_1 \in R^{2n \times n}$  matrice positive et toujours diagonale, et  $D_1 \in R^{2n \times n}$  positive diagonale telle que :

$$C_1 = \text{diag}[C_{11}, \dots, C_{12n}]$$

$$D_1 = \text{diag}[d_1, \dots, d_{2n}]$$

avec :

$$C_{1i} > 0 \quad (i = 1, \dots, 2n)$$

$$d_i > 0 \quad (i = 1, \dots, 2n)$$

Sachant que le terme  $-D_1 z_1$  est rajouté pour compenser  $\tilde{x}_1$ , on peut écrire (III.31) sous la forme suivante :

$$\dot{z}_1 = -(C_1 - D_1)z_1 + z_2 + \tilde{x}_1 \quad (\text{III.33})$$

L'étape suivante consiste à représenter la dynamique de  $z_2$  en utilisant l'équation (III.30), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\zeta}_1 - \dot{\alpha}_1 \\ &= \dot{\hat{x}}_1 + (C_1 + D_1)\dot{z}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= -(C_1 + D_1)^2 z_1 + (C_1 + D_1)(z_2 + \tilde{x}_1) - \dot{x}_{1d} + \begin{bmatrix} -M^{-1}C(q, \dot{q}) & M^{-1}K_r \\ -L^{-1}K_m & -L^{-1}R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ I \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -M^{-1}C(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1}G \end{bmatrix} + K \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

L'équation de l'observateur est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) + K \tilde{x}_1 \quad (\text{III.35})$$

$$\psi(q, \hat{x}_1, \tau, \hat{\theta}) = \hat{C}_e(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\hat{x}_1 + \hat{G}_e(q) + L^{-1}U \quad (\text{III.36})$$

tel que  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  est l'erreur d'observation et  $K > 0$  est une matrice diagonale de gain.

Le paramètre estimé utilisé dans (III.35) et (III.36) est obtenu à partir de la loi d'adaptation :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) \tilde{x}_1 \quad (\text{III.37})$$

tel que

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}$$

$\varphi^T$  est déduite de la propriété (6).

La loi de commande choisie est :

$$v = L \left( -(C_{1i} + d_{1i})^2 z_{12} + (C_{1i} + d_{1i}) z_{22} - \dot{I}_d + (C_{2i} + d_{2i}) z_{22} + z_{12} \right) + K_m \dot{q} + R I \quad (\text{III.38})$$

avec  $C_{2i} \in R^{n \times n}$  matrice positive et diagonale

où :

$$z_{12} = \int I - \int I_d = \begin{cases} \int I_1 - \int I_{d1} \\ \int I_2 - \int I_{d2} \end{cases}$$

$$z_{22} = \hat{I} - (-C_{1i} z_{12} - D_{1i} z_{12} + I_d)$$

$$C_{1i} = \begin{bmatrix} C_{13} & 0 \\ 0 & C_{14} \end{bmatrix}; \quad C_{2i} = \begin{bmatrix} C_{23} & 0 \\ 0 & C_{24} \end{bmatrix}$$

$$D_{1i} = \begin{bmatrix} d_{13} & 0 \\ 0 & d_{14} \end{bmatrix}; \quad D_{2i} = \begin{bmatrix} d_{23} & 0 \\ 0 & d_{24} \end{bmatrix}$$

A partir des équations (III.36) et (III.37), on aura :

$$\dot{z}_2 = -C_2 z_2 - D_2 z_2 - z_1 + (C_1 + D_1 + K) \tilde{x}_1 \quad (\text{III.39})$$

tels que :

$$D_2 \in R^{n \times n}$$

$$D_2 = \text{diag}[d_{21}, \dots, d_{2n}]$$

### III.4.3 Résultats et simulations

L'apport significatif de cette commande est explicité à travers les courbes de simulations qui suivront.

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$$C_{13} = 10; C_{14} = 10; C_{23} = 5; C_{24} = 5; d_{13} = 1; d_{14} = 1; d_{23} = 1; d_{24} = 1;$$

$$T_1 = 10; T_2 = 100; K_{13} = 10; K_{14} = 10; K_{23} = 10; K_{24} = 10;$$

$$\Lambda_1 = 200; \Lambda_2 = 100; k_{d1} = 20; k_{d2} = 100;$$

$$m_1(0) = 95 \text{ kg}; m_2(0) = 20 \text{ kg}; q_1(0) = 0; q_2(0) = 0;$$

$$\text{avec } \theta = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2)\ddot{q}_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_2 - (2l_1l_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_2^2) & l_2^2\ddot{q}_1 + l_1g c_1 \\ & + (l_2g c_{12} + l_1g c_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_1 + l_2^2\ddot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_1^2 + l_2g c_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \hat{C}_e(t)\hat{x}_1 + \hat{G}_e(t) + L^{-1}U(t)$$

où :

$$\hat{C}_e(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\hat{M}^{-1}\hat{C}(q, \dot{q}) & \hat{M}^{-1}K_r \\ -L^{-1}K_m & -L^{-1}R \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_e(x_2) = \begin{bmatrix} -\hat{M}^{-1}\hat{G}(q, \dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

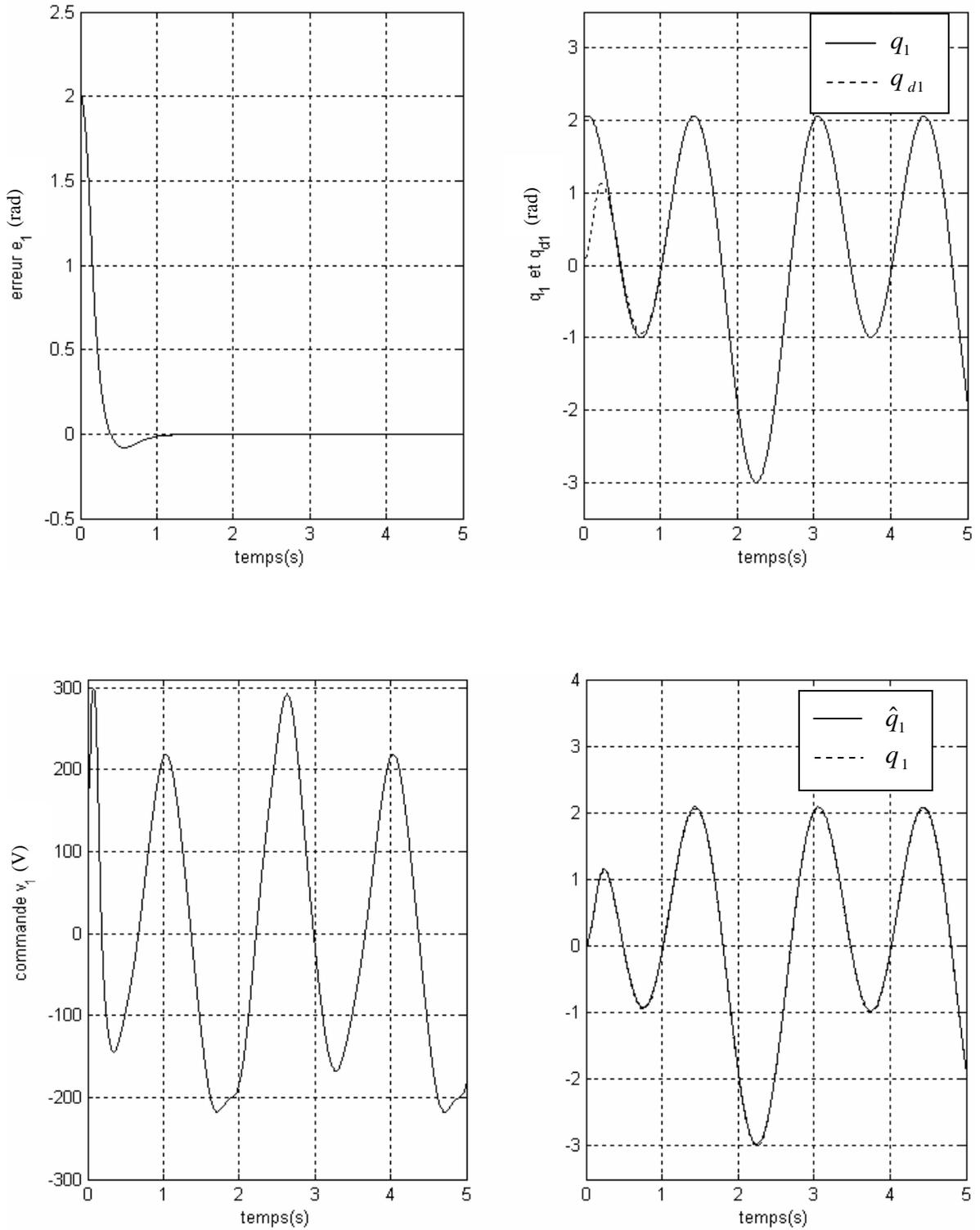
et :

$$\hat{M}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} l_2^2 + 2 \hat{\theta} l_1 l_2 c_2 + (m_1 + \hat{\theta}) l_1^2 & \hat{\theta} l_2^2 + \hat{\theta} l_1 l_2 c_2 \\ \hat{\theta} l_2^2 + \hat{\theta} l_1 l_2 c_2 & \hat{\theta} l_2^2 \end{bmatrix}$$

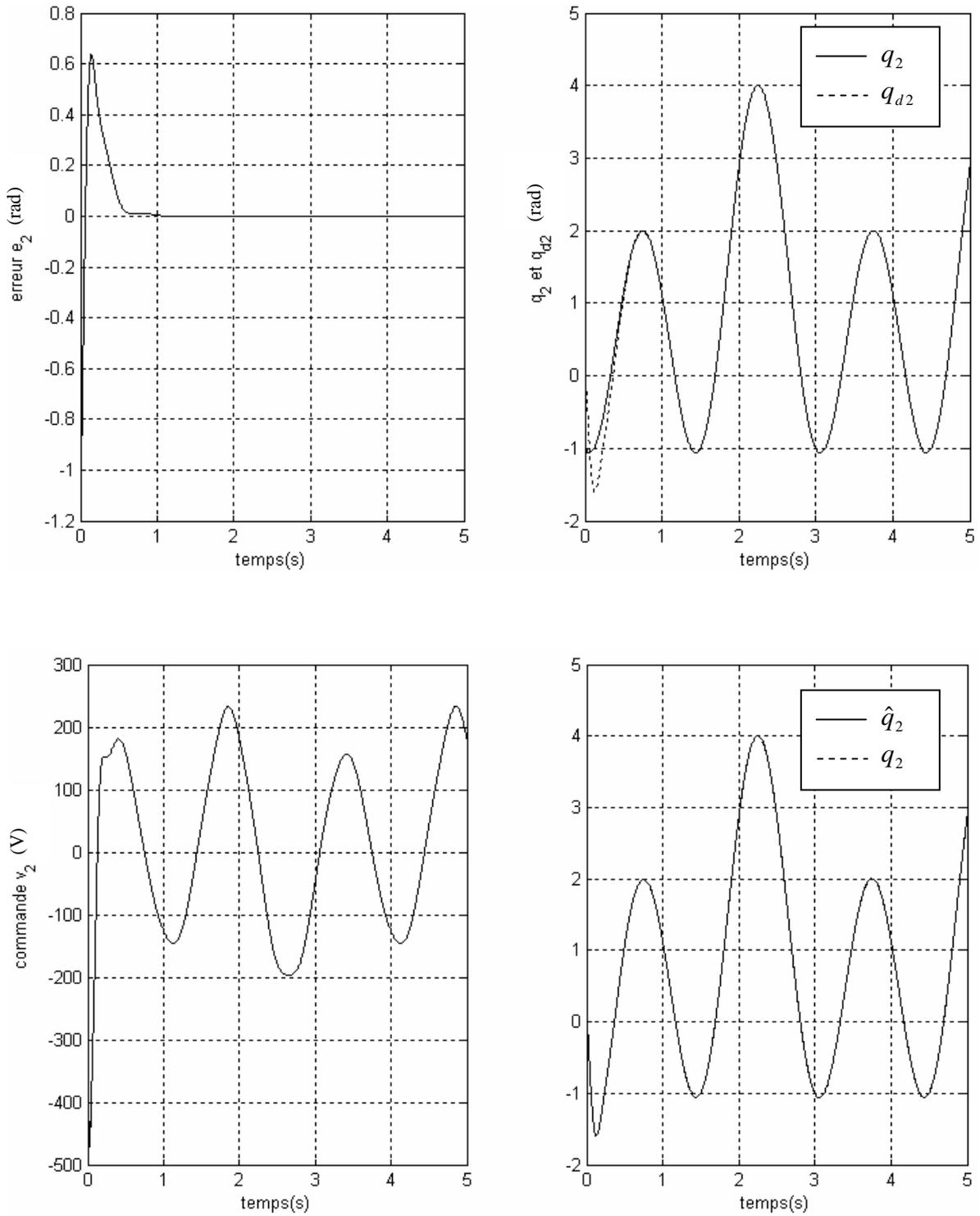
$$\hat{C}(q, \hat{x}_1) = \begin{bmatrix} -2 \hat{\theta} l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{12} & -\hat{\theta} l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{12} \\ \hat{\theta} l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{G}(q) = \begin{bmatrix} \hat{\theta} l_2 g c_{12} + (m_1 + \hat{\theta}) l_1 g c_1 \\ \hat{\theta} l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \int I_1 \\ \int I_2 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

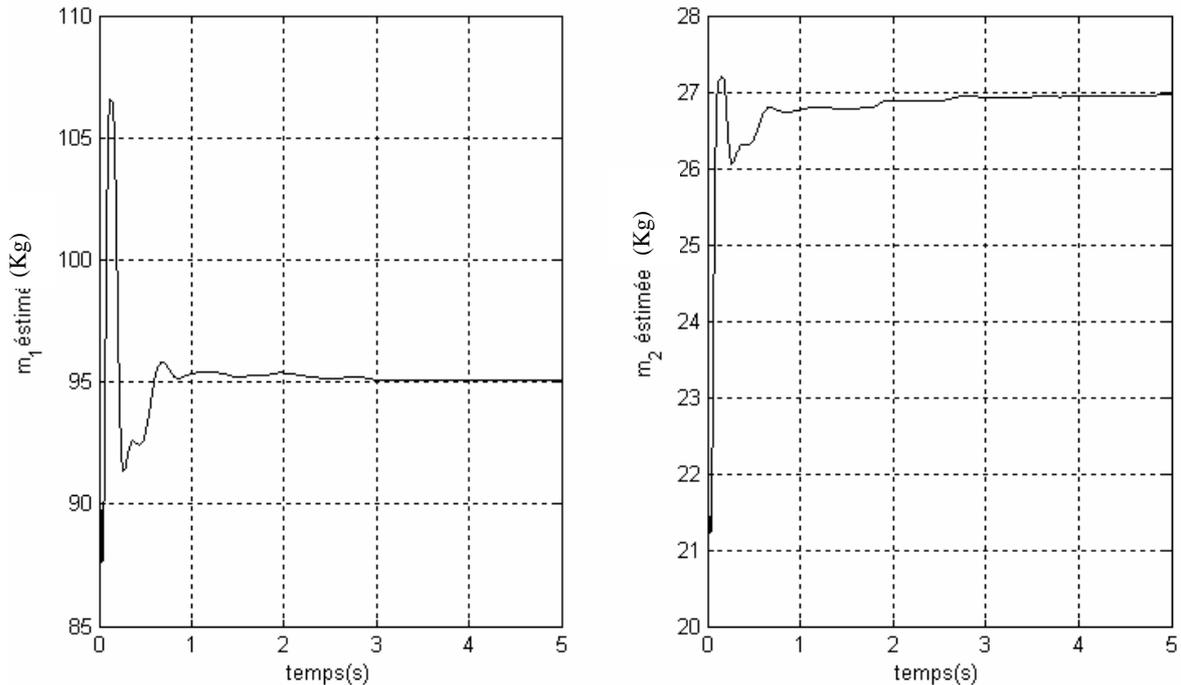
$$\varphi^T(q, \hat{x}_1, \psi) = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2) \psi_1 + (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \psi_2 - (2l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{11} \hat{x}_{12} + l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{12}^2) & l_2^2 \psi_1 + l_1 g c_1 \\ & + (l_2 g c_{12} + l_1 g c_1) \\ (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \psi_1 + l_2^2 \psi_2 + l_1 l_2 s_2 \hat{x}_{11}^2 + l_2 g c_{12} & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Figures III.8 : Résultats de simulation pour la première liaison



Figures III.9 : Résultats de simulation pour la deuxième liaison



Figures III.10 : Paramètres estimés

Les résultats des figures III.8, III.9 et III.10 montrent aussi un bon comportement de la commande adaptative avec observateur proposée. Cependant, la tension d'entrée a un pic relativement élevé autour de la première seconde ; ceci est dû à l'erreur sur la vitesse initiale estimée.

La commande adaptative avec observateur donne une erreur de suivi de la trajectoire presque nulle pour ce robot à couple électrique ce qui confirme la puissance de la commande backstepping adaptative. Après 1 seconde, une estimation acceptable de la valeur de la masse est réalisée.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'application de la technique de la commande backstepping adaptative avec observateur au robot montre son efficacité. Le seul problème de cette technique réside dans l'utilisation de l'adaptation de la méthode d'intégration de l'observateur et l'augmentation de l'ordre des équations dynamiques du robot pour les bras manipulateur à couple électrique. Concernant l'adaptation, il est difficile de trouver la forme triangulaire qui sépare les paramètres à estimer des non-linéarités.

Pour conclure, on peut dire qu'il sera très difficile de trouver une méthode générique de la commande de backstepping qui s'applique à tout type de système non linéaire.

## **CHAPITRE IV**

### **COMMANDE PASSIVE**

#### **IV.1 Introduction**

Dans ce chapitre, une technique de commande non linéaire récente et très performante sera présentée. Il s'agit de la commande passive qui a été développée par Sadegh et Horwitz [2], et qui est issue des travaux de Slotine et Li [2]. Elle utilise de manière essentielle la structure Lagrangienne des systèmes mécaniques pour faire décroître une fonction de Lyapunov.

Dans le cas où le modèle du procédé est parfaitement connu, cette stratégie de commande présente des performances très satisfaisantes en termes de poursuite. Cependant, en pratique, cette condition idéale n'est jamais tout à fait remplie à cause des différentes perturbations agissant sur le procédé, et le modèle n'est donc qu'approximativement connu, d'où la nécessité d'adapter la commande aux incertitudes du modèle [2]. Pour améliorer les performances, nous proposons une modification portant sur la loi de commande afin d'assurer la stabilité du procédé en boucle fermée vis-à-vis des erreurs de paramétrisation. L'apport de cette modification a été montré par les résultats de simulation qui a été faite sur un robot à couple électrique.

#### **IV.2 Principe de la passivité**

Un système est stable lorsque, d'une part, la fonction d'énergie représente un minimum à l'équilibre et, d'autre part, cette fonction est conservée ou décroissante dans le temps. La stabilité asymptotique ne pouvant pas découler lorsque la fonction est conservée uniquement.

Soit un système décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Ce dernier possède une entrée  $u$  et une sortie  $y = h(x, u)$ . L'entrée est utilisée pour injecter ou soutirer de la puissance. Un système est passif si lorsque de la puissance est soutirée, le soutirage se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance.

Ce stock est en quelque sorte l'analogue à la fonction de Lyapunov. On le notera également  $V$ .

Les systèmes passifs les plus simples sont ceux qui ne comportent pas de dynamique. La sortie est directement fonction de la valeur de la grandeur d'entrée. Pour simplifier encore d'avantage la présentation, l'exemple considéré comporte une entrée d'une seule dimension et une sortie d'une seule dimension.

Ainsi, pour que la puissance soit dissipée, il faut que le produit entrée-sortie, c'est-à-dire le produit  $(u i)$  soit positif afin que la puissance soit consommée et dissipée à chaque instant dans le système statique. L'exemple simple de la résistance électrique

$$u = R i \tag{IV.2}$$

est donné à la figure (IV.1) et illustre parfaitement ce cas de système. Etant donné que le système est statique, la puissance est dissipée instantanément. Il n'y a pas la notion de stock interne de puissance. La fonction  $V$  est absente dans ce cas.

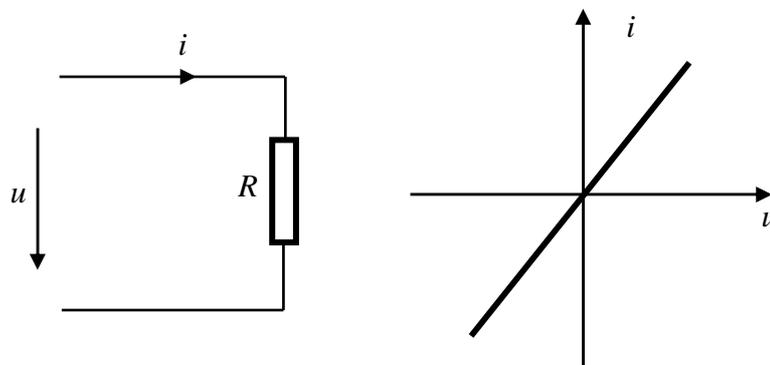


Figure. IV.1. La résistance électrique est un système statique passif

Un simple calcul donne aisément :

$$u i = R i^2 \quad (IV.3)$$

et confirme que la puissance instantanée est effectivement instantanément dissipée dans la résistance électrique.

### IV.2.1 Système statique passif

L'exemple de la simple résistance électrique peut s'étendre par analogie à une plus large classe de systèmes. L'extension doit cependant prendre en compte la nécessité de dissiper instantanément la puissance que donne le couple entrée-sortie. En conséquence, il est impératif que la condition suivante soit vérifiée

$$u y = g, \quad g > 0$$

pour un système statique passif. Ceci signifie que la caractéristique statique doit nécessairement se trouver dans le premier et le troisième quadrant, conformément à ce qui est représenté à la figure (IV.2).

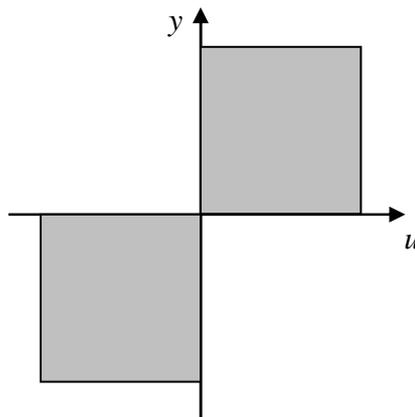


Figure IV.2. Représentation graphique d'un système passif statique : La caractéristique doit appartenir au secteur représenté par un remplissage.

### IV.2.2 Système dynamique passif

Lorsque le système comporte une partie dynamique, certaines variables d'état sont associées au système. Le produit de l'entrée par la sortie  $u^T y$ , ne suffit plus pour caractériser la passivité.

En effet, la puissance peut être emmagasinée dans les éléments dynamiques. Elle peut également être restituée à l'entrée du système.

Pour mieux comprendre le phénomène, étudions un circuit électrique comportant une résistance, une inductance et une capacité. Le circuit est représenté à la figure (IV.3).

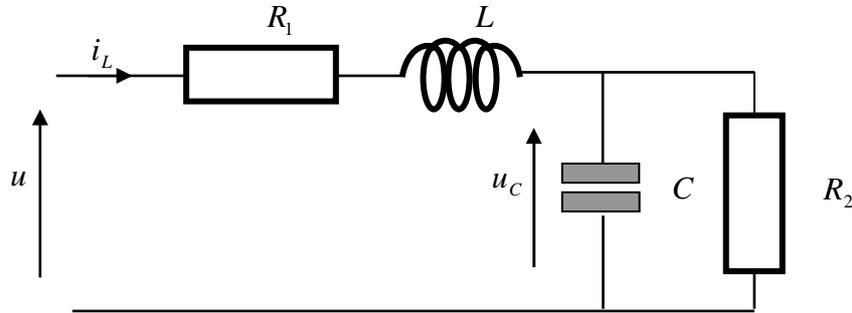


Figure IV.3. Un circuit électrique RLC est un système dynamique passif.

Ce circuit peut recevoir de la puissance par l'intermédiaire du couple entrée-sortie  $u$  et  $i$ . Cette puissance est alors dissipée partiellement dans les résistances et stockée dans les deux éléments  $C$  (capacité) et  $L$  (inductance). Le circuit peut également fournir de la puissance en entrée en diminuant son stock interne d'énergie, en diminuant soit la charge dans la capacité, soit le champ magnétique dans la bobine. Soit donc la fonction de stockage :

$$V = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i_L^2 \quad (\text{IV.4})$$

La dynamique du système est :

$$u = R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C \quad (\text{IV.5})$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{1}{R_2} \quad (\text{IV.6})$$

En posant  $x_1 = i_L$  et  $x_2 = u_C$ , on arrive à la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} u - \frac{R_1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 \quad (\text{IV.7})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2} x_2 \quad (\text{IV.8})$$

On peut donc calculer l'évolution du stockage dans le temps :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2 \\ &= u x_1 - R_2 x_1^2 - x_1 x_2 + x_2 x_1 - \frac{1}{R_2} x_2^2 \\ &= u x_1 - R_2 x_1^2 - \frac{1}{R_2} x_2^2\end{aligned}\tag{IV.9}$$

En considérant la sortie  $y = i_L = x_1$  :

$$\dot{V} = u y - g(x),\tag{IV.10}$$

$$\text{avec } g(x) = R_2 x_1^2 + \frac{1}{R_2} x_2^2$$

Ainsi la puissance en entrée est soit stockée ou soit dissipée.

### IV.2.3 Définition différentielle de la passivité

L'exemple précédent rend possible une extension mathématique de la notion de passivité, tout comme cela a été le cas lors de la généralisation de la résistance électrique à une plus large classe de systèmes.

**Définition 1** : Soit le système :

$$\dot{x} = f(x, u)\tag{IV.11}$$

$$y = h(x)$$

S'il existe  $\gamma > -\infty$ ,  $V > \gamma$ , et

$$\dot{V} = u^T y - g\tag{IV.12}$$

avec  $g \geq 0$ , alors le système est passif.

### IV.2.4 Propriétés

L'immense avantage des systèmes passifs est leur souplesse lors des connexions en tout genre [72]. En effet, ces systèmes se comportent très bien lors d'une connexion en série, car les systèmes agissent en quelque sorte indépendamment de leur connexion. Mais ils se comportent également très bien lors des connexions à la fois en parallèle et en

rétroaction. Ce dernier cas est important lors d'une association de sous-systèmes passifs avec retour de sortie.

#### IV.2.4.1 Connexion parallèle

Soit la connexion parallèle suivante :

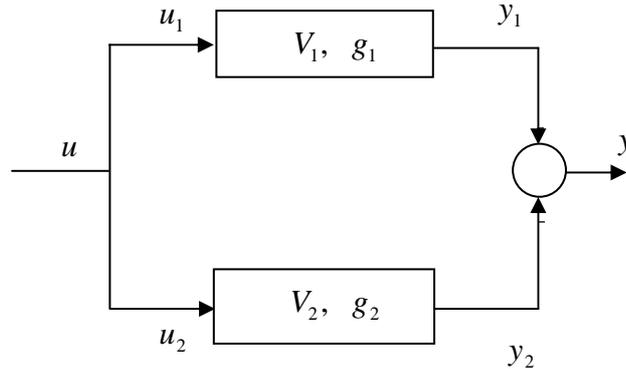


Figure IV.4 : Système lors de connexion en parallèle

Chacun des deux systèmes comporte une fonction de stockage interne  $V_1$  et  $V_2$  respectivement et obéit à la définition du paragraphe IV.2.3. Ceci donne :

$$\dot{V}_1 = u_1^T y_1 - g_1 \quad (\text{IV.13})$$

$$\dot{V}_2 = u_2^T y_2 - g_2 \quad (\text{IV.14})$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u^T y_1 + u^T y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u^T (y_1 + y_2) - g_1 - g_2$$

$$\dot{V} = u^T y - g \quad (\text{IV.15})$$

Le calcul montre donc que, si l'on considère  $V = V_1 + V_2$  comme fonction de stockage associée à l'assemblage constitué par la connexion en parallèle des deux systèmes individuels, alors cet assemblage répond encore à la même définition, en utilisant et  $V = V_1 + V_2$  et  $g = g_1 + g_2$ . La passivité est donc maintenue.

### IV.2.4.2 Connexion par rétroaction

La connexion par rétroaction est plus critique étant donné que les deux systèmes interagissent d'amont en aval et ceci à l'infini. Soit donc la connexion par rétroaction négative suivante :

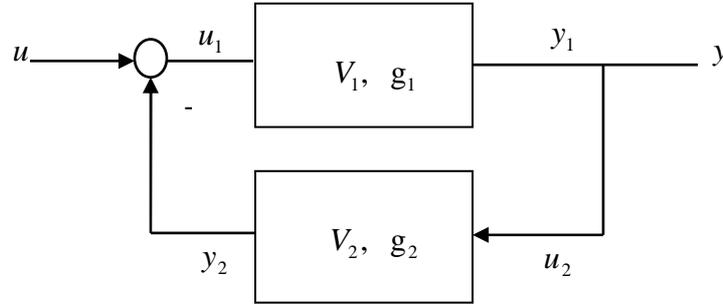


Figure IV.5 : Système lors de connexion par rétroaction négative

pour laquelle chacun des sous-systèmes constitutifs obéit à la définition 1. En tenant compte de la particularité de la connexion on a :

$$\dot{V}_1 = u_1^T y_1 - g_1 \quad (\text{IV.16})$$

$$\dot{V}_2 = u_2^T y_2 - g_2 \quad (\text{IV.17})$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= (u^T - y_2^T) y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= (u^T - y_2^T) y_1 + y_1^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= u^T y_1 - g_1 - g_2 \end{aligned}$$

$$\dot{V} = u^T y - g \quad (\text{IV.18})$$

La même constatation que dans le cas de la connexion parallèle est alors déduite : Le système est passif et ayant comme la fonction de stockage suivante  $V = V_1 + V_2$  et le terme de dissipation défini par  $g = g_1 + g_2$ .

#### Remarque :

La propriété de maintenir la passivité après connexion par rétroaction négative de deux systèmes passifs est extrêmement utile pour synthétiser des lois de commande. En

effet, il est possible d'identifier des sous-systèmes passifs dans un système à commander. Lorsque ceci n'est pas directement le cas, un bouclage partiel peut transformer une sous-partie en une sous-partie passive. Lorsque le système complet admet (après bouclage) une décomposition en systèmes passifs (chaque sous-système est connecté aux autres par connexion parallèle, série ou par rétroaction négative) la stabilité sera garantie par les propriétés de connexion élaborées ci-dessus. Ceci permet de constituer une fonction de Lyapunov compliquée à partir de fonctions plus simples associées aux sous-parties passives.

### IV.2.5 Définition intégrale de la passivité

Il est également possible de donner une définition équivalente de la passivité sous forme intégrale ne faisant pas intervenir de notion différentielle.

#### Définition 2

S'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > -\infty$ ,  $V > \gamma$  et  $g \geq 0$  tel que si

$$\dot{V} = u^T y - g$$

Ceci implique  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > -\infty$

$$\int_0^{\infty} u(\tau)^T y(\tau) d\tau > \alpha$$

Alors le système est passif.

#### Remarque :

Pour voir la correspondance entre les deux définitions, il suffit de prendre  $g \equiv 0$ . En fait, la définition intégrale signifie qu'il est impossible en jouant sur l'entrée de rendre arbitrairement petit le stock interne d'énergie. Ce stock est borné inférieurement. Cette définition sera utilisée pour démontrer un lien important entre la propriété de passivité et la caractéristique fréquentielle associée aux systèmes linéaires par l'entremise de l'identité de Perceval. [72]

## IV.3 Commande basée sur le principe de passivité

Les méthodes basées sur ce principe ont un avantage puisqu'elles n'utilisent ni l'inverse de la matrice estimée de l'inertie, ni la mesure de l'accélération. Elles exploitent

la propriété suivante : "La dérivée de l'énergie cinétique est égale au travail produit par les actionneurs et les couples de gravités".

Autrement dit le travail produit par les couples centrifuges est nul :

$$\dot{q}^T (\dot{M}(q) - 2N(q, \dot{q})) \dot{q} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

En général, la commande qui en résulte est stabilisante et non linéarisante.

### IV.3.1 Théorème général

On considère l'équation différentielle :

$$M(q)\dot{v} + N(q, \dot{q})v + K_D v = \psi \quad (\text{IV.20})$$

avec  $K_D = K_D^T > 0$ , et  $v$  est donné par :

$$v = F(s)^{-1} e \quad (\text{IV.21})$$

$$F(s) = (sI + K(s))^{-1} \quad (\text{IV.22})$$

où  $K(s)$  est une matrice à fixer selon la dynamique et les propriétés recherchées.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $F(s)$  est stable.
- La relation  $-v \rightarrow \psi$  est passive c'est-à-dire :

$$\int_0^T v^T(t) \psi(t) dt \geq -\beta \quad (\text{IV.23})$$

pour quelques valeurs de  $\beta$ , alors l'erreur de position  $e \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et si  $\psi$  est bornée alors  $v \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et par conséquent,  $\dot{e} \rightarrow 0$ .

### Preuve

On définit la fonction  $V$  :

$$V = \frac{1}{2} v^T M(q) v + \beta - \int_0^T v^T(t) \psi(t) dt \quad (\text{IV.24})$$

De la propriété (IV.23), on remarque que :  $V \geq 0$ .

Par dérivation on obtient :

$$\dot{V} = v^T M(q) \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{M}(q) v - v^T(t) \psi(t) \quad (\text{IV.25})$$

De (IV.20), on peut écrire :

$$M(q) \dot{v} = \psi - N(q, \dot{q}) v - K_D v \quad (\text{IV.26})$$

la substitution de (IV.26) dans (IV.25) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -v^T K_D v + \frac{1}{2} v^T (\dot{M}(q) - 2N(q, \dot{q})) v \\ &= -v^T K_D v \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

### Remarque :

Pour la conformité des calculs, l'erreur de trajectoire  $e(t)$  est modifiée de la manière suivante :

$$e(t) = q(t) - q_d(t) \quad (\text{IV.28})$$

### IV.3.2 Version non adaptative

La figure (IV.6) montre la structure générale d'un tel système de commande. La loi de commande proposée est de la forme :

$$\tau = M(q) \dot{q}_r + N(q, \dot{q}) q_r + G(q) - K_D (\dot{q} - q_r) \quad (\text{IV.29})$$

Les vecteurs  $\dot{q}_r$  et  $q_r$  sont les trajectoires de référence définies en fonction de :  $q_d$ ,  $\dot{q}_d$  et  $\ddot{q}_d$ .

Si on remplace (IV.29) dans (III.3) on obtient l'équation :

$$M(q) \dot{v} + N(q, \dot{q}) v + K_D v = 0 \quad (\text{IV.30})$$

où :

$$v = \dot{q} - q_r \quad (\text{IV.31})$$

On obtient alors :

$$q_r = \dot{q} - (sI + K(s))e \tag{IV.32}$$

$$q_r = \dot{q}_d - K(s)e \tag{IV.33}$$

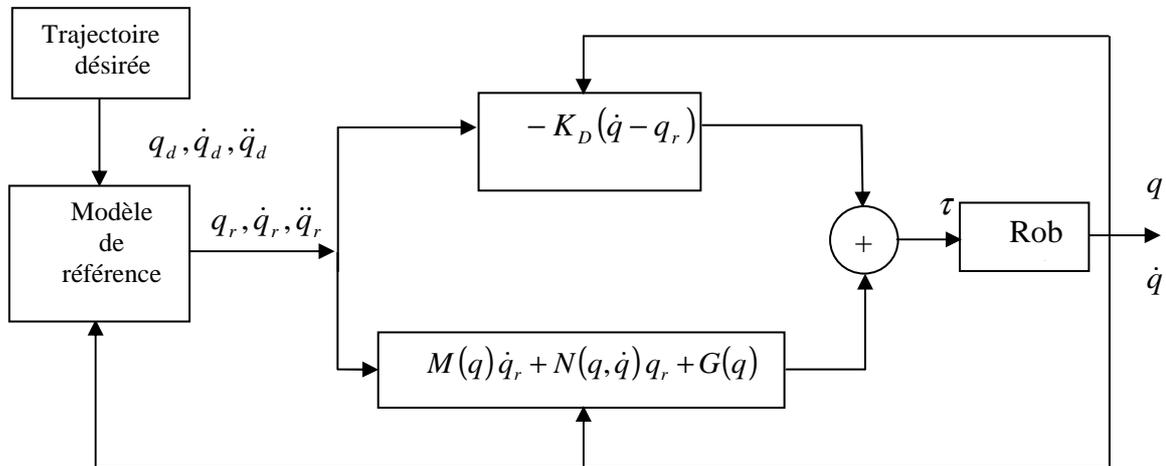


Figure IV.6 : Version non adaptative du contrôle basé sur la théorie de passivité

### IV.3.3 Version adaptative

La figure IV.7 illustre l'implantation adaptative de la commande basée sur le principe de passivité.

