

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR



ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université HADJ LAKHDAR – BATNA –



MEMOIRE

Présenté au

Département des sciences de la matière – Faculté des sciences

Pour obtenir le diplôme de

MAGISTERE EN PHYSIQUE

Option : Physique Energétique

Par

DJERAH FATEH

Thème

*Etude De L'instabilité Créé Par Une Contrarotation
De Deux Cylindres Concentriques*

Soutenue le .. / .. / 2012

devant le jury composé de :

➤ SOUDANI	Azzedine	Prof,	Univ. Batna	Président
➤ BEN MOUSSA	Hocine	Prof,	Univ. Batna	Rapporteur
➤ MOUMMI	Nourddine	Prof,	Univ. Biskra	Examineur
➤ AKSAS	Mounir	M.C.A,	Univ. Batna	Examineur

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2011/2012

Avant-propos

Louange à « Allah » qui m'a guidé sur le droit chemin tout au long du travail et m'a inspiré les bons pas et les justes réflexes. Sans sa miséricorde, cette thèse n'aura pas abouti.

Je dédie cet humble travail à celui qui nous a quittés à jamais mon ami, frère, encadreur Monsieur ZEROUAL Mostfa en laissant un vide immense au sein de nos cœurs, nous venons tous de perdre un personnage exceptionnel, un être cher, une icône, une authentique école de sagesse, saturée d'humanisme, d'art de vivre, d'humilité, de simplicité, d'altruisme et de générosité, un modèle de citoyen exemplaire, infiniment apprécié par la quasi totalité de tous ceux qui ont eu le plaisir de le côtoyer et de le connaître. Il était l'un des rares autodidactes de sa génération.

Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance et remerciements, sans lui le mémoire n'aurait pas vu le jour avec son aide bienveillante, sa compréhension et son dévouement. J'aimerais lui témoigner ma gratitude pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi, ses orientations ainsi que son soutien moral et scientifique m'ont permis de mener à terme de ce projet. Son encadrement était des plus exemplaires.

Que dieu lui pardonne tous ses péchés.

Que dieu le préserve de Son châtement.

Que dieu lui accorde Son magnifique paradis.

Que dieu illumine sa tombe et en fasse un jardin du paradis.

Que dieu l'enveloppe de Sa douce miséricorde.

Que dieu lui accorde le repos et la tranquillité éternelle.

Que dieu apaise ses proches et leur accorde la patience face à cette épreuve.

Amin

" A Dieu nous appartenons et à lui nous retournerons "

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Ma très chère Mère et mon très cher Père, pour leurs soutiens,
leurs patiences et leurs confiances.*

« Que Dieu vous garde et vous bénisse ».

Mes très cher frères,

Mes très chères sœurs,

Toute la famille ,

Et Tous mes amis.

Fateh

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier notre Dieu, notre créateur, pour le courage et la patience qu'il nous a donné pour accomplir ce travail.

Ainsi mes parents qui m'aident.

Je remercie mon professeur consultant Mr. BEN MOUSSA Hocine pour ses orientations et conseils.

Je tiens aussi à exprimer mes profonds remerciements à mes enseignants du Département des Sciences de la Matière

Enfin mes remerciements s'adressent aux membres de jury qui me feront l'honneur de juger notre travail.

Table des matières

Nomenclature

Introduction générale

Introduction générale

Chapitre I : Etude bibliographique

I.1 Introduction

I.2 phénomènes d'instabilités :

I.2.1 Caractérisation et analyse des phénomènes d'instabilités

I.2.1.1 Théorie de stabilité linéaire

I.2.1.2 Énoncé du critère de la stabilité

I.3 Description de l'écoulement de Taylor-Couette

i.3.1 Les régimes de transition

I.3.1.1 Régime laminaire stable

I.3.1.2 Régime laminaire perturbé ou instable

I.3.1.3 Régime de pré turbulence ou chaos

I.3.1.4 Régime de turbulence complètement développé

I.4 Historique de l'écoulement de Taylor-Couette

I.4.1 Etudes théoriques et expérimentales

I.4.2 Etudes numériques

I.5 Applications technologiques et industrielles

I.6 Conclusion

Chapitre II : Modélisation mathématique et numérique

INTRODUCTION

Partie A : Modèle mathématique

II.1 Formulation mathématique du problème

II.1.1. Hypothèses simplificatrices

II.1.2 Les équations hydrodynamiques

II.1.2.1 L'équation de continuité

II.1.2.2 L'équation de la quantité de mouvement

II.1.2.3 Conditions initiales

II.1.2.4 Conditions aux limites :

II.1.3 Formulation adimensionnelle

II.1.3.1. Grandeurs caractéristiques et variables adimensionnelles

II.1.3.2 Equations adimensionnelles

II.1.3.3 Conditions aux limites adimensionnelles :

Partie B : Modélisation numérique

Introduction :

II.2 Méthode des volumes finis

II.3 Maillage

II.4 La discrétisation

II.4.1 Intégration du flux total

II.4.2 Intégration du terme source

II.4.3 Discrétisation spatiale :

II.5 Procédure de Résolution :

II.5.1 Choix de la méthode d'interpolation de la pression

II.5.2 Choix de l'algorithme de couplage pression-vitesse

II.6 Présentation du code de calcul

II.6.1 Architecture du logiciel

II.6.2 Génération des calculs par FLUENT

Chapitre III : Résultats et discussions

INTRODUCTION

III.1 Etude de l'influence des paramètres du calcul numérique

III.1.1 Etude d'indépendance du maillage

III.1.2 Influence du critère de convergence

III.2 Détermination des vitesses critiques de transition

III.2.1 Transition du régime CCF au régime TVF

III.2.2 Transition du régime TVF au régime WVF

III.3 Validation du code

III.3.1 Système A : Espace annulaire mince et totalement rempli

III.3.2 Système B : Espace annulaire relativement large et totalement rempli

III.3.3 Système C : Écoulement entre cylindres contra-rotatifs

III.4 La transition du régime laminaire vers la 1^{ère} et la 2^{ème} instabilité

III.4.1 ECOULEMENT LAMINAIRE :

III.4.1.1 Profil radial de la vitesse tangentielle

III.4.1.2 Influence de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de vitesse

III.4.1.3 Lignes de courant

III.4.1.4 Cellules d'Eckman

III.4.1.5 Champs de pression :

III.4.2 Caractérisation du régime de première instabilité : Développement des cellules de Taylor

III.4.2.1 Visualisation de la topologie de l'écoulement en TVF

- III.4.2.2 Caractérisation du champ de vitesse en TVF
- III.4.3 Caractérisation du régime de deuxième instabilité : Le régime d'onde azimutale
 - III.4.3.1 Visualisation de la topologie de l'écoulement en WVF
 - III.4.3.2 Développement des tourbillons dans l'espace annulaire
 - III.4.3.2 Caractérisation du champ de vitesse en WVF
- III.5 Étude de l'effet de l'inclinaison α sur le système d'écoulement
- III.6 Etude de l'évolution des états critiques
 - III.6.1 Système A (Espace annulaire mince et totalement rempli)
 - III.6.1.1 Evolution de $Ta_{c1}(\alpha)$
 - III.6.1.2 Evolution de $Ta_{c2}(\alpha)$
 - III.6.1.3 Evolution de $Ta_{c1}(\Gamma)$
 - III.6.1.4 Evolution de $Ta_{c2}(\Gamma)$
 - III.6.2 Système B (Espace annulaire relativement large et totalement rempli)
 - III.6.2.1 Evolution de $Ta_{c1}(\Gamma)$
 - III.6.2.2 Evolution de $Ta_{c2}(\Gamma)$
- III.7 L'instabilité créée par une contra-rotation de deux cylindres concentriques
 - III.7.1 Description des écoulements observés

Conclusion générale

Références bibliographiques

Résumé

NOMENCLATURE

Symboles latins :

R_i	Rayon du cylindre intérieur
R_e	Rayon du cylindre extérieur
H	Hauteur du dispositif de Couette
d	Espace entre les deux cylindres coaxiaux ou espace annulaire
U	Composante radiale de la vitesse d'écoulement du fluide
V	Composante tangentielle de la vitesse d'écoulement du fluide
W	Composante axiale de la vitesse d'écoulement du fluide
r	Composante cylindrique de la direction radiale
z	Composante cylindrique de la direction axiale
P	Pression
m	Masse
g	Accélération de la pesanteur
M_c	Moment cinétique
f	Force centrifuge

Abréviations

AZI	écoulement azimutal (azimuthal laminar flow)
INT	intermittence (intermittent turbulent spots)
IPS	spirale interpénétrante (interpenetrating spiral)
SPI	vortex en spirale (spiral vortices)
SPT	spirale turbulente (turbulent spiral)
TUR	écoulement pleinement turbulent (turbulent flow)
TVF	écoulement des vortex de Taylor (Taylor vortex flow)
WIS	vortex interpénétrants en spirale ondulés (wavy interpenetrating spiral)
WVF	écoulement de vortex ondulés (wavy vortex flow)

Les nombres adimensionnels :

Re	Nombre de Reynolds
Ta	Nombre de Taylor
Fr	Nombre de Froude
Ta_{c1}	Nombre de Taylor correspondant à l'apparition de l'onde de Taylor
Ta_{c2}	Nombre de Taylor correspondant à l'apparition des ondes azimutales ou Wavy mode
Ta_F	Nombre de Taylor correspondant à l'apparition du régime de fluctuations.

Ta_C	Nombre de Taylor correspondant à l'apparition du chaos.
Ta_D	Nombre de Taylor correspondant à l'apparition de la turbulence complètement développée

Symboles grecs :

Ω_i	Vitesse de rotation du cylindre intérieur
Ω_e	Vitesse de rotation du cylindre extérieur
θ	Composante cylindrique de la direction tangentielle
μ	Viscosité dynamique
Γ	Rapport d'aspect
η	Rapport des rayons
δ	Jeu radial
Δ	le laplacien
ν	Viscosité cinématique
Σ	Symbole de sommation
ρ	Masse volumique
$s = \sigma + i\omega$	Paramètre complexe
τ	Contrainte de cisaillement
ω	Vitesse angulaire
ϕ	Variable dépendante générale
S_ϕ	Terme source
γ	Coefficient de diffusion
ζ	Coordonnée radiale réduite
ξ	Coordonnée axiale réduite
α	Angle d'inclinaison du dispositif d'écoulement
λ	Longueur d'onde de l'écoulement

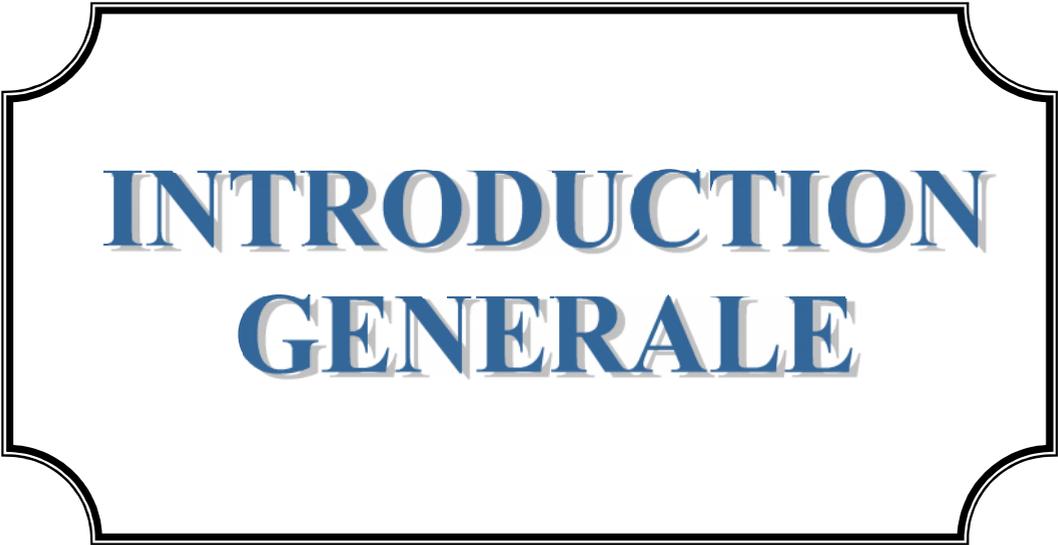
Indices :

c	Valeur critique
P	Nœud au centre d'un volume de contrôle.
E	Nœud à Est du nœud central.
W	Nœud à Ouest du nœud central.
N	Nœud à Nord du nœud central.
S	Nœud à Sud du nœud central.
F	Nœud à Front du nœud central.
B	Nœud à arrière du nœud central.
e	Face Est du volume de contrôle.

w Face Ouest du volume de contrôle.
n Face Nord du volume de contrôle.
s Face Sud du volume de contrôle.
f Face Front du volume de contrôle.
b Face Arrière du volume de contrôle.

EXPOSANT :

` Valeur corrigée
* Variable adimensionnelle



**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

Pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et de transitions vers la turbulence, la mécanique des fluides s'intéresse plus particulièrement à des systèmes relativement simples, tel que, les cylindres tournants, qui sont l'objectif de notre étude, les sphères tournantes, les cônes tournants, disques tournants, etc.....

L'étude de l'instabilité de l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation connue sous le nom de « Taylor-Couette » a suscité un grand intérêt depuis les travaux initiaux de G.I. Taylor [1] et [2]. Bien que cette instabilité soit aujourd'hui bien connue théoriquement, expérimentalement et numériquement, des effets extérieurs peuvent être ajoutés à cet écoulement qui le rend alors plus complexe: champ magnétique, parois compliantes, fluide viscoélastique, flux thermique, effet de la stratification, etc. En outre, des facteurs influencent la stabilité de l'écoulement : facteur de forme, rapport d'aspect, l'angle de l'inclinaison, les vitesses de rotation des cylindres ainsi que la viscosité du fluide utilisé dans l'espace annulaire.

L'inertie du fluide en mouvement, notamment la force centrifuge créée par la rotation a tendance à faire croître les instabilités (effet déstabilisant), alors que la viscosité du fluide a tendance à gommer les instabilités (effet stabilisant).

A faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisant de l'inertie. C'est l'écoulement de couette.

Si l'on **augmente la vitesse** de rotation du cylindre intérieur, les effets de l'inertie deviennent trop forts et la viscosité ne peut plus empêcher la création d'une instabilité. On observe l'apparition de rouleaux dans l'écoulement. L'écoulement est dit Taylor-couette.

Si l'on **continue à augmenter** la vitesse de rotation, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement.

En **continuant à augmenter** les vitesses font perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent.

L'objectif principal de ce travail est de voir l'influence des paramètres de contrôle (rapport d'aspect, facteur de forme et l'angle de l'inclinaison) sur l'écoulement tridimensionnel de fluide visqueux entre deux cylindres concentriques et les mécanismes de l'instabilité.

L'étude est effectuée par la simulation numérique à l'aide du code de calcul "Fluent" qui est basé sur la Méthode des Volumes Finis.

Ce genre d'écoulement est lié à un grand nombre d'applications. Citons par exemple les machines rotatives et centrifuges, les paliers de butée, les viscosimètres, le pompage des métaux

liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux, la rotation des disques durs d'ordinateurs : cet empilement de disques en rotation rapide entraîne une mince couche d'air interstitielle, dont les instabilités peuvent induire des vibrations, et donc un risque d'endommagement par contact avec la tête de lecture.

Le présent travail comporte trois chapitres. Le premier est consacré à une revue bibliographique sur l'écoulement Taylor-Couette et les principales études théoriques, expérimentales et numériques concernant cet écoulement.

La description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques. On y présente les étapes de la démarche numérique ainsi que l'algorithme de calcul et les schémas de discrétisation des équations de Navier-Stokes utilisées par la méthode des volumes finis.

Les résultats et leurs discussions seront présentés dans le troisième chapitre. Les résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux déjà réalisés et cela a servi à la validation du code de simulation utilisé.

Finalement nous terminerons ce travail par une conclusion, ainsi que nos perspectives futures.

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 INTRODUCTION

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique consiste en l'examen de la stabilité du régime établi du phénomène étudié. En tant que branche de la physique, la mécanique des fluides n'échappe pas à ce genre de problème.

En mécanique générale, la recherche des solutions stables commence par la détermination des valeurs des paramètres du système qui rendent minimum la fonction potentiel; dans le même ordre d'idée le rôle joué par les potentiels thermodynamiques des systèmes thermodynamiques est en tout point analogue.

En mécanique des fluides, le problème peut être présenté de la même manière, sachant qu'il n'existe que peu d'écoulements qui dérivent d'une fonction de forces ou du moins, la recherche de cette fonction de forces constitue un problème qui n'est pas trop complexe. La méthode la plus générale consiste à écarter le système de sa position d'équilibre en le perturbant et étudier ensuite les effets de cette perturbation.

I.2 PHENOMENES D'INSTABILITES :

Pour avoir une bonne connaissance sur les fondements théoriques du problème, on se propose de donner, ici, une description des phénomènes d'instabilités afin de mettre en évidence les hypothèses de travail utilisées ainsi que les propriétés caractéristiques en régime de transition.

I.2.1 CARACTERISATION ET ANALYSE DES PHENOMENES D'INSTABILITES

Le but de l'analyse des phénomènes d'instabilités consiste à énoncer les conditions de leur apparition et de déterminer dans quel domaine le mouvement persiste afin d'analyser ces états en fonction des paramètres gouvernant l'écoulement.

I.2.1.1 THEORIE DE STABILITE LINEAIRE

La non-linéarité des équations de Navier-Stokes ne permet pas d'étudier simplement la stabilité des solutions trouvées. Il est possible néanmoins de définir des critères de stabilité ou d'instabilité. Sans détailler le processus (assez complexe), on peut en distinguer les deux grandes étapes.

PREMIÈRE ÉTAPE (LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES)

On considère l'écoulement d'un fluide de viscosité cinématique ν et de masse volumique ρ constante. Afin d'étudier la stabilité, on considère le champ de vitesse et le champ de pression comme la somme d'une solution (connue) et d'une petite perturbation :

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{U}(\bar{x}, t) + \bar{u}'(\bar{x}, t) \quad \text{avec} \quad \|\bar{u}'(\bar{x}, t)\| \leq \|\bar{U}(\bar{x}, t)\|$$

$$\bar{p}(\bar{x}, t) = \bar{P}(\bar{x}, t) + \bar{p}'(\bar{x}, t) \quad \text{avec} \quad \|\bar{p}'(\bar{x}, t)\| \leq \|\bar{P}(\bar{x}, t)\|$$

On obtient des équations Navier-Stokes linéarisées pour les variables $\bar{u}(\bar{x}, t)$ et $p'(\bar{x}, t)$

Il est alors possible d'étudier le comportement de ces perturbations dans le temps et/ou l'espace.

DEUXIÈME ÉTAPE (ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DES PERTURBATIONS)

On exprime les perturbations comme superposition de modes normaux :

$$\bar{u}'(\bar{x}, t) = \sum \bar{u}'_0 e^{st + i \bar{k} \cdot \bar{x}}$$

- Les termes (st) représente l'évolution temporelle et celui de $(\bar{k} \cdot \bar{x})$ représente l'évolution spatiale.

La stabilité temporelle est d'étudier le plus souvent :

s est un complexe : si $s = \sigma + i\omega$

- si $\sigma < 0$ évolution stable
- si $\sigma > 0$ évolution instable
- si $\sigma = 0$ stabilité neutre

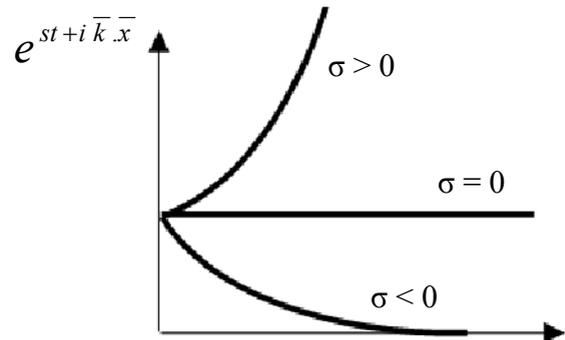


Figure I.1 : Étude de stabilité temporelle

- définition : l'écoulement est stable si tous les modes normaux sont stables
- critère : l'écoulement est instable si un des modes normaux est instable
- la limite entre la stabilité et l'instabilité est appelée état de stabilité marginale, pour lequel $\sigma = 0$

I.2.1.2 Énoncé du critère de la stabilité

La stabilité d'un écoulement de Taylor-Couette peut être déterminée à partir du critère de Rayleigh [3]

a) Critère de Rayleigh

L'origine de l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette est une instabilité centrifuge. Dans un écoulement en rotation, la trajectoire des particules fluides résulte de l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial centripète, égal et opposé. Pour savoir si un tel écoulement est stable ou non, il faut regarder si un déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale va être amplifié (cas instable) ou au contraire atténué (cas stable).

Considérons une particule fluide initialement à la distance r de l'axe des cylindres. Cette particule fluide a une vitesse orthoradiale $V = r\Omega(r)$, et subit donc une force centrifuge $f = \rho(\Omega r)^2$, contrebalancée par un gradient de pression centripète $\partial p / \partial r$. Si l'on déplace cette particule en $r + dr$, elle va devoir ralentir, car elle doit conserver son moment cinétique $M_c = Vr = \Omega r^2$. En conséquence, la force centrifuge de la particule fluide diminue, et ne sera donc plus compensée par le gradient de pression environnant en $r + dr$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- (i) soit le moment cinétique en $r+dr$ est supérieur à celui en r : dans ce cas, le gradient de pression en $r+dr$ aura tendance à ramener la particule fluide à sa position initiale, en r . L'écoulement est stable.
- (ii) soit le moment cinétique en $r+dr$ est inférieur à celui en r : dans ce cas, la particule subit une force centrifuge supérieure au gradient de pression centripète environnant, et la particule continue son chemin à r croissant. L'écoulement est instable. Par conservation de la masse (incompressibilité), d'autres particules fluides, à d'autres hauteurs z , se déplaceront au contraire vers l'intérieur, conduisant ainsi aux rouleaux toroïdaux représentés en figure (I.3.b).

Pour résumer, si le moment cinétique Ωr^2 décroît quelque part, alors l'écoulement est instable. On peut formaliser ce raisonnement par le critère de Rayleigh (Ce critère ne s'applique en fait qu'aux perturbations axisymétriques)

$$\text{L'écoulement est stable si } \frac{d}{dr} |\Omega r^2| > 0 \text{ pour tout } r \quad (\text{I.1})$$

Dans le cas de l'écoulement de Taylor Couette, il est possible de calculer exactement la vitesse angulaire $\Omega(r)$ solution de l'équation de Navier-Stokes, et donc définir les valeurs des paramètres pour lesquelles l'écoulement reste stable. Il est clair que $r\Omega(r)$ varie de façon monotone entre Ω_1 et Ω_2 . Ainsi, pour vérifier le critère de Rayleigh (I.1) pour tout r entre R_i et R_e , il faut : $|\Omega_i R_i^2| < |\Omega_e R_e^2| \Leftrightarrow$ écoulement stable (I.2)

Pour un cas particulier ($\Omega_e=0$ et $\Omega_i \neq 0$), seul le cylindre intérieur tourne.

Donc, selon le critère (I.2), l'écoulement devrait toujours être instable, même pour des vitesses de rotation Ω_i arbitrairement faibles.

b) Effet de la viscosité

En fait, à la force centrifuge déstabilisante s'oppose une autre force, stabilisante, dont nous n'avons pas tenu compte : le frottement visqueux. On peut donc construire un nombre sans dimension qui compare l'effet relatif de ces deux forces : c'est le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse caractéristique $\Omega_i R_i$ et la distance inter-cylindres $R_e - R_i$:

$$\text{Re}_i = \frac{\Omega_i R_i (R_e - R_i)}{\nu}$$

1.3 Description de l'écoulement de Taylor-Couette

L'écoulement de Taylor-Couette dans le cas général, est le mouvement d'un fluide défini entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_i et R_e tournants respectivement à des vitesses angulaires Ω_i et Ω_e en Co-rotation ou contra-rotation ou l'un des cylindre est tournant et l'autre fixe, et de hauteur donnée H (Figure I.2).

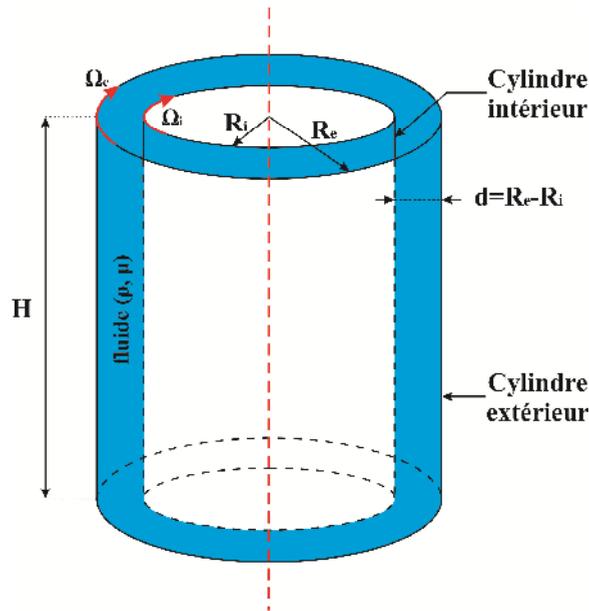


Figure I.2 : Expérience de Couette-Taylor : le fluide est cisailé entre deux cylindres coaxiaux

Cet écoulement de Taylor-Couette est un cas d'école pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition vers la turbulence.

Pour de faibles vitesses angulaires, l'écoulement de base est stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale (figure I.3.a). Au-delà d'une valeur seuil, on observe que cet écoulement de base devient instable, et il apparaît un motif de rouleaux toriques contrarotatifs qui s'étendent tout autour du cylindre (figure I.3.b) ; l'écoulement reste toujours axisymétrique et stationnaire, mais cette fois la symétrie de translation verticale disparaît (elle est brisée). Si l'on continue à augmenter les vitesses en jeu, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement (figure I.3.c). En continuant à augmenter les vitesses on fait perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent (figure I.3.d).

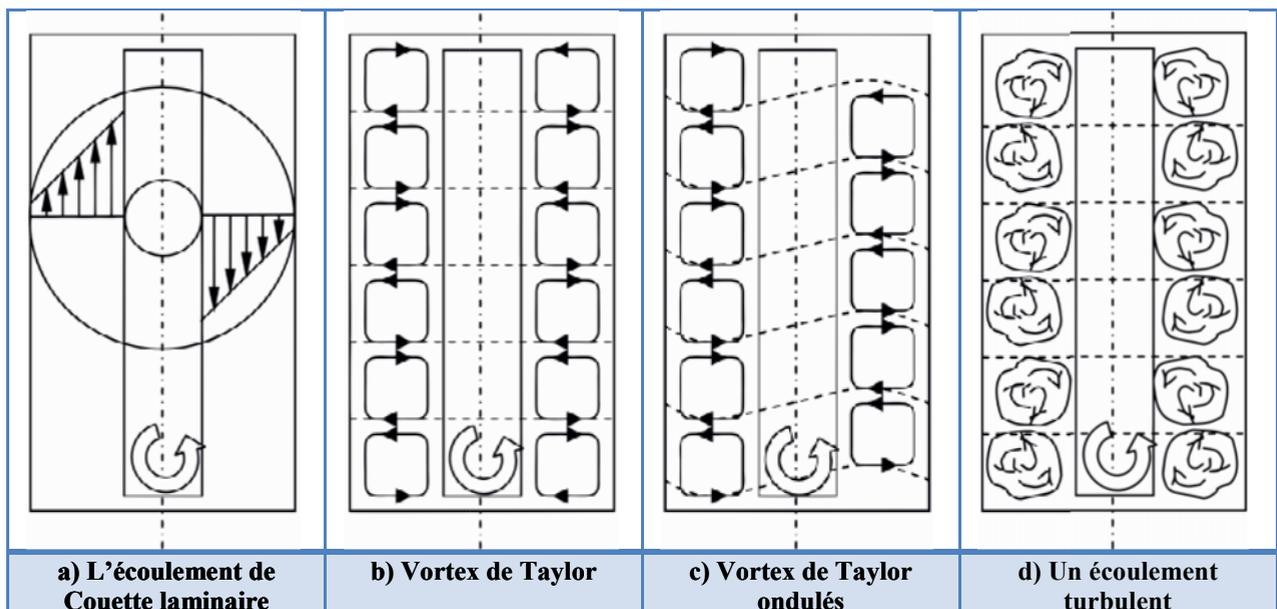


Figure I.3 : Différentes structures de l'écoulement de Taylor-Couette

I.3.1 LES REGIMES DE TRANSITION

L'écoulement de Taylor-Couette présente une série de transitions :

I.3.1.1 Régime laminaire stable

Pour de faibles vitesses de rotation, le fluide est animé d'un mouvement dans la direction tangentielle φ (figure I.4). L'écoulement de base est stable, stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale. Il est possible de déterminer la solution analytique d'un tel écoulement, comme suit :

$$V = Ar + \frac{B}{r} \quad (I.3)$$

$$\text{avec : } A = \frac{\Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\Omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

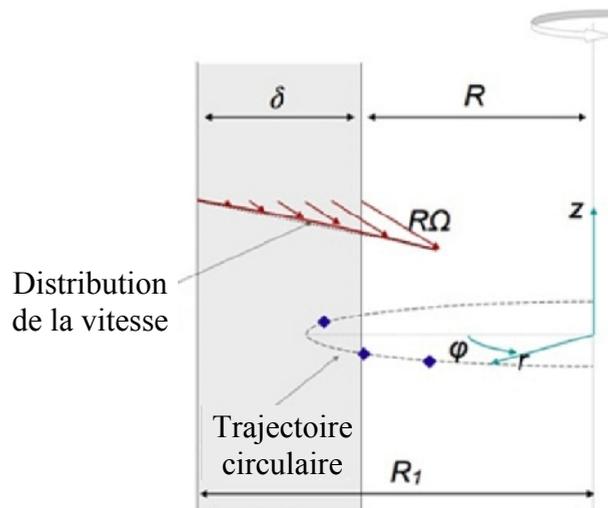


Figure I.4 : Représentation schématique de l'écoulement de Couette laminaire

Dans un système réel où la longueur des cylindres est finie, cet écoulement est modifié par le pompage d'Ekman en haut et en bas des cylindres qui introduit une circulation non azimutale sous la forme de faibles vortex horizontaux [4].

I.3.1.2 Régime laminaire perturbé ou instable

Il comporte plusieurs régimes d'instabilités qu'on peut recenser comme suit :

PREMIERE INSTABILITE (INSTABILITE DE COUETTE TAYLOR) :

En étudiant l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux en rotation (écoulement de Couette) dont, le cylindre extérieur est fixe, le cylindre intérieur tourne à une vitesse Ω , et à certaines valeurs de Ω , R_i et R_e , il est observé des trajectoires d'ondes circulaires, l'apparition de ces formes circulaires est caractérisée par le paramètre du nombre de Taylor. Cette onde correspond à l'onde axiale ou cellules de Taylor.

G .I .Taylor [1] a montré en 1923, théoriquement et il a confirmé expérimentalement que le régime laminaire de base devient instable pour une valeur critique de la vitesse de rotation

du cylindre intérieur correspondant à une valeur critique de nombre de Taylor ($Ta_c = 41.2$, et expérimentalement $Ta_c = 41.32$).

Par la suite, ce même résultat a été vérifié théoriquement par R.C Diprima [5] $Tc_1 = 41.61$ et ensuite par S. Chandrasekhar [6] $Tc_1 = 41.41$ à l'aide de deux méthodes de calculs différentes.

A partir de la valeur $Ta=Tc_1$, le liquide s'organise en un empilement de tourbillons toriques contra-rotatifs qui occupent la largeur de l'espace annulaire d et se propagent suivant l'axe z .

Ce type de configuration cellulaire est appelé vortex de Taylor ou perturbation axisymétrique qui reste stable dans la gamme du nombre de Taylor : $41,2 \leq Ta \leq 48$.

