

**REBUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE BATNA  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de**

**MAGISTERE EN MECANIQUE**

**Option: Mécanique des structures**

**Par**

**Mr MEZOU DJ MOURAD**

---

***Analyse du comportement vibratoire d'un véhicule  
À la rencontre d'un obstacle (dos-d'âne)***

---

Soutenu publiquement le 15/04/2010, devant le jury composé de :

Dr : BRIOUA Mourad	Maître de conférences A, Université de Batna,	Président
Dr : BENBOUTA Rachid	Maître de conférences A, Université de Batna,	Rapporteur
Mr : SEGHIR Kamel	Maître assistant A, Université de Batna,	Co-rapporteur
Dr : ZIDANI Kamel	Maître de conférences A, Université de Batna,	Examineur
Dr : BENZAADA Saïd	Maître de conférences A, Université de Biskra,	Examineur

*A ma famille, à tous mes amis et à ...*

## *Remerciements*

*Je remercie Dieu pour m'avoir donné la santé la patience et le courage tout au long du travail.*

*Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de mémoire, Dr **Ben bouta Rachid.** et **Mr SGHIR Kamel** Co-encadreur, pour toutes leurs orientations et leurs précieux conseils qui m'ont permis de concrétiser ce travail, à qui j'exprime ma profonde gratitude et reconnaissance. Merci pour votre écoute, vos conseils et vos encouragements qui m'ont été précieux pour mener ce travail à son terme.*

*Je remercie aussi tout particulièrement les membres de jury, à savoir :*

*Monsieur **BRIOUA Mourad**, Maître de conférences à l'université de Batna, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*Monsieur **ZIDANI Kamel**, Maître de conférences à l'université de Batna et Monsieur **BENSAADA Saïd** Maître de conférences à l'université de Biskra, qui ont accepté d'examiner ce travail.*

*Mes sincères remerciements vont à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier **Haddad Djamel**, **Fedaoui Kamel**, **BELLOUFI Abderrahim** et tous mes collègues de la promotion 2006.*

*De même j'associe mes remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation en particulier les enseignants du Département de Mécanique de l'université de Batna.*

*Bien sûr, je n'oublie pas à remercier mes parents, ma femme, frères, sœurs et tous mes collègues.*

## **Résumé**

Les inégalités de la surface d'une route transmettent non seulement aux véhicules des secousses qui peuvent être cause des anomalies mécaniques, mais aussi peuvent être sources de fatigue surtout lorsque il s'agit de véhicules de transports de personnel.

Dans notre modeste travail, nous avons construit un programme qui détermine pour une excitation connue (nature de dos-d'âne) le comportement vibratoire du véhicule et calcul les forces intervenantes à tout instant (t) de l'excitation pendant son passage à la vitesse constante.

**Mots clés :** Vibrations mécanique ; Véhicule ; Suspension ; Ralentisseur.

## **Abstract**

The inequalities of the surface of a road transmit not only to the vehicles jolts which can because the mechanical anomalies, but also can be sources of tiredness especially when they are freight vehicles of personnel.

In our modest work, we built a program which determines for a known excitation (natural of back-of ass) the vibratory behavior of the vehicle and calculation the intervening forces at any moment (t) of the excitation during its passage at the constant speed.

**Key words:** Vibrations mechanics; Vehicle; Suspension; Speed reducer.

## **Abréviations et symboles**

<b><u>Symboles</u></b>	<b><u>Désignation</u></b>
$J_3$	Moment d'inertie de centre de gravité.
$G_x$	Axe de révolution.
$M_1(\text{Kg})$	Masse de l'essieu avant (pont).
$M_2(\text{Kg})$	Masse de l'essieu arrière (pont).
$M_3(\text{Kg})$	Masse du châssis et de la carrosserie (compris le moteur).
$K_{s1} (\text{N/m})$	Coefficient de rigidités de la suspension avant.
$K_{s2} (\text{N/m})$	Coefficients de rigidité de la suspension arrière.
$K_{p1} (\text{N/m})$	Coefficients de rigidité de l'essieu avant
$K_{p2} (\text{N/m})$	Coefficients de rigidité de l'essieu arrière.
$C_{s1} (\text{N. s/m})$	Coefficients d'amortissement de la suspension avant.
$C_{s2} (\text{N. s/m})$	Coefficients d'amortissement de la suspension arrière.
$C_{p1} (\text{N. s/m})$	Coefficients d'amortissement de l'essieu avant.
$C_{p2} (\text{N. s/m})$	Coefficients d'amortissement de l'essieu arrière.
$P' (\text{Kg})$	Poids des éléments non suspendus.
$P (\text{Kg})$	Poids des éléments suspendus.
$Q_i$	Coordonnées généralisées du système
$E_c (j)$	Energie cinétique du système.
$E_p (j)$	Energie potentielle du système.
$E_{p1}$	Energie potentielle emmagasinée dans la pneumatique avant
$E_{p2}$	Energie potentielle emmagasinée dans la pneumatique arrière

**Symboles****Désignation**

$E_{p3}$	Energie potentielle relative à la suspension avant
$E_{p4}$	Energie potentielle relative à la suspension arrière
$E_{pt}$	Énergie potentielle totale
$\mathcal{O}$ (N)	Force généralisées du système.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle
$\dot{q}_j$ (m / s)	Vitesse généralisée
$Q_{jR}$ (N)	Force généralisée
$Q_{jp}$ (N)	Force généralisée
$P_i$	Pulsation propre
$F_i$	Fréquence propre
$K_{ij}$	Coefficients de rigidité
$R_i$	Forces de résistance
$U_i$	Coefficients de dissipation
$C_{ij}$	Coefficients de dissipation
$S$	Degrés de liberté.
$C_i$	Coefficients de frottement visqueux.
$x_1$ (m)	Déplacement de l'essieu avant
$x_2$ (m)	Déplacement de l'essieu arrière
$x_3$ (m)	Déplacement linéaire de centre de gravité
$x_4$ (Rad)	Déplacement angulaire de centre de gravité
$\dot{x}_1$ (m/s)	Vitesse de l'essieu avant

**Symboles****Désignation**

$\dot{x}_2$ (m/s)	Vitesse de l'essieu arrière
$\dot{x}_3$ (m/s)	Vitesse linéaire de centre de gravité
$\dot{x}_4$ (Rad/s)	Vitesse angulaire de centre de gravité
$\ddot{x}_1$ (m/s)	Accélération de l'essieu avant
$\ddot{x}_2$ (m/s)	Accélération de l'essieu arrière
$\ddot{x}_3$ (m/s)	Accélération linéaire de centre de gravité
$\ddot{x}_4$ (Rad/s)	Accélération angulaire de centre de gravité
$V$ (m/s)	Vitesse de déplacement du véhicule
$h_0$ (m)	L'amplitude du ralentisseur
$L_0$ (m)	Longueur du ralentisseur
$F_{fr1}$	Force de frottement dans l'amortisseur avant
$F_{fr2}$	Force de frottement dans l'amortisseur arrière
$F_{el1}$	Force élastique de suspension avant
$F_{el2}$	Force élastique de suspension arrière
$T_1$ (s)	Temps de passage de l'essieu avant
$T_2$ (s)	Temps de passage de l'essieu arrière
$T_{max}$ (s)	Temps de passage de véhicule
$[M]$	Matrice d'inertie.
$[K]$	Matrice des coefficients réduits de rigidité.
$[C]$	Matrice des coefficients réduits de frottements
$[B]$	Matrice des coefficients d'amortissements des pneus
$[D]$	Matrice des coefficients de rigidités des pneus

## Table des matières

Introduction générale .....	01
Position du problème .....	03
Histoire de l'automobile .....	04

### **Chapitre 1 : Généralités sur les éléments essentiels**

1. 1 Voie (véhicule).....	07
1. 2 Suspension .....	07
1. 3 Différents types de suspension .....	08
1.3.1 Suspension de type McPherson .....	09
1.3.2 Suspension à pont oscillant .....	09
1.3.3 Suspension à double triangulation .....	10
1.3.4 Suspension à « bras tiré » (ou bras oscillant).....	11
1.3.5 Suspension télescopique.....	12
1.4 Qualité d'une suspension .....	12
1.5 Ressorts .....	13
1. 5.1 Ressorts à lame.....	13
1. 5.2 Ressorts hélicoïdaux .....	15
1.5.3 Barre de torsion .....	16
1. 6 Flexibilité .....	16
1. 6.1 Flexibilité variable .....	17
1.6.2 Doubles flexibilités .....	17
1.7 Amortisseurs.....	17
1. 8 Pneumatiques .....	18
1.8. 1 Chambre à aire .....	18
1.8. 2 Pneus .....	18
1. 9 Les pneus et la sécurité .....	20

1.9.1	La pression des pneus .....	20
1.9.2	Placement des pneus neufs .....	20

**Chapitre 2 : Etude dynamique du système**

2.1	Introduction .....	22
2.2	Systèmes matériels .....	22
2.2.1	Elément de masse ou d'inertie .....	23
2.2.2	Elément de raideur pur .....	23
2.2.3	Elément d'amortissement.....	23
2.3	Systèmes à n degrés de liberté .....	23
2.4	Coordonnées généralisées .....	24
2.5	Equation de LAGRANGE .....	24
2.6	Équations différentielles du mouvement oscillatoire du véhicule.....	26
2.6.1	Description .....	26
2.6.2	Composition des équations .....	26
2.6.3	Expression de l'énergie cinétique .....	27
2.6.4	Dérivées partielle de l'énergie cinétique .....	29
2.6.5	Expression de l'énergie potentielle .....	29
2.6.6	Dérivées partielles de l'énergie potentielle .....	30
2.7.	Ecriture matricielle du système d'équation du mouvement oscillatoire.....	32

**Chapitre 3 : Modélisation et l'analyse de systèmes mécaniques**

3.1	Introduction .....	34
3.2	Oscillations avec amortissement .....	35
3.3	Cas d'un fort amortissement .....	36
3.4	Modélisation .....	36
3.5	Détermination des pulsations propres .....	37
3.5.1	Détermination des coefficients du polynôme .....	38

3. 5.2	Méthode de Souriau .....	39
3. 6	Résolution de l'équation caractéristique par la méthode de « BAIRSTW » .....	49
3. 6.1	Description de la méthode .....	49
3. 6.2	Algorithme .....	40
3. 7	Remarque .....	42
3. 8	Les résultats .....	42

**Chapitre 4 : Résolution du système d'équations différentielle  
du mouvement vibratoire forcé**

4.1	Introduction .....	43
4. 2	Description de la méthode de RUNG-KUTTA .....	44
4. 2.1	Algorithme de la méthode .....	44
4. 2.2	Cas d'un système d'équations .....	45
4. 3.	Résolution du système d'équation différentielle associe au véhicule .....	47
4. 3.1	Changement de variables .....	47
4. 3.2	Représentation matricielle du système premier ordre .....	48
4.3.3	Détermination des forces perturbations .....	52

**Chapitre 5 : Résultats graphique et discussions**

5.1	Tracer les courbes .....	54
5.1.1	Géométrie dos d'âne $L_0 = 0.5$ m .....	54
5.1.2	Géométrie dos d'âne $L_0 = 1.5$ m .....	60
5.2	Discutions des résultats .....	66
5.3	Tracer les courbes sur la longueur 5m .....	69
5.4	Discutions des Résultats .....	76
	Conclusion générale .....	77
	Références bibliographie	

Annexe

## Introduction générale

De la bonne suspension d'un véhicule peut dépendre non seulement le confort, le malaise, la fatigue des passagers, la sécurité de la marchandise, mais également des anomalies mécaniques qui finissent par entraîner des détériorations mécanique.

Les vibrations qui agissent sur les véhicules peuvent provenir du moteur, de la transmission ou de l'état de la chaussée. Dont le caractère est aléatoire (non contrôlable). Par contre la nature physique des vibrations dues aux deux premières sources est déterminée.

Les inégalités de la surface de la route transmettent au véhicule des secousses violentes ; avant que les oscillations ne soient amorties, il peut se produire d'autres chocs provoquant des oscillations en résonances avec les premières et deviennent dans ce cas dangereuses.

Beaucoup d'études ont été universellement entreprises par les industriels sur les problèmes de la suspension dans le cadre de la théorie classique. Aujourd'hui (à l'heure actuelle), on utilise des méthodes d'analyse plus profondes, se basant sur le maximum d'informations de la nature physique de l'excitation extérieure. Certes que le volume de travail est assez élevé mais c'est l'exigence qui l'impose. Ces méthodes restent entourées toujours secret professionnel.

Ce travail comprend tous d'abord une étude dynamique dans laquelle nous nous sommes efforcés de modéliser un demi-véhicule

(Type : voiture dans les données techniques sont sur la page 27)

Le modèle dynamique de demi-véhicule à deux dimensions représenté par la figure (fig. 2.2) [1]. Page 27 est constitué d'un châssis de masse  $M_3$  et de moment d'inertie  $J_3$  autour de  $Gx$  ayant deux degrés de liberté (pompage et tangage) et de deux essieux avant et arrière de masses  $M_1$  et  $M_2$  ayant chacun un degré de liberté. Les paramètres physiques des suspensions avant et arrière, sont respectivement les raideurs des ressorts  $K_{S1}$  et  $K_{S2}$  et les amortissements  $C_{S1}$  et  $C_{S2}$  des amortisseurs. et les paramètres des pneus avant et arrière, sont respectivement les raideurs  $K_{p1}$  et  $K_{p1}$  et les amortissements  $C_{p1}$  et  $C_{p2}$

L'application des équations de la LAGRANGE nous permis d'écrire le système d'équation différentielle qui décrit le mouvement oscillatoire du véhicule.

Dans la deuxième étape, en utilisant les méthodes de calcul numérique, nous déterminons les valeurs des pulsations propres du modèle par la résolution de l'équation caractéristique relative au système d'équation relatif au mouvement libre.

La troisième partie de ce travail est consacrée à la résolution du système d'équation différentielle par la méthode connu de RUNGE KUTTA.

Cette dernière nous permet de déterminer sur un intervalle du temps  $t \in [a, b]$  fini les différentes valeurs des déplacements, vitesses et accélération pour chacune des coordonnées physiques  $x_i(t)$ .

Ainsi pour l'ensemble des valeurs  $t \in [a, b]$  en joignant les valeurs obtenue des déplacements  $x_i(t)$  et leurs dérivés pour chacune des valeurs  $(t)$ , on peut avoir une idée sur le comportement du véhicule durant le temps «  $t$  ».

## **Position du problème**

L'expérience a montré que les irrégularités de la surface d'une route engendrent les vibrations importantes sur les véhicules. Les ressorts à lames ou à boudin ont été utilisés dans l'industrie pour réaliser la suspension des véhicules, bien avant que leurs principes de fonctionnement n'aient été compris ; (c'est l'exemple des anciennes voitures qui sont bien suspendues au pompage, mais le rappel de tangage est beaucoup plus fort). Cela n'a pas empêché leur développement de s'étendre et de recouvrir le domaine de la suspension.

Notre démarche consiste à analyser le comportement vibratoire du véhicule sous l'action d'un obstacle, (type dos d'âne) à choisir un schéma théorique de représentation et à déterminer, les déplacements, les vitesses et les accélérations des différentes coordonnées du système pour différentes vitesses de déplacement du véhicule et pour différentes géométries de l'obstacle (dos d'âne). Nous pouvons à la lumière de l'analyse de ces résultats de localiser le plus influant sur le comportement dynamique du véhicule et d'éviter des dangers dont les conséquences peuvent être très graves .