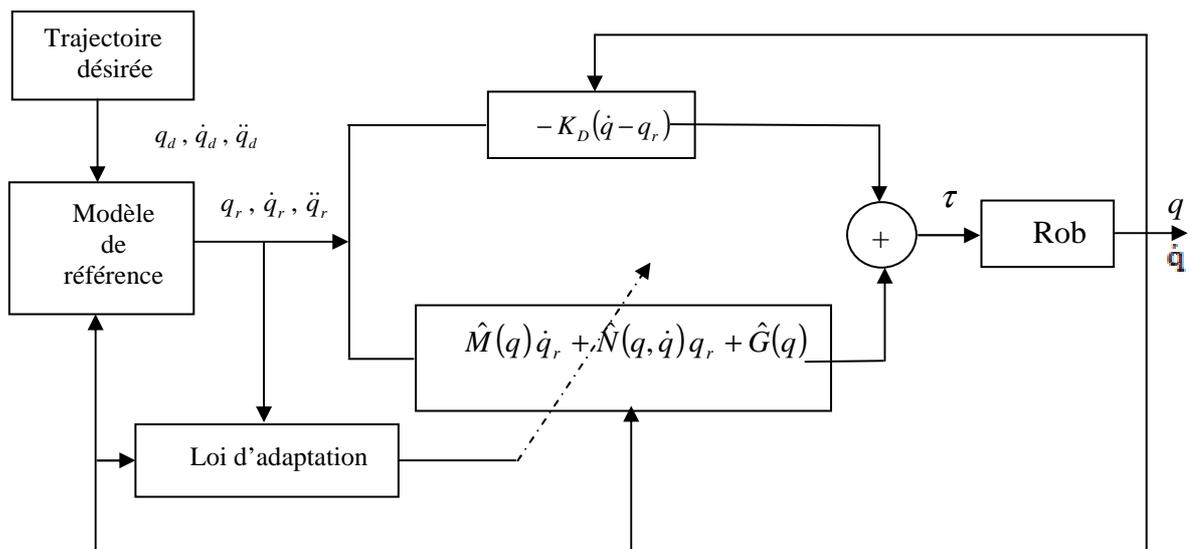


Figure IV.7 : Commande adaptative basée sur le principe de passivité

### IV.3.3.1 Approche directe [73]

La loi de commande est choisie telle que :

$$\tau = \hat{M}(q)\dot{q}_r + \hat{N}(q, \dot{q})q_r + \hat{G}(q) - K_D(\dot{q} - q_r) \quad (\text{IV.34})$$

La substitution de (IV.34) dans (III.3)

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \hat{M}(q)\dot{q}_r + \hat{N}(q, \dot{q})q_r + \hat{G}(q) - K_D(\dot{q} - q_r) \quad (\text{IV.35})$$

Puisque :

$$\dot{q} = q_r + v \quad (\text{IV.36})$$

$$\ddot{q} = \dot{q}_r + \dot{v}$$

on peut écrire (IV.35) sous la forme :

$$\begin{aligned} M\dot{v} + Nv + K_Dv &= (\hat{M} - M)\dot{q}_r + (\hat{N} - N)q_r + (\hat{G} - G) \\ &= W(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r)(\hat{\theta} - \theta) \\ &= W(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r)\tilde{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Notons que la fonction  $W$  n'est pas en fonction de l'accélération des articulations du manipulateur, mais fonction de la vitesse et de l'accélération de la trajectoire de référence.

Pour pouvoir appliquer le théorème (IV.3.1) on doit définir une loi d'adaptation de sorte que la transformation  $-v \rightarrow \psi$  soit passive. Par conséquent, la loi d'adaptation choisie est :

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma^{-1}W^T(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r)v \quad (\text{IV.38})$$

$$\text{où : } \tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$$

L'équation (VI.37) est similaire à l'équation (IV.20) avec :

$$\psi = W(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r)\tilde{\theta} \quad (\text{IV.39})$$

de (IV.38) et (IV.39) on a :

$$v^T\psi = v^TW\tilde{\theta} = -\dot{\tilde{\theta}}^T\Gamma\tilde{\theta} \quad (\text{IV.40})$$

alors :

$$-\int_0^t v^T W dt = \int_0^t \ddot{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} dt \quad (\text{IV.41})$$

### Cas particulier sur le choix de $K(s)$

- **Algorithme de Slotine et Li [73]**

L'algorithme de Slotine et Li est obtenu en prenant :

$$K(s) = \Lambda \quad (\text{IV.42})$$

$\Lambda \in R^{n \times n}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont positifs.

Dans ce cas, on obtient les relations suivantes :

$$F(s) = (sI + \Lambda)^{-1} \quad (\text{IV.43})$$

$$v = \dot{e} + \Lambda e \quad (\text{IV.44})$$

$$q_r = \dot{q}_d - \Lambda(q - q_d) \quad (\text{IV.45})$$

$$\ddot{\theta} = -\Gamma^{-1} W^T(q, \dot{q}, q_r, \dot{q}_r)(\dot{e} + \Lambda e) \quad (\text{IV.46})$$

- **Algorithme de Sadegh et Horowitz [73]**

$K(s)$  est choisit de la forme :

$$K(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \quad (\text{IV.47})$$

#### IV.3.3.2 Approche composite [74]

Le processus d'adaptation des paramètres peut être amélioré par l'utilisation des différentes lois d'adaptations composites suivantes :

**Gains d'adaptations fixes :**

$$\dot{\theta} = -\gamma W_f^T(q, \dot{q}) \varepsilon(t) - \Gamma^{-1} W^T(q, \dot{q}, \ddot{q})(\dot{e} + \Lambda e) \quad (\text{IV.48})$$

**Gain d'adaptations variables :**

$$\dot{\hat{\theta}} = -P(t)(\gamma W_f^T(q, \dot{q}) \varepsilon(t) - \Gamma^{-1} W^T(q, \dot{q}, \ddot{q})(\dot{e} + \Lambda e)) \quad (\text{IV.49})$$

$$P^{-1}(t) = -\lambda P^{-1}(t) + W_f^T(q, \dot{q}) W_f(q, \dot{q}) \quad (\text{IV.50})$$

$$\text{où } W_f^T(q, \dot{q}) = \frac{\lambda_f}{(s + \lambda_f)} W(q, \dot{q}) \quad ; \quad \varepsilon(t) = \hat{\tau}_f - \tau_f$$

$$\tau_f = W_f(q, \dot{q}) \theta \quad ; \quad \hat{\tau}_f = W_f(q, \dot{q}) \hat{\theta}$$

Les lois d'adaptations précédentes sont dites composites puisqu'elles utilisent l'erreur de prédiction filtrée du couple et l'erreur de poursuite de la trajectoire.

**IV.4 Commande adaptative passive d'un bras manipulateur**

La commande adaptative basée sur la passivité [74] a plusieurs avantages par rapport aux algorithmes basés sur la linéarisation. Par exploitation complète des propriétés de passivité des manipulateurs mécaniques, ces contrôleurs évitent l'inversion de l'estimation de la matrice d'inertie utilisée dans d'autres approches [74] ; notons également aucune mesure de l'accélération n'est nécessaire pour leur implémentation.

**IV.4.1 Problématique**

Considérons un bras manipulateur rigide à 2DDL explicité en annexe (A.1) :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{IV.51})$$

Les propriétés suivantes facilitent l'étude de l'équation complexe et non linéaire (IV.51) [74] :

1. Positivité de la matrice d'inertie  $M(q)$  :  $M(q) = M^T(q) \geq \sigma I, \forall q \in R^n$  et  $\sigma > 0$ .
2. La commande d'entrée est indépendante pour chaque degré de liberté.
3. Paramétrisation linéaire : l'équation (IV.51) peut être écrite comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta \quad (\text{IV.52})$$

où  $\theta$  est un vecteur de dimension  $r$  contenant les paramètres à estimer,  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  est une matrice de dimension  $2 \times r$  contenant les fonctions connues.

4. Il est possible de calculer  $M(q)$  et  $C(q, \dot{q})$  sachant que :

$$q^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})]q = 0, \quad \forall q \in R^n$$

On note  $q_d$  l'angle désiré d'articulation, et  $\tilde{q} = q - \hat{q}$  est l'erreur de suivi.

Le problème de la commande adaptative est de concevoir une loi de commande et un algorithme d'adaptation pour (IV.52) sachant que l'erreur de suivi  $\tilde{q} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

#### IV.4.2 Elaboration de la loi de commande adaptative

Comme dans [74], on considère la loi de commande :

$$\tau = \hat{M}(q)\dot{a} + \hat{C}(q, \dot{q})a + \hat{G} - K_v v \quad (\text{IV.53})$$

où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  dénote l'estimation du paramètre considéré.

$$a = \dot{q}_d - K(s)\tilde{q} \quad (\text{IV.54})$$

$$v = \dot{q} - a = F^{-1}(s)\tilde{q} \quad (\text{IV.55})$$

où  $F(s) = [sI + K(s)]^{-1}$ , et  $K_v = K_v^T > 0$ .  $K(s)$  est choisie de manière que  $F(s)$  soit strictement propre et stable. La propriété de paramétrisation linéaire permet à la boucle fermée du système de s'exprimer comme suit (Voir Figure IV.8) :

$$\hat{M}(q)\dot{v} + \hat{C}(q, \dot{q})v = -\tilde{\tau} \quad (\text{IV.56})$$

$$\tilde{\tau} = K_v v - Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta} \quad (\text{IV.57})$$

où  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$  est l'erreur sur les paramètres.

La loi d'adaptation proposée est celle de l'équation (IV.49)

$$\dot{\tilde{\theta}} = -P(t)(\gamma W_f^T(q, \dot{q})\varepsilon(t) - \Gamma^{-1}W^T(q, \dot{q}, \ddot{q})(\dot{e} + \Lambda e)) \quad (\text{IV.58})$$

$$P^{-1}(t) = -\lambda P^{-1}(t) + W_f^T(q, \dot{q}) W_f(q, \dot{q}) \quad (\text{IV.59})$$

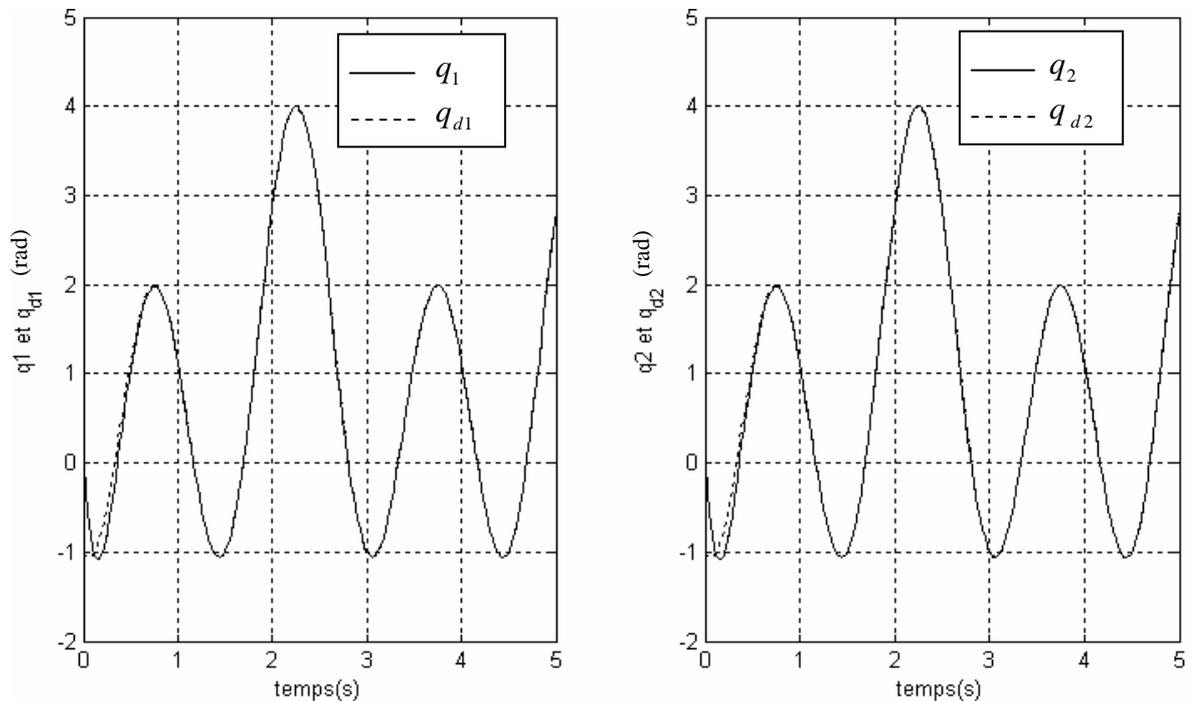
où  $\theta = [m_2]$  et

$$W^T = \begin{bmatrix} (l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + l_1^2)\ddot{q}_1 + (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_2 - (2l_1l_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_2^2) + (l_2gc_{12} + l_1gc_1) \\ (l_2^2 + l_1l_2c_2)\ddot{q}_1 + l_2^2\ddot{q}_2 + l_1l_2s_2\dot{q}_1^2 + l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

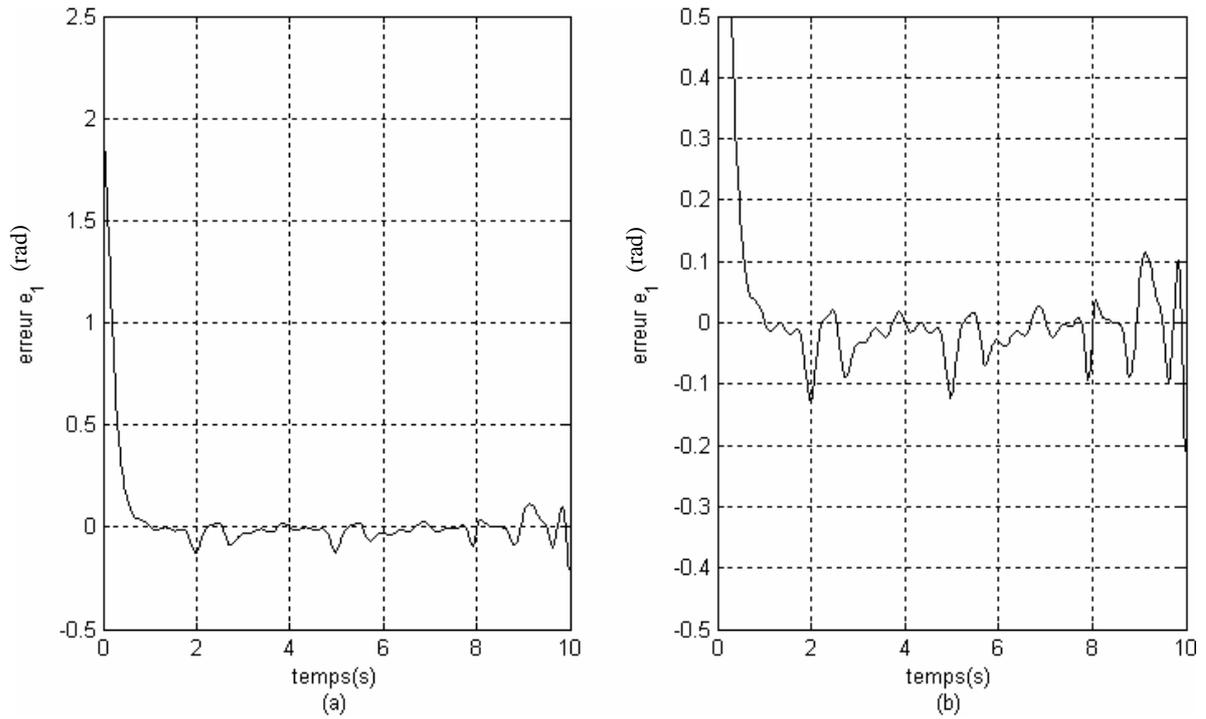
Pour les résultats de simulation qui suivent, nous avons pris les coefficients d'adaptation suivants :

$$\lambda_f = 1I; \lambda = 1I; \gamma = 1I; K_{v1} = 80; K_{v2} = 50; \Gamma = 0.2I$$

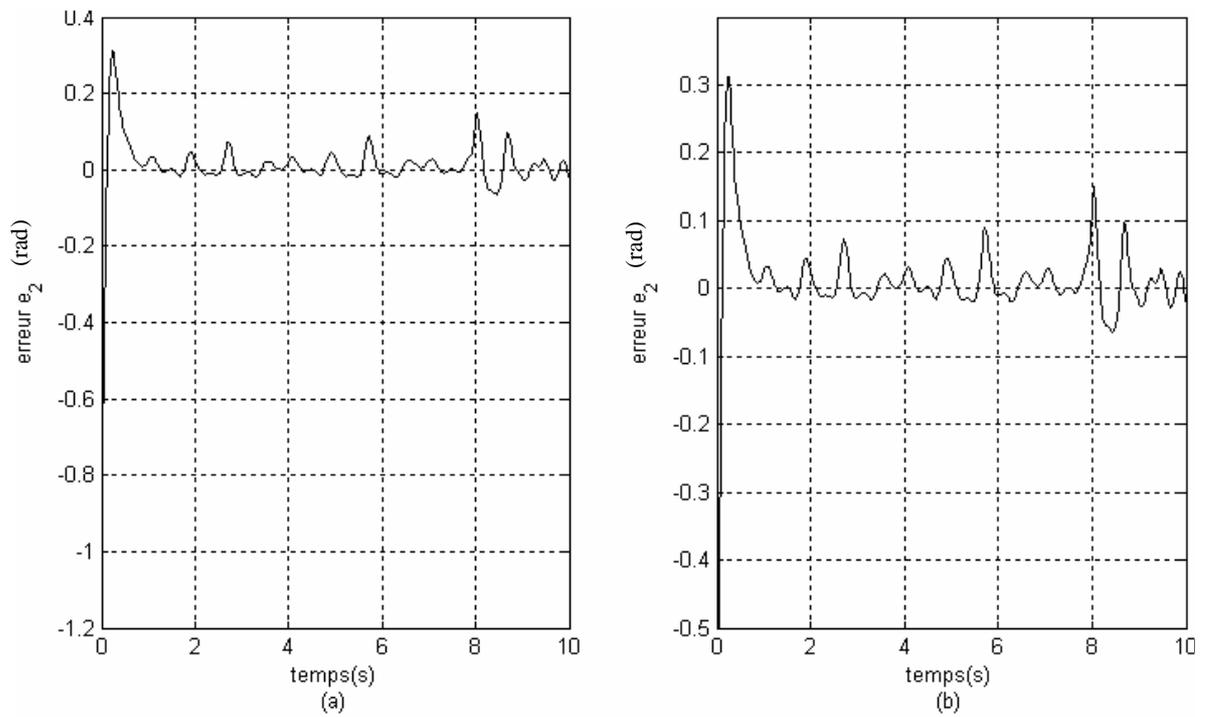
$$K(s) = \Lambda = 10I; q_1(0) = 0; q_2(0) = 0;$$



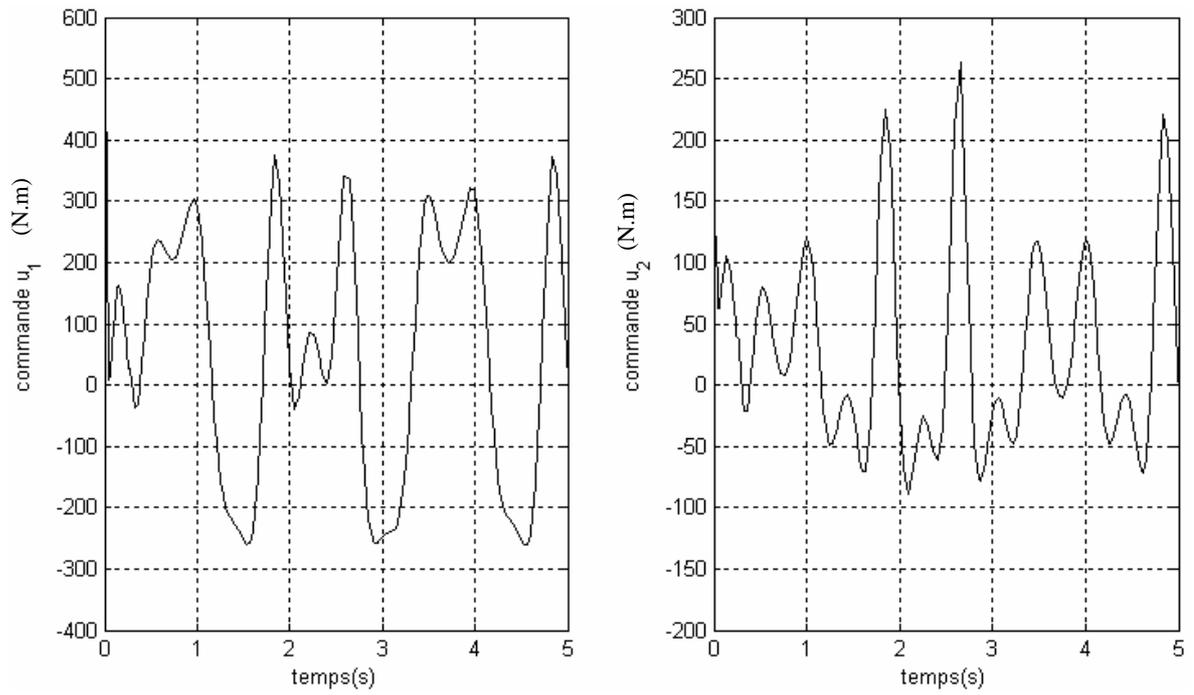
Figures IV.8 : Suivi de la trajectoire désirée pour les deux articulations



Figures IV.9 : (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour la première articulation  
 (b) : Zoom sur l'amplitude



Figures IV.10 : (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour la deuxième articulation  
 (b) : Zoom sur l'amplitude



Figures IV.11 : Couple d'entrée pour les deux articulations

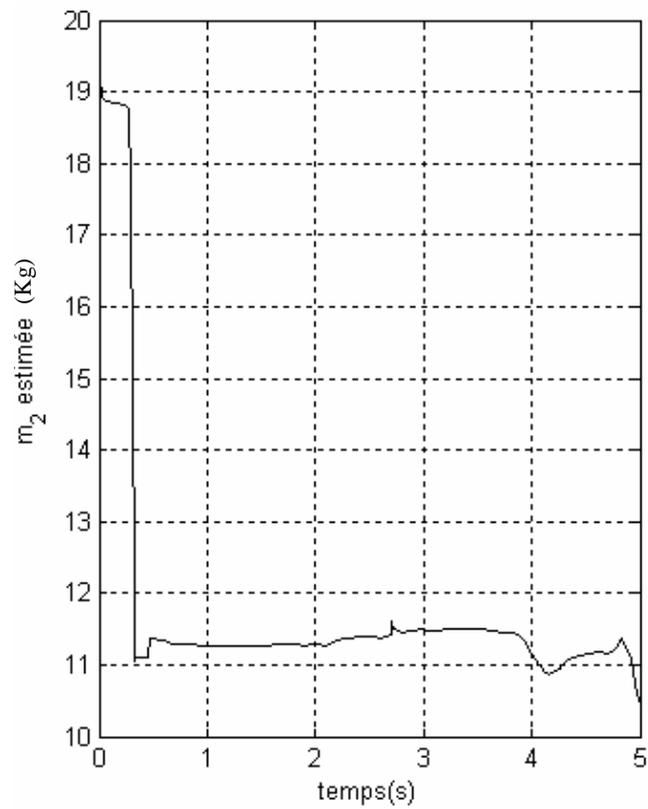


Figure IV.12 : Paramètre estimé

Les résultats obtenus sont acceptables en termes d'erreur de suivi, de la valeur estimée de la masse de la deuxième articulation et du couple d'entrée.

#### IV.4.3 Amélioration de la commande passive

Nous nous intéressons dans cette section à une structure de commande nécessitant la connaissance exacte du modèle dynamique du robot en l'occurrence la commande passive. Une modification portant sur la loi de commande a été introduite tout en garantissant la stabilité du robot en boucle fermée. L'amélioration apportée par cette alternative a été montrée par les résultats de simulation [2].

Le modèle dynamique d'un bras manipulateur est habituellement décrit par l'équation matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{IV.60})$$

Dans la suite, nous noterons :

$$\text{Vecteur de l'erreur de position : } E(t) = q_d(t) - q(t)$$

$$\text{Vecteur de l'erreur de vitesse : } \dot{E}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)$$

$$\text{Vecteur de l'erreur d'accélération : } \ddot{E}(t) = \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t)$$

où  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$  et  $\ddot{q}_d(t)$  représentent respectivement les vecteurs de position désirée, vitesse désirée et accélération désirée.

La loi de commande utilise de manière essentielle la structure lagrangienne des systèmes mécaniques pour faire décroître une fonction de Lyapunov. Elle repose sur la propriété suivante du modèle dynamique [2] :

Pour tout vecteur  $X \in R^n$ , on admet que :

$$X^T (\dot{M}(q, \dot{q}) - 2C(q, \dot{q}))X = 0 \quad (\text{IV.61})$$

$$\text{Posons : } \dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda E(t)$$

où  $\Lambda$  est une matrice de gains définie positive et  $S(t) = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{E}(t) + \Lambda E(t)$

Considérons la loi de commande suivante [2] :

$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_v S + K_p E \quad (\text{IV.62})$$

où  $K_v$  et  $K_p$  sont des matrices constantes, symétriques et positives de dimension  $2 \times 2$ .

En combinant (IV.62) avec (IV.60) on obtient l'équation de l'erreur en boucle fermée :

$$M(q)\dot{S} + C(q, \dot{q})S = -K_v S - K_p E \quad (\text{IV.63})$$

L'équation (IV.63) définit un système passif ayant pour entrée  $u = K_p S$  et pour sortie  $y = S$ . Le vecteur d'état étant  $X = \begin{bmatrix} E \\ S \end{bmatrix}$ . En effet, considérons la fonction

d'énergie définie positive suivante :

$$V(X, t) = \frac{1}{2} S^T M(q) S + \frac{1}{2} E^T K_p E \quad (\text{IV.64})$$

En dérivant  $V(t)$  par rapport au temps et en utilisant la propriété (IV.61), on obtient :

$$\dot{V}(t) = -S^T K_v S - E^T (A^T K_p) E \quad (\text{IV.65})$$

Il est évident que :  $-S^T K_v S \geq \dot{V}(t)$

où encore :  $y^T u \geq \dot{V}(t)$

d'où :

$$\int_{t_0}^t y^T(\sigma) u(\sigma) d(\sigma) \geq V(X(t), t) - V(X(t_0), t_0)$$

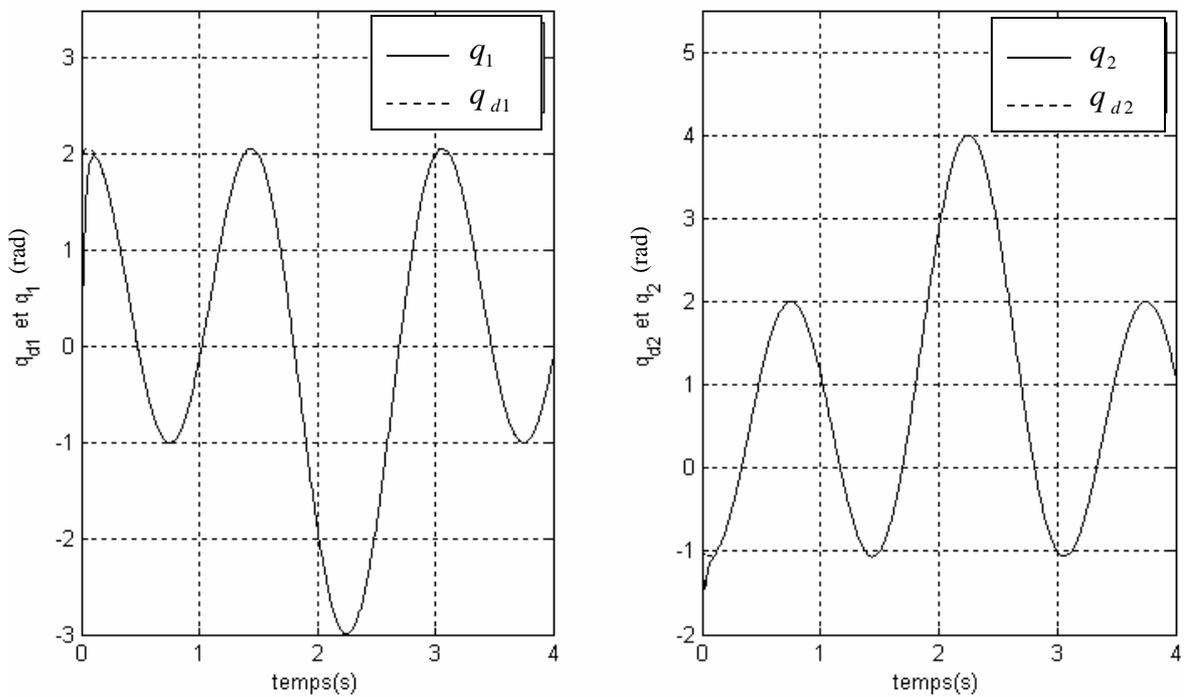
L'équation (IV.65) montre que le système bouclé avec cette loi de commande est stable au sens de Lyapunov. Cependant, les performances sont limitées par la précision du modèle.

Les différentes courbes de simulation présentées ci-dessous illustrent les performances de cette commande non adaptative.

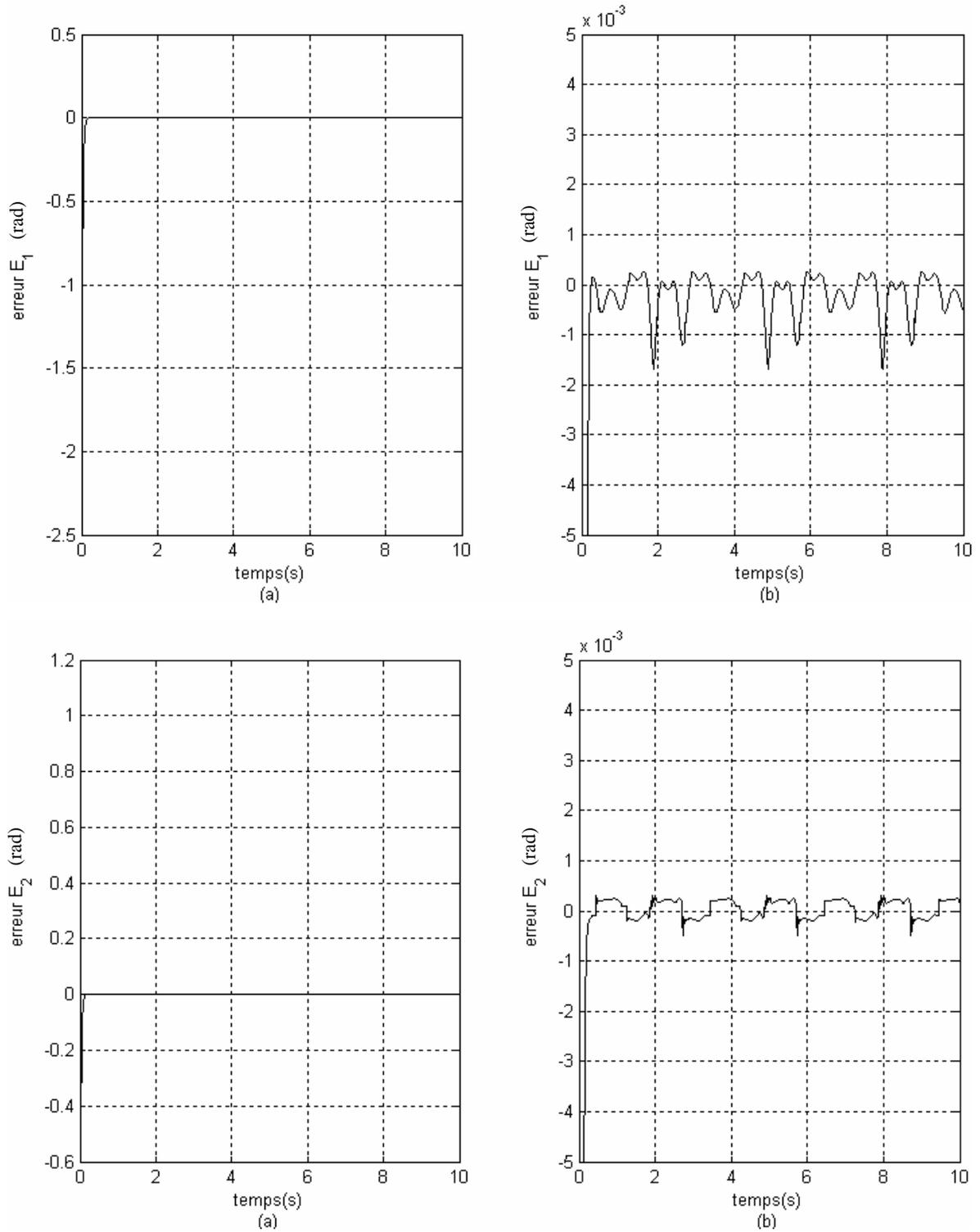
Ainsi, pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$$K_{v1} = 50 ; K_{v2} = 20 ; K_{p1} = 20 ; K_{p2} = 200 ;$$

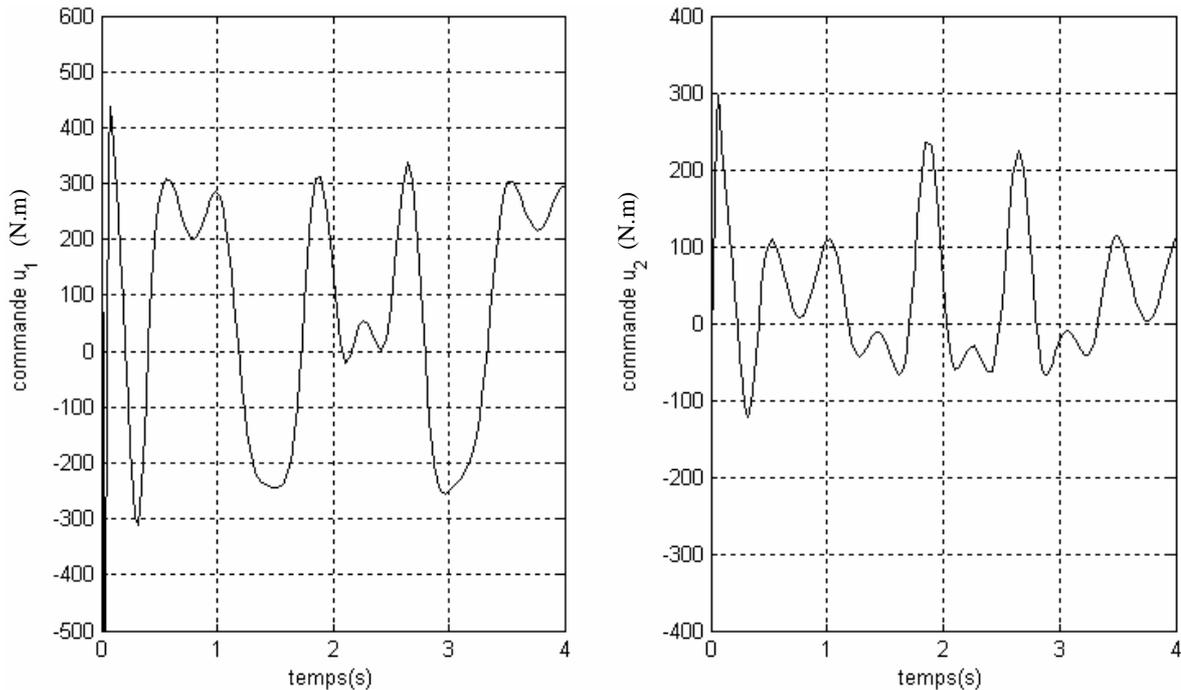
$$\Lambda_1 = 100 ; \Lambda_2 = 200 ; q_1(0) = 0 ; q_2(0) = 0 ;$$



Figures IV.13 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures IV.14 : (a) Erreur de suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations  
(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures IV.15 : Couples d'entrée des deux articulations

Les résultats obtenus sont très satisfaisants. Notons que le couple d'entrée a un pic élevé dans la première seconde ; ceci est dû à l'erreur initiale sur la vitesse.