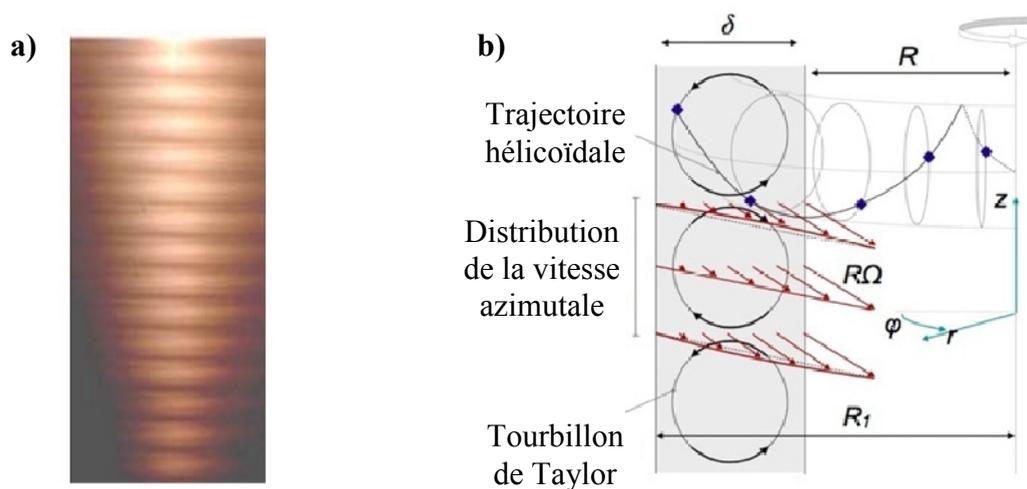


Figure I.5 : Représentation de la première instabilité (TVF) [7]
 a) Visualisation expérimentale de TVF, b) Représentation schématique de TVF

DEUXIEME INSTABILITE

En augmentant encore la vitesse de rotation, il apparaît pour un nombre de Reynolds critique Rec_2 , un mouvement comportant des tourbillons ondulés en direction azimutale. Il s'agit de l'onde azimutale qui se propage dans la direction angulaire (θ) avec une fréquence d'oscillation ω qui donne lieu à un système d'ondes instationnaire se superposant aux cellules de Taylor.

L'ensemble de l'écoulement est décrit selon un mouvement secondaire doublement périodique en z et θ . Ce système d'ondes est caractérisé par un nombre d'onde axiale n et un nombre d'onde azimutal m . Ainsi D. Coles [8] a montré que ce régime présente plusieurs états stables pour une même valeur de nombre de Taylor et chaque état est identifié par le couple (n, m) caractérisant ce qu'on appelle « non – unicité de l'écoulement ».

En outre il montre que lorsqu'on augmente ou l'on diminue Re , le mouvement peut changer de manière discontinue et irréversible. En particulier, D. Coles [8] retrouve le

phénomène d’hystérésis de l’écoulement de Taylor Couette. Ce dernier mentionne également que l’onde axiale ou cellules de Taylor persiste en turbulence complètement développée.

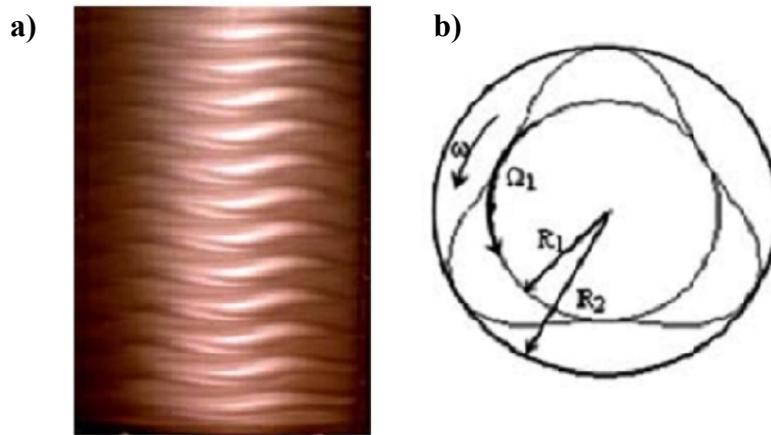


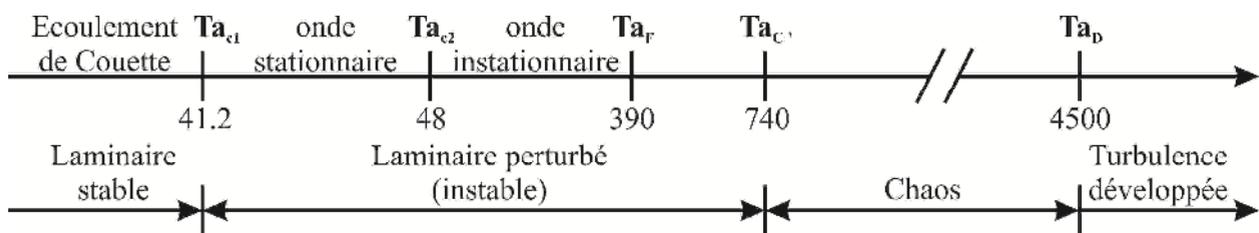
Figure I.6 : Représentation de la deuxième instabilité (WVF) [7]
 a) Visualisation de wavy mode, b) structure ondulatoire pour mode $m = 3$

I.3.1.3 Régime de pré turbulence ou chaos

Au-delà de $Tc_2 = 48$, l’écoulement se complique et il apparaît très vite que la prévision des états d’instabilités ultérieures à l’onde azimutale devient quasi inextricable et le mouvement devient de plus en plus complexes et le régime de fluctuation s’installe à $Ta \approx 400$.

Le régime chaotique ou pré turbulent s’établit avec la disparition l’onde azimutale vers $Ta \approx 740$. Au-delà de cette valeur, on observe l’établissement de la turbulence complètement développée à $Ta=4500$ qui est elle-même marquée par la persistance de l’onde axiale qui se maintient toujours malgré la vitesse de rotation très élevée imposée sur le cylindre intérieur [9].

Les différents régimes de transition sont résumés dans le diagramme suivant à l’aide du nombre de Taylor Ta lui (J. J Stuart [10]).



$0 \leq Ta \leq Ta_{c1}$: Ecoulement circulaire de couette.

$Ta = Ta_{c1}$: Apparition de l’onde axiale stationnaire (cellules de Taylor).

$Ta = Ta_{c2}$: Apparition de l’onde azimutale instationnaire (wavy mode).

$Ta = Ta_F$: Apparition des fluctuations Chaotiques (fréquence à spectre large).

$Ta = Ta_{c'}$: Disparition de l’onde azimutale.

$Ta = Ta_D$: Disparition des fréquences à spectre large.

$Ta \geq Ta_D$: Régime de turbulence développée.

Dans le cas général où les vitesses Ω_i et Ω_e varient de façon quelconque, la prévision des instabilités en milieu visqueux a été synthétisée expérimentalement par Andereck et al. [11] sous la forme d'un diagramme (figure I.7) dans le plan des nombres de Reynolds associés :

$$Re_i = \frac{\Omega_i R_i d}{\nu} \quad \text{et} \quad Re_e = \frac{\Omega_e R_e d}{\nu}$$

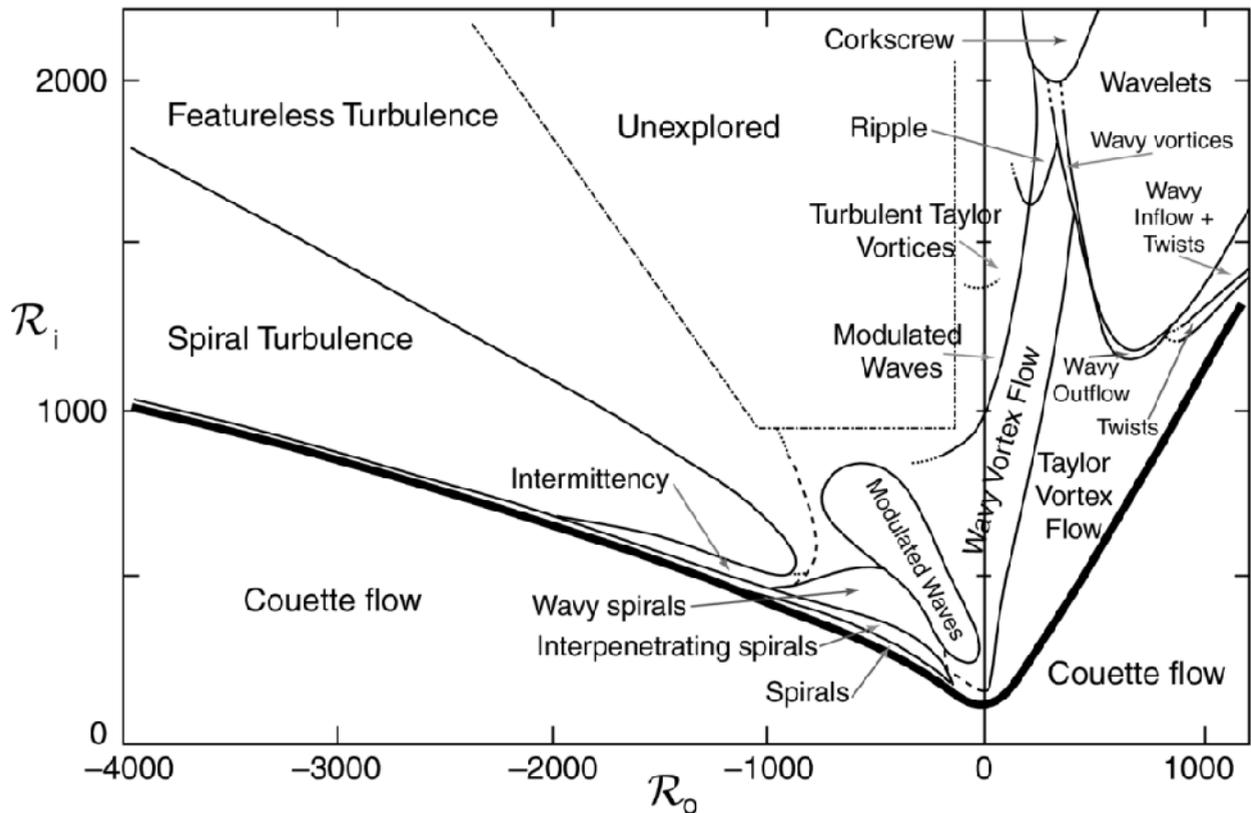


Figure I.7 : Diagramme des phases dans l'écoulement de Taylor-Couette réalisé par Andereck et al. [11]

I.3.1.4 Régime de turbulence complètement développé

On s'intéresse ici à l'état de l'écoulement après la transition : la turbulence développée. On peut considérer qu'il s'agit d'un état qui a perdu complètement les perturbations qui l'ont engendré.

Dans la pratique industrielle et dans les systèmes naturels, un très grand nombre d'écoulements sont en fait turbulents (circulation atmosphérique, aérodynamique externe et interne, hydrodynamique, cinétique chimique, physique des plasmas, génie nucléaire, etc...).

Les grandeurs physiques d'un écoulement turbulent (vitesse, pression...) ne sont pas directement accessibles. Ainsi l'état turbulent n'est connu qu'à travers des grandeurs moyennes et fluctuantes dont on peut toujours extraire quelques propriétés essentielles.

Le caractère fortement aléatoire du phénomène de turbulence nécessite de mettre en œuvre des outils statistiques utiles tant du point de vue théorique qu'expérimental.

I.4 Historique de l'écoulement de Taylor-Couette

Le Taylor-Couette tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire [1]).

Dans ce qui suit, nous résumons les différents travaux effectués sur l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux.

I.4.1 Etudes théoriques et expérimentales

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17^{ème} siècle; il s'agit de l'étude effectuée par Newton en 1687. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant.

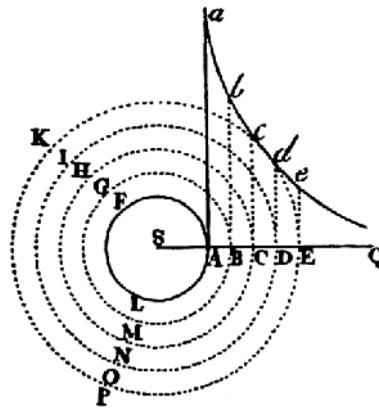


Figure I.8 : Mouvement d'un fluide autour d'un cylindre d'après Newton [11]

Plus tard, G. STOKES (1848) a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses.

En 1881, M. Margulse a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides.

Autour de 1888, H. Mallock [13] a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants (Figure I.10). Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche.

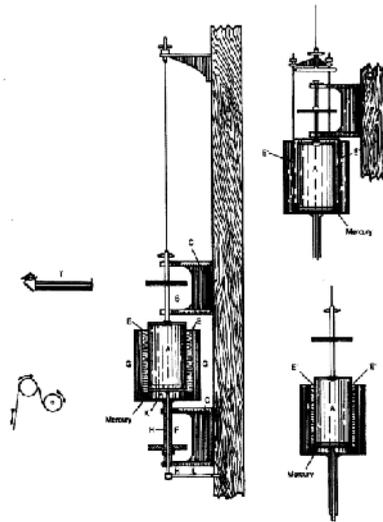


Figure I.9 : Schéma de l'appareil de H. Mallock [13]

Dans la même période, M. Couette (1888) a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de Couette) (Figure I.10). Loin des parois horizontales, l'écoulement est circulaire et obéit à la loi (I.3). Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. Couette a remarqué que, contrairement au cas de la rotation du cylindre extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos.

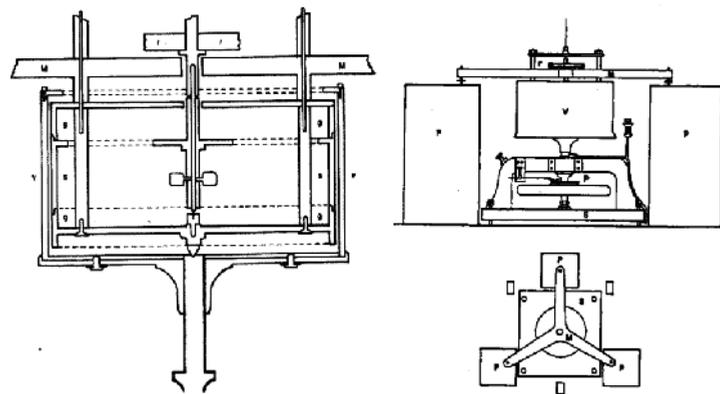


Figure I.10 : Schéma de l'appareil de M. Couette (1888)

Les travaux de H. Mallock [13] et ceux de M. Couette ont été axés sur la mesure de viscosité valable seulement pour le cas laminaire. Néanmoins, ils furent les premiers à observer le début des instabilités dues à l'augmentation de la vitesse de rotation de l'un des cylindres.

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de Couette a été faite par L. RAYLEIGH [3]. Il a justifié ultérieurement les remarques de H. Mallock et M. Couette pour le cas non visqueux. A partir de son critère déjà mentionné, il est arrivé à la condition de stabilité suivante : $R_e \Omega_e^2 > R_i \Omega_i^2$ où Ω_i et Ω_e sont les

vitesse angulaire de rotation, R_i et R_e sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

G.I. TAYLOR [1], a repris cette étude pour un fluide visqueux; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du développement des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette; la solution est donnée sous forme de série de Bessel-Fourier. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires. En se basant sur les observations de H. Mallock [13] et M. Couette, G. I. TAYLOR [1] a supposé une symétrie axiale de l'écoulement, un espace annulaire étroit, les effets de la gravité sont négligés et il suppose également une perturbation axialement périodique. La théorie linéaire développée par G. I. TAYLOR, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables.

J. T. STUART [14], fut le premier à tenir compte des termes quadratiques pour étudier par une théorie non linéaire, l'évolution et l'amplification de la perturbation au voisinage de la première instabilité. Il a déterminé l'amplitude de ces perturbations à partir d'une équation de bilan énergétique écrite sous forme intégrale.

Davey (1962), étudie théoriquement l'instabilité de l'écoulement de Taylor et montre qu'il existe un nombre de Taylor critique pour chaque écoulement comportant m vagues dans la direction azimutale. De plus, il montre que ce type d'écoulement est périodique et ne comporte qu'une seule fréquence fondamentale. Cet écoulement est dénommé « Singly Periodic Wavy Vortex Flow » (SPWVF). Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du cylindre interne, l'écoulement devient plus complexe et l'amplitude des vagues varie périodiquement. Cet écoulement ondulatoire est donc appelé « Doubly Periodic Wavy Vortex Flow » (DPWVF).

Le fait de l'analyse non linéaire de Davey (1962), dans le cas d'un petit espace annulaire ne convienne pas aux mesures du couple effectuées pour $Re > 3Re_c$, indique que l'écoulement se fait alors selon un mode différent de celui prévu par le premier type d'instabilité. Les expériences de visualisation montrent en effet l'apparition d'ondes azimutales qui affectent en particulier les frontières des cellules. Ce second seuil critique Re_{c2} est d'autant plus rapproché du premier que η ($\eta=R_i/R_e$) est voisin de 1. Ainsi, il est de quelques pourcents supérieur à Re_c pour $\eta=0.95$ et vaut plus de $10 Re_c$ pour $\eta=0.5$ (Snyder et al. [15]). Par ailleurs, il apparaît que Re_{c2} est aussi fonction

du rapport de forme $\Gamma=H/d$, et comme l'a montré J. Cole [16], il est difficile de comparer précisément les différentes valeurs de la littérature pour cette seconde transition. On peut cependant considérer que pour $\Gamma > 40$, Re_{c2} est proche de la valeur $Re_{c\infty}$, obtenues pour des cylindres infinis.

Les expériences de visualisation de D. Coles [8] avec un dispositif correspondant à un rapport des rayons $\eta = 0.88$ et un rapport de forme $\Gamma = 23$, ont montré que lorsque le nombre de Reynolds Re croit au-delà d'un second seuil les lignes de séparation des cellules ne sont plus dans des plans perpendiculaires à l'axe, mais présentent des ondulations qui affectent l'ensemble des vortex et progressent dans le sens de rotation du cylindre intérieur. Le mouvement qui perd ainsi son axisymétrie possède alors une double périodicité identifiée par un nombre d'ondes axiales (n) et un nombre d'ondes azimutales (m) [11] [16] [18]. Il apparaît en outre un caractère de non unicité de l'écoulement. Selon la manière dont on atteint la vitesse recherchée, on observe différents états correspondant chacun à un couple d'entiers (n,m) (D. Coles répertorie ainsi jusqu'à 26 états pour un nombre de Reynolds donné). Ce phénomène s'accompagne d'effets d'hystérésis, la succession d'états étant généralement différente pour des valeurs croissantes puis décroissantes de la vitesse. D. Coles note également l'apparition de perturbations localisées "turbulentes" alors que l'aspect de l'écoulement devient de plus en plus complexe tout en conservant dans l'ensemble un caractère ordonné.

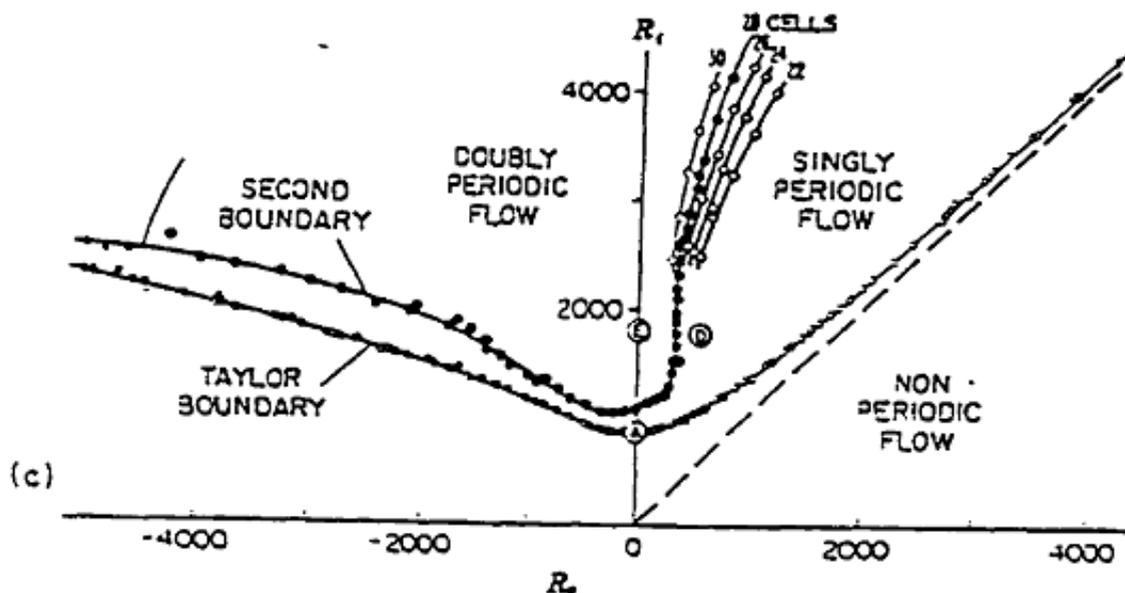


Figure I.11 : Écoulement de Taylor - Diagramme de stabilité d'après D. Coles [8].

La figure (I.11) présente les résultats obtenus par D. Coles [8] pour $\eta = 0.88$ en fonction des nombres de Reynolds relatifs aux deux cylindres.

Ces résultats semblaient accréditer le type d'évolution de l'écoulement vers la turbulence décrit par Landau (1941) à travers un large domaine de transition, constitué par une

suite infinie d'instabilités introduisant chacune une nouvelle fréquence dans le mouvement jusqu'à ce que les propriétés de celui-ci ne se distinguent plus de celle du régime turbulent.

Pour une valeur de la vitesse supérieure à la vitesse critique ($Re > Re_c$), la théorie linéaire prévoit une croissance exponentielle de la perturbation initialement infinitésimale. Ce type de croissance ne peut se maintenir car les termes quadratiques des équations du mouvement perturbé deviennent non négligeables, ce qui a pour effet d'introduire une première harmonique et de modifier le mouvement moyen. Par interaction avec le mode fondamental, il y a alors apparition d'une seconde harmonique et le processus se poursuit ainsi par la génération d'une suite infinie d'harmoniques.

Kogelman et DiPrima (1970), en prenant en compte les effets non linéaires ont montré que l'intervalle d'une bande de longueurs d'onde était en fait 3 fois plus étroit que celui défini à partir de la courbe de stabilité neutre. Les expériences de Burkhalter et Koschmieder (1974) confirment cette tendance; cependant les valeurs qu'ils observent pour différentes procédures de mise en régime restent relativement proches de la longueur d'onde critique.

Le cas des cylindres courts est fondamentalement différent en ce sens que les effets de bouts font que les cellules se développent progressivement avec l'augmentation de la vitesse de rotation, tout d'abord lentement, puis très rapidement ensuite lorsque le nombre de Reynolds approche le seuil critique Re_c correspondant aux cylindres infiniment longs.

J. Cole [16], à l'aide de techniques de visualisation et de mesure du couple dans des enceintes avec une surface libre, pour une gamme de paramètres $1 < H/d < 107$ et $0.894 < \eta < 0.954$, a montré que la valeur du premier nombre de Reynolds critique est peu modifiée si le rapport de forme n'est pas infini, ce qui est évidemment le cas de tous les dispositifs expérimentaux, mais que le second seuil critique est fortement affecté par la diminution du rapport de forme de l'enceinte. Ainsi, Re_{c2} augmente d'au moins 50% par rapport à la valeur prévue pour un cylindre infini lorsque $H/d=10$ et du double lorsque $H/d=5$, et ce, pour tous les η examinés.

Benjamin [20], a le premier mis en évidence le fait que la prise en compte des effets d'extrémité peut donner lieu à des effets d'hystérésis et changer les bifurcations en transitions lentes. Des expériences portant sur des cylindres très courts avec des extrémités fixes ($0 < \Gamma < 6$ et $\eta=0.615$) lui ont permis de conforter son approche formelle (Benjamin [20]). Blennerhasset et Hall (1979) ont étudié théoriquement la stabilité linéaire du mouvement en faible espace annulaire pour des cylindres de longueur finie. Les conditions aux extrémités sont choisies de telle sorte que l'écoulement circulaire de Couette est une solution exacte du problème. Ils démontrèrent que le problème admet des solutions multiples, dépendamment des conditions initiales.

Mullin et al [21] ont étudié expérimentalement la transition de 1 à 6 cellules dans un dispositif court à large espace annulaire ($\eta=0.507$), et discuté les phénomènes d'hystérésis d'après la théorie développée par Benjamin [19].

Diprima et al [22] ont précisé l'influence du rapport des rayons sur la stabilité de l'écoulement de Taylor. Ces auteurs montrent que lorsque Γ décroît, le nombre de modes normaux instables, en régime de Couette, à un nombre de Reynolds donné, décroît rapidement. Ils obtiennent par ailleurs une valeur critique de η ($\eta \approx 0.65$) en-dessous de laquelle il n'y a pas d'instabilité de l'écoulement cellulaire. La prévision des états de l'écoulement en régime ondulatoire nécessite la connaissance précise du développement et la stabilité des cellules de Taylor. C'est l'objectif poursuivi en particulier par Domingue-Lerma et al (1984) qui ont conduit des calculs de haute précision couvrant le domaine $0.1 < \eta < 0.975$.

Walgraef et al. (1984) ont décrit la transition cellules de Taylor-ondes azimutales par une équation d'amplitude. Conformément aux résultats expérimentaux, ils montrent que les effets de bord sélectionnent les nombres d'ondes azimutaux supérieurs à 1 et que $Re_{c2}(\Gamma)$ croît sensiblement lorsque le rapport de forme décroît.

Wereley et Lueptow (1998), étudient largement la circulation du fluide entre des cellules adjacentes pour différentes valeurs du nombre de Taylor. Ils montrent qu'il existe une structure cyclique de l'écoulement global, ainsi qu'un transfert cyclique entre les cellules adjacentes.

I.4.2 Etudes numériques

Parallèlement aux travaux expérimentaux cités plus haut, il existe un grand nombre d'études numériques dont une des premières a été conduite par Meyer (1967). Il considère un écoulement de cellules de Taylor à partir de l'état initial d'un écoulement de Couette, en supposant une périodicité axiale (i. e. un cylindre infini) et en imposant une perturbation initiale de longueur d'onde axiale spécifiée. Il a utilisé la technique des différences finies (méthode explicite) pour résoudre les équations de Navier-Stokes en termes d'une fonction de courant méridionale, d'une composante tangentielle des vecteurs vitesse, et de la vortacité.

Alonso et Macagno (1973) ont effectué des calculs similaires utilisant la méthode générale ADI (Alternating Direction Implicit). Ils ont fait varier le nombre de Reynolds de 560 à 1000, ensuite à 2000 utilisant un maillage uniforme espacé de $\Delta z = \Delta r = 0.02$, avec un nombre total de noeuds compris entre 215 et 355 et avec $\eta = 1.2$. Ils ont mis en évidence l'effet de la vitesse tangentielle en fonction du nombre de Reynolds (Figure I.11). Ces résultats ont montré un bon accord avec les résultats obtenus par Meyer (1967).

De la (Figure I.12) on remarque que la vitesse tangentielle près du centre de la cellule tend à augmenter avec la distance radiale si on augmente le nombre de Reynolds. Ce fait

implique que pour un grand nombre de Reynolds le centre des cellules de Taylor tourne à peu près comme un corps solide autour de l'axe longitudinal du cylindre. Ils ont observé que les cellules sont constituées d'un coeur non visqueux entouré par une couche visqueuse de cisaillement.

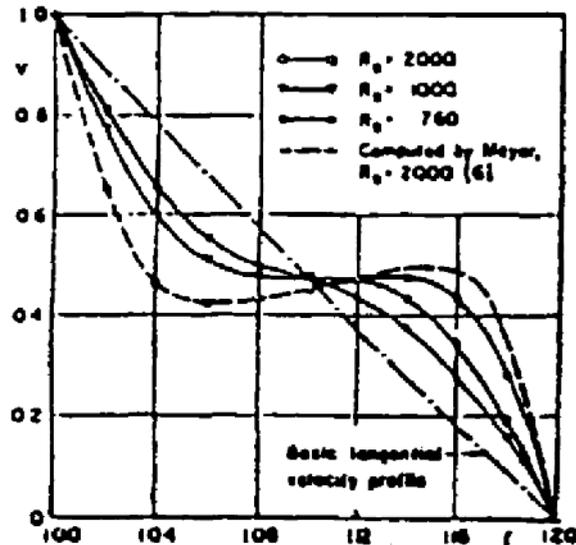


Figure I.12 : Profils de vitesse tangentielle dans une cellule de Taylor [23].

Alziary et Gdiaud (1978) ont conduit un calcul numérique dans le cas d'un rapport de forme $\Gamma=10$ pour $\eta=0.933$. Leurs résultats mettent en évidence une transition lente lorsque Re croit. Ils observent successivement 2, 4 puis 8 et enfin 10 cellules de même taille qui constituent l'écoulement de Taylor proprement dit (Figure I.13). Ils remarquent que les vortex apparaissent à mi-hauteur de l'espace annulaire et que leur intensité augmente très rapidement lorsqu'on dépasse le nombre de Reynolds critique. A partir des conditions initiales variées, ils ont pu obtenir différents états pour une valeur donnée de $Re > Re_c$, retrouvant ainsi une caractéristique de l'écoulement : la non-unicité.

Marcus [24] a conduit aussi une simulation numérique résolvant les équations de Navier-Stokes en régime instationnaire avec les conditions aux limites de l'écoulement de Taylor. Il utilise une méthode pseudo-spectrale où chaque paire de cellules est représentée par 33 modes axiaux, 32 modes azimutaux et 32 modes radiaux. Ses résultats montrent qu'au-dessus d'un nombre de Reynolds critique Re_{c2} ($Re > Re_{c2}$) :

- Les ondes azimutales sont des instabilités secondaires résultant de l'important mouvement radial existant à la frontière des cellules de Taylor lorsque l'écoulement est dirigé vers l'extérieur;
- A l'apparition des ondes, leur vitesse angulaire est égale à la vitesse du fluide au centre de la cellule de Taylor;

- Les ondes ont leur maximum d'amplitude sur la surface où le fluide a la même vitesse que les ondes.

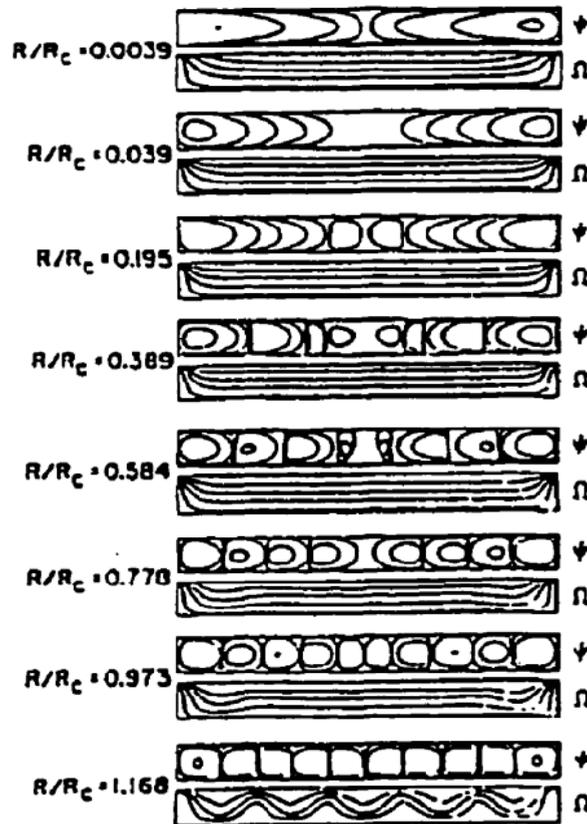


Figure I.13 : Evolution de la fonction de courant Ψ , et de la vitesse angulaire Ω dans un espace annulaire avec $\eta=0.333$ et $H/d=10$ [23].

Au cours des dernières années, on trouve le travail de **Tavener et al (1991)** qui ont étudié la stabilité hydrodynamique non linéaire dans l'intention de trouver un comportement dynamique complexe, proche du chaos. Ils ont utilisé une technique de bifurcation numérique en résolvant, par la méthode des éléments finis, les équations de Navier-Stokes pour les nombres de Reynolds très élevés.

Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom d'«écoulement de Taylor-Couette», n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes. Il a été bien documenté dans la revue classique publiée par **DIPRIMA & SWINNEY [25]**. En outre, l'article de **TAGG [26]** est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de Taylor, on enregistre des milliers de publications scientifiques traitant ce type d'écoulement. Il a été discuté en détail dans de nombreux ouvrages, en particulier dans **Chandrasekhar [6]** et **Drazin et Reid [27]**, et pour les

aspects non linéaires dans les ouvrages plus spécialisés de Chossat et Iooss (1994) et Koschnieder (1993).

On notera également l'existence d'un colloque bi-annuel entièrement consacré à cette expérience «International Couette-Taylor Workshop (ICTW)» - dont la 17^{ème} édition s'est tenue en Juillet 2011 à l'université de Leeds.

Par la suite, l'écoulement de Taylor-Couette a fait l'objet de nombreux travaux théoriques numériques et expérimentaux, parce qu'il sert de système-modèle en hydrodynamique et joue un rôle important dans plusieurs applications industrielles.

I.5 Applications technologiques et industrielles

Les écoulements de Taylor-Couette trouvent des applications en génie des procédés pour la filtration membranaire, en géophysique pour la convection dans le manteau terrestre et surtout dans le domaine des turbomachines. On peut citer aussi la technique utilisant les turbines qui s'intègrent dans les alternateurs des centrales électriques, les turbines que l'on rencontre dans les turboréacteurs en Avionique, les centrifugeuses, la fabrication des produits chimiques et pharmaceutiques et les viscosimètres. Egalement, il existe un autre domaine de grande importance qui concerne son utilisation systématique en tribologie pour établir des conditions optimales de lubrification des paliers de transmission de vitesses dans l'industrie automobile, en aéronautique et les centrales de production de l'énergie électrique, etc....

I.6 CONCLUSION

Dans ce tour d'horizon de la littérature, nous avons essayé de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition des instabilités au sein de l'écoulement Taylor Couette. Ces conditions dépendent de la vitesse de rotation du cylindre intérieur et extérieur, ainsi que du rapport des rayons des deux cylindres.

L'intérêt accordé à ce type d'écoulement dans l'industrie explique la richesse des études expérimentales et la diversité des approches théoriques et numériques.

Les études théoriques a vu les méthodes numériques prendre le pas sur les méthodes analytiques classiques. En fait, l'option pour une approche numérique implique, pour la méthode utilisée, qu'elle soit instationnaire, puisque les perturbations sont entraînées par l'écoulement.

CHAPITRE II

Modélisation mathématique
et numérique

INTRODUCTION

Dans ce chapitre on cherche à modéliser les phénomènes hydrodynamiques résultants de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres concentriques de rayons R_i , R_e respectivement, et pour les trois cas suivants :

- 1- Le cylindre intérieur est en rotation, le cylindre extérieur est maintenu fixe.
- 2- Les deux cylindres tournant dans le même sens.
- 3- Les deux cylindres tournant en sens inverse.

Le problème physique posé par les configurations précédentes est décrit par les équations aux dérivées partielles de continuité et des quantités de mouvement, dites Equations de Navier-Stokes, ainsi que par leurs conditions initiales et aux limites. Ces équations seront écrites dans les coordonnées cylindriques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail. Un schéma descriptif du système à étudier est donné dans la figure II.1.

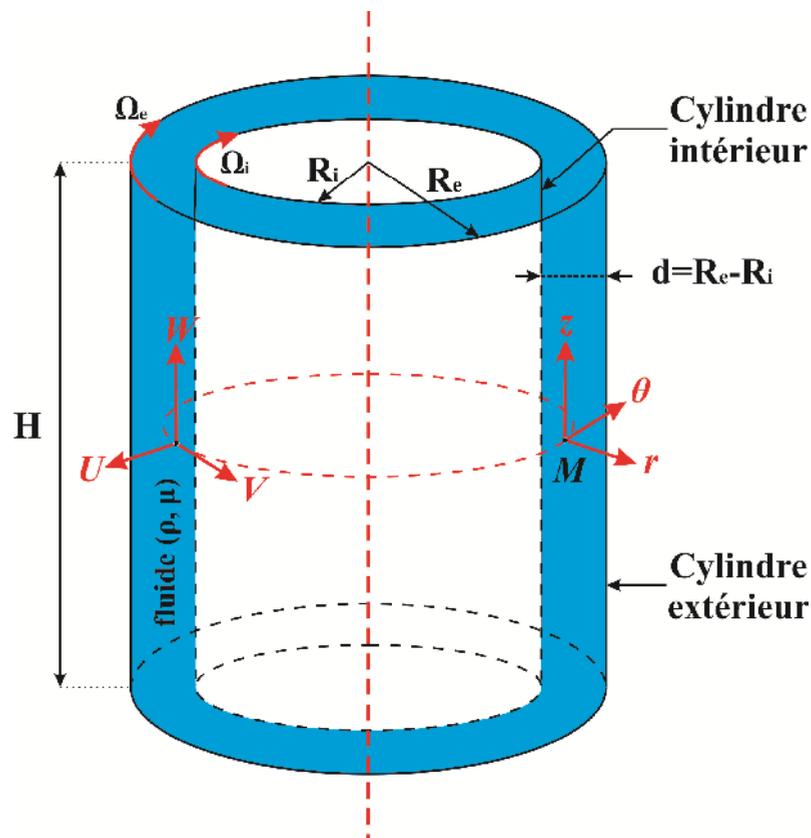


Figure II.1: Schéma descriptif du problème

Partie A : Modèle mathématique

II.1 Formulation mathématique du problème

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique de l'hydrodynamique de l'écoulement de Taylor-Couette.

Pour décrire cet écoulement, il suffit de déterminer les variables d'Euler qui sont : le vecteur vitesse V et la pression P .

II.1.1. Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier l'étude du problème on utilise les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le fluide considéré est supposé visqueux, newtonien et incompressible.
- La longueur de l'espace annulaire est supposée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions de façon à ce que les effets de bords deviennent négligeables.
- il n'y a pas de mouvement axial.
- Le seul champ est celui de la pesanteur.
- Il n'y a ni source de chaleur ou de masse ni réaction chimique.

II.1.2 Les équations hydrodynamiques

La description du champ de vitesse \vec{V} de composantes (U, V, W) et celui de pression P s'effectuent en fonction de l'espace et du temps t . Ils sont représentées dans un système de coordonnées cylindriques au point $M(r, \theta, z)$ (voir figure II.1) de façon que \vec{V} et le champ de pression P vérifient les équations hydrodynamiques, tel que:

II.1.2.1 L'équation de continuité

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité en coordonnées cylindriques se présente sous la forme suivante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.1.2.2 L'équation de la quantité de mouvement

Tenant compte des hypothèses précédentes et en coordonnées cylindriques à symétrie axiale, les équations projetées suivant les directions radiale, azimutale et axiale s'écrivent alors :

➤ **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUU) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(VU) + \frac{\partial}{\partial z}(WU) - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

➤ **Equation de quantité de mouvement azimutale :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUV) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(VV) + \frac{\partial}{\partial z}(WV) + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right]$$
(II.3)

➤ **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUW) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(VW) + \frac{\partial}{\partial z}(WW) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] - g$$
(II.4)

II.1.2.3 Conditions initiales

Nous considérons qu'à l'instant t=0, le fluide contenu dans l'espace annulaire est au repos. Ceci se traduit par la condition suivante :

A $t = 0 : U = V = W = 0$

II.1.2.4 Conditions aux limites :

Le domaine d'étude est défini par : $R_1 < r < R_2 ; 0 < \theta < 2\pi ; 0 < z < H$

Les conditions aux limites sont en général les conditions d'adhérence aux parois, comme suit :

➤ **z = 0 et z = H :**

$$R_1 \leq r \leq R_2 : U = V = W = 0$$

➤ **0 < z < H :**

	Cylindre intérieur	Cylindre extérieur
1^{er} cas		$r = R_e : U = V = W = 0$
2^{ème} cas	$r = R_i : \begin{cases} U = W = 0 \\ V = \Omega_i R_i \end{cases}$	$r = R_e : \begin{cases} U = V = 0 \\ W = -\Omega_e R_e \end{cases}$

II.1.3 Formulation adimensionnelle

Pour permettre d'avoir des informations généralisées à une variété des problèmes ayant les mêmes ordres de grandeurs des coefficients de similitude d'un côté, et d'un autre côté, réduire le nombre de paramètres d'un problème, on emploie la variable adimensionnelle. Permet d'exprimer la réalité des phénomènes physiques indépendamment des systèmes de mesures. En effet, pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence.

II.1.3.1. Grandeurs caractéristiques et variables adimensionnelles

On définit les grandeurs caractéristiques introduites dans nos équations du modèle mathématique comme suit :

$$\text{Distance radiale dimensionnelle : } r^* = \frac{r}{R_i}$$

$$\text{Cordonnée axiale dimensionnelle : } z^* = \frac{z}{R_i}$$

$$\text{Vitesse radiale adimensionnelle : } u^* = \frac{U}{\Omega_i R_i}$$

$$\text{Vitesse tangentielle adimensionnelle : } v^* = \frac{V}{\Omega_i R_i}$$

$$\text{Vitesse axiale adimensionnelle : } w^* = \frac{W}{\Omega_i R_i}$$

$$\text{Nombre de Reynolds : } Re = \frac{\Omega_i R_i^2}{\nu}$$

$$\text{Temps adimensionnel : } t^* = \Omega_i t$$

$$\text{Pression adimensionnelle : } p^* = \frac{P}{\rho(\Omega_i R_i)^2}$$

II.1.3.2 Equations adimensionnelles

Après l'introduction de ces variables adimensionnelles, le problème se posera sous la forme adimensionnelle suivante, on omet d'écrire l'exposant * pour des raisons de commodité:

a) Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

b) L'équation de la quantité de mouvement

➤ **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUU) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(VU) + \frac{\partial}{\partial z}(WU) - \frac{V^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

➤ **Equation de quantité de mouvement azimutale :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUV) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(VV) + \frac{\partial}{\partial z}(WV) + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \tag{1.7}$$

➤ Equation de quantité de mouvement axiale :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUW) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (rVW) + \frac{\partial}{\partial z} (rWW) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] - \frac{1}{\text{Fr}} \tag{1.8}$$

Avec :

Re : Nombre de Reynolds déjà défini,

Fr : Nombre de Froude qui mesure l'influence de la pesanteur, il exprime le rapport de l'énergie cinétique du fluide ($\rho \Omega_i^2 R_i^2$) par rapport au travail susceptible d'être effectué par la pesanteur ($\rho g R_l$). Ce nombre est donné par :

$$\text{Fr} = \frac{\Omega_i^2 R_i^2}{g R_l}$$

II.1.3.3 Conditions aux limites adimensionnelles :

On suppose : $\eta = R_i/R_e$ et $\varepsilon = \Omega_i/\Omega_e$

➤ $z = 0$ et $z = \gamma$:

$$1 \leq r \leq \frac{1}{\eta} : U = V = W = 0$$

➤ $0 < z < \gamma$:

	Cylindre intérieur	Cylindre extérieur
1 ^{er} cas	$r = 1 : \begin{cases} U = W = 0 \\ V = 1 \end{cases}$	$r = \frac{1}{\eta} : U = V = W = 0$
2 ^{ème} cas		$r = \frac{1}{\eta} : \begin{cases} U = V = 0 \\ V = -\frac{1}{\varepsilon \eta} \end{cases}$

Partie B : Modélisation numérique

Introduction :

Après avoir sélectionné les équations différentielles à résoudre (modélisation mathématique), il est nécessaire de transformer ces équations différentielles en équations algébriques où les variations continues des variables de l'écoulement sont représentées par des valeurs à des points discrets dans l'espace. Les locations discrètes dans l'espace sont représentées par des points nodaux (ou nœuds) choisis dans une grille (maille) numérique qui subdivise le domaine de l'écoulement.

Le choix d'une structure de grille détermine la flexibilité géométrique de la procédure numérique à utiliser et doit être fait selon la méthode de discrétisation choisie.

La discrétisation se fait selon l'une des quatre méthodes :

- Méthode des différences finies
- Méthode des volumes finis
- Méthode des éléments finis
- Méthodes spectrales

Dans la présente étude, on utilisera la méthode des volumes finis avec des volumes de contrôles quadrilatéraux et un maillage structuré. Le schéma de discrétisation employé est de type polynomial et le couplage vitesse-pression est calculé selon l'algorithme SIMPLER développée par Spalding et Patankar. Sa grande simplicité de mise en oeuvre a fait qu'elle a connu un essor depuis les années 1970-1980. Elle est à l'origine de la majorité des codes de calculs (Phoenics, Fluent, CFD,...). La méthode des volumes finis se distingue par sa fiabilité, son adaptation au problème physique, sa garantie pour la conservation de masse et de quantité de mouvement et de tout scalaire transportable sur chaque volume de contrôle et dans tout le domaine de calcul, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.

II.2 Méthode des volumes finis

Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés "volumes de contrôle". La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles, décrites au chapitre précédent, sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit "nœud principal", comme indiqué dans la figure (II.1).

La méthode des volumes finis, comporte essentiellement :

- La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle ;
- La formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles ;

- Le choix d'un schéma représentant la variation de la quantité physique et l'assemblage des diverses équations ;
- Le modèle doit être stable et convergent.

II.3 Maillage

On découpe l'espace annulaire selon les directions r , θ et z en un ensemble de volumes élémentaires finis ou « volumes de contrôle » égaux à $(\Delta V = r\Delta r\Delta\theta\Delta z)$. Le centre d'un volume fini typique est un point P, et les centres de ses faces latérales est, ouest, nord, sud, front et arrière sont les points e, w, n, s, t et b, respectivement. Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de six autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N, S, T et B. La variable scalaire (pression) est stockée au point centré dans les volumes finis, alors que les trois composantes des vitesses sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis. Une illustration d'un volume fini typique est montrée dans la figure (II.2) tandis que le domaine de calcul est représenté dans les figures (II.3), (II.4) et (II.5) qui traduisent, respectivement, des projections suivant les trois plans : (r, θ) , (θ, z) , (r, z) . Les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées (discretisées) dans le volume fini typique ; cependant, celles des composantes de la vitesse sont intégrées dans des volumes finis décalés. Celui de la composante de vitesse radiale est décalé vers la droite, celui de la composante azimutale est décalé vers le haut et celui de la composante axiale est décalé vers le front. Il est bien connu que ce décalage est nécessaire pour éviter certaines instabilités numériques.

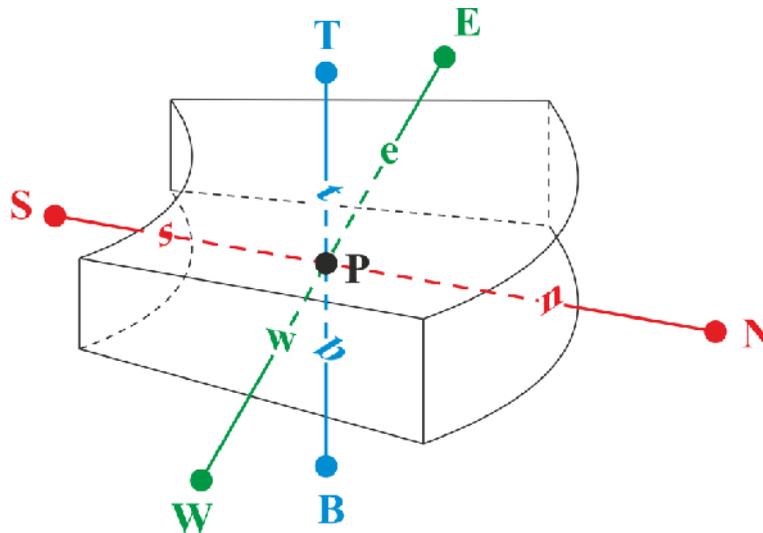


Figure II.2 : Volume de contrôle typique

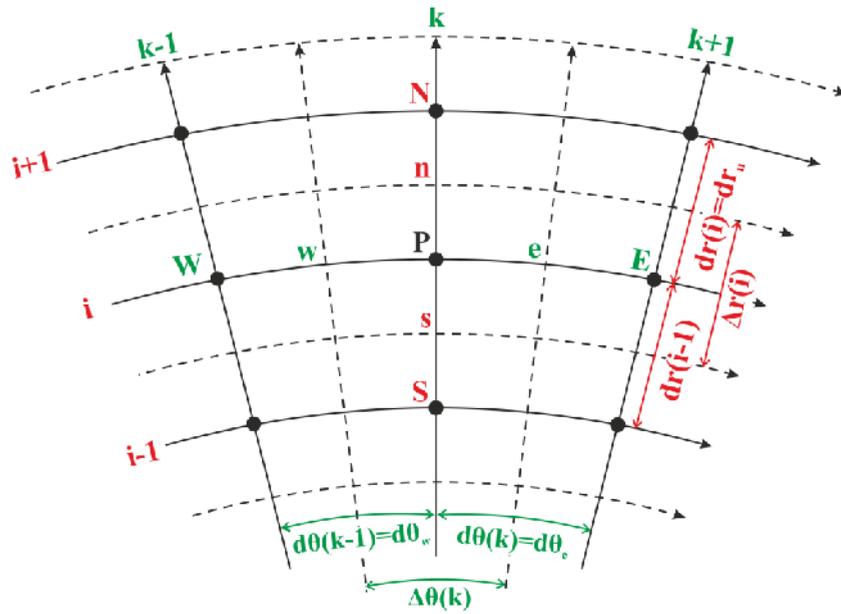


Figure II.3: Projection du volume fini dans le plan (r, θ)

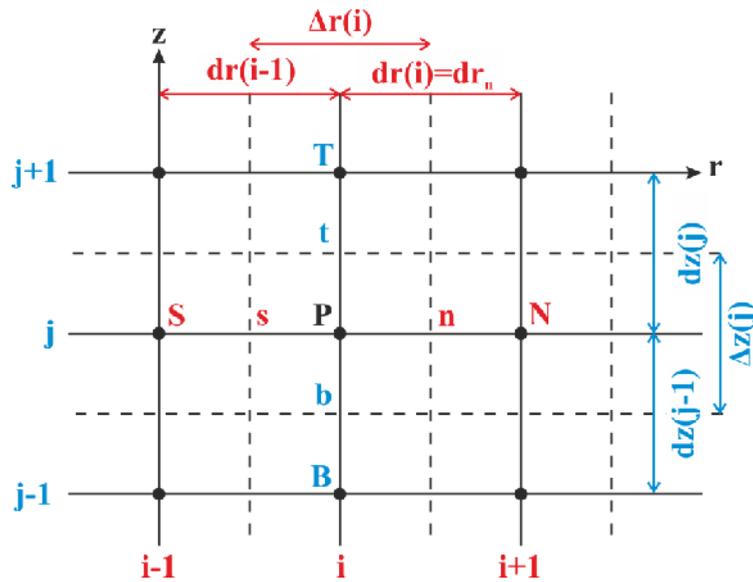


Figure II.4: Projection du volume fini dans le plan (r, z)

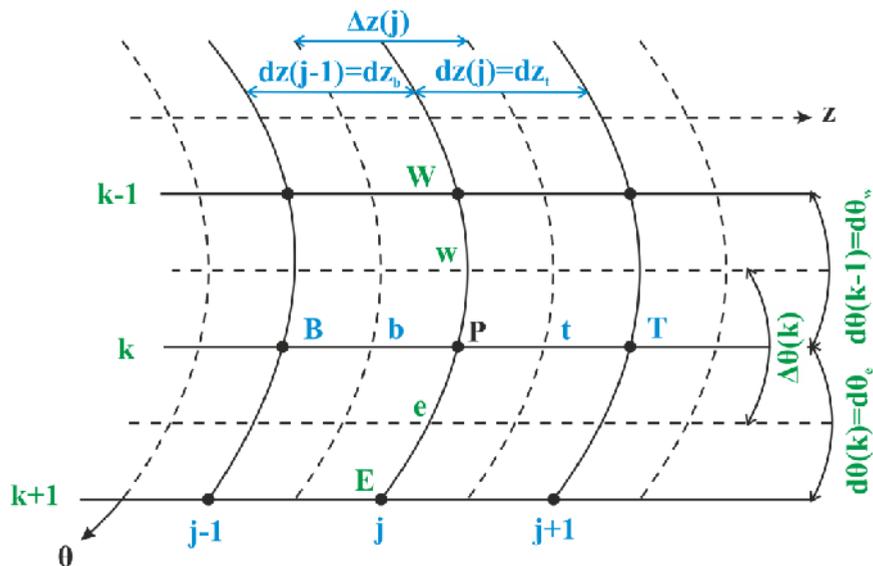


Figure II.5 : Projection du volume fini dans la section (θ, z)

II.4 La discrétisation

Les équations de conservation présentées précédemment peuvent être écrites sous une forme commune (II.1). Cette formulation permet de ne pas réitérer le travail de discrétisation pour chaque équation.

L'équation générale de transport d'une variable ϕ pour un écoulement incompressible dans le cas stationnaire s'écrit dans le système cylindrique comme suit :

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (W\phi)}_C = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}_D + S_\phi \tag{II.1}$$

C : Représente le terme de transport par convection.

D : Représente le terme de transport par diffusion.

S_ϕ : Représente le terme source.

Avec :

U : Composante radiale de la vitesse.

V : Composante azimutale de la vitesse.

W : Composante axiale de la vitesse.

γ : Coefficient de diffusion.

Dans le tableau suivant, nous donnons la définition de ϕ , γ et S_ϕ pour les équations qui gouvernent notre problème.

Equation	ϕ	γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant r	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{V^2}{r} + \frac{1}{Re} \left[-\frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]$
Quantité de mouvement suivant θ	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{UV}{r} + \frac{1}{Re} \left[-\frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right]$
Quantité de mouvement suivant z	W	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{Fr}$

Tableaux (II.1) : Les variables et les coefficients des équations de transport adimensionnelles.

L'équation (II.1) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (J_z) = S_\phi \tag{II.2}$$

Avec :

$$\begin{cases} J_r = rU\phi - r\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ J_\theta = V\phi - \frac{1}{r}\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ J_z = W\phi - \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases}$$

J_r , J_θ et J_z , sont les flux totaux (convection et diffusion) par unité de surface dans les directions r , θ et z . La discrétisation consiste à transformer l'équation différentielle de transport en un système d'équations algébriques. L'équation (II.2) est d'abord intégrée sur le volume de contrôle:

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial\phi}{\partial t} r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta dz \\ + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (J_z) r dr d\theta dz = \int_s^n \int_w^e \int_b^t S_\phi r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (II.3)$$

Pour pouvoir approximer l'équation sous forme algébrique, on considère les hypothèses suivantes:

- La variable généralisée ϕ varie linéairement entre les nœuds principaux dans les deux directions ;
- Les termes convectifs et diffusifs sont uniformes à travers les faces correspondantes ;
- Le terme source est uniforme sur le volume de contrôle.

II.4.1 Intégration du flux total

L'intégration du terme convectif et diffusif pour tout le volume de contrôle est :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (J_z) r dr d\theta dz = \\ [(J_r)_n - (J_r)_s] \Delta\theta\Delta z + [(J_\theta)_e - (J_\theta)_w] \Delta r\Delta z + [(J_z)_t - (J_z)_b] r_p \Delta r \Delta \theta \end{aligned} \quad (II.4)$$

Si on pose :

$$J_n = (J_r)_n \Delta\theta\Delta z ; J_s = (J_r)_s \Delta\theta\Delta z$$

$$J_e = (J_\theta)_e \Delta r\Delta z ; J_w = (J_\theta)_w \Delta r\Delta z$$

$$J_t = (J_z)_t r_p \Delta r \Delta \theta ; J_b = (J_z)_b r_p \Delta r \Delta \theta$$

Donc l'expression (II.5) devient :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (J_r) r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (J_\theta) r dr d\theta dz + \int_s^n \int_w^e \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (J_z) r dr d\theta dz = \\ J_n - J_s + J_e - J_w + J_t - J_b \end{aligned} \quad (II.5)$$

II.4.2 Intégration du terme source

L'intégration du terme source pour tout le volume de contrôle est :

$$\int_{s}^n \int_w^e \int_b^t S_{\phi} r dr d\theta dz = \overline{S_{\phi}} r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

Où $\overline{S_{\phi}}$ est la valeur moyenne du terme source sur ce volume.

Quand le terme source dépend de la variable dépendante. Cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ceci permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

La linéarisation est l'évaluation de la valeur moyenne $\overline{S_{\phi}}$ qui peut être fonction de la variable dépendante, leur valeur est donc calculée à chaque itération à partir des nouvelles valeurs des variables dépendantes.

Suite à la résolution des équations algébriques adoptées, le terme source sera linéarisé de façon à forcer la convergence, de sorte que :

$$\overline{S_{\phi}} = S_c + S_p \phi_p \quad (\text{II.6})$$

Où :

S_c est la partie constante qui ne dépend pas explicitement de ϕ_p .

S_p est la pente de ϕ_p .

Il est nécessaire que le coefficient S_p soit inférieur à zéro pour que la solution soit numériquement stable et que la convergence soit plus rapide.

II.4.3 Discrétisation spatiale :

Discrétiser une équation différentielle aux dérivées partielles revient à remplacer l'information continue exacte, contenue dans cette équation par une information discrète contenue dans une équation algébrique.

L'approximation de la variable généralisée ϕ aux interfaces du volume de contrôle se fera donc avec le choix du schéma de discrétisation approprié. Le rôle du schéma intervient pour expliquer comment évaluer les flux de diffusion et de convection sur les faces du volume de contrôle après intégration.

La forme stationnaire de l'équation (II.3) est :

$$J_n - J_s + J_e - J_w + J_t - J_b = (S_c + S_p \phi_p) r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z \quad (\text{II.8})$$

Où J_i ($i = n, s, e, w, t, b$) est le flux total évalué sur chaque face du volume de contrôle. Ce flux est composé de deux parties : flux convectif et diffusif.

Par exemple :

$$J_n = \left(rU \phi - r\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_n$$

(II.9)

On peut utiliser les schémas suivants :

a) Schéma aux différences centrées (CDS)

Pour évaluer le flux convectif à l'interface, la variation de la variable ϕ entre deux nœuds adjacents doit être exprimée par un profil linéaire. On suppose que les faces (n, s, e, w, t, b) se trouvent au milieu des nœuds (N, S, E, W, T, B) respectivement, les termes convectifs des variables généralisées ϕ se présentent par une interpolation comme suit :

$$\begin{cases} \phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) ; \phi_s = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \\ \phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) ; \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \\ \phi_f = \frac{1}{2}(\phi_F + \phi_P) ; \phi_b = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_B) \end{cases}$$

(II.10)

Les parties diffusives sont évaluées en approximant les dérivées par les différences, ce qui donne:

$$\begin{cases} r\gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n = r_n \gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{dr_n} ; r\gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_s = r_s \gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{dr_s} \\ \frac{1}{r} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_e = \frac{1}{r_e} \gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{d\theta_e} ; \frac{1}{r} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_w = \frac{1}{r_w} \gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{d\theta_w} \\ \gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_f = \gamma \frac{\phi_F - \phi_P}{dz_f} ; \gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_b = \gamma \frac{\phi_P - \phi_B}{dz_b} \end{cases}$$

(II.11)

Remplaçons les formules (II.10) et (II.11) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_F \phi_F + a_B \phi_B + b$$

Où : $a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_F + a_B - S_p \Delta V$

$$\begin{cases} a_N = D_n - \frac{C_n}{2} ; a_S = D_s - \frac{C_s}{2} \\ a_E = D_e - \frac{C_e}{2} ; a_W = D_w - \frac{C_w}{2} \\ a_F = D_f - \frac{C_f}{2} ; a_B = D_b - \frac{C_b}{2} \end{cases}$$

(II.12)

$b = S_c \Delta V$; $D_i = \frac{\gamma}{\delta x_i}$ est la conductance de la diffusion toujours positive,

et $C_i = (rU, V, W)_i$ la force de convection, elle peut être positif ou négatif, selon le sens de l'écoulement.

Les coefficients de discrétisation A_i ($i = N, S, E, W, T, B$) rassemblant les flux convectifs et diffusifs.

Les coefficients A_i doivent avoir le même signe positif (la deuxième règle de base de la méthode des volumes finis), mais la relation (III.12) peut créer des coefficients négatifs.

Les coefficients de l'équation (III.12) écrits en terme du nombre de Peclet (P_e) sont donnés par:

$$\begin{cases} a_N = D_n \left(1 - \frac{P_{en}}{2}\right) ; a_S = D_s \left(1 - \frac{P_{es}}{2}\right) \\ a_E = D_e \left(1 - \frac{P_{ee}}{2}\right) ; a_W = D_w \left(1 - \frac{P_{ew}}{2}\right) \\ a_F = D_f \left(1 - \frac{P_{ef}}{2}\right) ; a_B = D_b \left(1 - \frac{P_{eb}}{2}\right) \end{cases} \quad (II.13)$$

Où P_e est le nombre de Peclet qui représente le rapport local de la convection à la diffusion.

$$P_{ei} = \frac{C_i (\delta x_i)}{\gamma}, \quad i = (n, s, e, w, t, b)$$

Pour que ces coefficients soient positifs, le nombre P_e doit être dans l'intervalle $[-2, 2]$, et $S_p \leq 0$. L'application de ce schéma n'est avantageuse que si $|P_e| \leq 2$, ceci est réalisé pour des maillages fins.

b) Schéma QUICK

Le schéma QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics) à été donné par Leonard en 1979, ce schéma propose d'approximer la variation de la variable ϕ par une interpolation quadratique (par une parabole) entre les deux voisins amont et le voisin aval afin d'évaluer la valeur de ϕ à l'interface du volume de contrôle comme le montre la figure (II-6).