## **Histoire de l'automobile**

L'histoire de l'automobile rend compte de la naissance et de l'évolution de l'automobile, invention technologique majeure qui a considérablement modifié les sociétés de nombreux pays au cours du XX<sup>e</sup> siècle. Elle prend naissance au XIX<sup>e</sup> siècle lorsque la technique fait la part belle à la vapeur comme source d'énergie pour ensuite s'orienter massivement vers le pétrole et le moteur à explosion.

L'automobile s'est progressivement imposée dans les pays développés comme le principal mode de transport pour la circulation des individus et des marchandises. Son industrie a été l'un des secteurs les plus importants et les plus influents depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale et son essor mondial en a été spectaculaire. 250 000 automobiles sont dénombrées en 1907, 500 000

En 1914 avec l'apparition de la Ford T et 50 millions avant la Seconde Guerre mondiale. Le parc automobile triple pendant les trente glorieuses et atteint les 300 millions de véhicules en 1975.

En 2007, la production annuelle mondiale de voitures passe le cap des 70 millions d'unités, et on estime que le parc pourrait dépasser le milliard en 2010.

L'invention de l'automobile n'a pas été le fait d'un seul inventeur mais « reflète une évolution qui a eu lieu aux quatre coins du monde » sur plus d'un siècle. On estime à près de 100 000 le nombre de brevets à l'origine de la voiture moderne.

L'automobile a révolutionné le transport et a entraîné de profonds changements sociaux, en particulier dans le rapport des individus à l'espace. Elle a favorisé le développement des échanges économiques et culturels et conduit au développement massif de nouvelles infrastructures (routes et autoroutes, parkings). Tout un univers culturel s'est construit à partir de sa diffusion comme objet de consommation grand public et elle représente aujourd'hui – à l'instar d'autres inventions du XX<sup>e</sup> siècle comme la radio, la télévision ou le réfrigérateur – un équipement largement considéré comme indispensable dans

les foyers des pays industrialisés. À la fois moyen de distinction sociale et instrument de loisir, l'automobile occupe une place éminente dans le mode de vie contemporain.

Ses effets sur la vie sociale ont été dès son apparition, et sont plus que jamais aujourd'hui, sujets de controverse. Perçue au début de sa diffusion massive dans les années 1920 comme un progrès en termes de mobilité et de confort, l'automobile a fait l'objet de critiques importantes tant dans ses conséquences environnementales (utilisation d'énergies non renouvelables, augmentation du taux de décès accidentel, pollution atmosphérique et sonore) que sociales (individualisme, obésité, impact sur l'aménagement du territoire). Son emploi est venu concurrencer les modes de transport collectifs comme les tramways en ville ou le train pour les trajets interurbains.

Au tournant du XX<sup>e</sup> siècle et du XXI<sup>e</sup> siècle, l'automobile, qui a déjà été confrontée aux différents chocs pétroliers, doit faire face désormais à la raréfaction inéluctable du pétrole, au réchauffement climatique et aux restrictions d'émissions polluantes imposées à l'industrie dans son ensemble. À cela s'ajoute la crise financière mondiale qui touche de plein fouet l'industrie automobile et dont certains grands groupes mondiaux rencontrent de très sérieuses difficultés.

À la fin du XX<sup>e</sup> siècle, l'automobile fait désormais pleinement partie de la société. Les pays développés dénombrent environ une automobile par habitant, une densité qui n'est pas sans poser de problèmes. Ainsi, depuis les années 1970, l'automobile suscite de nombreuses polémiques, principalement en raison de son impact négatif sur l'environnement et des problèmes de sécurité routière à l'origine d'une des premières causes de mortalité de la population de ces pays.

Les États mettent en place de sévères mesures à l'encontre des chauffards, octroyant le droit aux gendarmes de sanctionner voire de retirer sur le champ le permis d'un automobiliste. Des mesures de sécurité vont également être prises dans la conception des automobiles, afin de diminuer ce taux de mortalité.

Au début du XXI<sup>e</sup> siècle, un mouvement international dénommé *Carfree* (« libéré de la voiture ») voit le jour. Ce dernier soutient la mise en place de villes sans voitures et promeut des exemples de quartiers sans voitures comme le quartier Vauban de Fribourg-en-Brisgau. Ce mouvement s'intègre dans un activisme antivoiture de plus en plus virulent. La perception

de l'automobile semble entamer une véritable évolution. L'achat d'un véhicule perd de son caractère statutaire et on voit émerger des solutions d'autopartage, de covoiturage, voire de véhicules en libre service avec un système d'abonnement dans les grandes métropoles. [2]

## Chapitre 1

### Généralités sur les éléments essentiels

#### 1. 1 Voie (véhicule)

La voie est une dimension fondamentale d'un véhicule.

Elle indique la distance entre les deux roues d'un même essieu. Il ne faut pas confondre la voie et la largeur du véhicule qui est une dimension de carrosserie.

De façon précise, la voie mesure la distance entre les centres des zones de contact des roues d'un même essieu, mesurée véhicule vide.

Il est fréquent qu'un véhicule ait une voie avant et une voie arrière différentes. Selon le type de suspension, la voie varie avec la charge.

L'autre dimension fondamentale du véhicule est l'empattement.

#### 1. 2 Suspension

Les suspensions sur un véhicule, sont les éléments permettant de relier les masses non suspendues (typiquement la roue, les systèmes de freinage, d'entraînement de roue, etc.) aux masses suspendues (typiquement le châssis, le moteur et tous les composants du véhicule fixés au châssis).

L'utilisation de la suspension est imposée par les irrégularités de la surface sur laquelle se déplace le véhicule. Elle en diminue l'impact sur l'engin, évitant des ruptures et une usure excessive, améliorant le confort de conduite et maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités : condition indispensable à la tenue de route. Par ailleurs le fait qu'un véhicule possède une masse nécessite l'utilisation d'un mécanisme de rappel pour éviter que le système ne s'affaisse indéfiniment au fur et à mesure des aspérités du terrain.

Ainsi, la suspension se compose d'un dispositif de liaison entre les « masses non suspendues » et les « masses suspendues », d'un ressort et éventuellement d'un amortisseur. Dans certains cas, le bras de suspension est aussi appelé « triangle de suspension », dénomination due à sa forme.

On distingue aussi les suspensions « indépendantes », sur un même essieu la partie gauche est séparée de la partie droite, des suspensions « essieux rigide » où les parties gauche et droite sont liées.

Certaines explications peuvent nécessiter la lecture au préalable de l'article géométrie de suspension notamment pour les véhicules terrestres [3].

### 1. 3 Différents types de suspension

#### Glossaire

- porte-fusée : aussi appelé « porte-moyeu », c'est la partie mécanique qui supporte le roulement mécanique et donc indirectement le moyeu (ou fusée). Elle supporte également la partie fixe du freinage. C'est aussi cette pièce qui est orientée lors d'une action sur la direction.
- triangle : bras de suspension typique des suspensions Macpherson et double triangulation.
- train avant/arrière : système complet de suspension avant ou arrière (incluant les parties mécaniques de gauche et de droite).
- barre anti-roulis : système limitant le roulis du véhicule en assurant une connexion souple entre les composants gauche et droit d'un train.

On distingue un grand nombre de suspensions. En pratique, leur utilisation dépend en grande partie de la charge à transporter, des coûts de fabrication et du type de véhicule. [4]

### 1. 3.1 Suspension de type McPherson

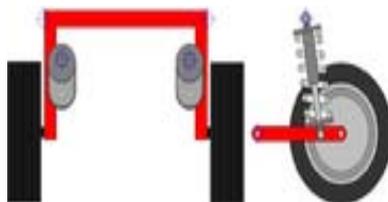


**Figure 1.1** - Suspension de type Mc Pherson [5]

C'est la plus utilisée des suspensions en automobile aujourd'hui, elle est de type « indépendante ». Elle se compose d'un bras de suspension (ou triangle) unique *Fig.1.1* La jonction entre les masses suspendues et non suspendues est effectuée par une rotule côté roue et un axe côté châssis (pour permettre différents réglages). Un système d'amortisseur et ressort est fixé de manière rigide au porte-fusée.

Ce type de suspension est très répandu dans la voiture de série, le système est simple donc peu coûteux. Il est également très efficace dans la mesure où il maintient le pneu perpendiculaire au sol ; quand l'automobile prend du roulis, il y a « prise de carrossage négatif à l'enfoncement ». Cela assure une très bonne tenue de route latérale. Les trains avant des voitures de « Monsieur tout le monde » en sont équipés. On y adjoint généralement une barre anti-roulis pour améliorer le comportement physique du châssis.

### 1. 3.2 Suspension à pont oscillant



**Figure 1.2** - Suspension de type pont oscillant utilisé sur le train arrière automobile [6]

Ce type de suspension *Fig.1.2* est très exploité en automobile, il est de type « essieu rigide ». Il n'y a qu'un seul bras de suspension en forme de fourche. La partie entre les deux branches est plus ou moins souple en torsion ; cette souplesse intervenant pour limiter la prise de roulis. Les masses non suspendues gauche et droite sont fixées sur le pont arrière, en bout des branches. On utilise un axe monté sur roulement mécanique pour les roues. Les masses suspendues sont fixées à la partie entre les deux branches à l'aide d'un axe. Un système d'amortisseur et ressort est fixé à l'aide d'une rotule sur le bout des branches.

Ce type de suspension se trouve sur les trains arrière de la voiture de série. La « prise de carrossage » est nulle à l'enfoncement de la suspension. C'est une suspension économique, ce qui explique son utilisation. La difficulté de mise en place d'une direction efficace interdit son utilisation sur le train avant. Sur certains types de voiturettes légères à propulsion, le moteur peut y être fixé. Cette suspension s'accorde particulièrement lorsque le système nécessite une adhérence longitudinale (motricité typiquement pour les véhicules à propulsion).

### 1. 3.3 Suspension à double triangulation



Figure 1. 3 - Suspension de type double triangulation [5]

Suspension de type double triangulation *Fig.1.3* utilisée en compétition automobile C'est ce qui se fait de mieux en automobile, elle est de type « indépendante ». À l'instar des suspensions Mac Pherson, on y exploite des triangles. Mais cette fois-ci, on en utilise deux, un dit supérieur et l'autre dit inférieur (par rapport au sol). Le porte-fusée est raccordé par deux rotules, une au triangle inférieur, l'autre au triangle supérieur. Le châssis est raccordé par quatre rotules, soit deux par triangle. Un système d'amortisseur et ressort est fixé à l'aide d'une rotule sur un des deux triangles. On appelle parfois cette suspension « suspension à parallélogramme déformable ».

Ce type de suspension se retrouve sur la majorité des voitures de compétition et les voitures haut de gamme (GT). Son intérêt réside dans l'infinité de réglages possible en fonction des points d'ancrage des différentes rotules. Ainsi, le carrossage, la chasse, l'anti-plongée, etc., sont réglables et peuvent même être variables (voir géométrie de suspension). Mais aussi, à l'inverse de la suspension de type Macpherson, elle assure une meilleure motricité en fonction des réglages appliqués au train. Comme pour la suspension Mac Pherson, on associe une barre anti-roulis pour améliorer le comportement physique du châssis.

### 1. 3.4 Suspension à bras tiré (ou bras oscillant)

Elle n'est pas très utilisée en automobile, sauf pour les charges lourdes (typiquement les remorques de camion et les chars militaires), elle est de type « indépendante ». Toutefois, son utilisation est massive pour le train arrière des véhicules de type motocyclette, où elle a remplacé la suspension coulissante à l'arrière. Elle est constituée d'un bras de suspension ; la roue et le châssis y sont chacun fixés à l'aide d'un axe. Un système d'amortisseur et ressort est fixé à l'aide d'une rotule sur le bras de suspension.

Ce type de suspension *Fig.1.4* est très compact, ce qui permet l'utilisation de bras de suspension de grande dimension et ainsi de soutenir une très forte charge. Il n'y a pas de « prise de carrossage » à l'enfoncement d'où l'utilisation pour la motocyclette et les véhicules chenillés. Ce type de suspension assure également une excellente adhérence longitudinale (motricité).



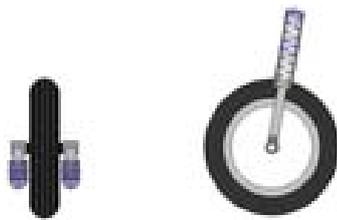
**Figure 1.4 -** Suspension à « bras tiré » [7]

### 1. 3.5 Suspension télescopique

C'est la suspension réservée au domaine de la motocyclette *Fig. 1.5* et de l'aviation *Fig. 1.6*. Elle est installée en utilisant une paire système d'amortisseur et ressort sur le train avant des motocyclette pour permettre une orientation de la roue et limiter la déformation lors des contraintes latérales. Dans le domaine de l'aviation, on utilise un seul système d'amortisseur et ressort, l'orientation étant assurée à l'aide de deux petits bras de suspension (système appelé compas) ne jouant pas d'autre rôle que le guidage (cas également de certaines motos BMW).

Cette suspension est privilégiée pour une raison de légèreté, primordiale en aviation. Les suspensions n'aidant pas au vol, il n'est pas nécessaire d'alourdir l'aéronef avec.

Pour les mêmes raisons de légèreté, ce type de suspension est utilisé sur les motocyclettes, bien que les raisons physiques diffèrent. Dans ce cas, le but est de réduire les masses non suspendues, le train s'en trouvant plus réactif (moins d'inertie). Notons, à ce sujet, que des essais de suspension de type double triangulation ont été tentés sans succès sur motocyclette, l'intérêt étant de limiter la diminution de la chasse à l'enfoncement (voir géométrie de suspension).



**Figure 1.5** - *Suspension de type fourche télescopique Pour motocyclette*



**Figure 1.6** - *Suspension de type télescopique utilisé dans le domaine de l'aviation (russe)*

### 1. 4 Qualités d'une suspension

Une bonne suspension doit assurer :

- La stabilité du véhicule en mouvement, en particulier par le maintien de certaines caractéristiques géométriques de roues et de l'ensemble du véhicule par exemple la voie et les angles qui intéressent plus spécialement le train avant doivent varier aussi

peu que possible, les bons systèmes de suspension doivent donc réduire l'importance de ces vibrations et les empêcher si possible d'apparaître.

- Le maintien du contact des roues au sol.
- La protection des passagers, de la voiture et du matériel transporté contre les chocs et vibrations pouvant prendre naissance pendant le chemin.

Les limitations des oscillations en déplacements accidentels de toutes orientations seront d'autant plus faciles à obtenir que le rapport du poids  $P'$  des éléments non suspendus au poids  $P$  des éléments suspendus, c'est-à-dire  $\frac{P'}{P}$  sera petit [8]. On entend par éléments non suspendus les essieux le pont, les roues et les pneumatiques qui soutiennent les éléments suspendus, les quels représentent le reste du véhicule (Cadre, Carrosserie, partie mécanique ainsi que passagers et marchandise).

La suspension nous conduit à décrire les différents systèmes existants et dans la quelle Conditions ils remplissent leurs rôles.

## 1.5 Ressorts

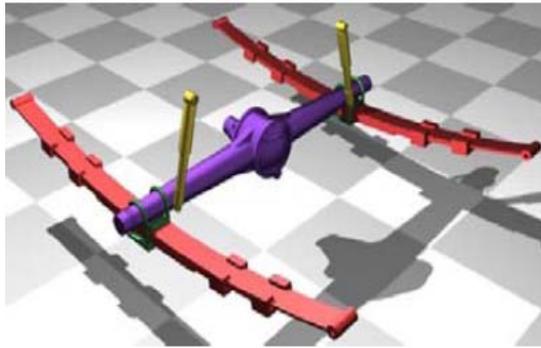
Dans une suspension, les ressorts fournissent l'effort s'opposant à l'effet du poids. La technologie est liée à la géométrie de la suspension et au savoir faire du moment.