Malheureusement, les performances obtenues avec cette loi de commande sont limitées par la précision du modèle ; d'où le besoin de pallier cet inconvénient qui est toujours omniprésent dans la commande des systèmes.

## IV.5 Commande adaptative passive d'un bras manipulateur à couple électrique

Afin d'éviter les problèmes inhérents à une commande passive brute, nous nous tournons vers son extension en faisant appel à l'aspect adaptatif. L'application de cette dernière sur un bras manipulateur à deux degrés de liberté à couple électrique donne des résultats très satisfaisants.

### IV.5.1 Représentation d'état

On considère le robot à couple électrique appliqué au chapitre II dont les équations dynamiques sont

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{IV.66})$$

où  $L, R, K_m$  et  $K_r \in R^{2 \times 2}$  sont des matrices diagonales définies positives.

De l'équation (IV.66) on peut déduire une autre forme pour le modèle dynamique d'un tel système :

$$v_e = M_e(\zeta_1)\ddot{\zeta}_1 + C_e(\zeta_1, \dot{\zeta}_1)\dot{\zeta}_1 + D_e\zeta_1 + G(\zeta_1) \quad (\text{IV.67})$$

où

$$M_e = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ M_3 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_e = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ K_{m1} & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & K_{m2} & 0 & L_2 \end{bmatrix}$$

$$D_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_{r1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{r2} \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad G_e = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Les équations dynamiques (IV.66) peuvent s'écrire en utilisant la représentation d'état :

$$\zeta_1 = [q_1, q_2, I_1, I_2]^T \quad (\text{IV.68})$$

$$\zeta_2 = \dot{\zeta}_1 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2]^T \quad (\text{IV.69})$$

De (IV.66), (IV.68) et (IV.69), la représentation suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = \ddot{\zeta}_1 = M_e^{-1}(-C_e\zeta_2 - D_e\zeta_1 - G_e + v_e) \end{cases} \quad (\text{IV.70})$$

### IV.5.2 Loi de commande passive

De (IV.62) on peut déduire la loi de commande appliquée sur notre robot :

$$\tau = M_e(\zeta_1) \ddot{\zeta}_{1r} + C_e(\zeta_1, \dot{\zeta}_1) \dot{\zeta}_{1r} + D_e \zeta_1 + G(\zeta_1) + K_v S + K_p E \quad (\text{IV.71})$$

où  $E(t) = \zeta_{1d} - \zeta_1$  et  $\dot{E}(t) = \dot{\zeta}_{1d} - \dot{\zeta}_1$

$K_v, K_p$  sont respectivement les matrices diagonales constantes, symétriques et positives de dimensions  $4 \times 4$ .  $\zeta_{1d}$  est la valeur désirée de  $\zeta_1$ . En combinant (IV.71) avec (IV.60) on obtient l'équation de l'erreur en boucle fermée :

$$M(q) \dot{S} + C(q, \dot{q}) S = -K_v S - K_p E \quad (\text{IV.72})$$

où :  $\dot{\zeta}_{1r} = \dot{\zeta}_{1d} + \Lambda' E(t)$

avec  $\Lambda'$  est une matrice de gains définie positive et  $S(t) = \dot{\zeta}_{1r} - \dot{\zeta}_1 = \dot{E}(t) + \Lambda' E(t)$ .

L'équation (IV.72) définit un système passif ayant pour entrée  $u = K_v S$  et pour sortie  $y = S$ . Le système bouclé avec cette loi de commande est stable au sens de Lyapunov ; la démonstration est similaire à celle développée dans la section (IV.4.3).

Afin de pallier les incertitudes sur le modèle, la loi d'adaptation qu'on va utiliser est la même que celle donnée par l'équation (II.71) :

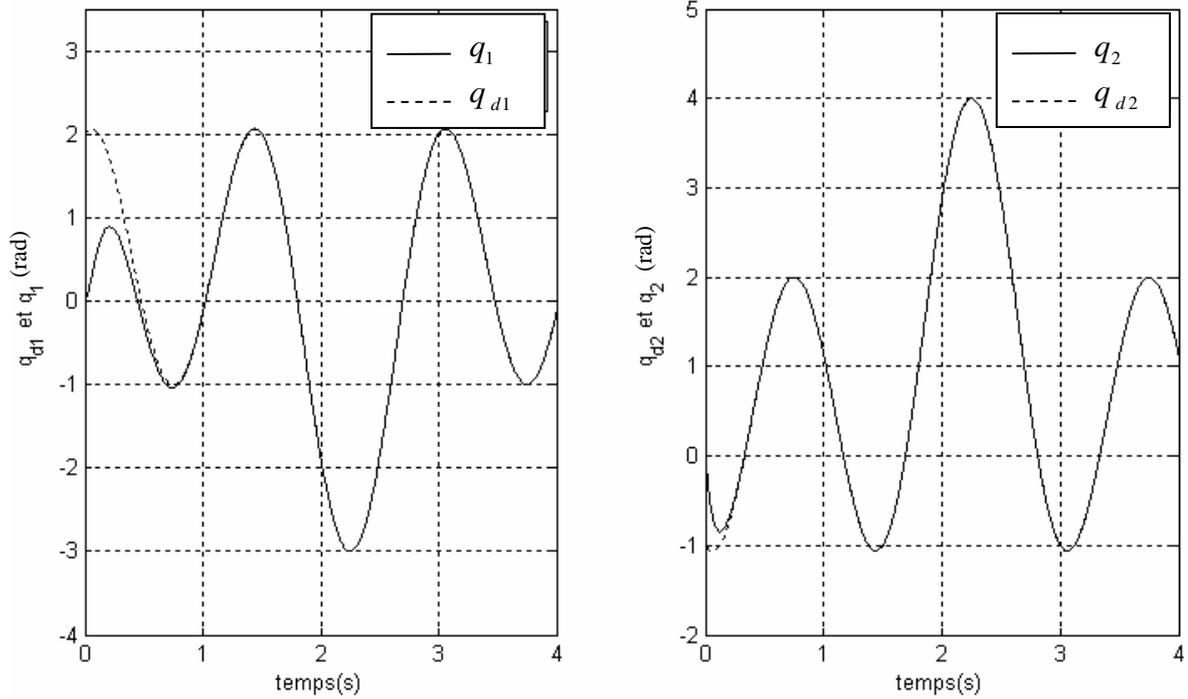
$$\dot{\hat{P}} = -\Gamma \hat{Y}^T \varepsilon \quad (\text{IV.73})$$

Les différents résultats de simulations qui suivent illustrent la robustesse de cette commande adaptative proposée.

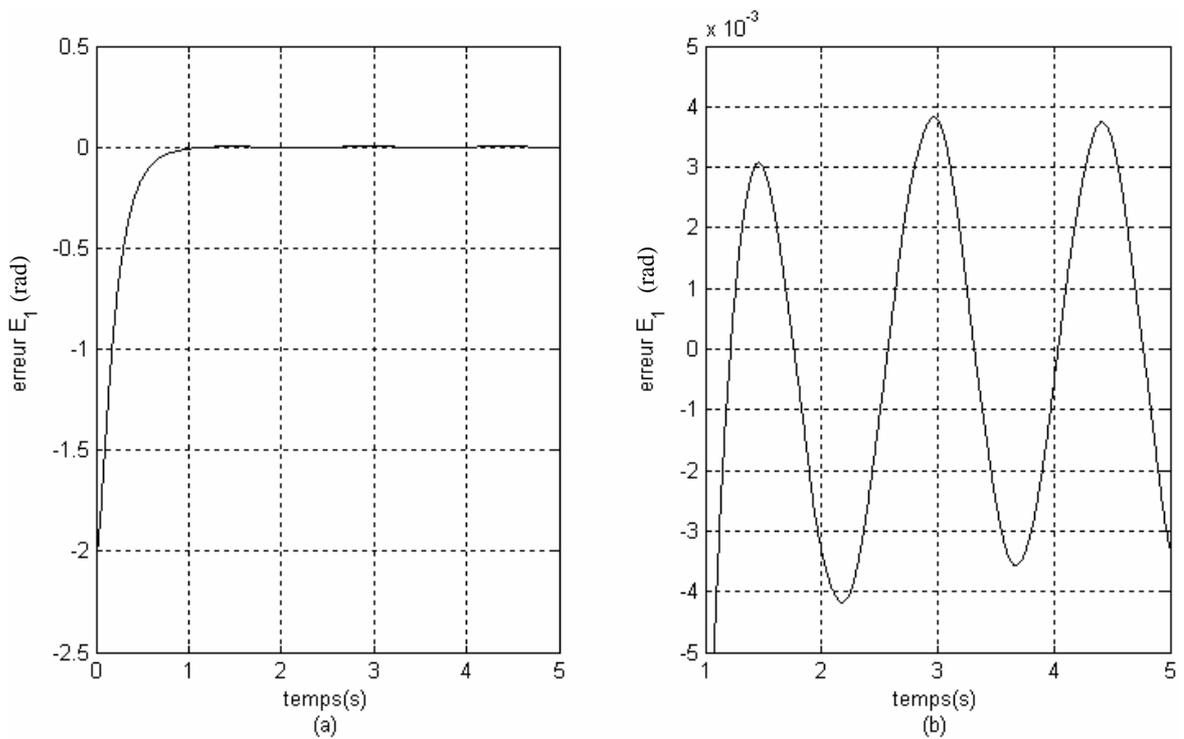
### Cas non adaptatif

Pour les gains d'adaptations nous avons pris :

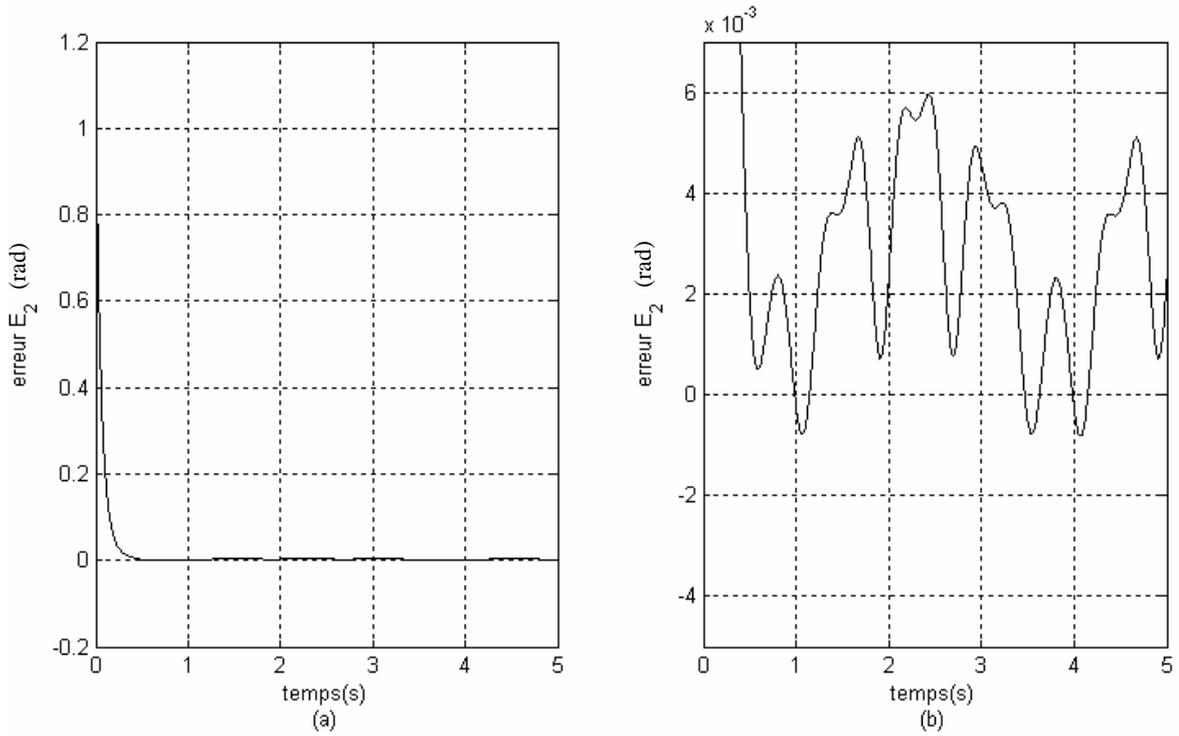
$$\Lambda = 15I ; \Lambda' = 700 ; K_d = 700 ; K_v = 1.5I ; K_p = 0.1 ;$$



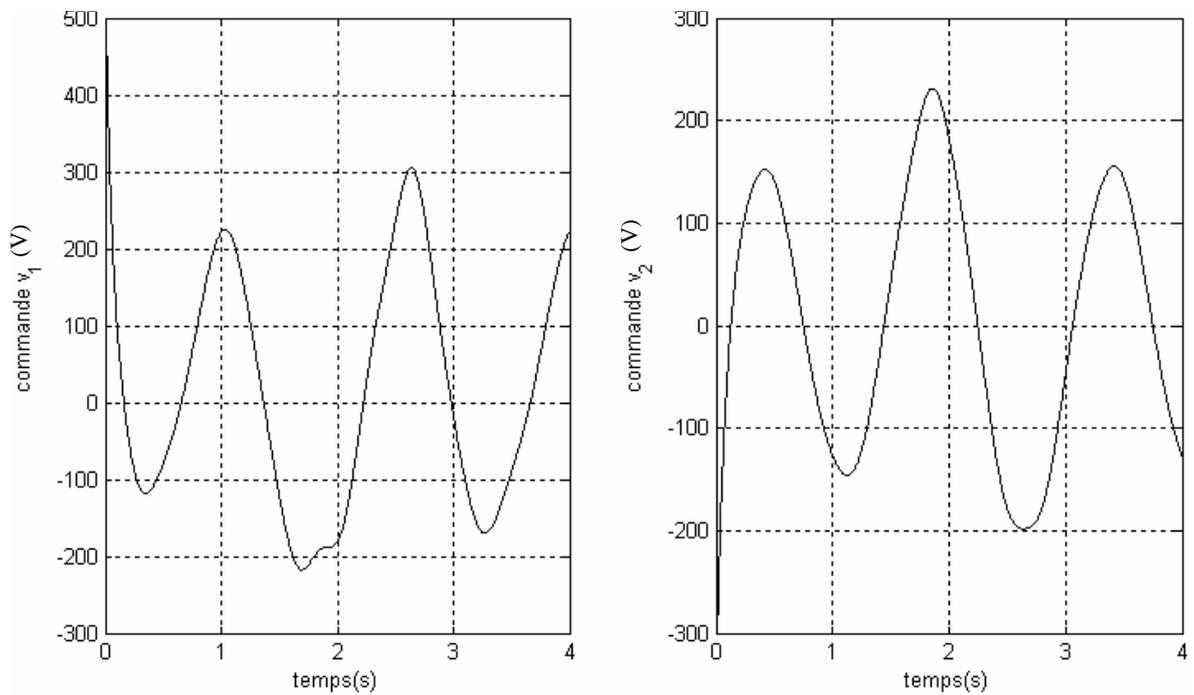
Figures IV.16 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures IV.17 : (a) Erreur de suivi de trajectoire désirée pour la première articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures IV.18 : (a) Erreur de suivi de trajectoire désirée pour la deuxième articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)



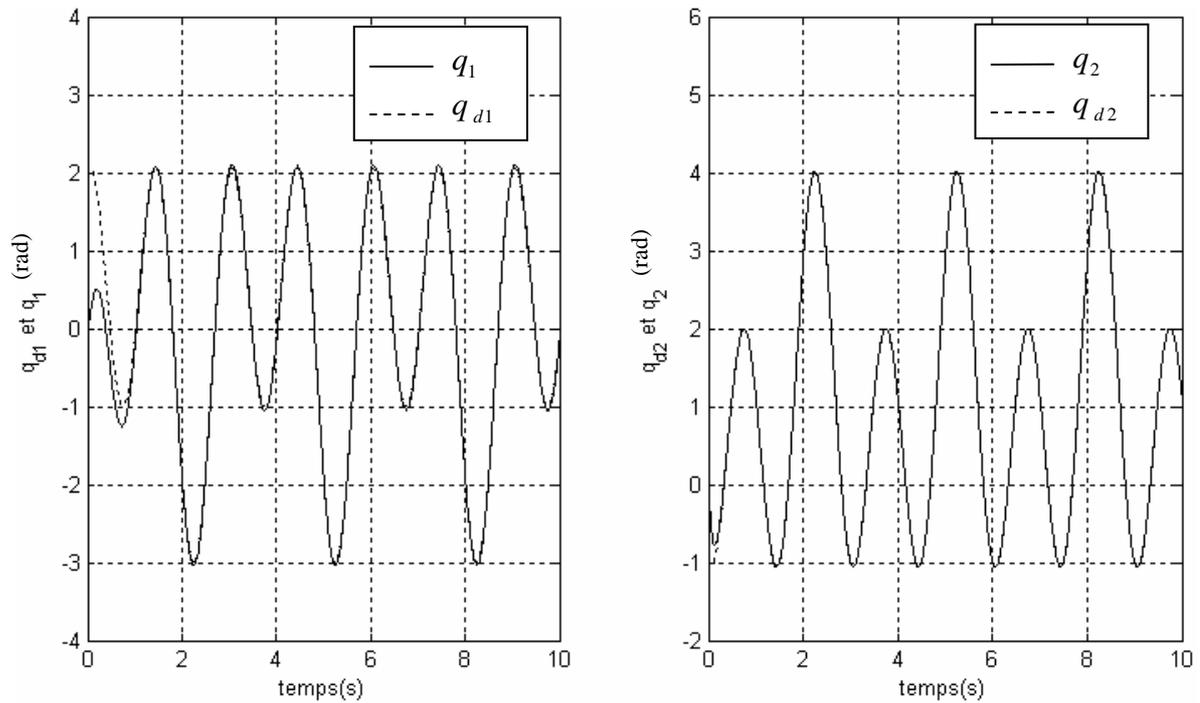
Figures IV.19 : Commandes d'entrée pour les deux articulations

Les figures (IV.16), (IV.17), (IV.18) et (IV.19) montrent l'efficacité de cette technique dans le cas où tous les paramètres sont connus.

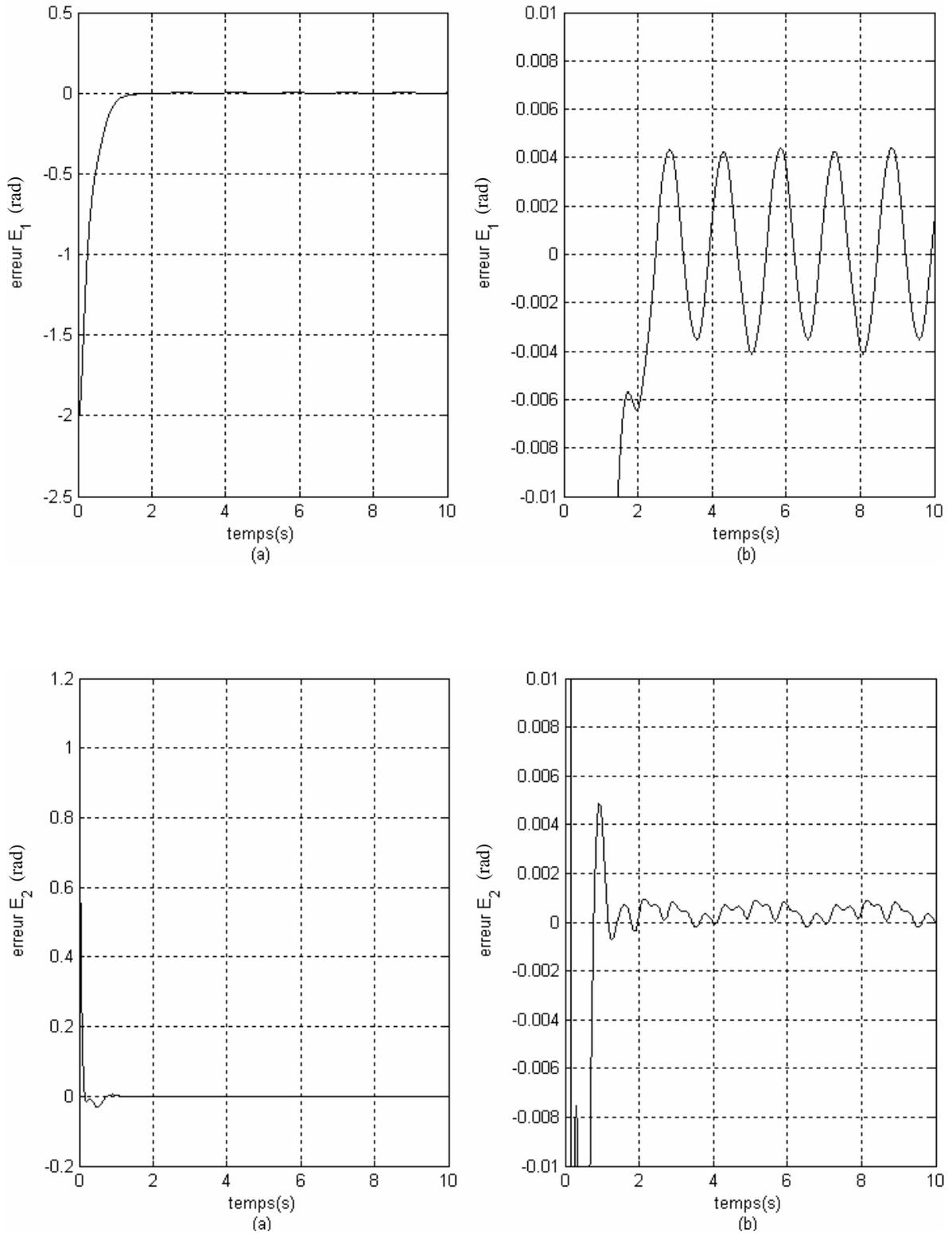
### Cas adaptatif

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris:

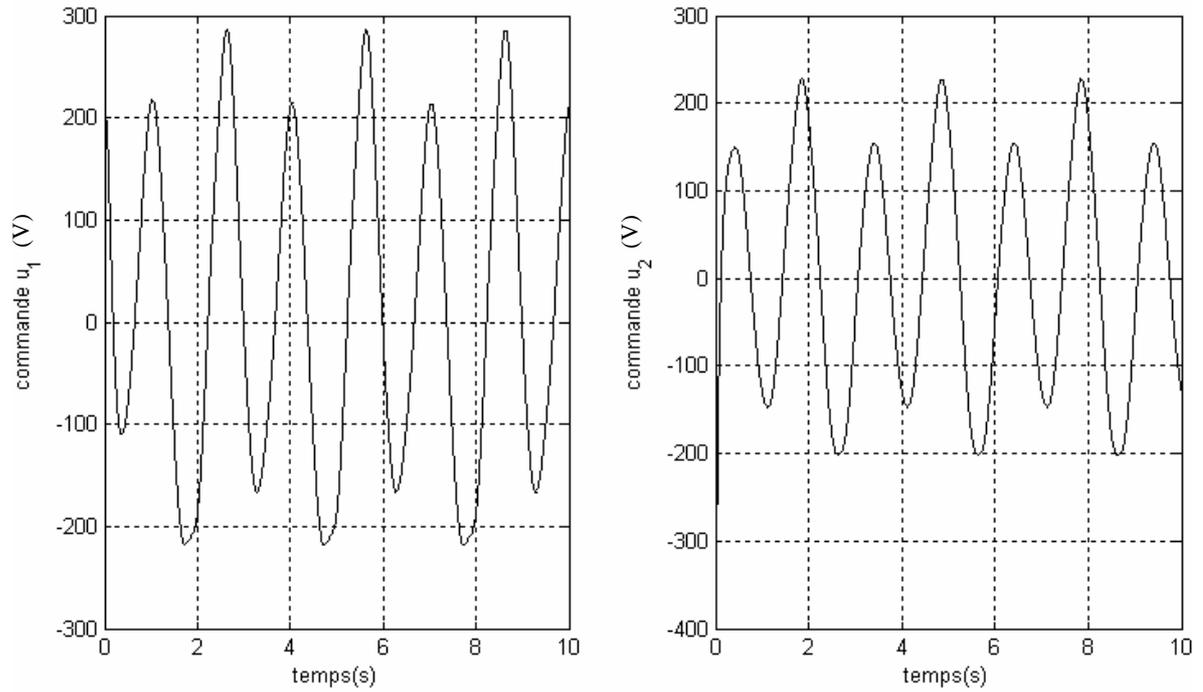
$$\Lambda_1 = 600; \Lambda_2 = 150; \Lambda' = 10I; K_{d1} = 100; K_{d2} = 500; K_v = 1I; K_p = 10; \Gamma = 10I$$



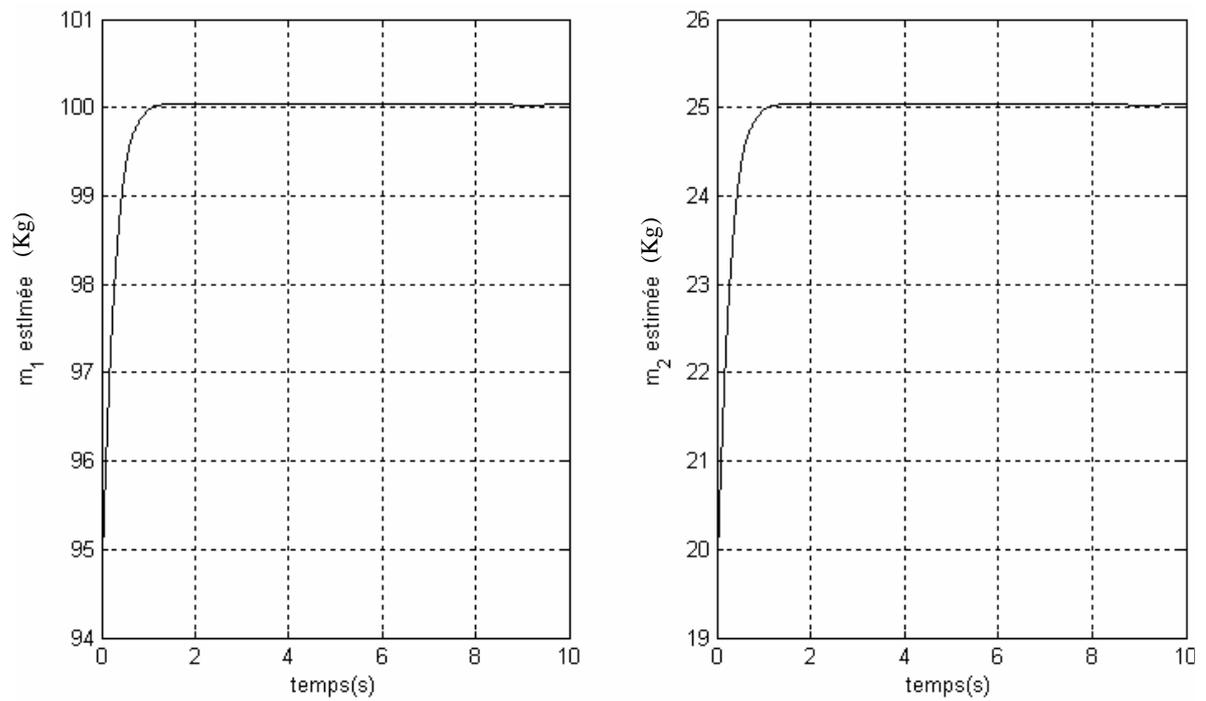
Figures IV.20 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures IV.21 : (a) Erreur de suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations  
(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures IV.22 : Commandes d'entrée pour les deux articulations



Figures IV.23 : Paramètres estimés

A travers ces résultats, l'erreur de suivi est presque négligeable. Aussi, on note une bonne estimation des valeurs inconnues des masses des articulations et des tensions d'entrée acceptables.

La contribution de cette thèse est incontestablement présentée à travers ces derniers résultats. La loi d'adaptation instaurée à apporté une amélioration significative quant aux variations paramétriques et aux éventuelles perturbations pouvant affecter le système. Les performances s'en trouvent ainsi très appréciables. Aussi, nous pouvons affirmer que l'exploitation globale du modèle non linéaire tout en préservant les différentes non-linéarités grâce à la propriété de la passivité et une loi d'adaptation adéquate sont la source de ce perfectionnement.

## **IV.6 Conclusion**

Dans le but d'améliorer les performances des manipulateurs, nous avons présenté dans ce chapitre une loi de commande très utilisée en robotique en l'occurrence la commande passive. Cette dernière a été appliquée sur un robot à deux degré de liberté et les résultats à cet égard sont acceptables.

Nous avons également appliqué cette commande sur un robot à couple électrique dont les masses d'articulations ne sont pas connues. Cette démarche donne également de bons résultats.

Dans le but d'améliorer les performances des bras manipulateur et d'augmenter les marges de robustesse du système, le chapitre suivant sera dédié à la combinaison de la commande backstepping et la commande passive.

## **CHAPITRE V**

# **COMBINAISON DE LA COMMANDE PASSIVE ET DU BACKSTEPPING**

### **V.1 Introduction**

Ce chapitre présente une approche générale pour la conception de la commande adaptative de position pour les systèmes robotiques en utilisant la technique du backstepping en association avec la passivité. L'avantage de cette technique de commande est qu'elle impose les propriétés désirées de stabilité pour un objectif donné, la fonction de stockage et la fonction stabilisante pour chaque étape réursive du système.

On considère le même robot à couple électrique explicité dans l'annexe (A.2).

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

dont la représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -M^{-1}C(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 - M^{-1}G(\zeta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(\zeta_1)K_r \end{bmatrix} \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = -L^{-1}R\zeta_3 - L^{-1}K_m\zeta_2 - L^{-1}v \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

### **V.2 Elaboration de la loi de commande**

L'élaboration de la loi de commande sera réalisée pour chaque étape réursive du système. La stabilité globale du robot est montrée en utilisant l'approche de la passivité. Pour chaque étape  $\{i\}$  de cette technique et pour une sortie donnée  $y_{i-1}$ , nous avons une fonction

stabilisante  $\alpha_{i-1}$  qui joue le rôle de la loi de commande correspondante, une fonction d'entrée  $v_{i-1}$  et une fonction de stockage  $W_{i-1}$  qui est toujours fixée. De cette manière, la stabilité du système pour chaque étape est garantie. La méthodologie et toutes les relations entre les divers éléments sont expliquées ci-dessous. Ainsi, nous aurons trois étapes récursives correspondant à chaque sous-ensemble de l'étape du système.

Notre but ici est de trouver une loi de commande  $v$  permettant de stabiliser l'état du système (V.1). Etant donné que le système (V.2) satisfait toutes les conditions des systèmes de stricte-rétroaction [1], [68], la conception de la loi de commande utilisant la méthode de backstepping peut être appliquée facilement.

### Etape 1

Sachant que :

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \quad (\text{V.3})$$

La relation (V.3) obéit à la forme générale suivante :

$$\dot{\zeta}_1 = f_1(\zeta_1) + g_1(\zeta_1)\zeta_2 \quad (\text{V.4})$$

avec  $f_1(\zeta_1) = 0$  et  $g_1(\zeta_1) = \bar{I}$ , une matrice identité.

Pour obtenir l'entrée du système  $\zeta_2$ , il est nécessaire de déterminer la commande  $u_1$  sachant que :

$$\dot{\zeta}_1 = u_1 = \alpha_0 + v_0 \quad (\text{V.5})$$

et la fonction de stockage  $W_0$  pour que le système devienne passif entre la sortie  $y_0$  et l'entrée  $v_0$ . La sortie et la fonction de stockage doivent respecter les conditions

$$\dot{W}_0 \leq y_0^T v_0 \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \zeta} g(\zeta)$$

avec un suivi de trajectoire tel que :

$$\dot{\zeta}_1 = -K_0(\zeta_1 - \zeta_{1d}) + \dot{\zeta}_{1d} \quad (\text{V.6})$$

où  $K_0$  est une matrice diagonale définie positive.

On considère la fonction de stockage suivante:

$$W_0 = \frac{1}{2} (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{V.7})$$

La sortie sera donc :

$$y_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \zeta_1} g_1(\zeta) = \zeta_1 - \zeta_{1d} \quad (\text{V.8})$$

Considérons (V.5) et (V.6), la fonction stabilisante est :

$$\alpha_0 = -K_0 (\zeta_1 - \zeta_{1d}) + \dot{\zeta}_{2d} \quad (\text{V.9})$$

## Etape2

Maintenant, on considère les deux états du système (V.2) :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -M^{-1}(C(\zeta_1, \zeta_2)\zeta_2 - G(\zeta_1)) + M^{-1}(\zeta_1)K_r\zeta_3 \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

En utilisant la fonction de stockage :

$$W_1 = \frac{1}{2} (\zeta_1 - \zeta_{1d})^T (\zeta_1 - \zeta_{1d}) + \frac{1}{2} y_1^T y_1 \quad (\text{V.11})$$

on obtient :

$$y_1 = (\zeta_2 - \zeta_{2d}) + K_0 (\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{V.12})$$

$$\alpha_1 = (M^{-1}K_r)^{-1} [M^{-1}(C\zeta_2 - G) - y_0 + \dot{\alpha}_0 + v_1] \quad (\text{V.13})$$

avec :

$$\dot{\alpha}_0 = -K_0 (\zeta_2 - \zeta_{2d}) + \dot{\zeta}_{2d} \quad \text{et} \quad v_1 = -K_1 y_1$$

où  $K_1$  est une matrice diagonale définie positive.

**Etape 3**

A partir de (V.2) on a :

$$y_2 = \zeta_3 - \zeta_{3d} - \alpha_1 \quad (\text{V.14})$$

La loi de commande est donnée par :

$$v = L \left[ L^{-1} (R \zeta_3 + K_m \zeta_2) - y_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} \dot{\zeta}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} \dot{\zeta}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_{1d}} \dot{\zeta}_{1d} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_{2d}} \dot{\zeta}_{2d} + v_2 \right] \quad (\text{V.15})$$

avec :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} \dot{\zeta}_1 = (M^{-1} K_r)^{-1} (-\bar{I} - K_1 K_0) \zeta_2$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} \dot{\zeta}_2 = (M^{-1} K_r)^{-1} (M^{-1} C - K_1 - K_0) (-M^{-1} (C \zeta_2 + G) + M^{-1} K_r \zeta_3)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_{1d}} \dot{\zeta}_{1d} = (M^{-1} K_r)^{-1} (\bar{I} + K_1 K_0) \dot{\zeta}_{1d}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_{2d}} \dot{\zeta}_{2d} = (M^{-1} K_r)^{-1} (K_1 + K_0) \dot{\zeta}_{2d}$$

$$v_2 = -K_2 y_2$$

**V.2.1 Commande adaptive**

Le modèle dynamique de l'équation (III.3) est non linéaire. La dynamique peut s'écrire comme suit :

$$\tau = W(q, \dot{q}, \ddot{q}) p \quad (\text{V.16})$$

où  $W \in R^{n \times r}$  et  $p \in R^r$ ,  $W$  est une matrice de fonctions connues des coordonnées généralisées et leurs dérivées, et  $p$  est un vecteur constant du bras manipulateur de dimension  $r$ . Les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  sont en fonction des masses.