L'équation discrétisée est écrite sous la forme :

$$[F_n \phi_n - F_s \phi_s] + [F_e \phi_e - F_w \phi_w] + [F_t \phi_t - F_b \phi_b] = D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) + D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_t (\phi_T - \phi_P) - D_b (\phi_P - \phi_B) + (S_c + S_p \phi_p) r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

La valeur de ϕ sur les faces n, s, e, w et t et b peut être donné par :

1) Si $F_i > 0$, $i = (n, s, e, w, t, b)$

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_N - \frac{1}{8} \phi_S ; \phi_s = \frac{6}{8} \phi_S + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{SS} \\ \phi_e &= \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W ; \phi_w = \frac{6}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{WW} \\ \phi_t &= \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_T - \frac{1}{8} \phi_B ; \phi_b = \frac{6}{8} \phi_B + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{BB} \end{aligned} \quad (II.14)$$

On aura donc la relation :

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_T \phi_T + a_B \phi_B + a_{SS} \phi_{SS} + a_{WW} \phi_{WW} + a_{BB} \phi_{BB} + b$$

Avec : $b = S_c r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$

$$\begin{cases} a_N = D_n - \frac{3}{8}F_n \\ a_S = D_s + \frac{1}{8}F_n + \frac{3}{4}F_s \\ a_{SS} = -\frac{1}{8}F_s \end{cases} ; \begin{cases} a_E = D_e - \frac{3}{8}F_e \\ a_W = D_w + \frac{1}{8}F_e + \frac{3}{4}F_w \\ a_{WW} = -\frac{1}{8}F_w \end{cases} ; \begin{cases} a_T = D_t - \frac{3}{8}F_t \\ a_B = D_b + \frac{1}{8}F_t + \frac{3}{4}F_b \\ a_{BB} = -\frac{1}{8}F_b \end{cases}$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_T + a_B + a_{SS} + a_{WW} + a_{BB} + (F_s - F_n) + (F_w - F_e) + (F_b - F_t) - S_p r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

2) Si $F_i < 0$, $i = (n, s, e, w, t, b)$

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{6}{8}\phi_N + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{NN} ; \phi_s = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_S - \frac{1}{8}\phi_N \\ \phi_e &= \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE} ; \phi_w = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_E \\ \phi_t &= \frac{6}{8}\phi_T + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{TT} ; \phi_b = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_B - \frac{1}{8}\phi_T \end{aligned} \tag{II.15}$$

On aura donc la relation :

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_T \phi_T + a_B \phi_B + a_{NN} \phi_{NN} + a_{EE} \phi_{EE} + a_{TT} \phi_{TT} + b$$

Avec :

$$b = S_c r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

$$\begin{cases} a_N = D_n - \frac{1}{8}F_s - \frac{3}{4}F_n \\ a_S = D_s + \frac{3}{8}F_s \\ a_{NN} = \frac{1}{8}F_n \end{cases} ; \begin{cases} a_E = D_e - \frac{3}{4}F_e - \frac{1}{8}F_w \\ a_W = D_w + \frac{3}{8}F_w \\ a_{EE} = \frac{1}{8}F_e \end{cases} ; \begin{cases} a_T = D_t - \frac{3}{8}F_t \\ a_B = D_b + \frac{1}{8}F_t + \frac{3}{4}F_b \\ a_{TT} = \frac{1}{8}F_t \end{cases}$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_T + a_B + a_{NN} + a_{EE} + a_{TT} + (F_n - F_s) + (F_e - F_w) + (F_t - F_b) - S_p r_p \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

Si $F_i > 0$, $i = (n, s, e, w, t, b)$

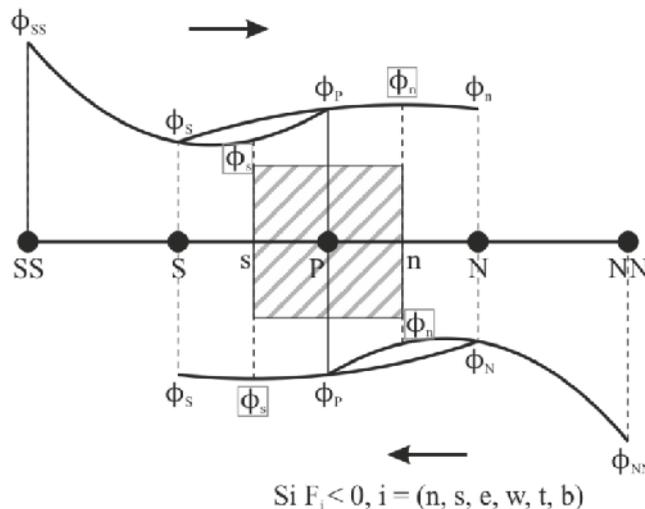


Figure III-6 : Le maillage du Schéma QUICK

Nous avons adopté le schéma QUICK qui fournit une meilleure précision que les autres schémas pour les écoulements rotationnels et tourbillonnaires résolus sur maillages structurés de type quadrilatère ou hexaédrique.

II.5 Procédure de Résolution :

Le résultat de la discrétisation des équations différentielles de transport est un ensemble d'équations algébriques non linéaires. Si on divise le domaine de calcul en N mailles selon r , en M mailles selon θ et L mailles selon z , on aura un système de $N \times M \times L$ équations algébriques non linéaire pour chaque variable ϕ considérée. Rappelons que les variables ϕ , dans notre problème, sont les composantes de la vitesse U , V et W . Un problème subsiste du fait qu'il n'existe pas d'équation donnant directement le champ de pression. Il faut faire à une méthode itérative.

II.5.1 Choix de la méthode d'interpolation de la pression

Le choix du schéma d'interpolation de la pression est disponible uniquement lorsque le solveur découplé est choisi. Pour la plupart des cas, le schéma standard est acceptable, mais pour des écoulements spécifiques, d'autres schémas sont plus recommandés, à savoir :

- Le schéma PRESTO est plus adapté aux problèmes de convection naturelle à grand nombre de Rayleigh, les écoulements hautement tourbillonnaires à grande vitesse de rotation, les écoulements impliquant les milieux poreux ou les écoulements dans des domaines fortement courbés.
- Le schéma de deuxième ordre est à utiliser dans les écoulements compressibles. Ce schéma n'est pas applicable pour les fluides avec un gradient de pression discontinue imposé par la présence de milieux poreux ou dans le cas d'utilisation de modèle VOF ou modèle de mélange pour les écoulements multiphasiques.

Le schéma PRESTO a été choisi pour effectuer nos simulations numériques.

II.5.2 Choix de l'algorithme de couplage pression-vitesse

Les deux algorithmes SIMPLE et SIMPLEC sont utilisés dans le cas de simulations en régime stationnaire. Ils sont très similaires, la différence majeure entre eux est qu'on peut assigner à l'algorithme SIMPLEC un facteur de sous-relaxation proche de 1. L'utilisation de l'algorithme SIMPLEC augmente la rapidité de la convergence de calcul dans la plupart des cas mais elle peut entraîner aussi des problèmes d'instabilités de la solution numérique. Dans ce cas il faut, soit diminuer le facteur de sous relaxation et relancer de nouveau les calculs, soit utiliser l'algorithme SIMPLE qui assure la convergence de calcul. L'algorithme PISO est fortement recommandé dans le cas des écoulements instationnaire ou pour les écoulements stationnaires avec un maillage qui contient des cellules très obliques. En comparaison avec l'algorithme

SIMPLE, cet algorithme implique une capacité de stockage mémoire considérable à cause des deux corrections effectuées. Il n'est pas clair dans quelles conditions les algorithmes ont de meilleures performances. La performance de chaque algorithme dépend des conditions d'écoulement et du degré de couplage entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de transport de la variable ϕ . Par exemple dans l'algorithme PISO, on ajoute une correction supplémentaire sur chaque itération pour améliorer la performance [Popa (2002)]. Cependant dans le cadre de notre étude et pour des raisons de sécurité, l'algorithme SIMPLE, qui est le plus robuste et qui assure la convergence de calcul, est choisi pour effectuer les simulations numériques.

L'algorithme SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations) est une procédure de prédiction du correction, avec laquelle il nous sera possible de tirer un champ de pression et de vitesse vérifiant à la fois les équations de quantité de mouvement et celle de continuité.

Cet algorithme résume la résolution du problème posé dans les séquences suivantes :

- Estimer un champ de vitesse,
- Calculer les coefficients pour les équations du mouvement et déterminer les pseudo vitesses U' , V' et W' ,
- Calculer les coefficients pour l'équation de pression et obtenir le champ de pression,
- Considérer le champ de pression P comme champ estimé P^* et résoudre les équations de mouvement pour obtenir les vitesses U^* , V^* et W^* ,
- Calcul du terme b de l'équation de correction de la pression et puis la résoudre pour obtenir les corrections de pression P' ,
- Correction des valeurs des vitesses,

Cette succession d'opérations est reprise et se poursuit jusqu'à convergence des différentes grandeurs calculées.

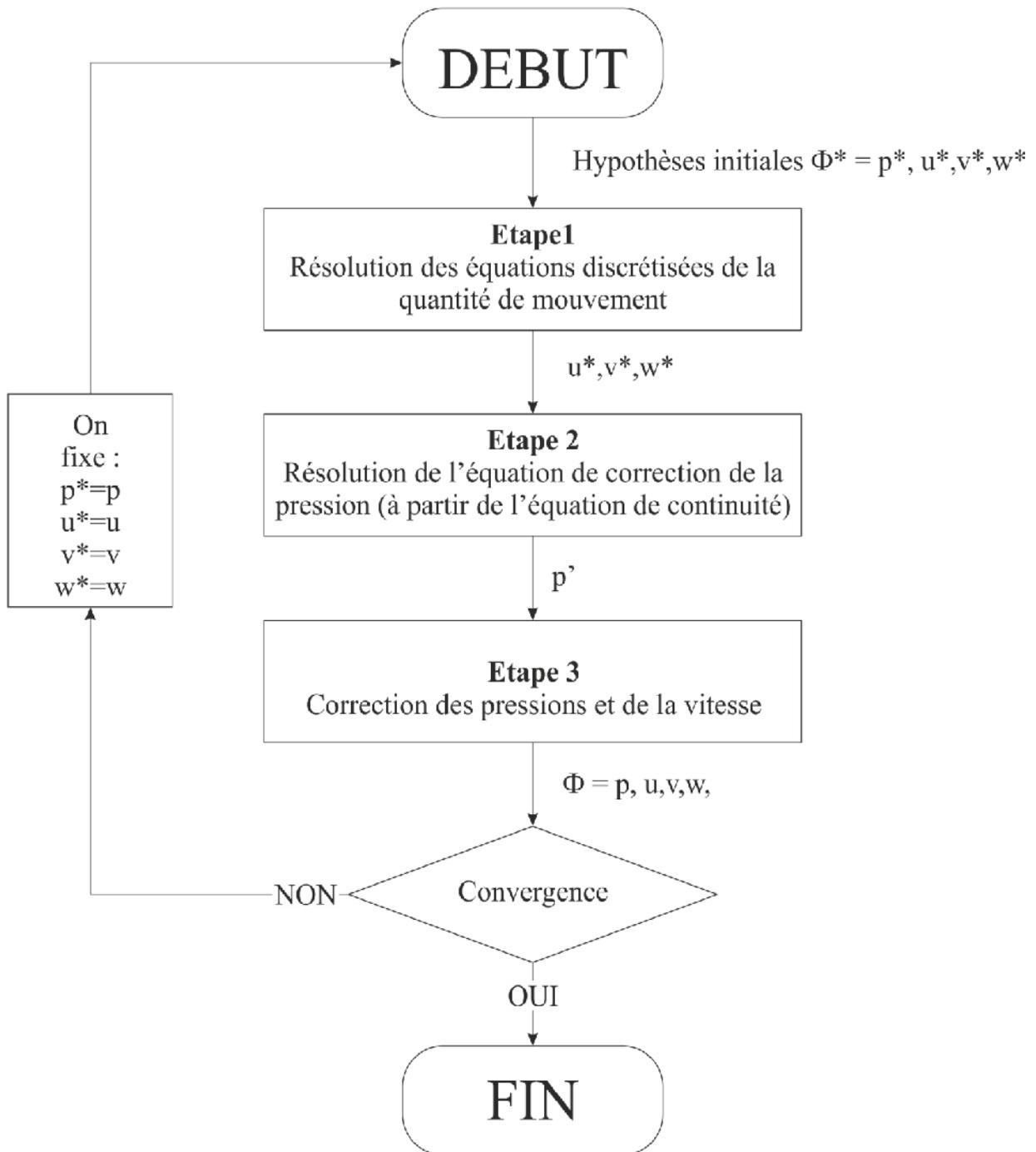


Schéma représentatif de l'algorithme SIMPLE

II.6 Présentation du code de calcul

Les logiciels de simulation numérique des écoulements par des méthodes de volumes finis peuvent maintenant être considérés comme de véritables “expériences numériques” lorsque les simulations sont faites avec soin. L’avantage des méthodes numériques est que toutes les quantités physiques liées à l’écoulement (champ de vitesse, champ de pression, contraintes, ...) sont immédiatement disponibles. Dans une expérience, l’obtention de ces quantités en tous points du champ est souvent impossible ou très difficile en pratique. En revanche, la simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes est encore limitée à des nombres de Reynolds modérés et à des écoulements en géométries simples [Dubois et al. (1999), Piquet. (1999)].

Cette section porte sur la faisabilité d’utilisation d’un code de calcul numérique de dynamique des fluides pour modéliser les champs de vitesses et de pression de l’écoulement de Taylor-Couette.

Nous présentons le logiciel CFD retenu pour la modélisation. Pour réaliser nos simulations, le choix s’est porté sur le code de calcul commercial Fluent [Fluent 6.3.26] que nous présentons dans cette partie. Avant d’effectuer des simulations et présenter les principaux résultats, nous devons présenter le code calcul FLUENT.

II.6.1 Architecture du logiciel

Comme tout logiciel de CFD, il est composé de trois éléments : le préprocesseur, le solveur et le postprocesseur.

- La définition du problème à résoudre s’effectue à l’aide du préprocesseur Gambit. Il permet de représenter la géométrie du système, de définir le type de conditions limites aux frontières du domaine, de spécifier le type de matériau (fluide ou solide). Il fournit aussi la possibilité de discrétiser le domaine, en proposant plusieurs algorithmes de maillage suivant sa géométrie.
- Le solveur permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression) dans lesquelles est effectuée la simulation, ainsi que la spécification des conditions aux limites. Enfin, il permet de choisir le processus itératif, en proposant notamment plusieurs schémas numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle, et pour le couplage de la vitesse et de la pression. Il offre également une interface permettant de contrôler à tout moment l’état d’avancement des calculs.
- Le postprocesseur est l’élément qui permet de visualiser la géométrie et le maillage du domaine, mais surtout d’afficher les résultats obtenus. Il est ainsi possible de visualiser les champs du vecteur vitesse, les champs de pression, de turbulence ainsi que toutes les autres

grandeurs calculées sur un segment, une section du domaine ou sur tout le volume. Il offre aussi la possibilité de tracer des courbes et de visualiser les lignes de courant ou la trajectoire de particules.

Le code Fluent, largement utilisé dans l'industrie aéronautique, automobile, offre une interface sophistiquée qui facilite son utilisation. Ces raisons ont motivé notre choix pour l'utilisation de ce logiciel.

II.6.2 Génération des calculs par FLUENT

La génération du calcul dans «FLUENT» passe par les étapes suivantes :

- 1- Charger la géométrie par Fluent : **File – Read – Case**
- 2- Vérification du maillage : **Grid – Check**
- 3- Afficher le maillage : **Display – Grid**
- 4- Définir le Modèle de solution : **Define – Solver**
- 5- Définir le Modèle (laminaire ou Turbulent) : **Define – Models – Viscous**
- 6- Définir la Matière. **Define – Materials**
- 7- Définir les conditions aux limites. **Define – Boundary – Conditions**
- 8- Choix du control de solution. **Solve – Controls – Solution**
- 9- Enregistrer les informations liées au problème. **File – write – Case & Dat**

Le fichier **Case** (regroupe toutes informations liées à la géométrie).

Le fichier **Dat** (contient tous les paramètres et données des calculs).

- 10- Initialiser le calcul. **Solve – Initialize – Initialize**
- 11- Vérifier les résidus des calculs. **Solve – Monitors – Residual**
- 12- Choisir le nombre des itérations et lancer les calculs. **Solve – Iterate**
- 13- Post traitement des résultats. **(Display, Plot, Repport – etc)**

CHAPITRE III

Résultats et discussions

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on présente les résultats de notre étude obtenus par la simulation numérique. Cette étude numérique est basée sur des données et des conditions qui sont proches du système expérimental [27]. L'étude a pour objectif d'étudier l'influence des paramètres de contrôle (rapport d'aspect, facteur de forme et angle de l'inclinaison) sur l'écoulement et les mécanismes de l'instabilité, ainsi que la transition du régime laminaire vers la 1^{ère} et la 2^{ème} instabilité.

Ces résultats numériques sont présentés graphiquement sous plusieurs formes (lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, iso-valeurs des pressions, ... etc) dans les trois cas traité : cylindre intérieur en rotation, la co-rotation et la contre-rotation des cylindres. Pour bien présenter notre travail on a divisé ce chapitre en deux parties :

La première partie porte sur l'étude de l'écoulement entre deux cylindres concentriques avec le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur maintenue fixe. La deuxième partie concerne l'écoulement entre deux cylindres tournant dans le même sens et en sens inverse.

Pour assurer des résultats numériques plus fiables, on commence par examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, et déduire la qualité de l'approximation de la solution, et l'explication de la méthode qui nous permet de définir les vitesses critique de transition. La validation du code utilisé dans les calculs, est obtenu par la comparaison des résultats trouvés avec d'autres données expérimentales et numériques trouvées dans la littérature.

III.1 Etude de l'influence des paramètres du calcul numérique

Le but de cette partie est de fixer les différents paramètres du calcul numérique qui seront utilisés pour toutes les simulations dans le cas tridimensionnel tels que le choix de l'indépendance du maillage et le critère de convergence.

III.1.1 Etude d'indépendance du maillage

Dans le domaine du calcul numérique, le maillage joue un rôle prépondérant sur la fidélité des résultats. Le choix de celui-ci dépend de la précision attendue du calcul et des ressources informatiques disponibles. L'utilisation d'un maillage grossier donne des résultats erronés, tandis qu'un maillage fin alourdit le temps de calcul, occupe plus de mémoire sur les machines et demande beaucoup de capacité de stockage lors du traitement des résultats. Le but est de trouver un maillage qui occupe le moins d'espace, consomme le moins de temps et assure des résultats indépendants. Pour évaluer l'influence de la finesse du maillage sur les résultats obtenus, des séries de calcul ont été menées pour des maillages de tailles différentes. Les

simulations ont été effectuées pour huit maillages et cela, en allant du maillage le plus grossier au plus fin. Les caractéristiques de chaque maillage sont synthétisées dans le tableau III-1.

	Maillage 1	Maillage 3	Maillage 4	Maillage 5	Maillage 6	Maillage 7	Maillage 8
Nombre de nœuds	57469	103572	142416	232848	394764	728402	1664322
Nombre de faces	137903	257366	357538	603647	1048034	1972489	4616150
Nombre de mailles	40300	77000	107679	185537	326800	622250	1476189

Tableau III.1 : Caractéristiques des différents maillages testés

On peut considérer que le domaine physique a été discrétisé avec un nombre de cellules suffisant dès lors que la solution obtenue devient indépendante de l’augmentation du nombre des mailles. La figure III-1 montre l’évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de nœuds utilisé.

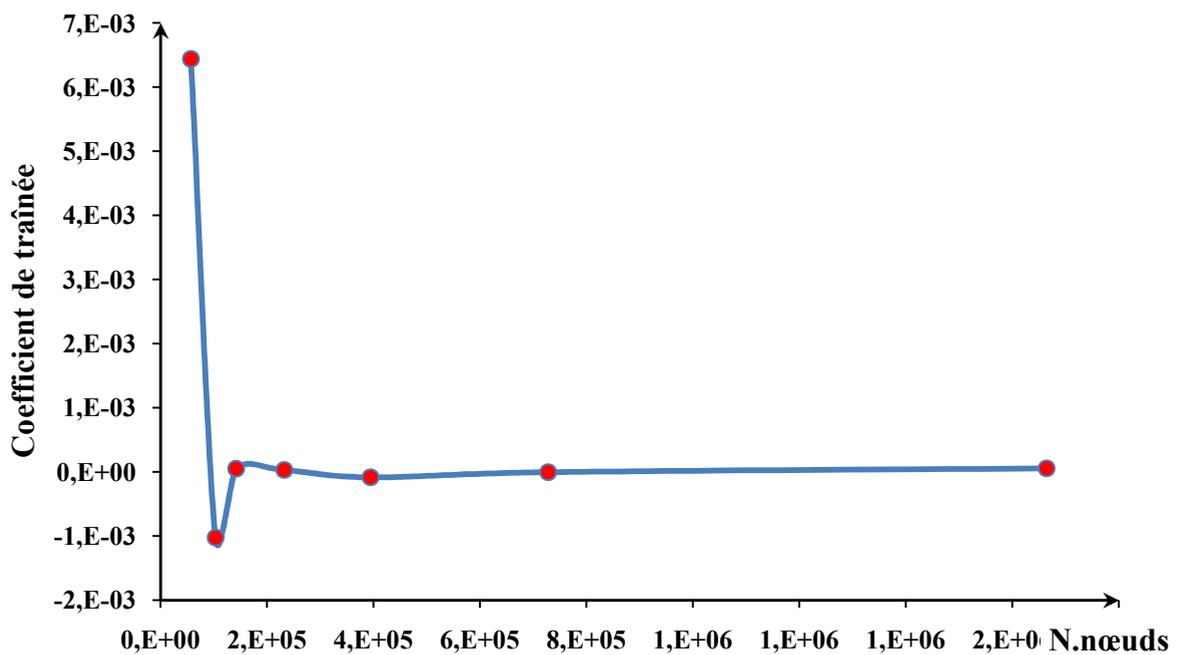
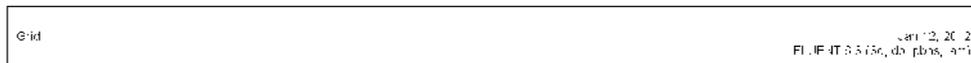
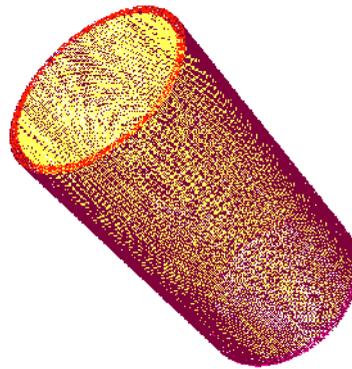


Figure III.1 : Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Nœuds

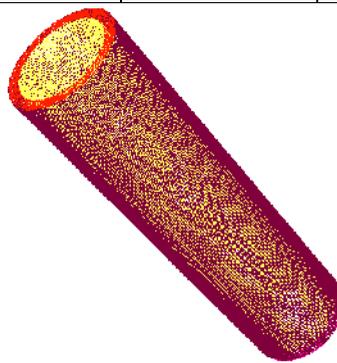
La figure III-1 montre clairement qu’un maillage grossier ne permettait pas de satisfaire les exigences de précision. On peut observer que plus le nombre de nœuds du maillage est grand, plus le coefficient de traînée se stabilise ; cela est plus clair pour un nombre de mailles compris entre 4.E+05 et 2.E+06. Pour cette intervalle (nombre de mailles entre 4.E+05 et 2.E+06), le résultat est pratiquement le même et l’écart sur le coefficient de traînée ne dépasse pas 0,2%. La taille de maillage obtenu pour la géométrie A est :

Géométrie	Cells	Faces	Nodes
A	227318	737803	283467



La taille de maillage obtenu pour la géométrie B est :

Géométrie	Cells	Faces	Nodes
B	469500	1476965	538188



La taille de maillage obtenu pour la géométrie C est :

Géométrie	Cells	Faces	Nodes
C	287448	915152	340550

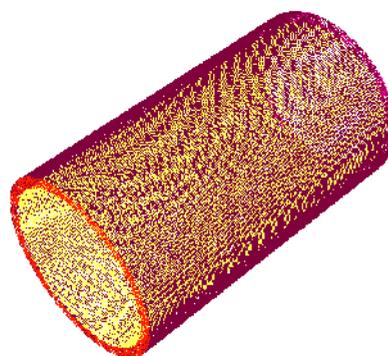


Figure III.2 : Visualisation du maillage de chaque géométrie étudié

Le raffinement du maillage ne peut être poursuivi continuellement, pour deux raisons : D'une part, l'augmentation du nombre de cellules du maillage implique l'alourdissement du temps de calcul et la difficulté de traitement des résultats. D'autre part, l'accroissement de la densité du maillage implique la diminution de la taille des cellules au voisinage des parois. D'après ces résultats, le choix du nombre de nœuds 394764 semble suffisant pour toutes nos simulations à venir. Ce maillage offre un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

III.1.2 Influence du critère de convergence

Sous Fluent, la valeur par défaut du critère de convergence est égale à 10^{-3} . La convergence du calcul est surveillée principalement suivant la valeur des résidus des différents paramètres de l'écoulement. Dans la littérature, la plupart des travaux numériques utilisent directement le critère de convergence fixé par défaut dans Fluent, à savoir 10^{-3} .

Le but de cette partie est de savoir si cette valeur est suffisante pour assurer l'indépendance des résultats ou s'il faut aller au-delà de cette dernière. Pour ce faire, le calcul a été effectué avec plusieurs critères de convergence allant de 10^{-3} jusqu'à 10^{-8} en gardant les mêmes paramètres de calcul définis dans la première partie de ce chapitre. La figure (III.3) représente la sensibilité de la solution calculée en fonction du critère de convergence.

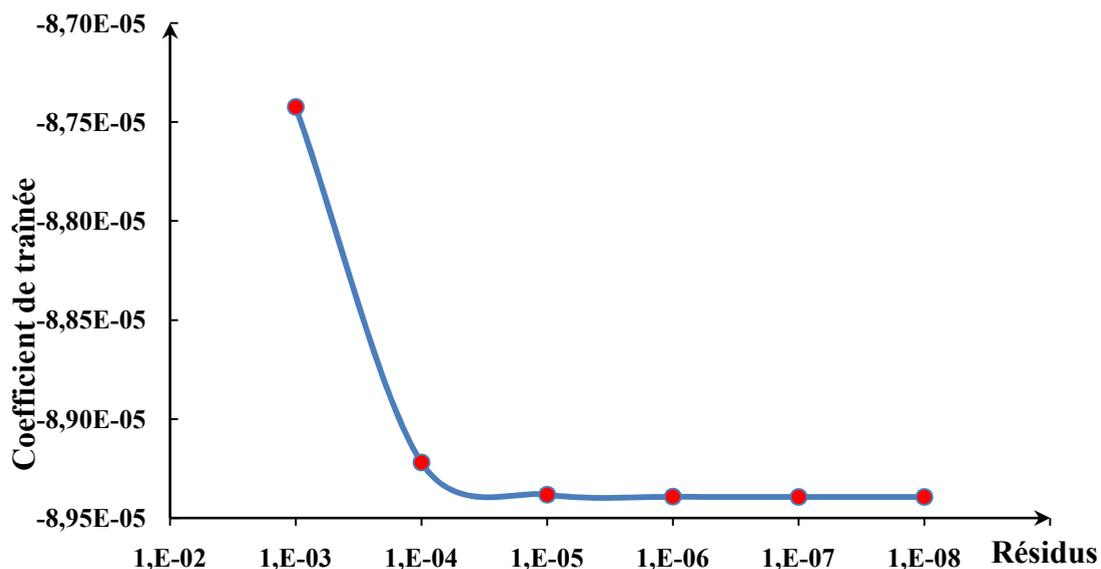


Figure III.3 : Effet du critère de convergence sur le calcul numérique

Premièrement, on constate qu'une précision de 10^{-3} n'est pas suffisante et que le passage aux précisions plus fines améliore l'exactitude des résultats. La valeur du coefficient de traînée devient stable à partir du critère de convergence 10^{-5} . Donc, nos prochaines simulations se feront avec un critère de convergence 10^{-5} .

III.2 Détermination des vitesses critiques de transition

La mesure de la contrainte de cisaillement agissant sur le cylindre intérieur montre que cette grandeur dépend de la vitesse angulaire du rotor. La courbe correspondante présente une discontinuité à l'apparition des instabilités.

Les transitions du régime de Couette circulaire (CCF) au régime de vortex de Taylor (TVF) et ensuite au régime de vortex de Taylor ondulées (WVF) sont marquées par des changements discontinus de la pente de la relation (contrainte de cisaillement-vitesse de rotation) aux points critiques (points des transitions).

III.2.1 Transition du régime CCF au régime TVF

La transition du régime CCF au régime TVF a été déterminée par une brusque augmentation de la contrainte de cisaillement quand la vitesse de rotation atteindrait une valeur critique $\Omega_{c1} = 27.1$ tr/min ($Re=130.65$), qui n'est pas très différente de la valeur expérimentale $\Omega_{c1}=27.7$ tr/min ($Re=133.55$).

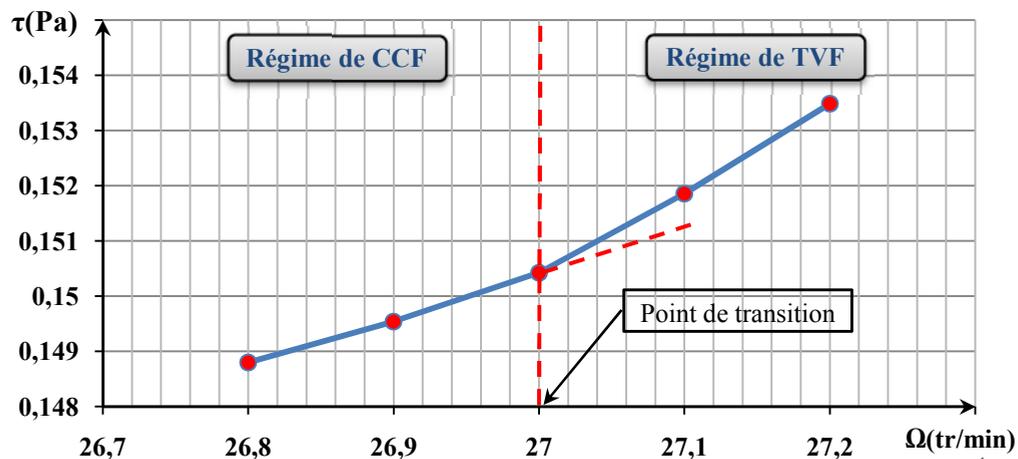


Figure III.4 : Transition du régime CCF au régime TVF

III.2.2 Transition du régime TVF au régime WVF

Mais la transition du régime TVF au régime WVF a été déterminée par une brusque diminution de la contrainte de cisaillement quand la vitesse de rotation atteindrait une valeur critique $\Omega_{c2}=36.1$ tr/min ($Re=174.05$).

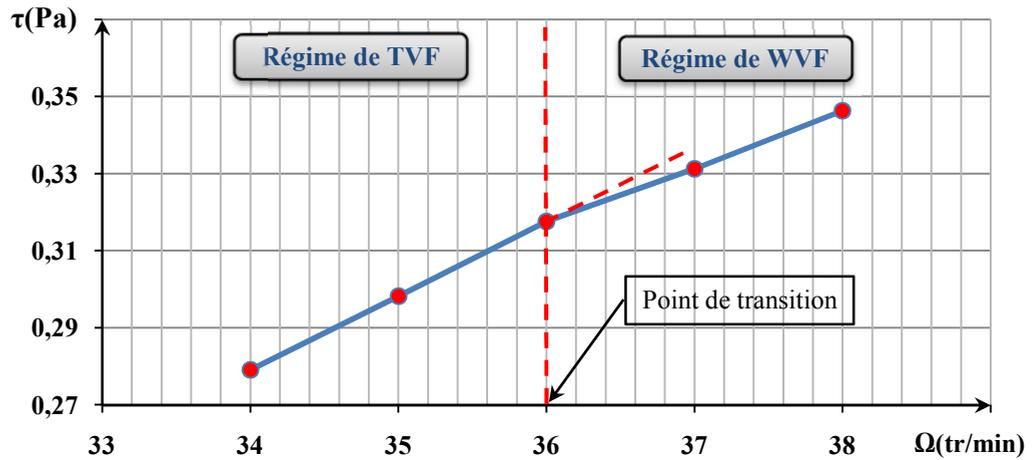


Figure III.5 : Transition du régime TVF au régime WVF

III.3 Validation du code

Pour donner plus de confiance aux résultats de nos simulations numériques, on a établi quelques comparaisons quantitatives et qualitatives avec d'autres investigations expérimentales et numériques présentées dans la littérature.

Premièrement la comparaison est faite avec les résultats expérimentaux d'El-Mahfoud Adnane [27] qui a utilisé trois techniques : réflexion de la lumière, transmission transversale de la lumière et transmission Laser pour visualiser et analyser l'écoulement d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux et mettre en évidence l'influence de l'inclinaison, l'effet de la surface libre et l'effet de la hauteur sur l'apparition des différentes instabilités.

Ce problème d'écoulement est caractérisé par deux paramètres géométriques: le rapport des rayons $\eta = R_i/R_e$ et le rapport d'aspect $\Gamma = H/d$ ($d = R_e - R_i$ et $H =$ hauteur de l'espace annulaire). Les caractéristiques géométriques des dispositifs expérimentaux utilisés dans cette étude sont résumées au tableau suivant :

Géométrie	R_i (mm)	R_e (mm)	$d = R_e - R_i$	$\eta = R_i / R_e$	$\delta = d / R_i$	H	$\Gamma = H/d$
A	50	55	5	0.909	0.1	200	40
B	38	47	9	0.808	0.237	360	40

La valeur du jeu radial (δ) de la géométrie A est considérée comme une configuration à espace annulaire mince, et de la géométrie B comme un espace annulaire relativement large ou intermédiaire. Le fluide utilisé est un produit composé de 20% d'huile de Vaseline "huile de Chellala" de plus de 80% d'un produit d'éther de pétrole "Essence Simili" et de 2g de poudre d'aluminium de masse volumique $\rho_{sol} = 777.23 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité cinématique $\nu = 5.43 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ à la température $T = 20^\circ\text{C}$.