Ce sont les éléments élastiques qui jouent un rôle essentiel dans les nombreuses suspensions.

### 1. 5.1 Ressorts à lame

La suspension avec des ressorts à lames *Fig. 1.7* est très ancienne et était déjà largement utilisée par les carrioles, chariots et véhicules hippomobiles. L'avantage de cette solution est la simplicité de l'installation, l'essieu étant directement tenu et guidé par le ressort.

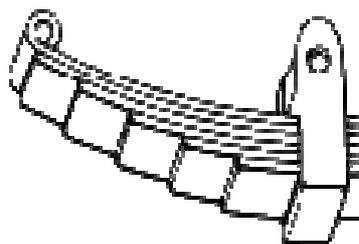
Le ressort à lames consiste en une série de lames superposées de longueur de plus en plus faible et disposé selon la forme d'une pyramide inversée. Les extrémités de la lame la plus longue constituent les points d'ancrage au véhicule alors que la roue est bridée au centre des lames.



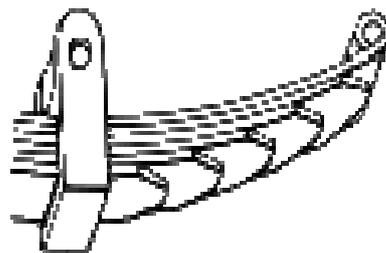
**Figure 1.7-** *Essieu rigide: ressorts à lames*

On peut décrire ainsi les caractéristiques du ressort :

- La plus longue lame, ou lame maîtresse, doit avoir une section suffisante pour résister seule à l'effort tranchant, ainsi que pour permettre la liaison avec les éléments extérieurs. Son extrémité n'est donc jamais triangulaire mais toujours façonnée en fonction des besoins ;
- Pour éviter que le ressort « baille », c'est-à-dire que les lames décollent, on donne à ces dernières une courbure qui croît de la lame maîtresse, la plus longue, aux plus courtes. Il faut alors que les épaisseurs des lames aillent en décroissant, sinon on dépasserait de plus en plus largement la limite d'élasticité ;
- L'extrémité des lames n'est jamais taillée en pointe, mais coupée droite *Fig. 1.8*, terminée en trapèze *Fig. 1.9* ou encore amincie et arrondie selon un profil parabolique *Fig. 1.10* .



**Figure 1.8 -** *Lames droites*



**Figure 1.9 -** *Lames trapézoïdales*



Figure 1.10 - Lames à extrémités paraboliques



Figure 1.11 - Ressort à lames sur un véhicule

## 1. 5.2 Ressorts hélicoïdaux

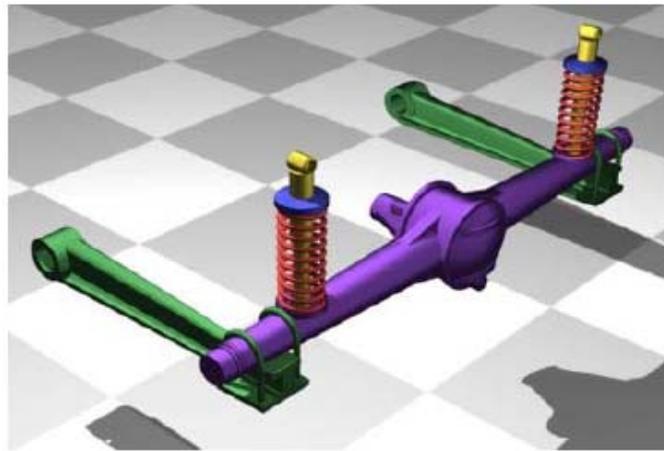


Figure 1.12 - Essieu rigide: ressorts à Boudin [9]

Appelés aussi ressort à boudin *Fig.1.12* ces ressorts sont les plus répandus aujourd'hui. Leur géométrie et la gamme de matériaux disponible permet une bonne compacité. De plus il est facile de leur associer un amortisseur, disposé coaxialement et ancré aux mêmes points que le ressort.

Nécessairement, ils doivent être couplés à un mécanisme de suspension liant la roue au châssis, et ne peuvent pas, comme dans le cas du ressort à lames assurer seuls cette liaison mécanique.

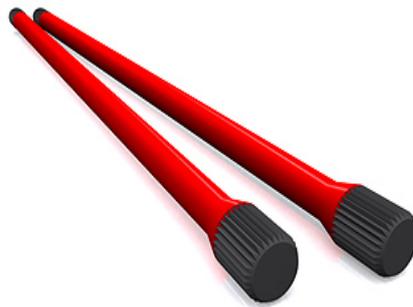
La raideur de tels ressorts dépend du matériau, du diamètre du fil employé, de celui de son enroulement et du nombre de spires. Il est très facile d'obtenir une gamme étendue de raideur. Cette solution est donc très avantageuse.

Leurs avantages sont évidents :

- Encombrement réduit.
- Masse relativement faible
- Construction facile
- Entretien très limités

### 1. 5.3 Barre de torsion

Plus compacte que le ressort hélicoïdal, mais plus longue *Fig. 1.13* cette solution est adaptée au train arrière des petits véhicules à traction et à fond plat. C'est la solution retenue pour la Renault 4. Il peut s'agir d'une seule barre soutenant les deux roues, mais aussi de deux barres indépendantes. Dans ce cas, cela impose une différence d'empattement entre les deux cotés du véhicule, si la longueur de la barre est supérieure à la demi- largeur du véhicule, comme pour la Renault 5



**Figure 1.13** - Barre de torsion. [10]

### 1. 6 Flexibilité

La notion de flexibilité variable et double se rattachent au comportement général de la suspension.

Lorsqu'elle intervient, toute charge d'un véhicule entraîne des oscillations des ressorts dont la période dépend en particulier de leur flexibilité.

Les oscillations peuvent incommoder les passagers qui sont déplacés verticalement vers le haut et vers le bas dans le cas le plus simple.

Les charges imposés au même véhicule sont variables les nombres de passagers également, alors le véhicule doit être adapte à cette situation.

### 1. 6.1 Flexibilité variable

Un dispositif complémentaire réduit les périodes d'oscillation. Des tirants liés au châssis par le milieu des lames de ressorts diminuent la flexibilité des lames lorsque la charge augmente.

### 1. 6.2 Doubles flexibilités

Deux ressorts intervenant successivement sont mis en place, l'un pour les charges légères et l'autre ajoute son action à celle du premier lorsque la charge totale augmente.

## 1. 7 Amortisseurs

Toutes les voitures modernes sont livrées avec des amortisseurs dont le but est d'améliorer la suspension et le confort.

L'amortisseur est fixé, d'une part au châssis, et d'autre part, à l'essieu ou au ressort, est destiné à amortir rapidement les oscillations de la voiture sur mauvaise route. On constate, en effet, que les ressorts, après avoir travaillé au passage d'un obstacle sur la route, ne reviennent à leur position d'équilibre qu'après un certain nombre d'oscillations qui sont susceptibles de s'amplifier d'ailleurs au passage d'un nouvel obstacle. Ces oscillations sont nuisibles au confort et à la bonne tenue de route. Le temps pendant lequel le ressort se détend, après avoir été comprimé au passage d'un obstacle, produit ce que l'on appelle le coup de raquette qui a un très mauvais effet sur la conduite de la voiture. Les amortisseurs auront donc pour but de produire un effet résistant s'opposant à la déformation du ressort. Il existe des amortisseurs travaillant dans les deux sens appelés aussi durcisseurs, ou seulement dans le sens de la détente d'un ressort. Il existe de nombreux types d'amortisseurs : les amortisseurs à friction, les amortisseurs à courroie et les amortisseurs hydrauliques. [11]

Actuellement il y'a des amortissements à un système double effets avec amortissement généralement moins grand en compression qu'en détente pour des raisons de confort.

Lors d'un choc en compression, la force d'amortissement tend à augmenter l'accélération de la masse suspendue, alors qu'en extension (rebond) la force de dissipation est nécessaire pour dissiper l'énergie accumulée dans le ressort.

## 1. 8 Pneumatiques

Les pneumatiques se composent de deux parties essentielles qui sont :

- La chambre à air munie d'une valve spéciale pour l'introduction de l'air et l'enveloppe.

- Le pneu est le seul lien entre la voiture et le sol. Son adhérence dépend de sa composition (caoutchouc) mais surtout de son état, du revêtement de la route et des conditions météorologiques. C'est donc un élément essentiel pour la sécurité et les performances de la voiture.

### 1. 8.1 Chambre à Air

Toute chambre à air se compose d'un boyau en forme de tore en caoutchouc bien homogène, élastique et résistant. Actuellement les chambres sont moulées. Leurs sections doivent être circulaires pour pouvoir épouser les enveloppes et éviter des usures anormales, des pincements ou des éclatements. Un trou situé sur la circonférence intérieure de la chambre permet d'y fixer la valve destinée à l'introduction de l'air sous pression.

### 1. 8.2 Pneu

Enveloppe : L'enveloppe extérieure du pneu s'use en contact de la route. Cette enveloppe en caoutchouc d'épaisseur variable, cuit ou vulcanisé sur les plis. La vulcanisation est un procédé qui consiste à chauffer le caoutchouc sous pression. Ce procédé qui moule le caoutchouc selon une forme et une sculpture décidées, tout en lui conférant les propriétés requises pour une bonne flexibilité et une longue durée. La bande de roulement en caoutchouc du pneu est plus épaisse que l'enveloppe et se présente en divers motifs qui assurent un bon contact avec la route, surtout quand elle est mouillée, enneigée ou boueuse.

Les Plis du Pneu : Forment la structure interne résistante et flexible du pneu. Un pli est fait de rayonne, de nylon, de polyester, etc....rempli de caoutchouc. Les plis de carcasse du pneu sont enroulés autour d'une série de fils en acier, ce qui empêche que le pneu ne se déjante et quitte la roue. Plusieurs types récents de pneus sont munis d'une carcasse en plis de polyester et d'une fausse semelle en fibre de verre. Les plis de la carcasse sont généralement disposés de deux façons : ils forment soit une carcasse diagonale soit une carcasse radiale.

### a) Définitions

Roue : c'est l'ensemble jante + pneu

Jante : c'est la partie métallique de la roue. En général, elle est en acier mais il arrive qu'elle soit en alliage léger (aluminium, carbone,...). Cet alliage est plus léger et résistant mais en cas de choc, il est très cassant.

Pneu : c'est la partie "élastique" de la roue, constitué essentiellement par une sorte de caoutchouc et une structure métallique. Son choix est important pour l'adhérence du véhicule.

Pression : c'est la pression de gonflage. Elle s'exprime en bar et est propre à chaque modèle de voiture. Dans d'autres pays elle est également exprimée en PSI (US) ou en Pascal

### b) Notation P-Métrique

Il existe plusieurs modèles de pneumatiques mais la référence commune ressemble à "P xxx/yy R rr" (appelé P-Métrique) :

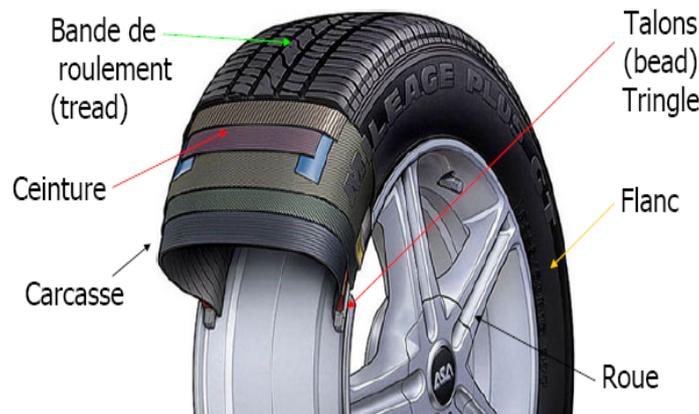


Figure 1.14 - pneu [12]

### REFERENCE

P: référence à la norme P-Métrique établie en 1977

185 : c'est la largeur du pneu en millimètre (185 mm).

60 : c'est le pourcentage entre la hauteur du pneu et sa largeur. Ici, la hauteur est de  $185 \times 60\% = 111$  mm.

R : La structure du pneu. R comme Radial, celle qui est la plus commune.

14 : c'est le diamètre intérieur du pneu (ou le diamètre extérieur de la jante) en pouce (unité de mesure anglaise). Un pouce = 2,54 cm. Ici, la jante fait 350 mm de diamètre.

88 : c'est l'indice de charge du pneu, il est en général suivi de l'indice de vitesse.

V : c'est l'indice de vitesse qui indique la vitesse maximum possible avec le pneu. Optionnel : M/S ou M+S (Mud an Snow). Le pneu est prévu pour rouler dans la boue et la neige.

## **1. 9 Les pneus et la sécurité**

### **1. 9.1 La pression des pneus**

Un pneu sur-gonflé, ainsi qu'un pneu sous-gonflé provoque une diminution de l'adhérence qui peut être dangereuse en virage ou au freinage. Il est donc conseillé de vérifier régulièrement la pression des pneus. Il est aussi conseillé de légèrement surgonfler les pneus au cas où l'on transporterait de lourdes charges pour éviter que le pneu ne se plie sur les bords. Un pneu sous-gonflé subit une déformation plus importante des flancs et de la bande de roulement. Les principales conséquences sont une usure plus rapide du pneumatique, un risque augmenté d'éclatement et une augmentation de la consommation de carburant du véhicule. Il faut noter qu'un pneu trop gonflé s'use également plus rapidement au centre de la bande de roulement et est plus sensible aux arrachements de gomme (patinage notamment).

### **1. 9.2 Placement des pneus neufs**

Pour une automobile il est généralement conseillé de placer les moins usés des quatre pneus à l'arrière. L'essieu avant est directeur, ainsi, lorsque l'on tourne le volant, ce sont eux qui donnent la direction au reste du véhicule. Les pneus arrière suivent. Le conducteur n'a conscience que de l'adhérence de ses pneus avant. Il peut éventuellement corriger son mouvement ou ralentir l'allure s'il sent ses pneus glisser dans un virage par exemple. Si les pneus arrière sont plus usés, il se peut que les pneus avant soit suffisamment adhérents pour virer mais pas les pneus arrière, et le sur-virage a de grandes chances de survenir. Si ceux-ci glissent, le véhicule peut partir en tête à queue ou sortir de la route. Néanmoins, un véhicule dont les pneus avant offrent une adhérence inférieure à celle des pneus arrière aura une tendance au sous-virage, c'est-à-dire à partir tout droit. Selon l'état des pneus et la dynamique du véhicule (les véhicules récents ayant une tendance nette au sous-virage) cela peut se révéler contre-productif, notamment sur route sinueuse. En outre des dispositifs de correction de trajectoire tels que l'ESP tendent à faciliter la maîtrise de la trajectoire du véhicule pour des conducteurs n'ayant pas l'expérience des situations de perte de contrôle et d'adhérence

## Chapitre 2

### Etude dynamique du système

#### 2. 1 Introduction

L'étude de vibrations mécanique se confond avec l'examen du mouvement des éléments d'un système autour de leurs positions respectives d'équilibre stable.

Cependant ce mouvement peut se faire de diverse façon :

Libre sans amortissement [13], libre avec amortissement [14] ou encore il est possible de faire intervenir des forces soient intérieures, soient extérieures au système considéré.

L'ensemble de ces caractéristiques va définir nécessairement le moule mathématique dans lequel le système devra être compris et par la même occasion décidera du comportement de ce même système sous des conditions bien précises.

Le problème générale de la dynamique des systèmes à "S" degrés de liberté consiste en la détermination des "S" fonctions du temps  $q(t)$ .

