

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE DE BATNA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



Mémoire

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN
ELECTRONIQUE

Option : Robotique

Thème

*Commande Optimale d'un Bras
Manipulateur*

Etudié par :

Nadia HAMLAOUI

(Ingénieur d'état en électronique)

Membres du Jury:

<i>Pr. BENYOUCEF Moussa</i>	<i>Président</i>	<i>(Professeur Université de Batna)</i>
<i>Dr. SLIMANE Nouredine</i>	<i>Rapporteur</i>	<i>(M.C. A Université de Batna)</i>
<i>Dr. BOUTAMINA Brahim</i>	<i>Examineur</i>	<i>(M.C.A Université de Constantine)</i>
<i>Dr. ABDESSEMED Yassine</i>	<i>Examineur</i>	<i>(M.C. A Université de Batna)</i>

2014/2015

" Because the shape of the whole universe is most perfect and, in fact, designed by the wisest Creator, nothing in all of the world will occur in which a maximum or minimum rule is somehow shining forth. "

Leonhard Euler, 1744

À la mémoire de

la chère douce benjamine,

****Nada El-Batoul****

j'aurais aimé que tu sois auprès de moi en ce jour...

Nadia

REMERCIEMENTS

*Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers
par qui nos âmes sont fleuries.*

Marcel Proust

Parce qu'un travail de recherche requiert le concours et le support moral de plusieurs personnes. Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de ce mémoire.

D'abord, je suis très reconnaissante à tous les enseignants, qui ont contribué à mon éducation et à ma formation, depuis la prononciation de la première lettre alphabétique et la résolution de la première opération arithmétique d'addition ou de soustraction...Une profonde gratitude à mes maîtres et professeurs de toutes les étapes de ma trajectoire d'apprentissage. Ils m'ont montré la voie à suivre et ont été, chacun à sa manière, un modèle.

Je tiens à exprimer au Docteur **N. SLIMANE**, qui a accepté de diriger soigneusement ce modeste périple de savoir, mes sentiments de respectueuses grâces pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de la réalisation de ce travail de recherche de magister et pour ses encouragements et conseils. Il a su créer un cadre de travail qui m'a permis d'évoluer en toute liberté tout en étant disponible pendant les moments de doute.

Je remercie aussi le Professeur **M. BENYOUCEF** d'avoir pris de son temps pour évaluer mon travail et d'avoir accepté de présider le jury de délibérations.

Je remercie bien entendu les docteurs **B. BOUTAMINA** et **Y. ABDESSEMED**, Maîtres de Conférences respectivement aux Universités de Constantine et de Batna, pour avoir accepté de juger ce modeste travail et surtout pour leur évaluation constructive et éclairée.

Je tiens à adresser ici des sentiments plus décontractés, mais néanmoins chaleureux et sincères à toute personne que j'ai contractée à l'institut d'hygiène et sécurité industrielle, ma vive reconnaissance pour le soutien constant tout au long de l'élaboration de ce travail. C'est très précieux et inoubliable.

J'ai la chance d'avoir été accompagnée à chaque étape de ce périple avec, ses hauts et ses bas, ses rires et ses larmes, ses souffrances et ses satisfactions, ses rencontres et ses départs, et d'avoir avancé avec des chers que j'aime. Un salut de respect et de gratitude très distingué à ma famille avec tout mon cœur, pour l'amour et le soutien discret et essentiel.

Ma profonde gratitude à toute personne, m'ayant souhaitée un jour par une petite phrase "bonne chance et bon courage".

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE 1 MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS	
1.1.Introduction	4
1.2.Structure mécanique et géométrie des robots	4
1.2.1.Structure mécanique.....	4
1.2.2.Structure géométrique.....	6
1.3.Modèle géométrique	7
1.3.1.Modèle géométrique direct.....	7
1.3.2.Modèle géométrique inverse	8
1.4.Modèle cinématique	9
1.4.1 . Modèle cinématique direct	9
1.4.2 . Modèle cinématique inverse.....	9
1.4.2 .1. Méthode d'optimisation cinématique	10
1.4.2 .2. Méthode d'optimisation dynamique.....	11
1.5 Modèle dynamique	12
1.5.1 . Modèle dynamiqueinverse	12
1.5.1.1. Formalisme de Lagrange	12
1.5.1.2. Formalisme de Newton-Euler.....	15
1.5.2 . Modèle dynamiquedirect.....	18
1.5.3. Comparaison entre les deux formalismes	18
1.6. Paramétrage du modèle dynamique	19
1.7. Simulations et résultats	19
1.7.1. Modèle dynamique du système étudié.....	19
1.7.2. Résultatsobtenus.....	22
1.8.Conclusion	27
CHAPITRE 2COMMANDE OPTIMALE LQR	
2.1. Introduction	28
2.2. Commande optimale	28
2.2.1. Commande LQ à horizon fini.....	29
2.2.2. Commande LQ à horizon infini.....	31
2.2.3. Commande LQ à temps discret à horizon fini	32

2.2.4. Critère à horizon infini.....	34
2.3. Robustesse de la commande LQ.....	35
2.3.1. Différence de retour.....	35
2.3.2. Marges de stabilité.....	35
2.4. Structure des régulateurs	36
2.5. Choix des pondérations.....	38
2.6. Simulations et résultats	38
2.6.1. Utilisation des critères quadratiques pour la détermination des gains	38
2.6.2. Résultats obtenus	40
2.7. Conclusion	46
 CHAPITRE 3 COMMANDE ROBUSTE	
3.1. Introduction	47
3.2. Les approches de robustesse	48
3.2.1. Approches basées sur l'utilisation d'un modèle.....	48
3.2.2. Approches directes sans modèle explicite	49
3.3. La robustesse en stabilité	50
3.3.1. Les marges de robustesse.....	50
3.3.2. Erreurs de Modélisation	52
3.4. Spécifications traditionnelles	53
3.4.1. Spécifications dans le domaine temporel	54
3.4.2. Spécifications dans le domaine fréquentiel.....	55
3.5. Stabilité robuste	55
3.6. Notion de la stabilité de Lyapunov	56
3.6.1. Stabilité locale.....	56
3.6.2. Stabilité globale	57
3.7. Simulations et résultats	57
3.7.1. Organigramme	57
3.7.1.1. Conditions sur les matrices de pondération.....	59
3.7.1.2. Calcul de la matrice F	59
3.7.1.3. Conception de la matrice de transformation d'état T_0	59
3.7.1.4. Commande optimale robuste	60
3.7.2. Résultats obtenus.....	62

3.8.Conclusion	70
CONCLUSION GENERALE	71
BIBLIOGRAPHIE	73

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Commander, c'est ordonner à quelqu'un, en vertu de l'autorité que l'on détient, de faire quelque chose. Loin des labyrinthes des lois de la physique et des calculs mathématiques acharnés, la sémantique de cette unité linguistique a pu exprimer avec délicatesse, subtilité et sagesse, la philosophie fondamentale de la commande.

À l'issue de cette métaphore, l'homme a toujours voulu dominer son entourage, tout en simulant les concepts innés et absolus de la nature et il y est arrivé relativement à vérifier ce vœu, lorsqu'il a pu conquérir la robotique industrialisée lors de l'apogée de l'ère de la renaissance.

Ses premiers pas dans ce domaine fondent les formules repères de la théorie de l'Automatique, qui cadrent subtilement la progression dynamique graduelle de la commande des procédés physiques. Dans ce sens, les théoriciens pionniers de l'automatique, définissent d'une manière générale la commande, comme une expression mathématique homogène, dont la conception et la mise en place permettent d'assurer le fonctionnement attendu ou souhaité d'un système donné, afin d'exécuter une ou plusieurs tâches bien précises.

Dans un contexte plus étroit, commander un processus, c'est déterminer les commandes à lui appliquer de manière à assurer aux variables d'états ou aux sorties qui nous intéressent un comportement précisé par un cahier de charges. La loi de la commande élaborée pour piloter un procédé donné doit satisfaire certaines contraintes, notamment celle de l'invariance du comportement du procédé tout au long de sa phase de travail, en dépit de la variation paramétrique de certains constituants intrinsèques au procédé et à la présence d'éventuelles perturbations additives à la sortie du procédé. Cette préoccupation est vitale, car elle permet de garantir les propriétés de robustesse.

La littérature spécialisée offre une multitude de schémas de commande, qui permet de répondre à ce besoin. La commande optimale, également nommée la commande linéaire

quadratique LQR, sera l'axe principal de recherche de ce mémoire. Cette approche réputée notamment par ses qualités appréciables de robustesse a suscité de nombreux développements comme en témoignent les références bibliographiques.

En fait, pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, l'ABC de cette théorie de commande consiste à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX^{ème} siècle avec le calcul des variations [1]. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues. La commande optimale reste donc un sujet de recherche ouvert et d'actualité.

Par une simple relecture des travaux de [2] et [3], notre petite contribution vise à élaborer une loi de commande optimale robuste, issue d'une solution explicite d'une équation algébrique matricielle.

Le problème de stabilité possède, en matière de commande, une importance primordiale. La recherche d'une loi de commande garantissant la stabilité d'un système asservi peut se faire à l'aide des fonctions de Lyapunov.

La notion de la commande de position d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté, sera développée en utilisant la théorie de la commande LQR. On se propose d'appliquer cette approche en assurant le contrôle de la stabilité asymptotique et du suivi de la trajectoire désirée des positions et vitesses articulaires.

Outre l'introduction et la conclusion générale, ce mémoire est organisé en trois chapitres répartis comme suit :

- Le premier chapitre est dédié à une présentation des différents modèles utilisés pour décrire le mouvement des articulations d'un bras manipulateur, on retiendra également le modèle dynamique du système étudié.
- Le deuxième chapitre portera sur la description théorique de la théorie LQR, et présente également une approche de calcul pour élaborer une loi de commande de position optimale d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2ddl).

- Le troisième chapitre présente une brève théorie sur le concept robustesse, et il est consacré également à la conception d'une commande optimale robuste visant à éliminer les erreurs de poursuite des variables articulaires c'est-à-dire des positions et vitesses articulaires.

Chaque chapitre comporte des travaux de simulation avec des commentaires appropriés et des conclusions.

CHAPITRE 1

MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS

1.1. Introduction

Pour développer une stratégie de commande performante pour un robot, il est impératif de connaître la cinématique et la dynamique du manipulateur considéré. Pour cela on est souvent amené à décrire les différentes relations mathématiques qui permettent de définir les mouvements de ce dernier dans l'espace.

Dans la pratique courante de robotique, la description du mouvement d'un robot manipulateur dans l'espace est réalisée en fonction du modèle géométrique, cinématique et dynamique.

Dans le présent chapitre on présente une théorie définissant ces modèles et les méthodes de leurs obtentions. On expose également le modèle dynamique du système étudié, ainsi que les résultats de simulation obtenus.

1.2. Structure mécanique et géométrique des robots

1.2.1. Structure mécanique

La structure mécanique du robot manipulateur peut être divisée en deux parties distinctes comme le montre la figure (1.1).

- **Organe terminal** : les tâches qui sont dévolues aux robots sont très variées. Pour chaque opération ou travail spécifique, l'organe terminal prend un aspect particulier.
- **Elément porteur**: il est composé d'un ensemble de corps souples ou rigides liés par des articulations, servant à déplacer l'organe terminal d'une configuration à une autre.

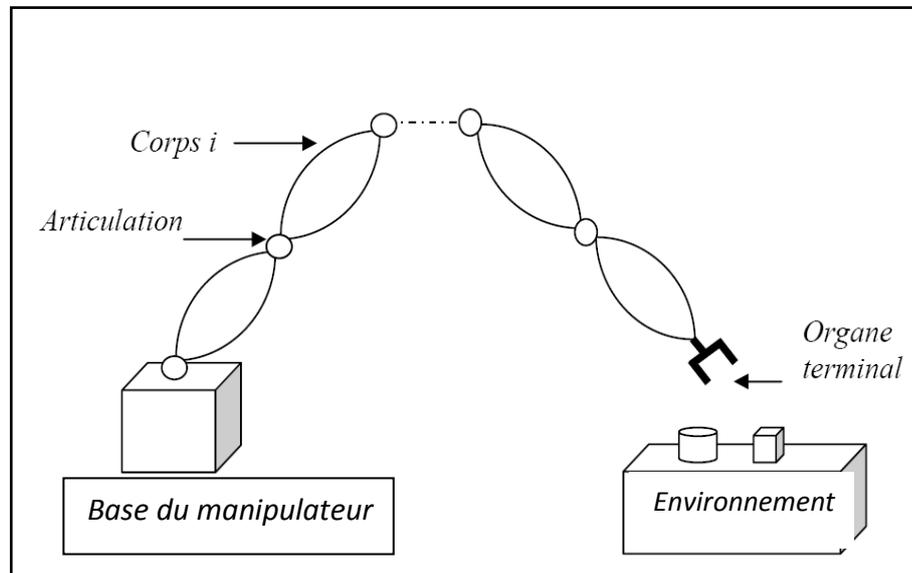


Figure 1.1 : Robot à chaîne ouverte simple [4]

Avant de décrire les relations géométriques entre les différents corps du robot, on définit les notions suivantes [5].

- **Configuration :**

De manière classique, la *configuration* d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans R_0 est connue. Pour un bras manipulateur, elle est définie par un vecteur q de n coordonnées indépendantes appelées *coordonnées généralisées*. La configuration est alors naturellement définie sur un espace N dont la dimension n est appelée *indice de mobilité*. N est appelé *espace des configurations*. Les coordonnées généralisées correspondent aux grandeurs caractéristiques des différentes articulations : angles de rotation pour les liaisons rotoïdes et translations pour les liaisons prismatiques. On note :

$$q = (q_1 q_2 \dots q_n)^T$$

- **Situation de l'organe terminal**

La *situation* x de l'OT du bras manipulateur est alors définie par m coordonnées indépendantes, dites *coordonnées opérationnelles*, qui donnent la position et l'orientation de l'organe terminal dans R_0 [6].

- **Degré de liberté:** nombre de paramètres utilisés pour spécifier la configuration d'un élément de la chaîne cinématique par rapport à un autre.
- **Degré de mobilité:** toute articulation est caractérisée par son degré de mobilité m , c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté entre deux corps successifs de la chaîne cinématique ($0 \leq m \leq 6$).
- **Espace articulaire:** représente l'état des corps composant le robot en fonction des variables articulaires, sa dimension n est égale au nombre de degrés de liberté du robot.
- **Espace opérationnel:** décrit la position et l'orientation de l'organe terminal du robot par rapport à un repère de référence, sa dimension est $m \leq 6$.

1.2.2. Structure géométrique

Parmi les diverses méthodes utilisées pour déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal par rapport au repère de référence, la plus répandue est celle de Denavit Hartenberg [6, 7] (figure 1.2).

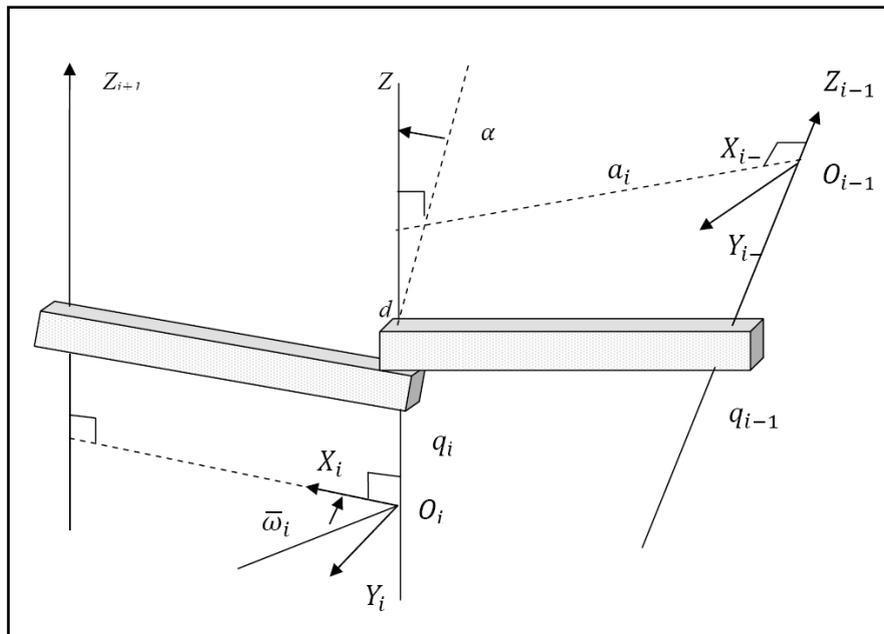


Figure 1.2 : Représentation de Denavit-Hartenberg

Pour exprimer le passage du repère R_{i-1} au repère R_i , on définit les paramètres géométriques suivants :

- Translation selon X_{i-1} d'une distance a_i .
- Rotation autour de X_{i-1} d'un angle α_i .
- Translation selon Z_i d'une distance d_i .
- Rotation autour de Z_i d'un angle $\bar{\omega}_i$.

La matrice de transformation homogène est donnée comme suit:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}T_i &= \text{trans}(X_{i-1}, a_{i-1})\text{Rot}(X_{i-1}, \alpha_{i-1})\text{trans}(Z_i, d_i)\text{Rot}(Z_i, \bar{\omega}_i) \\
 {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\bar{\omega}_i & -s\bar{\omega}_i & 0 & 0 \\ c\bar{\omega}_i & c\bar{\omega}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} c\bar{\omega}_i & -s\bar{\omega}_i & 0 & d_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\bar{\omega}_i & c\alpha_{i-1}c\bar{\omega}_i - s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i & \\ s\alpha_{i-1}s\bar{\omega}_i & s\alpha_{i-1}c\bar{\omega}_i & c\alpha_{i-1} & -c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}A_i & {}^{i-1}P_i \\ 0_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

avec :

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\bar{\omega}_i & -s\bar{\omega}_i & 0 \\ c\alpha_{i-1}s\bar{\omega}_i & c\alpha_{i-1}c\bar{\omega}_i & -s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\bar{\omega}_i & s\alpha_{i-1}c\bar{\omega}_i & c\alpha_{i-1} \end{bmatrix}, \quad {}^{i-1}P_i = \begin{bmatrix} d_{i-1} \\ -s\alpha_{i-1}d_i \\ c\alpha_{i-1}d_i \end{bmatrix}$$

Si on désigne par: 0T_n la matrice de transformation reliant le repère R_n au repère R_0 , alors :

$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n \quad (1.2)$$

1.3. Modèle géométrique

1.3.1. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct permet de déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal du manipulateur par rapport à un repère de référence en fonction des variables articulaires et s'écrit :

$$X = f(q) \quad (1.3)$$

où :

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in R^n$: Vecteur des variables articulaires.

$X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in R^m$: Vecteur des variables opérationnelles, $m \leq n$.

Par exemple, si le manipulateur se déplace dans l'espace on pose $m=6$ (trois coordonnées pour la position et trois coordonnées pour la rotation). S'il se déplace dans un plan on pose $m=2$ et si en plus on est concerné par la rotation on pose $m=3$.

La position de l'organe terminal peut être définie par des coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Le choix d'une structure particulière est guidé par les caractéristiques du robot, ainsi que par celle de la tâche à réaliser.

1.3.2. Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse permet de déterminer le vecteur des variables articulaires à partir du vecteur de coordonnées opérationnelles et s'écrit :

$$q = f^{-1}(X) \quad (1.4)$$

Parmi les méthodes utilisées pour déterminer le modèle géométrique inverse on cite :

- **Les méthodes géométriques** : permettent de déterminer le vecteur q par utilisation des transformations géométriques en tenant compte de la structure particulière du manipulateur considéré.
- **Les méthodes algébriques** : permettent de déterminer le vecteur q en effectuant des transformations algébriques sur l'équation (1.3). Parmi les méthodes utilisées on cite la méthode de Paul [4] qui consiste à multiplier successivement les deux membres du modèle géométrique direct par les matrices homogènes ${}^{i-1}T_i$ avec ($i=1, \dots, n-1$) permettant ainsi d'isoler et d'identifier les variables articulaires l'une après l'autre.

Lors de la résolution du problème géométrique inverse on rencontre pratiquement les situations suivantes :

- Solutions en nombre fini lorsqu'elles peuvent être calculées sans ambiguïté.
- Aucune solution possible lorsque la position désirée ne peut être atteinte par le manipulateur.

- Plusieurs solutions possibles lorsque le manipulateur est redondant ou lorsqu'il passe par une configuration singulière.

1.4. Modèle cinématique

1.4.1. Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction de la vitesse des variables articulaires [8].

Le modèle est décrit par l'équation :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (1.5)$$

où :

$J(q) \in R^{m \times n}$ est la matrice jacobienne.

L'une des méthodes utilisées pour le calcul de la matrice jacobienne est la dérivation du modèle géométrique direct :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.4.2. Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse permet de déterminer la vitesse des variables articulaires en fonction de la vitesse des variables opérationnelles. Pour les manipulateurs non redondants ($n=m$), le modèle s'écrit :

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X} \quad (1.7)$$

La solution de l'équation (1.7) existe si J est de rang plein, cela est valable tant que le manipulateur ne passe pas par une configuration singulière. Pour les manipulateurs redondants, le modèle cinématique inverse admet plusieurs solutions possibles. Le choix d'une parmi plusieurs est guidé par l'optimisation d'une fonction objective. Les méthodes employées pour résoudre un tel problème peuvent être classées en deux groupes :

- Méthodes d'optimisation cinématique.
- Méthodes d'optimisation dynamique.

1.4.2.1. Méthodes d'optimisation cinématique

Ces méthodes ne prennent en considération que la cinématique du robot manipulateur.

Par exemple, d'après Whitney [4], le problème consiste à :

Minimiser :

$$Q = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} \quad (1.8)$$

Soumis à:

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

avec Q l'énergie du système.