Aussi la comparaison est faite avec les mesures expérimentales obtenue par C. Andereck et al. [10], qui ont utilisé la technique de visualisation par des flocons de polymère, pour l'étude de l'apparition des différentes instabilités d'un écoulement entre deux cylindres

coaxiaux pour deux cas : co-rotation et contre-rotation des cylindres. Les caractéristiques de cette étude sont :

Géométrie	R_i (mm)	R_e (mm)	$d = R_e - R_i$	$\eta = R_i / R_e$	$\delta = d / R_i$	H (mm)	$\Gamma = H/d$
C	52.5	59.46	6.96	0.883	0.13	208.8	30

Le fluide utilisé est un mélange entre l'eau et 2% de Kalliroscope AQI000 de masse volumique $\rho_{sol} = 1086 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité cinématique $\nu = 3,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ à la température $T=20^\circ\text{C}$.

III.3.1 Système A : Espace annulaire mince et totalement rempli

On observe l'évolution de l'écoulement de couette laminaire stable vers celui de la première instabilité avec apparition des rouleaux axisymétriques ou rouleaux de Taylor jusqu'à la deuxième instabilité avec l'apparition des ondes azimuthales ou Wavy Mode, pour les deux cas étudiés :

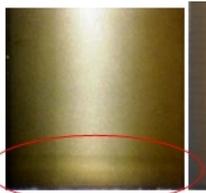
Nombre de Taylor	Ta	Ta_{c1}	Ta_{c2}
Type d'instabilité	régime laminaire stable	1 ^{ère} instabilité Onde axiale : cellules ou vortex de Taylor	2 ^{ème} instabilité Onde azimuthale ou Wavy Mode
Résultats de simulation	 $Ta=33.54$	 $Ta=42.7$	 $Ta=51.23$
Résultats Expérimentales d'après [27]	 $Ta=34$	 $Ta=42$	 $Ta=48$

Figure III.6 : Comparaisons des différents régimes obtenus pour le système A avec ceux trouvés par [27]

III.3.2 Système B : Espace annulaire relativement large et totalement rempli

Nombre de Taylor	Ta	Ta _{c1}	Ta _{c2}
Type d'instabilité	Régime laminaire stable	1 ^{ère} instabilité Onde axiale : cellules ou vortex de Taylor	2 ^{ème} instabilité Onde azimutale ou Wavy Mode
Résultats de simulation	 Ta=38	 Ta=48.14	 Ta=73.82
Résultats Expérimentales d'après [27]		 Ta=44	 Ta=72

Figure III.7 : Comparaisons des différents régimes obtenus pour le système B avec ceux trouvés par [27]

La présentation, des résultats du modèle Fluent, prévoit la transition de l'écoulement de Couette à l'écoulement de vortex de Taylor et ensuite à l'écoulement de vortex de Taylor ondulé. Cette comparaison entre les visualisations expérimentales de l'écoulement, tirés de l'expérience de El-Mahfoud Adnane [27] et numériques soutient favorablement la validation du modèle de calcul Fluent.

III.3.3 Système C : Écoulement entre cylindres contra-rotatifs

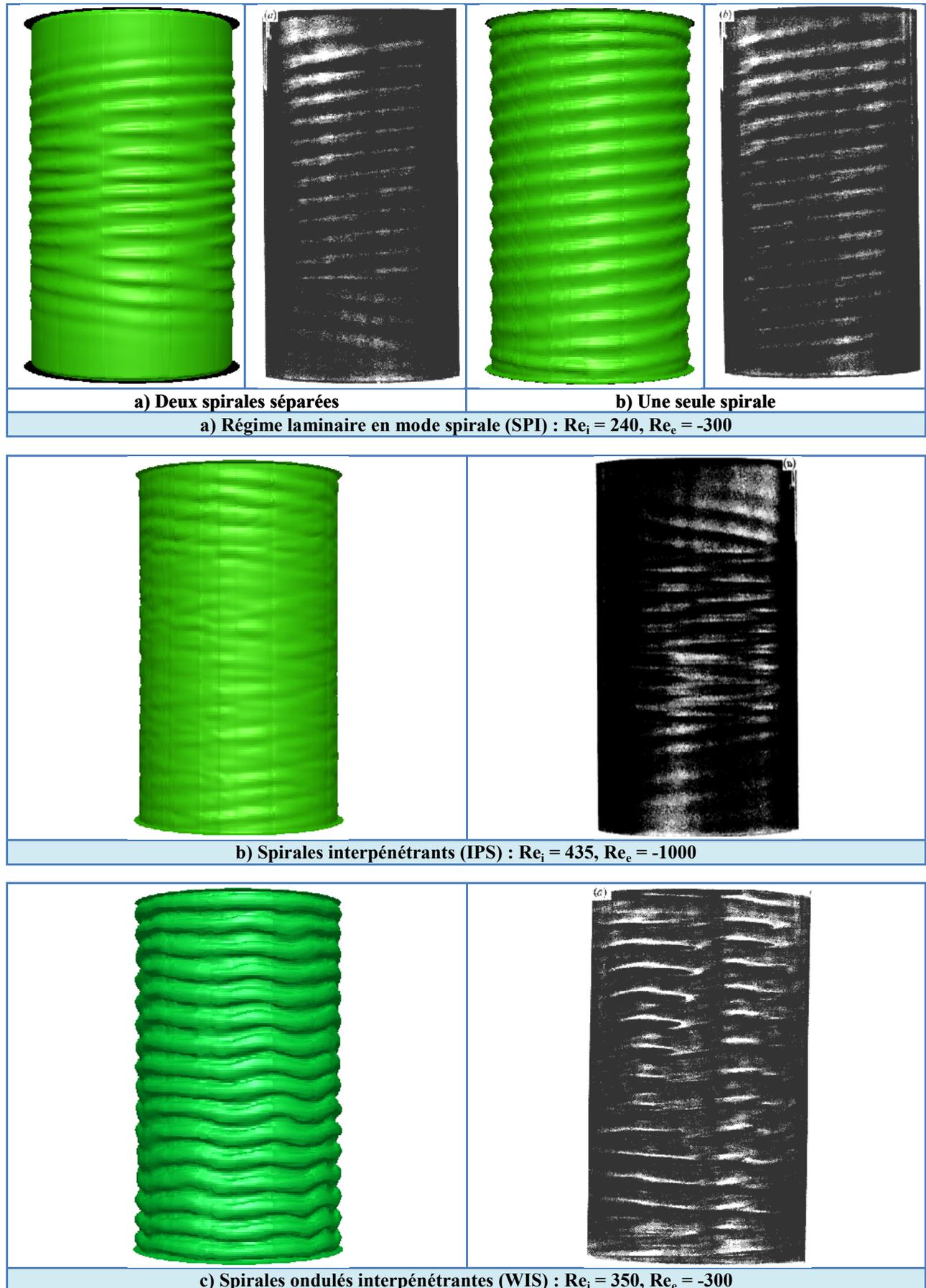


Figure III.8 : Comparaisons des différents régimes obtenus pour le système C avec ceux trouvés par [10]

Et aussi la comparaison faite avec une courbe $Re_c = f(\eta)$ donnée par la formule empirique (1) de Snyder [14], est représentée en linge vert sur le graphe de la figure (III.8).

$$Re_c = 27\eta(1-\eta)[(1-\eta)\eta]^{-5/3} \tag{III.1}$$

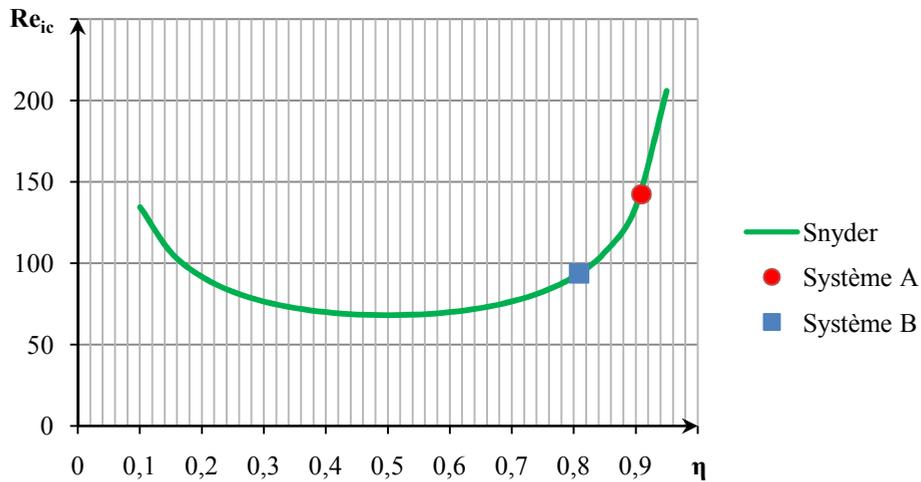


Figure III.8 : Compilation des seuils Re_{ic} ($Re_0 = 0$) obtenus par une formule empirique de Snyder. Il est présenté en fonction de η

Il apparaît que le graphe de la figure (III.8) s'accorde parfaitement avec les valeurs des seuils trouvées par nos simulations avec une bonne précision.

En examinant ces figures, nous pouvons constater que nos résultats numériques sont en bon accord tant qualitatif que quantitatif avec les résultats expérimentaux de Andereck et al. [10], et toutes ces comparaisons valident notre code de calcul en lui attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

III.4 La transition du régime laminaire vers la 1^{ère} et la 2^{ème} instabilité

III.4.1 ECOULEMENT LAMINAIRE :

Dans cette partie, nous représentons le champ hydrodynamique (vitesse, pression) dans un espace annulaire caractérisé par un rapport de rayons η et un rapport de forme Γ , en fonction de la coordonnée radiale réduite $r^* = (r - R_1) / (R_2 - R_1) \in [0; 1]$ et pour plusieurs côtes, $z^* = z/d \in [0; 40]$. Le nombre de Taylor considéré prend des faibles valeurs correspondant au régime laminaire pur.

III.4.1.1 Profil radial de la vitesse tangentielle

La figure (III.9) représente les profils radiaux de la vitesse tangentielle pour plusieurs positions axiales.

Pour la valeur du nombre de Taylor réduite ($Ta/Ta_{c1} = 0.74$), le profil de vitesse tangentielle ne change pas suivant z^* , mais il varie de sa valeur maximale sur la paroi tournante ($r^* = 0$) jusqu'à la valeur zéro sur la paroi fixe ($r^* = 1$). Cette figure montre que ce profil est superposé et confondu avec la solution analytique.

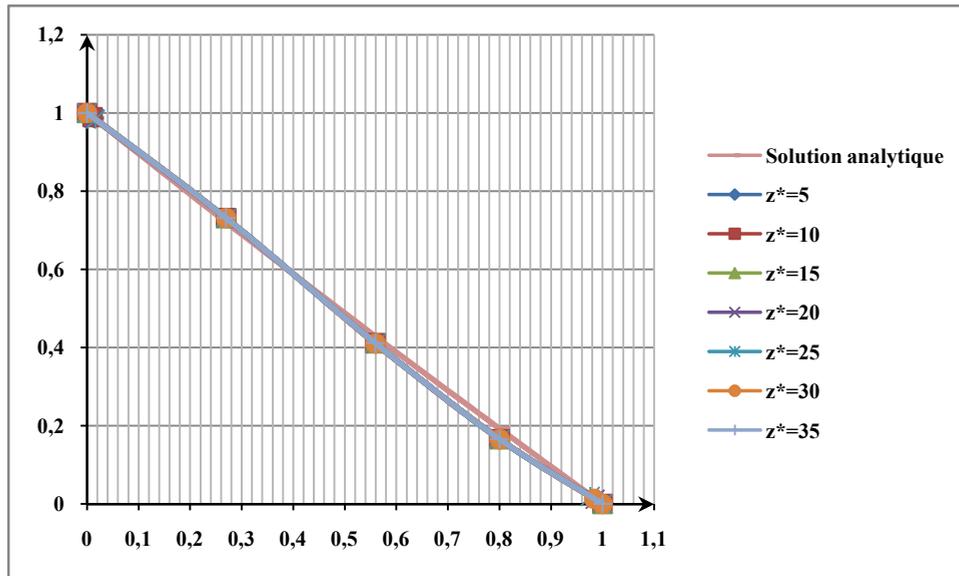


Figure III.9: Evolution axiale du profil radial de la vitesse tangentielle en régime laminaire

III.4.1.2 Influence de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de vitesse

L'effet de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de la vitesse tangentielle est illustré sur les figures (III.10). Nous avons considéré les vitesses de rotation Ω (1, 5, 10, 20 tr/min) correspondant à des nombres de Taylor Ta (1.52, 7.62, 15.25, 30.49). Ces courbes obtenues pour la position axiale $z^*=20$, montrent que la rotation du cylindre intérieur n'a aucun effet sur le profil de la vitesse tangentielle dans le cas considéré. Aussi, nous constatons une très bonne concordance entre simulation et théorie.

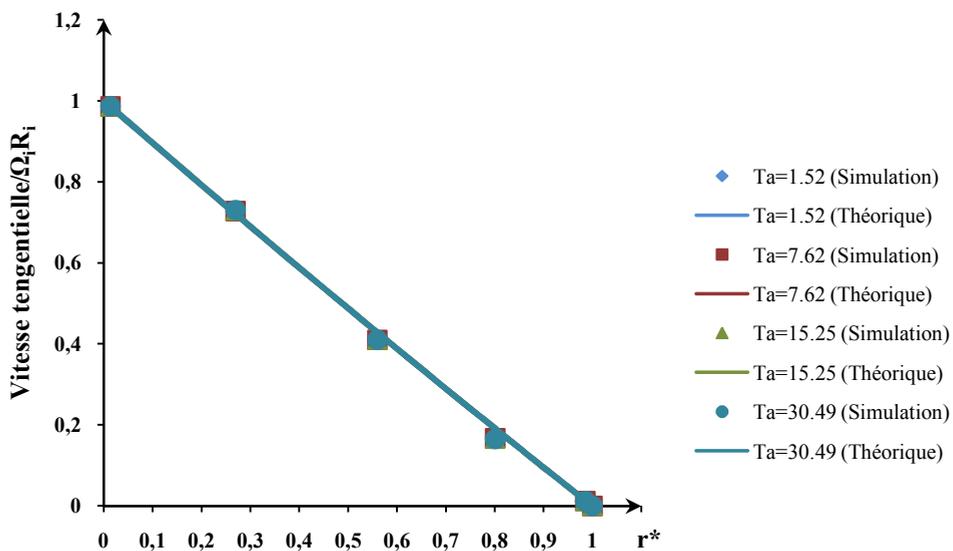


Figure III.10 : Effet de la rotation du cylindre intérieur sur les profils de la vitesse tangentielle en régime laminaire ($z^*=20$)

Par ailleurs, la figure (III.11) qui représente la composante radiale de la vitesse, montre que cette composante est nulle dans tout l'entrefer, ce qui confirme que nous mesurons bien un champ de vitesses d'un écoulement orthoradial. Même remarque pour la vitesse axiale.

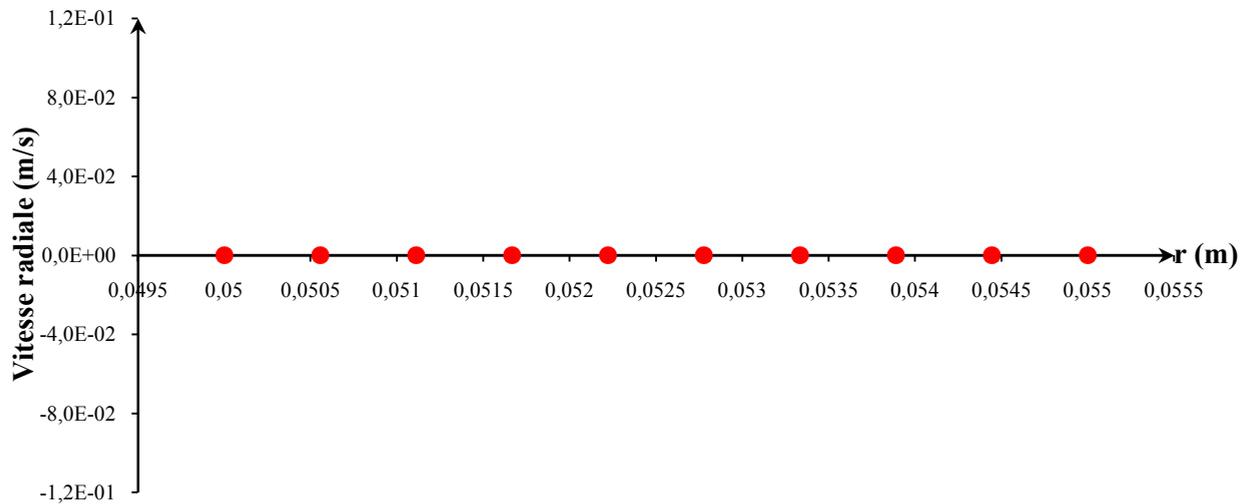


Figure III.11: Profil de la vitesse radiale d'un écoulement stationnaire en fonction du rayon r de l'entrefer pour une vitesse de rotation $\Omega = 20$ tr/min.

III.4.1.3 Lignes de courant

L'écoulement étant permanent, les trajectoires et les lignes de courant sont confondues, et sont données par l'équation (I.3) et l'intégration de l'équation $dx/u = dy/v$. Les courbes théoriques ($r^2 = \text{constante}$) sont des cercles concentriques de rayon r ; elles sont comparées à celles obtenues à partir de la matrice (x, y, u, v) du champ de vitesse. La figure Fig.6.13 montre, en effet, que les lignes de courant sont des cercles concentriques.

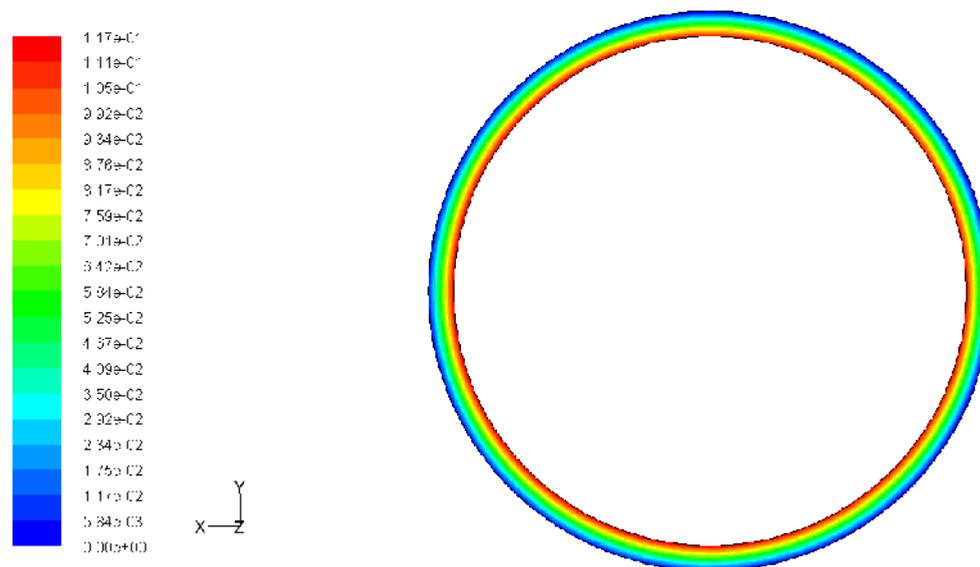


Figure III.12 : Contour de la vitesse tangentielle

En conclusion, le champ de vitesse reste globalement très correct, et les lignes de courant parfaitement circulaires, et ce dans quasiment tout l'entrefer.

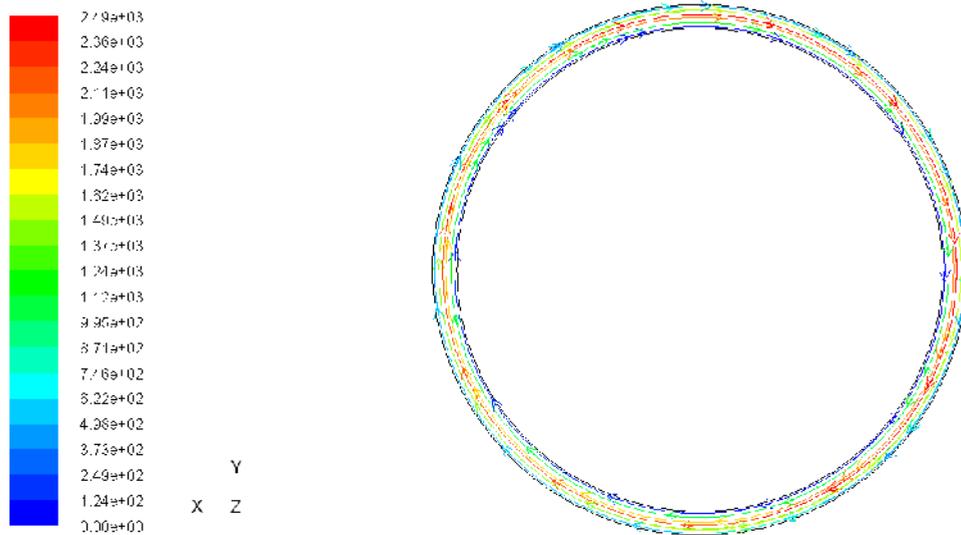


Figure III.13 : Lignes de courant calculées du champ de vitesse

III.4.1.4 Cellules d'Eckman

Pour des faibles vitesses de rotation on observe l'apparition des cellules d'Eckman au niveau des extrémités du système d'écoulement (Figure III.14). Ce phénomène est toujours présent dans ce type d'écoulement, conduit par la rotation du cylindre. Cette dernière est à l'origine du développement des cellules de Taylor dans l'espace annulaire en fonction de l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre tournant.

Les cellules d'Ekman correspondent à la première rupture de symétrie de l'écoulement laminaire, due à une balance entre les forces visqueuses et la force de Coriolis.

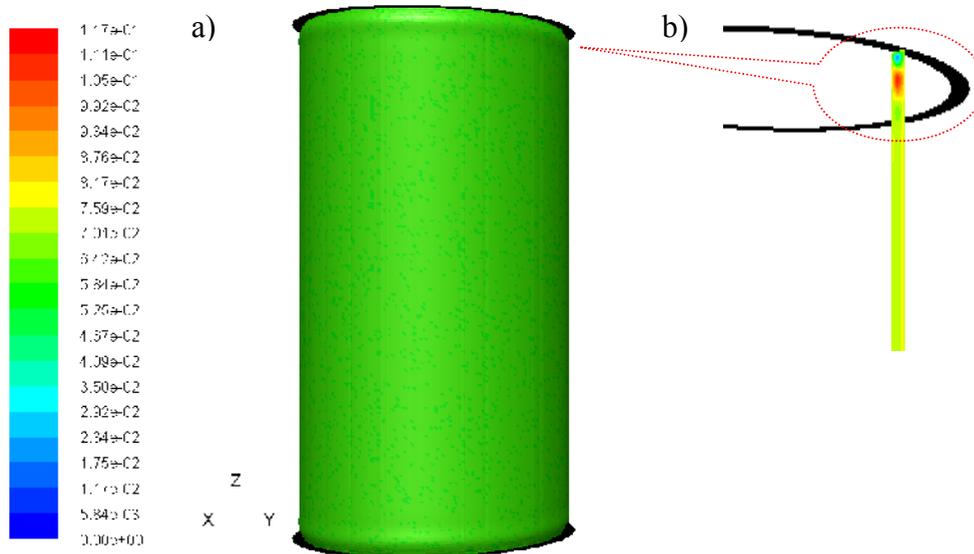


Figure III.14 : Apparition des cellules d'Eckman pour $Ta/Ta_c = 0.82$, $\Omega=22.3$ tr/min
 a) Iso-valeurs de la vitesse azimutale b) Coupe plan du contour de la vitesse radiale

III.4.1.5 Champs de pression :

L'apparition du gradient de pression est une réaction due à la présence de la vitesse de rotation, et des parois externes (cylindre externe) s'opposant à la force centrifuge.

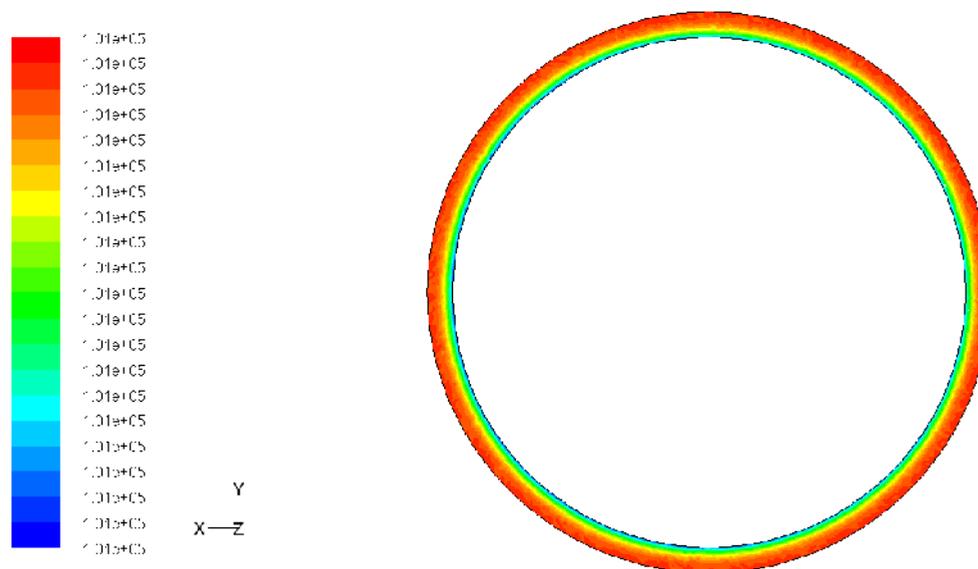


Figure III.15 : Contour de pression absolue de l'écoulement selon la direction azimutal

On observe l'intensité maximale (couleur rouge jaune sur figure III.15) de la pression absolue au niveau des parois externes qui s'affaiblit au fur et à mesure.

III.4.2 Caractérisation du régime de première instabilité : Développement des cellules de Taylor

III.4.2.1 Visualisation de la topologie de l'écoulement en TVF

La première instabilité est caractérisée par la formation, sur toute la hauteur de l'entrefer, des rouleaux contrarotatifs appelés cellules de Taylor [1]. Cette instabilité conduisant à un écoulement axisymétrique est couramment appelée «Taylor Vortex Flow» (TVF). Elle apparaît à partir d'une valeur critique du nombre de Taylor Ta_{c1} . Par la suite, on caractérisera l'ensemble des régimes d'instabilité par un nombre de Taylor réduit Ta/Ta_{c1} .

Une visualisation de l'écoulement avec le code Fluent permet de mettre en évidence les cellules de Taylor et de déterminer ainsi le nombre de Taylor critique. On obtient $Ta_{c1}=41.31$ équivalent à un nombre de Reynolds critique $Re_{c1}=130.65$

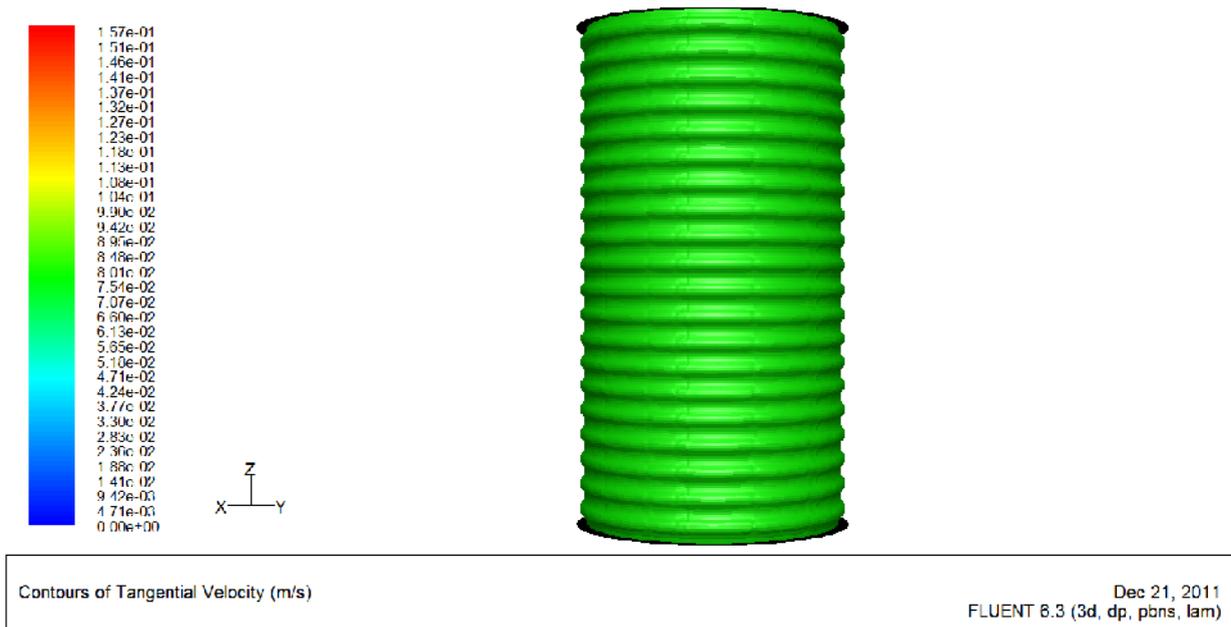
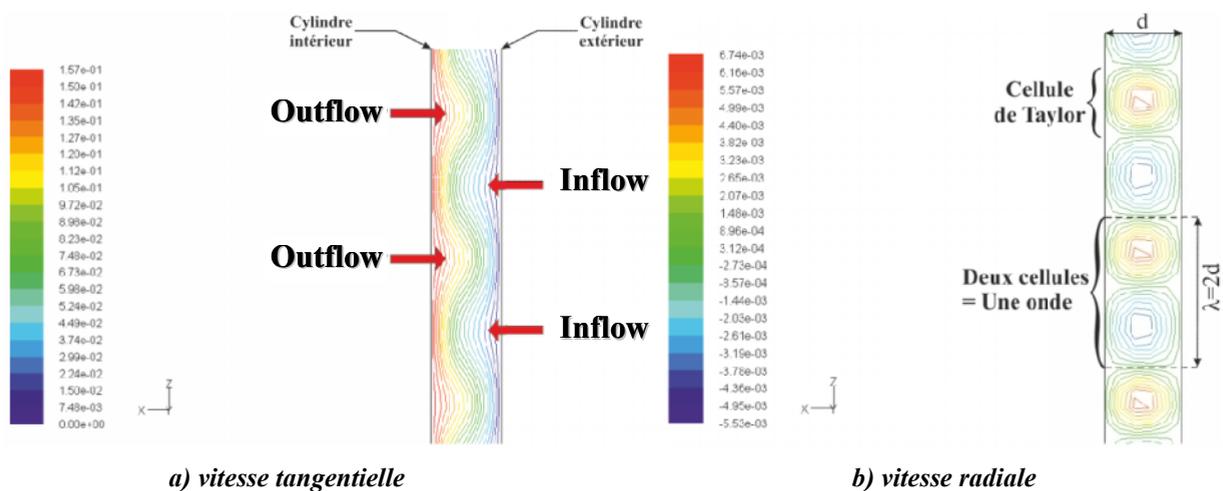


Figure III.16 : Visualisation des cellules contrarotatives en TVF, $Ta/Tac_1=1.1$ ($n=40$)

III.4.2.2 Caractérisation du champ de vitesse en TVF

Afin de visualiser les cellules de Taylor, des mesures suivant des coupes transversales (dans le plan (r,z)) de la vitesse axiale et tangentielle ont été réalisées. L’alternance de vitesses positives et négatives de la composante axiale est caractéristique des cellules contrarotatives et permet de déterminer grâce à des cartographies d’iso valeurs, la longueur d’onde axiale λ .