L'estimation des paramètres pour ce cas précis sera faite exclusivement au niveau de l'étape 2.

Nous posons :

$$M = \hat{M} + \tilde{M} \quad (\text{V.17})$$

$$C = \hat{C} + \tilde{C} \quad (\text{V.18})$$

$$G = \hat{G} + \tilde{G} \quad (\text{V.19})$$

où  $\hat{M}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{G}$  représente respectivement les matrices estimées,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{G}$  représente respectivement les matrices d'erreur.

L'expression de l'étape 2 peut être formulée comme suit :

$$(\hat{M} + \tilde{M})\dot{\zeta}_2 = -(\hat{C} + \tilde{C})\zeta_2 - \hat{G} - \tilde{G} + K_r u \quad (\text{V.20})$$

où  $u$  est la commande du système. Après développement, on obtient :

$$\dot{\zeta}_2 = -\hat{M}^{-1}[\tilde{M}\dot{\zeta}_2 + \tilde{C}\zeta_2 + \tilde{G}] - \hat{M}^{-1}[\hat{C}\zeta_2 + \hat{G} - K_r u] \quad (\text{V.21})$$

Puis, la loi de commande pour stabiliser  $\hat{\alpha}_1$  prend la forme suivante :

$$\hat{\alpha}_1 = (\hat{M}^{-1}K_r)^{-1}(\hat{M}^{-1}(\hat{C}\zeta_2 + \hat{G}) - (\zeta_1 - \zeta_{1d}) - K_0(\zeta_2 - \zeta_{2d}) + \dot{\zeta}_{2d} - K_1[(\zeta_2 - \zeta_{2d}) - K_0(\zeta_1 - \zeta_{1d})]) \quad (\text{V.22})$$

Sachant que  $u = \hat{\alpha}_1$ , et en substituant (V.21) dans (V.22), l'étape 2 peut être réorganisée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_{1d} = \zeta_2 - \zeta_{2d} \\ \dot{\zeta}_2 - \dot{\zeta}_{2d} = -\hat{M}^{-1}[\tilde{M}\dot{\zeta}_2 + \tilde{C}\zeta_2 + \tilde{G}] - (\zeta_1 - \zeta_{1d}) - K_0(\zeta_2 - \zeta_{2d}) \\ \quad - K_1[\zeta_2 - \zeta_{2d} - K_0(\zeta_1 - \zeta_{1d})] \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

## V.2.2 Loi d'adaptation

L'expression de l'erreur est comme suit  $e = \zeta - \zeta_d$  et  $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$

Ceci implique :

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{I} \\ -\bar{I} + K_1 K_0 & -K_0 - K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 - \zeta_{1d} \\ \zeta_2 - \zeta_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{M}^{-1}W \tilde{p} \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

où  $\bar{I}$  est une matrice identité. La relation (V.24) est sous la forme suivante :

$$\dot{e} = A e + W_{aug} \tilde{p} \quad (\text{V.25})$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{I} \\ -\bar{I} + K_1 K_0 & -K_0 - K_1 \end{bmatrix}, W_{aug} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{M}^{-1}W \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{p} \end{bmatrix}$$

On considère la fonction candidate de Lyapunov telle que :

$$V(t) = e^T P e + \tilde{p}^T \Gamma^{-1} \tilde{p} \quad (\text{V.26})$$

où  $\Gamma$  une matrice diagonale définie positive.

La dérivée de  $V(t)$  est :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{V.27})$$

Puisque la matrice de l'équation (V.24) est stable, alors il existe une matrice  $P$  telle que :

$$A^T P + P A = -\bar{I} \quad (\text{V.28})$$

En utilisant (V.28) dans la différentiation de l'équation de Lyapunov, on obtient

$$\dot{V} = e^T (A^T P + P A) e + 2\tilde{p}^T W_{aug}^T P e + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} \quad (\text{V.29})$$

En posant :

$$2\tilde{p}^T W_{aug}^T P e + 2\tilde{p}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{p}} = 0 \quad (\text{V.30})$$

$\dot{V}$  est telle que  $\dot{V} = -e_c^T e \leq 0$  est semi définie positive.

Ce qui permet de conclure que  $e(t) \rightarrow 0$ , à  $t \rightarrow \infty$  et que le système est stable.

$\hat{p}$  (équation (V.30)) doit être choisi tel que :

$$\Gamma^{-1} \dot{\hat{p}} = -W_{aug}^T P e$$

$$\text{où } \frac{d}{dt}(p - \hat{p}) = -\Gamma W_{aug}^T P e$$

Puis, la loi d'adaptation des paramètres est telle que :

$$\dot{\hat{p}} = \Gamma W_{aug}^T P e \quad (\text{V.31})$$

où  $P$  est le résultat de l'équation de Lyapunov (V.28) et :

$$W_{aug} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{M}^{-1}W \end{bmatrix} \quad (\text{V.32})$$

Le courant désiré est calculé en considérant le modèle (V.1) du manipulateur qui peut être réécrit comme suit :

$$M(q)\dot{\zeta}_2 + C(q, \dot{q})\zeta_2 + G(q) = K_r \zeta_{3d} + K_r \tilde{\zeta}_3 \quad (\text{V.33})$$

où  $\tilde{I}$  est une perturbation négligeable, puis :

$$\zeta_{3d} = K_r^{-1} [M(q_d)\dot{\zeta}_{2d} + C(q_d, \dot{q}_d)\zeta_{2d} + G(q_d)] \quad (\text{V.34})$$

De la même manière :

$$\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1 - \zeta_{1d}, \tilde{\zeta}_2 = \zeta_2 - \zeta_{2d}, \text{ et } \tilde{\zeta}_3 = \zeta_3 - \zeta_{3d}$$

La loi de commande adaptative est :

$$\hat{v} = \left[ L^{-1} [R \zeta_3 + K_m \zeta_2] - \hat{y}_1 + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \zeta_1} \dot{\zeta}_1 + \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \zeta_2} \dot{\zeta}_2 + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \zeta_{1d}} \dot{\zeta}_{1d} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \zeta_{2d}} \dot{\zeta}_{2d} + \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \hat{p}} \dot{\hat{p}} + \hat{v}_2 \right] \quad (\text{V.35})$$

La figure (V.1) montre la structure de la méthode de commande proposée.

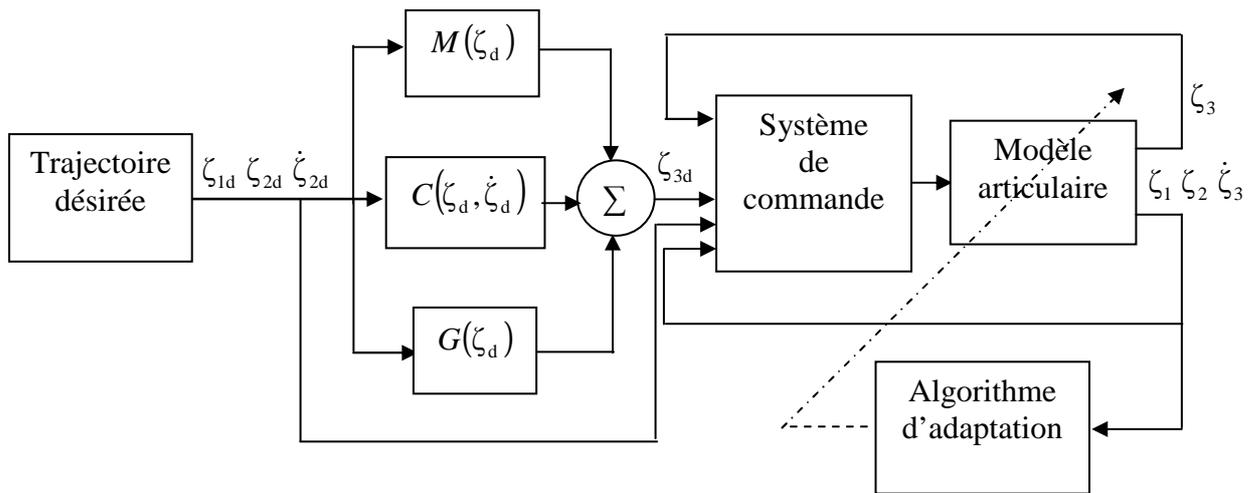


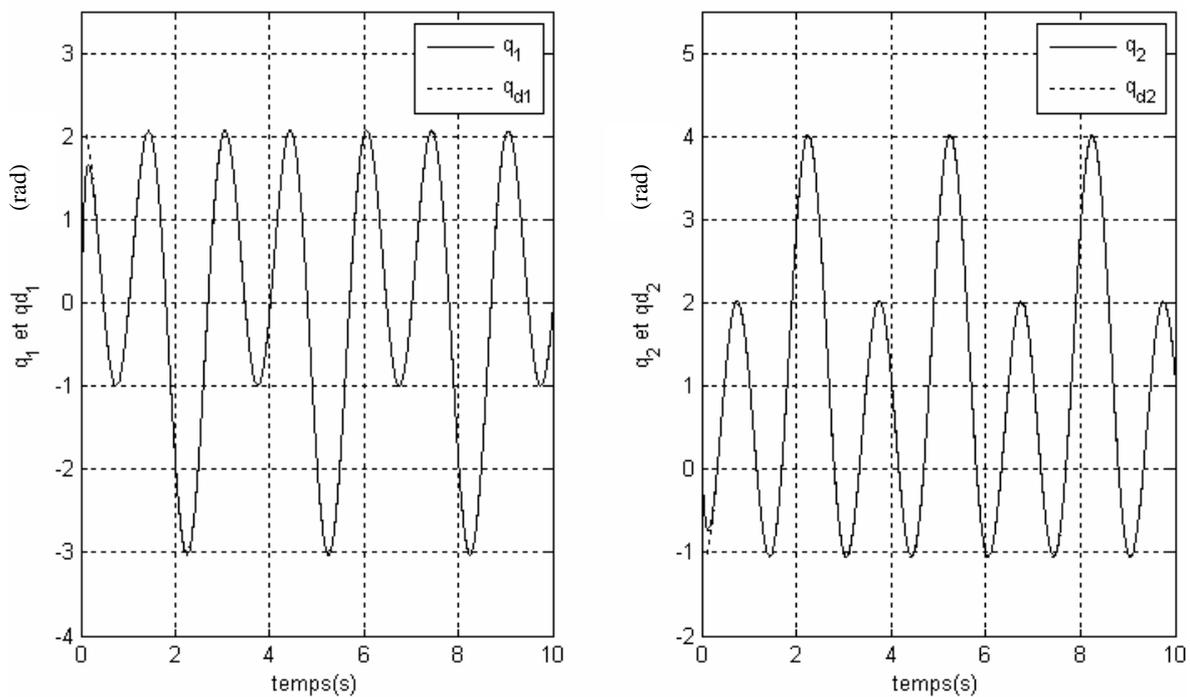
Figure V.1 : Schéma de commande

Dans ce qui suit, nous allons simuler le cas adaptatif et le cas non adaptatif.

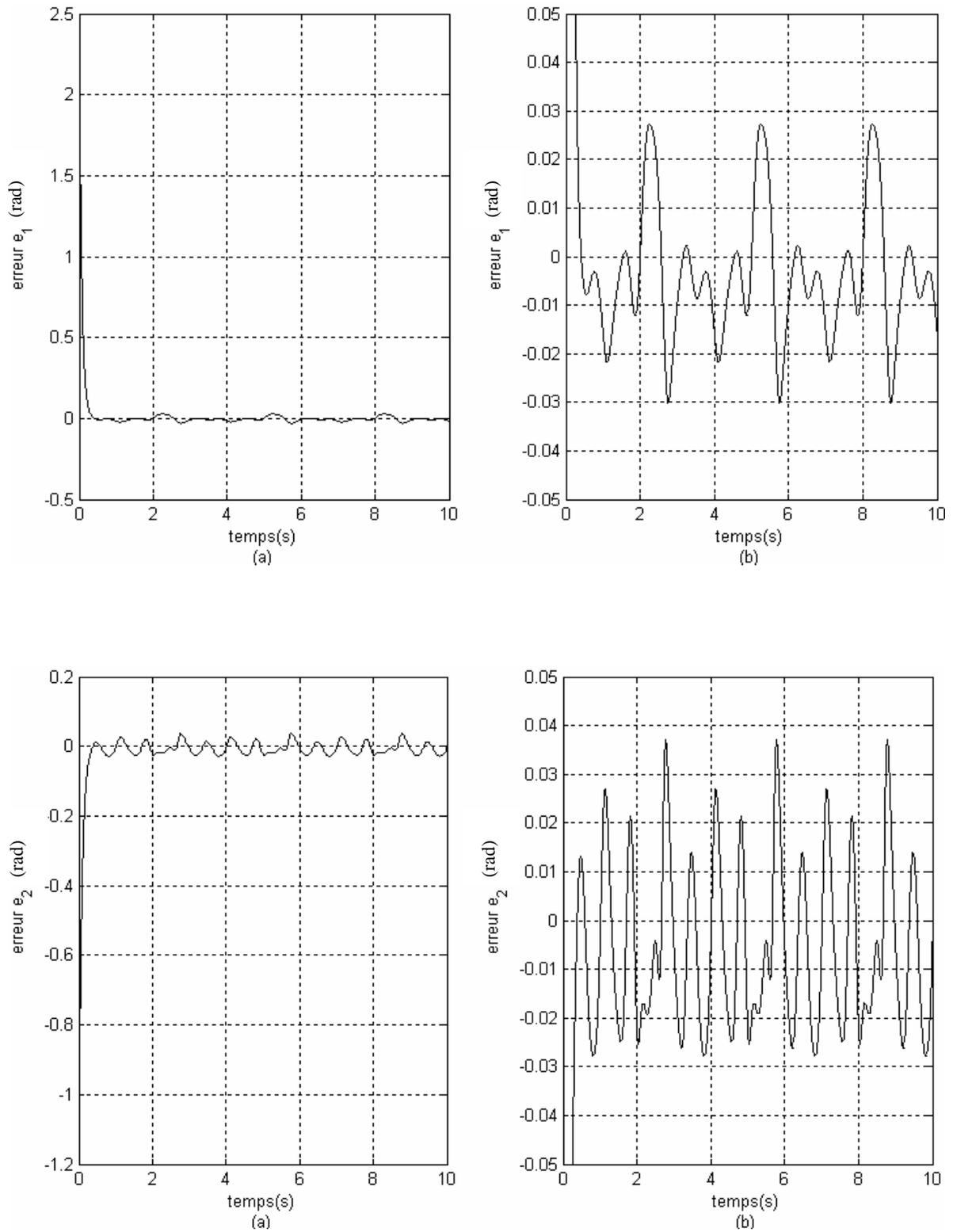
**Cas non adaptatif :**

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris:

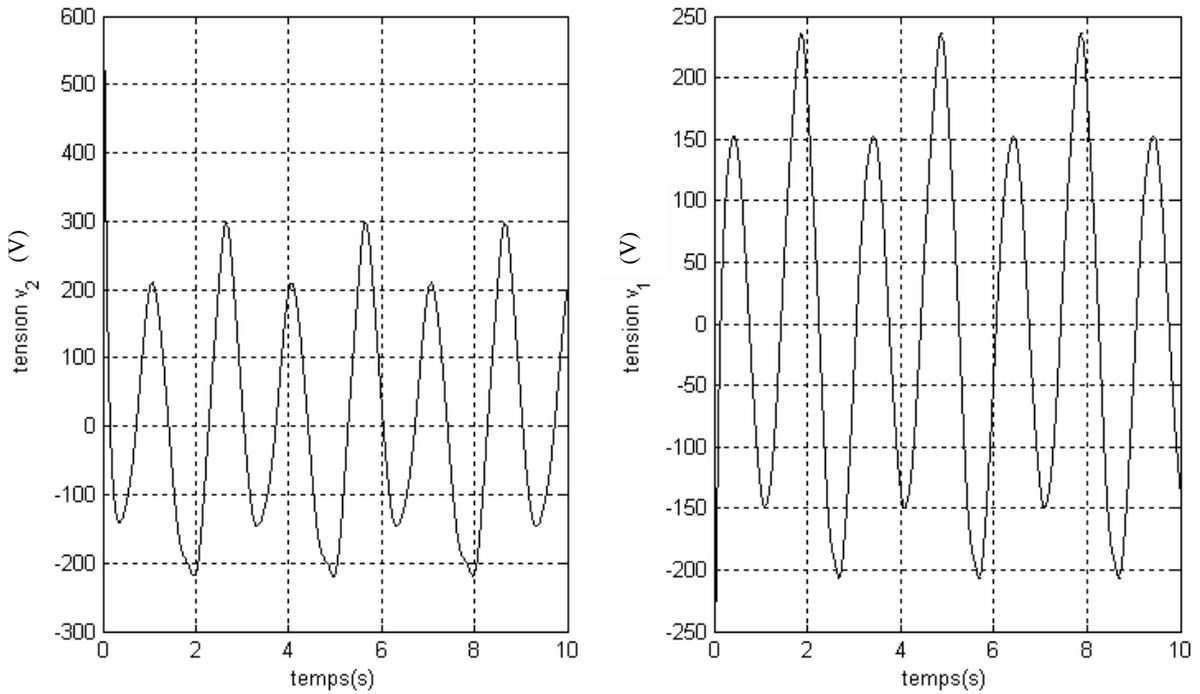
$$K_0 = 100 I ; K_1 = 300 I ; K_2 = 300 I ;$$



Figures V.2 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures V.3 : (a) Erreurs de suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations  
(b: Zoom sur l'amplitude)

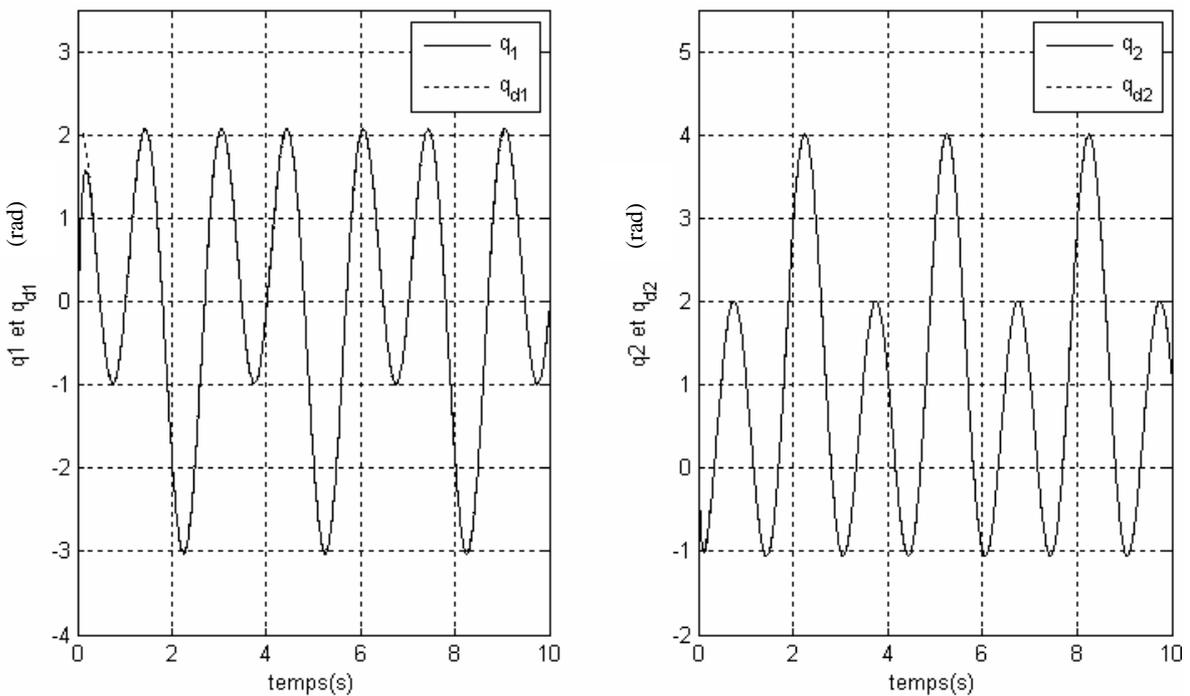


Figures V.4 : Tensions d'entrées pour les deux articulations

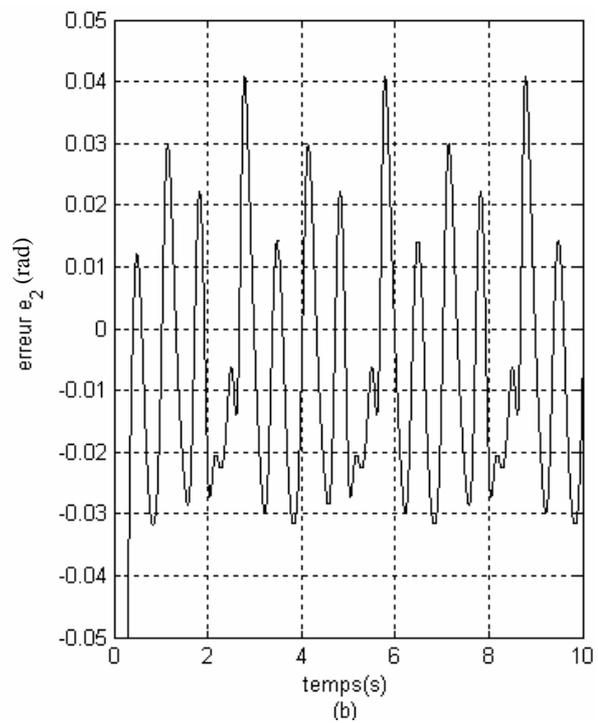
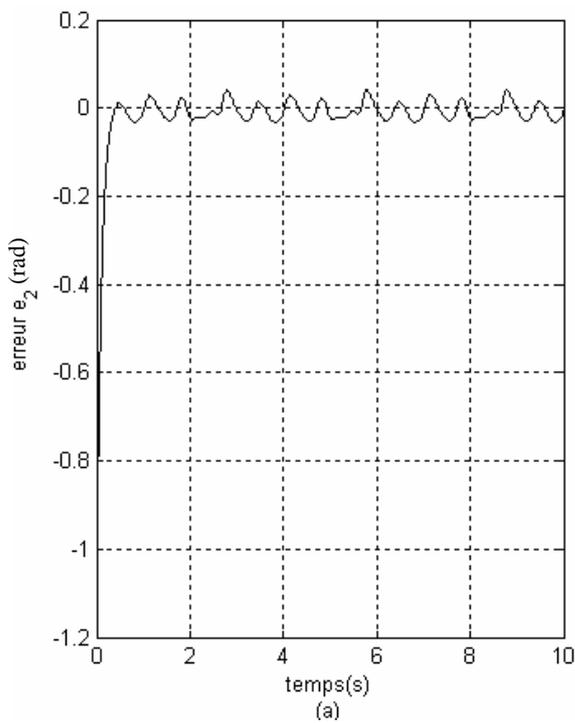
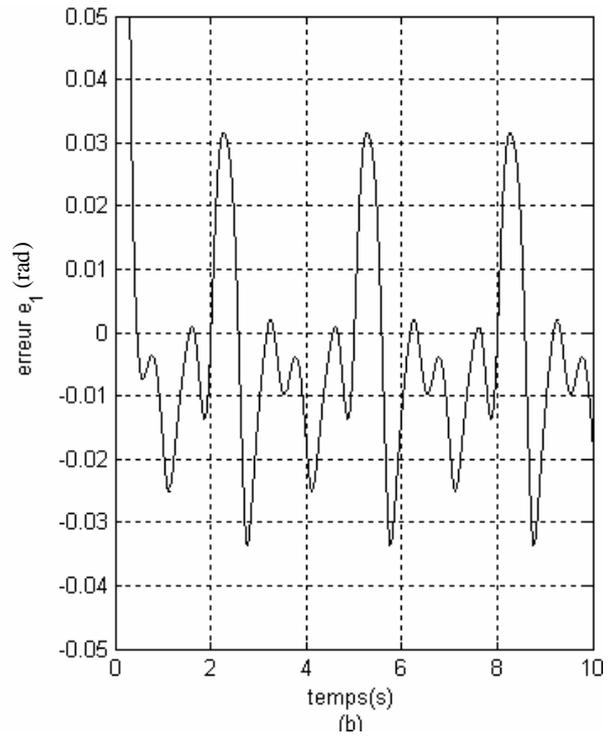
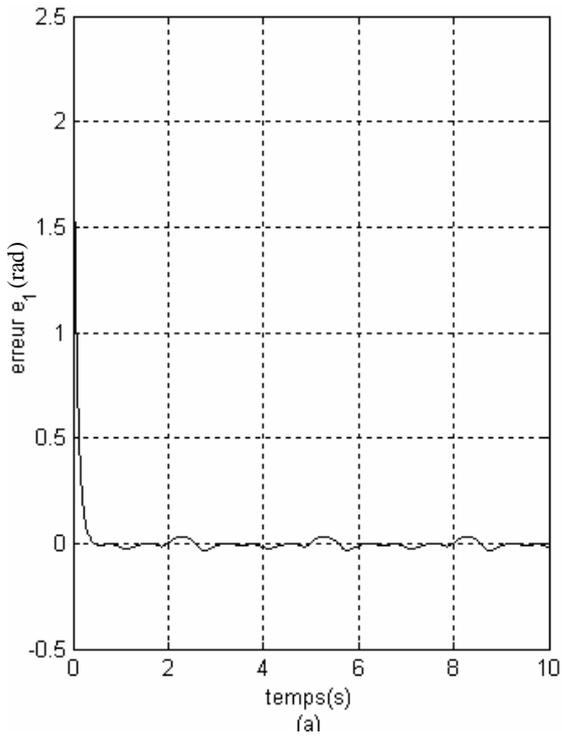
### Cas adaptatif

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

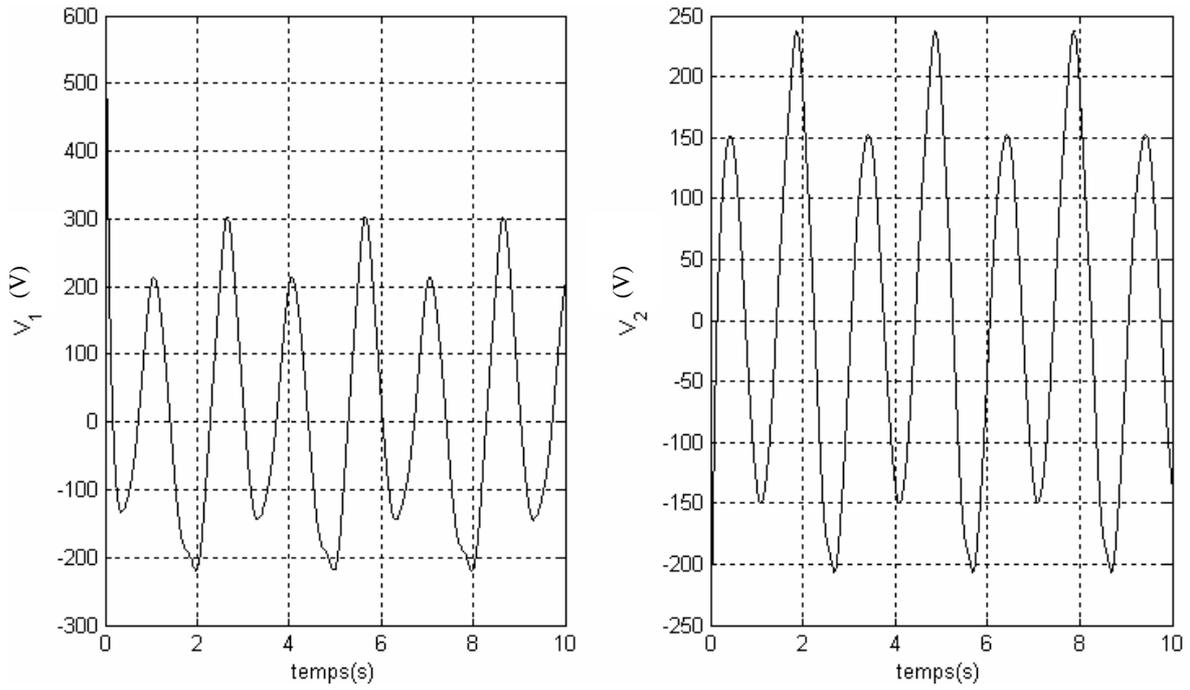
$$K_0 = 100 I ; K_1 = 300 I ; K_2 = 300 I ; \Gamma = 10 I ;$$



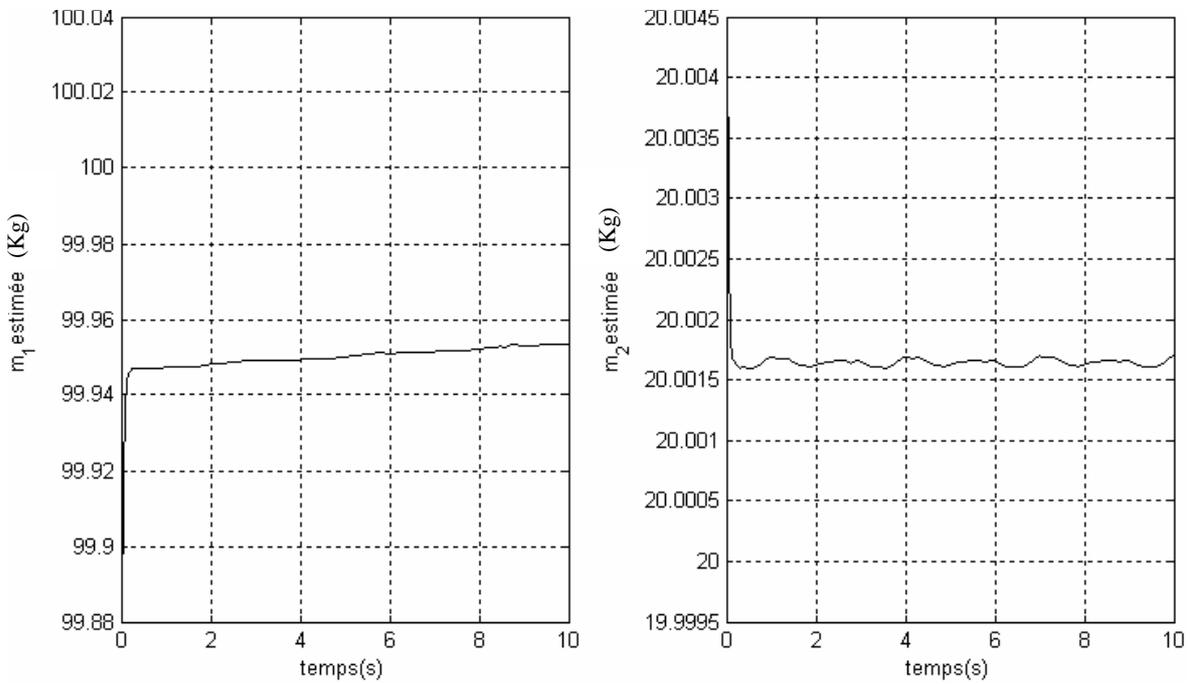
Figures V.5 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures V.6 : (a) Erreur de suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations  
(b: Zoom sur l'amplitude)



Figures V.7 : Tensions d'entrées pour les deux articulations



Figures V.8 : Paramètres estimés

Les résultats de la commande adaptative donne les mêmes performances que celles de la commande non adaptative dont tous les paramètres sont bien connus.

Les figures (V.5) et (V.6) montrent que l'erreur de suivi des trajectoires désirées est très faible. On peut noter la présence d'une tension relativement peu élevée au démarrage qui est due à la valeur initiale de la position articulaire. Ce désavantage peut être diminué en éliminant quelques non-linéarités dans le system de commande [68].

La figure (V.7) montre que les valeurs estimées des masses des articulations ( $m_1$  et  $m_2$ ) ne convergent pas vers les valeurs exactes mais vers des valeurs acceptables.