Dans le cas simple on applique le principe fondamental de la dynamique à chacun des solides constituants. Il existe une méthode générale préférable dans les cas plus complexes due à "LAGRANGE".

Ce chapitre est consacré à l'étude dynamique du système (modélisation et établissement des équations différentielles du mouvement oscillatoire du véhicule dans le plan vertical).

Toute fois il apparaît dès à présent qu'un certain nombre de facteurs différent vont intervenir et il est donc intéressant de les passer en revue.

## 2. 2 Systèmes matériels

Le système matériel est un assemblage de solide parfait lié à un bâti constituant le solide de référence.

Le mouvement et la position de chaque élément du système dépend du mouvement et de position de tous les autres.

Nous distinguons trois sortes d'éléments dans un système matériel.

### 2. 2.1 Élément de masse ou d'inertie

Solide parfait indéformable qui n'emmagasine de l'énergie que sous forme d'énergie cinétique.

### 2. 2.2 Élément de raideur pur

Élément de masse négligeable ne pouvant emmagasiner de l'énergie que sous forme d'énergie potentielle élastique de déformation.

### 2. 2.3 Élément d'amortissement pur

Élément de masse négligeable, susceptible de dissiper de l'énergie résistant aux déplacements relatifs des points d'attaches de ces éléments proportionnellement aux vitesses de ces déplacements.

restreignait fortement l'application des méthodes exactes dans le domaine au dynamique des véhicules, car il conduit fréquemment à des problèmes très complexes. Les seuls modèles qui pouvaient alors être résolus étaient parfois tellement simplifiés que la généralité et la qualité de leurs résultats en souffraient.

## 2. 3 Systèmes à $n$ degrés de liberté

On considère un système mécanique possédant  $n$  degrés de liberté, tel que chacun de ses oscillateurs peut vibrer autour d'une position d'équilibre en réagissant avec les oscillateurs voisins. On doit définir un nombre de variables de position égal au nombre de degrés de liberté du système. En général, les oscillations libres de ce système ne sont pas harmoniques. Cependant, dans certaines conditions, les masses peuvent exécuter des oscillations harmoniques à la même fréquence, les masses étant en phase ou en opposition par rapport à l'une d'entre elles prise comme une référence.

On dit alors que l'on a affaire à un mode propre du système, et la fréquence d'oscillation est une fréquence propre. Si le système vibre suivant un mode propre, on dit qu'on le normalise en posant l'amplitude de l'un des oscillateurs égale à l'unité. Il y a autant de modes (et de fréquences) propres du système que de degrés de liberté.

Dans le cas général, le mouvement du système est une combinaison linéaire des mouvements correspondant à chaque mode propre. [15]

## 2. 4 Coordonnées généralisées

On appelle coordonnées généralisées le nombre minimum de paramètres quelconques  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , qu'il faut déterminer pour fixer uniquement la position de tous les points du système et leurs dérivées généralisées  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  c'est-à-dire les vitesses généralisées.

Le nombre minimum de coordonnées est appelé "degré de liberté du système".

## 2. 5 Equation de LAGRANGE

Si l'on choisit  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ) comme coordonnée généralisée, on peut définir pour un système linéaire à  $S$  degrés de liberté :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_j} = Q_j^p + Q_j^R \quad (2-1)$$

Ou

$Q_j^p$  : Force généralisée, conforme aux forces des rappels "P<sub>i</sub>".

Pour déterminer ces forces [16] on écrit l'expression de l'énergie potentielle du système sous la forme suivante :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s K_{ij} q_i q_j \quad (2-2)$$

$K_{ij}$  : sont les coefficients de rigidités (raideurs ou constantes élastique).

Chaque force généralisée se détermine comme la dérivée partielle de l'énergie potentielle.

$$Q_{jP} = -\frac{\partial E_P}{\partial q_j} \quad (2-3)$$

L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \quad (2-4)$$

$a_{ij}$  : Coefficients d'inerties.

Pour déterminer le dernier membre dans l'équation de "LAGRANGE" nous admettons que les forces résistantes ( $R_i$ ) sont proportionnelles aux vitesses de chaque coordonnée du système vibrant. [17]

La fonction de dissipation prend la forme suivante :

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{v_i v_i^2}{2}$$

$v_i$  : Coefficient de dissipation.

Ou

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \quad (2.5)$$

Alors les forces généralisées résistantes sont :

$$Q_{1R} = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_1}$$

$$Q_{2R} = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_2}$$

$$Q_{sR} = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_s}$$

$C_{ij}$  : Coefficient de dissipation.

## 2. 6 Equations différentielles du mouvement oscillatoire du véhicule

### 2. 6. 1 Description

Le véhicule page 28 ainsi présenté (fig. 2.2) se compose de trois masses qu'on suppose concentrées.

$M_1$ : masse de l'essieu avant (pont).

$M_2$ : masse de l'essieu arrière (pont).

$M_3$ : masse du châssis et de la carrosserie (compris le moteur).

En outre le véhicule comprend un certain nombre de ressorts et de pneus.

$K_{s1}, K_{s2}, K_{p1}, K_{p2}$ : sont les coefficients de rigidités.

$C_{s1}, C_{s2}, C_{p1}, C_{p2}$  : sont les coefficients d'amortissements

Les mouvements possibles de cet ensemble roulant sont :

- mouvement de translation avant et latérale en rotation autour d'un axe verticale, ce sont les mouvements que peut contrôler le conducteur.
- mouvement de translation vertical (mouvement de pompage) oscillatoire angulaire faisant monter et descendre l'avant et l'arrière du véhicule (mouvement de tangage).
- mouvement de rotation et oscillatoire angulaire autour d'un axe longitudinal (mouvement de roulis).

Nous nous limitons dans cette étude aux vibrations dans le plan vertical c'est-à-dire aux mouvements de pompage et de tangage du châssis.

### 2. 6. 2 Composition des équations

Le schéma de calcul fig.2.2 page 27. Fait apparaître quatre degré de liberté dont les coordonnées généralisées.

Les équations de LAGRANGE pour le présent modèle s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.6)$$

$E_c$  : Energie cinétique du système.

$E_p$  : Energie potentielle du système.

$\theta$  : Force généralisées du système.

Q : Coordonnées généralisées du système.

S : Degrés de liberté (S=4).

### 2. 6.3 Expression de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \left( M_1 \cdot \dot{X}_1^2 + M_2 \cdot \dot{X}_2^2 + M_3 \cdot \dot{X}_3^2 + J \cdot \dot{X}_4^2 \right) \quad (2.7)$$

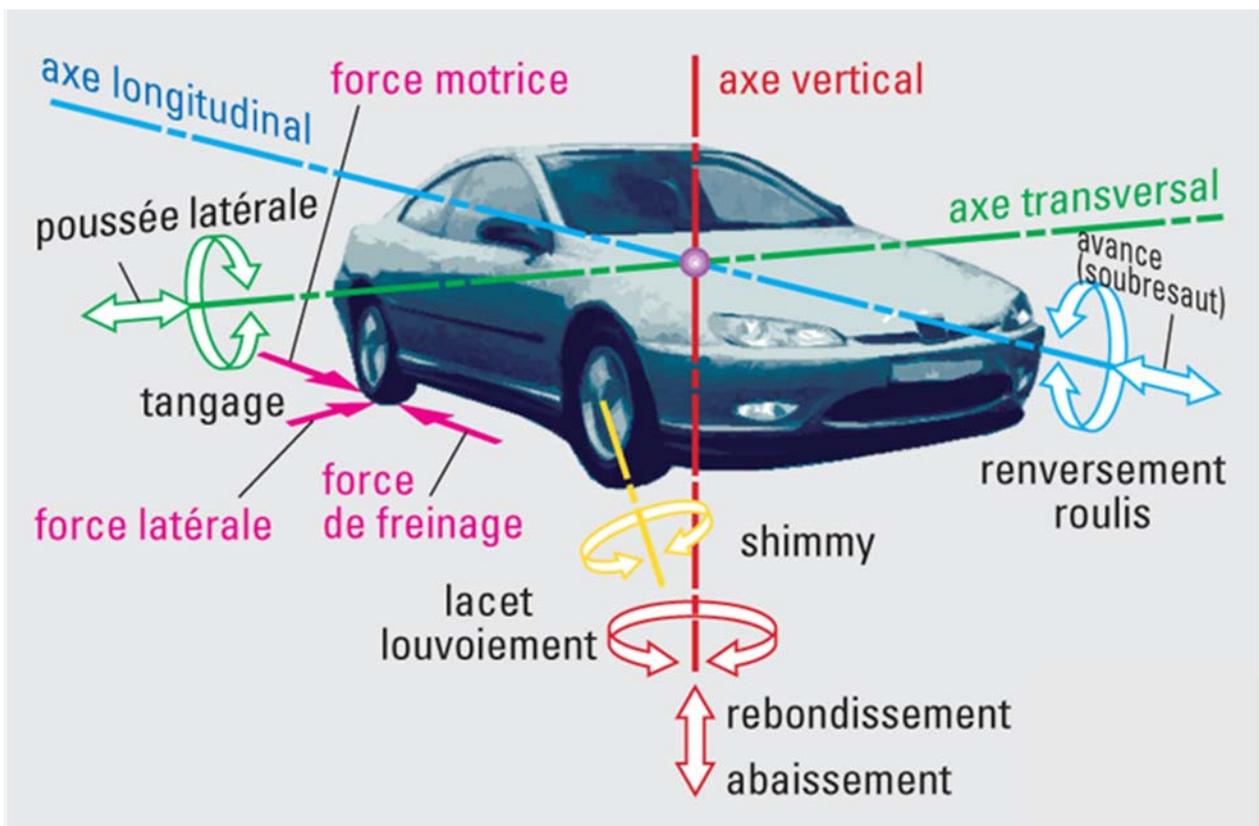


Figure 2.1 - Mouvements du véhicule et efforts qui lui sont appliqués [18]

Donné technique:

$$L=2.15\text{m}, L_1=1.00\text{m}, L_2=1.15\text{m}$$

$$C_{s1} = 8150 \text{ N.s/m}$$

$$C_{s2} = 7080 \text{ N.s/m}$$

$$C_{p1} = 5500 \text{ N.s/m}$$

$$C_{p2} = 5000 \text{ N.s/m}$$

$$K_{s1} = 25000 \text{ N/m}$$

$$K_{s2} = 21739 \text{ N/m}$$

$$K_{p1} = 800000 \text{ N/m}$$

$$K_{p2} = 800000 \text{ N/m}$$

$$M_1 = 55 \text{ Kg}$$

$$M_2 = 55 \text{ Kg}$$

$$M_3 = 900 \text{ Kg}$$

$$J = 2000$$

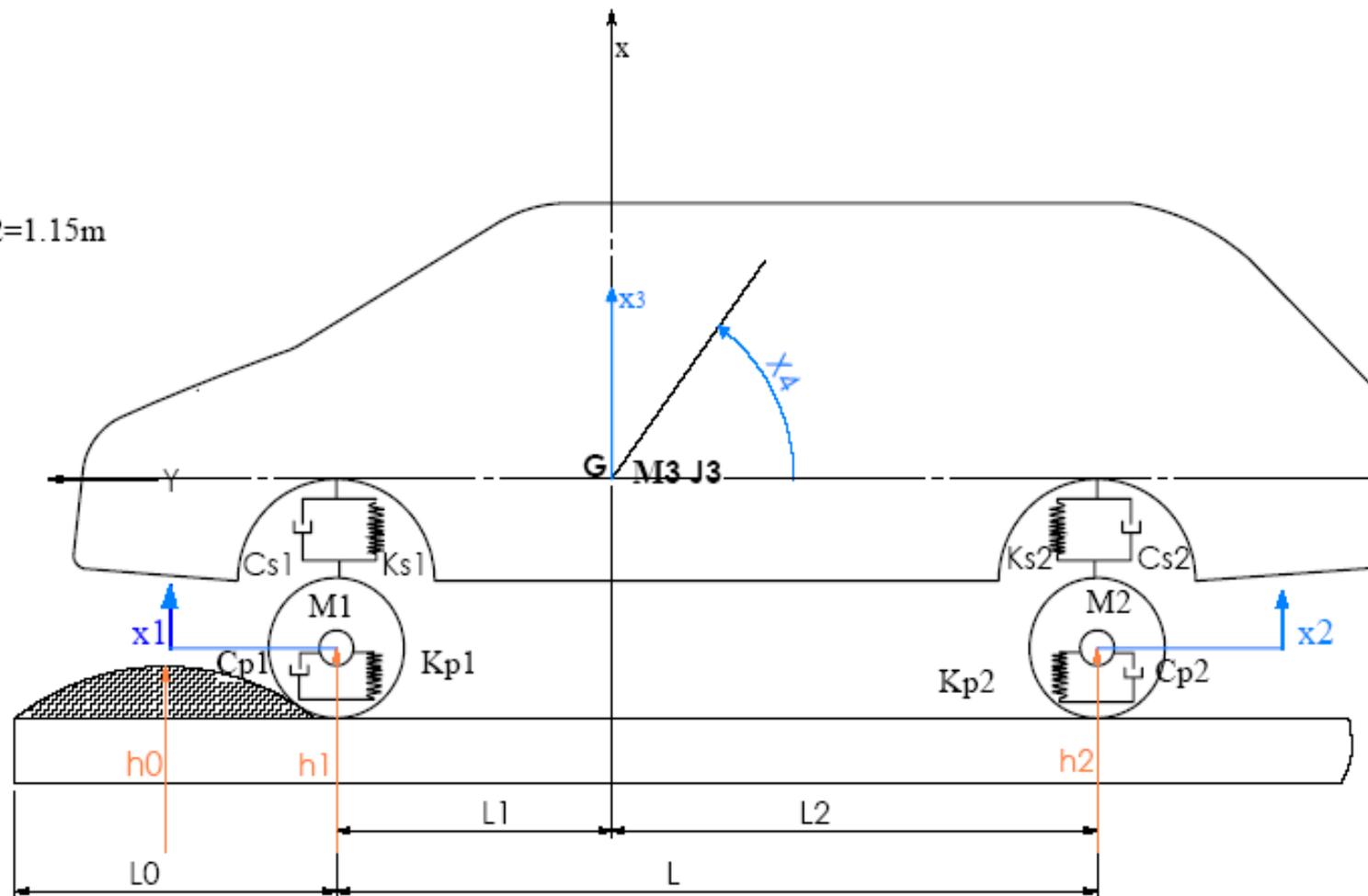


Figure 2.2 Modèle dynamique de demi véhicule

## 2. 6.4 Dérivées partielles de l'énergie cinétique

### 1. Dérivées par rapport aux coordonnées généralisées

$$\frac{\partial E_c}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8)$$

### 2. Dérivées par rapport aux vitesses généralisées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_1} = M_1 \cdot \dot{X}_1 \\ \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_2} = M_2 \cdot \dot{X}_2 \\ \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_3} = M_3 \cdot \dot{X}_3 \\ \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_4} = J_3 \cdot \dot{X}_4 \end{array} \right. \quad (2-9)$$

### 3. Dérivées par rapport au temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_1} = M_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_2} = M_2 \cdot \ddot{x}_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_3} = M_3 \cdot \ddot{x}_3 \\ \frac{d}{dt} \frac{(\partial E_c)}{\partial \dot{x}_4} = J_3 \cdot \ddot{x}_4 \end{array} \right. \quad (2-10)$$

## 2. 6.5 Expression de l'énergie potentielle

L'expression de l'énergie potentielle se détermine comme la somme des énergies potentielles emmagasinées sur chaque élément élastique.