La Figure (III.17) représente une cartographie de vitesse radiale et tangentielle à $Ta/Tac_1=1.1$, sur laquelle on peut localiser les zones de Outflow et de Inflow par rapport aux parois du cylindre intérieur et visualiser le sens de rotation de la cellule. On voit nettement la périodicité axiale de l’écoulement, caractérisée par une longueur d’onde $\lambda=2d$.



a) vitesse tangentielle b) vitesse radiale

Figure III.17 : Cartographie des composantes de vitesse en TVF, $Ta/Tac_1=1.1$

a) Profils de vitesse tangentielle

Sur la Figure (III.18), on présente les profils radiaux de vitesse tangentielle. A l'apparition des cellules ($T^*=Ta/Ta_{c1}=1.03$), la distribution radiale reste quasi-linéaire, comme en écoulement laminaire.

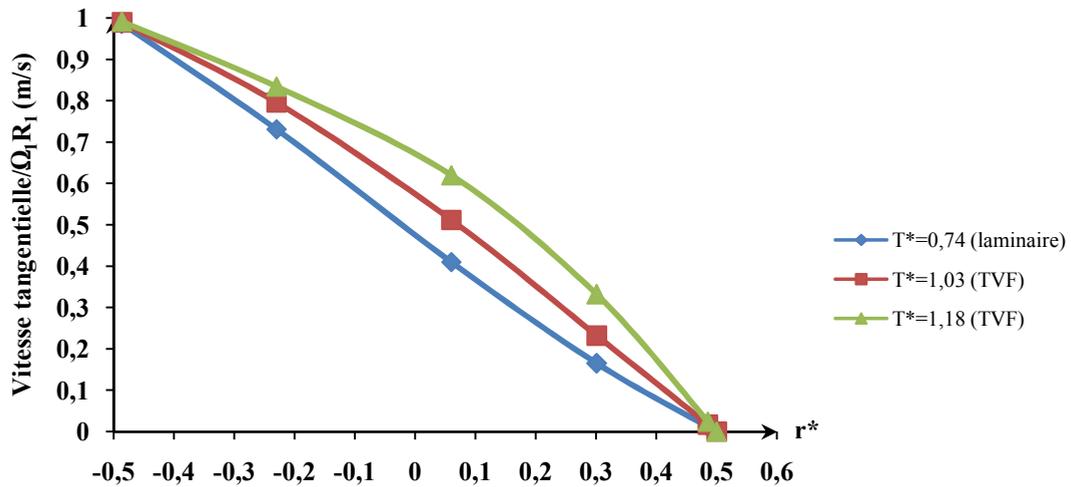


Figure III.18 : Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable

Comparativement au cas laminaire, la courbe des variations de la vitesse tangentielle en fonction de la coordonnée radiale, est caractérisée essentiellement par l'existence d'un point d'inflexion, traduisant le mélangeage du fluide par les tourbillons (III.18). Cette inflexion est d'autant plus marquée que la vitesse de rotation est élevée.

b) Profil de vitesse axiale

Le profil de la vitesse axiale est fortement déformé sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur comparativement au cas laminaire. La composante axiale de la vitesse possède deux extremums (III.19), un positif et l'autre négatif, leurs valeur et sens dépendent de la position axiale et du nombre de Taylor.

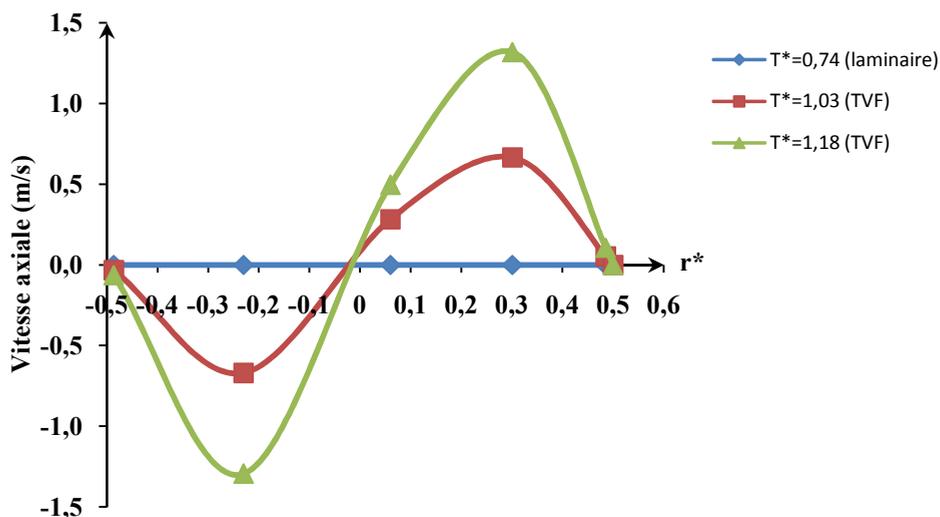


Figure III.19: Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire instable

c) Profil de la vitesse radiale

En ce qui concerne l'effet de la rotation du cylindre tournant sur le profil de la vitesse radiale, en régime instable, la déformation est remarquable, figure (III.20). A l'entrée de l'espace annulaire, le maximum de la vitesse radiale diminue en augmentant le nombre de Taylor. En raison du mélangeage crée par les cellules de Taylor, la vitesse radiale a des valeurs du même ordre que la composante axiale, contrairement au cas laminaire où la composante radiale peut être négligeables (de l'ordre $\approx 10^{-4}$).

III.4.2.3 Développement des tourbillons dans l'espace annulaire

Les visualisations numériques de l'écoulement permettent l'étude du processus de formation des cellules de Taylor et de leur propagation le long de l'espace annulaire entrefer.

Les figures (III.20) et (III.21) présentent la forme de développement des cellules de Taylor au sein du milieu fluide en fonction de l'augmentation de la vitesse de rotation pour les deux systèmes (A) et (B). On remarque que la première instabilité résulte d'un empilement de cellules qui se développe en fonction de la vitesse de rotation. Elle est atteinte pour une valeur de la vitesse de rotation critique $\Omega_{c1}=27.1$ tr/min (2.84 rad/s) ce qui correspond à un nombre de Taylor critique $Ta_{c1}=41.32$ ($Re_{c1}=130.66$), pour le système (A). Et pour le système (B), la vitesse de rotation critique $\Omega_{c1}=13.9$ tr/min (1.45 rad/s) ce qui correspond à un nombre de Taylor critique $Ta_{c1}=44.62$ ($Re_{c1}=91.68$).

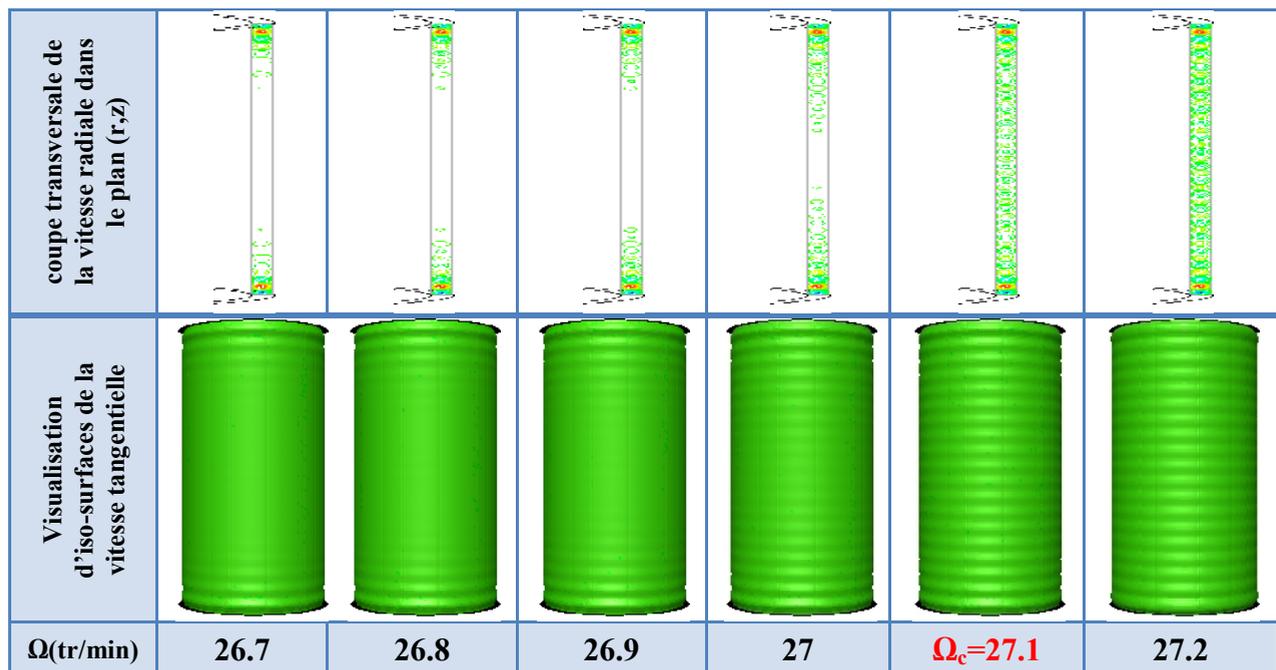


Figure III.20 : Processus de formation des cellules de Taylor (Système A)

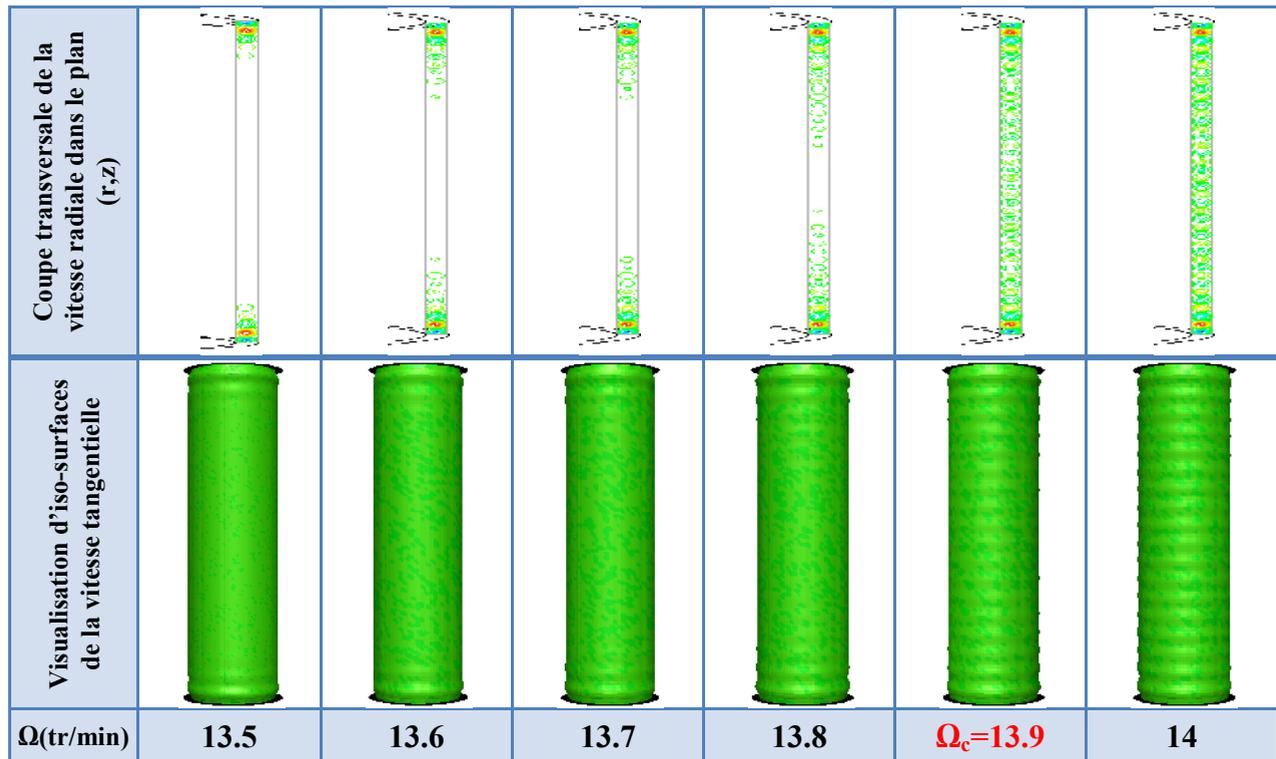


Figure III.21 : Processus de formation des cellules de Taylor (Système B)

III.4.3 Caractérisation du régime de deuxième instabilité : Le régime d'onde azimuthale

III.4.3.1 Visualisation de la topologie de l'écoulement en WVF

Le régime de deuxième instabilité, appelé aussi « Wavy Vortex Flow », est caractérisé par une onde azimuthale qui vient se superposer aux cellules de Taylor étudiées ci-dessus et les fait osciller à la vitesse de phase. Ce régime présente une double périodicité caractérisée par un nombre d'onde axial « n » et un nombre d'onde tangentiel « m ».

A partir des visualisations de l'écoulement, on peut figer l'onde azimuthale et déterminer ainsi à partir de quel nombre de Taylor critique Ta_{c2} la deuxième instabilité apparaît. La valeur obtenue pour Ta_{c2} est de 51.23, ce qui correspond à un nombre de Reynolds critique Re_{c2} de 162. La valeur réduite correspondante est $Ta_{c2}/Ta_{c1} = 1.24$. On a un bon accord avec la valeur obtenue par Bouabdallah (1980) à la transition qui est de 1.19. L'état d'écoulement, juste à l'apparition de l'onde azimuthale est présenté en figure (III.22).

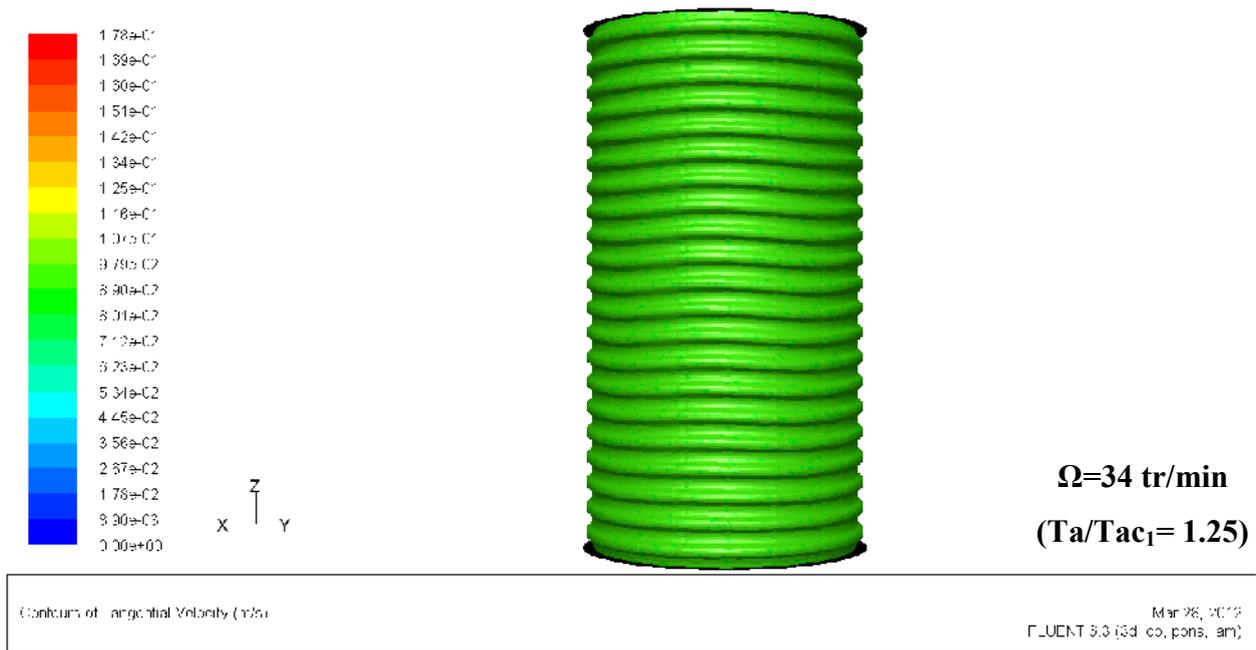


Figure III.22 Visualisation du régime d'onde de 2^{ème} instabilité (WVF)

Ce régime d'instabilité perdure jusqu'à l'apparition d'une modulation d'amplitude de l'onde azimutale correspondant à la troisième instabilité vers $Ta_{c3}=166$.

Sur la plage correspondant au WVF ($50 < Ta < 166$), le nombre d'onde azimutal $m=4$ à $Ta^*=1.25$, et augmente avec le nombre de Taylor. La figure (III.23) montre une visualisation de trois états d'écoulement $m = 0, 4$ et 6 .

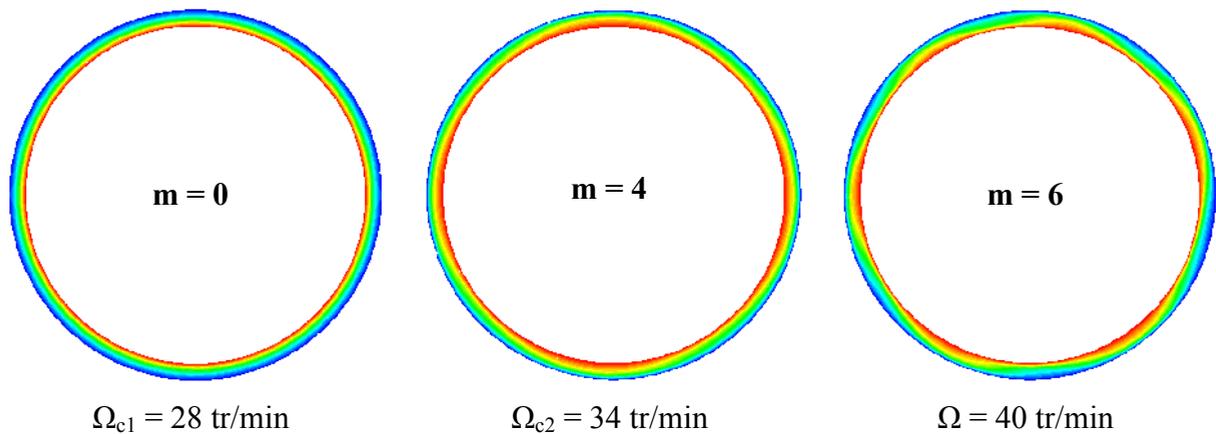


Figure III.23 : Visualisation des états d'écoulement pour $m=0, 4$ et 6

III.4.3.2 Caractérisation du champ de vitesse en WVF

Les vitesses sont adimensionnées par la vitesse du cylindre intérieur. La position axiale z normalisée est $z^*=z/d$ et la variable de position dans la direction radiale est $r^*=(r-a)/d \in [0;1]$.

Nous présentons sur la Figure (III.24) les cartographies de vitesse des composantes axiale et azimutale mesurées pour $Ta/Ta_{c1}=4$.

L'alternance positive et négative de la composante axiale, dans la direction axiale, montre bien la périodicité axiale de l'écoulement sous forme de paires de cellules de Taylor

contrarotatives de longueur d'onde $\lambda=2.5d$. On note cependant un resserrement des lignes iso-valeurs dans la zone OUTFLOW et un étirement dans la zone INFLOW (figure III.24.c). Ce phénomène a été mis en évidence par Marcus (1984) lors de simulations numériques en WVF. Cela est attribué à l'échange de quantité de mouvement entre cellules favorisé par le train d'ondes. L'échange est plus important en INFLOW qu'en OUTFLOW.

Les iso-valeurs de la composante azimutale mettent en évidence un jet radial plus important dans la zone OUTFLOW que dans la zone de INFLOW. En particulier, on observe autour de la zone OUTFLOW des gradients de vitesses adverses. Ce phénomène a été observé plutôt pour des régimes de 3^{ème} instabilité par Wereley et Lueptow (1994) mais aussi par Coughlin et Marcus (1992). Il est du à l'interaction dans la zone OUTFLOW entre du fluide de quantité de mouvement azimutale importante et la paroi du cylindre extérieur.

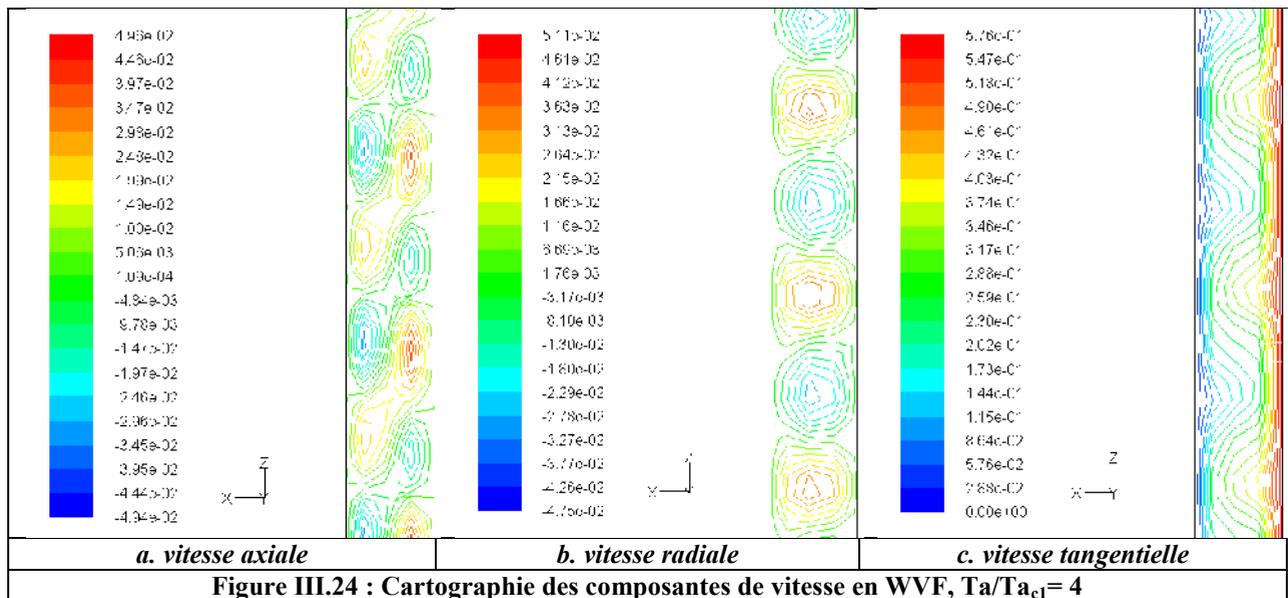


Figure III.24 : Cartographie des composantes de vitesse en WVF, $Ta/Ta_{c1} = 4$

La Figure (III.25) représente le profil radial de vitesse tangentielle mesuré en milieu de cellules ($z=0.1$) pour différentes valeurs du nombre de Taylor. On présente également à titre de comparaison la courbe de référence correspondant à l'écoulement purement circulaire laminaire. En WVF, le profil radial se déforme progressivement sous l'effet des perturbations de vitesse, entraînant une augmentation des gradients au niveau des parois et un aplatissement des profils radiaux en milieu d'entrefer. Cela correspond à un cisaillement pariétal et une homogénéisation de la vitesse tangentielle en milieu d'entrefer qui augmente avec le nombre de Taylor.

Sur le plateau en milieu d'entrefer, on a une vitesse adimensionnelle $V/(\Omega_1 R_1)$ de l'ordre de 0.47 pour des valeurs de x telles que $-0.25 < r^* < 0.25$. Les mêmes tendances ont été observées expérimentalement par Wereley et Lueptow (1994) et numériquement par Marcus (1984) pour le même régime d'écoulement.

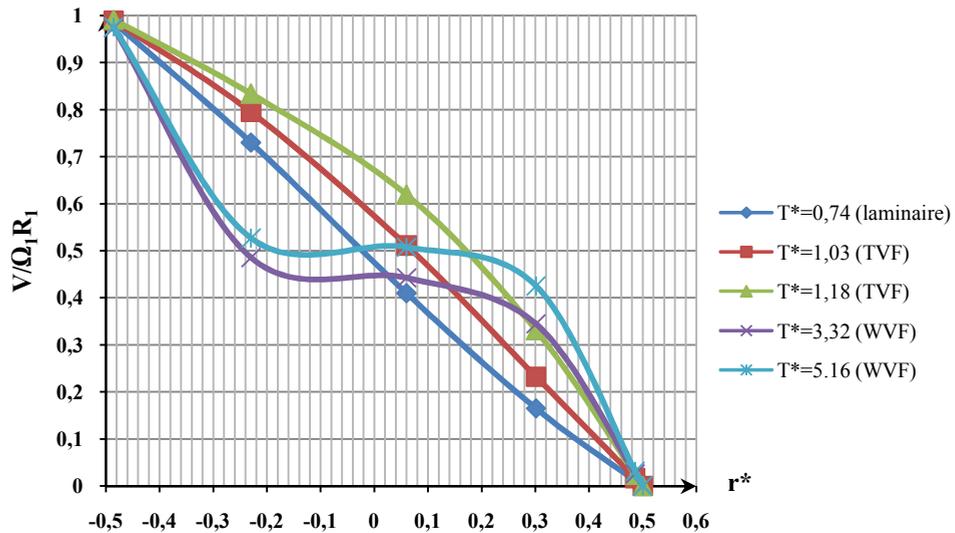


Figure III.25 : Profil radial de la vitesse tangentielle pour différents nombre de Taylor ($z=0.1$)

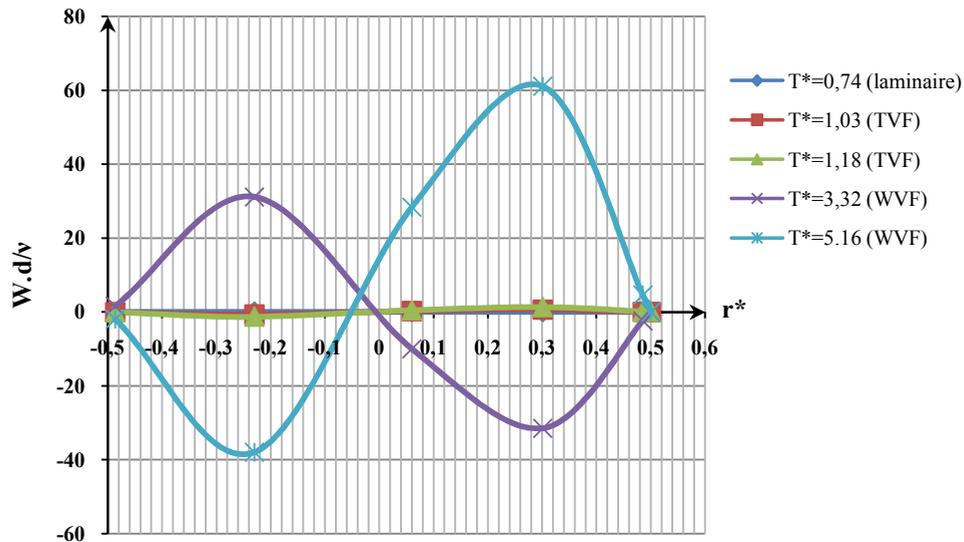


Figure III.26: Profil radial de la vitesse axiale pour différents nombre de Taylor ($z=0.1$)

La Figure (III.26), ci-dessus, montre l'évolution avec le nombre de Taylor du profil radial de vitesse moyenne axiale mesuré en milieu de cellule ($z = 0.1$). On observe que les maximas de la vitesse axiale se situent environ à $r^* = \pm 0.25$. Ces maxima augmentent avec le nombre de Taylor et leur position se décale vers les parois, en accord avec une augmentation de la vorticité des cellules.

III.5 Étude de l'effet de l'inclinaison α sur le système d'écoulement

D'après les différentes observations menées dans cette configuration et la comparaison des résultats obtenus pour chaque position de l'inclinaison, il semble que l'inclinaison (force de gravité) ne joue aucun rôle sur la structure de l'écoulement si le système de l'écoulement est en charge (totalement rempli) pour les deux modes d'instabilités étudiés.

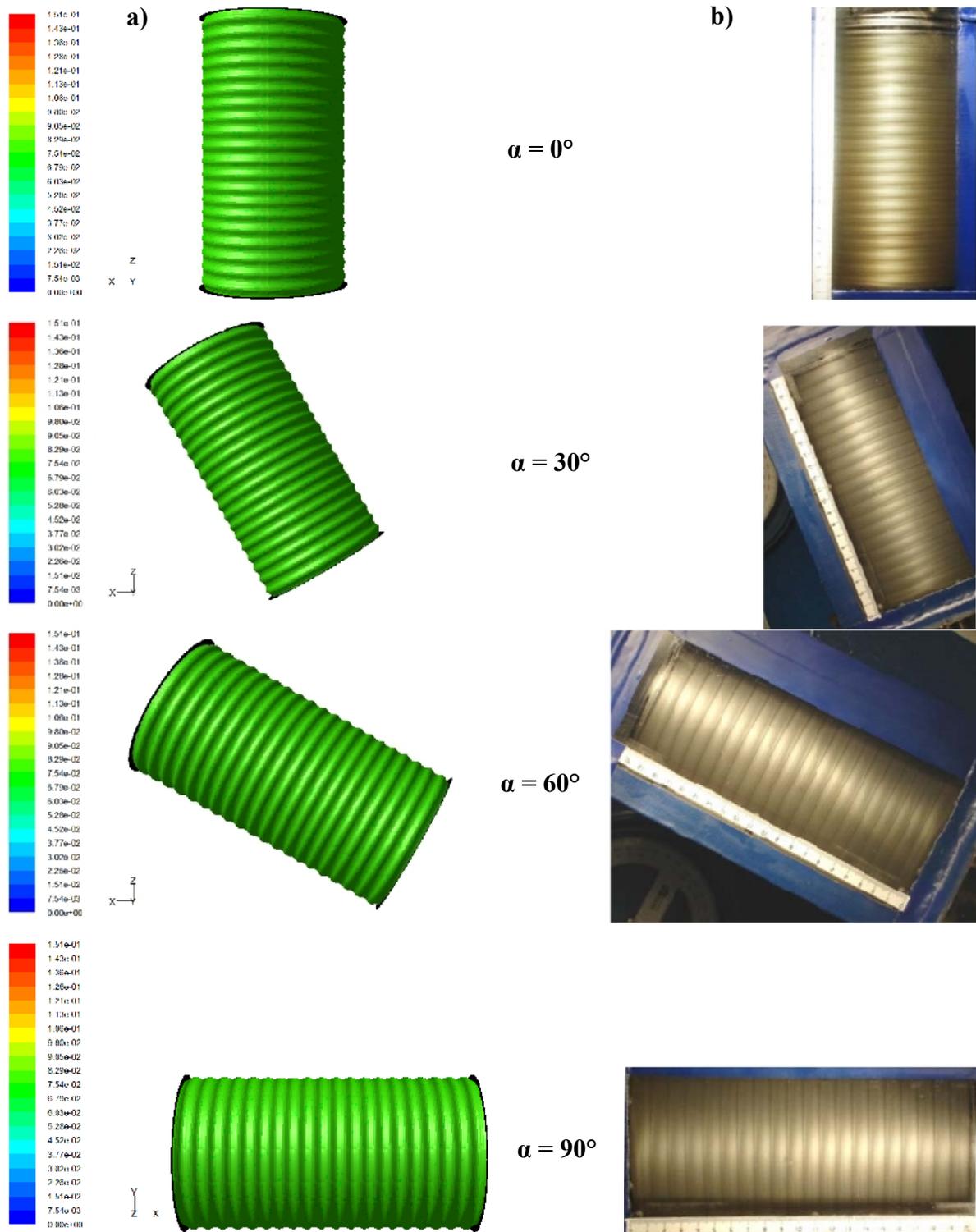


Figure III.27 : Effet de l'inclinaison sur la première instabilité $Ta_{c1}=41.31$ ($\Omega=27,10\text{tr/min}$) dans le cas où le dispositif est totalement rempli $\Gamma = \Gamma_{\max}=40$

a) Résultats de simulation b) Résultats de ADNANE El-Mahfoud [27]

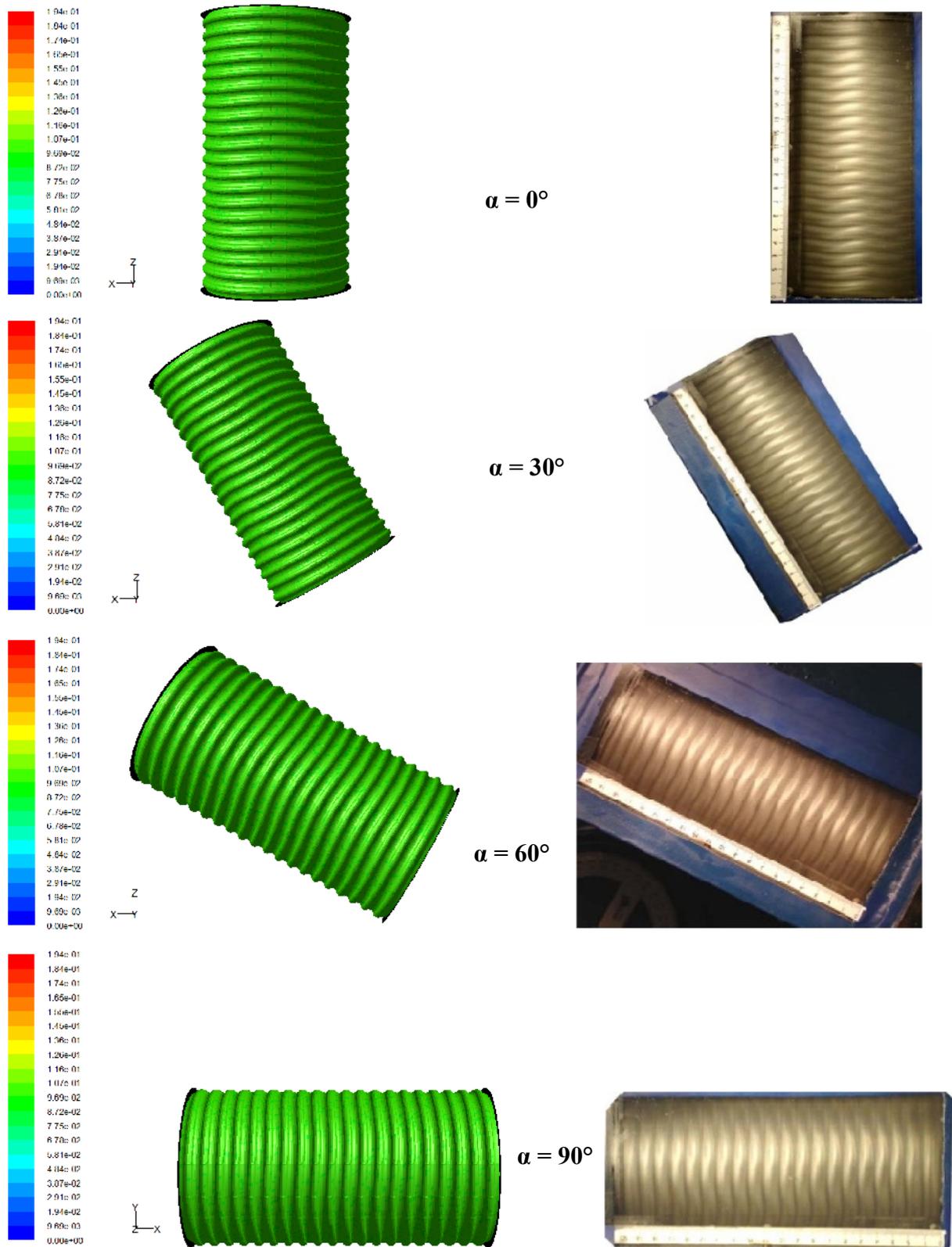


Figure III.28 : Effet de l'inclinaison sur la deuxième instabilité $Ta_{c2}=56.41$ ($\Omega= 37.00\text{tr/min}$) dans le cas où le dispositif est totalement rempli $\Gamma = \Gamma_{\max}=40$

a) Résultats de simulation b) Résultats de ADNANE El-Mahfoud [27]

On constate que, Tac_1 et Tac_2 sont indépendants de l'effet de l'inclinaison α lorsque l'écoulement est en charge ou totalement rempli.