### V.3 Amélioration des résultats

Pour améliorer ces derniers résultats on va utiliser une autre forme du courant désiré  $I_d$  comme dans [67] et [75]

$$I_d = \zeta_{3d} = K_r^{-1} \left\{ \hat{M}(\zeta_1) \dot{\zeta}_2^* + \hat{C}(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_2^* + \hat{G}(\zeta_1) - K_d \varepsilon \right\} \quad (\text{V.33})$$

avec  $\zeta_2^*$  et  $\varepsilon$  sont définies comme suit :

$$\zeta_2^* = \zeta_{2d} - \Lambda(\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{V.34})$$

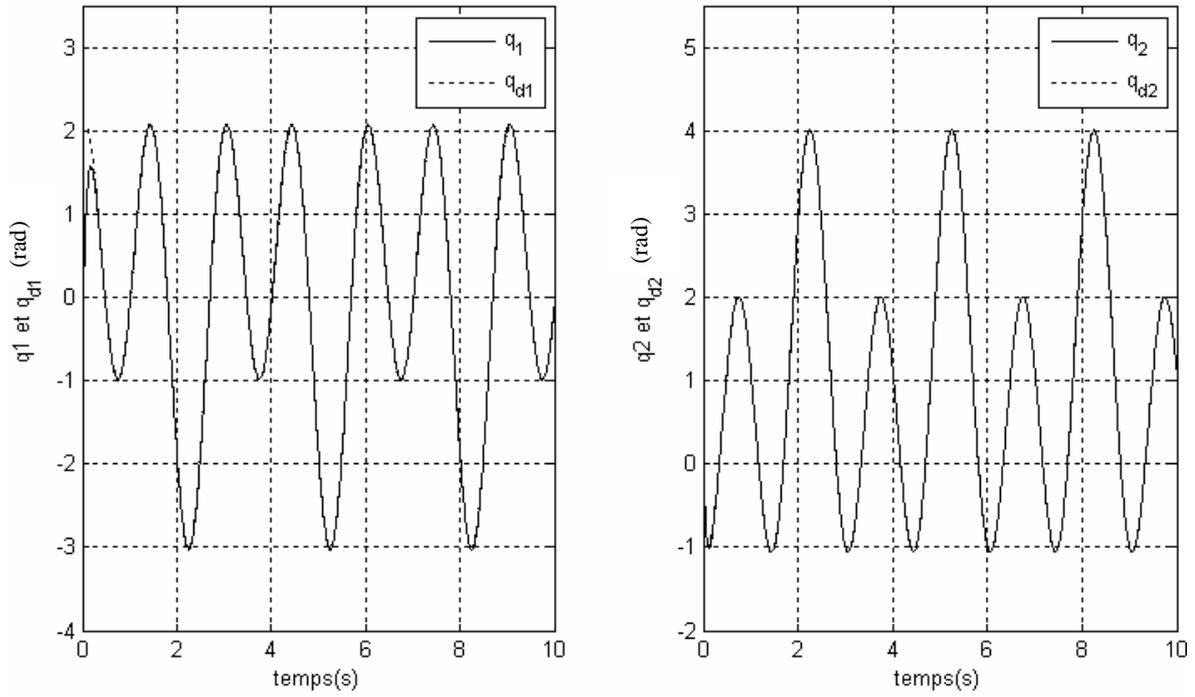
$$\varepsilon = \zeta_2 - \zeta_{2d} + \Lambda(\zeta_1 - \zeta_{1d}) \quad (\text{V.35})$$

Ainsi, les résultats obtenus sont explicités ci-dessous :

#### Cas non adaptatif

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris :

$$K_0 = 0.5 I ; K_1 = 300 I ; K_2 = 300 I ; K_{d1} = 400 I ; K_{d2} = 500 I ; \Lambda_{11} = 50 ; \Lambda_{12} = 10$$



Figures V.9 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations

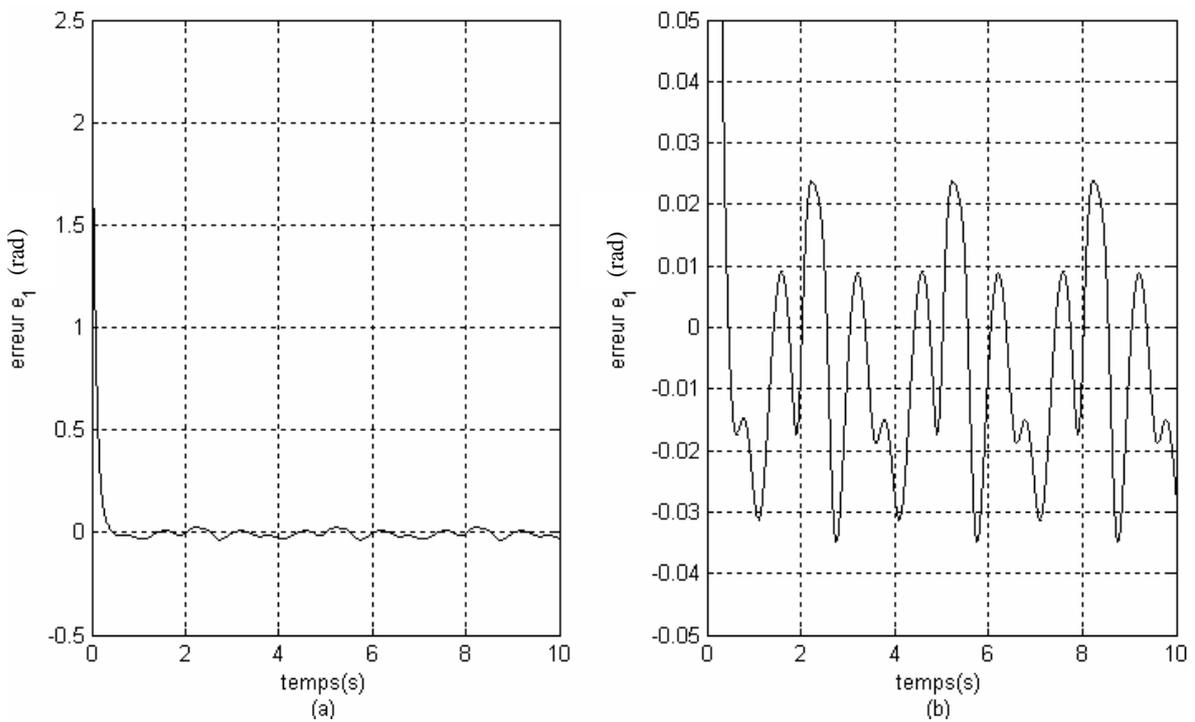


Figure V.10: (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour première articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)

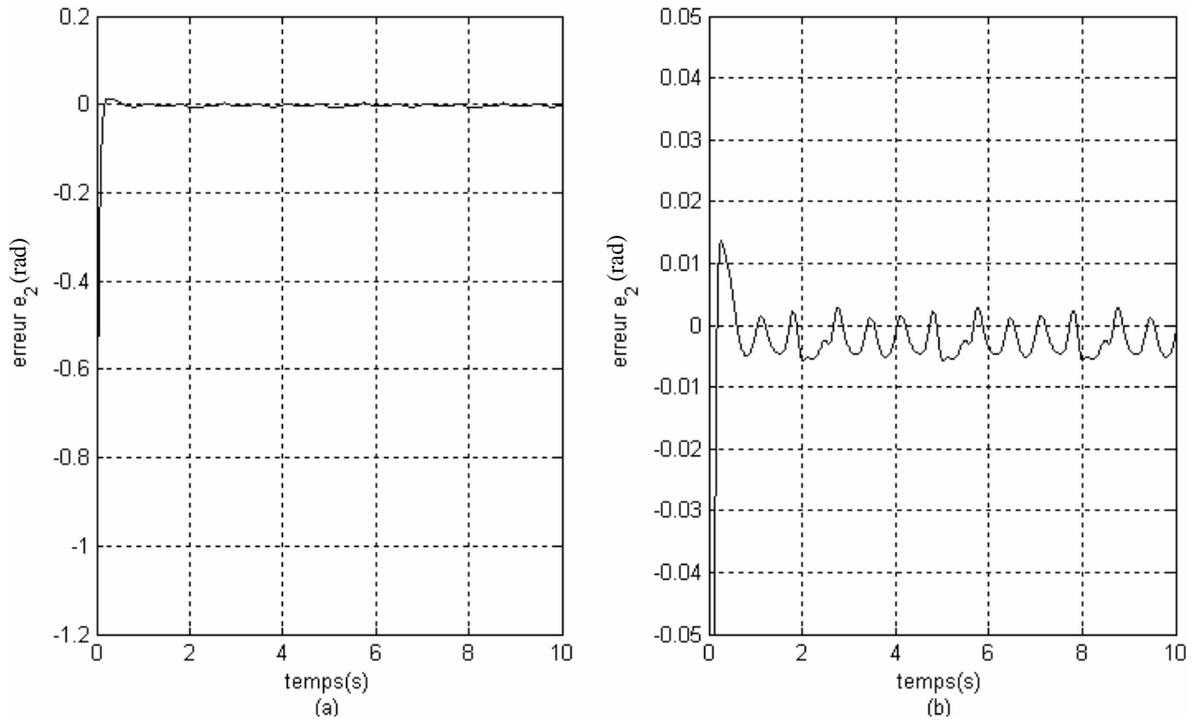
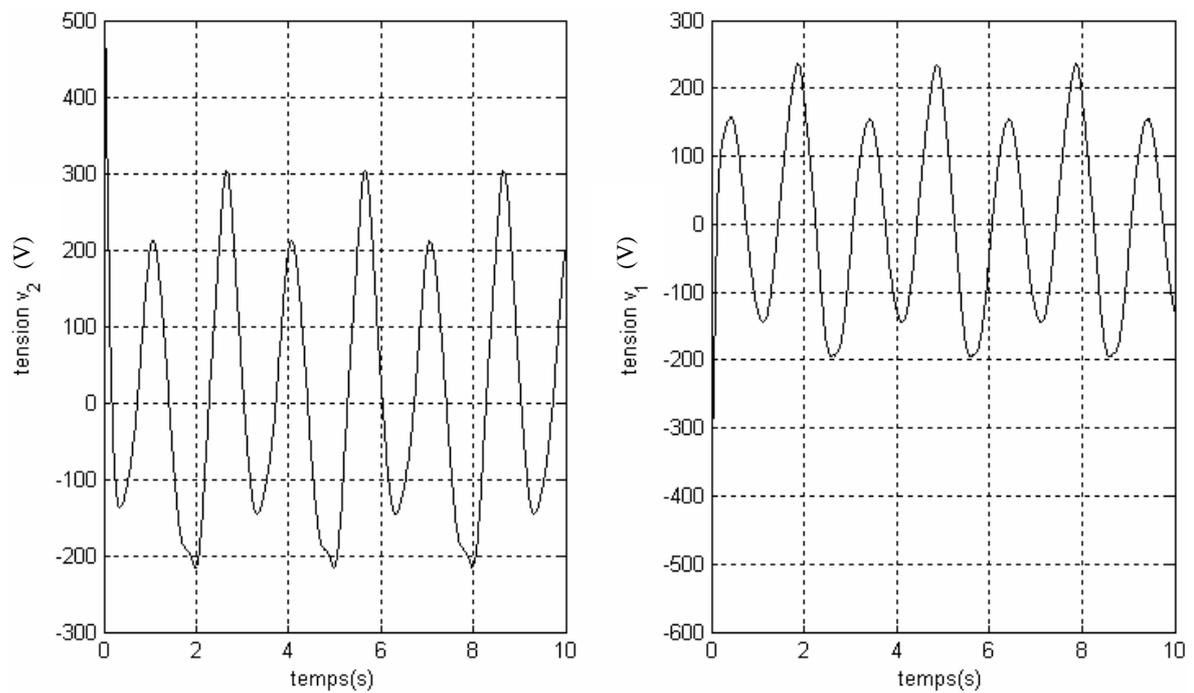


Figure V.11: (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée de la deuxième articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures V.12 : Tensions d'entrées pour les deux articulations

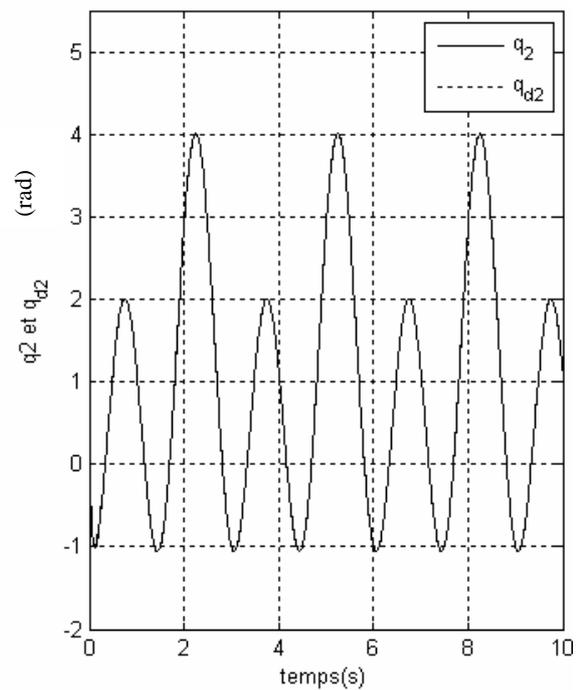
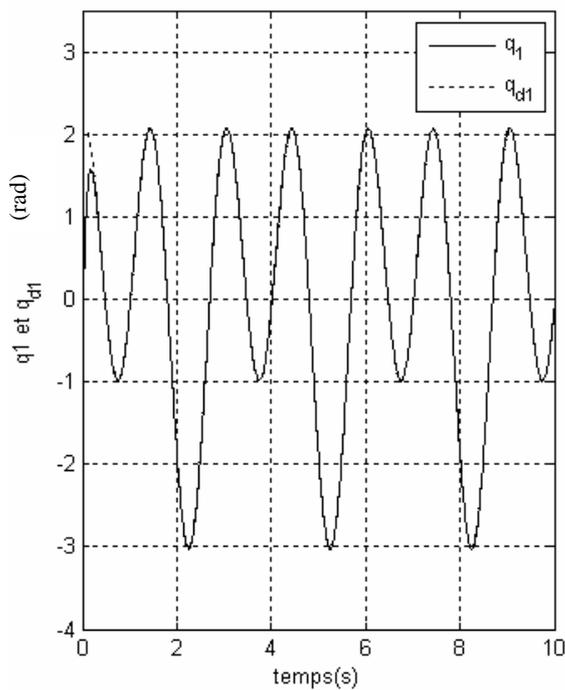
### Cas adaptatif

Pour les paramètres de synthèse nous avons pris:

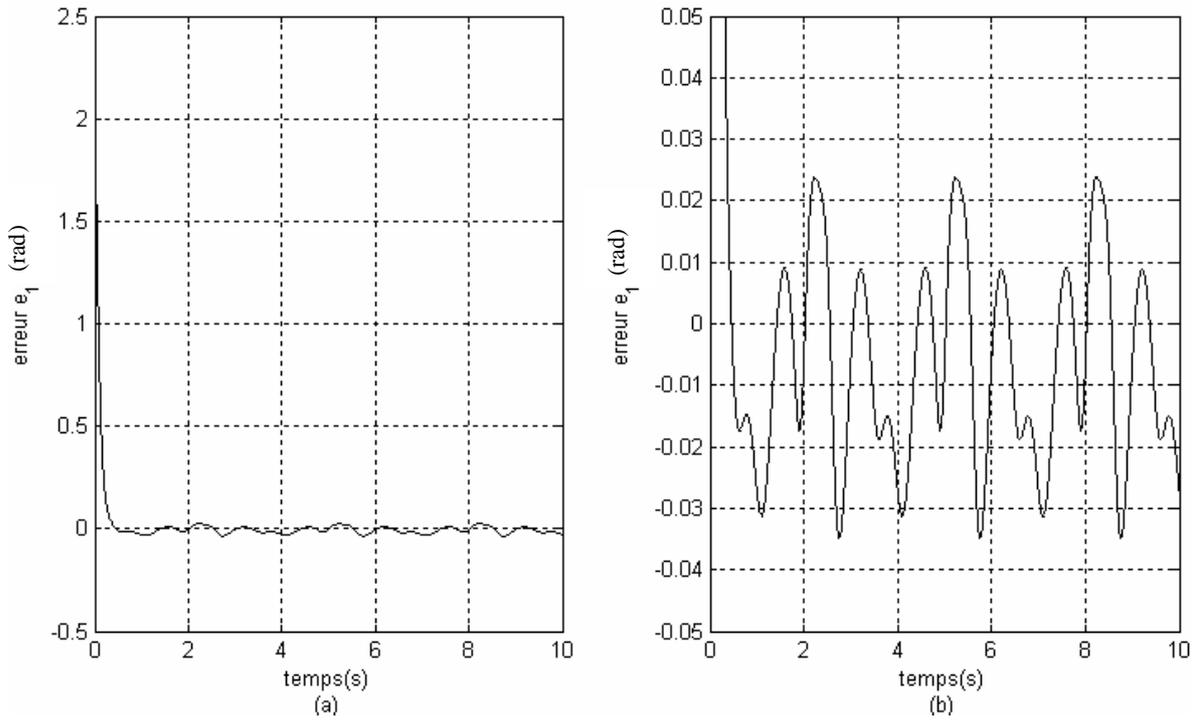
$$K_0 = 0.5 I ; K_1 = 300 I ; K_2 = 300 I ;$$

$$K_{d1} = 400 I ; K_{d2} = 500 I ;$$

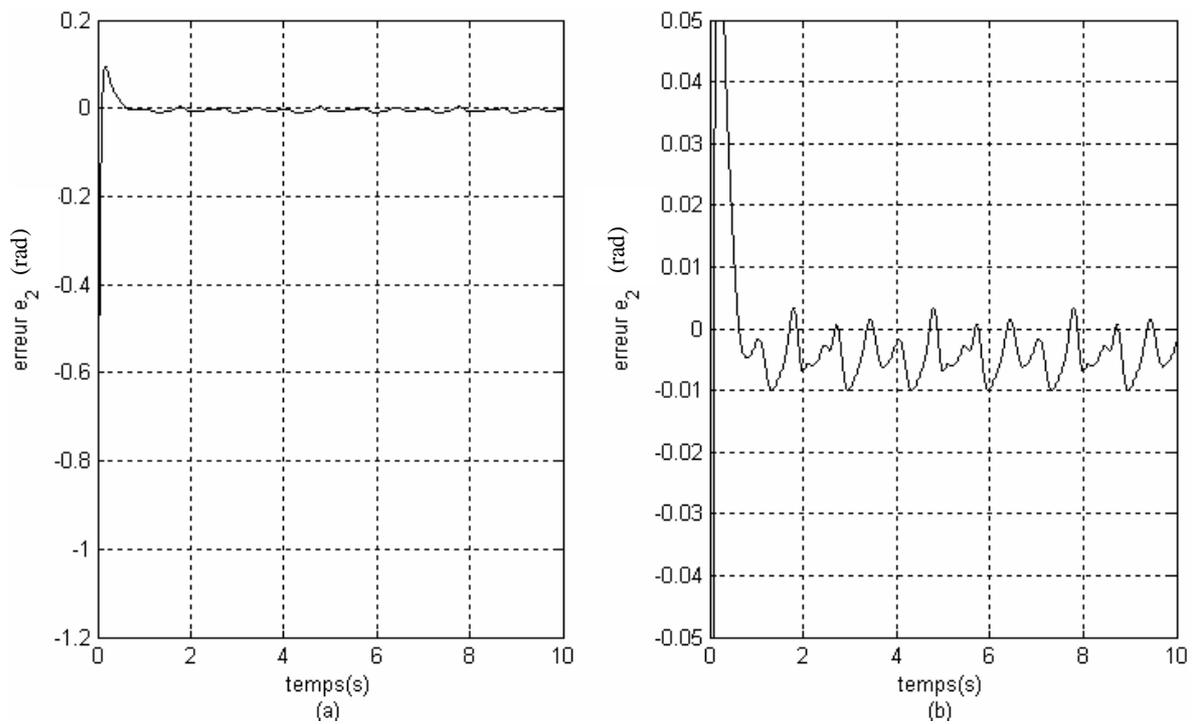
$$\Lambda_{11} = 50 ; \Lambda_{12} = 10 ; \Gamma = 100 I ;$$



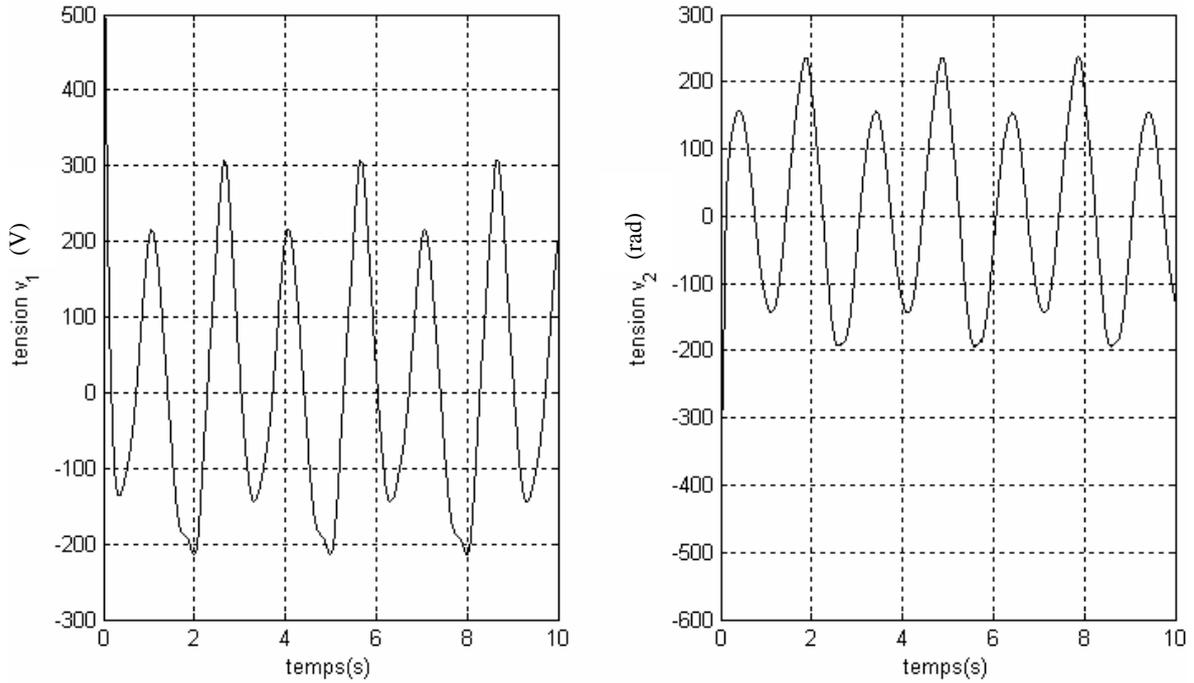
Figures V.13 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



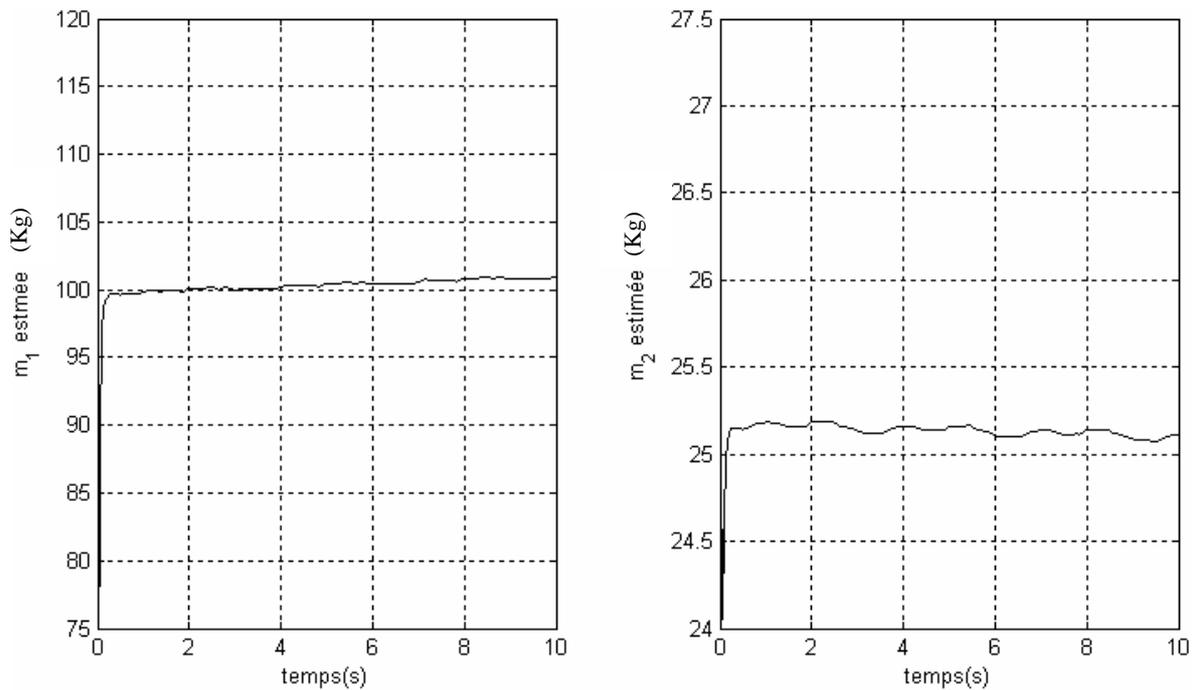
Figures V.14: (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour première articulation  
(b: Zoom sur l'amplitude)



Figures V.15 : (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour la deuxième articulation  
(b: Zoom sur l'amplitude)



Figures V.16 : Tensions d'entrée pour les deux articulations



Figures V.17 : Paramètres estimés

Les figures (V.14), (V.15), (V.16) et (V.17) montrent une amélioration significative des performances de cette commande en la comparant avec les résultats des figures (V.6),

(V.7) et (V.8). Cette amélioration est due aux coefficients d'adaptation ajoutés à l'expression du courant désiré.

Les estimations des valeurs inconnues convergent presque aux valeurs exactes. Aussi, les erreurs de suivi des trajectoires désirées sont négligeables.

La figure (V.16) montre une tension acceptable mais toujours caractérisée par une tension relativement peu élevée au démarrage pour l'expérimental.

## **V.4 Conclusion**

Dans ce chapitre l'association de la passivité et des algorithmes backstepping a été appliquée sur un bras manipulateur à deux degrés de liberté. Les résultats de simulation montrent les capacités et le mérite de cette association. De plus, ces techniques présentent une bonne robustesse vis-à-vis des incertitudes des paramètres intrinsèques et des perturbations extérieures.

## **CHAPITRE VI**

### **COMMANDE PAR PLATITUDE**

#### **VI.1 Introduction**

La platitude est une propriété caractérisant une classe de systèmes non linéaires [76], elle a été définie dans le cadre de l'algèbre différentielle [3], [77] puis dans le cadre de la géométrie différentielle [78], [79]. Le concept de platitude introduit une notion d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire commandable. Cette équivalence porte le nom d'équivalence par bouclage dynamique endogène dans le cadre de l'algèbre différentielle [77], [80] et le nom d'équivalence de Lie-Bäcklund dans le cadre de la géométrie différentielle [78].

Dans ce qui suit, nous allons rappeler la définition algébrique de la notion de platitude. La définition de la platitude dans le cadre du formalisme géométrique et les différents critères établis dans la littérature pour examiner la platitude d'un modèle non linéaire sont rappelés en annexe C.

#### **VI.2 Platitude dans le cadre de l'algèbre différentielle**

Dans le contexte de l'algèbre différentielle, un système est vu comme un champ de vecteurs généré par un ensemble de variables (états et commandes). La caractéristique essentielle des systèmes plats est qu'il existe un vecteur de sorties plates, tel que ses composantes soient des fonctions différentielles des variables du système, et tel que toute variable du système (on ne fait pas de distinction entre les variables d'état et les entrées du processus) puisse s'exprimer à partir de ces sorties et d'un nombre fini de leurs dérivées sans intégration d'équations différentielles.

Pour définir les systèmes plats, considérons le système non linéaire régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{VI.1})$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathfrak{R}^m$  est l'entrée de commande et  $f$  est une fonction régulière de classe  $C^\infty$  de  $x$  et de  $u$ , dont le rang de la matrice jacobienne  $\partial f / \partial u$  est égal à  $m$  (c'est-à-dire que le système admet effectivement  $m$  commandes indépendantes).

### Définition 1 :

Un système non linéaire modélisé par (VI.1) est dit (différentiellement) plat si, et seulement si, il existe un vecteur de sortie plates  $z \in \mathfrak{R}^n$  différentiellement indépendantes, de dimension égale à celle du vecteur de commande  $u$ , dépendant de  $x$  et de  $u$  et d'un nombre fini  $r$  de ses dérivées :

$$z = Z(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \quad (\text{VI.2})$$

tel que :

$$\begin{aligned} x &= X(z, \dot{z}, \dots, z^{(q-1)}) \\ u &= U(z, \dot{z}, \dots, z^{(q-1)}, z^{(q)}) \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

où  $Z : \mathfrak{R}^n \times (\mathfrak{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ,  $X : (\mathfrak{R}^m)^q \rightarrow \mathfrak{R}^n$  et  $U : (\mathfrak{R}^m)^{q+1} \rightarrow \mathfrak{R}^m$  sont des fonctions régulières ♦

Cela revient à dire que tout le comportement dynamique du système (VI.1) peut être décrit par le comportement dynamique de la sortie plate  $z$ .

A tout  $z(t)$  défini pour  $t \in [0, T]$ ; les trajectoires sont de la forme :

$$\begin{aligned} x &= X(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(q-1)}(t)) \\ u &= U(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(q-1)}(t), z^{(q)}(t)) \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

où  $q$  est un entier.

Par la suite, nous utiliserons la terminologie "systèmes plats", pour nommer la classe particulière des modèles non linéaires, respectant la définition 1.

Après avoir rappelé la définition de la platitude dans le cadre algébrique, nous allons nous intéresser dans le paragraphe suivant aux différentes techniques de linéarisation par inversion dynamique.

### VI.3 Platitude et linéarisation

Les systèmes non linéaires plats ont la propriété d'être équivalents à des systèmes linéarisables par bouclage dynamique endogène [81], [82], [3], [77]. Avant d'introduire ce type de bouclage, rappelons d'abord la linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique.

#### VI.3.1 Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique

Pour le système dynamique donné par (VI.1), le problème de linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique consiste à trouver un changement de coordonnées (un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^\infty$ ) donné par :

$$\xi = \varphi(x) \quad (\varphi(0) = 0) \quad (\text{VI.5})$$

et un bouclage statique d'état de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (\text{VI.6})$$

avec  $\alpha(0) = 0$  et  $\beta(x)$  est inversible.  $\alpha$  et  $\beta$  sont de classe  $C^\infty$ . Après bouclage et changement de coordonnées, on obtient un système linéaire commandable [83] de la forme :

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (\text{VI.7})$$

où  $\xi \in \mathcal{R}^n$  est l'état associé à la nouvelle entrée de commande  $v$  du système linéaire équivalent donné par (VI.7) et représenté sur la figure VI.1.

Ce bouclage consiste, en effet, à passer de l'entrée  $v$  à l'entrée  $u$  et réciproquement, sans intégrer d'équations différentielles, grâce aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ v &= -\beta(x)^{-1}\alpha(x) + \beta^{-1}(x)u \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

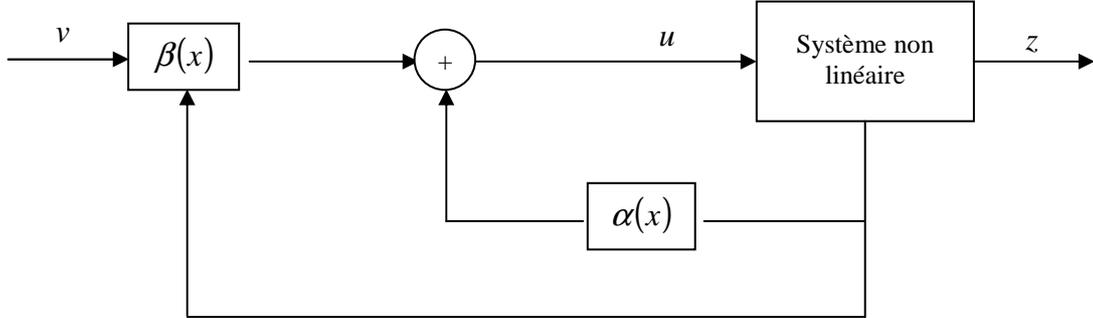


Figure VI.1 : Système non linéaire bouclé équivalent à un système linéaire

Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un bouclage statique linéarisant, en termes de crochets de Lie pour un système affine en la commande ont été proposées par Jakubczyk et Respondek dans [81] et par Hunt Su et Meyer dans [84].

Pour un système non linéaire ayant la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad \text{avec } x \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{VI.9})$$

où  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  vérifiant :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}\{g_1(0), g_2(0), \dots, g_m(0)\} = m \quad (\text{VI.10})$$

L'expression (VI.8) sera donnée par :

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\left(L_g L_f^{(n-1)} z\right)^{-1} \left(L_f^{(n)} z\right) \\ \beta(x) &= \left(L_g L_f^{(n-1)} z\right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

où  $L_f^{(n)} z$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de Lie de la sortie mesurée  $z$  suivant le champ de vecteurs  $f$  [81], [85].

A partir de (VI.9) on définit les distributions suivantes :

$$\begin{aligned}
G_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \\
G_i &= G_{i+1} + \text{ad}_f^i G_{i-1} \quad \text{pour } i \geq 1
\end{aligned} \tag{VI.12}$$

où  $\text{span}$  correspond à l'espace engendré par les vecteurs  $g_1, \dots, g_m$  et  $\text{ad}_f^i G_0$  correspond au crochet de Lie de  $f$  et de  $G_0$  itéré  $i$  fois avec  $\text{ad}_f^i = [f, \text{ad}_f^{i-1}]$  pour  $i \geq 1$ . Le résultat suivant est issu de [81] et [84].

### **Théorème 1**

*Pour qu'un système non linéaire admette une linéarisation par bouclage statique, il faut et il suffit que dans un voisinage  $V$  du point d'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$  :*

- *La famille  $G_i$  soit une famille involutive et de rang constant pour tout  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  où  $n$  est la dimension du vecteur d'état.*
- *$G_{n-1}$  soit de rang  $n$ .*

Rappelons qu'une distribution  $G$  est dite involutive si, et seulement si, pour tout couple de champs de vecteurs  $f$  et  $g$  de  $G$ , le crochet de Lie de  $f$  et  $g$  appartient à  $G$ .

Notons également que la seconde condition du théorème 1 est l'extension naturelle du critère de commandabilité dans le cas linéaire :  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ .

Dans le cas où la linéarisation par bouclage statique et difféomorphisme n'est pas possible, Les auteurs [82] ont montré que l'ajout de dynamique dans le bouclage (bouclage dynamique) n'a aucun intérêt dans le cas mono-entrée. Dans le cas multi-entrées, il est possible d'augmenter la dimension de l'état en ajoutant des dynamiques dans le régulateur afin d'obtenir une inversion dynamique par bouclage statique sur le système augmenté. Ce type de bouclage est généralement appelé bouclage dynamique endogène car, contrairement au bouclage dynamique exogène, il n'existe pas de variables supplémentaires indépendantes du système d'origine.

#### **VI.3.2 Linéarisation par bouclage dynamique endogène**

Un système dynamique donné par (VI.1) est linéarisable par bouclage dynamique s'il existe un bouclage dynamique endogène défini par :

$$\begin{aligned} \dot{w} &= a(x, w, v) \\ u &= b(x, w, v) \end{aligned} \quad w \in \mathfrak{R}^q, v \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{VI.13})$$

où  $w$  est l'état du compensateur et  $v$  est la commande du système augmenté, et un changement de coordonnées défini par un difféomorphisme  $\Xi$  sur l'espace d'état étendu  $\mathfrak{R}^{n+q}$  :

$$\xi = \Xi(x, w), \quad \xi \in \mathfrak{R}^{n+q} \quad (\text{VI.14})$$

de telle sorte que le système augmenté donné sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, b(x, w, v)) \\ a(x, w, v) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.15})$$

puisse être linéarisable par bouclage, c'est-à-dire qu'il puisse être représenté sous la forme canonique de Brunovsky [72] suivante :

$$\begin{cases} z_1^{(k_1)} = v_1 \\ \vdots \\ z_m^{(k_m)} = v_m \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

où  $k_i$  est l'indice de commandabilité associé à  $z_i$ .

Notons qu'à travers le bouclage dynamique endogène, le modèle linéaire obtenu est équivalent à un système plat.

Après avoir défini la notion de platitude, nous allons montrer l'apport essentiel de la platitude pour la planification et la poursuite de trajectoires.

## VI.4 Platitude et planification de trajectoires

Pour le système non linéaire donné par l'équation différentielle (VI.1), le problème de planification de trajectoire sous contraintes consiste en général à trouver une trajectoire  $t \in [t_i, t_f] \rightarrow (x(t), u(t))$  (avec  $t_i$  comme instant initial et  $t_f$  comme instant final) vérifiant l'équation différentielle (VI.1), ainsi que les conditions initiales et finales données par :

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x_i & ; & & u(t_i) &= u_i \\ x(t_f) &= x_f & ; & & u(t_f) &= u_f \end{aligned} \tag{VI.17}$$

et respectant des contraintes sur la trajectoire recherchée de type  $(x(t), u(t)) \in S(t)$  avec  $S(t)$  un sous ensemble de  $X \times U$ . La résolution de ce problème nécessite généralement une résolution par processus itératif : on commence par fixer une commande,  $t \rightarrow u_0(t)$  on intègre les équations du système à partir des conditions initiales pour évaluer la solution à l'instant final  $t_f$ , puis on se donne une procédure pour choisir la commande  $t \rightarrow u_1(t)$  qui vérifie les conditions finales et les contraintes imposées sur la trajectoire, et ainsi de suite. La solution à ce problème nécessite alors la résolution numérique d'équations différentielles. Dans le cas des systèmes plats, ce problème peut être résolu sans intégration d'équations différentielles.

La propriété de la platitude donne une correspondance entre les trajectoires des sorties plates et celles de l'état et des entrées de commande du système. En effet, à partir des trajectoires des sorties plates de références  $z_{ref}$  et de leurs dérivées successives, calculées de façon à vérifier les conditions initiales et finales et les équations différentielles du système, on peut en déduire la trajectoire de l'état de référence  $x_{ref}(t)$  et celles des commandes nominales correspondantes  $u_{ref}(t)$  en utilisant l'équation (VI.3). On obtient alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} x_{ref}(t) &= X(z_{ref}(t), \dot{z}_{ref}(t), \dots, z_{ref}^{(q-1)}(t)) \\ u_{ref}(t) &= U(z_{ref}(t), \dot{z}_{ref}(t), \dots, z_{ref}^{(q-1)}(t), z_{ref}^{(q)}(t)) \end{aligned} \tag{VI.18}$$

En général, il existe plusieurs trajectoires  $z_{ref}(t)$  vérifiant les contraintes (V.17). La génération de trajectoire optimale permet de déterminer, parmi celles-ci, la trajectoire qui respecte au mieux au sens d'un critère donné, les contraintes  $(x(t), u(t)) \in S(t)$ . On peut citer par exemple des contraintes dans l'espace articulaire et également des limites sur la vitesse, l'accélération ainsi que sur le jerk.