La solution générale du problème de minimisation est donnée par :

$$\dot{q} = J^+(q)\dot{X} = J^T(JJ^T)\dot{X} \quad (1.9)$$

$J^+ \in R^{m \times n}$ est la matrice pseudo-inverse généralisée de J .

La solution de (1.8) est valable tant que le manipulateur ne passe pas par une configuration singulière. Pour éliminer cet inconvénient une méthode dite RSI (Robust Singular Inverse) basée sur la méthode des moindres carrés amortis a été développée, qui permet de franchir les positions singulières avec une trajectoire continue [5].

Le problème est formulé de la manière suivante :

Minimiser:

$$Q = \frac{1}{2} (J\dot{q} - \dot{X})^T (J\dot{q} - \dot{X}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \alpha I \dot{q} \quad (1.10)$$

avec $I \in R^{n \times n}$ une matrice identité.

La solution est donnée par l'équation :

$$\dot{q} = J^T (JJ^T + \omega_s I)^{-1} \dot{X} \quad (1.11)$$

Le facteur ω_s est dit facteur de stabilisation.

1.4.2.2. Méthodes d'optimisation dynamique

Ces méthodes prennent en considération la dynamique du manipulateur pour résoudre le problème de redondance. Deux types de critères sont utilisés, l'optimisation des couples et l'optimisation de l'énergie.

- **Optimisation des couples :**

Le problème est formulé de la manière suivante :

Minimiser:

$$Q = \frac{1}{2} \left[\tau - \frac{\tau^+ - \tau^-}{2} \right]^T P \left[\tau - \frac{\tau^+ - \tau^-}{2} \right]$$

Soumis à :

$$\dot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \quad (1.12)$$

et

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

$P = \text{diag} \left[\frac{1}{(\tau_i^+ - \tau_i^-)^2} \right]$ est une matrice de pondération.

(τ_i^+, τ_i^-) : représentent respectivement les limites supérieure et inférieure du couple τ_i transmis à l'articulation i . L'objectif consiste à placer τ proche de $\left(\frac{\tau^+ - \tau^-}{2}\right)$ en minimisant Q .

La solution est donnée comme suit :

$$\dot{q}_{opt} = E(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q}) + c \quad (1.13)$$

avec :

$$\begin{cases} E = (M^T P M)^{-1} J^T [J (M^T P M)^{-1} J^T]^{-1} \\ c = (E J - I) M^{-1} \left[C \dot{q} + G - \frac{\tau^+ - \tau^-}{2} \right] \end{cases} \quad (1.14)$$

- **Optimisation de l'énergie :**

La fonction objective à minimiser utilise la matrice d'inertie du robot. Le problème consiste donc à :

Minimiser :

$$Q = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (1.15)$$

Soumis à:

$$\dot{X} = J \dot{q}$$

La solution du problème précédent est définie par :

$$\begin{cases} \dot{q} = J_M^+ \dot{X} \\ q = J_M^+ (X - j\dot{q}) \end{cases} \quad (1.16)$$

avec :

$J_M^+ = M^{-1} J^T (J M^{-1} J^T)^{-1}$ est la matrice pseudo-inverse pondérée de l'inertie.

1.5. Modèle dynamique

1.5.1. Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse exprime les couples exercés par les actionneurs en fonction des positions, vitesses et accélérations des articulations.

Les formalismes les plus utilisés pour le calcul du modèle dynamique inverse sont [9] :

- Formalisme de Lagrange.
- Formalisme de Newton-Euler.

1.5.1.1. Formalisme de Lagrange

Les équations de Lagrange opèrent à partir de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'un système. Le Lagrangien L s'écrit :

$$L = EC - EP \quad (1.17)$$

où :

EC et EP représentent respectivement les énergies cinétique et potentielle du système.

Les équations de Lagrange sont définies par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_i \quad (1.18)$$

Pour le calcul du modèle dynamique d'une chaîne cinématique (figure 1.3), on définit les paramètres suivants pour chaque corps i de la chaîne cinématique :

m_i : Masse du corps i de la chaîne cinématique.

${}^i r = [{}^i r_x, {}^i r_y, {}^i r_z]^T$: Vecteur du centre d'inertie du corps i exprimé dans le repère R_i .

$m^i r = [m^i r_x, m^i r_y, m^i r_z]^T$: Premier moment du corps i autour de O_i , exprimé dans R_i .

$${}^i I_i = \begin{bmatrix} {}^i I_{ixx} & - {}^i I_{ixy} & - {}^i I_{ixz} \\ - {}^i I_{ixy} & {}^i I_{iyy} & - {}^i I_{iyz} \\ - {}^i I_{ixz} & - {}^i I_{iyz} & {}^i I_{izz} \end{bmatrix} : \text{Tenseur d'inertie du corps } i \text{ en } O_i, \text{ exprimé dans } R_i.$$

où :

$${}^i I_{ixx} = \int ({}^i r_y^2 + {}^i r_z^2) dm_i : \text{Moment d'inertie.}$$

$${}^i I_{ixy} = \int {}^i r_x {}^i r_y dm_i : \text{Produit d'inertie.}$$

$${}^i \hat{S}_i = [{}^i \hat{S}_{ix}, {}^i \hat{S}_{iy}, {}^i \hat{S}_{iz}]^T : \text{Position du centre de masse du corps } i \text{ exprimée dans } R_i.$$

$$H_i = \int {}^i r {}^i r^T dm_i : \text{Matrice des pseudo-inerties du corps } i.$$

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{ixx} + I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i \hat{S}_{ix} \\ I_{ixy} & \frac{I_{ixx} - I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{iyz} & m_i \hat{S}_{iy} \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{I_{ixx} + I_{iyy} - I_{izz}}{2} & m_i \hat{S}_{iz} \\ m_i \hat{S}_{ix} & m_i \hat{S}_{iy} & m_i \hat{S}_{iz} & m_i \end{bmatrix}$$

La définition reste la même pour les autres éléments du tenseur.

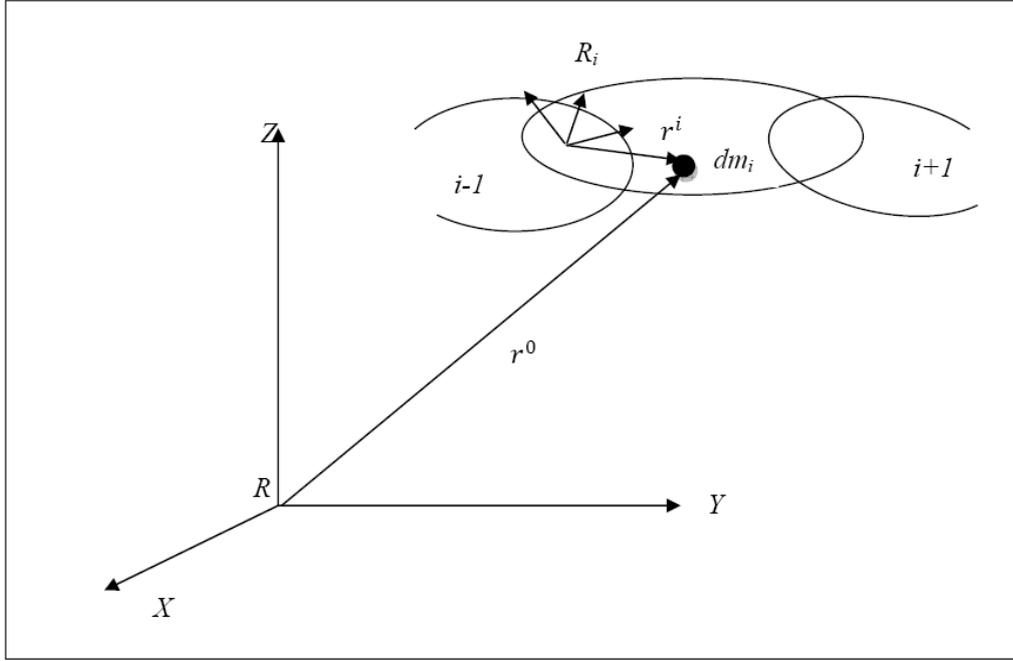


Figure 1.3 : Représentation d'un point r^i de la chaîne cinématique

L'énergie cinétique du corps i est donnée par :

$$EC_i = \int_{corps\ i} \frac{1}{2} {}^0\dot{r}^T {}^0\dot{r} dm = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i tr \left(\frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} H_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.19)$$

tr : signifie trace de la matrice, elle est égale à la somme des éléments de la diagonale.

L'énergie potentielle du corps i est donnée par :

$$EP_i = -m_i \tilde{g}^T {}^0T_i^i \hat{S}_i \quad (1.20)$$

$\tilde{g} = [\tilde{g}_x, \tilde{g}_y, \tilde{g}_z, 0]^T$: Vecteur des accélérations de la gravité exprimé dans R_0 .

Le Lagrangien pour l'ensemble des corps du manipulateur est :

$$L = \sum_{i=1}^n (EC_i - EP_i) \quad (1.21)$$

Par substitution de (1.21) dans (1.18) on obtient :

$$\tau = \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k tr \left(\frac{\partial {}^0T_k}{\partial q_j} H_k \frac{\partial {}^0T_k^T}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_j + \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k tr \left(\frac{\partial^2 {}^0T_k}{\partial q_j \partial q_m} H_k \frac{\partial {}^0T_k^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_m - \sum_{j=1}^n m_j \tilde{g}^T \frac{\partial {}^0T_j}{\partial q_i} {}^j\hat{S}_i \quad (1.22)$$

Le modèle obtenu peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (1.23)$$

où :

$$\begin{cases} M_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{tr} \left(\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i} \right) \\ C(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{k=\max(i,j,m)}^n \text{tr} \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial q_j \partial q_m} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_m \\ G(q) = \sum_{j=1}^n m_j \tilde{g}^T \frac{\partial^0 T_j}{\partial q_i} \hat{S}_j \end{cases} \quad (1.24)$$

$M(q) \in R^{n \times n}$: Matrice d'inertie du manipulateur, symétrique et régulière.

$C(q, \dot{q}) \dot{q} \in R^n$: Vecteur des termes de Coriolis et centrifuges.

$G(q) \in R^n$: Vecteur des actions de la gravité.

1.5.1.2. Formalisme de Newton-Euler

Le formalisme de Newton-Euler est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique. Il ne nécessite pas le calcul extrinsèque des coefficients dynamiques du robot. Le modèle est obtenu par double récurrence [9] :

➤ Récurrence de la base du robot vers l'organe terminal pour le calcul des vitesses et accélérations des corps puis du tenseur dynamique :

$${}^i \omega_i = \begin{cases} {}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \omega_{i-1} + e_z \dot{q}_i \text{ si Ro} \\ {}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \omega_{i-1} \text{ si Pr} \end{cases} \quad (1.25)$$

$${}^i \dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} + e_z \ddot{q}_i + ({}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \omega_{i-1}) \otimes e_z \dot{q}_i \text{ si Ro} \\ {}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} \text{ si Pr} \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\ddot{P}_i = \begin{cases} {}^{i-1} A_i^T [{}^{i-1} \ddot{P}_{i-1} + {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} \otimes {}^{i-1} \hat{P}_i + {}^{i-1} \omega_{i-1} \otimes ({}^{i-1} \omega_{i-1} \otimes {}^{i-1} \hat{P}_i)] \text{ si Ro} \\ {}^{i-1} A_i^T [{}^{i-1} \ddot{P}_{i-1} + {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} \otimes {}^{i-1} \hat{P}_i + {}^{i-1} \omega_{i-1} \otimes ({}^{i-1} \omega_{i-1} \otimes {}^{i-1} \hat{P}_i)] \text{ si Pr} \\ + 2({}^{i-1} A_i^T {}^{i-1} \omega_{i-1}) \otimes (e_z \dot{q}_i) + e_z \ddot{q}_i \end{cases} \quad (1.27)$$

$${}^i\ddot{S}_i = {}^i\ddot{P}_i + {}^i\dot{\omega}_i \otimes {}^i\hat{S}_i + {}^i\omega_i \otimes ({}^i\omega_i \otimes {}^i\hat{S}_i) \quad (1.28)$$

$${}^i\hat{f}_i = m_i {}^i\ddot{S}_i \quad (1.29)$$

$${}^i\hat{n}_i = {}^iI_i {}^i\omega_i + {}^i\omega_i \otimes ({}^iI_i {}^i\omega_i) \quad (1.30)$$

➤ Récurrence de l'organe terminal vers la base pour le calcul des couples actionneurs :

$${}^i f_i = {}^i A_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i \hat{f}_i \quad (1.31)$$

$${}^i n_i = {}^i A_{i+1} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i \hat{n}_i + {}^i \hat{S}_i \otimes {}^i \hat{f}_i + {}^i \hat{P}_{i+1} \otimes ({}^i A_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1}) \quad (1.32)$$

$$\tau_i = \begin{cases} e_z^T {}^i n_i \text{ si Ro} \\ e_z^T {}^i f_i \text{ si Pr} \end{cases} \quad (1.33)$$

avec :

$$e_z = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (1.34)$$

Ro: Liaison rotoïde.

Pr : Liaison prismatique.

${}^i\omega_i$ et ${}^i\ddot{P}_i$: Vitesse et accélération du repère R_i exprimées dans R_i .

${}^i f_i$ et ${}^i n_i$: Force et moment appliqués à l'articulation i .

${}^i \hat{f}_i$ et ${}^i \hat{n}_i$: Force et moment appliqués au centre de masse du corps i .

et :

$$\omega \otimes = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Si aucune force et aucun moment n'est exercé sur le manipulateur on prend comme condition terminale :

$$\begin{cases} {}^{i+1}f_{i+1} = 0 \\ {}^{i+1}n_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

et les conditions initiales :

$${}^0\ddot{P}_0 = -[\tilde{g}_x \tilde{g}_y \tilde{g}_z]^T \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} {}^0\omega_0 = 0 \\ {}^i\dot{\omega}_i = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

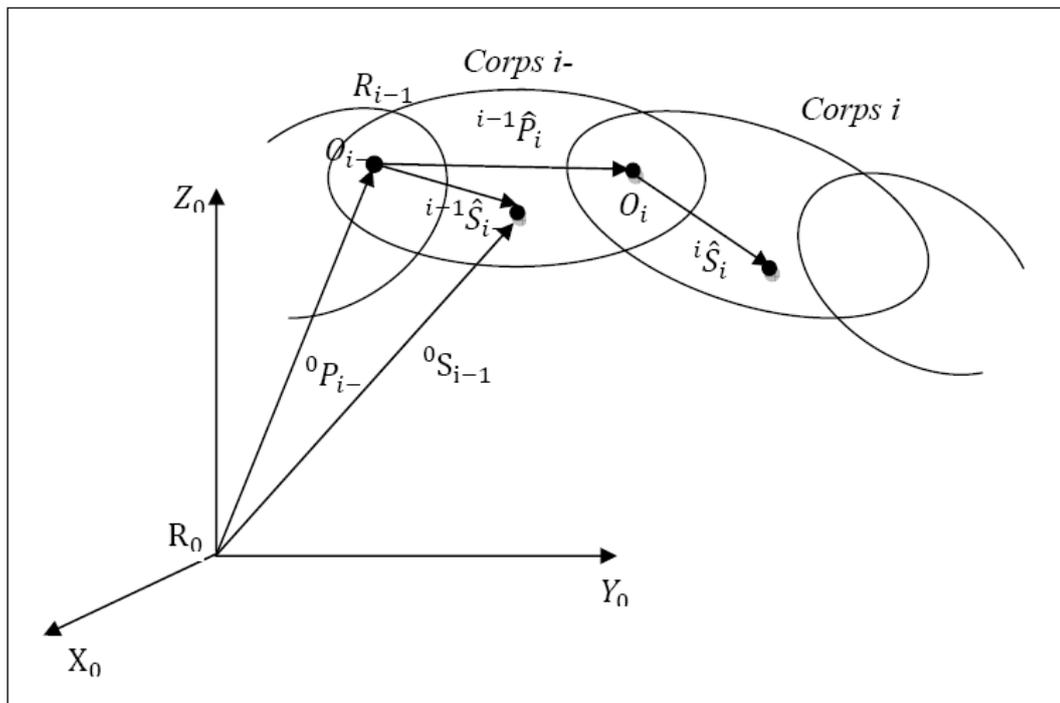


Figure 1.4 : Formalisme de Newton-Euler

S'il est nécessaire de considérer les frottements aux niveaux des articulations on ajoute un terme τ_f aux équations (1.22) ou (1.33). On obtient alors :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_f \quad (1.38)$$

$$\tau_i = \begin{cases} e_z^T {}^i n_i + \tau_{fi} \text{si Ro} \\ e_z^T {}^i f_i + \tau_{fi} \text{si Pr} \end{cases} \quad (1.39)$$

Différents modèles mathématiques peuvent être utilisés pour exprimer τ_f . Pour une modélisation simple, on choisit :

$$\tau_{fi} = k_{fvi} \dot{q}_i + k_{fci} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) \quad (1.40)$$

où :

k_{fvi} et k_{fci} sont respectivement le coefficient des frottements visqueux et celui de Coulomb.

$$\operatorname{sgn}(\dot{q}_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dot{q}_i < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{q}_i = 0 \\ 1 & \text{si } \dot{q}_i > 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

1.5.2. Modèle dynamique direct

Le modèle dynamique direct exprime la position, la vitesse et l'accélération des articulations en fonction du couple appliqué [10]. Il est obtenu par inversion du modèle précédant et s'écrit :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q}) - G(q) - \tau_f) \quad (1.42)$$

1.5.3. Comparaison entre les deux formalismes

Le formalisme de Lagrange est le plus adapté pour le calcul du modèle dynamique direct, il est souvent employé pour la modélisation et la simulation du système.

Par contre le formalisme de Newton-Euler est utilisé pour la commande en temps réel car il offre une réduction considérable dans le temps de calcul du modèle dynamique inverse comme le montre le tableau (1.1).

Formalisme	Multiplication	Addition
Lagrange	$32 \frac{1}{2} n^4 + 86 \frac{5}{12} n^3 + 171 \frac{1}{4} n^2 + 53 \frac{1}{3} n - 128$	$25n^4 + 66 \frac{1}{3} n^3 + 129 \frac{1}{2} n^2 + 42 \frac{1}{3} n - 96$
Newton-Euler	$150n - 48$	$131n - 48$

Tableau 1.1 : Nombre d'opérations effectuées par chaque formalisme [5]

1.6. Paramétrage du modèle dynamique

A chaque corps du robot manipulateur est associé un vecteur $\xi \in R^{10 \cdot n}$ dit vecteur des paramètres inertiels [4] :

$$\xi_i = [m_i, m\hat{s}_{ix}, m\hat{s}_{iy}, m\hat{s}_{iz}, I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz}, I_{ixy}, I_{iyz}, I_{ixz}] \quad (1.43)$$

L'implantation d'une loi de commande dynamique nécessite la connaissance au préalable de ces paramètres. Ces derniers étant très difficiles à mesurer, alors recourir à une méthode d'identification s'avère la meilleure solution.

En général, le modèle dynamique peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure W et d'un vecteur θ ; vecteur global des paramètres inertiels de dimension $10 \cdot n$ regroupant les paramètres de chaque corps i .

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}^T & W_{12}^T & \cdots & W_{1n}^T \\ 0 & W_{22}^T & \cdots & W_{2n}^T \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & W_{nn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Ou d'une manière compacte :

$$\tau = W(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (1.45)$$

$W \in R^{n \times 10n}$ est une matrice dépendant des positions, vitesses et accélérations angulaires q , \dot{q} et \ddot{q}

1.7. Simulations et résultats

1.7.1. Modélisation dynamique du système

Pour nos travaux de simulation, on considère un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté représenté sur la figure (1.5). Le modèle dynamique (1.23), définissant les équations de mouvement du robot, qui permet d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations est pris en considération. Le formalisme de Newton-Euler [11] basé sur les théorèmes généraux de la mécanique est utilisé pour la représentation de notre système.

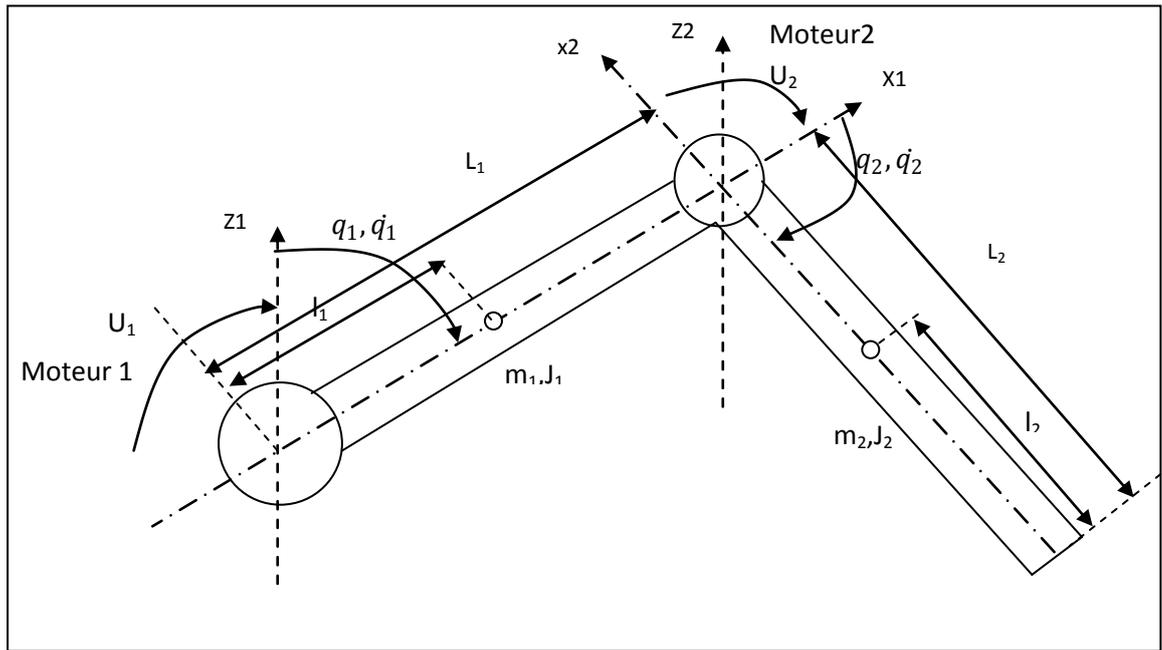


Figure 1.5 : Structure du manipulateur à deux degrés de liberté étudié

où

$q(2 \times 1)$: Vecteur des positions articulaires.