III.6 Etude de l'évolution des états critiques

La systématisation des résultats de simulation a permis de présenter l'évolution du nombre de Taylor critique lié à l'apparition de chaque régime d'écoulement en fonction du facteur d'aspect Γ et en fonction de l'inclinaison α que l'on représente sous forme de courbes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux effectuées par ADNANE El-Mahfoud [27], pour les deux cas suivant :

III.6.1 Système A (Espace annulaire mince et totalement rempli)

III.6.1.1 Evolution de $Ta_{c1}(\alpha)$

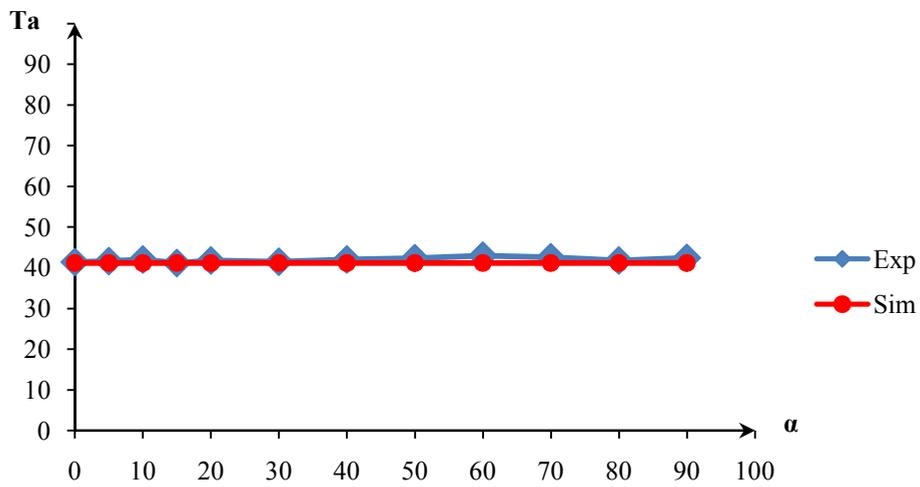


Figure III.29 : Comparaison de l'évolution du nombre Ta_{c1} en fonction de l'inclinaison pour un système totalement rempli

III.6.1.2 Evolution de $Ta_{c2}(\alpha)$

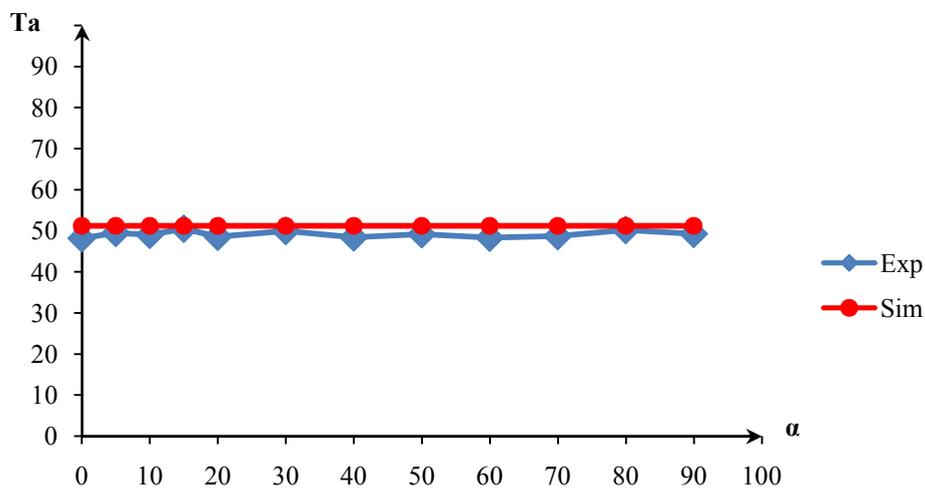


Figure III.30 : Comparaison de l'évolution du nombre Tac_2 en fonction de l'inclinaison pour un système totalement rempli

D'après les différentes observations menées dans cette configuration et la comparaison des résultats obtenus pour chaque position de l'inclinaison, il semble que l'inclinaison (force de gravité) ne joue aucun rôle sur la structure de l'écoulement si le système de l'écoulement est en charge (totalement rempli) pour les deux modes d'instabilités étudiés.

On constate que, Tc_1 et Tc_2 sont indépendants de l'effet de l'inclinaison α lorsque l'écoulement est en charge ou totalement rempli.

Pour chaque état critique qui est significatif du changement de régime ou de structure on met en évidence les observations suivantes :

III.6.1.3 Evolution de $Ta_{c1}(\Gamma)$

L'effet de la variation du facteur d'aspect Γ sur le nombre critique Tc_1 (l'apparition de la première instabilité) est représenté dans la figure suivante :

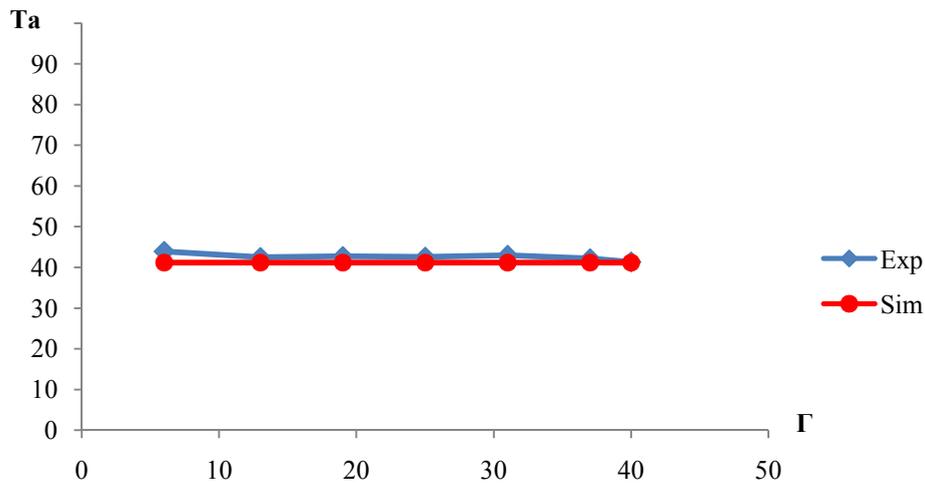


Figure III.31 : Comparaison de l'évolution du nombre Ta_{c1} en fonction du facteur d'aspect Γ pour un système totalement rempli

III.6.1.4 Evolution de $Ta_{c2}(\Gamma)$

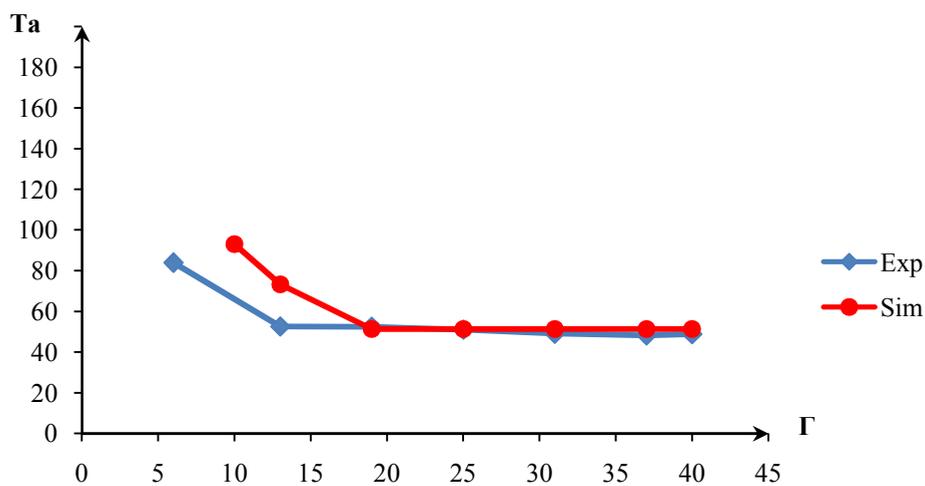


Figure III.32 : Comparaison de l'évolution du nombre Ta_{c2} en fonction du facteur d'aspect Γ pour un système totalement rempli

Nous avons mesuré la composante axiale de la vitesse en fonction du nombre Ta et à différentes valeurs de H . La figure (III.33) représente l'évolution de la composante tangentielle en fonction du nombre de Taylor pour différentes valeurs de la hauteur H . Cette composante caractérise en réalité l'onde azimutale.

Les mesures ont été effectuées dans le milieu de l'espace annulaire à la position correspondant au centre de la cellule de Taylor.

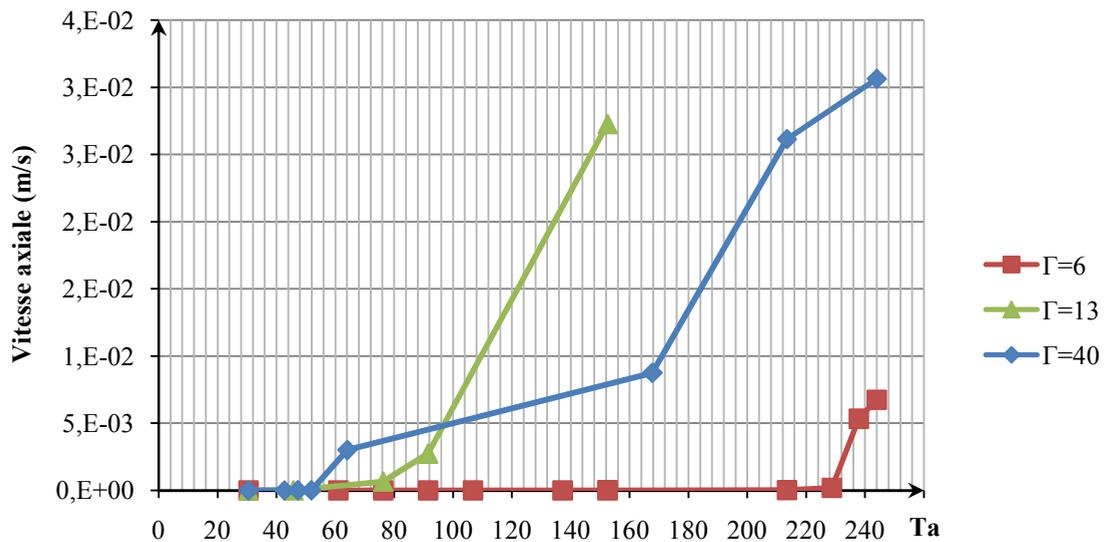


Figure III.33 : Evolution de la vitesse axiale en fonction du nombre de Taylor Ta et pour différentes valeur de la hauteur H (Système A)

En comparant l'évolution des vitesses, nous remarquons que la vitesse axiale pour $H = 30$ mm ($\Gamma=6$) ne commence à évoluer qu'à partir de Ta voisin de 229. Par contre l'augmentation de la vitesse dans le cas de $H = 65$ mm ($\Gamma= 13$) commence plus tôt au voisinage de $Ta = 61$, avec un retard par rapport à $H = 200$ mm ($\Gamma= 40$) qui commence à évoluer pour $Ta = 52$.

En conclue que l'apparition de la deuxième instabilité est retardée quand la hauteur diminue dans le cas d'un system mince.

D'après l'étude expérimentale de A. Mahamdia et A. Bouabdallah [28] [29], ce retard ne se produit que si $\Gamma_c < 10$.

III.6.2 Système B (Espace annulaire relativement large et totalement rempli)

On étudie l'évolution des états critique du nombre de Taylor en fonction du facteur d'aspect Γ

III.6.2.1 Evolution de $Ta_{c1}(\Gamma)$

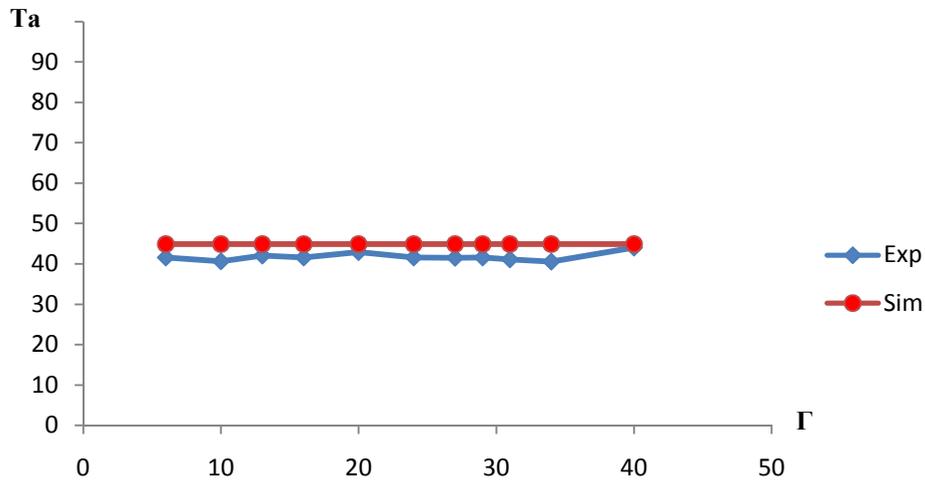


Figure III.34 : Comparaison de l'évolution du nombre Ta_{c1} en fonction du facteur d'aspect Γ pour un système totalement rempli

III.6.2.2 Evolution de $Ta_{c2}(\Gamma)$

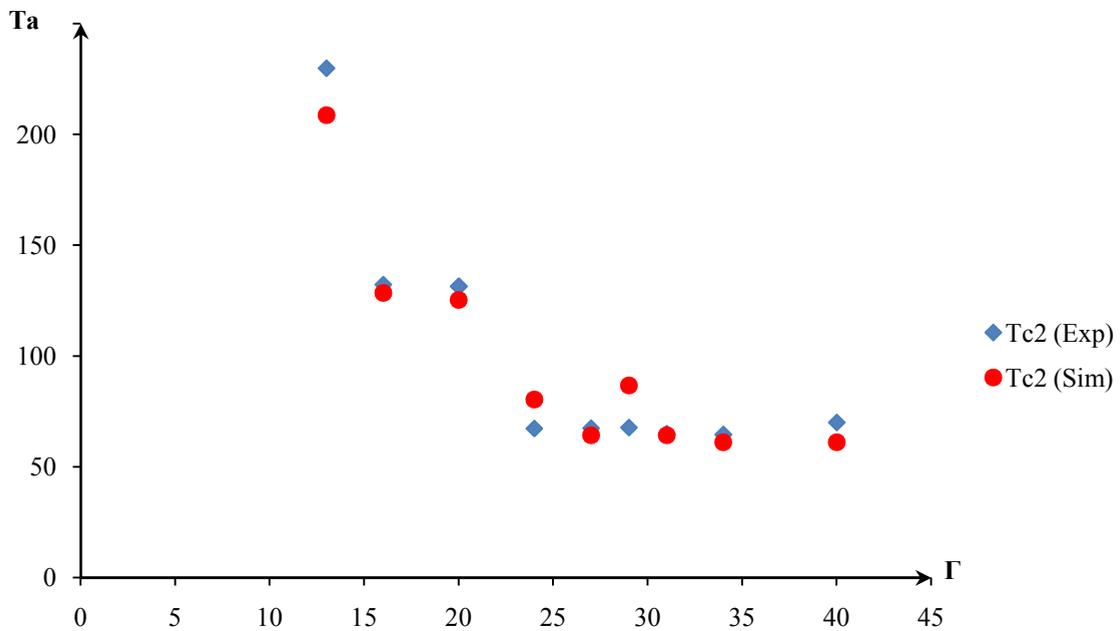


Figure III.35 : Comparaison de l'évolution du nombre Ta_{c2} en fonction du facteur d'aspect Γ pour un système totalement rempli

Pour un rapport d'aspect $\Gamma < 10$ et dans le cas d'un système relativement large, la transition s'opère directement vers une structure chaotique sans que l'on observe le régime d'onde azimutale.

III.7 L'instabilité créée par une contra-rotation de deux cylindres concentriques

Le système de Couette-Taylor a un diagramme d'instabilité très riche comme le montre le diagramme des phases réalisé par Andereck et al [10]. Pour le cas contra-rotation, présenté sur la figure (III.36), où les écoulements, résultant de brisures successives de symétries, présentent des propriétés surprenantes.

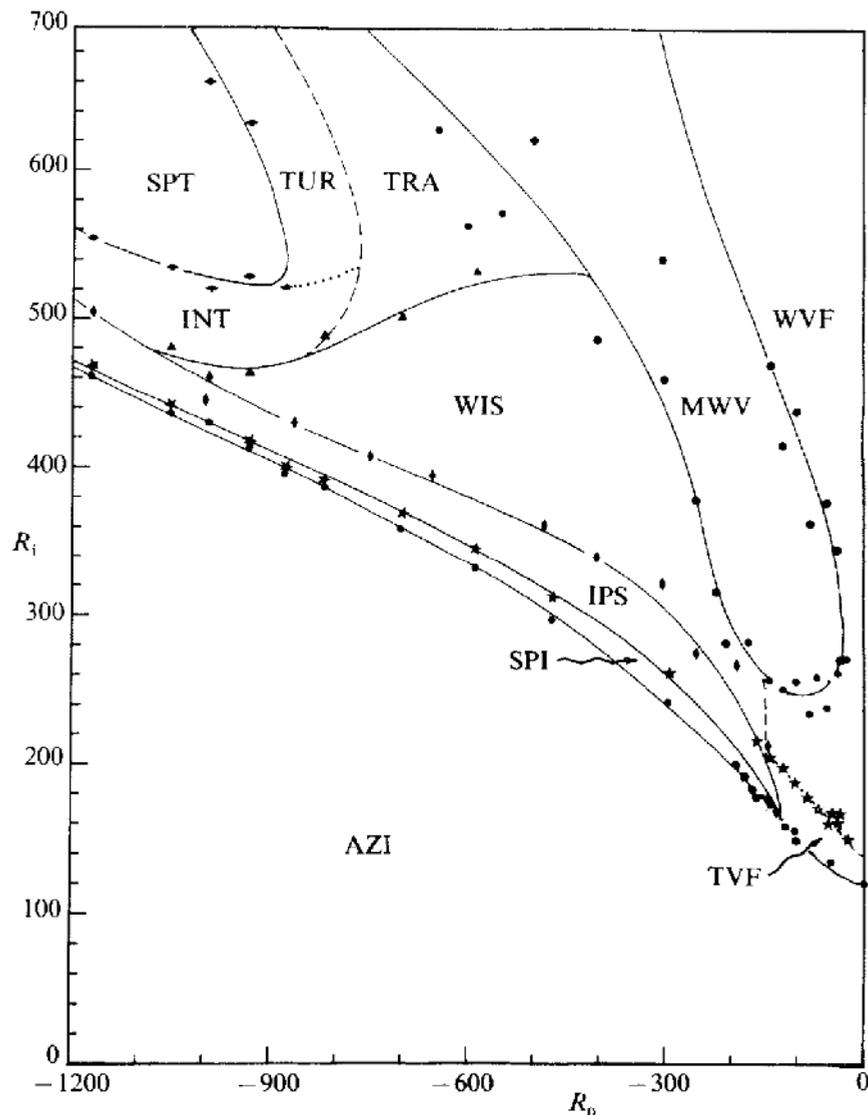


Figure III.36 : Diagramme des phases dans l'écoulement de Taylor-Couette contra-rotation réalisé par Andereck et al [10].

Lorsque les deux cylindres sont en contrarotation, l'écoulement de base circulaire de Couette subit une bifurcation supercritique vers un écoulement des spirales. Ces spirales sont des ondes non-linéaires hélicoïdales se propageant le long et autour de l'axe des cylindres. La caractérisation expérimentale des régimes des spirales a été faite expérimentalement par Andereck et al [10] avec Re_i décroît pour des Re_e fixes.

III.7.1 Description des écoulements observés

Dans cette partie, l'étude est faite à une vitesse de rotation constante du cylindre intérieur correspondant à $Re_i=280$. En augmentant progressivement la vitesse de rotation du cylindre extérieur, nous observons les différentes transitions de l'écoulement de Couette laminaire avant d'atteindre le chaos (Figure III.37).

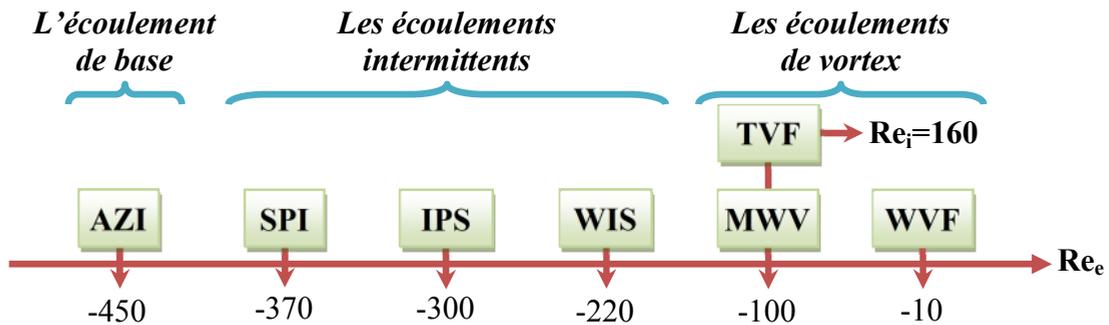


Figure III.37 : Diagramme d'états observé dans le système de Couette-Taylor en controtation pour $Re_i=280$ sauf TVF pour $Re_i=160$

Les résultats ainsi obtenu peuvent être divisé en six régions correspondant à des écoulements de nature différentes.

1) L'écoulement azimutal (AZI)

L'écoulement de Couette laminaire désigne l'écoulement stationnaire azimutal $v(r, \theta, z, t) = v(r)$ solution des équations du problème et vérifiant les conditions de non glissement aux parois pour des cylindres infiniment longs.

L'écoulement de Couette azimutal est une bonne approximation de l'écoulement réalisé à faibles vitesses. Dans le diagramme de bifurcation présenté par C. DAVID ANDERECK et al [10] dans la figure (III.38), l'écoulement azimutal présent dans la région AZI désigne cet écoulement azimutal modifié.

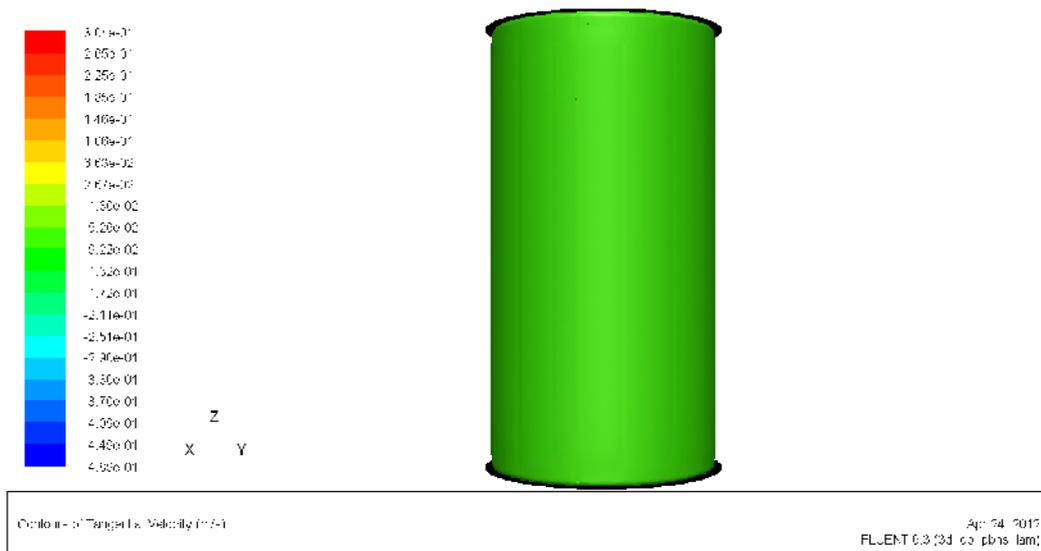


Figure III.38 : Ecoulement azimutal (AZI). Visualisation d'isosurfaces de la composante tangentielle de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-450$

2) Ecoulement des vortex de Taylor (TVF)

Près de l'axe $Re_e = 100$, l'axe des tores formés par les rouleaux est confondu avec l'axe des cylindres et l'écoulement obtenu (indépendant de t et θ) est appelé écoulement des vortex de Taylor (TVF). La figure (III.39) est une visualisation d'isosurfaces de la composante tangentielle de la vitesse de cet écoulement prise dans le système de Taylor-Couette.

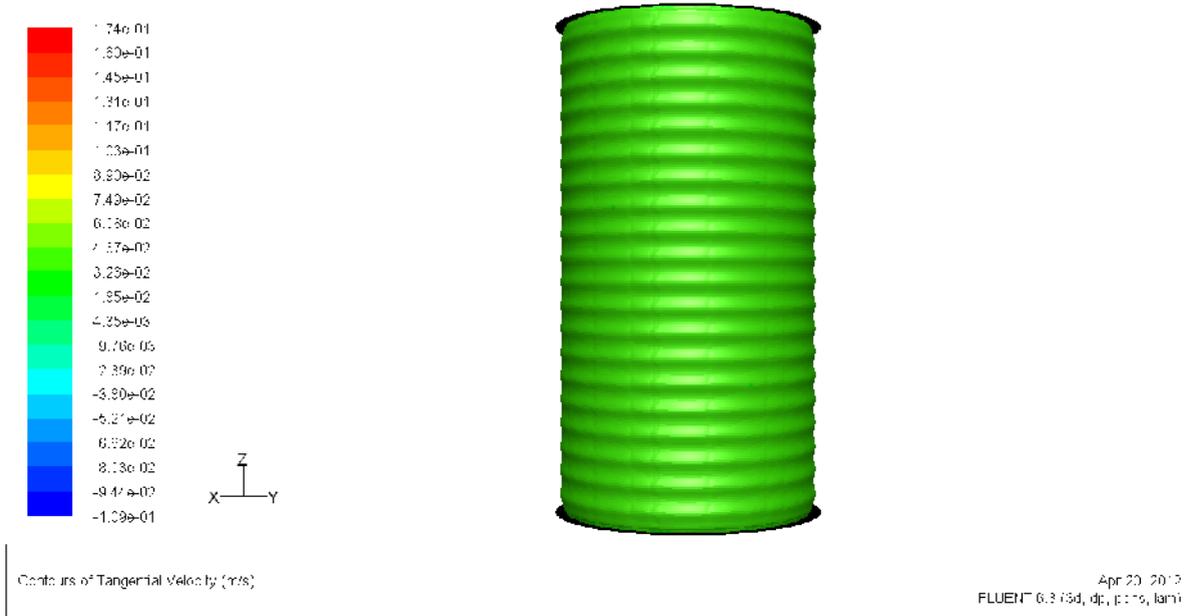


Figure III.39 : Vortex de Taylor (TVF). Visualisation d'isosurfaces de la composante tangentielle de la vitesse pour $Re_i=160$ et $Re_e=-100$

3) Vortex en spirale (SPI)

Pour Re_e plus petit ($Re_e < -300$), l'axe des rouleaux est incliné et les rouleaux forment une hélice qui s'enroule suivant l'axe des cylindres. C'est l'écoulement des vortex en "spirale" (SPI).

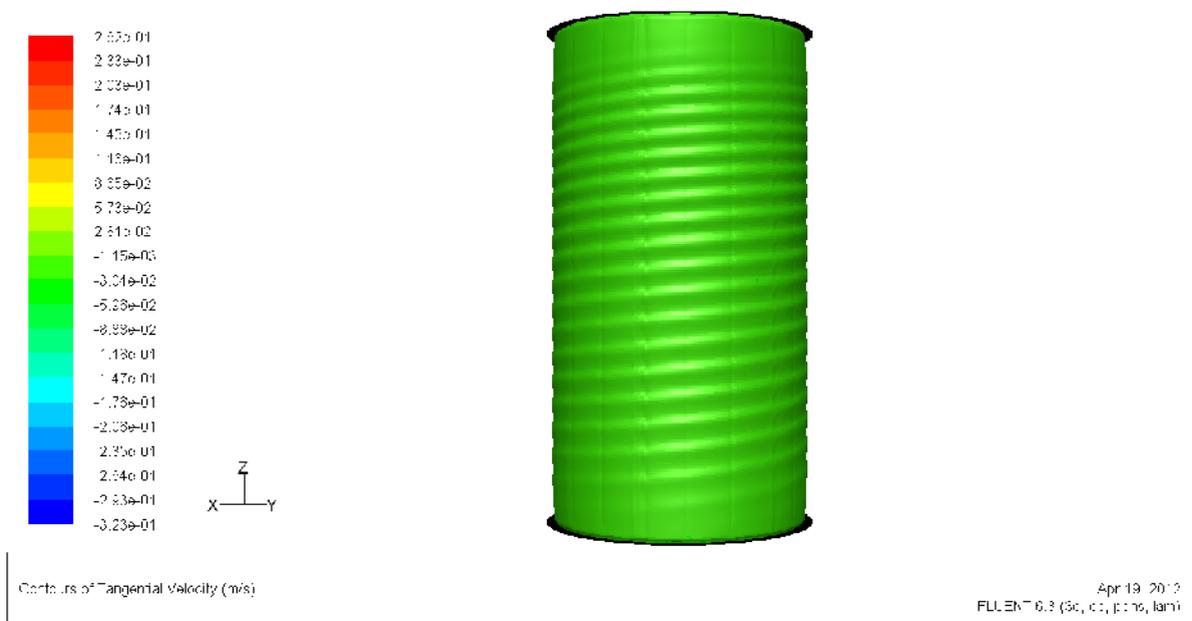


Figure III.40 : Vortex en spirale (SPI). Visualisation d'isosurfaces de la composante tangentielle de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-370$

Le motif en double spirale est illustré dans la figure (III.41.a), où existent deux spirales séparées par une interface.