1. **Energie potentielle emmagasinée dans la pneumatique avant**

$$E_{p1} = \frac{1}{2} K_{p1} (x_1 - h_1)^2$$

2. **Energie potentielle emmagasinée dans la pneumatique arrière**

$$E_{p2} = \frac{1}{2} K_{p2} (x_2 - h_2)^2$$

3. **Energie potentielle relative à la suspension avant**

$$E_{p3} = \frac{1}{2} K_{s1} (x_3 + L_1 x_4 - x_1)^2$$

4. **Energie potentielle relative à la suspension arrière**

$$E_{p4} = \frac{1}{2} K_{s2} (x_3 - L_2 x_4 - x_2)^2$$

D'où l'énergie potentielle totale :

$$E_{pt} = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3} + E_{p4}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ K_{p1} (x_1 - h_1)^2 + K_{p2} (x_2 - h_2)^2 + K_{s1} (x_3 + L_1 x_4 - x_1)^2 + K_{s2} (x_3 - L_2 x_4 - x_2)^2 \right] \quad (2-11)$$

**2. 6.6 Dérivées partielles de l'énergie potentielle**

$$\frac{\partial E_{pt}}{\partial x_1} = (K_{s1} + K_{p1})x_1 - K_{s1}x_3 - L_1 K_{s1}x_4 - K_{p1}h_1$$

$$\frac{\partial E_{pt}}{\partial x_2} = (K_{s2} + K_{p2})x_2 - K_{s2}x_3 + L_2 K_{s2}x_4 - K_{p2}h_2$$

$$\frac{\partial E_{pt}}{\partial x_3} = -K_{s1}x_1 - K_{s2}x_2 + (K_{s1} + K_{s2})x_3 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2})x_4$$

$$\frac{\partial E_{pt}}{\partial x_4} = -L_1 K_{s1}x_1 + L_2 K_{s2}x_2 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2})x_3 + (L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2})x_4$$
(2-12)

Les éléments de frottement visqueux sont disposés parallèlement aux éléments de rigidités,

alors pour obtenir les expressions  $\left( \frac{\partial \theta}{\partial \dot{X}_i} \right)$  il suffit de remplacer les coefficients  $(Ki)$  par

les coefficients de frottement visqueux.  $(Ci)$  et les coordonnées généralisées par les vitesses généralisées.

On aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \dot{X}_1} &= (C_{s1} + C_{p1}) \dot{X}_1 - C_{s1} \dot{X}_3 - L_1 C_{s1} \dot{X}_4 - C_{p1} \dot{h}_1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \dot{X}_2} &= (C_{s2} + C_{p2}) \dot{X}_2 - C_{s2} \dot{X}_3 + L_2 C_{s2} \dot{X}_4 - C_{p2} \dot{h}_2 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \dot{X}_3} &= -C_{s1} \dot{X}_1 - C_{s2} \dot{X}_2 + (C_{s1} + C_{s2}) \dot{X}_3 + (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) \dot{X}_4 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \dot{X}_4} &= -L_1 C_{s1} \dot{X}_1 + L_2 C_{s2} \dot{X}_2 + (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) \dot{X}_3 + (L_1^2 C_{s1} + L_2^2 C_{s2}) \dot{X}_4 \end{aligned} \quad (2-13)$$

Substituons les expressions (2-10), (2-12), (2-13) dans les équations de LAGRANGE (2-6).

Nous obtenons le système d'équations différentielles qui décrivent le mouvement vibratoire du véhicule dans son plan vertical.

$$\begin{aligned} 1/ \quad M_1 \ddot{X}_1 + (K_{s1} + K_{p1}) X_1 - K_{s1} X_3 - L_1 K_{s1} X_4 - K_{p1} h_1 + (C_{s1} + C_{p1}) \dot{X}_1 - C_{s1} \dot{X}_3 - L_1 C_{s1} \dot{X}_4 \\ C_{p1} \dot{h}_1 = 0 \\ 2/ \quad M_2 \ddot{X}_2 + (K_{s2} + K_{p2}) X_2 - K_{s2} X_3 + L_2 K_{s2} X_4 - K_{p2} h_2 + (C_{s2} + C_{p2}) \dot{X}_2 - C_{s2} \dot{X}_3 \\ + L_2 C_{s2} \dot{X}_4 - C_{p2} \dot{h}_2 = 0 \\ 3/ \quad M_3 \ddot{X}_3 - K_{s1} X_1 - K_{s2} X_2 + (K_{s1} + K_{s2}) X_3 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) X_4 - C_{s1} \dot{X}_1 - C_{s2} \dot{X}_2 \\ + (C_{s1} + C_{s2}) \dot{X}_3 + (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) \dot{X}_4 = 0 \\ 4/ \quad J \ddot{X}_4 - L_1 K_{s1} X_1 + L_2 K_{s2} X_2 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) X_3 + (L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}) X_4 - L_1 C_{s1} \dot{X}_1 + L_2 C_{s2} \dot{X}_2 \\ + (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) \dot{X}_3 + (L_1^2 C_{s1} + L_2^2 C_{s2}) \dot{X}_4 = 0 \end{aligned}$$

## 2. 7 Ecriture matricielle du système d'équation du mouvement oscillatoire

Le système d'équations ci-dessus peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \ddot{X} + [C] \dot{X} + [K] X = [B] h + [D] \dot{h}$$

Ou :

$[M]$  : Matrice d'inertie.

$[K]$  : Matrice des coefficients réduits de rigidité.

$[C]$  : Matrice des coefficients réduits de frottements linéaires.

$[B]$  et  $[D]$  : Matrices diagonales dont les valeurs des éléments distincts de zéro sont:

Pour la matrice  $[B]$

$$b_{11} = K_{p1}$$

$$b_{22} = K_{p2}$$

Pour la matrice  $[D]$

$$d_{11} = C_{p1}$$

$$d_{22} = C_{p2}$$

- ❖ Les éléments de la matrice  $[C]$  présentent une structure analogue à ceux de la matrice  $[K]$ .
- ❖ Pour obtenir les éléments  $C_{ij}$  il suffit de remplacer  $K_{s1}$ ,  $K_{s2}$ ,  $K_{p1}$ ,  $K_{p2}$ , respectivement par  $C_{s1}$ ,  $C_{s2}$ ,  $C_{p1}$ ,  $C_{p2}$ .

Elément de la matrice  $[M]$ :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Elément de la matrice  $[C]$ :

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_{s1} + C_{p1}) & 0 & -C_{s1} & -L_1 C_{s1} \\ 0 & (C_{s2} + C_{p2}) & -C_{s2} & L_2 C_{s2} \\ -C_{s1} & -C_{s2} & (C_{s1} + C_{s2}) & (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) \\ -L_1 C_{s1} & L_2 C_{s2} & (L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}) & (L_1^2 C_{s1} + L_2^2 C_{s2}) \end{bmatrix}$$

Elément de la matrice  $[K]$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} (K_{s1} + K_{p1}) & 0 & -K_{s1} & -L_1 K_{s1} \\ 0 & (K_{s2} + K_{p2}) & -K_{s2} & L_2 K_{s2} \\ -K_{s1} & -K_{s2} & (K_{s1} + K_{s2}) & (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) \\ -L_1 K_{s1} & L_2 K_{s2} & (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) & (L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}) \end{bmatrix}$$

Elément de la matrice  $[B]$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément de la matrice  $[D]$  :

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad [h] = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les sollicitations provenant de la route et des propriétés élastiques des pneus qui agissent sur le véhicule sont ceux dues au contact ralentisseur-essieux avant et arrière et représentés analytiquement par

$$h_1(t) = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} vt$$

$$h_2(t) = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} v(t - t_1)$$

## Chapitre 3

### Détermination des pulsations propres

#### 3. 1 Introduction

Mathématiquement, les modes vibratoires constituent une base vectorielle orthonormée [20], qui permet le découplage des équations de tout problème linéaire (dynamique ou statique) et se révèle toujours très utile dans l'analyse des problèmes non linéaires.

La notion de mode propre vibratoire [21] est fructueuse pour la modélisation et l'analyse des divers systèmes mécaniques. Physiquement, un système mécanique, laissé libre d'évoluer à partir d'un apport initial d'énergie – vibration libre – oscille naturellement selon un mode propre vibratoire ou une combinaison linéaire de modes. [22]

Lorsqu'une structure est excitée par des forces pouvant provenir de sources externes quelconques, telles que balourd, turbulence, etc., alors une nouvelle sorte de vibration se produit, appelée vibration forcée [23]. Dans ce cas, le niveau vibratoire dépend fortement non seulement du signal de force externe, mais aussi des propriétés des modes naturels de vibration de la structure. En fait, on peut montrer que toute réponse vibratoire – vibration libre (sans force d'excitation) ou vibration forcée (excitée par une force externe) – peut toujours se décrire en termes des modes propres vibratoires de la structure considérée.

A partir du concept de mode propre vibratoire s'est en outre développé un ensemble de techniques théoriques et expérimentales, regroupées sous le vocable générique d'analyse nodale, que nous présenterons en montrant leur capacité à guider la modélisation et la compréhension du comportement physique de systèmes mécaniques divers.

Pour pouvoir analyser le comportement vibratoire du système il a fallu qu'on détermine les fréquences propres, ce qui nous permet de localiser les zones de résonances.

Dans ce but nous avons établi dans ce chapitre deux programmes de calcul.

Le premier programme calcul les coefficients du polynôme caractéristique et l'un second prévus pour la résolution du polynôme dont les racines sont les carrés des pulsations propres.

### 3. 2 Oscillations avec amortissement

Pratiquement, les systèmes mécaniques oscillants perdent de l'énergie à cause des frottements le mouvement est alors un mouvement sinusoïdal amorti, c'est-à-dire dont l'amplitude diminue progressivement. Tout système oscillant, non entretenu, finit inévitablement par s'arrêter.

- a) Un oscillateur harmonique idéal, sans aucune perte d'énergie, oscille indéfiniment sans diminution d'amplitude.
- b) Avec des frottements, l'oscillateur est amorti, son amplitude diminue avec le temps. On dit que le mouvement est pseudopériodique.
- c) Plus grand est l'amortissement, plus rapidement les oscillations sont réduites

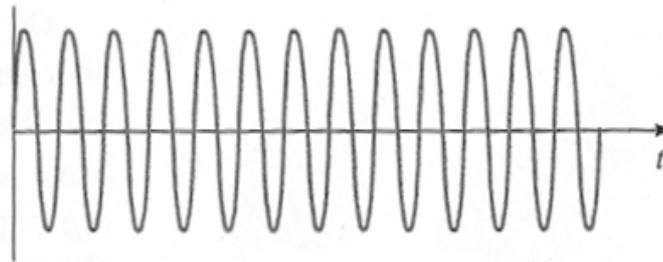


Figure 3. 1- Oscillateur libre (a)

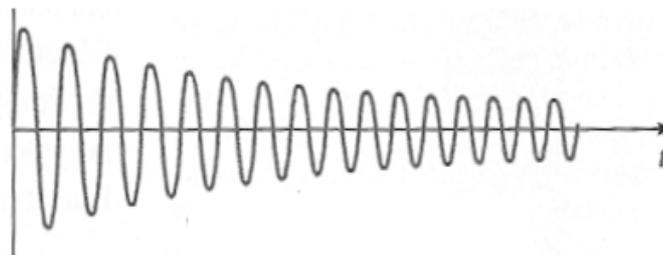


Figure 3. 2 - Oscillateur faiblement amorti (b)



Figure 3. 3 - Oscillateur fortement amorti (c)

### 3. 3 Cas d'un fort amortissement

Si le frottement augmente, le système déplacé peut revenir lentement à sa position d'équilibre sans jamais la dépasser ; dans ce cas, il n'y aura pas d'oscillation.

Les amortisseurs de voiture, par exemple, doivent étouffer toute oscillation en moins d'un cycle.

Quand le système revient à l'équilibre dans le temps le plus court, sans jamais osciller, on dit que l'amortissement est critique. C'est le cas, par exemple, des portes battantes du lycée qui se ferme rapidement derrière vous sans osciller mais qui risque de vous frapper dans le dos.

Si l'on augmente davantage l'amortissement, le système n'oscille plus, mais il met plus de temps pour revenir à l'équilibre. On peut prévoir que les portes battantes dans une maison de retraite présente cette caractéristique. On dit dans ce cas que l'oscillateur est apériodique et qu'il a un amortissement surcritique. *Fig. 3.4*

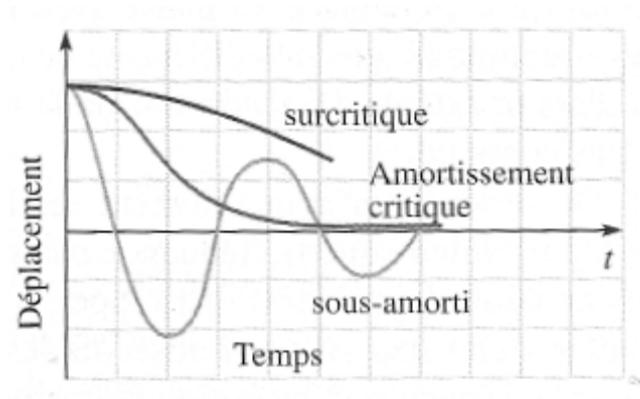


Figure 3.4 - Cas d'un fort amortissement [24]

### 3. 4 Modélisation

L'équation différentielle générale de l'oscillateur harmonique amorti unidirectionnel, de paramètre de position  $X$  (qui peut représenter un déplacement linéaire, déviation angulaire, ...) est:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + p^2x = 0 \quad (3-1)$$

Avec :

- $\lambda$  : Coefficient d'amortissement de l'oscillateur
- $p$  : Pulsation propre de l'oscillateur (pulsation des oscillations en l'absence de frottement).

### 3. 5 Recherche des pulsations propres

Pour déterminer les pulsations propres nous utilisons la méthode qui dérive des équations différentielles du mouvement libre.