$\dot{q}(2 \times 1)$: Vecteur des vitesses articulaires.

$U(2 \times 1) = (U_1 \ U_2)^T$: Vecteur des couples d'entrée.

- **Les paramètres du modèle**

Les paramètres de synthèse du bras manipulateur à deux degrés de liberté (2ddl) utilisés dans notre travail sont (Tableau 1.2) avec :

J_i : Moment d'inertie du solide (segment) i .

C_i : Coefficient de friction visqueuse correspondant à chaque solide.

K_i : Gain du moteur (actionnaire) i .

Solide 1	Solide 2
$m_1 = 2.53 \text{ kg}$	$m_2 = 0.426 \text{ kg}$
$L_1 = 0.3 \text{ m}$	$L_2 = 0.3 \text{ m}$
$l_1 = 0.201 \text{ m}$	$l_2 = 0.092 \text{ m}$
$J_1 = 0.606 \text{ kg m}^2$	$J_2 = 0.268 \text{ kg m}^2$
$J_1^* = 0.746 \text{ kg m}^2$	$J_{x2} = 0.272 \text{ kg m}^2$
$C_1 = 9.33 \text{ Nm s/rad}$	$C_2 = 1.81 \text{ Nm s/rad}$
$K_1 = 2.79 \text{ Nm/V}$	$K_2 = 1.74 \text{ Nm/V}$

Tableau 1.2 : Paramètres du bras manipulateur à 2ddl [12]

Par application du théorème d'Huygens, on obtient :

$$J_1^* = J_{x1} + m_2 L_1^2$$

$$J_{x1} = J_1 + m_1 l_1^2$$

$$J_{x2} = J_2 + m_2 l_2^2$$

On définit :

➤ **Matrice d'inertie :**

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

➤ **Matrice des termes centrifuges et de Coriolis :**

$$C(q) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

➤ **Vecteur des forces de gravité :**

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos(q_1) \\ m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

1.7.2. Résultats de simulation

Le système étudié comporte deux corps rigides et les équations de ses mouvements sont déduites en utilisant le formalisme de Newton-Euler. La décomposition des forces et moments appliqués aux deux articulations et aux centres de masse des deux corps permettent d'aboutir à des équations différentielles non-linéaires[13]. La résolution de ces dernières, réalisée sous le logiciel Matlab, nécessite des conditions initiales pour les variables articulaires (position et vitesse) et permet de représenter la dynamique de ces variables.

Les équations de la dynamique nous permettent de représenter notre vecteur d'état par la formulation suivante :

$$x = [q_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_2]^T \quad (1.49)$$

Les travaux suivants montrent la dynamique des variables articulaires q_1 , q_2 , \dot{q}_1 et \dot{q}_2 selon différentes conditions initiales.

1^{er} Cas : $x_0 = (-\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)$

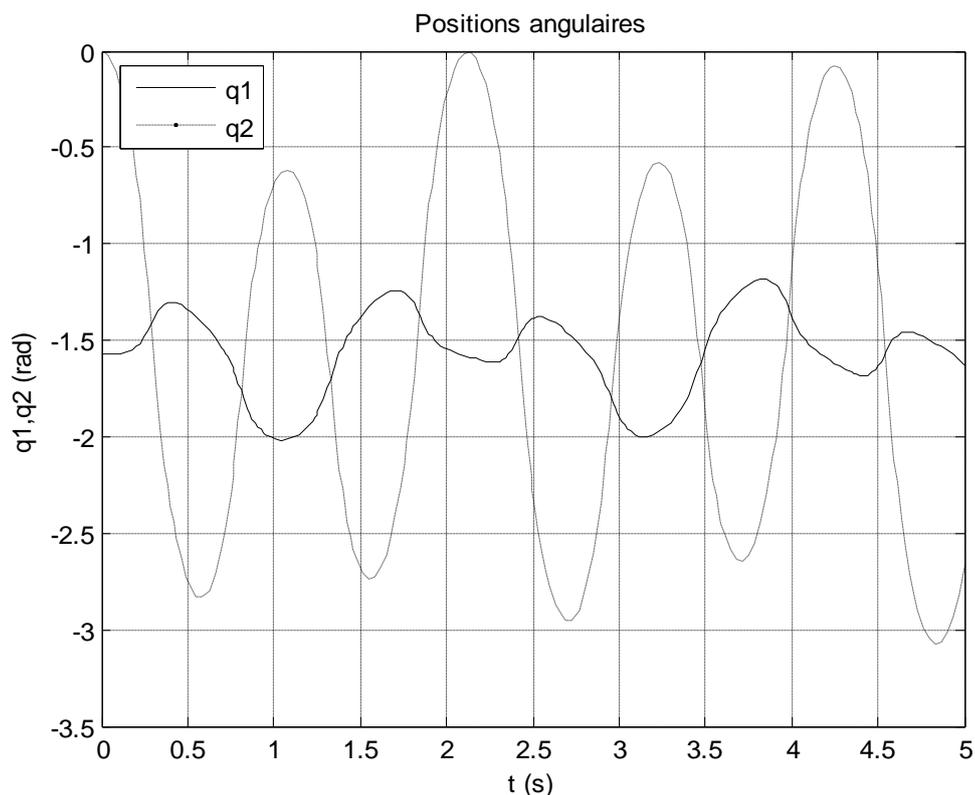


Figure 1.6 : Dynamique des positions angulaires des deux articulations

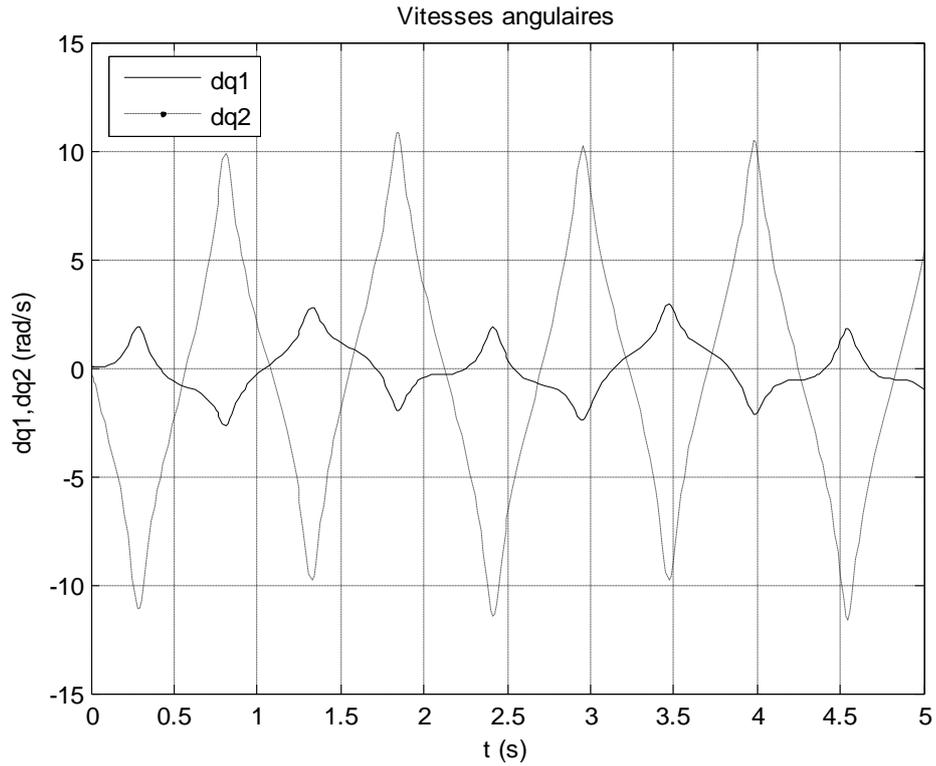


Figure 1.7 : Dynamique des vitesses angulaires des deux articulations

2^{ème} Cas : $x_0 = (-\pi/2 \ 0 \ -\pi/3 \ 0)$

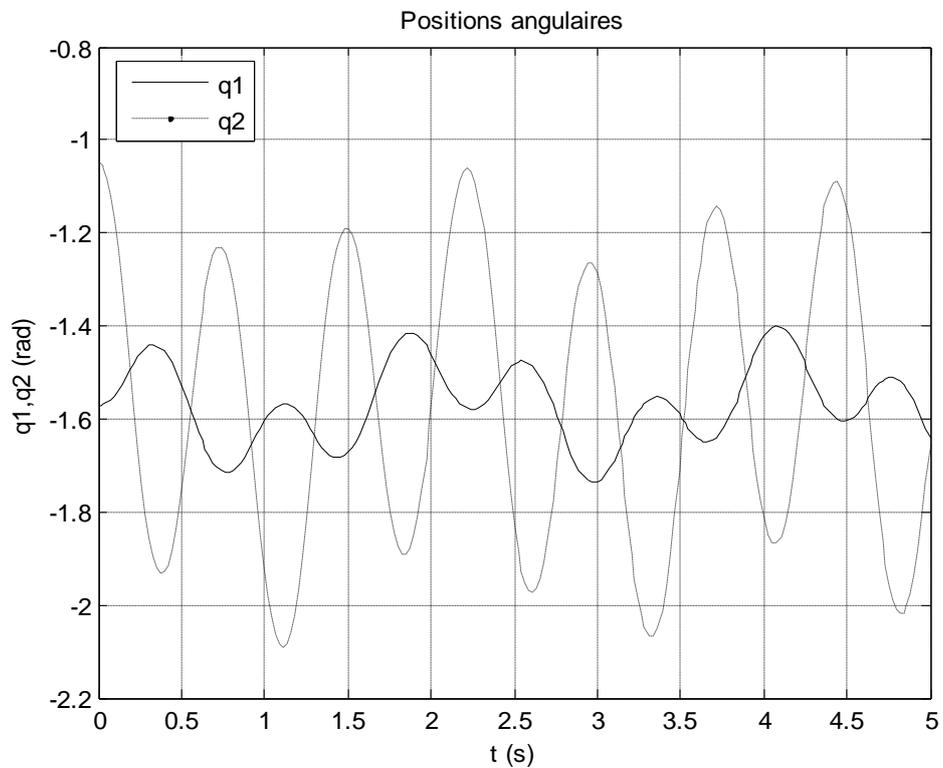


Figure 1.8 : Dynamique des positions angulaires des deux articulations

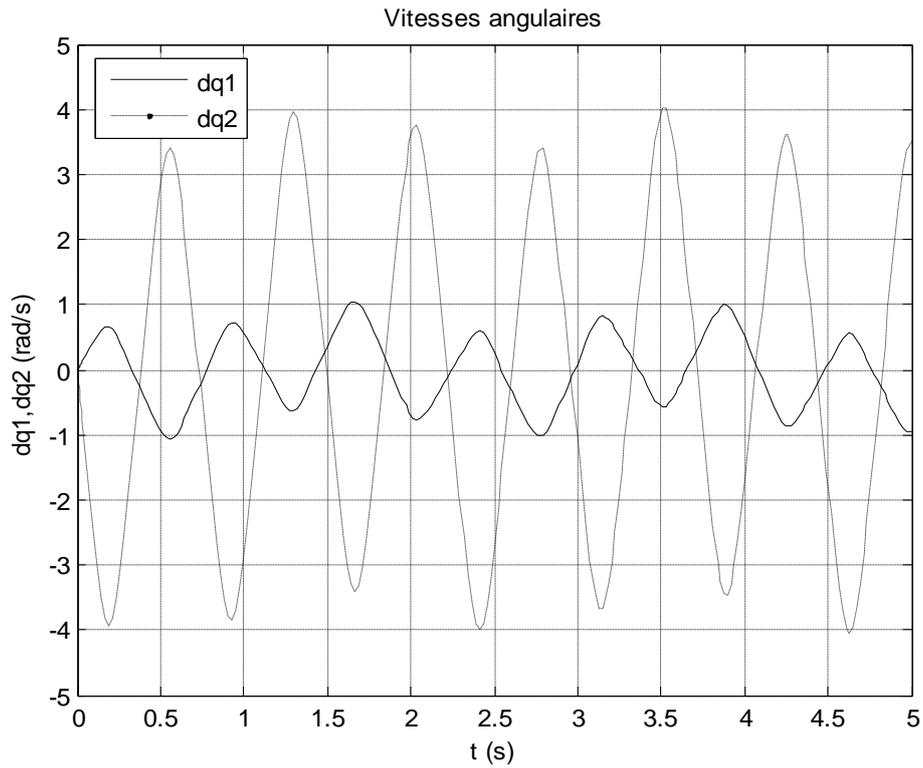


Figure 1.9 : Dynamique des vitesses angulaires des deux articulations

3^{ème} Cas : $x_0 = (-\pi/6 \ 0 \ -\pi/3 \ 0)$

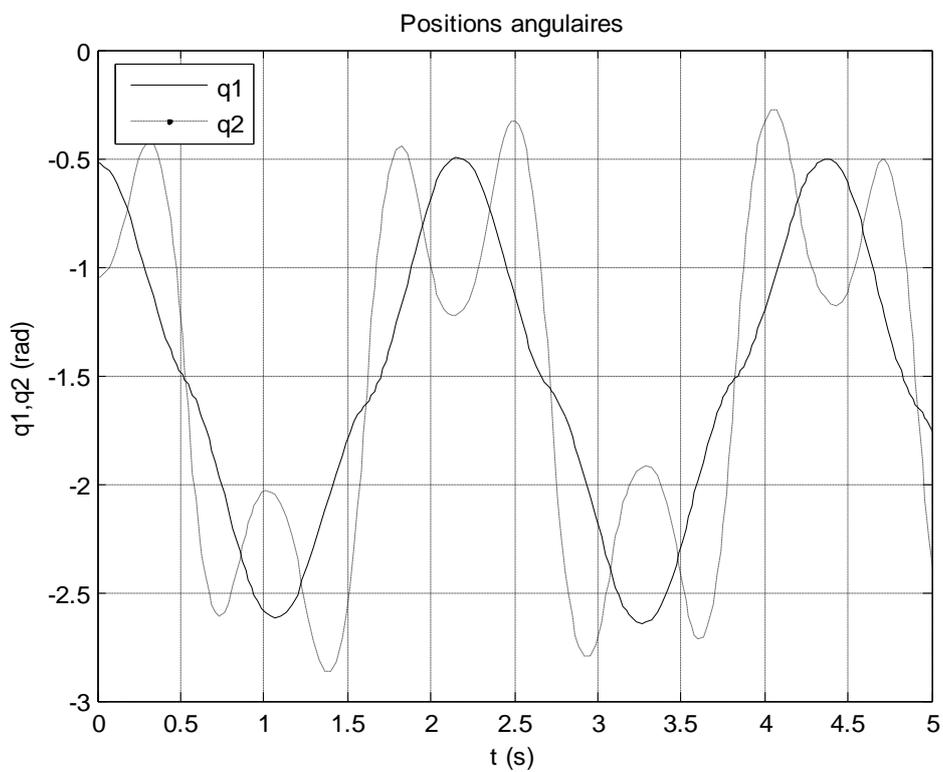


Figure 1.10 : Dynamique des positions angulaires des deux articulations

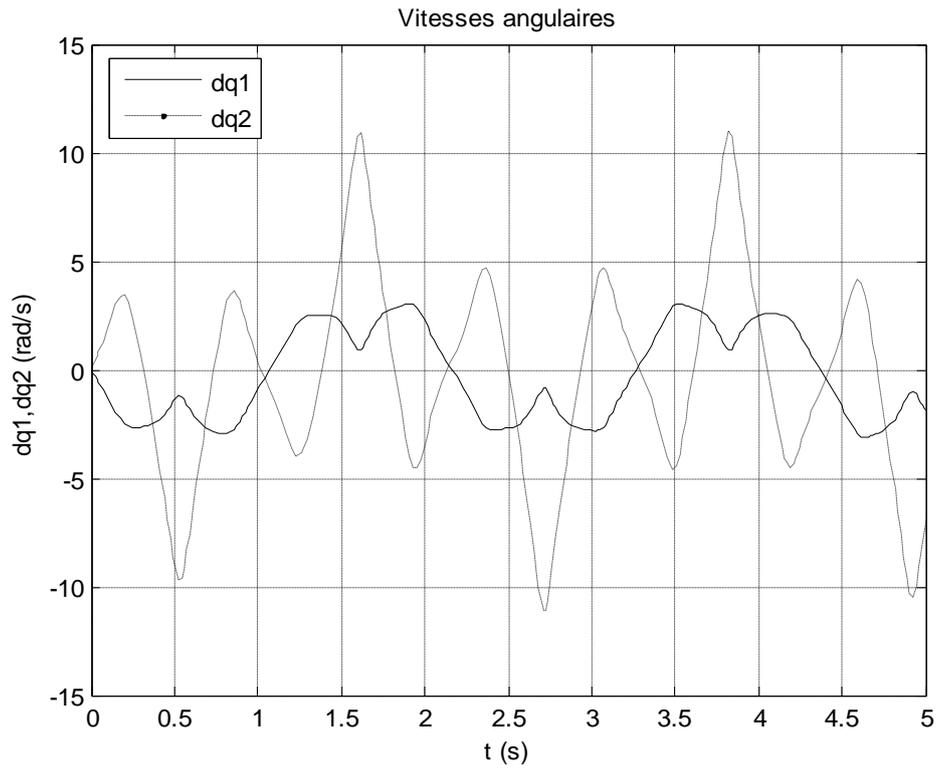


Figure 1.11 : Dynamique des vitesses angulaires des deux articulations

4^{ème} Cas : $x_0 : (\pi/2 \ 0 \ -\pi/2 \ 0)$

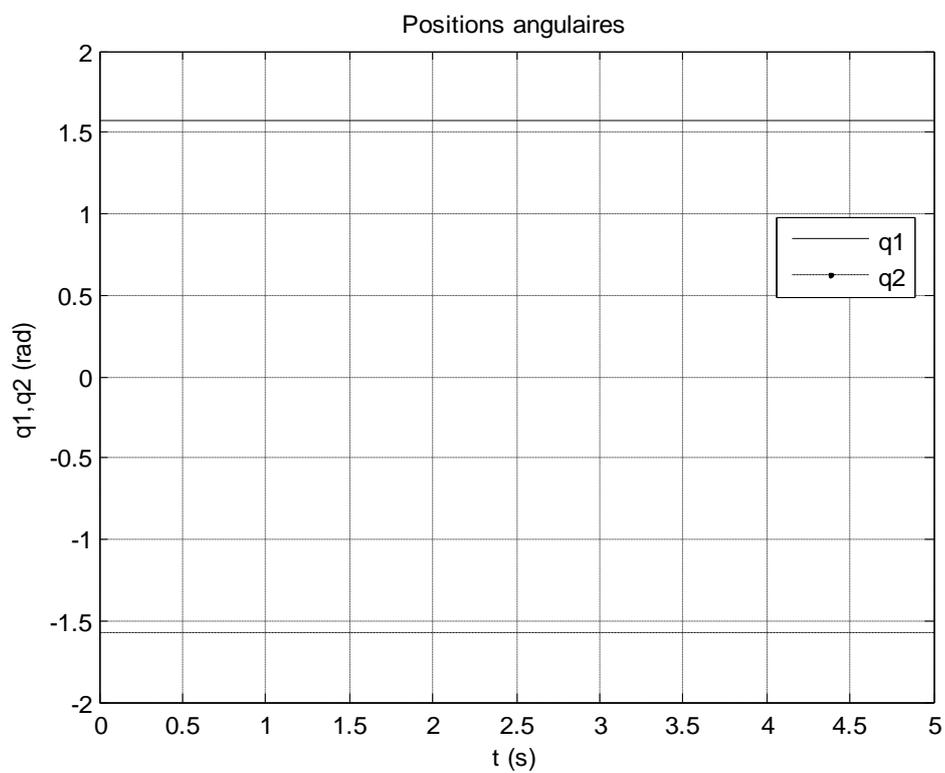


Figure 1.12 : Dynamique des vitesses angulaires des deux articulations

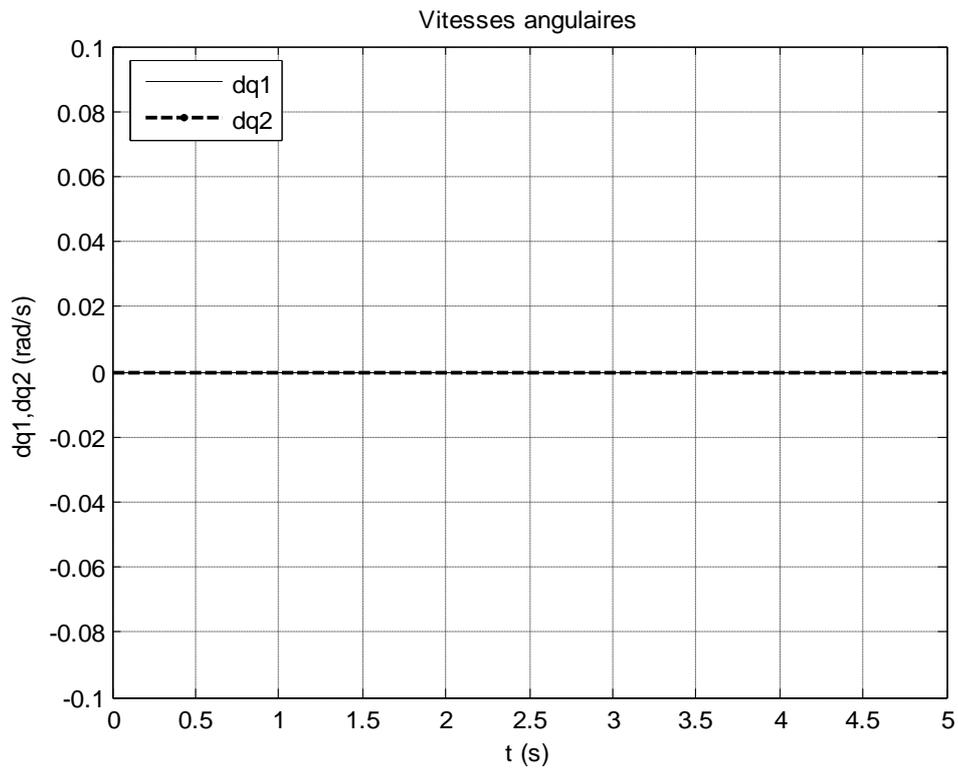


Figure 1.13 : Dynamique des vitesses angulaires des deux articulations

Les figures (1.6), (1.8) et (1.10) montrent les trajectoires libres des deux articulations q_1 et q_2 du bras manipulateur sous différentes conditions initiales imposées pour la résolution des équations différentielles régissant la dynamique du modèle. On constate que selon le choix des conditions initiales, on peut obtenir différentes trajectoires ou différents mouvements pour les deux articulations. Les figures (1.7), (1.9) et (1.11) montrent l'évolution des vitesses des deux articulations du bras manipulateur. La même constatation peut être faite concernant ces dernières. On obtient aussi différentes variations de mouvement de ces vitesses articulaires.