Pour un système non linéaire donné, la trajectoire optimale  $t \in [t_i, t_f] \rightarrow (x(t), u(t))$  peut être obtenue en minimisant le critère suivant :

$$J(x, u) = \varphi_f(x(t_f), u(t_f)) + \varphi_i(x(t_i), u(t_i)) + \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (\text{VI.19})$$

où  $\varphi_i(\cdot)$  et  $\varphi_f(\cdot)$  représentent respectivement les conditions initiales et finales.  $L$  est une fonction non linéaire soumise à un vecteur de contraintes sur les conditions initiales, sur les conditions finales et sur la trajectoire. Ses différentes contraintes sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} lb_i &\leq \psi_i(x(t_i), u(t_i)) \leq ub_i \\ lb_f &\leq \psi_f(x(t_f), u(t_f)) \leq ub_f \\ lb_t &\leq S(x, u) \leq ub_t \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

où  $lb$  et  $ub$  représentent les bornes inférieures et supérieures à respecter et  $\psi$  est un vecteur de fonctions définissant les entités à borner.

Le problème de génération de trajectoires optimales peut alors s'exprimer par le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{x, u} J(x, u) \quad (\text{VI.21})$$

soumis aux contraintes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ lb &\leq c(x, u) \leq ub \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

En utilisant la notion de platitude, ce problème peut être traité dans l'espace des sorties plates, ce qui veut dire que le critère à optimiser devient :

$$\min_z J(z) \quad (\text{VI.23})$$

soumis à :

$$lb \leq S(z) \leq ub \quad (\text{VI.24})$$

Cette étape de planification de trajectoire correspond à un processus de génération en boucle ouverte ou anticipation [86]. Dans ce cas, si la dynamique du système est bien connue et en l'absence de perturbations externes, aucun bouclage n'est nécessaire, seule l'anticipation nous permet d'atteindre l'objectif désiré. Par contre, dans le cas de présence

de perturbations exogènes ou d'incertitude de modélisation, il est nécessaire d'ajouter au bloc d'anticipation une loi de commande permettant un suivi robuste de trajectoires [86]. Ceci va faire l'objet du paragraphe suivant.

## VI.5 Platitude et poursuite de trajectoires

Pour la planification de trajectoires, la seule connaissance requise est le modèle dynamique et le temps. Cette conception est dite "en boucle ouverte" car elle n'utilise pas d'information obtenue au fur et à mesure du fonctionnement du système : la trajectoire de référence est calculée à partir de l'instant présent jusqu'à un instant futur en fonction de ce que l'on connaît sur la façon de réagir du système. Il s'agit donc d'une anticipation. Clairement, si la dynamique du système est précisément connue et si les perturbations venant de l'environnement extérieur n'ont pas un effet important dans le domaine d'utilisation du système, l'anticipation, à elle seule, va nous permettre de nous rapprocher de l'objectif fixé. Par contre, si la modélisation n'est pas assez précise ou trop perturbée, l'anticipation va devoir être complétée par une loi de commande pour "fermer la boucle" : si l'on mesure, par l'intermédiaire de capteurs, l'état du système à chaque instant, on peut évaluer l'écart entre la trajectoire réellement parcourue et la trajectoire de référence et en déduire une loi de commande "en boucle fermée" permettant de réduire cet écart. Le problème du suivi de trajectoires consiste donc à trouver une loi de commande en boucle fermée permettant de garantir que, pour une classe donnée de perturbations, l'état du système va tendre asymptotiquement vers la trajectoire de référence.

Pour un système plat, dans un domaine ouvert ne contenant pas de point singulier (point où l'isomorphisme de Lie-Bäcklund dégénère ou n'est plus défini), le suivi de trajectoires peut être résolu grâce au corollaire D.1 (voir l'annexe D) sur l'équivalence par bouclage dynamique endogène à un système trivial [87].

En effet, si  $y$  est une sortie plate correspondant à l'état  $x$  et l'entrée  $u$ , supposés mesurés, et si  $y^*$  est la trajectoire de référence de la sortie plate, posons  $e_i = y_i - y_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Par le corollaire (D.1), on sait construire un bouclage dynamique endogène tel que le système s'écrive, à un difféomorphisme près,  $y^{(r+1)} = v$ . Si l'on pose  $v^* = y^{*(r+1)}$ , l'équation d'erreur s'écrit :

$$e^{(r+1)} = v - v^* \quad (\text{V.25})$$

Il suffit alors de poser, composante par composante :

$$v_i = v_i^* + \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{VI.26})$$

avec les gains  $k_{i,j}$  tels que les  $m$  polynômes  $s^{r+1} - \sum_{j=0}^r k_{i,j} s^{(j)} = 0$  aient toutes leurs racines à partie réelle strictement négative,  $i = 1, \dots, m$ . Alors, l'erreur converge exponentiellement vers 0 :

$$e_i^{(r+1)} = - \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{VI.27})$$

et donc  $y$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r+1$  convergent vers leurs références  $y^*, \dots, (y^*)^{(r+1)}$ .

En utilisant la différentiabilité de l'isomorphisme de Lie-Bäcklund

$$x = \varphi_0(y, \dots, y^{(r)}), \quad u = \varphi_1(y, \dots, y^{(r+1)}) \quad (\text{VI.28})$$

on en conclut que l'ensemble des variables  $x$  et  $u$  du système d'origine convergent localement exponentiellement vers leurs références.

## VI.6 Commande adaptative basée sur la forme normale 0-plate

Une limitation de la platitude, c'est qu'il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer si un système général est différentiellement plat et il n'y a pas d'algorithme pour calculer les sorties plates [88]. Néanmoins, il est bien connu que les systèmes linéaires contrôlables sont différentiellement plats. Par conséquent, un système dynamique qui est linéarisable par retour d'état statique ou dynamique est aussi plat [88], [89], [90]. Il est également connu que les systèmes dynamiques affines contrôlables et de mono dimensionnels sont plats [88], [91]. En effet, les systèmes qui sont différentiellement plats possèdent plusieurs propriétés utiles qui peuvent être exploitées dans la conception

des algorithmes de contrôle pour la planification de mouvement, la génération de trajectoires, et la stabilisation [88].

Dans ce qui suit, nous allons caractériser et donner quelques conditions pour une classe de systèmes dynamiques non linéaires dans lesquelles le système proposé est différentiellement plat.

La platitude d'un modèle robotique est utilisée dans l'élaboration de la commande. Nous allons voir comment le concept de platitude, atteint par la forme normale 0-platité proposé par [88], peut réaliser efficacement un suivi de trajectoire pour les systèmes robotiques. En outre, cette méthode est efficace pour des systèmes dont les modèles sont relativement exacts, par conséquent, une loi d'adaptation sera alors proposée dans le cas des systèmes incertains.

Les résultats de simulation d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté à couple électrique montrent que le suivi de la trajectoire désirée et l'estimation des paramètres inconnus du système sont vérifiés. Pour cette classe particulière, cette méthode présente une nouvelle direction pour résoudre le problème de platitude.

### VI.5.1 Notations et Définition

Considérons les systèmes dynamiques affines de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (\text{VI.29})$$

où l'état  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in U \subseteq \mathfrak{R}^m$ . Les champs de vecteurs  $f(x)$ ,  $g_1(x)$ , ...,  $g_m(x)$  sont des valeurs métriques définies sur l'ensemble ouvert  $\mathcal{X}$ .

On dit que ce système est plat s'il existe  $m$  fonctions  $y = (y_1, \dots, y_m)$  dites sorties plates telles que :

1.  $y = y_{f_i}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{r_i})$  est une fonction d'état  $x$ , des entrées  $u$ , et leurs dérivées  $u^i$ .
2.  $x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{r_2})$  est une fonction de sorties plates et leurs dérivées.
3.  $u = \gamma(y, \dot{y}, \dots, y^{r_3})$  est une fonction de sorties plates et leurs dérivées.

Afin de traiter les systèmes dynamiques affines multi-entrées, sans perte de généralité, nous supposons :

### Hypothèse 1

Le champ de vecteurs  $G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$  est de rang  $m$ .

Cependant, nous ne supposons pas que  $\Delta = \text{span}(G)$  est involutive comme c'est le cas dans de nombreux développements qui tentent de calculer la dynamique inverse. Nous allons caractériser seulement une classe particulière de systèmes dynamiques pour lesquels les sorties plates sont seules fonctions des états  $x$ . Cette classe de systèmes dynamiques est appelée 0-plate [88],[92].

$$y_i = F_i(x) = z_i \quad (\text{VI.30})$$

$$x = \varphi(z_i, \dot{z}_i, \dots, z_i^m) \quad (\text{VI.31})$$

$$u = \gamma(z_i, \dot{z}_i, \dots, z_i^m) \quad (\text{VI.32})$$

Dans la suite, nous appellerons que le système dynamique (VI.29), avec  $n$  états et  $m$  entrées, est de co-dimension  $n - m$ .

La référence [91] a montré que la co-dimension 1 est contrôlable et 0-plate. Cela permet à la référence [88] d'envisager le cas de co-dimension 2 comme une généralisation de co-dimension 1. Le résultat suivant donne la forme normale 0-plate des systèmes dynamiques contrôlables de co-dimension 1.

#### A. Structure de la forme normale non linéaire 0-plate de co-dimension 1

On considère le système affine de co-dimension 1 suivant :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_{1,1}^i(z) u_i \\ \dot{z}_{1,2} &= \alpha_{1,2}(z) + u_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_{1,2}^i(z) u_i \\ \dot{z}_{j,1} &= \alpha_{j,1}(z) + u_j + \sum_{i=2, i \neq j}^{n-1} \beta_{j,1}^i(z) u_i \end{aligned} \quad (\text{VI.33})$$

$$z = \left( (z_{j,1})_{(1 \leq j \leq n-1)}, z_{1,2} \right).$$

Ce système est plat et un jeux de sorties plates est le suivant :  $y_j = z_{j,1}$ .

En effet, on considère les équations (algébriques) suivantes :

$$E_1 = \dot{z}_{1,1} - z_{1,2} - \sum_{i=2}^{n-1} \beta_{1,1}^i(z) u_i = 0 \quad (\text{VI.34})$$

$$E_j = \dot{z}_{j,1} - \alpha_{j,1}(z) - u_j - \sum_{i=2, i \neq j}^{n-1} \beta_{1,j}^i(z) u_i = 0 \quad (\text{VI.35})$$

où  $2 \leq j \leq n-1$ .

Soit  $v = (z_{1,2}, u_2, \dots, u_{n-1})$  le vecteur des variables inconnues du système ; alors il est facile de voir que :

$$\frac{\partial(E_1, \dots, E_{n-1})}{\partial v} = -I_{n-1 \times n-1} + \Phi(v) \quad (\text{VI.36})$$

$I_{n-1 \times n-1}$  est la matrice identité et  $\Phi(v)$  représente l'ordre d'un terme sur les variables  $v$ .

A partir des équation (IV.34), (IV.35) et le fait que  $\frac{\partial(E_1, \dots, E_{n-1})}{\partial v}$  est localement inversible, le théorème de la fonction implicite nous permet de conclure qu' il existe les fonctions  $\varphi(\ )$  et  $\gamma_k(\ )$  tel que :

$$z_{1,2} = \varphi(y_j, \dot{y}_j), \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (\text{VI.37})$$

$$u_k = \gamma_k(y_j, \dot{y}_j), \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (\text{VI.38})$$

En remplaçant (VI.37) et (VI.38) dans la seconde équation dynamique de (VI.33), on peut obtenir l'entrée  $u_1$  comme fonction de  $(y_j, \dot{y}_j)$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  et la seconde dérivée  $y_1^{(2)}$ . Dans ce qui suit, nous allons généraliser le résultat ci-dessous sur le cas de la co-dimension 2 [88].

## B. Structure de la forme normale non linéaire 0-plate de co-dimension 2

Dans cette section, nous allons présenter deux possibles formes normales 0-plates de co-dimension 2 d'un système dynamique contrôlable [88].

### ✓ Première forme normale 0-plate

Cette section est une extension de la forme normale donnée en (VI.33).

Considérons le système dynamique contrôlable suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_{1,1}^i(z) u_i \\
\dot{z}_{1,2} &= \alpha_{1,2}(z) + u_1 + \beta_{1,2}^2(z) u_2 + \dots + \beta_{1,2}^m(z) u_m \\
\dot{z}_{2,1} &= z_{2,2} + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_{2,1}^i(z) u_i \\
\dot{z}_{2,2} &= \alpha_{2,2}(z) + u_1 + \beta_{2,2}^2(z) u_2 + \dots + \beta_{2,2}^m(z) u_m \\
\dot{z}_{j,1} &= \alpha_{j,1}(z) + u_j + \sum_{i=3, i \neq j}^{n-2} \beta_{j,1}^i(z) u_i
\end{aligned} \tag{VI.39}$$

$$\text{avec } z = \left( (z_{j,1})_{(1 \leq j \leq n-2)}, z_{1,2}, z_{2,2} \right)$$

Ce système est plat et  $y_j = z_{j,1}$  sont des sorties plates.

Afin de démontrer cette considération, nous allons montrer que les équations (VI.39) représentent une dynamique locale 0-plate du système. Tel que c'est utilisé dans la section (A) Considérons les  $m$  équations suivantes :

$$E_1 = \dot{z}_{1,1} - z_{1,2} - \sum_{i=3}^m \beta_{1,1}^i(z) u_i = 0 \tag{VI.40}$$

$$E_2 = \dot{z}_{2,1} - z_{2,2} - \sum_{i=3}^m \beta_{2,1}^i(z) u_i = 0 \tag{VI.41}$$

$$E_j = \dot{z}_{j,1} - \alpha_{j,1}(z) - u_j - \sum_{i=3, i \neq j}^m \beta_{j,1}^i(z) u_i = 0 \tag{VI.42}$$

où  $3 \leq j \leq m$ ,  $m = n - 2$ .

Soit  $v = (z_{1,2}, z_{2,2}, u_3, \dots, u_m)$  est le vecteur des variables inconnues du système ; ainsi, la dérivée partielle est sous la forme :

$$\frac{\partial E_1, \dots, E_m}{\partial v} = -I_m + \Phi(v) \tag{VI.43}$$

où  $I_m$  est la matrice identité de dimension  $(m \times m)$  et  $\Phi(v)$  représente les termes du premier ordre de la variable  $v$ . À partir des équations (VI.40) et (VI.42) ; et le fait que

$\frac{\partial E_1, \dots, E_m}{\partial v}$  est localement inversible alors le théorème de la fonction implicite, nous

permet de conclure qu'il existe  $\varphi_k(\cdot)$  et  $\gamma_k(\cdot)$  des fonctions telles que :

$$z_{k,2} = \varphi_k(y_j, \dot{y}_j), \quad j = 1, \dots, n-2, k = 1:2 \quad (\text{VI.44})$$

$$u_k = \gamma_k(y_j, \dot{y}_j), \quad j = 1, \dots, n-2, k = 3:m \quad (\text{VI.45})$$

En remplaçant (VI.44) et (VI.45) dans la seconde et la quatrième équation dynamique de (VI.39) on peut obtenir les entrées  $u_1$  et  $u_2$  comme des fonctions de  $y_j, \dot{y}_j$  pour  $j = 1:m$  et leurs secondes dérivées  $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}$ . Dans le paragraphe suivant, nous donnerons une forme normale 0-plate un peu différente qui est liée à des conditions plus sévères.

#### ✓ Seconde forme normale 0-plate

Cette seconde forme canonique donne les variables inconnues à partir de la dérivation successive de la même sortie plate écrite en termes de variables  $(z_{j,1} = y_j)_{1 \leq j \leq n-2}$ .

Soit le système dynamique 0-plate suivant :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} + \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{1,1}^i(z) u_i \\ \dot{z}_{1,2} &= z_{1,3} + \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{1,2}^i(z) u_i \end{aligned} \quad (\text{VI.46})$$

$$\dot{z}_{1,3} = \alpha_{1,3}(z) + u_1 + \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{1,3}^i(z) u_i$$

$$\dot{z}_{j,1} = \alpha_{j,1}(z) + u_j + \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{j,1}^i(z) u_i$$

$z = ((z_{j,1})_{(1 \leq j \leq n-2)}, z_{1,2}, z_{1,3})$ , avec  $y_j = z_{j,1}$  sont des sorties plates.

En effet, la principale différence de (VI.39) concerne la variable  $z_{1,3}$  que nous supposons n'est pas présente dans la dynamique  $(z_{j,1})_{(1 \leq j \leq n-2)}$ . Ensuite, nous pouvons conclure que :

**Condition 1** :  $z_{1,3}$  ne doit être présente dans  $\beta_{j,1}^i(z)$  pour  $j = 1, \dots, n-2$  et  $i = 2, \dots, n-2$ .

**Condition 2** :  $z_{1,3}$  doit être présente dans  $\alpha_{j,1}$  pour  $j = 2, \dots, n-2$ .

Sous ces conditions, nous pouvons utiliser la même procédure que la première forme normale 0-plate pour résoudre le système dynamique (VI.46).

Considérons alors les  $m$  équations suivantes :

$$E_1 = \dot{z}_{1,1} - z_{1,2} - \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{1,1}^i(z) u_i = 0 \quad (\text{VI.47})$$

$$E_j = \dot{z}_{j,1} - \alpha_{j,1}(z) - u_j - \sum_{i=2}^{n-2} \beta_{j,1}^i(z) u_i = 0 \quad (\text{VI.48})$$

et le reste de la preuve est similaire à la démonstration de co-dimension 2.

Ici, nous allons obtenir  $z_{1,3}$  en fonction de  $\dot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_1$  et  $y_i$  pour  $i = 1 : m$ . On obtient aussi la variable d'entrée  $u_1$  comme une fonction de  $\dot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_1$ ,  $\ddot{y}_1$  et  $y_i$  pour  $i = 1 : m$ .

## VI.5.2. Interprétation géométrique

Dans cette section, nous allons donner des conditions suffisantes géométriques que doit satisfaire un système dynamique de co-dimension 2 pour qu'il soit transformé dans les formes indiquées ci-dessus. Supposons tout d'abord que la distribution de la contrôlabilité suivante :

$$\Delta_1 = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_{n-2}, ad_{f_{g_1}}, ad_{f_{g_2}}\} \text{ est de dimension } n$$

$g_j \in \{g_1, g_2, \dots, g_{n-2}\}$ . Sans perte de généralité, nous prendrons les champs de vecteurs

$g_i = g_1, g_j, g_2$  pour plus de simplicité.

### Théorème

Si la distribution  $\bar{\Delta}_1 = \{g_1, g_2\} \subseteq \Delta_1$  est involutive, ainsi, le système dynamique (VI.29) peut être transformé en utilisant le changement de variable à la forme normale (VI.39).

**Preuve** : considérons la distribution non singulière  $\Delta_1$ . Si  $\bar{\Delta}_1 \subseteq \Delta_1$  est une distribution involutive de dimension deux, puis par le théorème de Frobinus [93] il existe  $m = n - 2$  fonctions d'état indépendantes  $y_i(x) = z_{i,1}$  pour  $1 \leq i \leq m$  de telle sorte que :

$$\bar{\Delta}_1 = \bigcap_{i=2}^{n-2} \text{Ker } dy_i \quad (\text{VI.49})$$

où  $\text{Ker } dy_i$  est le noyau de l'écart de la fonction. Mettons :

$$L_{\{g_k, f\}} y_k = 1 \text{ pour } k = 1, 2 \quad (\text{VI.50})$$

$$L_{g_k} y_k = 1 \text{ pour } 3 \leq k \leq m \quad (\text{VI.51})$$

Selon les conditions (VI.50) et (VI.51), une nouvelle variable de coordonné  $z$  peut être formée par l'ensemble de  $n$  variables :

$$(z_{k,1} = y_k, 3 \leq k \leq m), z_{1,2} = L_f z_{1,1} \text{ et } z_{2,2} = L_f z_{1,2}.$$

Maintenant un simple calcul nous donne la première forme normale 0-plate (VI.39). Considérons que la distribution contrôlable suivante est comme suit :

$$\Delta_2 = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_{n-2}, ad_f g_i, ad_f^k g_j\}.$$

Notons que  $g_j \in \{g_1, g_2, \dots, g_{n-2}\}$ . Sans perte de généralité, on utilise ici les champs de vecteurs  $g_i = g_j = g_1$  et  $k = 2$ .

Notons d'abord que la principale différence avec la forme normale ci-dessus est la nécessité d'avoir  $\beta_{j,1}^i$  pour  $(j = 1, \dots, n-2; m, i = 2, \dots, n-2)$ , et  $\alpha_{j,1}$  pour  $(j = 1, \dots, n-2)$  dans (VI.46) indépendantes de la variable  $z_{1,3}$ . Selon cette remarque, la référence [88] considère la proposition suivante :

**Proposition :**

Si la distribution  $\bar{\Delta}_2 = \{g_1, ad_f g_1\} \subseteq \Delta_2$  est involutive, et pour tout  $k$  on a  $[g_1, g_k] \in \text{span}\{g_1, ad_f g_1\}$ , puis le système dynamique (VI.1) peut être transformé à la forme normale (VI.46). (Pour la preuve de cette proposition voir [88])

### VI.5.3. Commande plate d'un bras manipulateur à couple électrique

Le but du contrôle de suivi pour ce robot est de concevoir une loi de commande  $u(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$  basée sur la forme normale 0-plate de co-dimension 2.

Considérons le même modèle dynamique du bras manipulateur à deux degrés de liberté à couple électrique explicité dans l'annexe (A.2) :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{VI.52})$$

De (VI.52), la première équation peut s'écrire sous forme :

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \quad (\text{VI.53})$$

où  $x^T = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  est un vecteur d'état,  $u_i$  est le couple d'entrée et  $f(x), g_1(x), g_2(x)$  sont des champs de vecteurs lisses.

avec

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{r1}(m_2 l_2^2) \\ -K_{r1}(m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_{r2}(m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2) \\ K_{r2}(m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 c_2 + (m_1 + m_2) l_1^2) \end{pmatrix}$$

Le crochet de Lie  $[g_1, g_2] = 0$ , ce qui signifie que  $\bar{\Delta}_1 = \{g_1, g_2\}$  est involutive.

Il existe deux fonctions  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  telles que :

$$dy_1(x) \cdot \bar{\Delta}_1 = 0 \quad (\text{VI.54})$$

$$dy_2(x) \cdot \bar{\Delta}_1 = 0 \quad (\text{VI.55})$$

De (VI.54), (VI.55) on peut conclure que  $\frac{\partial y_i}{\partial x_3} = 0$  et  $\frac{\partial y_i}{\partial x_4} = 0 \quad \forall x_1, x_2$ . Ensuite il suffit de mettre  $y_1(x)$  une fonction de  $x_1$  et  $y_2(x)$  une fonction quelconque en termes de  $x_2$ , nous prenons  $y_1 = x_1$  et  $y_2 = x_2$ . Ainsi, on peut poser  $z_{11} = x_1$  et  $z_{21} = x_2$ .

Le système est de co-dimension 2, la forme canonique (IV.39) peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_{1,1}^i(z) u_i \\ \dot{z}_{1,2} &= \alpha_{1,2}(z) + \beta_{1,2}^1 u_1 + \beta_{1,2}^2(z) u_2 + \dots + \beta_{1,2}^m(z) u_m \\ \dot{z}_{2,1} &= z_{2,2} + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_{2,1}^i(z) u_i \\ \dot{z}_{2,2} &= \alpha_{2,2}(z) + \beta_{2,2}^1(z) u_1 + \beta_{2,2}^2 u_2 + \dots + \beta_{2,2}^m(z) u_m \end{aligned} \tag{VI.56}$$

où :

$$\alpha_{1,2}(z) = \frac{1}{\det M} (M_4 (-C_1 \dot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2 - g_1) - M_2 (-C_3 \dot{q}_1 - C_4 \dot{q}_2 - g_2))$$

$$\alpha_{2,2}(z) = \frac{1}{\det M} (M_3 (-C_1 \dot{q}_1 - C_2 \dot{q}_2 - g_1) + M_1 (-C_3 \dot{q}_1 - C_4 \dot{q}_2 - g_2))$$

$$\beta_{1,2}^1 = -K_{r1} M_4, \quad \beta_{1,2}^2 = K_{r2} M_2, \quad \beta_{2,2}^1 = K_{r1} M_3 \text{ et } \beta_{2,2}^2 = -K_{r2} M_1.$$

où :

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 c_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$$

et  $\det M$  est le déterminant de la matrice d'inertie  $M(q)$ .

Considérons les sorties du système  $y_1 = z_{1,1}$ ,  $y_2 = z_{1,2}$  avec  $z_{1,1}$  et  $z_{1,2}$  sont les sorties plates du robot. Ainsi, nous pouvons trouver l'expression de  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de  $(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)$ .

Les secondes dérivées de  $y_1$  et  $y_2$  peuvent s'exprimer en terme des nouvelles entrées tels que  $v'_1 = \ddot{y}_1$ ,  $v'_2 = \ddot{y}_2$  :

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{d_1} + k_d (\dot{y}_{d_1} - \dot{y}_1) + k_p (y_{d_1} - y_1) \\ \ddot{y}_{d_2} + k_d (\dot{y}_{d_2} - \dot{y}_2) + k_p (y_{d_2} - y_2) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.57})$$

$k_d$ ,  $k_p$  sont des gains positifs et  $y_{d_i}$  est la trajectoire désirée.

Pour trouver l'expression de deux tensions d'entrées  $v_1$  et  $v_2$ , on exploite l'expression des couples  $u_1$  et  $u_2$  dans la deuxième équation de (VI.52).

Comme le robot utilisé possède des paramètres inconnus, une loi d'adaptation robuste est ajoutée à la loi de commande. Cette loi d'adaptation est décrite par l'équation (II.71), tel que :

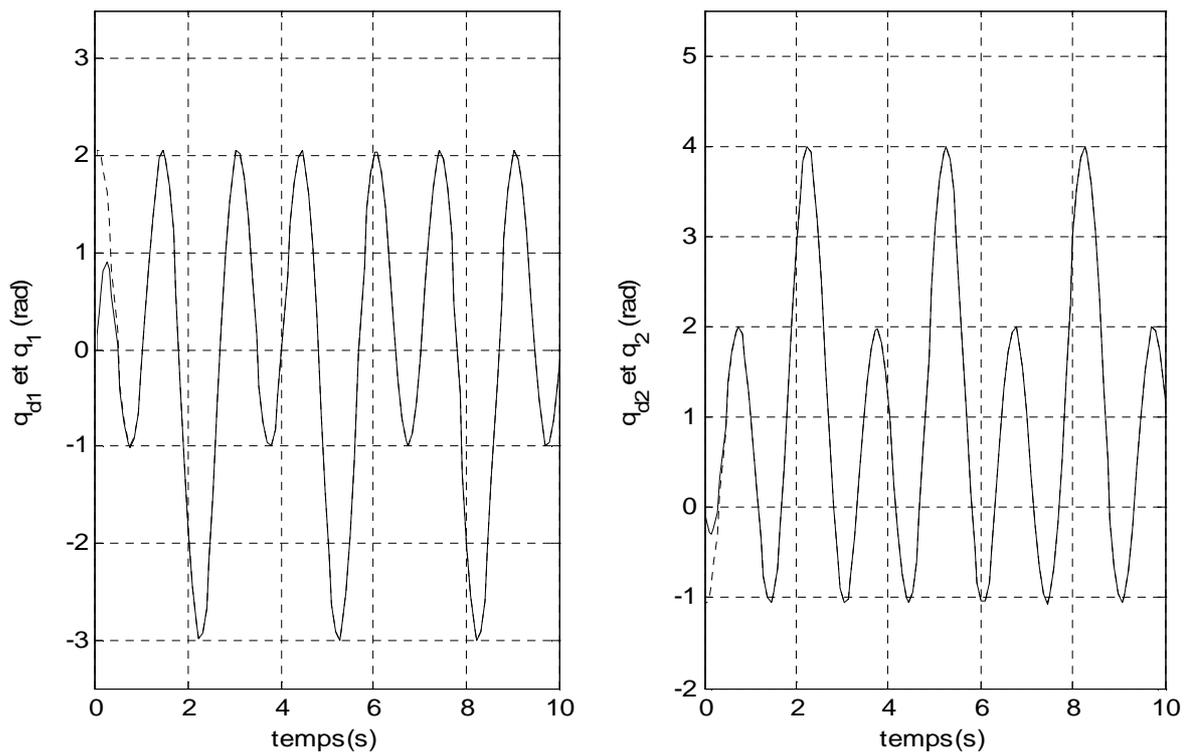
$$\dot{\hat{P}} = -\Gamma \hat{Y}^T \mathcal{E} \quad (\text{VI.58})$$

où  $\hat{P} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$  est le vecteur des paramètres à estimer.

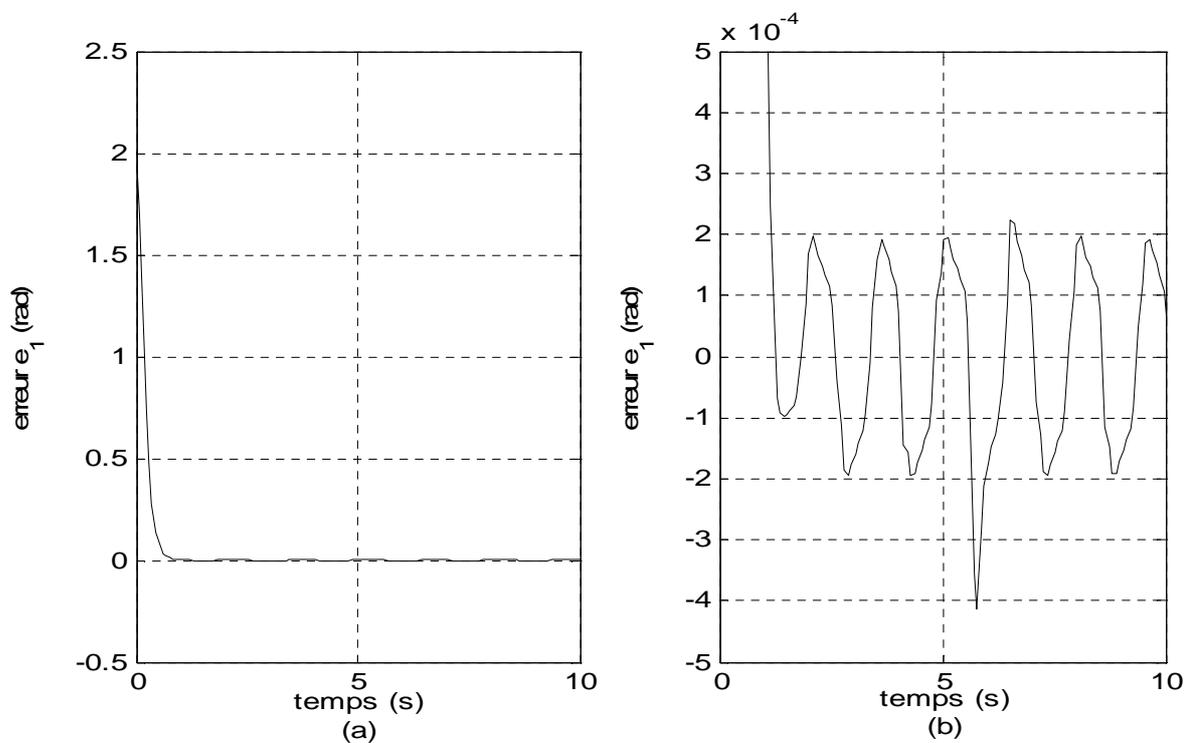
## Résultats de simulation

Les gains de commande utilisés dans la simulation sont :

$$k_p = 100 I \quad ; \quad k_d = 20 I \quad ; \quad \Lambda_1 = 170 \quad ; \quad \Lambda_2 = 100 \quad ; \quad \Gamma_1 = 63.2 \quad ; \quad \Gamma_2 = 108.6$$



Figures VI.2 : Suivi des trajectoires désirées pour les deux articulations



Figures VI.3 : (a) Erreur de suivi de la trajectoire désirée pour première articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)