Le système d'équations différentielles relatives aux oscillations libre du modèle considéré s'écrit :

$$[M] \ddot{X} + [K] X = 0 \quad (3-2)$$

$$\begin{aligned} 1/ \quad & M_1 \ddot{X}_1 + (K_{s1} + K_{p1}) X_1 - K_{s1} X_3 - L_1 K_{s1} X_4 = 0 \\ 2/ \quad & M_2 \ddot{X}_2 + (K_{s2} + K_{p2}) X_2 - K_{s2} X_3 + L_2 K_{s2} X_4 = 0 \\ 3/ \quad & M_3 \ddot{X}_3 - K_{s1} X_1 - K_{s2} X_2 + (K_{s1} + K_{s2}) X_3 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) X_4 = 0 \\ 4/ \quad & J \ddot{X}_4 - L_1 K_{s1} X_1 + L_2 K_{s2} X_2 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) X_3 + (L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}) X_4 = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

Pour trouver les pulsations propres relatives au système d'équations, on cherche la solution sous la forme des oscillations harmonique :

Soient :

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin p t \rightarrow \ddot{x}_1 = -A_1 p^2 \sin p t \\ x_2 &= A_2 \sin p t \rightarrow \ddot{x}_2 = -A_2 p^2 \sin p t \\ x_3 &= A_3 \sin p t \rightarrow \ddot{x}_3 = -A_3 p^2 \sin p t \\ x_4 &= A_4 \sin p t \rightarrow \ddot{x}_4 = -A_4 p^2 \sin p t \end{aligned}$$

En remplace les expressions dans le système précédent (3.3) on obtient :

$$\begin{aligned} 1/ \quad & (-M_1 p^2 + K_{s1} + K_{p1}) A_1 - K_{s1} A_3 - L_1 K_{s1} A_4 = 0 \\ 2/ \quad & (-M_2 p^2 + K_{s2} + K_{p2}) A_2 - K_{s2} A_3 + L_2 K_{s2} A_4 = 0 \\ 3/ \quad & -K_{s1} A_1 - K_{s2} A_2 + (-M_3 p^2 + K_{s1} + K_{s2}) A_3 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) A_4 = 0 \\ 4/ \quad & -L_1 K_{s1} A_1 + L_2 K_{s2} A_2 + (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) A_3 + (-J p^2 + L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}) A_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Système d'équation algébrique aux inconnues  $A_i$

$$[X] \{A_i\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} (-M_1 p^2 + K_{s1} + K_{p1}) & 0 & -K_{s1} & -L_1 K_{s1} \\ 0 & (-M_2 p^2 + K_{s2} + K_{p2}) & -K_{s2} & L_2 K_{s2} \\ -K_{s1} & L_2 K_{s2} & (-M_3 p^2 + K_{s1} + K_{s2}) & (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) \\ -L_1 K_{s1} & L_2 K_{s2} & (L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}) & (-J p^2 + L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système algébrique à quatre équations linéaire homogènes en  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (Amplitudes des oscillations des différents paramètres de configuration), n'a de solution en «  $A_i$  » non nulle que si son déterminant est nul.  $\det[X] = 0$

Les quatre fréquences propres  $\left(f_i = \frac{p_i}{2\pi}\right)$  associées aux pulsations propres ( $p_i$ ) peuvent se calculer donc par la résolution de l'équation caractéristique suivant

$$\det([K] - p^2 [M]) = 0 \quad (3.5)$$

Cette équation caractéristique est un polynôme d'ordre quatre en ' $p^2$ ' correspondant aux quatre modes d'oscillations libre ; chacun de ces modes présentent la propriété d'affecter simultanément tous les degrés de libertés avec des amplitudes présentant chacune un sens et un rapport d'élongation bien déterminé avec l'une quelconque d'entre elle de valeur arbitraire.

[25]

### 3. 5.1 Détermination des coefficients du polynôme

Le problème consiste à déterminer le polynôme caractéristique  $p_n(p^2)$ , puis à en chercher les racines.

$$p_n(p^2) = p_n(\lambda) = \lambda^4 + C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_3 \lambda + C_4 \quad (3.6)$$

Les coefficients «  $C_i$  » peuvent être déterminés par la méthode suivant :

### 3. 5.2 Méthode de Souriau [26]

#### Algorithme

La trace d'une matrice est la somme des éléments de diagonale.

$$\text{trac}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Etant donné la matrice (A)

$$(A_1) = (A)$$

$$C_1 = -\text{trac}(A_1)$$

Et on a de (K=2 à n) :

$$(A) = (A_{K-1} + C_{K-1} \cdot I) \cdot A$$

$$C_K = -\frac{1}{K} \text{Trac}(A_K)$$

Le programme correspondant à cet algorithme voire (annexe 1) programme 1

### 3. 6 Résolution de l'équation caractéristique par la méthode de « BAIRSTW » [27]

#### 3. 6.1 Description de la méthode

La méthode de BAIRSTAW considère le polynôme de degré « n »

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  Et cherche à le décomposer sous la forme

$(x^2 - Sx + p) \cdot Q(x)$  Ou  $Q(x)$  est de degré  $n-2$  et  $r_0 = r_1 = 0$

Pour un couple (S, p) bien choisi. A partir de le polynôme  $P(x)$  pourra s'écrire  $(x^2 - Sx + p) \cdot Q(x)$ ,

$x^2 - Sx + p$  Possédant deux racines.  $Q(x)$  Pourra à son tour être décomposé de la même manière en un trinôme de la forme  $(x^2 - Sx + p) \cdot Q'(x)$ , ou  $Q'$  est le degré « n-4 », etc..... jusqu'au moment où ne restera plus qu'un polynôme  $Q^{(m)}(x)$  de degré 1 ou 2, résoluble par les moyens classiques.

L'algorithme qui suit consiste, en gros à partir d'un couple  $(S_0, p_0)$  initial quelconque, à trouver de proche en proche, après quelques itérations, couple un  $(S, p)$  tel que  $(x^2 - Sx + p)$  Factorise le polynôme  $P$ , ceci fait d'une part deux racines  $X_1$  et  $X_2$  seront obtenus, réelles aux complexes, qui vérifieront  $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - Sx + p$  ; d'autre part la division de  $P$  par  $(x^2 - Sx + p)$  donnera pour résultat un polynôme  $Q$  de degré moindre, auquel la même méthode pourra s'appliquer, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des racines.

### 3. 6.2 Algorithme

2. On se donne un couple  $(S_0, p_0)$  initial.
3. On calcule les coefficients  $(b_k)$  par identification dans l'égalité :

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= S_2(x)Q_{n-2}(x) + R_n(x) \\
 b_0 &= a_0 \\
 b_1 &= a_1 + S b_0 \\
 b_2 &= a_2 + S b_1 - p b_0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 b_k &= a_k + S b_{k-1} - p b_{k-2}
 \end{aligned}$$

4. On introduit les dérivées :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{d b}{d s} \\
 \delta_0 &= 0 \\
 \delta_1 &= b_1 \\
 \delta_2 &= b_1 + S \delta_1 \\
 \delta_3 &= b_2 + S \delta_2 - p \delta_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \delta_k &= b_k + S \delta_{k-1} - p \delta_{k-2} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \delta_n &= b_{n-1} + S \delta_{n-1} - p \delta_{n-2}
 \end{aligned}$$

5.  $b_{n-1}$  et  $b_n$  étant considérés comme fonction de  $S$  et  $P$ , dont les incréments sont notés  $ds$  et  $d_p$ , le jacobien de  $b_{n-1}(S, P)$  et de  $b_n(S, P)$  vaut :

$$D = \delta_n \cdot \delta_{n-1} - (\delta_{n-1})^2$$

6. Le développement en série de Taylor [27] de  $b_{n-1}$  et  $b_n$  à l'ordre 1 permet (sachant que l'on veut à terme  $b_{n-1} - b_n = 0$  d'en déduire  $d_s$  et  $d_p$ ).

$$d_s = (b_{n-1} \delta_{n-1} - b_n \delta_{n-2}) / D.$$

$$d_p = (b_{n-1} \delta_n - b_n \delta_{n-1}) / D$$

7. La méthode de Newton-raphson conduit à poser : [28]

$$S_{n+1} = S_n + \frac{d_s}{D}$$

$$P_{n+1} = P_n + \frac{d_p}{D}$$

8. On revient au 2 jusqu'à ce que le rapport :

$$\frac{|S_{n+1} - S_n| + |P_{n+1} - P_n|}{|S_{n+1}| + |P_{n+1}|} \leq ERR$$

9. On pose  $S_{n+1} = S$  et  $P_{n+1} = P$  et on cherche les racines du trinôme :

$$x^2 - Sx = P$$

$$d = S^2 - 4P$$

- a. Si  $d < 0$ , des racines sont complexes et valent :

$$x_1 = \frac{S + i\sqrt{-d}}{2}$$

$$x_2 = \frac{S - i\sqrt{-d}}{2}$$

- b. Si  $d > 0$ , les racines sont réelles :

$$x_1 = \frac{S + \sqrt{d} \cdot \text{signe}(S)}{2}$$

$$x_2 = \frac{P}{x_1}$$

10. On enregistre les racines  $x_1, x_2$  dans un tableau on pose :

$$P_{n-2}(x) = Q_{n-2} = b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-2}$$

Et on revient au 1, en traitant ce nouveau polynôme. On recommence de la sorte jusqu'à ce que  $Q(x)$  soit de degré 2.

- a. Si  $Q(x)$  est de degré 2, on passe au 8 après avoir écrit

$$Q(x) = a(x^2 - Sx + p)$$

- b. Si  $Q(x)$  est de degré 1,  $Q(x) = ax + b$

Le programme correspondant à cet algorithme voire (annexe 1). Programme 2

### 3.7 Remarque

La méthode ne s'applique pas valablement dans tous les cas. Ainsi les suites  $S_0, S_1, \dots, S_n$  et  $P_0, P_1, \dots, P_n$  peuvent ne pas converger, auquel cas le teste du quatre ne sera jamais valide et le programme bouclera indéfiniment.

### 3.8 les résultats

On' a  $p_n(p^2) = p_n(\lambda) = \lambda^4 + C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_3\lambda + C_4$

D' après le programme (1), calcule des coefficients  $C_i$  (annexe 1) on' a :

$$C1 = -30014$$

$$C2 = 9.0526694.10^8$$

$$C3 = -2.6589615. 10^{11}$$

$$C4 = 1.6825649.10^{13}$$

En remplace les coefficients dans le programme (2), (annexe 1) résolution de l'équation de Polynôme  $p_n(p^2)$

On obtient les pulsations propres :

$$P1 = 4.900 10^{-3}$$

$$P2 = 1.080 10^{-2}$$

$$P3 = 3.348 10^{-5}$$

$$P4 = 7.402 10^{-21}$$

## Chapitre 4

### Résolution du système d'équation différentielle du mouvement vibratoire forcée

#### 4. 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous résolvons le système d'équations différentielles qui décrit le mouvement oscillatoire du véhicule pendant son déplacement à la vitesse constante « V »

Nous utilisons la méthode numérique connue de RUNG-KUTTA pour la résolution des équations différentielle et nous déterminons ainsi pour chaque coordonnée à un moment donné (t), le déplacement, la vitesse et l'accélération.

La force perturbatrice est provoquée par la présence du ralentisseur à parcourir que nous

décrivons par la fonction déterminée :  $h = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} vt$

$h_0$  : Hauteur max du ralentisseur

$v$  : Vitesse de déplacement du véhicule.

$L_0$  : Longueur du ralentisseur.

Donc pour une entrée (nature de dos –d'âne) connu, à chaque instant connaissant le déplacement, la vitesse et l'accélération, nous pouvons calculer les forces appliquées (force élastique, de frottement et d'inertie) à cet instant différentes masses d'éléments constituant l'ensemble vibrant pur.

Sachant les forces appliquées nous calculons éventuellement à la résistance et à la rigidité les différents éléments du système (véhicule).

## 4. 2 Description de la méthode de RUNG-KUTTA

La méthode de RUNG-KUTTA, modifiée plus tard par KUTTA, est applicable à la résolution d'équations différentielles du premier ordre: (voire annexe 2)

$$\dot{Y} = \frac{dy}{dt} = f(t, x) \quad (4.1)$$

La méthode de RUNG-KUTTA est pratique et n'utilise pas le calcul des dérivées comparativement à celle de TAYLOR

### 4. 2.1 Algorithme de la méthode [29]

Pour obtenir l'approximation de la solution exacte  $y(t)$  du problème de CAUCHY :

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$t \in [a, b] \quad \text{et} \quad y(a) = \alpha$$

On procède de la manière suivante:

#### Etape 1

On pose:

$$h = \frac{(b - a)}{N}$$

$$t_0 = a$$

$$W_0 = \alpha$$

N: entier positif choisi.

#### Etape 2

On pose (i=0)

**Etape 3**

$$K_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = w_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6$$

$$t_{i+1} = a + (i + 1)h$$

**Etape 4**

Si  $i=N-1$  aller à l'étape 6

**Etape 5**

Ajouter 1 à  $i$  et aller à l'étape 3

**Etape 6**

Fin.

**4. 2.2 Cas d'un système d'équations différentielles**

Pour appliquer RUNG-KUTTA d'ordre 4 à un système d'équation, nous procédons de la manière suivante:

Soit  $w_{ij}$  une approximation de la première composante de la solution du système donnée au point  $t_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  et  $j=0,1,\dots,n$ , ou

$$N = \frac{(b-a)}{h},$$

$$t_j = a + jh$$

Les conditions initiales sont données par:

$$w_{1,0} = \alpha_1$$

$$w_{2,0} = \alpha_2$$

.

.

.

$$w_{m,0} = \alpha_m$$

Supposons que  $w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}$  viennent d'être calculées, alors pour déterminer

$w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \dots, w_{m,j+1}$ , nous devons premièrement calculer :

$$K_{1,i} = hf_i(t_j, w_1, w_{2,j}, \dots, w_{m,j})$$

Pour  $i=1,2,\dots,m$

$$K_{2,i} = hf_i(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{K_{1,1}}{2}, w_{2,j} + \frac{K_{1,2}}{2}, \dots, w_{m,j} + \frac{K_{1,m}}{2})$$

Pour  $i=1,2,\dots,m$

$$K_{3,i} = hf_i(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{K_{2,1}}{2}, w_{2,j} + \frac{K_{2,2}}{2}, \dots, w_{m,j} + \frac{K_{2,m}}{2})$$

Pour  $i=1,2,\dots,m$

$$K_{4,i} = hf_i(t_{j+1}, w_{1,j} + K_{3,1}, w_{2,j} + K_{3,2}, \dots, w_{m,j} + K_{3,m})$$

Pour  $i=1,2,\dots,m$

Et puis

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + (K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i})/6 \quad (4.2)$$

Pour  $i=1,2,\dots,m$

### 4. 3 Résolution du système d'équation différentielle associe au véhicule

En général, lorsque-il s'agit d'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{X} = f(t, x, y) \quad (4.3)$$

Il suffit de la remplacer par deux équations différentielle du premier ordre

$$y = \dot{X} = f(t, x, x, y) \quad (4.4)$$

Et

$$\dot{Y} = \ddot{X} = f(t, x, y)$$

C'est justement le cas de la réponse dynamique de notre système, le processus d'intégration de RUNG-KUTTA est applicable, alors pour un système d'équation deux fois plus important.