Les figures (1.12) et (1.13) illustrent les positions et vitesses réelles des variables articulaires sous les conditions initiales choisies. Dans ce quatrième cas des travaux de simulation, on constate qu'on est en présence d'un exemple de stationnarité. En effet, on remarque que les positions angulaires sont stables et correspondent aux conditions initiales imposées.

De même, en ce qui concerne les vitesses angulaires, on remarque qu'elles sont stationnaires et correspondent à des valeurs nulles. On peut dire dans ce cas-là que le manipulateur est au repos.

1.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les différents modèles utilisés pour décrire les mouvements des articulations d'un manipulateur.

Le modèle dynamique du manipulateur étudié, engendré par le formalisme de Newton-Euler, est également présenté.

Pour montrer l'évolution des variables articulaires au cours du temps, selon différentes conditions initiales, des travaux de simulation ont été réalisés. Ils montrent différentes trajectoires possibles pour les positions et vitesses articulaires du modèle qui déterminent la dynamique réelle du manipulateur.

CHAPITRE 2

COMMANDE OPTIMALE LQR

2.1. Introduction

Durant les deux dernières décennies, plusieurs travaux ont été dédiés à la robustesse des systèmes. Toutes les techniques développées permettent une approche de la commande qui garantit un fonctionnement satisfaisant d'un processus indépendamment des incertitudes existantes tant au niveau du processus lui-même que les perturbations susceptibles d'agir sur le processus au cours de son évolution. Plus particulièrement, plusieurs travaux ont été menés dans ce sens et concernent la commande optimale LQR dont les propriétés de robustesse sont très appréciables.

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour Linear Quadratic Regulator.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au développement de la commande LQR, nous aborderons également sa robustesse, puis on exposera les résultats de simulation obtenus suite à l'application de cette commande au système étudié.

2.2. Commande Optimale (Contrôle Linéaire Quadratique)

Ce régulateur est encore connu sous le nom de "*Gain de Kalman*". Il consiste à trouver une loi de commande optimale $u(t)$ en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées.

La commande LQR en boucle fermée possède les avantages suivants:

- Robustesse par rapport aux perturbations et à l'incertitude sur les paramètres.
- Méthode autorégulée.
- Réduction de la sensibilité.

L'objectif de cette commande est de minimiser une fonction de coût quadratique basée sur les énergies de commande et énergie de sortie. Cette fonction de coût est définie selon l'expression suivante:

$$J = \frac{1}{2} \int (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.1)$$

R et Q sont des matrices de pondération. Ces matrices sont définies positives et leurs éléments sont choisis de sorte à assurer une pondération relative aux variables d'état individuelles et à la loi de commande à l'entrée du système.

Le système contrôlé par le gain de Kalman ainsi calculé, est illustré en schéma bloc à la figure suivante :

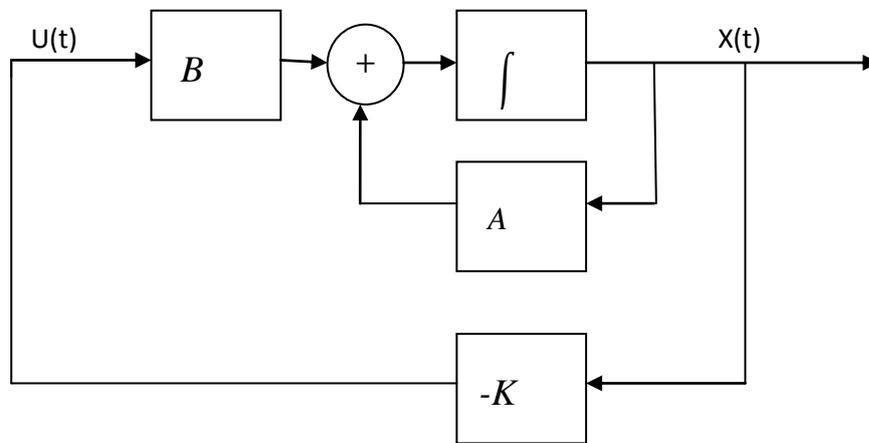


Figure 2.1 : Représentation du système contrôlé par un régulateur LQR

2.2.1. Commande LQ à horizon fini

- **Formulation du problème :**

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2.2)$$

avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (2.3)$$

Les matrices Q , R et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0$.

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, p, t) = p^T A(t)x + p^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (2.4)$$

L'hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

➤ Equation de l'état adjoint

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (2.5)$$

➤ Condition de transversalité

$$p(t_f) = Sx_f \quad (2.6)$$

➤ Absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0 \quad (2.7)$$

De l'équation (2.7), on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (2.8)$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p \quad (2.9)$$

Les équations (2.5) et (2.9) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé *système hamiltonien* [14]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ecrivons $p = P(t)x$, comme nous y incite (2.6), avec :

La condition finale $P(t_f) = S$, $\dot{p} = \dot{P}x + P\dot{x}$, et l'équation d'état (2.2) du système, l'équation (2.5) s'écrit (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations) :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2.11)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q) = 0 \quad (2.12)$$

avec la condition finale :

$$P(t_f) = S$$

On montre que la condition :

$$x^T (\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2.13)$$

S'écrit aussi [15] :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (2.14)$$

Le critère:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (2.15)$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \left(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (x^T P x) dt \right) \quad (2.16)$$

Soit, avec la condition de transversalité $S = P(t_f)$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_0^T P(t_0) x_0 \quad (2.17)$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J_0(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} x_0^T P(t_0) x_0 \quad (2.18)$$

La commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état : $u = -Kx$ avec :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.19)$$

2.2.2. Commande LQ à horizon infini

Nous nous intéressons ici au cas du système LTV (linéaire à temps variant) précédent où

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (2.20)$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $K(t)$ tel que les valeurs propres de $(A - BK)$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable [16].

Dans le cas d'un problème *LTI* (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Kx$ où K est exprimé par l'équation (2.19) et où P vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$PA + A^T P - PB R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.21)$$

2.2.3. Commande LQ à temps discret à horizon fini

- **Formulation du problème :**

Soit le système dynamique à temps discret défini par :

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (2.22)$$

avec :

La condition initiale $x(0) = x_0$ et cherchons la commande minimisant le critère [16] :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k) \quad (2.23)$$

Ce problème est plus simple que celui à temps continu car il s'agit ici d'un problème dont les inconnues sont les $n + 1$ valeurs de $u(k)$ et non plus une fonction du temps. Il s'agit d'une minimisation de (2.23) sous les contraintes (2.22). Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2} u^T(k)R(k)u(k) + p^T(k+1)(-x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k)) \right) \quad (2.24)$$

et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)p(k+1) = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - p(k) + A^T(k)p(k+1) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0 \quad (2.27)$$

L'équation de la commande (2.25) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1) \quad (2.28)$$

La dernière commande $u(n)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré ; sa valeur optimale est donc nulle.

$$u(n) = 0 \quad (2.29)$$

On a ainsi d'après (2.25) :

$$p(n+1) = 0 \quad (2.30)$$

et d'après l'équation adjointe (2.26) :

$$p(n) = Q(n)x(n) \quad (2.31)$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon n élevé.

- **Formulation sous forme d'équation de Riccati :**

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et p . On peut aussi adopter la démarche suivante, basée sur un changement de variable suivant, pour la variable adjointe :

$$p(k) = P(k)x(k) \quad (2.32)$$

où $P(k)$ est une matrice qu'il faudra déterminer ; $P(n) = Q(n)$. La commande $u(k)$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} R(k)u(k) &= -B^T(k)P(k+1)x(k+1) \\ &= -B^T(k)P(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

On peut donc écrire :

$$u(k) = -K(k)x(k) \quad (2.34)$$

avec :

$$K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)P(k+1)A(k) \quad (2.35)$$

où :

$$\tilde{R}(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k) \quad (2.36)$$

Il reste maintenant à déterminer la matrice $P(k)$. Partant de (2.26), on obtient :

$$P(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)P(k+1)x(k+1)$$

$$= Q(k)x(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (2.37)$$

En utilisant (2.34), l'équation ci-dessus se réécrit :

$$P(k)x(k) = [Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k))]x(k) \quad (2.38)$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout $x(k)$, il est nécessaire [17] que :

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)M(k+1)A(k) \quad (2.39)$$

avec :

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B(k)(R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)P(k+1) \quad (2.40)$$

Cette équation récursive à inconnue matricielle est appelée équation de Riccati discrète. Sa condition finale est $P(n) = Q(n)$ et sa résolution se fait donc à rebours. Dans le cas de systèmes *LTV* où les matrices A et B dépendent effectivement de k ou si c'est le cas des matrices de pondération Q et R , cela suppose de connaître à l'avance l'ensemble des matrices pour $k = 0 \dots n$.

2.2.4. Critère à horizon infini

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \quad (2.41)$$

Il s'agit du critère précédent où n tend vers l'infini.

Dans [18], l'auteur montre que pour un système *LTI*, le gain du retour d'état est constant et s'écrit :

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (2.42)$$

où :

P est une solution de l'équation algébrique de Riccati discrète:

$$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A \quad (2.43)$$

2.3. Robustesse de la commande LQ

2.3.1. Différence de retour

A partir de l'équation de Riccati, faisons apparaître les termes $sI - A$ en ajoutant $PsI - sIP$ où I est la matrice unité [19] :

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + PBR^{-1}B^T P = Q \quad (2.44)$$

Multiplions à droite par $(sI - A)^{-1}B$ et à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$:

$$\begin{aligned} B^T(-sI - A^T)^{-1}PB + B^T P(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.45)$$

En notant que d'après (2.19), on a $B^T P = RK$ et $PB = K^T R$, on obtient :

$$\begin{aligned} B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R + RK(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^T P(sI - A)^{-1}B \\ = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.46)$$

Le premier membre de l'égalité s'écrit :

$$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) - R \quad (2.47)$$

On obtient finalement l'équation de la différence de retour [20] :

$$\begin{aligned} (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) \\ = R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3.2. Marges de stabilité

Reprenons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec $s = j\omega$ et en notant :

$H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$. On obtient alors pour tout ω :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) = R + H^H(j\omega)QH(j\omega) \quad (2.49)$$

où :

M^H est le hermitien de M , c'est-à-dire le conjugué transposé. On en déduit alors l'inégalité de Kalman :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) \geq R \quad (2.50)$$

Restreignons nous au cas où $R = \rho I$ et factorisons Q en $Q = L^T L$. L'égalité (2.49) s'écrit alors :

$$(I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)) = I + \frac{1}{\rho} (LH(j\omega))^H (LH(j\omega)) \quad (2.51)$$

Dont on déduit les valeurs singulières de $I + H(j\omega)K$ [21]:

$$\sigma_i(I + KH(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i((I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)))} \quad (2.52)$$

$$= \sqrt{\lambda_i(I + \frac{1}{\rho} (LH(j\omega))^H (LH(j\omega)))} \quad (2.53)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2(LH(j\omega))} \quad (2.54)$$

$$\geq 1 \quad (2.55)$$

où :

λ_i représente la $i^{\text{ème}}$ valeur propre. En monovariante, ce résultat s'interprète facilement sur le lieu de Nyquist, comme le fait que la distance au point -1 est toujours supérieure à 1. Ainsi, la commande LQ présente la propriété de robustesse suivante : sa marge de module est égale à 1. On en déduit ainsi les intervalles dans lesquels le gain et la phase peuvent varier :

- gain] 0.5 ; $+\infty$ [;
- phase] -60° ; 60° [;

2.4. Structure des régulateurs

Lorsque des signaux de consigne y^* sont donnés pour certaines composantes y de x , comment les intégrer à la loi de commande? Imaginons que les consignes concernent les premières composantes de x et décomposons x et K ainsi :

$$Kx = [K_y K_z] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Alors la loi de commande sera :

$$u = K_y (y^* - y) - K_z z \quad (2.57)$$

Si y est donné par une loi de type équation de sortie, $y = Cx$, on peut effectuer un changement d'état de sorte que le nouveau vecteur d'état contienne y , par exemple en utilisant la forme canonique d'observabilité.

La commande LQ est de type proportionnel. Dans le but d'améliorer les performances en régulation en présence de perturbations constantes, il est souhaitable d'ajouter un effet

intégral. Imaginons, à titre d'exemple, que la première composante x_1 de x doive être asservie à x_1^* sans erreur statique. Construisons l'état supplémentaire :

$$I_1 = \int_0^t (x_1(\tau) - x_1^*(\tau)) d\tau \quad (2.58)$$

avec l'équation correspondante :

$$\dot{I}_1 = x_1 - x_1^* \quad (2.59)$$

En considérant x_1^* comme une perturbation constante et, de ce fait, en ne l'intégrant pas dans le modèle, l'équation d'état du système augmenté de son nouvel état I_1 s'écrit :

$$\dot{x}_e = A_e(t)x_e - B_e(t)u \quad (2.60)$$

où le vecteur d'état augmenté est :

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

et les matrices d'état sont :

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ [1 \ 0_{1 \times n-1}] & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0_{1 \times m} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Sur ce modèle, un régulateur $K_e \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$ de type LQ peut être synthétisé. Décomposons K_e selon :

$$K_e x_e = [K \ K_I] \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Le régulateur obtenu, d'entrées x et x_1^* , et de sortie u est un système dynamique d'ordre 1 de modèle d'état :

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = x_1 - x_1^* \\ u = -K_I I_1 - Kx \end{cases} \quad (2.65)$$

La consigne x_1^* peut aussi être retranchée à x_1 ; d'autres consignes peuvent être intégrées de la même manière en retranchant leur valeur à l'état correspondant. Si une commande en boucle ouverte (feed-forward) est disponible, elle peut être également intégrée; la commande sera alors la somme de la commande en boucle fermée et de la commande en boucle ouverte.

2.5. Choix des pondérations

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangé le gain K . En effet, soit P solution de (2.21) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\hat{Q} = \lambda Q$ et $\hat{R} = \lambda R$. On vérifie que : $\hat{P} = \lambda P$ est une solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\hat{K} = \hat{R}^{-1} B^T \hat{P} = R B^T P = K \quad (2.66)$$

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire λ (accélération avec $\lambda > 1$ et décélération avec $\lambda < 1$) jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être réitérées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier de charges.

2.6. Simulations et résultats

Les stratégies de contrôle des robots rigides utilisent comme hypothèse de base le fait qu'un positionnement précis des articulations implique nécessairement un positionnement précis de l'extrémité du robot. Les stratégies utilisées sont donc généralement appliquées localement en implantant des lois de commande au niveau de la position et de la vitesse des articulations.

Dans ce qui suit, on va voir l'effet de la loi de commande LQR sur les positions et les vitesses des deux articulations du bras manipulateur (2DDL) étudié dans ce mémoire.

2.6.1. Utilisation des critères quadratiques pour la détermination des gains

L'objectif de la commande optimale est de déterminer un vecteur de commande $u(t)$ qui conduit le système vers un état désiré de telle façon à ce que durant le processus un critère de performance est minimisé.

Dans le but de minimiser la fonction de coût (2.20), et surtout pour déterminer le signal de commande optimal, nous devons résoudre l'équation algébrique de Riccati (2.21).

La résolution de cette dernière, par le logiciel Matlab, permet de déterminer en plus de ses racines P , le gain K ainsi que les valeurs propres du système étudié.

- **Représentation d'état du système étudié**

Les équations de la dynamique (1.23) peuvent s'écrire en utilisant le changement de variable ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{q} = x_1 \\ \ddot{q} = x_2 \end{cases} \quad (2.67)$$

avec :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Alors, de (1.23) et (2.67) la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{cases} \quad (2.68)$$

Les paramètres de l'équation d'état du modèle considéré sont donnés dans [13] et représentés par les formules suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1}{J_1^*} & \frac{c_2}{J_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{J_1^*} & -c_2\left(\frac{1}{J_1^*} + \frac{1}{J_{x2}}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_1}{J_1^*} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{J_1^*} & K_2\left(\frac{1}{J_1^*} + \frac{1}{J_{x2}}\right) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Donc, on obtient les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12.5 & 2.43 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12.5 & -9.1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.74 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3.74 & 8.74 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6.2. Résultats obtenus

Pour nos calculs, les matrices de pondération Q et R sont choisies comme suit :

$$Q=I_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R=I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ La résolution de l'équation de Riccati nous permet d'obtenir pour la matrice P les valeurs suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 3.5466 & 0.2860 & -0.4201 & 0.0251 \\ 0.2860 & 0.0977 & 0.0531 & 0.0420 \\ -0.4201 & 0.0531 & 1.4315 & 0.1117 \\ 0.0251 & 0.0420 & 0.1117 & 0.0620 \end{bmatrix}$$

➤ Le gain de Kalman obtenu est représenté par les valeurs suivantes :

$$K = \begin{bmatrix} 0.9757 & 0.2084 & -0.2191 & -0.0748 \\ 0.2191 & 0.3672 & 0.9757 & 0.5421 \end{bmatrix}$$

➤ Les valeurs propres qu'on obtient en boucle fermée sont les suivantes :

$$E = \begin{bmatrix} -18.5069 \\ -7.8007 \\ -0.8042 \\ -0.2815 \end{bmatrix}$$

Dans la suite, on présente les différents résultats de simulation obtenus par application de l'approche LQR sur le manipulateur étudié au premier chapitre en utilisant des poursuites de trajectoires.