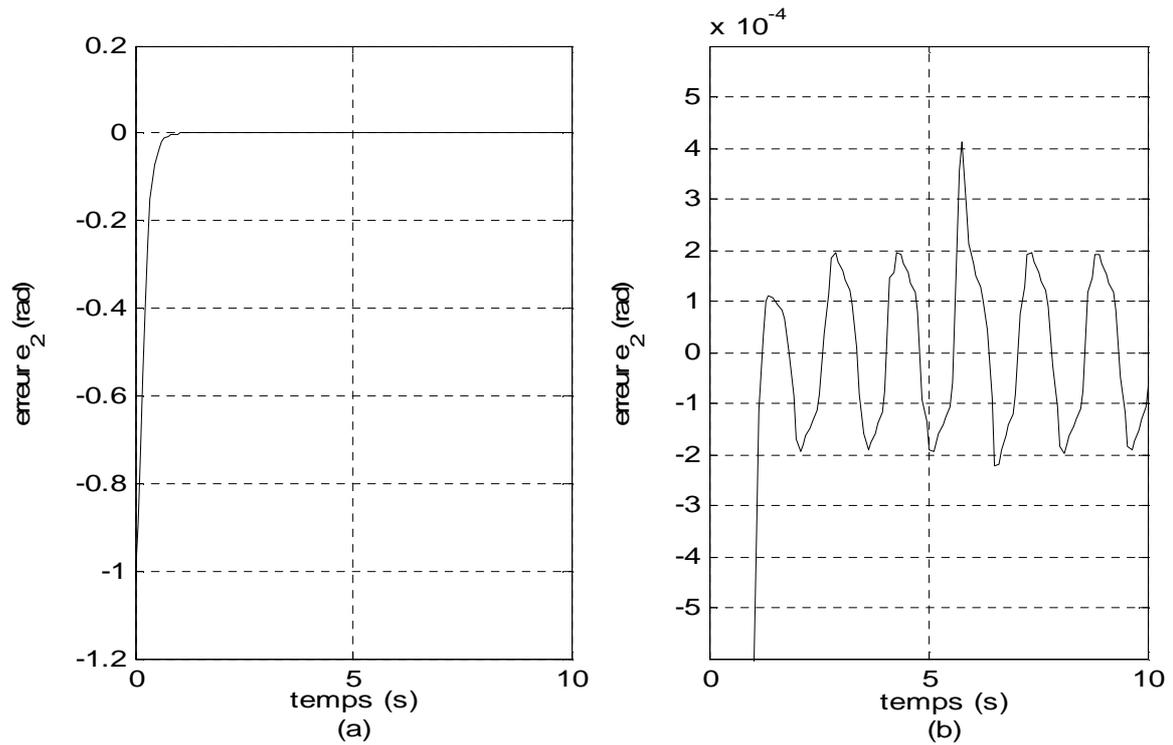
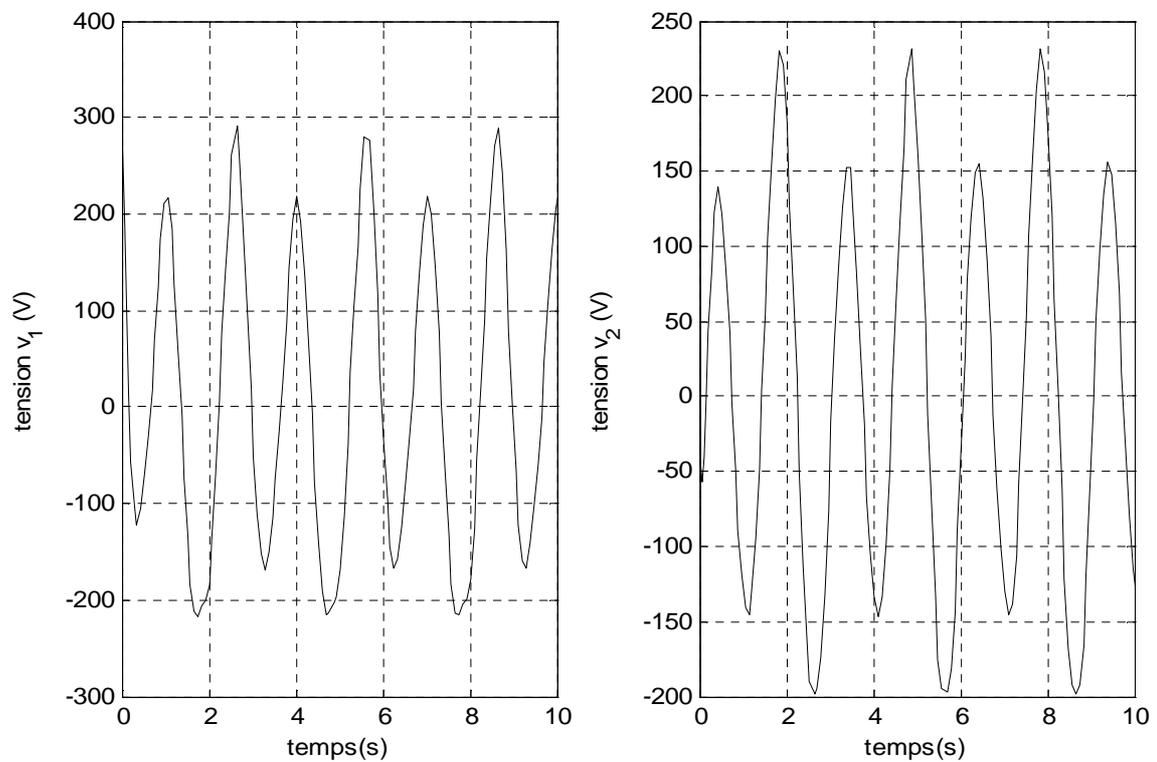
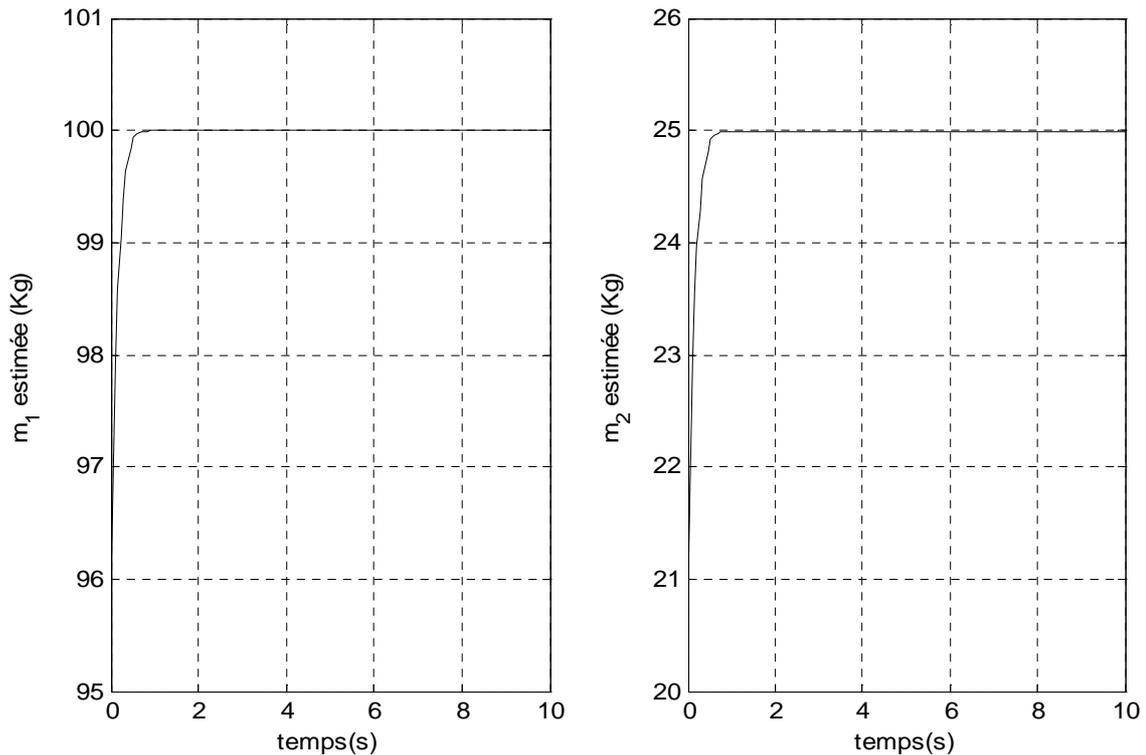


Figure VI.4 : (a) Résultat de l'erreur de suivi de la trajectoire désirée deuxième articulation  
(b : Zoom sur l'amplitude)



Figures VI.5 : Tensions d'entrée pour les deux articulations



Figures VI.6 : Paramètres estimés

Les résultats de simulation obtenus pour le suivi des trajectoires par cette approche de commande sont illustrés dans la figure (VI.2) où nous pouvons voir le suivi de trajectoires  $q_1$  et  $q_2$  a été convenablement réalisé. Tandis que l'erreur de suivi de la trajectoire désirée des deux articulations est représentée sur les figures (VI.3) et (VI.4). Il est évident qu'un bon suivi des trajectoires a été réalisé avec une erreur négligeable. La figure (VI.5) illustre que la tension d'entrée des deux articulations est acceptable. Aussi, ces résultats de simulation montrent qu'une très bonne estimation des paramètres inconnus a été obtenue comme le montre la figure (VI.6).

## VI.7 Conclusion

A travers ce dernier chapitre, nous avons présenté les concepts et les outils nécessaires pour parachever ce travail. Nous avons débuté cette présentation par un rappel sur les définitions et les caractéristiques associées aux systèmes plats dans le contexte algébrique. Ensuite nous avons brièvement présenté les différentes techniques de linéarisation des systèmes non linéaires par inversion dynamique. Par la suite, l'intérêt de la platitude pour résoudre le problème de planification et de poursuite des trajectoires a été

souligné. Dans une deuxième partie de ce chapitre, nous avons caractérisé le concept de formes normales pour une classe de systèmes non linéaires contrôlables. Ensuite, nous avons présenté une méthode générale permettant d'obtenir la forme normale 0-plate. Des conditions géométriques suffisantes sont exploitées afin de déterminer si un système est plat et de trouver les sorties plates. Quand les sorties plates sont difficiles à extraire, les formes normales 0-plates peuvent être utilisées pour aider cette tâche. Les résultats de simulation trouvés prouvent l'applicabilité de cette nouvelle méthodologie pour traiter une certaine classe de systèmes non linéaires et de montrent son efficacité dans le contrôle des systèmes robotiques.

## **CONCLUSION GENERALE**

Enfin, nous concluons cette thèse par un résumé des principales contributions de ce travail à la problématique de la commande robuste des systèmes non linéaires incertains et aussi tracer quelques perspectives pour des travaux de recherche ultérieurs.

L'objectif assigné à ce travail était d'élaborer une commande non linéaire dédiée à la commande de position en robotique et plus particulièrement celle d'un bras manipulateur à couple électrique. Une telle commande se base sur une approche analytique.

La première étape du travail a porté sur l'application d'une approche générale pour la conception d'une commande adaptative de position pour un système de robot en utilisant la technique de backstepping. L'avantage de cette commande est qu'elle impose les propriétés désirées de la stabilité en fixant la fonction initiale candidate de Lyapunov d'une manière récursive. L'adaptation des paramètres est effectuée par une méthode adaptative directe.

Pour résoudre le problème d'erreur de suivi du bras manipulateur à couple électrique en utilisant la commande d'intégrateur de backstepping nous avons introduit un observateur basé sur une commande adaptative dont la vitesse est non mesurée et les paramètres du robot sont inconnus. En utilisant la méthode de backstepping avec observateur, l'observateur adaptatif de vitesse peut être conçu indépendamment du contrôleur de rétroaction d'état, qui utilise l'atténuation des termes pour compenser la présence de l'erreur d'estimation dans la dynamique d'erreur de suivi. Le système en boucle fermée résultant est globalement asymptotiquement stable. Malheureusement, cette méthode présente l'inconvénient d'augmenter l'ordre des équations dynamiques du robot, parce qu'on ne peut pas exploiter les dynamiques du bras et du moteur séparément.

Comme troisième approche, nous nous sommes intéressés à une autre commande non linéaire des robots manipulateurs. Nous considérons une structure de commande nécessitant la connaissance exacte du modèle dynamique du robot, à savoir la commande

passive, et nous avons essayé d'améliorer les performances vis-à-vis des incertitudes de paramètres de robot. Une modification portant sur la loi de commande a été introduite en ajoutant une loi adaptative tout en garantissant la stabilité du robot en boucle fermée. Les résultats obtenus sont assez bons en termes d'erreur de suivi et d'estimation des paramètres inconnus.

Afin d'améliorer les performances vis-à-vis de l'erreur de suivi et l'estimation des paramètres inconnus nous avons proposé d'utiliser la combinaison de la commande backstepping et la passivité. L'avantage de cette technique de commande est qu'elle impose les propriétés de la stabilité désirée en fixant pour chaque sortie donnée, la fonction de stockage, l'entrée et la fonction de la stabilisation pour chaque étape récursive du système. Cette technique permet de préserver toutes les non linéarités du système. Les résultats obtenus pour le problème de la commande de position sont très encourageants. L'erreur de suivi de la trajectoire est acceptable. La commande d'énergie est relativement élevée au démarrage. Ce désavantage peut être cependant diminué par l'élimination de quelques non-linéarités dans le système de commande [80].

Enfin, la dernière partie de cette thèse concerne l'application de la méthodologie de platitude pour une classe des systèmes non linéaires. Cette approche a pour ambition de proposer un outil de synthèse et d'analyse de lois de commande robuste des systèmes non linéaires incertains en utilisant le concept de platitude. Dans la première partie de ce chapitre, nous avons défini les concepts et les outils de platitude différentielle et l'utilité de cette commande pour la planification et le suivi des trajectoires. Ensuite, nous avons présenté une méthode générale proposée par [88] permettant d'obtenir la forme normale 0-plate donnée. Des conditions géométriques suffisantes sont exploitées afin de déterminer si un système est plat et de trouver les sorties plates. Dans le cas où les sorties plates sont difficiles à extraire, les formes normales 0-plate peuvent être utilisées pour faciliter cette tâche. Notre contribution dans cette partie est d'appliquer cette méthode sur un robot à deux degrés de liberté à couple électrique en utilisant une loi d'adaptation pour estimer les paramètres inconnus. Les résultats de simulation trouvés prouvent l'applicabilité de cette nouvelle méthodologie et montrent son efficacité dans le contrôle de systèmes robotiques pour assurer le suivi de trajectoires.

Les objectifs préalablement fixés dans le cadre de ce travail ont été complètement atteints. Enfin, on peut dire que toutes les commandes utilisées sont robustes contre l'incertitude des paramètres, efficaces et fiables.

En ce qui concerne les développements ultérieurs envisageables, nous pouvons mentionner les possibilités suivantes :

- Commande de position des robots manipulateurs par réseaux de neurones et par la logique floue en s'appuyant sur les techniques présentées dans cette thèse.
- Trouver d'autres idées pour éliminer la possibilité d'instabilité du système commandé et pour réduire la tension d'entrée au démarrage
- Appliquer ces méthodes expérimentalement sur un robot manipulateur.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] A. LOTFAZAR, M. EGHTEHAD, "*Application of Passivity Based and Integrator Backstepping Control Methods on a 5 DOF Robot Manipulator Incorporating Actuator Dynamics*", Proc. of the International Conference on Control and Cybernetics, pp 147-154, New York, 2007.
- [2] F. KHELIFI et F. BOUAKRIF, "Amélioration de la Commande Passive des Robots Manipulateurs en tenant compte des Perturbations", Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp 123-128, September, 2008
- [3] M. FLIESS, J. LEVINE, Ph. MARTIN, et P. ROUCHON, "Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats", C.R.Acad.Sci. Paris, pp 619-624, 1992.
- [4] R. ROTHFUSS, J. RUDOLPH et M. ZEITZ, "Flatness based control of a chemical reactor model", European Control Conference, Rome, Italy, pp 637-642, September 1995.
- [5] F. ROTELLA, F. CARRILLO et M. AYADI, "Digital flatness-based robust controller applied to a thermal process", IEEE International Conference on Control Applications. Mexico, pp 936-941, 2001.
- [6] A. CHELOUAH, E. DELALEAU, P. MARTIN et P. ROUCHON, "Differential flatness and control of induction motors", Proc; of symposium on control, optimization and Supervision; Computational Engineering in System Application IMACS Multiconference, Lille, France, pp 80-85, 9-12 juillet 1996.
- [7] J. BOICHOT, E. DELALEAU, N. V. DIEP, J. LÉVINE et E. PARZY, "Modelling and control of a 2 d.O.F high precision positioning system", Proc ECC'99, Karlsruhe, Deutschland, [CD Rom], réf F1009-1, 1999.
- [8] PH. MARTIN. "Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats", Thèse Sci, Ecole des Mines de Paris, pp 02, 1992.

- 
- [9] J. LÉVINE, P. ROUCHON, G. YUAN, C. GREBOGI, B. HUNT, E. OTT, J. YORKE et E. KOSTELICH, "On the control of US navy cranes", Proc. of ECC'97 , Brussels, Belgium, N° 717, July 1997.
- [10] S. LAVALLE, " Planning Algorithms ", Cambridge University Press, ISBN 0521862051, 2006.
- [11] B. PADEN, A. MESS et M. FISHER, " Path planning using a jacobian-based free space generation algorithm ", Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Scottsdale, Arizona, pp 1732-1737, 1989.
- [12] J. LENGYEL, M. REICHERT, B. DONALD et D. GREENBERG, " Real-time robot motion planning using rasterizing computer graphics hardware ", Computer Graphics, Vol 24, No 4, pp 327-335, Août 1990.
- [13] K. KONDO, " Motion planning with six degrees of freedom by multistrategic bidirectional heuristic free-space enumeration ", Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA, pp 267-277, Avril 1991.
- [14] O. KHATIB, " Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots ", The International Journal of Robotics Research, Vol 5, No 1, pp 90-99, 1986.
- [15] B. FAVERJON et P. TOURANSSOUD, " A local based approach for path planning of manipulators with a high number of degrees of freedom ", Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh, pp 1152-1159, Mars 1987.
- [16] S. LAHOUAR, S. ZEGHLOUL et L. ROMDHANE, "Collision free path planning for Multi-DoF Manipulators ", Dans le livre " Industrial Robotics: Theory, Modeling and Control ", ISBN 3-86611-285-8, Pro Literatur Verlag, Décembre 2006.
- [17] S. LAHOUAR, S. ZEGHLOUL et L. ROMDHANE, " Real time path planning for multi-DOF robot manipulators in dynamic environment ", International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol 3, No 2, pp 125-132, Juin 2006.
- [18] S. LAHOUAR, S. ZEGHLOUL et L. ROMDHANE, " Path planning for manipulator robots in cluttered environments ", Wseas Transactions On Systems Issue 5, Vol 4, pp 555-560, Mai 2005.
- [19] L. KAVRAKI, P. SVESTKA, J-C. LATOMBE et M. OVERMARS, "Probabilistic roadmaps for path planning in high dimensional configuration spaces ", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 12, No 4, pp 566-580, Août 1996.

- 
- [20] S. YANG, "Biologically inspired robot behavior engineering ", Dans le livre "Biologically inspired neural network approaches to real-time collision free robot motion planning ", Springer Verlag, ISBN 3790815136, pp 143-172, 2003.
- [21] M. BRADY, J. HOLLERBACH, T. JOHNSON, et T. LOZANO-PEREZ, "Robot Motion, Planning and Control", The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1982.
- [22] W. KHALIL et E. DOMBRE, "Modélisation, identification et commande des robots", Hermes Science Publications, Paris, 1999.
- [23] G. SAHAR et J. M. HOLLERBACH, "Planning of minimum-time trajectories for robots arms", International Journal of Robotics Research, Vol 5, pp 90-100, 1986.
- [24] H. P. GEERING, L. GUZELLA, S. A. R. HEPNER, et C. H. ONDER, "Time-optimal motions of robots in assembly tasks", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-31, pp 512-518, 1986.
- [25] K. G. SHIN et N. D. McKay, "Selection of near-minimum time geometric paths for robotic manipulators", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-31, pp 501-511, 1986.
- [26] F. PFEIFFER et R. JOHANNI, "A concept for manipulator trajectory planning", IEEE J. of Robotics and Automation, RA-3, pp115-123, 1987.
- [27] J. E. BOBROW, "Optimal robot path planning using the minimum-time criterion", IEEE J. of Robotics and Automation, Vol 4, pp 443-450, 1988.
- [28] J. J. E. SLOTINE et H. S. YANG, "Improving the efficiency of time-optimal pathfollowing algorithms", IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol 5 , pp 118-124, 1989.
- [29] J. H. WON, B. W. CHOI, et M. J. CHUNG, "Smooth joint trajectory planning for a point to point task", IEEE Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems, Osaka, pp 1299-1303, 1991 .
- [30] A. PIAZZI et A. VISIOLI, "An interval algorithm for minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators", IEEE Conf. on Decision and Control, pp 1924-1927, 1997.
- [31] R. P. PAUL, "Manipulator cartesian path control", IEEE Trans, Syst, Man Cybern, Vol 9 , pp 702-711, 1979.
- [32] R. H. TAYLOR, "Planning and execution of straight line manipulator trajectories", IBM Joournal of Research and Development, Vol 23, pp 424-436, 1979.

- [33] C. S. LIN, P. R. CHANG, et J. Y. S. LUH, "Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28, pp 1066-1074, 1983.
- [34] Y. BESTAOUI, "On line motion generation with velocity and acceleration constraints", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol 5, pp 279-288, 1989.
- [35] S. A. BAZAZ et B. TONDU, "Optimal on-line robot trajectory generation in cartesian space", *SPIE Proc. Architectures, Networks and Intelligent Systems for Manufacturing Integration*, vol 3203, pp 2-10, 1997.
- [36] R. L. ANDERSSON, "Aggressive trajectory generator for a robot ping-pong player", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol 9, pp 15-20, 1989.
- [37] J. LLOYD et V. HAYWARD, "Trajectory generation for sensor-driven and timevarying tasks. *International Journal Robotics Research*", Vol 12 , pp380-393, 1993.
- [38] B. TONDU et H. EL-ZORKANY, "Identification of a trajectory generator model for the puma-560 robot", *Journal of Robotics Systems*, Vol 11, pp 77-90, 1994.
- [39] S. A. Bazaz et B. Tondu, " 3-cubic spline for on-line cartesian space trajectory planning of an industrial manipulator", *Dans Int. Workshop on Advanced Motion Control*, pp 493-498, Coimbra, 1998.
- [40] S. LIU, "An on-line reference-trajectory generator for smooth motion of impulsecontrolled industrial manipulators", *7th International Workshop on Advanced Motion Control*, pp 365-370, 2002.
- [41] S. MACFARLANE et E. CROFT, "Jerk-bounded manipulator trajectory planning: Design for real-time applications", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol 19, pp 42-52, 2003.
- [42] L. SCIAVICCO et B. SICILIANO," *Modeling and Control of Robot Manipulators*", Springer, 2000.
- [43] B. GORLA et M. RENAUD, "Modèles des Robots Manipulateurs application à leur commande". *Cepadues Editions*, 1984.
- [44] C. CANUDAS, B. SICILIANO, et G. BASTIN, "Theory of Robot Control", Springer, 1997.
- [45] D. E. WHITNEY, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses", *IEEE Trans. Man-Machine Syst.*, ",Vol 10 , pp 47-53 , 1969.

- [46] J. Y. S. LUH, M. W. WALKER, et R. P. PAUL, "Resolved-acceleration control of mechanical manipulator", S. IEEE Trans. Automatic Control, AC-Vol 25, 468-474, 1980.
- [47] C. H. WU et R. P. PAUL , "Resolved motion force control of robot manipulator", IEEE Trans. Syst., Man Cybern., pp 266-275, 1982.
- [48] M. J. Er, "Recent developments and futuristic trends in robot manipulator control", Asia-Pacific Workshop on Advances in Motion Control Proceedings, pp 106-111, 1993.
- [49] J. J. E. SLOTINE et W. LI, "Adaptive strategies in constrained manipulation", Proc IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, vol Raleigh, N.C., pp 595-601, 1987.
- [50] R. LOZANO et D. TAOUTAOU , "Commande adaptative et applications", Hermes Science Publications, Paris, 2001.
- [51] R. HEDJAR, R. TOUMI, P. BOUCHER, et D. DUMUR, "Feedback nonlinear predictive control of rigid link robot manipulators", Proc. of the American Control Conference, Anchorage ,pp 3594-3599, 2002.
- [52] J. J. E. SLOTINE, "Robust control of robot manipulators", The International Journal of Robotics Research, Vol 4, pp 49-64, 1985.
- [53] M. E. KAHN et B. E. ROTH, "The near-minimum-time control of open-loop articulated kinematic chains". Trans. ASME J. Dynamic, Systems, Meas., Cont., Vol 93, pp 164-172, 1971.
- [54] J. E. BOBROW, S. DUBOWSKY, et J. S. GIBSON, "Time optimal control of robotic manipulators along specified paths", The Int. J. of Robotics Research, Vol 4 , pp 3-17, 1985.
- [55] Y. CHEN et A. DESROCHERS , "Minimum-time control laws for robotic manipulators", Proc. of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Fl , pp 2494-2499,1989.
- [56] T. FLASH et N. HOGAN, "The coordination of arm movements : An experimentally confirmed mathematical model", The Journal of Neuroscience, Vol 5, pp 1688-1703, 1985.
- [57] K. J. KYRIAKOPOULOS et G. N. SARIDIS, " Minimum jerk path generation", Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 364-369, 1988.

- [58] K. SEKI et S. TADAKUMA , "Minimum jerk control of power assisting robot based on human arm behavior characteristic", International Conference on Systems, Man and Cybernetics, pp 722-721, 2004.
- [59] F. AMIRABDOLLAHIAN, R.LOUREIRO, et W. HARWIN, "Minimum jerk trajectory control for rehabilitation and haptic applications", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 3380-3385, May 2002.
- [60] O. EGELAND et E. LUNDE, "Trajectory generation for manipulators using linear quadratic optimal tracking", IEEE, pp 376-381, 1988.
- [61] B. J. MARTIN et J. E. BOBROW, "Minimum-effort motions for open-chain manipulators with task-dependant end-effector constraints", The International Journal of Robotics Research, Vol 18 , pp 213-224, 1999.
- [62] C. S. LIN, P. R. CHANG, et J. Y. S. LUH, "Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots", IEEE Transactions on Automatic Control, AC- 28, pp 1066-1074, 1983.
- [63] B. K. KIM et K. G. SHIN, "Minimum-time path planning for robot arms and their dynamics", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, SMC-15, pp 213-223, 1985.
- [64] K. G. Shin et N. D. McKay, "Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints", IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30, pp 531-541, 1985.
- [65] L. N. PAQUIN, "Application du Backstepping à une Colonne de Flottation", Mémoire pour l'obtention du grade de Maître des Sciences (M.Sc), Université de Laval, Faculté des études supérieures, Juillet 2000.
- [66] M. H. YU, L.D. SENEVIRATNE, S.W.E. EARLES, "Adaptive Control of Robot Manipulators", Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp 293-298, July 7-10, 1992.
- [67] D. NGANGA-KOUYA ; M. SAAD, L. LAMARCHE C. KHAIRALLAH., "Backstepping Adaptive Position Control for Robotic Manipulators", Proc. of the American Control Conference, vol 1, pp 636-640, 2001.
- [68] D. NGANGA-KOUYA ; M. SAAD and L. LAMARCHE ; "Backstepping Passivity Adaptive Position Control for Robotic Manipulators", Proc. of the American Control Conference, pp. 4607-4611, 2002.

- 
- [69] M. MOKHTARI, "Commande Adaptative des Systèmes Non-Linéaires : «Backstepping»", thèse de magister, Département d'électronique, Université de Batna, 2003.
- [70] F. CALUGI, Q. ROBERTSSON and R. JOHANSSON, "Output Feedback Adaptive Control of Robot Manipulators Using Observer Backstepping", Proc. of the 2002 IEEE/RSJ, Conference on intelligent robots and Systems, pp 2091-2096, 2002.
- [71] R. GUENTHER, L. HSU, "Variable Structure Adaptive Cascade Control of Rigid-Link Electrically-Driven Robot Manipulators", Proc. of the 32nd Conference on Decision and Control, pp 2137-2141, Beijing, December 1993.
- [72] A. LADER "Commande non linéaire", Editions Dunod, 2007.
- [73] Y. BAAZI, "Etude d'un Manipulateur à 3 Degrés de Liberté Application à la Fonction de Préhenseur", thèse de magister, Institut d'électronique, Université de Batna, 2000.
- [74] Y. TANG, M. A. ARTEAGA, "Adaptive Control of Robot Manipulators Based on Passivity", Proceedings of the 32nd Conference of decision and Control, pp 148-152, Beijing, December 1993.
- [75] A. LOTFAZAR, M. EGHTESAD and M. MOHSENI, "Integrator Backstepping Control of a 5Dof Robot Manipulator Incorporating Actuator Dynamics ", Proc of IEEE Conf on Control Applications, pp 1007-1012, London, 2003.
- [76] H. SIRA-RAMIREZ, S. K AGRAWAL, "Differentially Flat Systems", Marcel Dekker edition, New York, 2004.
- [77] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN et P. ROUCHON, "Flatness and defect of non-linear systems: introduction theory and example", Int.Journal of Control, Vol 61, pp 1327-1361, 1995.
- [78] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN, et P. ROUCHON, "Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund", C.R. Acad.Sci, Paris., pp 981-986, 1993.
- [79] M. FLIESS, J. LÉVINE, Ph. MARTIN, et P. ROUCHON, "Towards a new differential geometric setting in nonlinear control", In Proc.International.Geometric, Coll., Moscow, May 1993.

- 
- [80] E. ARANDA-BRICAIRE, C. H. MOOG et J.-B. POMET, "An Infinitesimal Brunovsky Form for Nonlinear Systems with Application to Dynamic Linearization", In: *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland, vol 32, pp 19-33, 1995.
- [81] B. JAKUBCZYK et W. RESPONDEK, "on linearization of control systems", *Bull. Acad. Pol. Sci, Ser. Math*, Vol 28, pp 517-522, 1980.
- [82] B. CHARLET, J. LÉVINE et R. MARINO, " On dynamic feedback linearization", *Systems and Control Letters*, Vol 13, pp. 143-151, 1989.
- [83] B. CHARLET, "Sur quelques problèmes de stabilisation robuste des systèmes non linéaires", Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1989.
- [84] L. R. HUNT, R. SU et G. MEYER. "Design for multi-input nonlinear systems Differential geometric control theory". R. Brockett, R. Mollman, H. Sussmann eds, pp 268-298, Birkhäuser, 1983.
- [85] L. R. HUNT, R. SU et G. MEYER, "Global transformations of nonlinear systems", *AC-28*(1), pp 24-31, 1983.
- [86] M. ZERAR, "Contribution à la caractérisation LPV d'une classe de systèmes non linéaires pour la Synthèse de lois de Poursuite Robuste : Application à un Système Spatial", Université Bordeaux I, N° 3150, 07 Avril, 2006.
- [87] J. LEVINE, "Analyse et commande des systèmes non linéaires", Centre Automatique et systèmes, Ecole des Mines de Paris, 35 rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, Mars 2004.
- [88] S. BOUOUDEN, D. BOUTAT et F. ABDESSEMED, "Two Flat Normal Forms For A Class of Nonlinear Dynamical Systems", 11th Int. Conf. Control, Automation, Robotics and Vision Singapore, IEEE, pp 1524-1529, 7-10th December, 2010.
- [89] B. JAKUBCZYK et W. RESPONDEK, " On linearization of control systems". *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math.*, Vol 28, pp 517-522, 1980.
- [90] L. R. HUNT, R. SU, et G. MEYER, "global transformations of nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol 28, pp 24-31, 1983.
- [91] B. CHARLET, J. LÉVINE, et R. MARINO, "On dynamic feedback linearization", *Systems Control Lett.*, Vol 13, pp 143-151, 1989.

- 
- [92] P. S. PEREIRA DA SILVA , "Flatness of nonlinear control systems: a Cartan-Kähler approach", In Proc, Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000), Perpignan, pp 1-10, 2000.
- [93] A. ISIDORI, "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- [94] E. CARTAN, "Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes", Bull. Soc. Math. France, 42:12 - 48,1914. Also in Œuvres Complètes, CNRS, Paris, part II, vol.2, pp.1133 -1168, 1984.
- [95] E. CARTAN, "Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations Différentielles", J.fur reine und angew, Math, 145:86 – 91, 1915. Also in Œuvres Complètes, CNRS, Paris, part II, vol.2, pp.1164 –1174, 1984.
- [96] W. M. SLUIS, "Absolute Equivalence and its Application to Control Theory", PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, 1992.
- [97] P. ROUCHON et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE. "Commandes non linéaires". Hermès Science Publication, 2003.
- [98] P. BRUNOVSKY, "A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems", A classification of linear controllable systems, Vol 3, pp 173-188, 1970.
- [99] I. S. KRASIL' SHCHIK, V. V. LYCHAGIN et A. M. VINOGRADOV, "Geometry of jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations", Gordon and Breach, New York, 1986.
- [100] V. V. ZHARINOV, "Geometrical Aspect of Partial Differential Equations", World Scientific, Singapore, 1992.
- [101] J. LÉVINE, "On flatness necessary and sufficient conditions", 6th IFAC Symposium, Nolcos, Stuttgart, Germany, September 2004.
- [102] V. N. CHETVERIKOV, "New flatness conditions for control systems", In Proceedings of NOLCOS'01, St. Petersburg, pp 168-173, 2001.
- [103] PH. MARTIN et P. ROUCHON, "Systems without drift and flatness ", In Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications, Academy Verlag, Berlin, pp 347-348, 1994.
- [104] P. ROUCHON, "Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization", J.Math.Systems Estim.Control, pp 345-358, 1994.

- 
- [105] W. F. SHADWICK, "Absolute equivalence and dynamic feedback linearization", *Systems and Control Letters*, pp 35-39, 1990.
- [106] W. M. SLUIS, "A necessary condition for dynamic feedback linearization", *Systems Control Letters*, pp 277-283, 1993.
- [107] Ph. MARTIN et P. ROUCHON, "Any controllable driftless system with  $m$  inputs and  $m+2$  states is flat", *Proceeding of the 34th IEEE Conference on decision and Control*, pp 2886-2891, 1995.
- [108] Ph. MARTIN and P. ROUCHON, "Any controllable driftless system with 3 inputs and 5 states is flat", *Systems Control Letters* 25, pp 167-173, 1995.
- [109] E. ARANDA-BRICAIRE, C. H. MOOG et J.-B. POMMET, "A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization", *IEEE Trans. Automat. Contr*, pp 127-132, 1995.
- [110] J. LÉVINE et D. V. NGUYEN, "Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices", *Systems and Control Letters*, pp 69-75, 2003.
- [111] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon, "Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund". *C.R. Acad.Sci. Paris*, pp 981-986, 1993.
- [112] T. KAILATH, "Linear Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [113] M. M. BAYOUMI, "Adaptive Control of Robots With Rigid Links: A Status Report", *Automatica*, Vol. 2, pp 232-236, 1993.
- [114] I. BAR-KANA "On passivity and simple adaptive control of nonlinear manipulators", *Proc. International Conference on Control and Cybernetics*, Paris, pp 754-757, 1990.
- [115] C. VIBET, "Robots Principes et Contrôle", Editions Ellipses, 1988.
- [116] T. KAILATH, "Linear Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [117] I. L. V. AKEN et H. V. BRUSSEL, "On-line robot trajectory control in joint coordinates by means of imposed accélération profiles", *Robotica*, Vol 6, pp 185-195, 1988.
- [118] R. VOLPE, "Task space velocity blending for real-time trajectory generation", *IEEE Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation*, Atlanta , 1993.

- 
- [119] B. TONDU et S. A. BAZAZ, "The three-cubic method : An optimal online robotjoint trajectory generator under velocity", accélération and wandering constraints. *Journal of RoboticsSystems*, Vol 18(9), pp 893-901, 1999.
- [120] S. QUINLAN et O. KHATIB, "Elastic bands: connecting path planning and control ", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993.
- [121] C. HELGUERA, " Contribution à la résolution du problème de minima locaux dans une méthode de planification de trajectoires sans collision pour robots manipulateurs", Thèse de l'université de Poitiers , Avril 2001.
- [122] T. SIMEON, J-P. LAUMOND et C. NISSOUX, " Visibility-based probalistic roadmaps for motion planning ", *Advanced Robotics Journal*, Vol 14, No 6, pp 477-494, 2000.
- [123] S. WILMARTH, N. AMATO, et P. STILLER, " Maprm: A probabilistic roadmap planner with sampling on the medial axis of the free space ", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, pp 1024-1031, Mai 1999.
- [124] R. BOHLIN et L. KAVRAKI, " Path planning using lazy prm ", *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, pp 521-528, Avril 2000.
- [125] G. A. PRATT et M. M.WILLIAMSON, "Series elastic actuators" , *Proc.Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, vol 1, pp 399-406, 1995.
- [126] M. ZINN, O. KHATIB, B. ROTH, et J. K. SALISBURY, "Toward a human-centered intrinsically-safe robotic manipulateur", *Second IARP-IEEE/RAS Joint Workshop on technical challenges for dependable robots in human environments*, LAAS-CNRS, Toulouse, France, 2002.
- [127] W. KHALIL, "Commande des robots manipulateurs", *Hermes Science Lavoisier*, 2002.
- [128] A. ALBU-SCHÄFFER, S. HADDADIN, C. OTT, A. STEMMER, T. WIMBÖCK, et G.HIRZINGER, "The DLR lightweight robot design and control concepts for robots in humanenvironments", *Industrial Robot : An International Journal*, Vol 34, pp 376-385, 2007 .
- [129] A. De LUCA, A. ALBU-SCHÄFFER, S. HADDADIN, et G. HIRZINGER , " Collision detection and safe reaction with the DLR-III lightweight manipulator arm", 2006.

- 
- [130] K. G. SHIN et N. D. MCKAY, "Selection of near-minimum time geometric paths for robotic manipulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31, pp 501-511, 1986.
- [131] O. BROCK et O. KHATIB (1997), " Elastic strip: Real-time path modification for mobile manipulation", *The eight International Symposium of Robotics Research*, Hayama, Japan, 1997.
- [132] H. OZAKI et C. J. LIN, "Optimal b-spline joint trajectory generation for collision free movements of a manipulator under dynamic constraints", *IEEE Proc. Int. Conf. On Robotics and Automation*, Minneapolis, pp 3592-3597, 1996.
- [133] N. AZOUI, L. SAIDI, M. MOKHTARI and S. BENACER, "Combinaison de la Commande Backstepping et la Passivité pour un Robot Manipulateur à Couple Electrique", *2nd International Conference On Electronics Systems*, Batna, Algeria, pp. 191-195, CISE'09, 25-26, 2009.
- [134] S. FLEURY, P. SOUERES, J. P. LAUMOND, et R. CHATILA , " Primitives for smoothing mobile robot trajectories", *IEEE. Trans. on Robotics and Automation*, Vol 11(3) , pp 41-448, 1995.
- [135] N. AZOUI, L. SAIDI, "Passivity Based Adaptive Control of Robotic Manipulators Electrically Controlled", *International journal of Advanced Science and Technology*, Vol.34, pp. 45-53, 2011.
- [136] F. LAMIRAUX et J. P. LAUMOND, "From paths to trajectories for multi-body mobile robots", *The fifth International Symposium on Experimental Robotics* , pp 301-309, 1997.
- [137] R. H. CASTAIN et R. P. PAUL, "An on-line dynamic trajectory generator", *The International Journal of Robotics Research*, Vol 3, pp 68–72, 1984.
- [138] S. CHAND et K. L. DOTY, "On-line polynomial trajectories for robot manipulators", *The Int. J. of Robotics Research*, Vol 4, 38-48, 1985.
- [139] S. E. THOMPSON et R. V. PATEL, "Formulation of joint trajectories for industrial robots using b-splines", *IEEE Trans. on Industrials Electronics*, IE-34, pp 192-199, 1987.
- [140] N. AZOUI, "Commande non linéaire d'un bras manipulateur", *Thèse Magister*, Département d'électronique, Université de Batna, Septembre 2009.
- [141] A. M. S. ZALZALA et A. S. MORRIS, "A distributed on-line trajectory generator for intelligent sensory-based manipulator", *Robotica*, Vol 9, 145-155, 1991.