#### 4. 3.1 Changement de variables

On pose :

$$\dot{X}_1 = Z_1$$

$$\dot{X}_2 = Z_2$$

$$\dot{X}_3 = Z_3$$

$$\dot{X}_4 = Z_4$$

$$X_1 = Z_5$$

$$X_2 = Z_6$$

$$X_3 = Z_7$$

$$X_4 = Z_8$$

Substituant dans les équations différentielles du deuxième ordre pour obtenir le présent système d'équation différentielle du premier ordre

$$1/ \quad \dot{Z}_1 + \frac{1}{M_1} [(C_{s1} + C_{p1})Z_1 - C_{s1}Z_3 - L_1C_{s1}Z_4 + (K_{s1} + K_{p1})Z_5 - K_{s1}Z_7 - L_1K_{s1}Z_8 - K_{p1}h_1 - C_{p1}\dot{h}_1] = 0$$

$$2/ \quad \dot{Z}_2 + \frac{1}{M_2} [(C_{s2} + C_{p2})Z_2 - C_{s2}Z_3 + L_2C_{s2}Z_4 + (K_{s2} + K_{p2})Z_6 - K_{s2}Z_7 + L_2K_{s2}Z_8 - K_{p2}h_2 - C_{p2}\dot{h}_2] = 0$$

$$3/ \quad \dot{Z}_3 + \frac{1}{M_3} [-C_{s1}Z_1 - C_{s2}Z_2 + (C_{s1} + C_{s2})Z_3 + (L_1C_{s1} - L_2C_{s2})Z_4 - K_{s1}Z_5 - K_{s2}Z_6 + (K_{s1} + K_{s2})Z_7 + (L_1K_{s1} - L_2K_{s2})Z_8] = 0$$

$$4/ \quad \dot{Z}_4 + \frac{1}{J} [-L_1C_{s1}Z_1 + L_2C_{s2}Z_2 + (L_1C_{s1} - L_2C_{s2})Z_3 + (L_1^2C_{s1} + L_2^2C_{s2})Z_4 - L_1K_{s1}Z_5 + L_2K_{s2}Z_6 + (L_1K_{s1} - L_2K_{s2})Z_7 + (L_1^2K_{s1} + L_2^2K_{s2})Z_8] = 0$$

$$5/ \quad Z_1 - \dot{Z}_5 = 0$$

$$6/ \quad Z_2 - \dot{Z}_6 = 0$$

$$7/ \quad Z_3 - \dot{Z}_7 = 0$$

$$8/ \quad Z_4 - \dot{Z}_8 = 0$$

#### 4. 3.2 Représentation matricielle du système premier ordre

Il est plus commode pour des raisons de présentation il est préférable d'écrire le système d'équation précédent sous forme matricielle.

$$\left\{ \dot{Z} \right\} + [G]\{Z\} = [N]\left\{ \dot{H} \right\} + [M]\{H\} \quad (4.5)$$

Ou

$$\left\{ \dot{Z} \right\} = [\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_8]$$

$$\{Z\} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_8]$$

$$\left\{ \dot{H} \right\} = [\dot{h}_1, \dot{h}_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$



$$b_{31} = \frac{-C_{s1}}{M_3}$$

$$b_{32} = \frac{-C_{s2}}{M_3}$$

$$b_{33} = \frac{C_{s1} + C_{s2}}{M_3}$$

$$b_{34} = \frac{L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}}{M_3}$$

$$b_{41} = \frac{-L_1 C_{s1}}{J3}$$

$$b_{42} = \frac{L_2 C_{s2}}{J3}$$

$$b_{43} = \frac{L_1 C_{s1} - L_2 C_{s2}}{J3}$$

$$b_{44} = \frac{L_1^2 C_{s1} + L_2^2 C_{s2}}{J3}$$

Éléments de la matrice [C]:

$$C_{11} = \frac{(K_{s1} + K_{p1})}{M_1}$$

$$C_{12} = 0$$

$$C_{13} = \frac{-K_{s1}}{M_1}$$

$$C_{14} = \frac{-L_1 K_{s1}}{M_1}$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = \frac{K_{s2} + K_{p2}}{M_2}$$

$$C_{23} = \frac{-K_{s2}}{M_2}$$

$$C_{24} = \frac{L_2 K_{s2}}{M_2}$$

$$C_{31} = \frac{-K_{s1}}{M_3}$$

$$C_{32} = \frac{-K_{s2}}{M_3}$$

$$C_{33} = \frac{K_{s1} + K_{s2}}{M_3}$$

$$C_{34} = \frac{L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}}{M_3}$$

$$C_{41} = \frac{-L_1 K_{s1}}{J}$$

$$C_{42} = \frac{L_2 K_{s2}}{J}$$

$$C_{43} = \frac{L_1 K_{s1} - L_2 K_{s2}}{J}$$

$$C_{44} = \frac{L_1^2 K_{s1} + L_2^2 K_{s2}}{J}$$

Eléments de la matrice [N]et [M]:

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{C_{p1}}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{p2}}{M_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

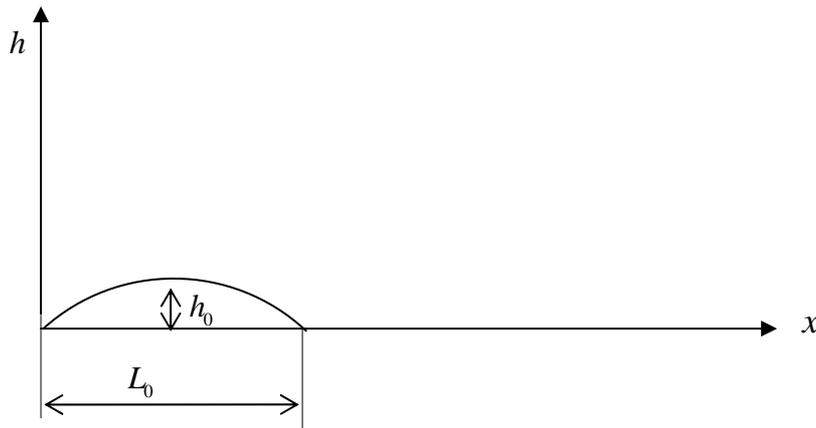
$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{K_{p1}}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{p2}}{M_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Choix de la nature perturbation:

La fonction perturbatrice (entrée) est la fonction déterminée qui représente un ralentisseur de forme sinusoïdale.

$$h = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} x$$

Dont le graphe est :



$h_0$  : Hauteur max

$L_0$  : Sa longueur (1/2 période de la fonction)

#### 4. 3.3 Détermination des forces perturbations

$h_1(t), h_2(t)$  Sont des forces perturbatrices qui peuvent être déterminés à chaque instant

Le chemin parcouru par le véhicule roulant à la vitesse « V » pendant le temps est :

$$x = v.t$$

La force perturbatrice sur l'essieu avant :

$$h_1(t) = h_0 \sin \frac{2\pi}{2L_0} vt = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} vt$$

$$\dot{h}_1(t) = \frac{v\pi}{L_0} h_0 \cos \frac{\pi}{L_0} vt$$

La force perturbatrice sur l'essieu arrière, sera la même avec un retard  $t_1$  égal l'entraxe sur la vitesse de roulement

$$h_1(t_1) = h_0 \sin \frac{2\pi}{2L_0} vt_1 = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} vt_1$$

$$\dot{h}_1(t_1) = \frac{v\pi}{L_0} h_0 \cos \frac{\pi}{L_0} vt_1$$

## Chapitre 5

### Résultats graphique et discussions

Le programme de calcul (Annexe 2) est prévu non seulement pour résoudre les équations différentielles gouvernant le problème, mais aussi pour donner le tracé des courbes  $x_i(t)$ ,  $\dot{x}_i(t)$ , et  $\ddot{x}_i(t)$  des coordonnées fixant la configuration de la structure à chaque instant. Donc responsable du comportement du véhicule.

Il est assez difficile d'envisager et analyser toutes les courbes relatives à la variation de chaque paramètre constructif du véhicule et si c'est le cas le volume de travail sera très lourd, et donc pratiquement impossible d'exécution.

Sur ce, nous nous limitons seulement à la représentation des courbes  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , (essieux avant et arrière) et  $x_3(t)$  (centre de gravité de la structure) et dérivées première et secondaire pour trois vitesses différentes ( $V = 20$  Km/h,  $V = 60$  Km/h,  $V = 120$  Km/h), et pour une même géométrie ( $L_0 = 0.5$  m et  $h_0 = 0.12$  m)

Dans un deuxième temps nous gardons les mêmes vitesses et nous changeons la géométrie ( $L_0 = 1.5$  m et  $h_0 = 0.12$  m)

Nous obtenons les courbes suivantes :

Données techniques :

$$M_1 = 55 \text{ Kg. ;}$$

$$M_2 = 55 \text{ Kg. ;}$$

$$M_3 = 900 \text{ Kg;}$$

$$J_3 = 2000.$$

$$K_{s1} = 25000 \text{ N/m; } \quad K_{s2} = 21739 \text{ N/m;}$$

$$K_{p1} = 800000 \text{ N/m; } \quad K_{p2} = 800000 \text{ N/m;}$$

$$C_{s1}=8150 \text{ N.s/m}; \quad C_{s2}=7080 \text{ N.s/m};$$

$$C_{p1}=5500 \text{ N.s/m}; \quad C_{p2}=5000 \text{ N.s/m};$$

$$L = 2.15 \text{ m}; \quad L_1 = 1.00 \text{ m}; \quad L_2 = 1.15 \text{ m}$$

## 5. 1 Tracer les courbes

### 5. 1.1 Géométrie dos-d'âne $L_0 = 0.5 \text{ m}$ et $h_0 = 0.12 \text{ m}$

Formule analytique du ralentisseur  $h = h_0 \sin \frac{\pi}{L_0} vt$

#### a) La vitesse de déplacement du véhicule $V = 20 \text{ km/h}$

$$T_1 = 0.09 \text{ s} \quad \text{temps de parcourt de l'essieu avant}$$

$$T_2 = 0.29 \text{ s} \quad \text{temps de parcourt de l'essieu arrière}$$

$$T_{\max} = 0.47 \text{ s} \quad \text{temps de passage}$$

$$dt = 0.0047 \text{ s} \quad \text{pas}$$

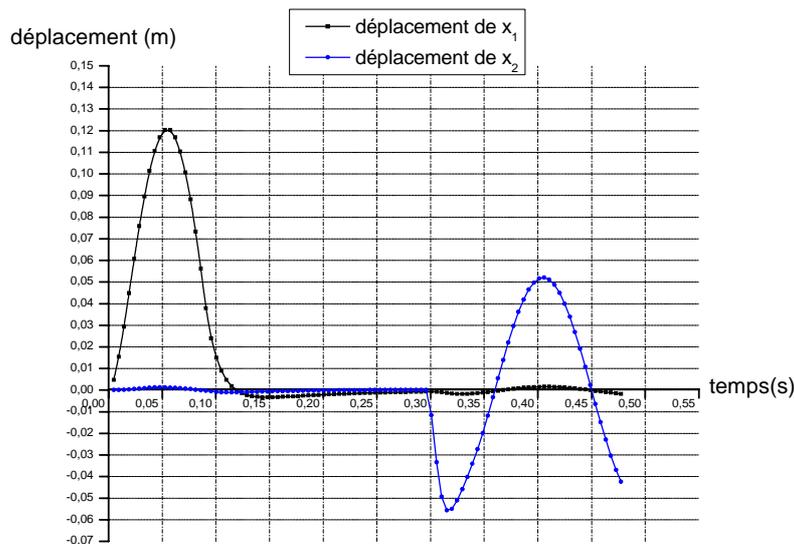


Figure 5.1- Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

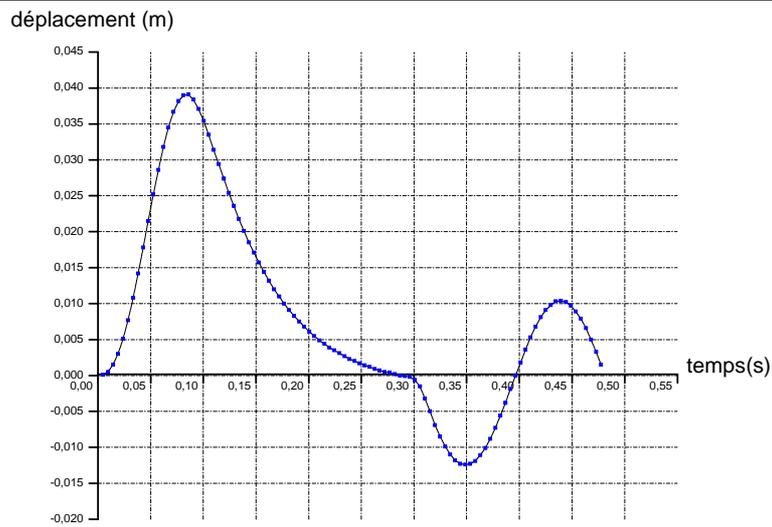


Figure 5.2 - courbe relatif au déplacement vertical de centre de gravité de la structure

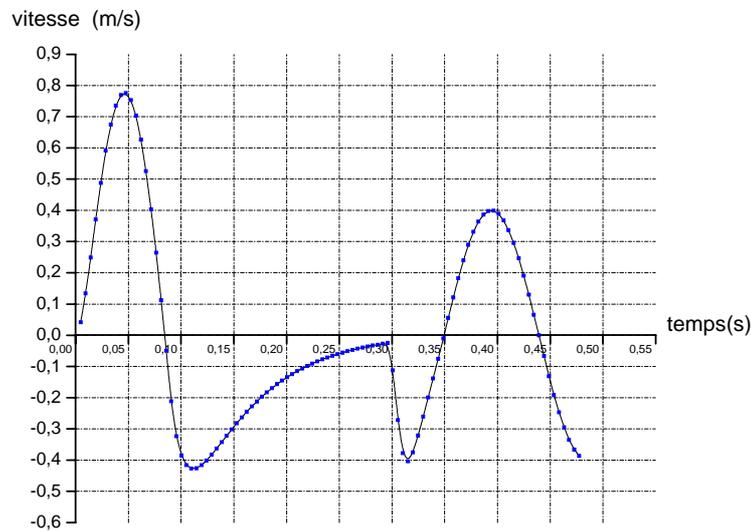


Figure 5.5 - courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

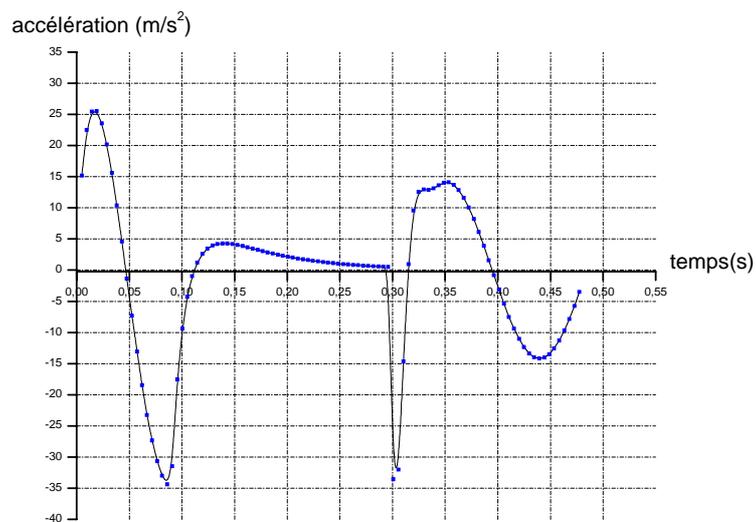


Figure 5.6 - courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

b) La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 60 \text{ km/h}$

$$T_1 = 0.03 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.099 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.159 \text{ s}$$

$$dt = 0.0015 \text{ s}$$

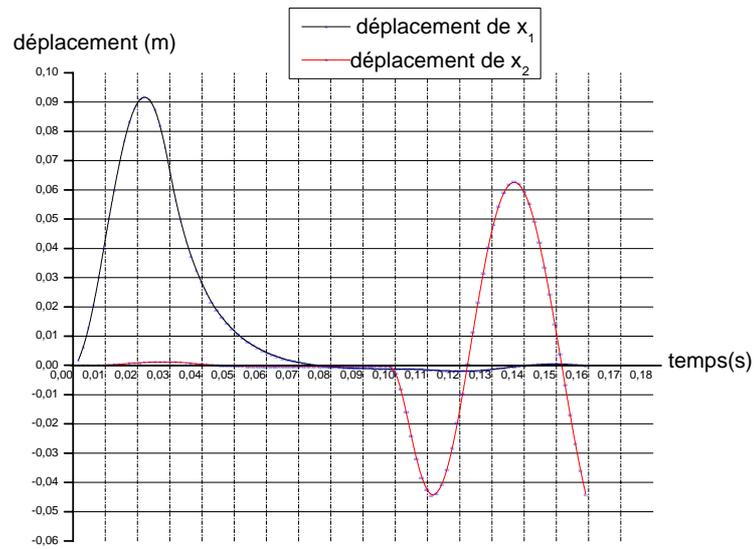


Figure 5.5 - courbes de déplacement des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