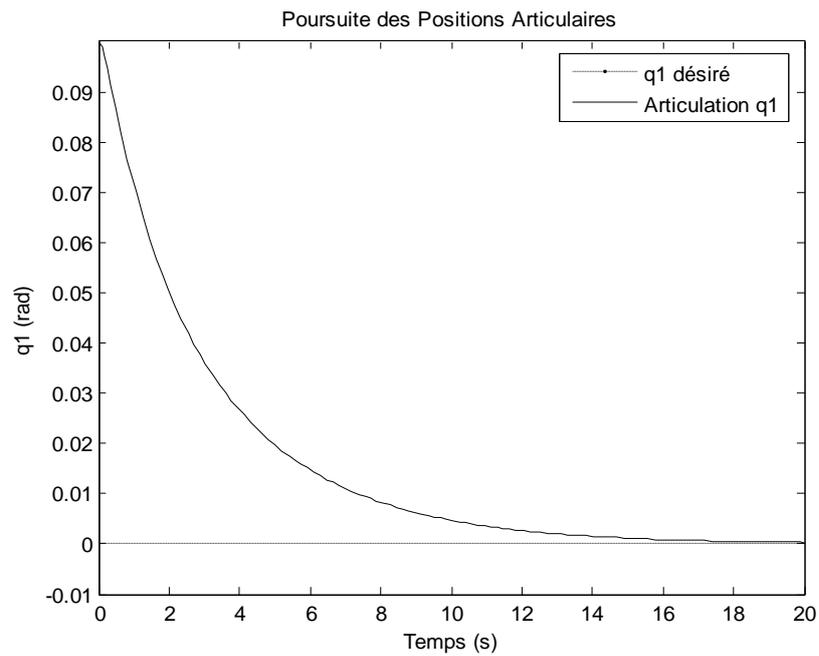


Figure 2.2 : Poursuite de la position angulaire de la 1^{ère} articulation

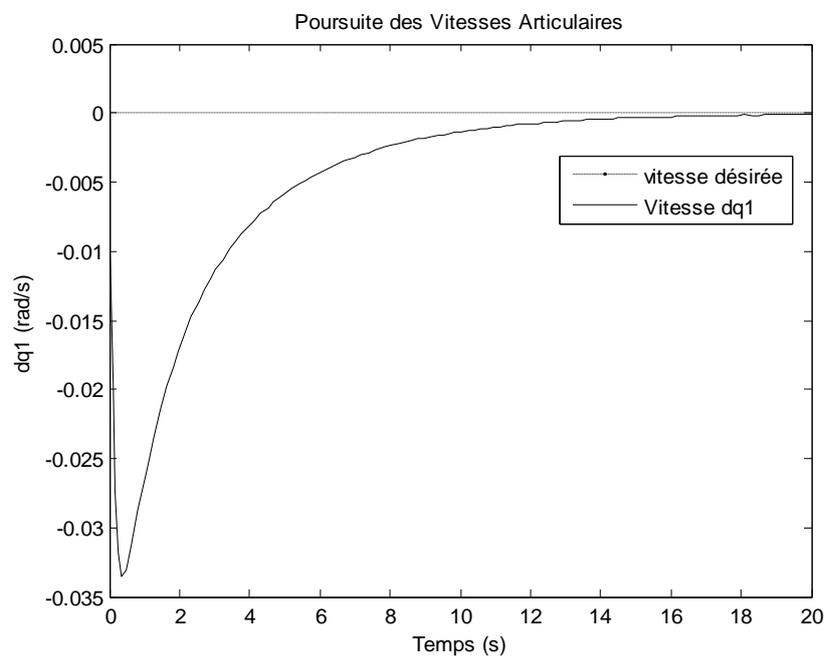


Figure 2.3 : Poursuite de la vitesse angulaire de la 1^{ère} articulation

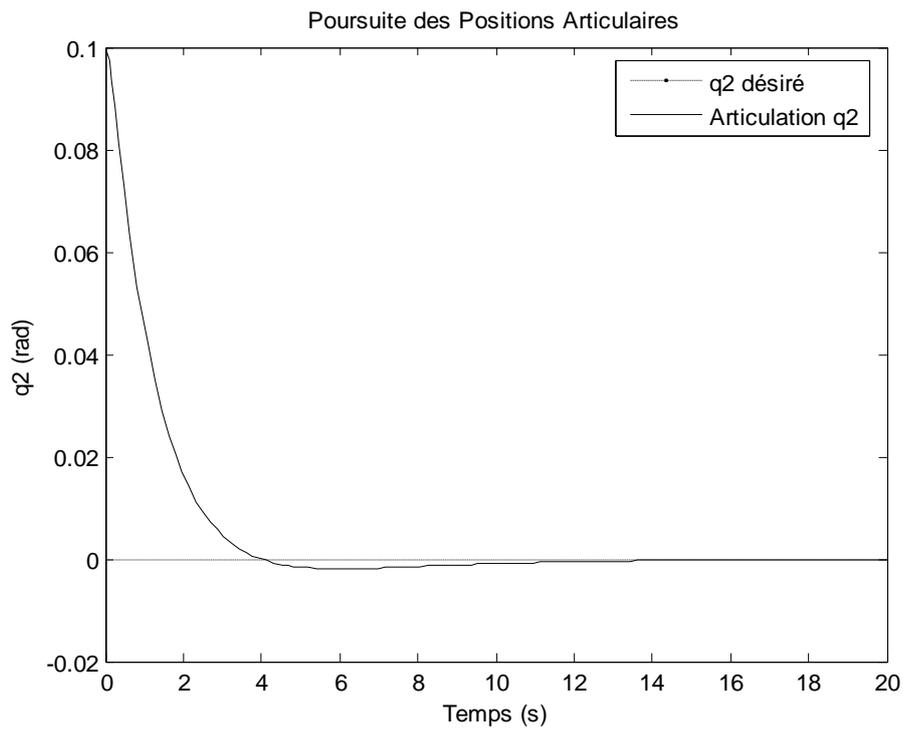


Figure 2.4 : Poursuite de la position angulaire de la 2^{ème} articulation

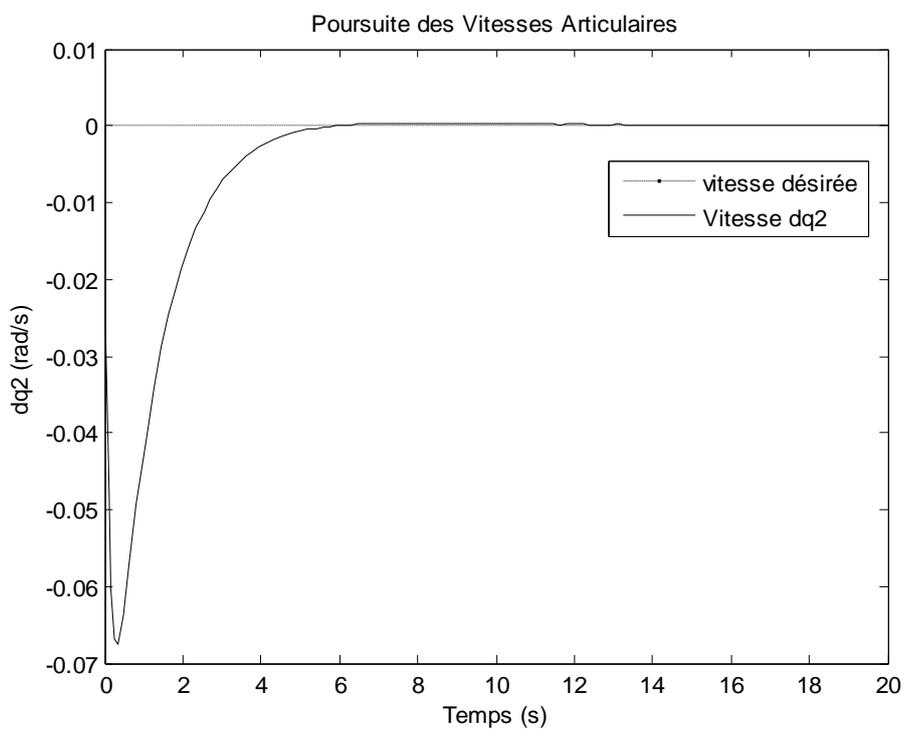


Figure 2.5 : Poursuite de la vitesse angulaire de la 2^{ème} articulation

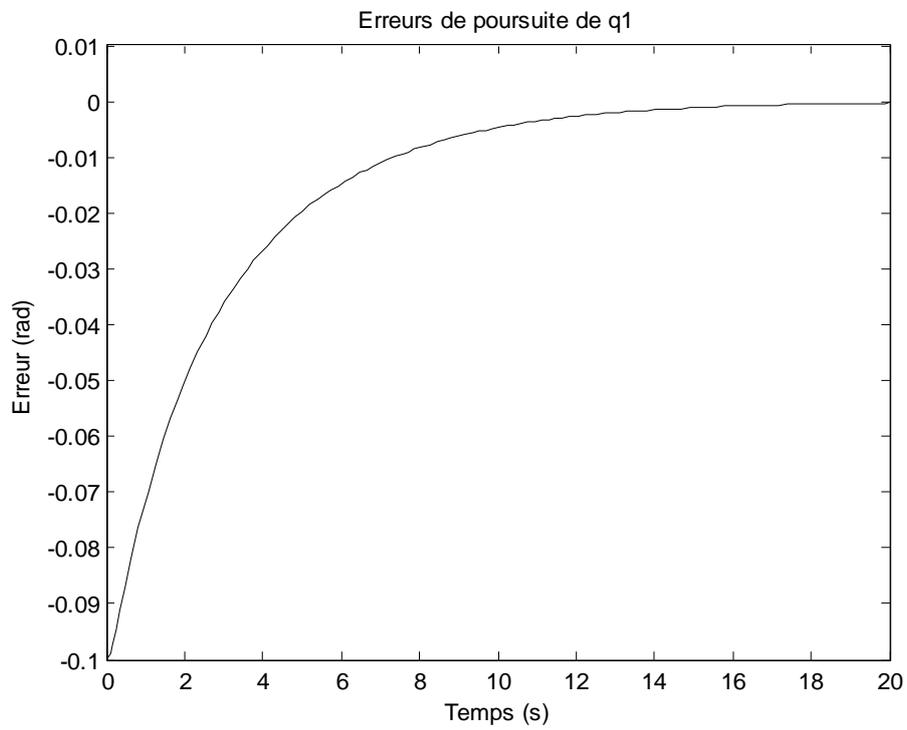


Figure 2.6 : Erreurs de poursuite de position de la 1^{ère} articulation

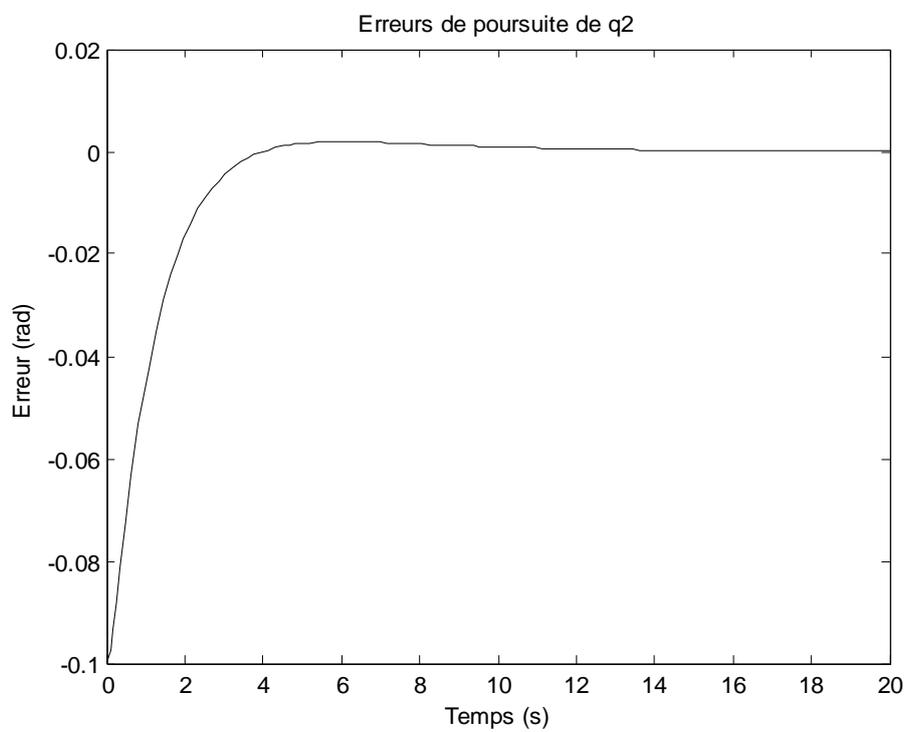


Figure 2.7 : Erreurs de poursuite de position de la 2^{ème} articulation

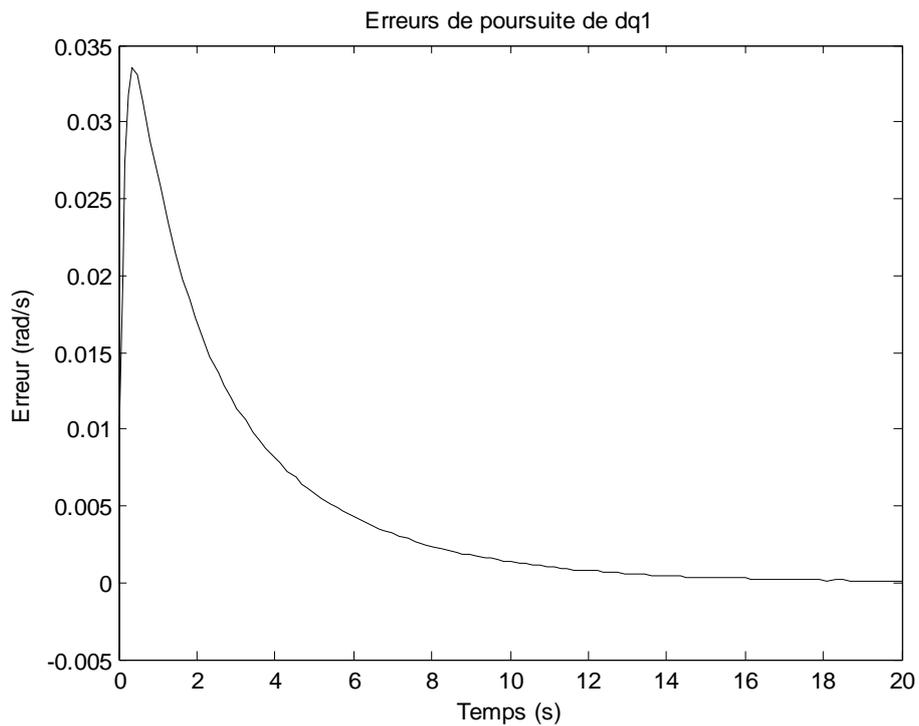


Figure 2.8 : Erreurs de poursuite de vitesse de la 1^{ère} articulation

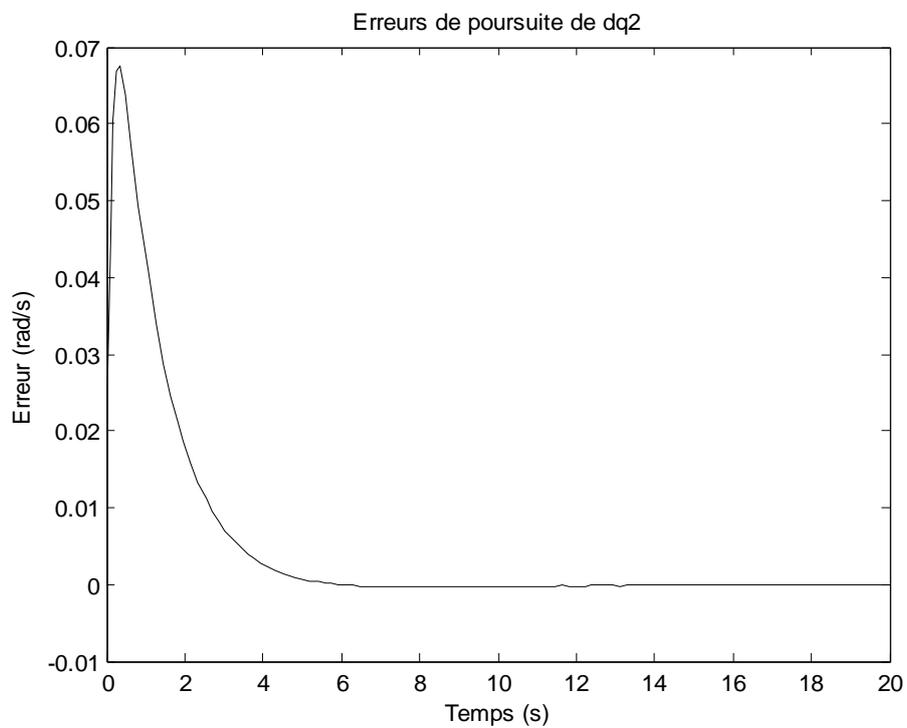


Figure 2.9 : Erreurs de poursuite de vitesse de la 2^{ème} articulation

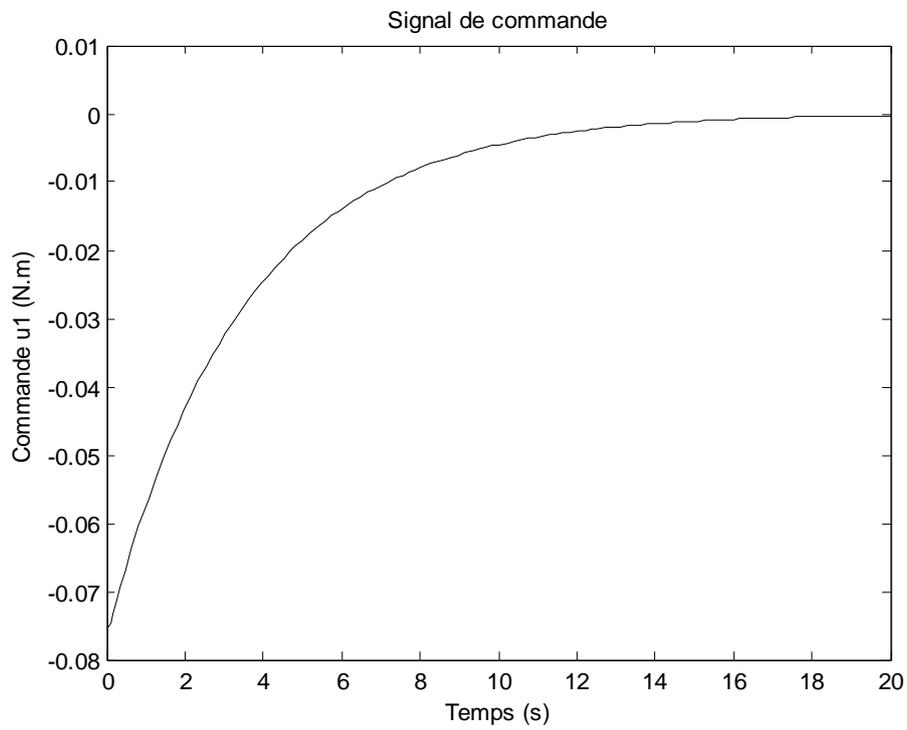


Figure 2.10 : Commande U_1 appliquée au 1^{er} actionneur

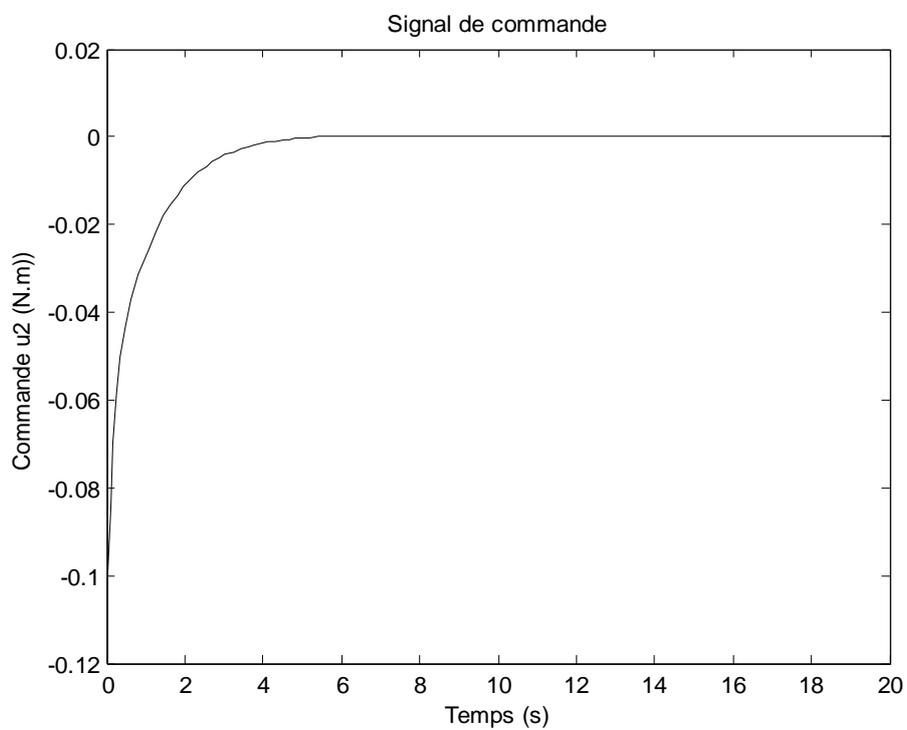


Figure 2.11 : Commande U_2 appliquée au 2^{ème} actionneur

Les figures (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) montrent des exemples de poursuites de trajectoires pour les positions et vitesses des deux articulations. On constate que la convergence des variables articulaires de la deuxième liaison est beaucoup plus rapide que celle des variables articulaires de la première liaison. Cette lenteur relative est tout à fait normale et permet au second segment du manipulateur de se positionner rapidement par rapport à l'organe terminal.

Les figures (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9) montrent que les erreurs en position et en vitesse aux deux articulations sont nulles en régime permanent. Les erreurs de suivi engendrées à la première articulation sont beaucoup plus importantes que celles de la deuxième articulation.

Les figures (2.10) et (2.11) montrent un temps de réponse relativement acceptable, qui explique que les deux actionneurs répondent lentement aux signaux de commande appliqués. Le signal de commande appliqué à la deuxième articulation est plus court et prend moins de temps que celui appliqué à la première articulation.

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude détaillée sur la commande optimale LQR. Nous nous sommes ensuite intéressés à son application sur un manipulateur rigide à deux degrés de liberté pour montrer son efficacité. Les résultats obtenus sont encourageants, concordent à la réalité et montrent avec conviction l'aspect pratique positif de cette théorie de commande.

CHAPITRE 3

COMMANDE ROBUSTE

3.1. Introduction

La robustesse traduit l'invariance du comportement entrée-sortie vis-à-vis des incertitudes de modélisation et/ou de la variation de certains paramètres du processus à commander ou des perturbations susceptibles d'agir sur le processus au cours de son évolution.

La commande élaborée est dite alors robuste dans le sens où elle permet de répondre à divers objectifs tels que :

- Performances en stabilité : le système bouclé doit rester stable dans une plage donnée quelque soient les variations du processus ou en dépit de la présence d'éventuelles perturbations additives.
- Performances du système bouclé : temps de réponse, bande passante, dépassements admissibles,...

L'élaboration d'une commande robuste se fait à partir d'un modèle nominal le plus souvent linéaire. La commande robuste "calculée" permet de garantir des performances en stabilité et des performances en boucle fermée pour une classe de processus éventuellement non linéaires.

Dans ce chapitre, on va montrer un aperçu théorique sur la commande robuste, puis on exposera les résultats de simulation obtenus suite à l'application de la commande LQR robuste au système étudié.

3.2. Approches de robustesse

La littérature spécialisée propose une multitude de structures de commandes robustes. Chacune d'elles se veut optimale et permet de donner des qualités et des marges de robustesse très grandes. Ces approches de robustesse peuvent être classées en deux grandes classes :

- Approches basées sur l'utilisation d'un modèle.
- Approches basées sur les signaux et variables mesurables.

3.2.1. Approches basées sur l'utilisation d'un modèle

Ces approches peuvent être appréhendées dans l'espace d'état ou dans le domaine fréquentiel.

Dans l'espace d'état, on peut citer les méthodes suivantes :

- **Méthode LQ (Linéaire Quadratique) :**

Dans sa version la plus simple, la commande **LQ** cherche à minimiser l'énergie du signal de sortie, c'est-à-dire $\min \|y\|_2$, sous l'hypothèse que l'entrée correspond à un bruit blanc.

Kalman [22] a montré que la commande optimale à critère quadratique par retour d'état garantit des marges de robustesse très satisfaisantes.