Pour le cas particulier illustré dans la figure, la spirale supérieure a finalement quitté l'écoulement complètement, laissant la spirale inférieure au cours de l'espace annulaire entière, comme le montre la figure (III.41.b).

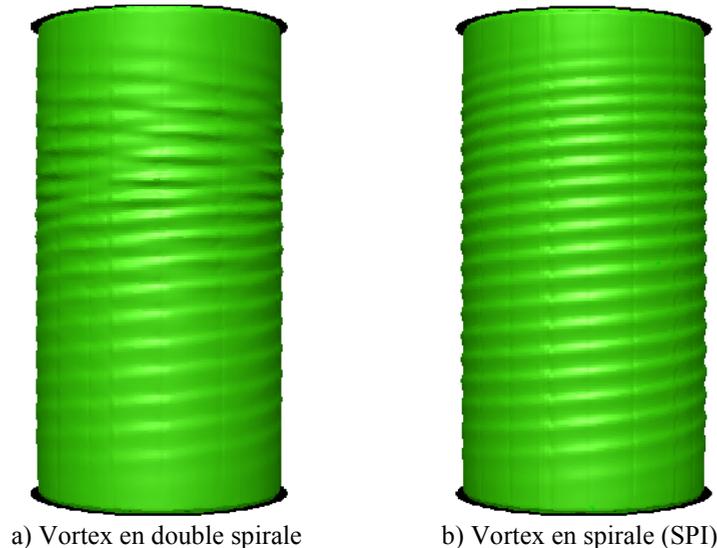


Figure III.41 : Evolution d'isosurfaces de la composante tangentielle de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-370$ de vortex en spirale (SPI)

3.1 Structure des vortex

A partir des champs de vitesse de l'écoulement dans un plan (r,z) , pour le régime de spirale à $Re_i=200$ et $Re_e=-182$, ainsi pour le régime de TVF à $Re_i = 200$ et $Re_e = 80$, qui sont illustrés sur les figures (III.42.b) et (III.43.b), nous avons pu sortir les constatations remarquables suivantes :

- (i) contrairement au régime TVF, la structure tourbillonnaire de SPI, n'occupe que deux tiers de l'espace annulaire : la zone au voisinage du cylindre intérieur (figure III.43.b).
- (ii) une dissymétrie de taille de deux tourbillons d'un même tourbillon négatif est 1,375 fois plus grande que le tourbillon positif.
- (iii) cette différence de taille implique une diminution de longueur d'onde $\lambda = 1,7d$ pour le SPI par rapport à $\lambda = 2d$ pour le TVF.

3.2 Anharmonicité :

Sur la Figure (III.42.a), nous montrons les profils axiaux de la vitesse radiale $U(z)$ au milieu de l'espace annulaire ($r+0.5d$) pour le régime de TVF à $Re_i = 200$ et $Re_e = 80$ et sur la figure (III.41.b) pour le régime de SPI à $Re_i=200$ et $Re_e=-182$. Typiquement comme les TVF, les SPI sont caractérisées par une anharmonicité de profil de vitesse.

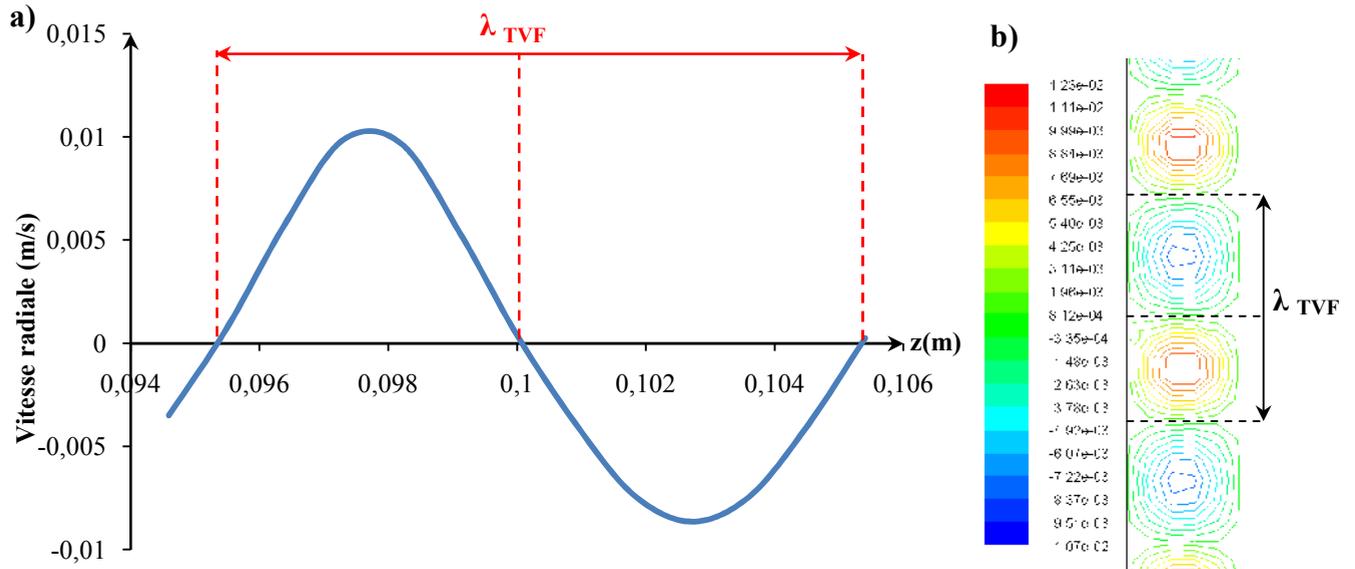


Figure III.42 : Régime de TVF pour $Re_i=200$ et $Re_e=80$: a) Profil de la vitesse radial $U(z)$ au milieu de l'espace annulaire, b) Contours de la vitesse radiale dans le plan (r,z)

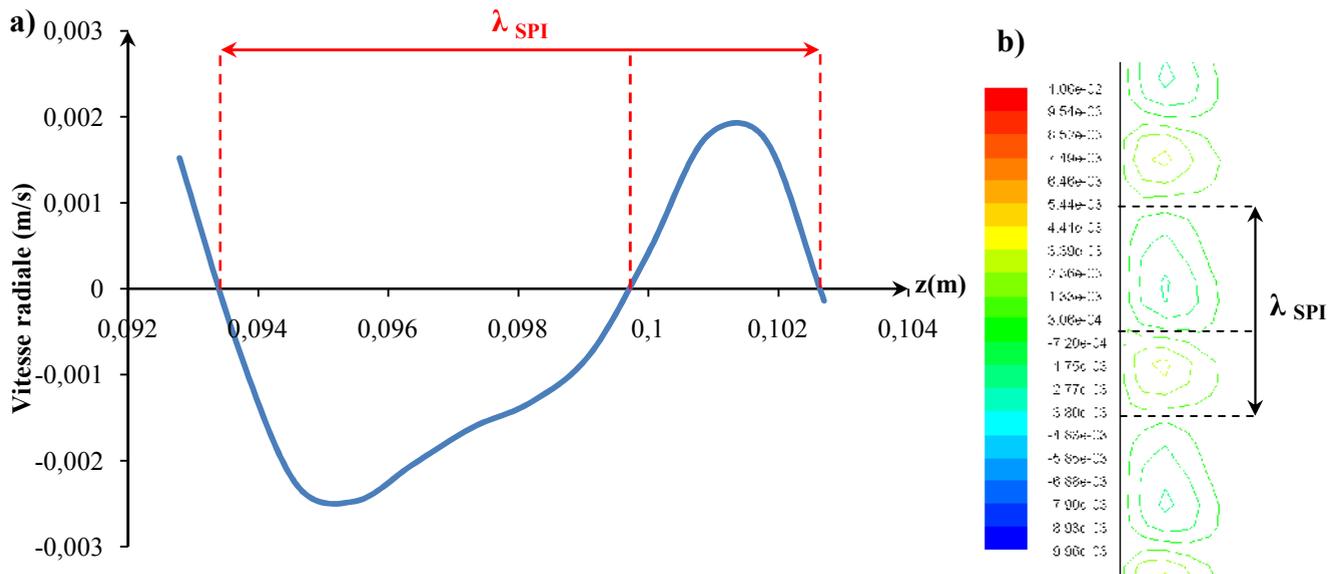


Figure III.43 : Régime de SPI pour $Re_i=200$ et $Re_e=-182$: a) Profil de la vitesse radial $U(z)$ au milieu de l'espace annulaire, b) Contours de la vitesse radiale dans le plan (r,z)

Nous avons montré par des simulations numériques, que l'écoulement de vortex de Taylor soumis à une augmentation Re_e (de $Re_e=80$ à $Re_e=-182$) se déstabilise en un écoulement de spirales de Taylor. Cette augmentation brise la symétrie axiale et de rotation des vortex de Taylor.

4) Spirale interpénétrante (IPS)

Si le signe de l'hélicité varie suivant la hauteur, on obtient des hélices s'interpénétrant et l'écoulement est appelé "spirale interpénétrante" (IPS). La figure (III.44) montre une visualisation d'isosurfaces de la composante tangentielle de cet écoulement prise dans le système de Taylor-Couette.

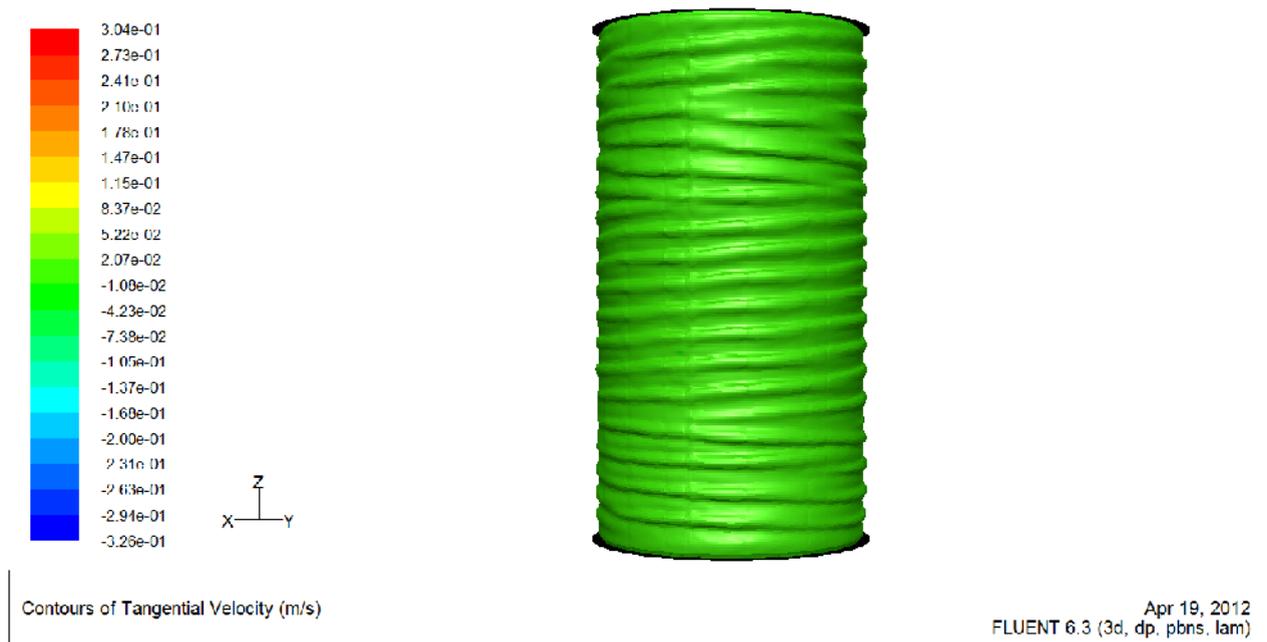


Figure III.44 : Spirales interpénétrantes (IPS). Visualisation d'isosurfaces de la composante *tangentielle* de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-300$

L'écoulement de Couette circulaire transite vers des ondes spirales interpénétrantes lorsque la vitesse du cylindre intérieur atteint une valeur critique.

Ces spirales sont des ondes droite et gauche qui se propagent dans deux directions opposées le long et autour de l'axe du cylindre. Elles ont une zone d'interpénétration aux extrémités des parois des cylindres et elles sont absentes au centre du cylindre. Nous pouvons définir deux ondes, droite et gauche dans chaque extrémité du système.

5) L'écoulement de vortex ondulés (WVF)

Si le nombre de Reynolds Re_i est augmenté au-dessus de Re_{ic} les rouleaux peuvent eux-mêmes se déstabiliser. La première déstabilisation se traduit par une modulation azimutale de ceux-ci. Expérimentalement, si l'état de base est l'écoulement des vortex de Taylor, on obtient l'écoulement de vortex ondulés (WVF). Mais par simulation numérique, on peut localiser cet état directement pour $Re_i=280$ et $Re_e=-10$.

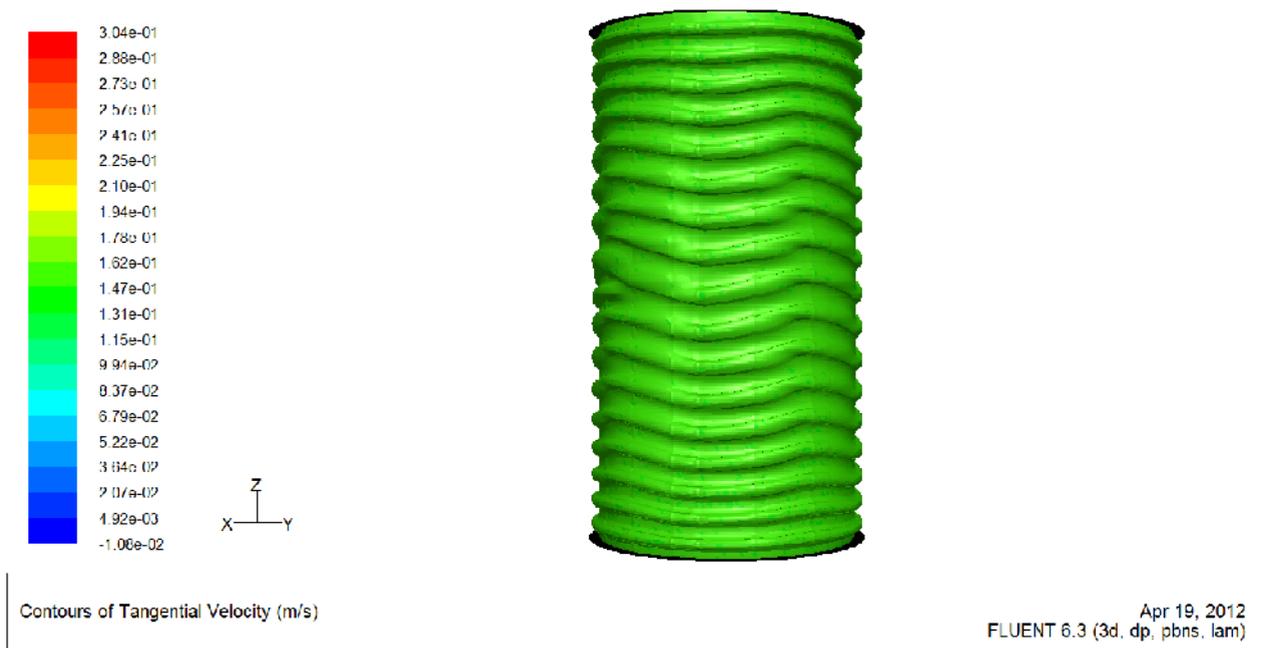


Figure III.45 : Vortex de Taylor ondulés (WVF). Visualisation d'isosurfaces de la composante *tangentielle* de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-10$

6 Vortex interpénétrants en spirale ondulés (WIS)

Expérimentalement, si l'état de base est la spirale interpénétrante, on obtient des vortex interpénétrant en spirale ondulés (WIS). Mais par simulation numérique, on peut localiser cet état directement pour $Re_i=280$ et $Re_e=-220$. Une visualisation de ce dernier obtenu dans le système Taylor-Couette, est donnée en figure (III.46).

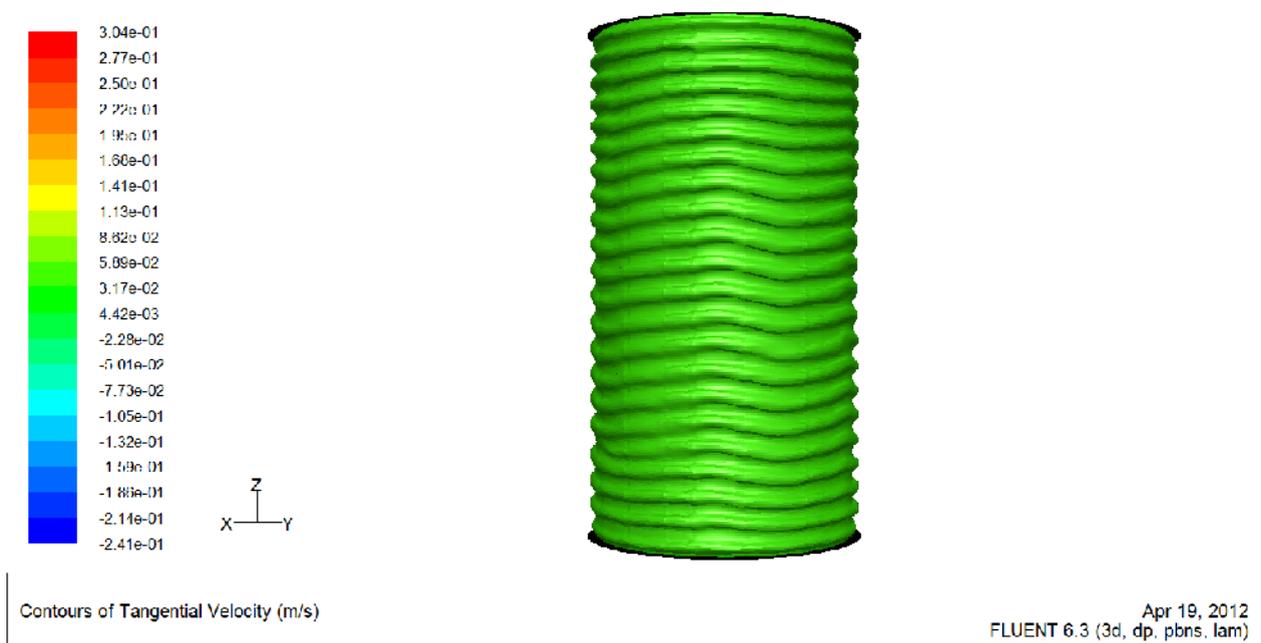
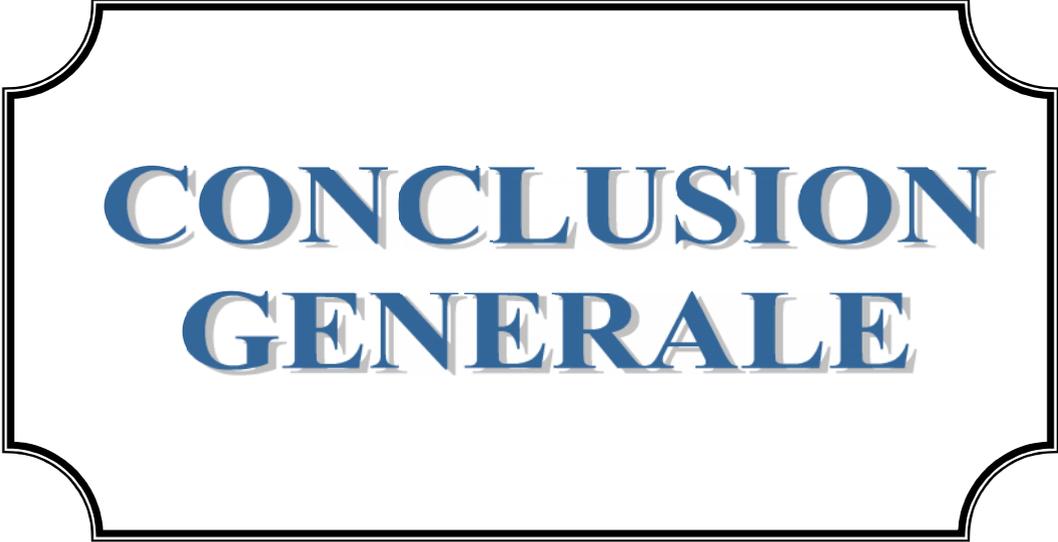


Figure III.46 : Vortex interpénétrantes en spirale ondulés (WIS). Visualisation d'isosurfaces de la composante *tangentielle* de la vitesse pour $Re_i=280$ et $Re_e=-220$



**CONCLUSION
GENERALE**

CONCLUSION GENERALE

Ce travail concerne l'étude des instabilités hydrodynamiques dans le cas d'un écoulement dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux connu sous le nom de Taylor-Couette.

Une étude bibliographique a permis de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition d'instabilités au sein de l'écoulement.

En se basant sur la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations mathématiques, la simulation a été faite à l'aide du code de calcul FLUENT.

L'étape d'apprentissage du code de calcul nous avait pris un temps considérable vu la multitude des réglages disponibles sous le logiciel (géométrie, maillage, conditions aux limites et valeurs de référence de "FLUENT").

L'influence des différents paramètres de l'écoulement ainsi que ceux relatifs à la configuration géométrique sur le comportement du fluide a été étudiée.

Le comportement hydrodynamique est étudié à travers le champ de vitesse et le champ de pression, pour des différentes valeurs du nombre de Taylor, correspondant à la transition de régime laminaire vers la 1^{ère} et la 2^{ème} instabilité.

Le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire est caractérisé par le nombre de Taylor critique. Nous avons étudié également l'influence du facteur de forme sur le seuil de la transition entre différents régimes.

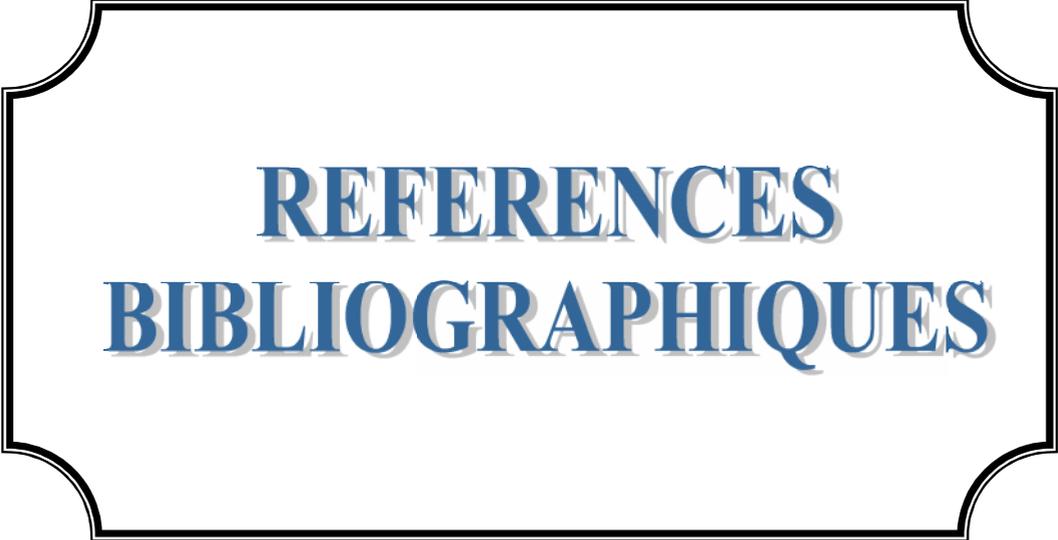
Les résultats montrent que les tourbillons apparaissent à l'aval de l'espace annulaire et que leur croissance se fait radialement. Sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur les structures tourbillonnaires occupent toute la longueur de l'espace annulaire.

Bien que l'étude n'est pas portée sur la transition vers le chaotique, la méthode de calcul a permis de déterminer les conditions d'apparition et du développement des vortex et des ondulations au sein de l'écoulement.

Nous avons ensuite étudié les différentes transitions des modes d'instabilités observés dans le système de Couette-Taylor en contra-rotation.

Il serait intéressant d'envisager par la suite l'étude du régime chaotique. On peut également étendre cette étude aux fluides non newtoniens, qui font l'objet de multiples applications industrielles (industrie agroalimentaire, fluide de forage...)

Nous espérons poursuivre l'étude entamée sur les effets de la surface libre, numériquement en 3D.

A decorative rectangular frame with rounded corners and a double-line border, containing the text.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. I. Taylor, 1923.

Stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders

Phil. Trans. Roy. Soc. A 223, 289-343.

[2] G. I. Taylor, 1936

Fluid friction between rotating cylinders. II. Distribution of velocity between concentric when outer one is rotating and inner one is at rest

Proc. Roy. Soc. A 157, N°892, 565-578.

[3] L. Rayleigh, 1916.

On the dynamics of revolving fluids.

Proc. Roy. Soc. Lond., A93 :148–154.

[4] Arnaud Prigent, 2001

La Spirale Turbulente : motif de grande longueur d'onde dans les écoulements cisailés turbulents

Thèse de doctorat de l'Université Paris XI - Orsay

[5] R. C. DiPrima, 1961.

Stability of Nonrotationally Symmetric Disturbances for Viscous Flow between Rotating Cylinders

Phys. Fluids vol 4 N°6 : 751-755

[6] S. Chandrasekhar, 1961.

Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.

Oxford Press

[7] J. P. Boin

Etude des écoulements turbulents

Ecole Nationale Supérieure de Bourges (ENSIB), (cours) année 2001/2002

[8] D. Coles, 1965.

Transition in circular Couette flow.

J Fluid Mech 21 : 385–425

[9] Amine Mehel, 2006.

Etude Expérimentale d'un Ecoulement Diphasique de Taylor Couette

Thèse de Doctorat

[10] J. Stuart, 1986.

Taylor vortex flow: A dynamical system

SIAM Review vol 28 N°3 pp 315-342.

[11] C. Andereck, S. S. Liu, H. L. Swinney, 1986.

Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders

J. Fluid Mech. Vol 164, 155-183.

[12] Russell J. Donnelly

Fifty-Five Years of Taylor-Couette Flow

[13] A. Mallock, 1888.

Determination of the Viscosity of Water

Proc. R. Soc. Lond, 126-136.

[14] J.T.STUART, 1958.

The non- linear mechanics of hydrodynamics stability

J. Fluid Mech. Vol 4

[15] H. A. SNYDER et S.K.F. KARLSSON, 1964.

Experiments on the Stability of Couette Motion with a Radial Thermal Gradient

Phys of fluids Vol.7 p.1696

[16] J. A. Cole, 1976.

Taylor-vortex instability and annulus-length effects.

J. Fluid Mech. 75, 1

[17] C. D. Andereck, R. Dickman, H. L. Swinney, 1983.

New flows in a circular Couette system with corotating cylinders,

Phys Fluids. Vol 26

[18] N. Gravas, B. W. Martin, 1978.

Instability of viscous axial flow in annuli having a rotating inner cylinder

Fluid Mech. Vol 86.

[19] T. B. BENJAMIN, 1978.

Bifurcation phenomena in steady flows of viscous fluid. I. Theory

Proc. R. soc. Lond. A, 359, 1-26

[20] T.B BENJAMIN, 1978.

Bifurcation phenomena in steady flows of viscous fluid. II. Experiments.

Proc. R. soc. Lond. A, 359, 27-43

[21] T. B. Benjamin, T. MULLIN, 1981.

Anomalous modes in the Taylor experiment,

Proc. Roy. Soc. London. A 377, 221–249.

[22] R. C. DiPrima, P. Hall, 1984.

Complex eigenvalues for the stability of Couette flow

Proc. Roy. Soc. London Ser. A 396, 75-94.

[23] G. U. Beltran, 1996.

Étude de l'écoulement et du transfert de chaleur dans les cavités cylindriques en rotation

Thèse de Doctorat

[24] P. S. Marcus, 1984.

Simulation of Taylor-Couette flow. Part 1: Numerical methods and comparison with experiment. Part 2: Numerical results for wavy-vortex flow with one travelling wave.

J. Fluid Mech, 146, 45-64 et 65-113.

[25] R. C. DiPrima & H. L. Swinney, 1985.

Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders

Topics in applied physics, vol.45, Springer-Verlag, Berlin, 139-180. 2^{ème} ed.

[26] RANDALL TAGG, 1994.

The Taylor Couette Problem

Nonlinear science today. Vol.4.

[27] P. G. DRAZIN, W. H. REID, 2004.

Hydrodynamic Stability

Cambridge UNIVERSITY PRESS

[28] ADNANE El-Mahfoud, 2007.

Effets de la mise en régime des vitesses sur les conditions d'apparition des instabilités et de la turbulence entre deux cylindres coaxiaux

Thèse de Magister

[29] A. MAHAMDIA et A. BOUABDALLAH, 1990.

Modelling, Measurement and control,

B, AMSE Prsse, Vol. 30 p. 5.

[30] A. MAHAMDIA, A. BOUABDALLAH et S.E SKALI, 2005.

Ecoulement de Taylor–Couette en géométrie finie et à surface libre

The Canadian Journal of Chemical Engineering, 83, pp 652-657

Résumé :

On considère l'étude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres concentriques en rotation connu sous le nom de type Taylor-Couette. Les configurations étudiées sont : seul le cylindre intérieur est en rotation et les deux cylindres tournant en sens inverse. Les paramètres de contrôle du problème sont le jeu radial, rapport d'aspect, l'inclinaison de la géométrie et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation du cylindre intérieur.

La simulation a été effectuée à l'aide du code de calcul FLUENT qui est basé sur la Méthode des Volumes Finis. Les résultats des simulations obtenus sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par El-Mahfoud Adnane.

Abstract:

We consider the numerical simulation of the flow of a viscous fluid between two concentric and rotating cylinders. Configurations are studied : only the inner cylinder is rotating and the two cylinders rotating in opposite directions.. The control parameters of the problem are the aspect ratio, aspect ratio, the inclination of the geometry and the Reynolds number based on the speed of rotation of the inner cylinder.

The simulation was carried out using the FLUENT which is based on the Finite Volume Method. The obtained numerical results were in good agreements with experimental results obtained by El-Mahfoud Adnane.

ملخص :

في هذا العمل نتطرق إلى الدراسة الرقمية لجريان سائل لزج بين اسطوانتين متركزتين في حالة دوران، والانتقال من حالة الاستقرار نحو حالة عدم الاستقرار الذي يعرف بسيلان تايلور كوات. أين تمت دراسة حالتين هما : الاسطوانة الداخلية تدور بسرعة زاوية ثابتة والحالة الثانية كلا الاسطوانتين تدوران في اتجاهين متعاكسين. العوامل التي تؤثر في الجريان وعلى شروط ظهور اللاستقرار هي عامل الشكل، عامل الطول، ميلان الجهاز وعدد رينولدز.

الدراسة أجريت باستعمال برنامج FLUENT الذي يستند على طريقة الأحجام المنتهية. النتائج المتحصل عليها متوافقة مع النتائج التجريبية المتوفرة.