- [142] Z. YANG et E. RED, "On-line cartesian trajectory control of mechanisms along complex curves", *Robotica*, Vol 15, 263-274, 1997.
- [143] J. ALEOTTI, S. CASELLI, et G. MECCHEROZZI, "Trajectory reconstruction with nurbs curves for robot programming by demonstration", *IEEE Proc. Int. Symp. on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, Finland, pp 73-78, 2005.
- [144] C. FROISSART et P. MECHLER, "On-line polynomial path planning in cartesian space for robot manipulators", *Robotica*, Vol 11, pp 245-251, 1993.
- [145] C. M. MÜLLER-KARGER, A. L. G. Mirena, et J. T. S. López, " Hyperbolic trajectories for pick-and-place operations to elude obstacles", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol 16, 294-300, 2000.

# ***ANNEXES***

## ANNEXE A

### A.1 Modèle dynamique d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté

On considère un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2DDL) présenté dans la figure ci-dessous. Son modèle dynamique peut être déterminé par l'utilisation de l'équation d'Euler-Lagrange [66] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{A.1})$$

Où  $q \in \mathbb{R}^n$  dénote le vecteur des déplacements généralisés dans des coordonnées d'articulation. Si  $q \in \mathbb{R}^n$  est différentiable, nous dénotons par  $\dot{q}$  sa dérivée par rapport au temps.  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice d'inertie symétrique définie positive.  $C(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de Coriolis et centrifuge.  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur de gravité.

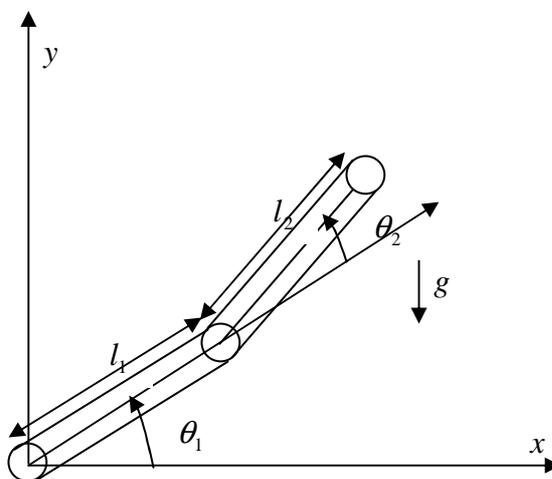


Figure A.1: Structure d'un robot manipulateur à deux degré de liberté

Ainsi :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ vecteur des variable articulaires généralisées.}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \text{ vecteur des couples généralisés}$$

Matrice d'inertie

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 c_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Coriolis et de centrifuge

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vecteur des forces de gravité

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{pmatrix}$$

Notons que  $m_i$  et  $l_i$  sont : les masses et les longueurs de segments du bras manipulateur respectivement,  $g$  dénote la gravité.

avec les notations  $c_2 = \cos q_2, c_{12} = \cos(q_1 + q_2), c_1 = \cos q_1, s_1 = \sin q_1, s_2 = \sin q_2, s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ .

Pour établir les simulations, les paramètres du modèle dynamique du robot ainsi que les trajectoires désirées sont :

$$m_1 = 15.91 \text{ kg}, m_2 = 13.36 \text{ kg}, l_1 = 0.432 \text{ m}, l_2 = 0.432 \text{ m},$$

$$q_1(0) = 0; q_2(0) = 0;$$

$$q_{d1}(t) = 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}; 0 \leq t \leq 3$$

$$q_{d2}(t) = 1 - 2 \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right) \text{ rad}; 0 \leq t \leq 3$$

## A.2 Modèle dynamique d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté à couple électrique

Considérons un bras manipulateur de deux-liaisons explicité dans l'annexe (A.1) dont le modèle dynamique du robot peut s'écrire :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{A.2})$$

Les couples  $\tau \in R^n$  généralisés des entrées articulaires sont donnés par :

$$\tau = K_r I \quad (\text{A.3})$$

L'expression (A.2) permet d'exprimer une propriété importante de la dynamique ; en effet la matrice  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  est symétrique. Selon Guenther and Hsu (1993) [67], nous pouvons avoir une nouvelle forme des équations dynamiques, en substituant l'expression du moment de torsion (A.3) dans l'équation générale (A.2) et en ajoutant une deuxième expression qui est l'équation du couple :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_r I \\ L\dot{I} + RI + K_m \dot{q} = v \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$L, R, K_m$  et  $K_r \in R^n$  sont des matrices diagonales définies positives qui représentent respectivement, l'inductance du déclencheur, la résistance du déclencheur, le coefficient constant du déclencheur et le coefficient constant caractérisant la conversion électromécanique entre le courant et le moment de torsion.  $I \in R^n$  est le courant d'armature et  $v \in R^n$  est la tension d'armature.

Les paramètres électriques du robot utilisés dans la simulation de ce travail sont données par :

$$K_{r1} = 25.05; K_{r2} = 21.71; K_{m1} = 25.05; K_{m2} = 24.71; L_1 = 0.00008; L_2 = 0.00008; R_1 = 1.5;$$

$$R_2 = 1.5.$$

Ainsi les paramètres dynamiques sont :

$$l_1 = 0.45 \text{ m}; l_2 = 0.2 \text{ m}; m_{01} = 110 \text{ kg}; m_{02} = 27 \text{ kg}.$$

## ANNEXE B

## Rappels sur la géométrie différentielle

## • Matrice jacobienne

Posons  $dh$  la matrice jacobienne de la fonction vectorielle de  $h(x(t))$  égale à :

$$dh = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_i(t)} & \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_n(t)} \\ \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_i(t)} & \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_n(t)} \\ \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_i(t)} & \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_n(t)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La dérivée de Lie du vecteur  $\tau(x(t))$  le long de  $f(x(t))$  est :

$$L_f \tau(x(t)) = \frac{\partial \tau(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \quad (\text{B.2})$$

avec les opération suivantes :

$$L_g L_f \tau(x(t)) = \frac{\partial L_f \tau(x(t))}{\partial x(t)} g(x(t)) \quad (\text{B.3})$$

$$L_f^k \tau(x(t)) = \frac{\partial L_f^{k-1} \tau(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \quad (\text{B.4})$$

$$[f(x(t)), g(x(t))] = L_f g(x(t)) - L_g f(x(t)) = \frac{\partial g(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) - \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} g(x(t)) \quad (\text{B.5})$$

### Définition B.1

Une distribution  $\Delta = \text{span}\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  sur une variété  $M$  de dimension  $m$  est involutive si :

$$\forall i, j \in n \quad [\tau_i, \tau_j] = \sum_{k \in n} f_{ij}^k(x) \tau_k \quad (\text{B.6})$$

où  $f_{ij}^k(x)$  représentent des fonctions  $C^\infty$  définies sur le voisinage considéré.

### Théorème B.1 (Théorème de Frobenius)

Une distribution  $\Delta$  sur une variété  $M$  de dimension  $m$  est complément intégrable  $\Leftrightarrow$  elle est involutive.

### Définition B.2

Un changement de coordonnées  $z(t) = \phi(x(t))$  est appelé difféomorphisme global sur  $\mathfrak{R}^n$  où  $\phi(x(t))$  s'écrit de la manière suivante :

$$\phi(x(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1(x(t)) \\ \phi_2(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \phi_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

et possède les propriétés suivantes :

- $\phi(x(t))$  est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\phi^{-1}(x(t))$  telle que  $\phi^{-1}(\phi(x(t))) = x(t)$ .
- $\phi(x(t))$  et  $\phi^{-1}(x(t))$  sont deux métrique lisses (smooth mapping en anglais), c'est-à-dire toutes leurs dérivées partielles sont continues.

## ANNEXE C

### Platitude dans le cadre de la géométrie différentielle

Dans ce contexte, la platitude peut être décrite en terme de notion d'équivalence absolue définie par E. Cartan [94], [95], [96]. Ainsi, deux systèmes seront équivalents s'il existe un isomorphisme de Lie-Bäcklund qui permet d'exprimer toute variable d'un système comme une fonction des variables d'un autre système et d'un nombre fini de leurs dérivées par rapport au temps. En d'autres termes, deux systèmes sont équivalents s'il existe un isomorphisme de Lie-Bäcklund qui transforme toute trajectoire au voisinage d'un point du premier système en une autre trajectoire au voisinage du point image du second système. Dans ce cadre, la platitude est la propriété d'un système à avoir une structure géométrique linéaire malgré sa représentation non linéaire naturelle. Nous allons rappeler en premier lieu la définition des systèmes équivalents [97] pour enchaîner sur la définition des systèmes plats.

#### C.1 Equivalence de Li-Bäcklund et platitude

##### a) Champ de vecteur en dimension infinie

###### **Définition C.1**

*Un système non commandé d'équation différentielle :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in X \subset \mathfrak{R}^n \tag{C.1}$$

est défini par une paire  $(X, f)$ , où  $X$  est un ouvert de  $\mathfrak{R}^n$  et  $f$  est un champ de vecteurs régulier sur  $X$ .

Une solution ou trajectoire de (C.1) est donnée par une application  $t \rightarrow x(t)$  telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\text{C.2})$$

Il est important pour la suite du raisonnement de décrire un système commandé sous forme d'un espace et d'un champ de vecteurs sur cet espace. Soit l'équation différentielle associée à un système commandé :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{C.3})$$

où  $f$  est régulière sur un ouvert  $X \times U \subset \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$ . Dans ce cas,  $f$  n'est pas un champ de vecteurs sur  $X$ , mais plutôt une collection infinie de champs de vecteurs sur  $X$ , paramétrée par  $u$ . Pour chaque  $u \in U$ , ce champ de vecteurs sur  $X$  ; est donné par :

$$x \rightarrow f_n(x) = f(x, u) \quad (\text{C.4})$$

Néanmoins, s'il est possible d'associer à (C. 3) une solution régulière, c'est-à-dire une application  $t \rightarrow (x(t), u(t))$  à valeur dans  $X \times U$  telle que l'on ait :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{C.5})$$

alors nous pouvons considérer une application infinie :

$$t \rightarrow \xi(t) = (x(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots) \quad (\text{C.6})$$

prenant ses valeurs dans  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$ .

Cette application vérifie :

$$\dot{\xi}(t) = (f(x(t), u(t)), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

et donc elle peut être interprétée comme une trajectoire sur un champ de vecteurs de dimension infinie ) tel que, sur  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$ ,

$$\begin{aligned} (x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots) &\rightarrow F(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots) \\ &= (f(x(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots)) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Rappelons qu' en dimension infinie, un champ de vecteurs  $w$  de classe  $C^\infty$  sur  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$  est alors donné par un opérateur différentiel du premier ordre, aussi appelé champ de Cartan, de la forme :

$$w = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^m w_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_j^{(i)}} \quad (\text{C.9})$$

dont chaque composante  $\tilde{w}_i, w_{i,j}$ , est une fonction  $C^\infty$  de  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$  dans  $\mathfrak{R}$ , c'est-à-dire une fonction qui ne dépend que d'un nombre fini arbitraire de coordonnées de  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$  et infiniment différentiable par rapport à chacune de ces variables.

Dans ce cas,  $F$  peut être considéré comme un champ de vecteurs et non plus une famille paramétrée de champs de vecteurs. Avec une telle construction, le système (C.3) est défini par un espace ;  $X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$  et d'un champ de vecteurs  $F$  sur cet espace.

Ainsi dans le cadre des variétés de jets infinis, un système dynamique régi par l'équation différentielle (C. 3) peut se définir de la façon suivante :

**Définition C.2**

Un système modélisé par (C.3) peut être défini par la paire  $(M, F)$  où  $F$  est un champ de vecteurs régulier de dimension infinie sur une variété  $M = X \times U \times R_\infty^m$ .

Ce formalisme est un cadre naturellement adéquat pour définir la platitude. Introduisons maintenant un type de système particulier, nécessaire à la définition de la platitude dans le cadre géométrique.

➤ **Système trivial****Définition C.3**

Un système trivial  $(\mathcal{X}_\infty^m, F_m)$ , de coordonnées  $(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots)$  et dont le champ de vecteurs, dit champ de vecteurs trivial noté  $F_m$  est donnée par :

$$F_m(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots) = (\dot{z}, \ddot{z}, \dots) \quad (\text{C.10})$$

décrit n'importe quel système composé de  $m$  chaîne indépendantes d'intégrateurs de longueurs arbitraires (i.e., forme normale de Branovsky des systèmes linéaires commandables [86,98]).

**Exemple C.1**

Considérons un système non linéaire, avec 4 états et 2 entrées de commandes, ayant 2 sorties plates  $z_1$  avec un nombre caractéristique  $\rho_1 = 3$  et  $z_2$  avec  $\rho_2 = 1$ . En écrivant :

$$z_1 = z_1^1, \dot{z}_1^1 = z_2^1, \dot{z}_2^1 = z_3^1, \dot{z}_3^1 = v_1 \quad (\text{C.11})$$

$$z_2 = z_1^2, \dot{z}_1^2 = v_2$$

ce système non linéaire plat peut s'écrire sous forme d'un système trivial, de 2 chaînes d'intégrateurs, représenté sur la figure C.1 et donné comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1^1 \\ \dot{z}_2^1 \\ \dot{z}_3^1 \\ \dot{z}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \\ z_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

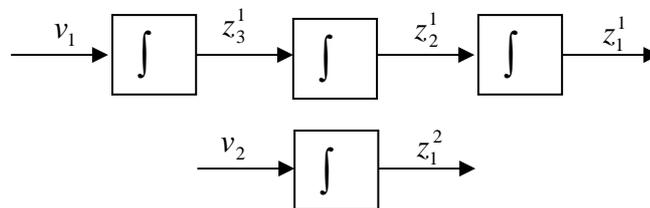


Figure C.1- Système trivial.

### ➤ **Système implicite**

Un système non linéaire donné par l'équation différentielle (B.3) peut être localement transformé, en utilisant le théorème des fonctions implicites disponible dans [100] par exemple, sous la forme implicite suivante :

$$F(x, \dot{x}) = 0 \quad (\text{C.13})$$

avec  $x$  appartenant à une variété  $X$  ; infiniment dérivable de dimension  $n$ , la matrice jacobienne  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$  de rang  $n - m$  (i.e, le système implicite est régulier) et où  $m$  est le nombre d'entrées de commande.

### **Définition C.4**

Un système implicite trivial se définit par triplet  $(\chi, \tau_\chi, F)$ , avec  $\chi$  est une variété de dimension infinie données par :

$$\mathcal{X} = X \times \mathfrak{R}_\infty^n = X \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \times \dots \quad (\text{C.14})$$

et dotée du champ de vecteurs trivial de Cartan  $\tau_\chi$  [99],[100] suivant :

$$\tau_\chi = \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq 0} x_i^{j+1} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}} \quad (\text{C.15})$$

Nous allons formaliser, dans le paragraphe suivant, la notion d'équivalence entre deux systèmes.

## b) Equivalence au sens de Lie-Backlund

### ➤ cas des systèmes explicites

Soient deux systèmes  $(M, F)$  et  $(N, G)$  et une application régulière  $\phi: M \rightarrow N$  telle que  $q \in N$  soit l'image par  $\phi$  du point  $p \in M$  et notons  $q = \phi(p)$ . Considérons une application  $t \rightarrow \xi(t)$  qui est une trajectoire de  $(M, F)$  dans un voisinage de  $p$ , c'est-à-dire :

$$\forall t, \quad \dot{\xi}(t) = F(\xi(t)) \quad (\text{C.16})$$

et considérons dans un voisinage du point  $q$ , l'application composée  $t \rightarrow \zeta(t) = \phi(\xi(t))$  qui satisfasse :

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi(t)) \cdot \dot{\xi}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi(t)) \cdot F(\xi(t)) \quad (\text{C.17})$$

De plus, si les champs de vecteurs  $F$  et  $G$  sont reliés par  $\phi$  en  $(p, q)$ , c'est-à-dire :

$$G(\phi(\xi)) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi) \cdot F(\xi) \quad (\text{C.18})$$

alors, pour tout  $\xi$  dans un voisinage de  $P$ , on a :

$$\dot{\xi}(t) = G(\phi(\xi(t))), \dot{\xi}(t) = G(\xi(t)) \quad (\text{C.19})$$

ce qui signifie que l'application  $t \rightarrow \xi(t) = \phi(\xi(t))$  est une trajectoire de  $(N, G)$ . De plus, si  $\psi$  est une application inverse régulière de  $\phi$  telle que  $G$  et  $F$  sont aussi reliés par  $\psi$  en  $(q, p)$  alors il existe une correspondance localement bijective entre les trajectoires des deux systèmes.

### **Définition C.5 [86]**

Soit  $\phi$  une application régulière bijective de  $(M, F)$  dans  $(N, G)$  au voisinage du couple de points  $(p, q)$  avec  $p \in M$  et  $q = \phi(p) \in N$ , dont l'inverse notée  $\psi$  est aussi supposé régulière. On dit que  $\phi$  est un isomorphisme de Lie-Backlund en  $(p, q)$  si, et seulement si, les champs de vecteurs  $F$  et  $G$  sont reliés par  $\phi$  en  $(p, q)$  et les champs  $G$  et  $F$  sont aussi reliés par  $\psi$  en  $(q, p)$ .

La définition qui suit donne une relation entre deux systèmes dynamiques équivalents.

### **Définition C.6 [86]**

Deux systèmes  $(M, F)$  dans  $(N, G)$  sont dits Lie-Backlund équivalent en  $(p, d) \in M \times N$  si et seulement si :

- il existe un isomorphisme de Lie-Backlund  $\phi: M \rightarrow N$  en  $(p, q)$  tel que  $q = \phi(p)$ .

- Et réciproquement, il existe une application inverse de classe  $C^\infty \psi : N \rightarrow M$  en  $(q, p)$  tel que  $p = \psi(q)$ .

Cette notion d'équivalence s'applique également au cas des systèmes implicites.

### ➤ cas des systèmes implicites

Considérons deux systèmes implicites réguliers  $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}, F)$  et  $(\eta, \tau_{\eta}, G)$  avec  $\mathcal{X} = X \times \mathfrak{R}_\infty^n$ ,  $\dim X = n$ ,  $\text{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = n - m$ ,  $\eta = Y \times \mathfrak{R}_\infty^\lambda$ ,  $\dim Y = \lambda$  et  $\text{rang}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{Y}}\right) = \lambda - \gamma$ . Notons  $\mathcal{X}_0 = \{\bar{x} \in \mathcal{X} \mid L_{\tau_{\mathcal{X}}}^k F(\bar{x}) = 0, \forall k \geq 0\}$  et  $\eta_0 = \{\bar{y} \in \eta \mid L_{\tau_{\eta}}^k G(\bar{y}) = 0, \forall k \geq 0\}$ , où  $L_{\tau_{\eta}}^k G(\bar{y})$  représente la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de Lie de  $G(\bar{y})$  le long du champ trivial  $\tau_{\eta}$  donné par :

$$\tau_{\eta} = \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j \geq 0} y_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}} \quad (\text{C.20})$$

### Définition C.7 [86]

Deux systèmes  $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}, F)$  et  $(\eta, \tau_{\eta}, G)$  sont Lie-Backlund équivalents en  $(x_0, y_0) \in \mathcal{X}_0 \times \eta_0$  si, et seulement si :

- il existe des voisinages  $(\mathcal{X}'_0)$  et  $(\eta'_0)$  de  $x_0$  dans  $\mathcal{X}_0$  et de  $y_0$  dans  $\eta_0$  respectivement et une application  $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots) \in C^\infty(\eta'_0; \mathcal{X}'_0)$  tels que  $\bar{x}_0 = \phi(\bar{y}_0)$  et les champs triviaux de Cartan sont reliés par  $\phi_* \tau_{\eta} = \tau_{\mathcal{X}}$  ;
- il existe une application inverse  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots) \in C^\infty(\eta'_0; \mathcal{X}'_0)$  tel que  $\psi(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$  et  $\phi_* \tau_{\mathcal{X}} = \tau_{\eta}$ .

A partir de la définition de la Lie-Bäcklund équivalence, on peut alors caractériser la platitude dans le cadre géométrique.

➤ **Platitude différentielle**

**Définition C.8 [97]**

Un système  $(M, F)$  est dit plat autour d'un point  $p$  si, il est équivalent à un système trivial au voisinage de ce point  $p$

**Définition C.9 [101]**

Un système implicite  $(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}}, F)$  à  $m$  entrées est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{R}_{\infty}^m$  si, et seulement si, il est Lie-Backlund équivalent en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  à un système implicite trivial  $(\mathcal{R}_{\infty}^m, \tau_m, 0)$ , où  $\tau_m$  est champ de vecteur trivial sur  $\mathcal{R}_{\infty}^m$  muni des coordonnées  $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$  :

$$\tau_m = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^m y_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}} \quad (\text{C.21})$$

Le vecteur  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  est appelé vecteur des sorties plates.

Ayant maintenant défini les systèmes plats dans le cadre géométrique, nous allons nous intéresser dans le paragraphe suivant à quelques critères qui peuvent servir à caractériser de tels systèmes. Il ne s'agit pas de faire une liste exhaustive des critères existants, mais de présenter les résultats les plus importants.

## C.2 Critères de platitude

La caractérisation des systèmes plats a fait l'objet d'importants travaux permettant de conclure sur la platitude (ou plutôt sur la non-platitude) des systèmes non linéaires [102], [103], [104], [105], [106]. Une part importante des critères a été établie pour des classes particulières de systèmes non linéaires [82, 81, 107, 108]. Dans cette section nous allons nous intéresser à deux critères remarquables : le premier critère est donné dans le

cadre géométrique et concerne une condition nécessaire de platitude [104] et le second critère utilise un formalisme géométrique pour donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) de platitude sous forme algébrique [101].

### a) Condition nécessaire de platitude

Le critère établissant une condition nécessaire de platitude a été proposé par P. Rouchon [104]. Il s'agit d' un critère de non-platitude, de nature géométrique, appelé aussi critère de la variété réglée qui s'exprime sous différentes formes [77, 106] et qui peut se résumer sous le théorème suivant.

#### **Théorème C.1**

*Supposons que le système donné par l'équation (B.3) soit plat. Alors, la projection sur le  $p$ -espace de la sous-variété d'équation  $p = f(x, u)$  dans le  $(p, u)$ -espace, ou  $x$  est considéré comme paramètre, est une sous variété réglée pour tout  $x$ .*

En effet, ce critère signifie que l'élimination de  $u$  des  $n = \dim(x)$  équations scalaires  $\dot{x} = f(x, u)$  conduit à un système sous-déterminé implicite  $F(x, \dot{x}) = 0$  admettant la propriété suivante : pour tout  $(x, p) \in \mathfrak{R}^{2n}$  tels que  $F(x, p) = 0$ , il existe une direction  $d \in \mathfrak{R}^n, d \neq 0$  telle que :

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R}, F(x, p + \lambda d) = 0 \quad (\text{C.22})$$

$F(x, p)$  est donc « réglée » puisqu' elle contient la droite passant par  $p$  de direction  $d$ . Il est à noter qu'un système qui ne vérifie pas cette propriété, est par conséquent non plat.

**Remarque-** *La condition nécessaire du théorème C.1 est toujours satisfaite pour des systèmes affines en la commande (voir [97]).*

## b) Condition nécessaire et suffisante de platitude

J. Lévine a introduit récemment dans [101] une condition nécessaire et suffisante de platitude, qui à la différence d'autres CNS ne dépend pas du bouclage endogène nécessaire généralement dans le cas multi-entrées. En effet, ce critère propose une caractérisation de la platitude des systèmes non linéaires sous la forme implicite. Cette approche montre un certain parallélisme avec les résultats présentés dans [80, 109, 102] et peut être vue comme une extension aux cas des systèmes non linéaires de la démarche définie dans le cadre linéaire dans [110].

### **Théorème C.2 [101]**

Un système implicite  $(\chi, \tau_\chi, F)$  est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \chi_0 \times \mathfrak{R}_\infty^m$  si, et seulement si, il existe une application (difféomorphisme)  $\phi$  inversible de  $\mathfrak{R}_\infty^m$  vers  $\chi_0$ , de classe  $C^\infty$ , satisfaisant  $\phi(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$ , tel que l'image réciproque de  $dF$  par  $\phi$  vérifie :

$$\phi^* dF = d(F \circ \phi) = 0 \quad (\text{C.23})$$

où  $(F \circ \phi) = F(\phi(\bar{y}))$  et  $dF$  représente la forme différentielle exacte de  $F$  qui s'écrit sous la forme :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} d\dot{x} \quad (\text{C.24})$$

Dans le but d'utiliser les propriétés algébriques des modules basées sur l'anneau principal idéal des polynômes et des matrices polynomiales, les matrices suivantes ont été définies [101] :

$$P(\phi_0) = \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \phi_0}{\partial y^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} = \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dt} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \ddot{y}} \frac{d^2}{dt^2} + \dots \quad (\text{C.25})$$

ainsi

$$P(F) = \sum_{j \geq 0} \frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \quad (\text{C.26})$$

car  $F(x, \dot{x}) = 0$  donc  $\forall > 1$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} = 0$ .

avec  $P(F)$  et  $P(\varphi_0)$  sont respectivement de dimension  $(n-m) \times n$  et  $n \times m$  L' équation (C.23) devient :

$$\phi^* dF \Big|_{\bar{y}} = P(F) \Big|_{\varphi(\bar{y})} P(\varphi_0) \Big|_{\bar{y}} dy = 0 \quad (\text{C.27})$$

ce qui est équivalent à écrire :

$$\phi^* dF \Big|_{\varphi(\bar{x})} = P(F) \Big|_{\bar{x}} P(\varphi_0) \Big|_{\varphi(\bar{x})} dx = 0 \quad (\text{C.28})$$

Les éléments de ces matrices sont des polynômes de l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dt}$  avec des coefficients méromorphes de  $\chi$  dans  $\mathfrak{R}$ . Soit  $k$  l'anneau des fonctions méromorphes de  $\chi$  dans  $\mathfrak{R}$ , on note alors  $k \left[ \frac{d}{dt} \right]$  l'anneau principal idéal des polynômes de  $\frac{d}{dt}$  à coefficients dans  $k$  et  $M_{n,m} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  le module des matrices de taille  $n \times m$  sur  $k \left[ \frac{d}{dt} \right]$ .

Les matrices de  $M_{n,m} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  admettent une notion de diagonalisation, appelée de Smith [83].

Plus précisément, si  $P(F) \in M_{n-m,n} \left[ \frac{d}{dt} \right]$ , il existe des matrices unimodulaires

$U \in U_{n-m} \left[ \frac{d}{dt} \right]$ ,  $V \in U_n \left[ \frac{d}{dt} \right]$  et une matrice diagonale  $\Delta \in M_{n-m,n-m} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  dont les éléments diagonaux  $d_{i,j} \in k \left[ \frac{d}{dt} \right]$ . Vérifient  $d_{i,i}$  divise  $d_{i,j}$ , pour tout  $0 \leq i \leq j \leq n-m$ , telles que :

$$VP(F)U = (\Delta, 0_{n-m,m}) \quad (\text{C.29})$$

Remarquons que cette décomposition de Smith n'est pas unique, seule la matrice  $\Delta$  est définie de manière unique.

**Définition C.10 [86]**

Une matrice  $M \in M_{p,q} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  est dite hyper-régulière si, et seulement si, sa décomposition de Smith donne soit une matrice de la forme  $(I_p | 0_{p,q-p})$  si  $p < q$ , soit  $I_p$  si  $p = q$  et soit  $\begin{pmatrix} I_q \\ 0_{p-q,q} \end{pmatrix}$  si  $p > q$ .

**Théorème C.3 [111]**

On suppose que  $P(F)$  est hyper-régulière dans un voisinage du point  $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ , c'est-à-dire il existe  $U$  et  $V$  (non unique) telles que :

$$VP(F)U = (I_{n-m}, 0_{n-m,m}) \quad (\text{C.30})$$

avec  $U \in D\text{-Smith}(P(F))$  et  $V \in G\text{-Smith}(P(F))$  sont respectivement des matrices unimodulaires de la décomposition à droite et à gauche de Smith de  $P(F)$ .

1- tout solution  $\Theta$  hyper-régulière de taille  $n \times m$   $\left( \Theta \in M_{n,m} \left[ \frac{d}{dt} \right] \right)$  de l'équation :

$$P(F).\Theta = 0 \quad (\text{C.31})$$

Est un ensemble non vide donné par :

$$\Theta = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix} W \quad (\text{C.32})$$

avec  $W \in U_m \left[ \frac{d}{dt} \right]$  matrice unimodulaire arbitraire.

2- Pour toute matrice  $Q \in g\text{-smith}(\hat{U})$  de taille  $n \times n$ , avec  $\hat{U} = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix}$ , il existe

une matrice  $Z \in U_m \left[ \frac{d}{dt} \right]$  telle que :

$$Q \cdot \Theta = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z \quad (\text{C.33})$$

3- Enfin, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (B.3) soit plat en

$\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0$  et que le  $k \left[ \frac{d}{dt} \right]$ -idéal  $\Omega$  engendré par les 1-formes (forme différentielle de

degré 1 [81])  $\omega_1, \dots, \omega_m$  avec  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)^T = (I_m, 0_{m,n-m}) Q dx$ , soit fortement fermé

(c'est-à-dire tel qu'il existe une matrice  $M \in U_m \left[ \frac{d}{dt} \right]$  vérifiant  $d(M(\omega)) = 0$ ) dans un

voisinage de  $\bar{x}_0$  de  $\mathcal{X}_0$ . Une sortie plate est donnée par  $x = \Theta \left( \frac{d}{dt} \right) y$ .

**Remarque-** La sous-matrice  $\hat{Q} = (0_{n-m,m}, I_{n-m}) Q$  est équivalente à  $P(F)$ , c'est-à-dire

$\exists L \in U_{n-m} \left[ \frac{d}{dt} \right]$  tel que  $P(F) = L \hat{Q}$ . En effet :

$$\hat{Q} \cdot \Theta + (0_{n-m,m}, I_{n-m}) Q \cdot \Theta = (0_{n-m,m}, I_{n-m}) \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z = 0 \cdot Z = 0 \quad (\text{C.34})$$

Ce résultat permet de conclure sur la platitude d'un système non linéaire. Il donne un critère d'existence des sorties plates auquel on peut associer un jeu d'équations aux dérivées partielles (EDP), vérifié par les sorties plates. La construction et le choix des sorties plates constituent un problème ouvert dépendant de la résolution des EDP. De

plus des perspectives intéressantes pourraient être l'utilisation conjointe du jeu des EDP et d'un critère de sensibilité sur les sorties plates vis-à-vis de variations paramétriques, afin d'obtenir des sorties plates les plus robustes possibles.

## ANNEXE D

**Corollaire D.1**

*Tout système plat est linéarisable par bouclage dynamique endogène. Inversement, tout système linéarisable par bouclage dynamique endogène est plat.*

*En outre, si le système admet une représentation d'état de dimension  $n$  à  $m$  entrée, il existe des entiers  $r_1, \dots, r_m$  avec  $\sum_{i=1}^m r_i \geq n$  tels que  $x$  et  $u$  soient donnés par*

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m)}) \\ u &= \varphi_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1+1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m+1)}) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

*Et tels que le système bouclé soit difféomorphe au système linéaire commandable sous forme canonique*

$$\begin{aligned} y_1^{r_1+1} &= v_1 \\ &\vdots \\ y_m^{r_m+1} &= v_m \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

## Résumé

L'objectif assigné à ce travail est d'élaborer des stratégies de commandes avancées en vue d'assurer le suivi de trajectoires pour les systèmes non linéaires. Différentes techniques ont été présentées. Chacune d'elles doit assurer les critères de stabilité et de robustesse. Le premier chapitre est dédié à l'état de l'art sur le problème de planification et de poursuite de trajectoire. Dans le chapitre suivant, nous avons présenté une approche générale pour la conception d'une commande adaptative de position basée sur la technique backstepping. Cette dernière technique a été ensuite associée à un observateur en vue de minimiser l'erreur de poursuite. Ce point a fait l'objet du troisième chapitre. En vue d'obtenir des performances meilleures de poursuite des trajectoires tout en exploitant l'énergie globale du système, le quatrième chapitre est consacré à la commande adaptative passive. Dans le but de réduire la possibilité d'instabilité du système non linéaire une combinaison de la commande passive et celle du backstepping a été proposée dans le cinquième chapitre. Pour une classe de systèmes non linéaires, une commande plate a été appliquée dans le dernier chapitre et a donné des performances excellentes. Ce travail se termine par une conclusion générale présentant les différentes contributions de cette thèse. Aussi, quelques perspectives ont également été proposées comme continuation de ce travail.

### ملخص:

تهدف هذه الأطروحة إلى إنشاء استراتيجيات تحكم متطورة لضمان تتبع مسارات لأنظمة غير خطية وقد عُرضت تقنيات مختلفة ، حيث يجب على كل واحدة منها أن تضمن معايير الاستقرار والمتانة. يعرض الفصل الأول مختلف الأعمال المعمول بها حالياً في حل مشكلة التخطيط وتتبع المسارات. في الفصل التالي، قدمنا النهج العام لتصميم التحكم على التكيف على أساس تقنية backstepping. ثم قمنا بربط هذه التقنية الأخيرة مع مراقب للتقليل من خطأ التتبع. كانت هذه النقطة موضوع الفصل الثالث. و من أجل الحصول على أفضل أداء لتتبع المسارات مع الاستفادة من الطاقة الكلية للنظام، حُصص الفصل الرابع لدراسة التحكم المتكيف المشترك مع تقنية الـ Passivity. و من أجل الحد من إمكانية عدم استقرار النظام الغير خطي قمنا بمزج تقنيتي تحكم الـ Passivity و الـ backstepping وقد بينا ذلك في الفصل الخامس. في الفصل الأخير قمنا بتطبيق التحكم Commande Plate لفئة من الأنظمة غير الخطية، وقد تحصلنا على أداء ممتاز. وفي الأخير ننهي هذا العمل بعرض مختلف المساهمات المقدمة في هذه الأطروحة، كما تم اقتراح بعض آفاق استمرار لهذا العمل.

### Abstract:

The objective set for this work is to develop advanced control strategies to ensure trajectory tracking for nonlinear systems. Various techniques have been presented. They must ensure stability and robustness criterion. The first chapter is dedicated to the state of the art on the problem of planning and trajectory tracking. In the next chapter, we presented a general approach for the design of an adaptive position control based on the backstepping technique. The latter technique was then associated with an observer to minimize the tracking error. This point was the subject of the third chapter. In order to obtain better tracking performance trajectories while exploiting the system's global energy, the fourth chapter is devoted to the adaptive passive control. To reduce the possibility of instability of the non-linear system a combination of the passive control and the backstepping technique has been proposed in the fifth chapter. For a nonlinear systems class, a flatness based control has been applied in the last chapter and gave excellent performance. This work ends with a conclusion that summarizes the different contributions of this thesis. Also, some prospects have also been proposed as a continuation of this work.