- **Méthode LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne) :**

Souvent la structure **LQ** est limitée par la connaissance du vecteur d'état. Dans ce sens, on associe à la commande **LQ** un observateur de Kalman (commande **LQG**) qui permet de reconstruire asymptotiquement les états du système à commander.

Dans l'espace fréquentiel, on peut citer les méthodes suivantes :

- **Commande H infini (H_∞) :**

La commande H_∞ regroupe un ensemble d'outils permettant de résoudre le problème de la robustesse moyennant l'utilisation d'une forme standard. L'élaboration d'une commande robuste peut être conçue comme une optimisation de la norme H_∞ d'une matrice de transfert.

L'appellation H_∞ provient du fait que la norme induite L_2 d'un opérateur linéaire dans le temps correspond à la norme L_∞ de la réponse fréquentielle.

- **Commande CRONE (Commande Robuste à Ordre Non Entier) :**

La commande **CRONE** a été introduite par : A. Oustaloup, en 1981[23].

L'originalité de cette approche est d'introduire des dérivations non entières (m : non entier) dans le correcteur :

$$C(s) = K_0 \left(\frac{1+s/\omega_a}{1+s/\omega_b} \right)^m \quad (3.1)$$

Ce qui permet d'assurer la robustesse de la marge de phase et donc le coefficient d'amortissement.

On peut citer d'autres structures de commandes robustes qui peuvent appartenir à l'espace d'état ou à l'espace fréquentiel, telles que :

- Commande adaptative.
- Commande prédictive.

3.2.2. Approches directes sans modèle explicite

Les méthodes précédentes sont basées sur l'existence et la mise en œuvre d'un modèle du processus. Deux approches complètement différentes ont été développées et n'utilisent pas de modèle, du moins sous forme explicite.

La première basée sur la mise en œuvre de réseaux de neurones, qui permet de réaliser un système de commande par apprentissage. L'élément de base dans ce type de structure est le neurone. Les réseaux sont associés en couches et fonctionnent par apprentissage et ne sont donc jamais mis en œuvre directement mais initialisés avant la mise en service.

La seconde correspond à la commande floue, dont le principe a été initialement établi par L. Zadeh en 1973, puis développé par plusieurs autres chercheurs. Le principe de la commande floue est de générer une loi de commande à partir d'un ensemble de règles floues. Chaque règle correspond à une classe de situations établies préalablement.

3.3. La robustesse en stabilité

3.3.1. Les marges de robustesse

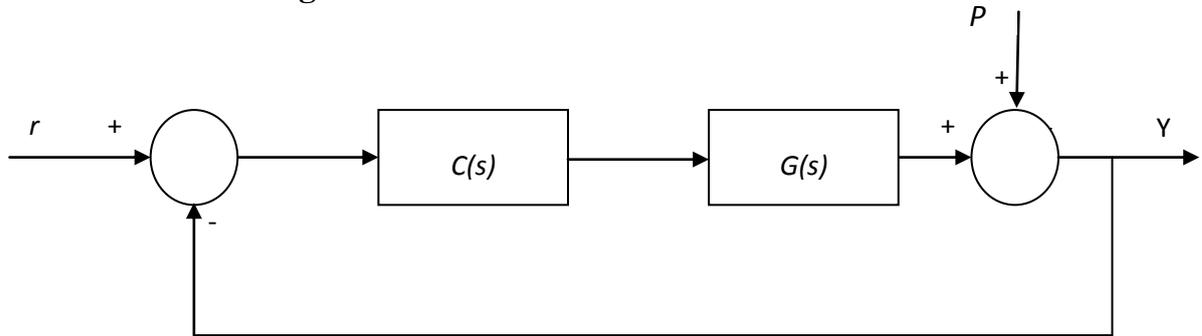


Figure 3.1 : Structure en boucle fermée classique

Considérons le système asservi de la figure (3.1), dans le quel $G(s)$ représente la fonction de transfert d'un procédé et $C(s)$ celle d'un correcteur. On appelle r le signal de référence, y la sortie, u la commande et P une perturbation.

On obtient à partir de ce schéma bloc la relation suivante :

$$y = \frac{CG}{1+CG} r + \frac{1}{1+CG} P \quad (3.2)$$

Cette relation fait intervenir les deux fonctions de transfert suivantes qui caractérisent le comportement du système asservi :

$$T = \frac{CG}{1+CG} \quad (3.3)$$

$$S = \frac{1}{1+CG} \quad (3.4)$$

S représente le transfert entre la sortie et la perturbation et T le transfert entre la consigne et la sortie.

L'analyse de la robustesse en stabilité fait appel au critère de Nyquist (figure 3.2). La robustesse en stabilité est assurée par :

- Le régulateur $K(s)$ stabilise le processus Nominal $G_0(s)$.
- La variation $\delta G_0(s)$ ne modifie pas le nombre de pôles instables de $G(s)$.
- La variation extrême du lieu de Nyquist n'atteint pas le point -1.

Les indicateurs de la robustesse en stabilité sont [24] :

- Marge de phase $\Delta\varphi$
- Marge de gain-phase ΔM
- Marge de retard $\Delta\tau$

La fonction de transfert en boucle ouverte (BO) est $H_{BO}(s) = K(s)G(s)$. En faisant varier ω , on trace le lieu de Nyquist en BO (figure 3.2). En général, le domaine de variation de ω est compris entre 0 et π .

- **Marge de module ΔM**

La marge de module ΔM , appelée également marge de gain-phase, exprime la plus petite distance du lieu de Nyquist au point -1.

La marge de module est très importante, car elle définit la valeur maximale admissible du module de la fonction de sensibilité S_{yp} . De plus, elle permet de définir la tolérance vis-à-vis des composants du système ayant des caractéristiques non linéaires ou variables dans le temps.

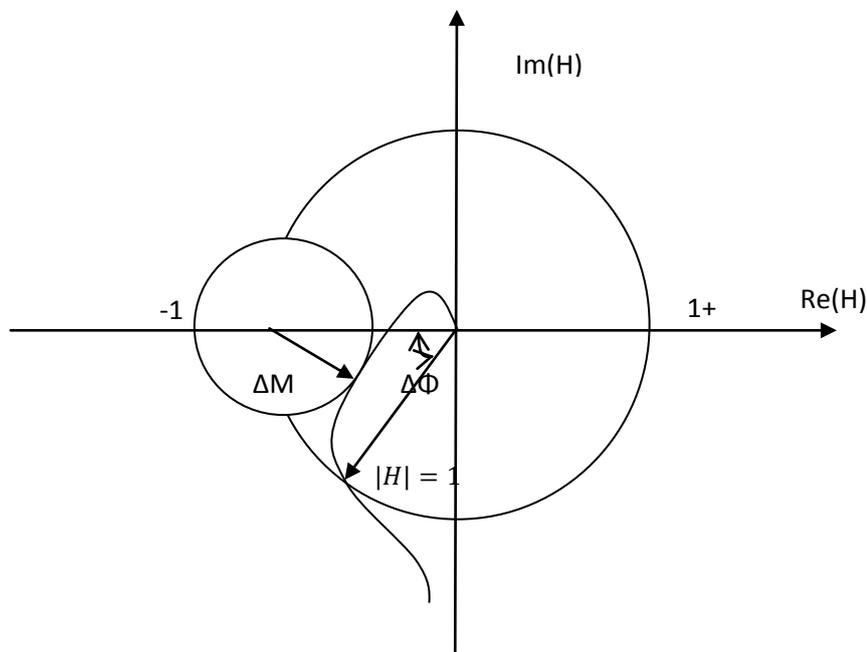


Figure 3.2 : Marges de robustesse

- **Marge de retard $\Delta\tau$**

La marge de retard $\Delta\tau$ définit le plus grand retard admissible par le processus sans altérer sa stabilité. En d'autres termes, elle représente la valeur maximale de la variation ou de l'incertitude sur le retard du système qu'on peut tolérer pour le transfert de la boucle sans entraîner l'instabilité.

- **Marge de phase $\Delta\varphi$**

La marge de phase est le changement de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte à gain unitaire qui rend le système en boucle fermée instable. Une marge typique de cette grandeur utilisée pour une conception robuste est $30^\circ \leq \Delta\varphi \leq 60^\circ$.

3.3.2. Erreurs de Modélisation

La base pratique de la robustesse est un concept d'ensemble. Les incertitudes ou les variations du procédé sont supposées appartenir à un domaine donnée qui peut être grand.

Les incertitudes de modélisation peuvent être scindées en deux catégories :

Incertaines structurées : elles correspondent aux imprécisions de détermination d'un paramètre physique du système.

Incertaines non structurées : elles concernent des incertitudes provenant des diverses sources. Ce type est souvent représenté par une seule perturbation d'un type donné.

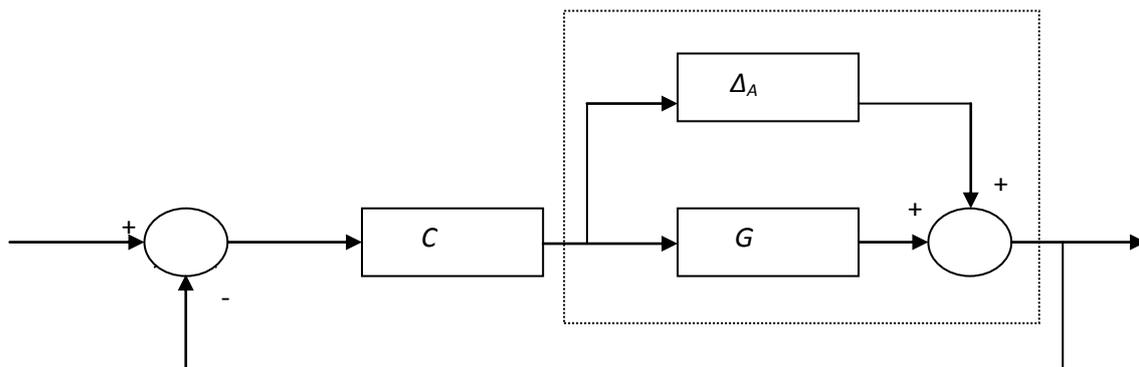


Figure 3.3 : Erreur additive

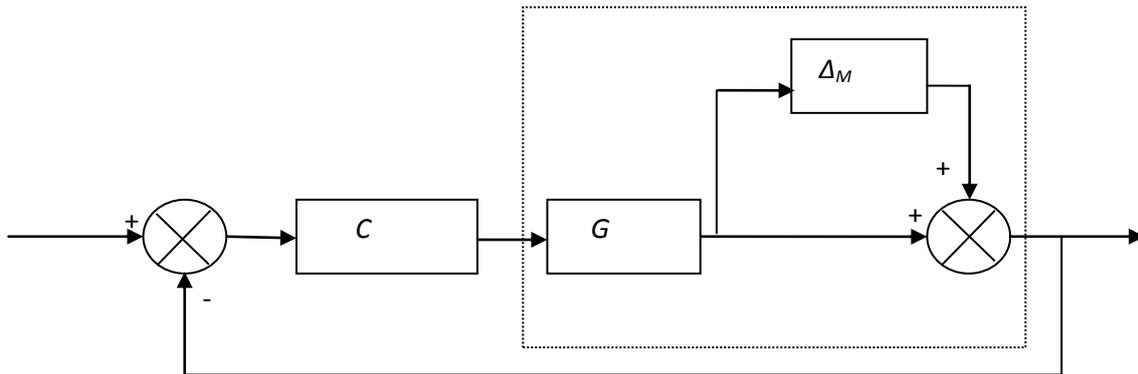


Figure 3.4 : Erreur multiplicative

- Erreur additive : $G_r(s) = G(s) + \Delta_A(s)$
- Erreur multiplicative : $G_r(s) = G(s)(1 + \Delta_M(s))$

3.4. Spécifications traditionnelles

Pour la plus part des gens le concept de la performance d'un système est relatif aux propriétés du système en boucle fermée à savoir le suivi de la consigne et le rejet des perturbations. Cependant, il convient de distinguer entre :

- Les conditions liées à la robustesse de la stabilité : le système bouclé doit rester stable quelles que soient les variations du processus.
- Les performances liées au comportement du processus : la réponse du système bouclé doit rester acceptable en dépit des fluctuations des caractéristiques du processus.

Les performances d'un processus peuvent s'exprimer sous divers aspects : temps de réponse, bande passante, rejet de perturbations, dépassements admissibles, etc...

Les spécifications vont être divisées en deux groupes :

- Spécifications dans le domaine temporel.
- Spécifications dans le domaine fréquentiel.

3.4.1. Spécifications dans le domaine temporel

Les caractéristiques stationnaires sont parmi les plus simples des performances qu'on donne à une structure de commande. En particulier, on s'intéresse ici à la valeur stationnaire de l'erreur de poursuite e .

L'erreur stationnaire est définie comme étant la différence entre la consigne r et le signal de sortie y pour un signal de test prescrit. Le signal de test peut également être le signal de référence r ou une perturbation P .

Avant que le processus n'atteigne son régime stationnaire, il passe par un comportement dynamique transitoire ; ce dernier est considéré comme étant plus important que le régime stationnaire.

On divise les différents critères de performance en deux groupes :

- Critères qui utilisent uniquement quelques points de la réponse ;
- Critères qui utilisent la réponse entière en boucle fermée de $t=0$ jusqu'à $t=\infty$.

Le premier groupe consiste en un critère de performance simple, basé essentiellement sur les caractéristiques physiques de la réponse indicielle du système en boucle fermée.

- **Temps de montée T_r** : le temps que prend le signal de sortie pour passer de 10% à 90 % de sa valeur finale.
- **Temps d'établissement T_s** : le temps nécessaire à la réponse pour se stabiliser en dessous de 5% de sa valeur finale.
- **Valeur de crête M** : Valeur maximale du signal de sortie comparée à sa valeur finale (donnée en %).

Le deuxième groupe, basé sur la réponse totale de la boucle fermée, utilise l'erreur pour la formulation d'un critère des performances dynamiques.

Généralement les critères les plus utilisés sont l'*IAE* et l'*ISE*. Le choix du critère à utiliser dépend des caractéristiques du système et de ce qu'on exige à la sortie du processus.

- Intégrale de l'erreur absolue (Integrated Absolute Error) :

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (3.5)$$

- Intégrale du carré de l'erreur (Integrated Square Error) :

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (3.6)$$

La différence principale entre l'*IAE* et l'*ISE*, est que ce dernier pénalise le contrôle large des grandes erreurs, ce qui encourage une grande action de commande.

3.4.2. Spécifications dans le domaine fréquentiel

Les critères usuels pour la description des performances dynamiques dans le domaine fréquentiel sont :

- **Pic de raisonnement M_p** : le plus grand pic de la fonction de transfert en boucle fermée.
- **Largeur de bande W_b** : il existe plusieurs définitions de la largeur de bande :
 - Les valeurs de la fréquence ω , pour lesquelles l'amplitude de la fonction de sensibilité complémentaire descend en dessous de -3db .
 - La plage de fréquence ω , où l'amplitude de la fonction de sensibilité atteint la valeur 1.
 - La valeur de ω , où l'amplitude de la fonction de transfert en boucle ouverte croise la valeur 1. Cette valeur est appelée généralement la fréquence de coupure (ω_c).

Il n'y a pas de relation précise entre les caractéristiques du domaine temporel et celles du domaine fréquentiel. Mais il existe certaines lois plus ou moins usuelles permettant une translation approchée entre les deux domaines, par exemple :

$$T_r \cong \frac{2,2}{W_b} \quad (3.7)$$

$$M \cong \frac{\sqrt{M_p - 1}}{2,4} \quad (3.8)$$

A partir de ces équivalences, on déduit que la largeur de bande W_b est le facteur dominant qui affecte le temps de montée T_r , et que la valeur de pic M_p est le facteur dominant qui affecte la valeur de crête M .

La méthode classique de tester la robustesse d'un système est de spécifier les marges de stabilité en utilisant les marges de gain et de phase.

3.5. Stabilité robuste

La stabilité robuste est la faculté qu'a un système, de rester stable malgré la présence d'erreur (incertitude) de modélisation. Le système est stable d'une façon robuste, si la fonction de sensibilité complémentaire satisfait la loi :

$$\|TW_2\|_\infty < 1 \quad (3.9)$$

où :

W_2 : La fonction de pondération.

3.6. Notion de la stabilité de Lyapunov

Face à un ensemble d'équations différentielles (pouvant être non-linéaires), la méthode directe de Lyapunov, consiste à choisir une fonction scalaire qui prend la forme d'une fonction d'énergie, dite fonction candidate de Lyapunov, relative à la dynamique du système, puis examiner la variation temporelle de cette fonction scalaire dans le but de vérifier la stabilité du système ainsi défini par ces équations différentielles [10].

La fonction candidate de Lyapunov $V(x)$, est en fonction de l'état du système considéré x et sa dérivée temporelle \dot{x} , et doit vérifier deux propriétés. La première est une propriété de la fonction elle-même : cette dernière doit être une fonction définie positive, donc pour x et \dot{x} non nulles la fonction candidate de Lyapunov doit être positive. L'autre propriété, est associée à la dynamique du système considéré : la fonction candidate est une fonction décroissante de façon monotone lors de la variation de l'état du système et de sa dérivée. En d'autres termes, la dérivée temporelle de cette fonction reste négative pour toute variation de x et \dot{x} .

3.6.1. Stabilité locale

La stabilité locale, est définie autour d'un point d'équilibre et implique l'usage d'une fonction candidate définie positive localement. Alors dans ce cas, les conditions de stabilité locale deviennent :

- $V(x)$, est définie positive autour du point d'équilibre étudié.
- $\dot{V}(x)$, est semi-définie négative au voisinage du point d'équilibre.

Si de plus, la dérivée est localement définie négative, alors la stabilité est dite asymptotique.

3.6.2. Stabilité globale

Dans le but de généraliser la stabilité locale déjà définie, il n'est pas suffisant d'étendre le domaine d'étude au voisinage du point d'équilibre à l'espace d'état tout entier. En effet, une condition additionnelle s'ajoute à celles énoncées ci-haut, et la stabilité est alors déterminée par les conditions suivantes :

- $V(x)$, est définie positive.
- $\dot{V}(x)$, est semi-définie négative.
- $V(x) \rightarrow \infty$ si $\|x\| \rightarrow \infty$, c.à.d. lorsque x tend vers l'infini dans n'importe quelle direction.

La stabilité ainsi définie, est dite stabilité asymptotique globale.

3.7. Simulations et résultats

Afin d'atteindre une commande optimale LQR robuste pour le bras manipulateur étudié, on va développer cette loi en se référant à [2] et [3].

3.7.1. Organigramme

L'organigramme de la figure (3.5), décrit les étapes suivies afin d'élaborer une loi de commande robuste.

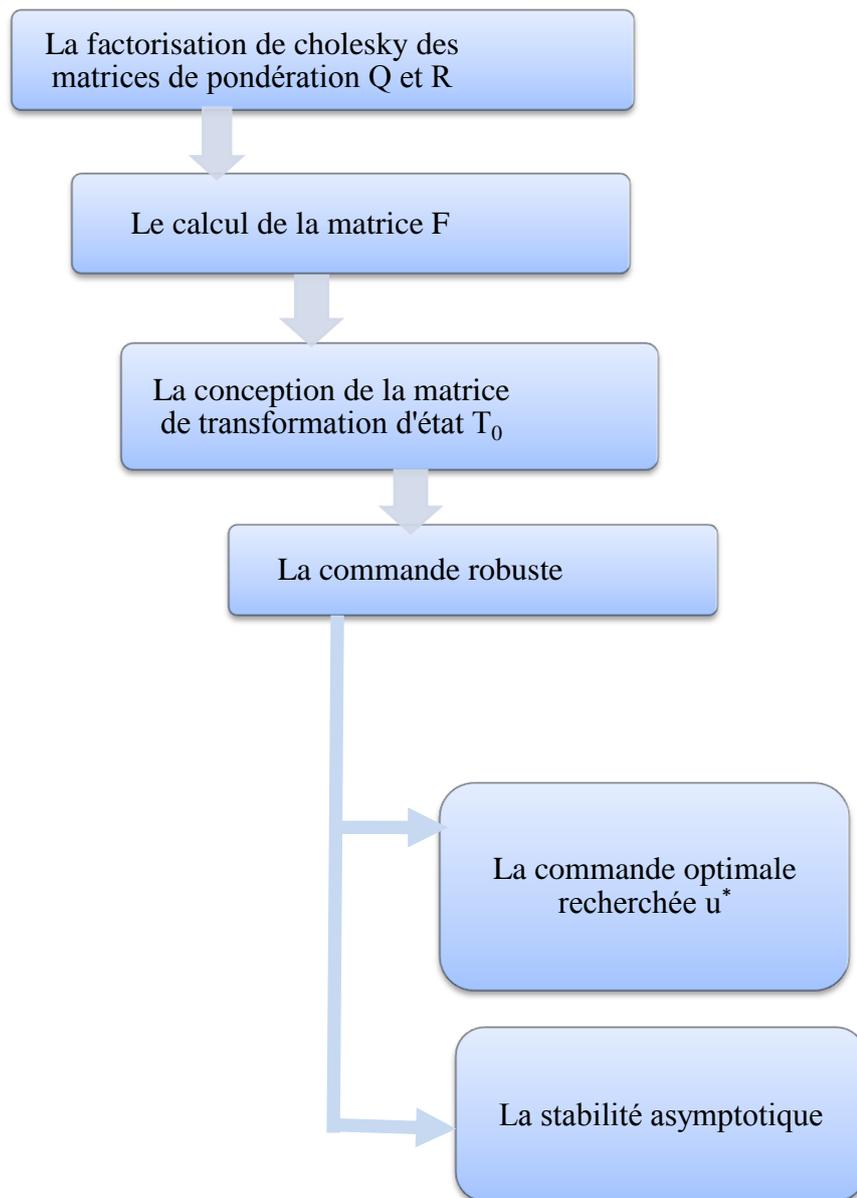


Figure 3.5 : Organigramme décrivant le développement de la méthode appliquée

3.7.1.1. Conditions sur les matrices de pondération Q et R

Les deux matrices de pondération Q et R , utilisées dans les calculs de ce mémoire doivent se décomposer selon la factorisation de Cholesky [2].

- **Factorisation de Cholesky**, nommée d'après André-Louis CHOLESKY, consiste pour une matrice symétrique définie positive A , à déterminer une matrice triangulaire inférieure L tels que : $A = LL^T$. La matrice L est en quelque sorte une "racine carrée" de A . Cette décomposition permet notamment de calculer la matrice inverse A^{-1} , et également le déterminant de A (égal au carré du produit des éléments diagonaux de L) [25].

$$Q = Q^T = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1 - (Q_{12}^T + Q_{12}) > 0 \quad (3.11)$$

$$R = R^T = R_1^T R_1 > 0 \quad (3.12)$$

3.7.1.2. Calcul de la matrice F

On définit une matrice symétrique $F \in R^{n \times n}$, qui doit répondre à la condition suivante :

$$F = F^T = 1/2 \times (Q_{11}^T Q_2 - Q_2^T Q_{11}) - 1/2 \times (Q_{12}^T + Q_{12}) > 0 \quad (3.13)$$

Cette matrice dite matrice de rigidité [2], permet d'offrir un aspect de raideur (action ressort) au système.

3.7.1.3. Conception de la matrice de transformation d'état

La matrice T_0 est obtenue par la formule suivante :

$$T_0 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où :

T_{11} et $T_{12} \in R^{n \times n}$ sont des matrices constantes.

Cette matrice permet de faire un passage de l'espace cartésien vers un espace de reconfiguration (espace virtuel) [2].

Dans notre cas :

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7.1.4. Commande optimale robuste

Pour démontrer l'aspect robuste de la commande LQR, on fait apparaître le concept de l'erreur de poursuite.

➤ Représentation d'état de l'erreur de poursuite

On désire faire suivre au manipulateur une certaine trajectoire spécifiée en fonction du temps t par une position q_r et une vitesse \dot{q}_r . On définit l'erreur à cette trajectoire souhaitée comme :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}_r \\ q - q_r \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

\tilde{z} et T_1 sont obtenus à partir de la transformation de l'équation d'état \tilde{x}

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} \tilde{x} \quad (3.16)$$

➤ Nouvelle équation d'état du système perturbé [3]

Elle est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = [A_r(\tilde{x}, t)]\tilde{x} + [B_r(\tilde{x}, t)]u \quad (3.17)$$

où :

$$A_r = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M^{-1}(q) + C(q, \dot{q}) & 0_{n \times n} \\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 \quad (3.18)$$

$$B_r = T_0^{-1} \begin{pmatrix} -M^{-1}(q) \\ 0_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Donc, les valeurs numériques des matrices A_r et B_r seront comme suit :

$$A_r = \begin{bmatrix} -5.08 & 6.89 & -3.08 & 6.89 \\ 6.92 & -38.88 & 6.92 & -36.88 \\ 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 3.05 & -6.91 \\ -6.91 & 36.88 \\ 1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 \end{bmatrix}$$

- **La commande optimale u^* recherchée doit minimiser le critère quadratique suivant :**

$$J(u) = 1/2 \int_0^\infty (\tilde{x}(t)^T Q \tilde{x}(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (3.20)$$

Le calcul de cette fonction de coût, permet de trouver le signal de commande optimal $u = u^*$, qui va transférer le manipulateur d'un état initial $\tilde{x}(t_0)$ à un état désiré. La variable de commande u est pondérée par la matrice $R = R^T > 0$, alors que le vecteur d'état \tilde{x} est pondéré par la matrice $Q = Q^T > 0$. Le taux de compensation peut être ajusté par un choix convenable de la pondération Q . Le terme $u^T R u$, permet d'assurer un lissage du fonctionnement.

$$u^*(t) = -R^{-1} B_r^T T_0 \tilde{x}(t) \quad (3.21)$$

où :

T_0 doit vérifier l'équation algébrique suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{bmatrix} + Q - T_0^T B_r R^{-1} B_r^T T_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$K = R^{-1} B_r^T T_0$$

- Le gain obtenu possède alors les valeurs suivantes :

$$K = \begin{bmatrix} 0.3083 & -0.0185 & 0.8771 & -0.0090 \\ -0.0192 & 0.3983 & -0.0094 & 0.9212 \end{bmatrix}$$

➤ **Stabilité asymptotique**

La fonction de Lyapunov V du système commandé par la loi de commande optimale (3.21) est donnée par [2]:

$$V(\tilde{x}(t), t) = 1/2 \times \tilde{x}^T T_0^T \begin{pmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} T_0 \tilde{x} \quad (3.23)$$

Pour que le système soit stable au sens de Lyapunov, la dérivée de la fonction de Lyapunov doit être négative pour toute valeur de $\|\tilde{x}\| \neq 0$ [26] :

$$\dot{V}(\tilde{x}, t) = \frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} < 0, \forall \|\tilde{x}\| \neq 0 \quad (3.24)$$

Pour notre cas [2] :

$$\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} = -L(\tilde{x}, u^*) = -\frac{1}{2} \tilde{x}^T (T_0^T B_r R^{-1} B_r^T T_0 + Q) \tilde{x} < 0, \forall t > 0, \tilde{x} \neq 0 \quad (3.25)$$

Ceci signifie que la stabilité asymptotique globale du système est maintenue.

3.7.2. Résultats obtenus

Les figures ci-dessous montrent les résultats de l'application de la loi de commande LQR robuste au manipulateur (2ddl) étudié ainsi qu'un exemple de simulation de la dérivée de la fonction de Lyapunov.

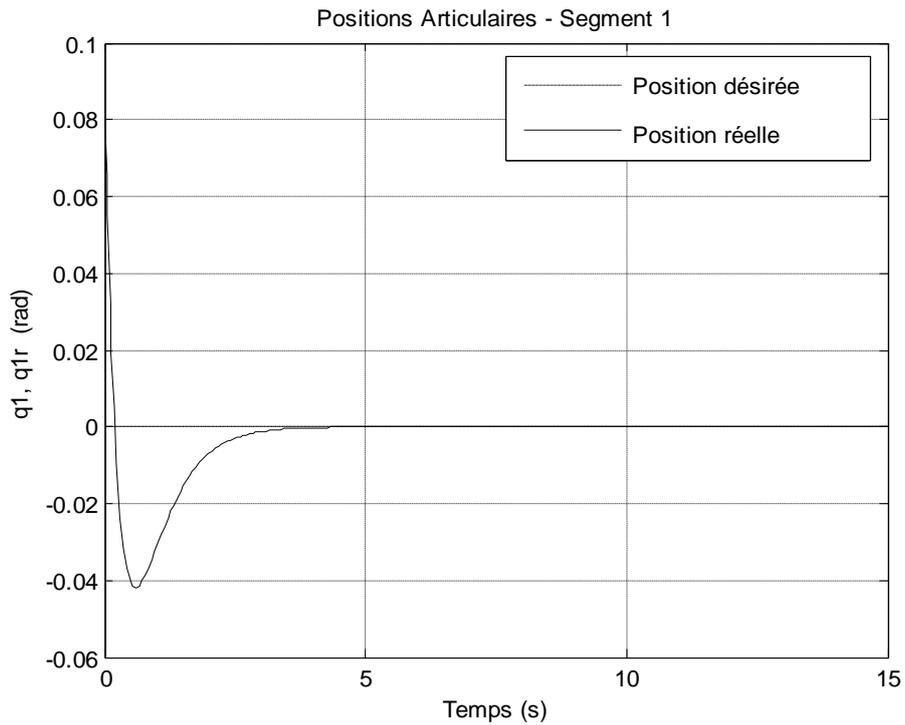


Figure 3.6 : Poursuite de la position angulaire de la 1^{ère} articulation

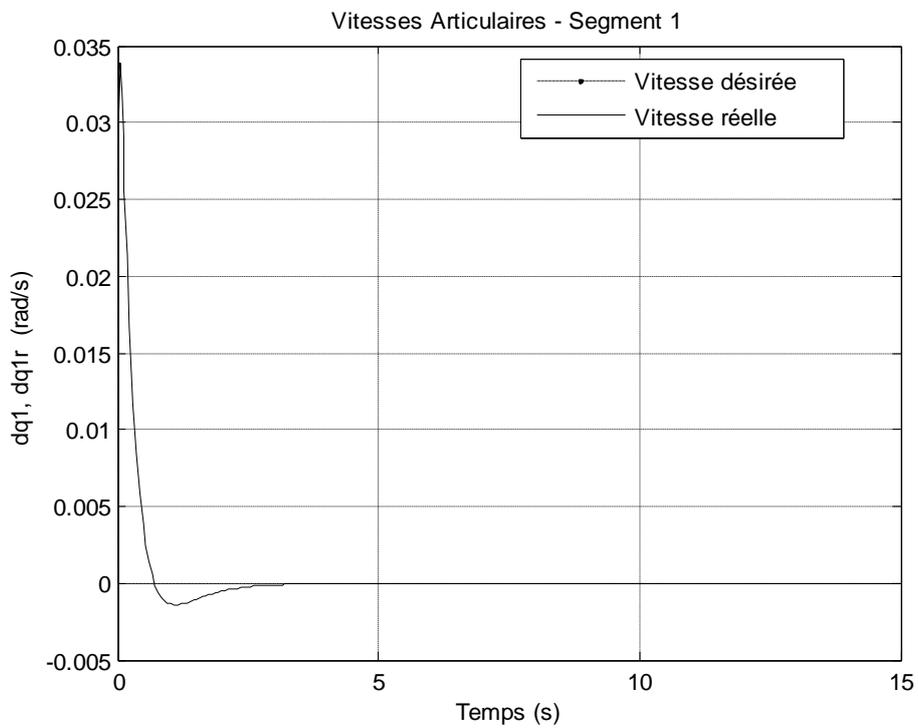


Figure 3.7 : Poursuite de la vitesse angulaire de la 1^{ère} articulation

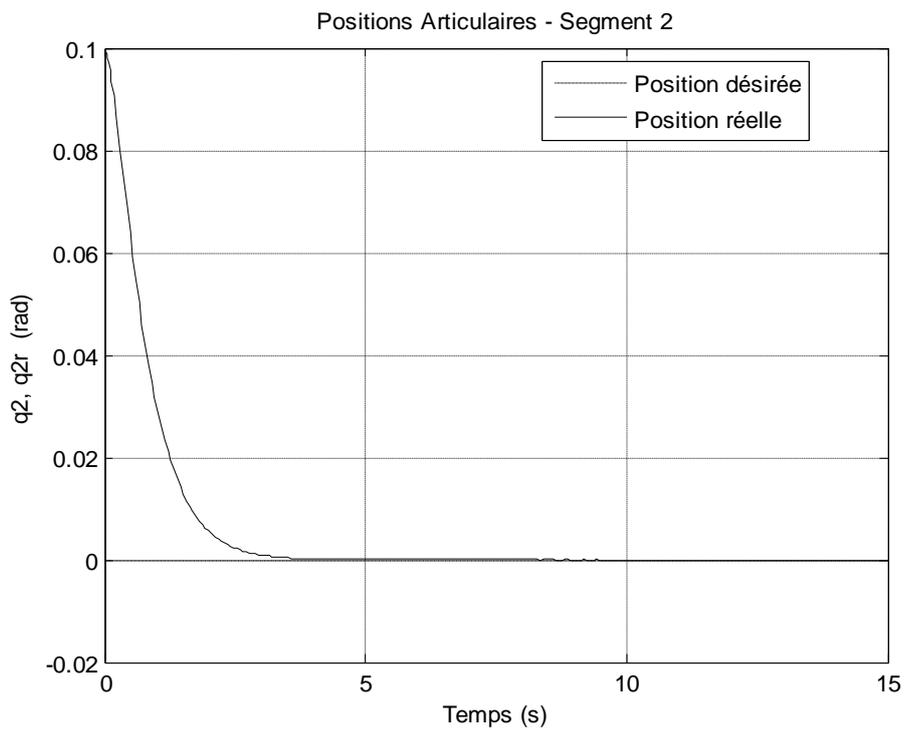


Figure 3.8 : Poursuite de la position angulaire de la 2^{ème} articulation

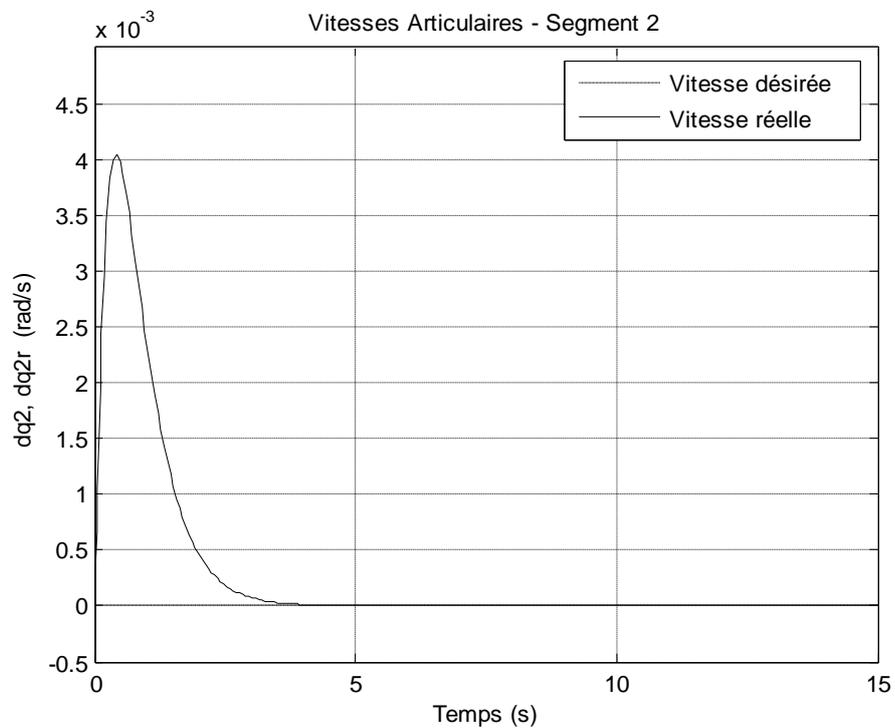


Figure 3.9 : Poursuite de la vitesse angulaire de la 2^{ème} articulation

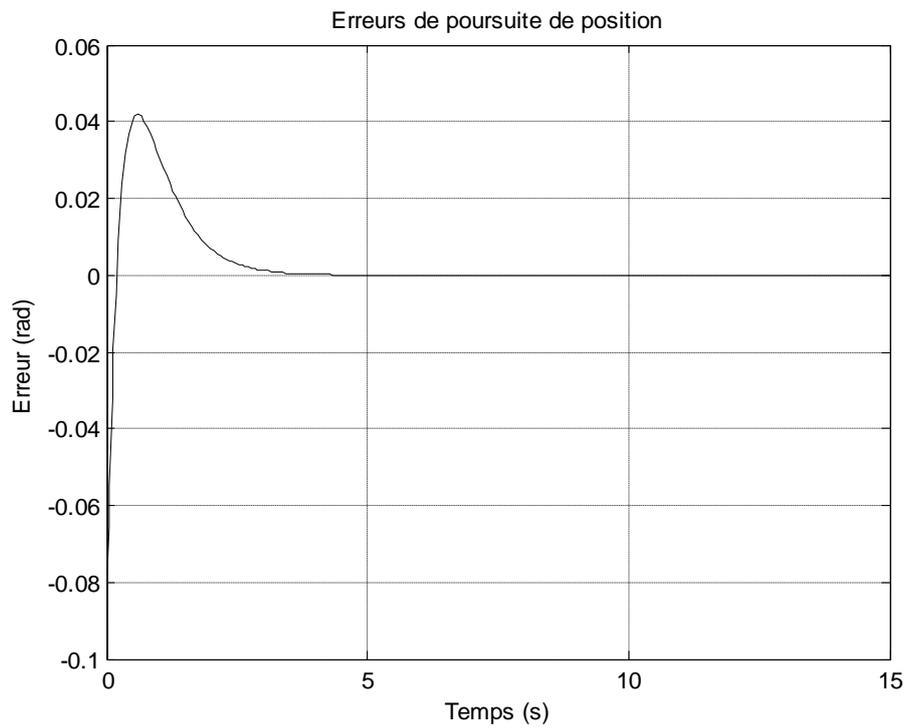


Figure 3.10 : Erreurs de poursuite de position de la 1^{ère} articulation

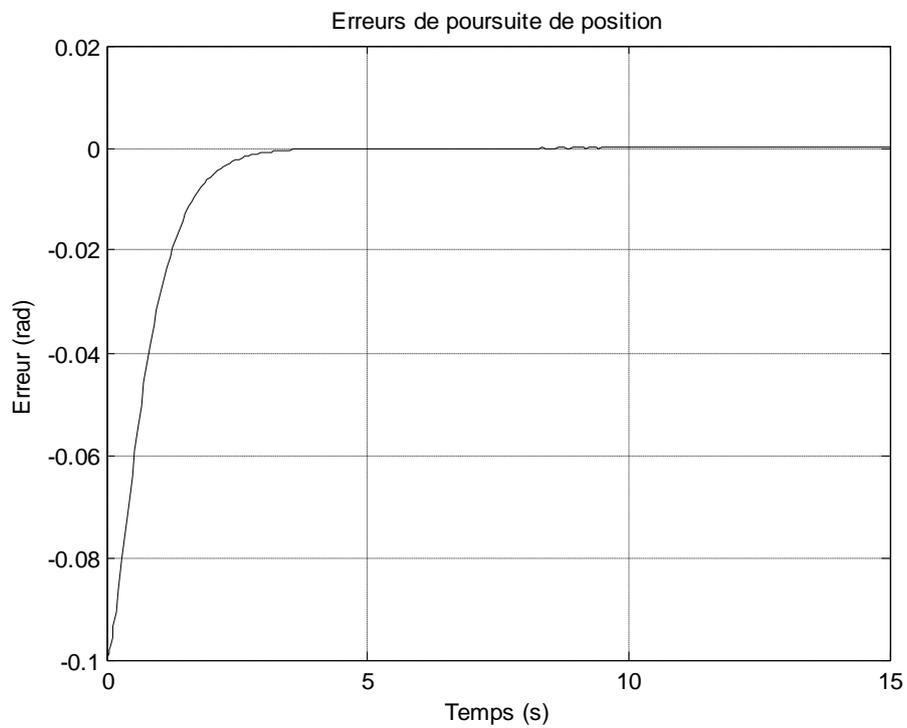


Figure 3.11 : Erreurs de poursuite de position de la 2^{ème} articulation

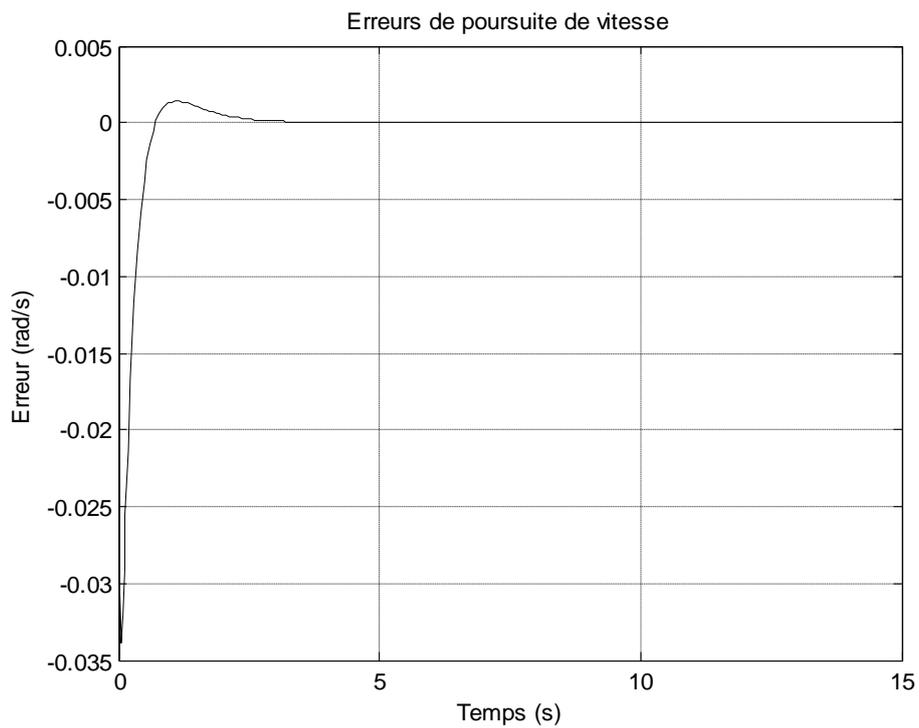


Figure 3.12 : Erreurs de poursuite de vitesse de la 1^{ère} articulation

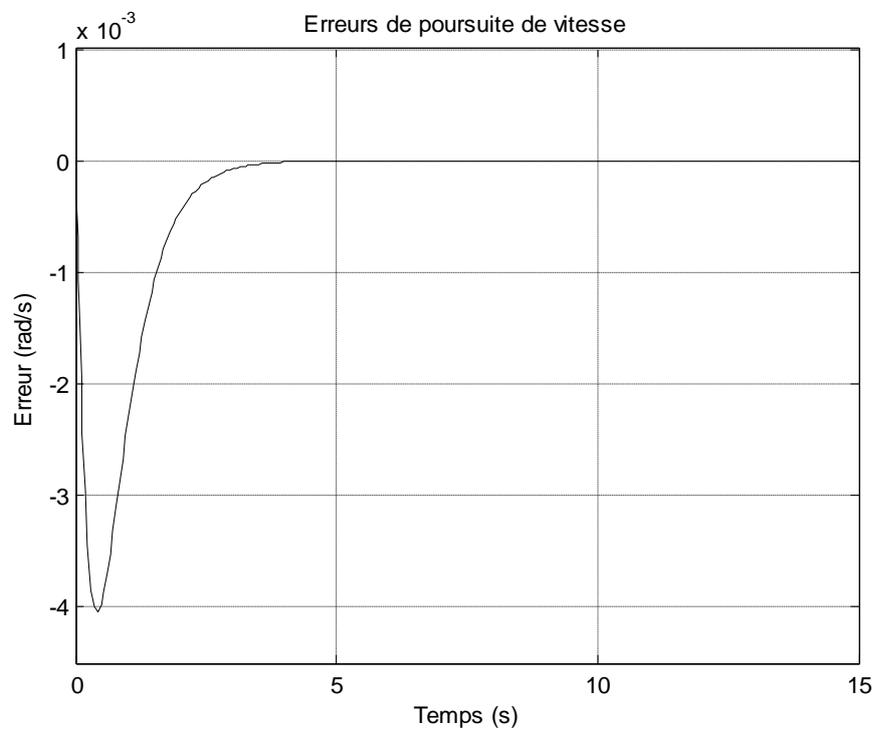


Figure 3.13 : Erreurs de poursuite de vitesse de la 2^{ème} articulation

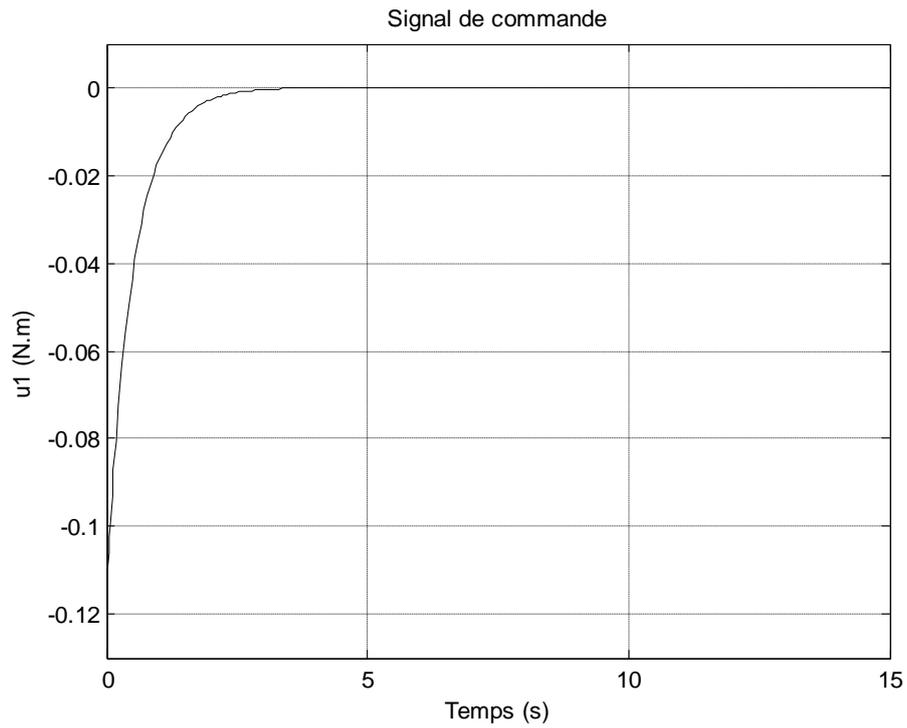


Figure 3.14 : Commande U_1 appliquée au 1^{er} actionneur

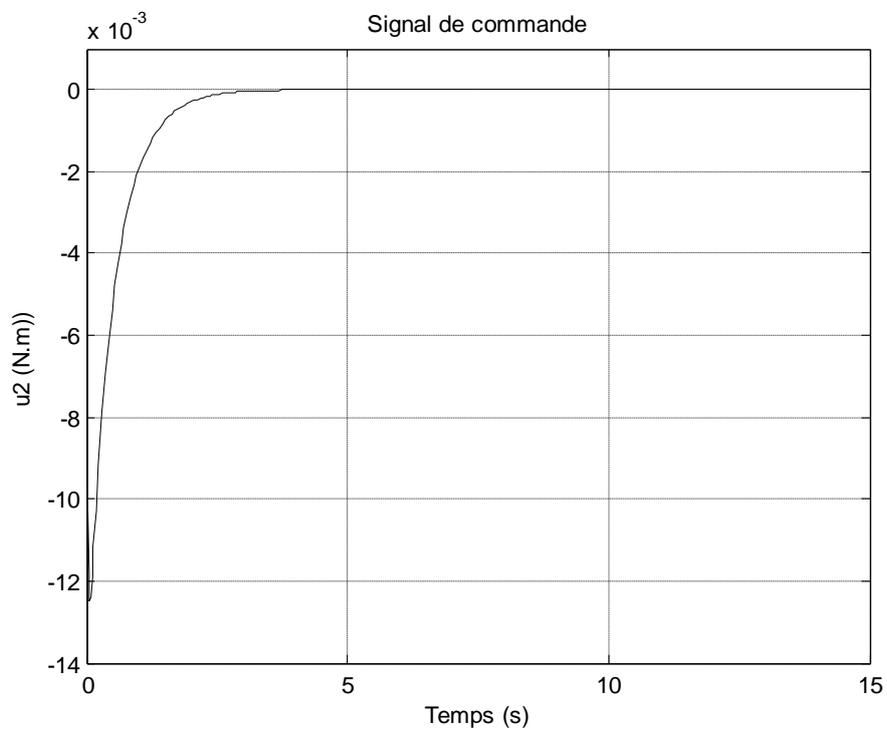


Figure 3.15 : Commande U_2 appliquée au 2^{ème} actionneur

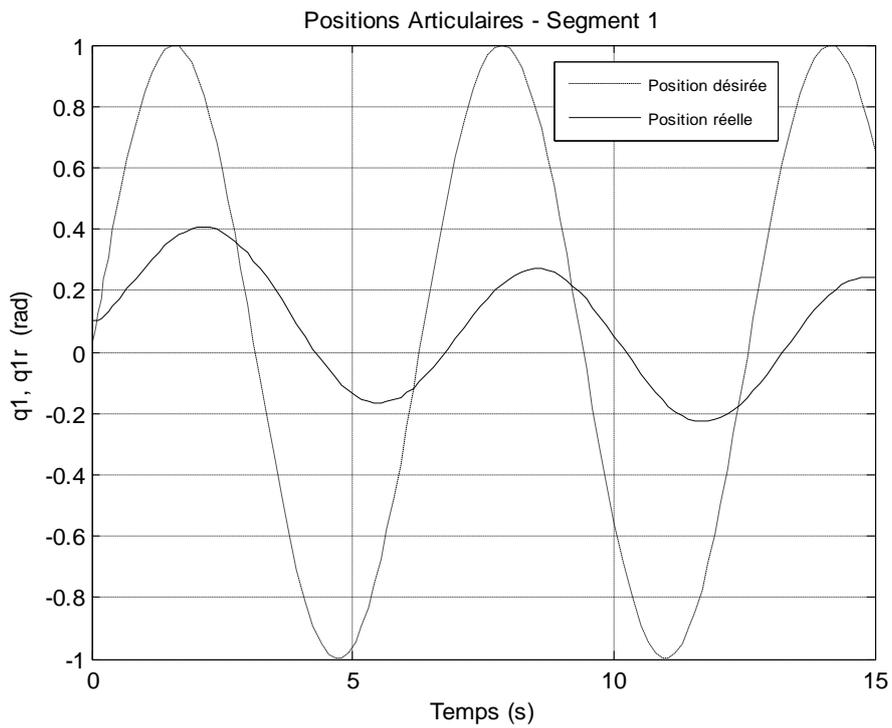


Figure 3.16 : Poursuite de la position angulaire de la 1^{ère} articulation

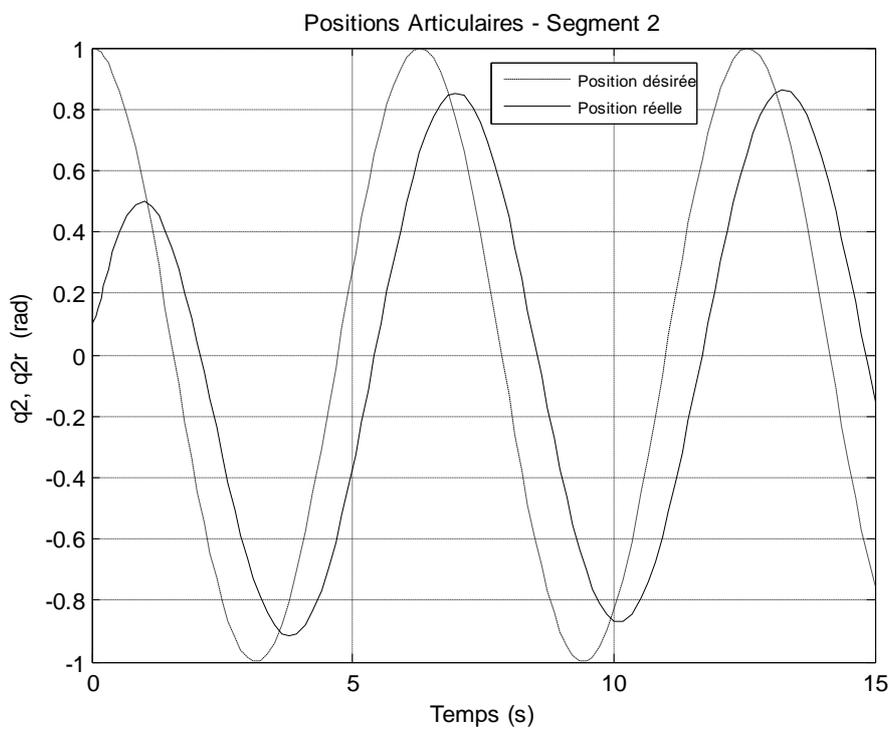


Figure 3.17 : Poursuite de la position angulaire de la 2^{ème} articulation

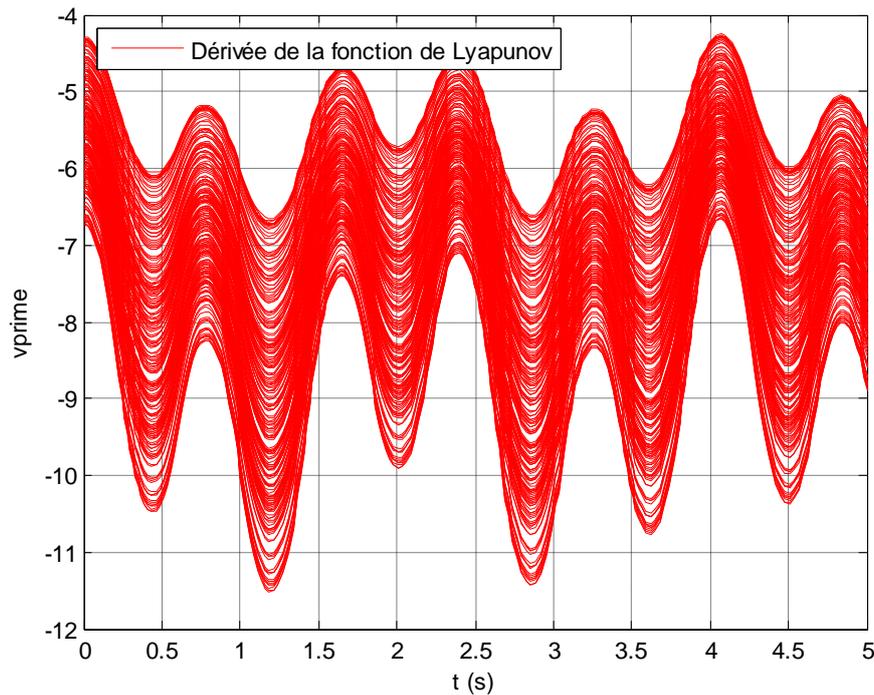


Figure 3.18 : La dérivée de la fonction de Lyapunov

Les figures (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) montrent que les poursuites de trajectoire des deux articulations s'établissent assez rapidement par rapport aux poursuites obtenues au chapitre précédent.

Les figures (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) montrent que les erreurs en position et en vitesse en régime permanent des deux articulations sont moindres et s'annulent pratiquement après quatre secondes.

Les figures (3.14) et (3.15) montrent un temps de réponse assez bref qui explique que les deux actionneurs répondent rapidement aux signaux de commande appliqués.

Les figures (3.16) et (3.17) présentent des cas de poursuites de trajectoires pour les positions des deux articulations (segments 1 et 2) lorsque les trajectoires désirées sont représentées par des sinusoides.

La figure (3.18) représente la dérivée de la fonction de Lyapunov considérée pour vérifier la stabilité de tous les paramètres caractérisant le bras manipulateur. On constate sur cette figure que toutes les fonctions prennent des valeurs négatives, ce qui signifie que le système est asymptotiquement stable ou stable au sens de Lyapunov.

3.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu théorique sur le concept de robustesse, en mentionnant les philosophies de commande les plus rencontrées dans la littérature. Nous avons cité leurs performances et leurs spécifications dans les domaines temporel et fréquentiel. L'application de la théorie LQR robuste pour commander notre manipulateur a conduit à des résultats satisfaisants concernant la poursuite de trajectoires désirées de ses variables articulaires. Les signaux de commande générés par les actionneurs ne sont appliqués qu'à de courts instants. Concernant la stabilité, le système étudié répond parfaitement et on constate que l'équation (3.25) est tout le temps vérifiée.

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire est axé principalement sur l'élaboration d'une loi de commande non linéaire dédiée à la commande de position et de vitesse d'un bras manipulateur rigide. La commande recherchée doit satisfaire une faculté pivot qui est la robustesse, une telle propriété doit son nom à l'invariance du comportement de la sortie du système vis-à-vis des différentes variations paramétriques ou perturbations pouvant affecter son évolution. Nous avons étudié et appliqué une commande qui a suscité un intérêt certain de la plus part des chercheurs : la commande optimale LQR, réputée notamment pour sa robustesse.

La première étape du travail consiste en la modélisation dynamique du manipulateur en utilisant le formalisme de Newton-Euler et la résolution de ces équations sous l'environnement Matlab/Simulink. Des travaux de simulations concernant les variables articulaires ont été élaborés sous différentes conditions initiales et présentés au premier chapitre.

La deuxième étape du travail a porté sur l'application de cette loi de commande, en ignorant toute perturbation pouvant altérer la dynamique correcte du manipulateur. Les résultats de simulation obtenus sont dans l'ensemble acceptables et sont marqués par des temps de réponse appropriés aux différentes variables articulaires du bras manipulateurs qui se répercutent directement sur l'organe terminal.

Pour palier aux différentes perturbations statiques et dynamiques, la synthèse d'une loi de commande robuste est indispensable afin de faire face à ces aléas qui peuvent affecter la bonne conduite du système. C'est la troisième étape du travail qui décrit cette directive.

En considérant la présence de la perturbation, la commande élaborée a sauvé un bon comportement du manipulateur avec amélioration de certains paramètres tels que le temps de réponse, ce qui rend la réponse des actionneurs beaucoup plus rapide, sous l'effet de signaux de commande de faibles amplitudes.

Les objectifs préalablement fixés dans le cadre de ce travail ont été atteints. Les commandes élaborées sont robustes et fiables.

En ce qui concerne, les perspectives et les horizons proposés pour la continuité de ce travail de recherche, on peut mentionner les suggestions suivantes :

- Concrétisation de ces lois de commandes, par leur application sur un manipulateur expérimental.
- Commande des positions et vitesses articulaires des bras manipulateurs par des techniques intelligentes telles que la logique floue type 2 ou les algorithmes génétiques de type PSO.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. PONTRIAGUINE, ‘*Théorie Mathématique des Processus Optimaux*’, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [2] R. JOHANSSON, ‘*Quadratic Optimization of Motion Coordination and Control*’, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.53,n° 11,pp.1197-1208, 1990.
- [3] M. SAAD & T. RABAI, ‘*Commande Optimale Robuste d’un Système Robotique*’, Proc of IEEE, pp 326-329, 1995.
- [4] C. VIBET, ‘*Robots Principes et Contrôle*’, Editions Ellipses, 1988.
- [5] Y. BAAZI, ‘*Etude d’un Manipulateur à 3 Degrés de Liberté, Application à la Fonction de Préhenseur*’, mémoire de Magister, Institut d’Électronique, Université de Batna,2000.
- [6] B. BAYLE, ‘*Introduction à la Robotique*’,EditionsIUP Technologies Avancées des Sciences de Viant, Université de Louis Pasteur, Strasbourg, France,2004/2005.
- [7] W. KHALIL & Etienne DOMBRE, ‘*Bases de la modélisation et de la commande des robots manipulateurs de type serie*’, Programme Unit-GDR Robotique, Mai 2012.
- [8] Ch. ABDELHAKIM, ‘*Analyse Cinématique des Robots Parallèles*’, thèse de Doctorat, Département de Génie Mécanique, Université de Constantine,2000.
- [9] R. HANUS, ‘*Asservissements Proprioceptifs*’, Editions Dunod, 1999.
- [10] A. PREUMONT, ‘*Théorie Générale des Systemes Articulés, Introduction à la Robotique*’, Laboratoire des Structures Actives, Université Libre de Bruxelles, Editions ULB,2001.
- [11] M. H. YU & L. D. SENEVIRATNE & S. W. E. EARLES, ‘*Adaptive Control of Robot Manipulators*’, Proc. Of the International Conference on Intelligent Robots and Systems, VOL.1,pp 293,Raleigh, Caroline du Nord, Juillet 1992.

- [12] D.P. STOTEN & S.P. HODGSON, ‘‘ *Comparative Implementation Studies of the Minimal Control Synthesis Algorithm on a Class 1 Manipulator*’’, Journal of Systems and Control Engineering, IMECHE, VOL.205 , pp.23 -33, 1991.
- [13] D.P. STOTEN, ‘‘ *Generalized Manipulators Dynamics, with Regard to Model Reference Adaptive Control*’’, Int.J.Control, Vol. 50, pp. 2249-2268, 1989.
- [14] A. P. SAGE & C. C. WHITE, ‘‘*Optimum Systems Control*’’, Prentice Hall, 1977.
- [15] B. D. O. ANDERSON & J. B. MOORE, ‘‘*Optimal Control-Linear Quadratic Methods*’’, Prentice Hall, 1989.
- [16] D. S. NAIDU, ‘‘*Optimal Control Systems*’’, Idaho State University Publications, USA, 2002.
- [17] G. F. FRANKLIN & J. D. POWELL & M. L. WORKMAN, ‘‘*Digital Control of Dynamic Systems*’’, Addison-Wesley, 1990.
- [18] W. F. ARNOLD & A. J. LAUB, ‘‘ *Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations*’’, Proc of IEEE, VOL.2, pp 1562-1568, 1984.
- [19] G. DUC, ‘‘*Robustesse des Systemes Linéaires Multivariables*’’, Editions de l’Ecole Supérieure d’Électricité’’, Paris- France, 1994.
- [20] N. A. LEHTOMAKI & N. R. SANDELL & M. ATHANS, ‘‘*Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Design*’’, IEEE Transaction on Automatic Control, VOL.AC-26, n° 1, pp 75-93, 1981.
- [21] E. OSTERTAG, ‘‘*Filtrage Optimal et Commande Optimale*’’, Editions de l’Ecole Supérieure de Physique de Strasbourg- France, 2002.
- [22] G. KALMAN, ‘‘*A Tutorial on the Observers Design*’’, Int. J. Control. Vol. 15, n° 2, pp. 1180-1190, 1961.
- [23] A. OUSTALOUP, ‘‘ *Linear Feedback Control Systems of Fractional Order*’’, IEEE Symposium on Circuits and Systems, Chicago, USA, 1981.
- [24] K. J. ASTROM ‘‘ *Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins*’’, Automatica, VOL.20, n° 5, pp 645-651, 1984.

[25] P. LASCAUX & R. THEODOR, ‘*Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l’Art de l’Ingénieur, -Méthodes Directes-*’, Editions Dunod,2000.

[26] R. JOHANSON, ‘*Lyapunov Design for Adaptive Control of Robots*’, Proc IFAC Nonlinear Contr.Syst.Design Symp, Capri, Italie, 1989.

Résumé

Ce mémoire, consacré à l'étude d'une théorie de commande classique, présente un algorithme élaboré pour l'optimisation quadratique en temps continu de la commande d'un bras manipulateur rigide à deux degrés de liberté (2 DDL). L'approche proposée, est une solution explicite de l'équation de Hamilton-Jacobi, issue de la résolution d'une équation algébrique matricielle. La commande optimale recherchée doit minimiser un critère de performance quadratique, qui conduit naturellement à une commande type "retour d'Etat". Il s'agit d'une commande robuste visant à éliminer les effets des paramètres incertains du système. La stabilité du système est investie suivant la théorie de la fonction de Lyapunov, qui montre avec subtilité, la maintenance de la stabilité asymptotique globale. La loi de commande optimale ainsi élaborée est très utile pour la planification des trajectoires et l'analyse des mouvements.

Mots clés : bras manipulateur, commande optimale, équation de Hamilton-Jacobi, critère de performance quadratique, stabilité de Lyapunov, commande robuste.

Abstract

This Memory presents an algorithm for continuous time quadratic optimization of motion control. Explicit solution to the Hamilton-Jacobi equation for optimal control of rigid robot arm with two degrees of freedom motion is found by solving an algebraic matrix equation. We talk about a robust control in order to may act in concert in the case of unknown or uncertain system parameters. The system stability is investigated according to Lyapunov function theory and it is shown that global asymptotic stability holds. The proposed optimal control is useful both for motion control, trajectory planning and motion analysis.

Keywords: Robot arm, optimal control, Hamilton-Jacobi equation, quadratic performance criterion, Lyapunov stability, robust control.