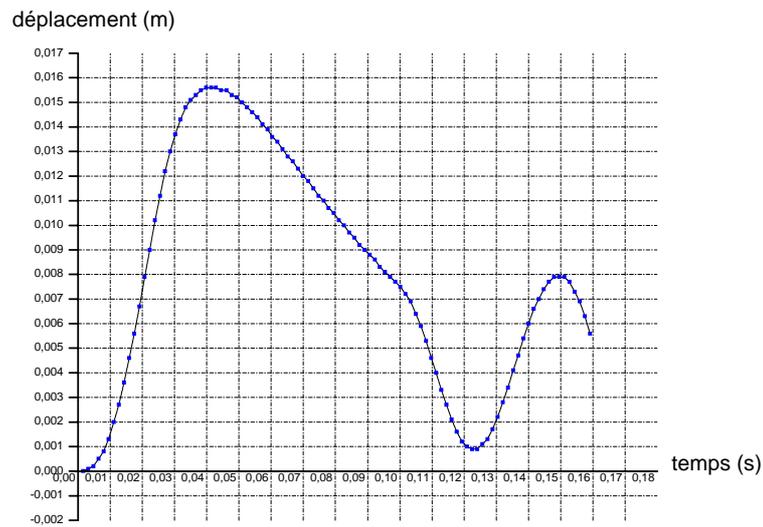


Figure 5.6 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

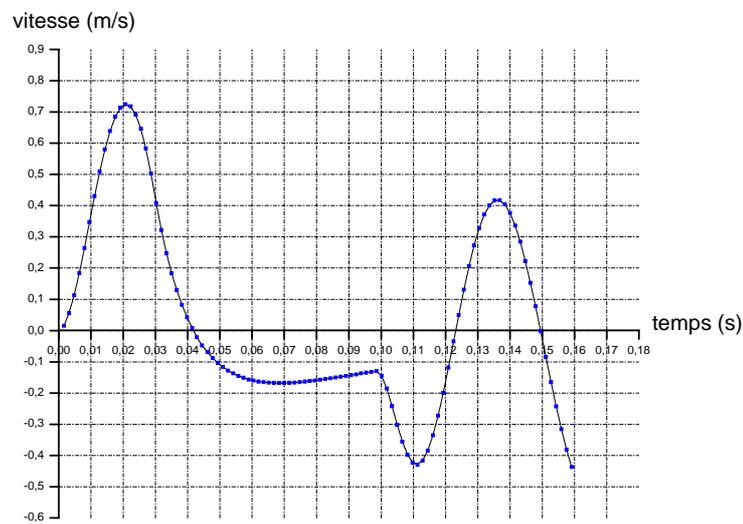


Figure 5.7 - Courbes de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

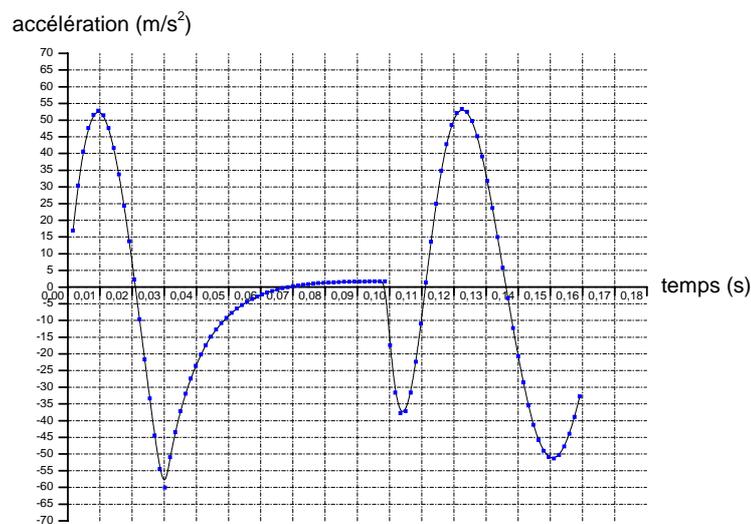


Figure 5.8 - courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

c) La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 120 \text{ km/h}$

$$T_1 = 0.015 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.049 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.079 \text{ s}$$

$$dt = 0.00079 \text{ s}$$

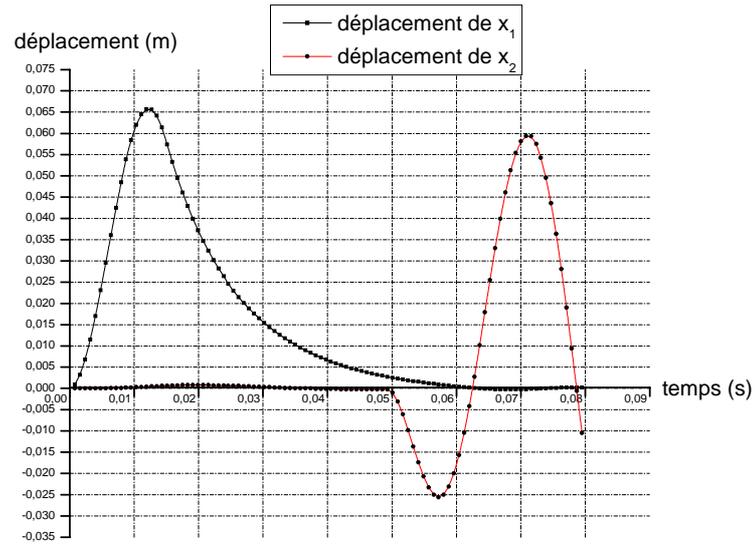


Figure 5.9- Courbes de déplacement des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

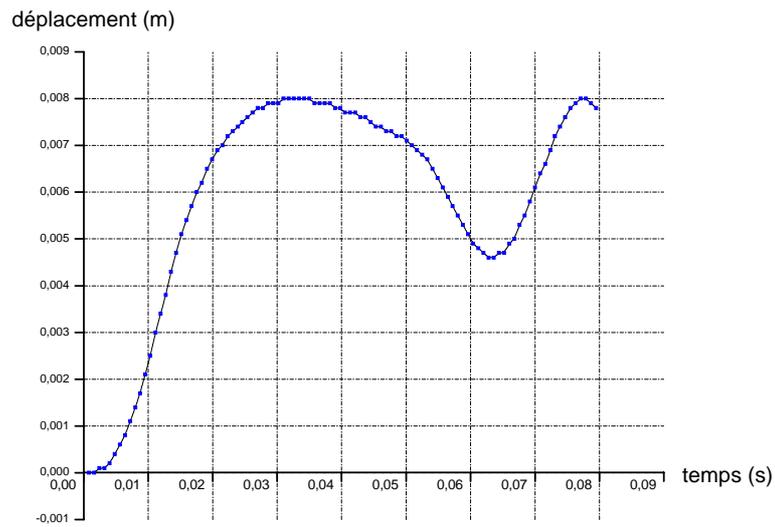


Figure 5.10 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

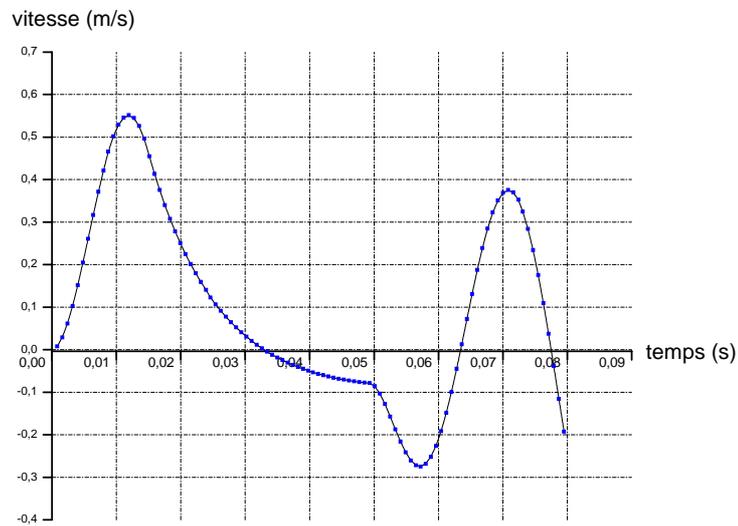


Figure 5.11 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

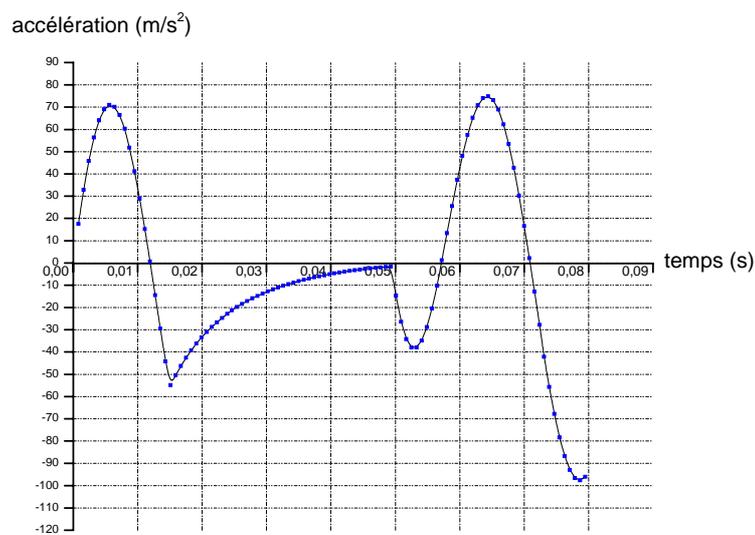


Figure 5.12 - Courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

### 5. 1.2 Géométrie dos-d'âne $L_0 = 1.5 \text{ m}$ et $h_0 = 0.12 \text{ m}$

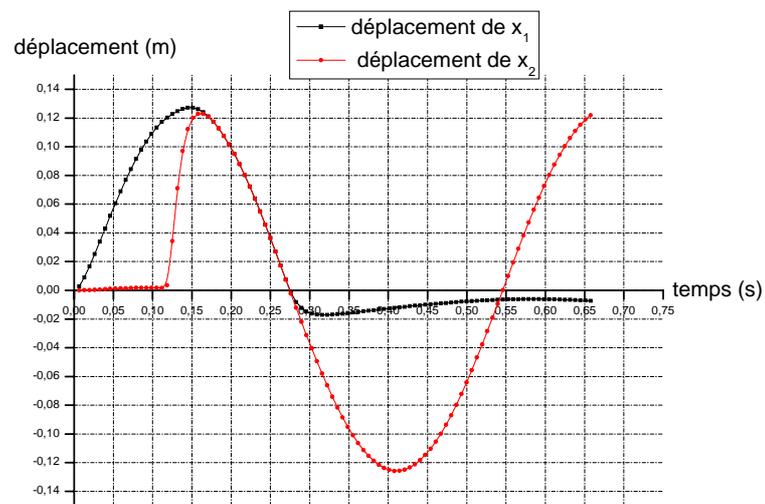
#### a. La vitesse de déplacement du véhicule $V = 20 \text{ km/h}$

$$T_1 = 0.27 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.11 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.65 \text{ s}$$

$$dt = 0.0065 \text{ s}$$



**Figure 5.13** - Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

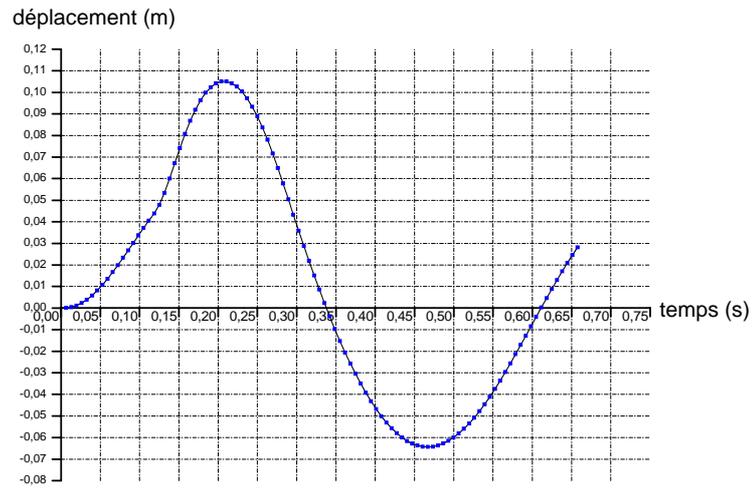


Figure 5.14 - Courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

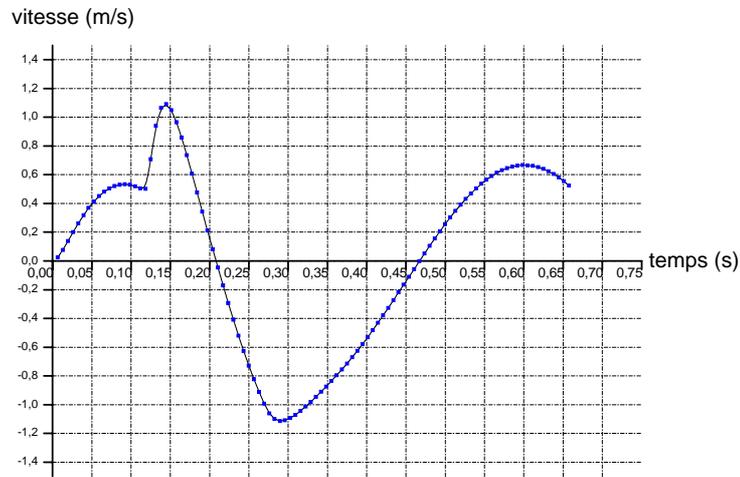


Figure 5.15 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

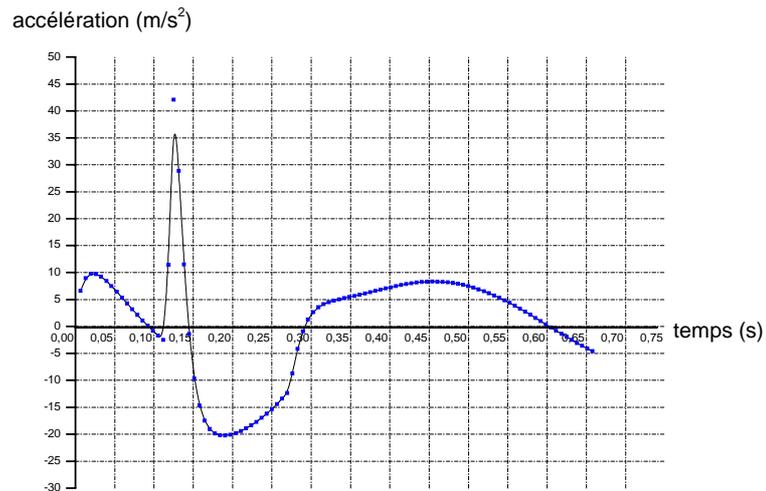


Figure 5.16 - Courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

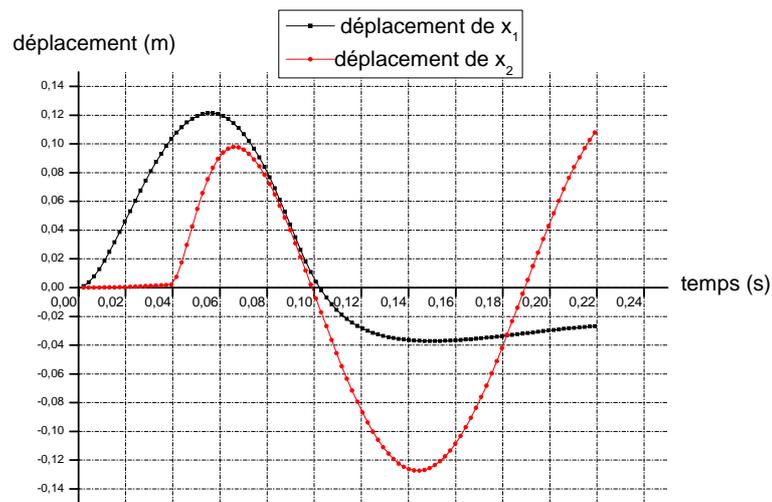
**b. La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 60 \text{ km/h}$** 

$$T_1 = 0.09 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.039 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.219 \text{ s}$$

$$dt = 0.0021 \text{ s}$$



**Figure 5.17-** Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

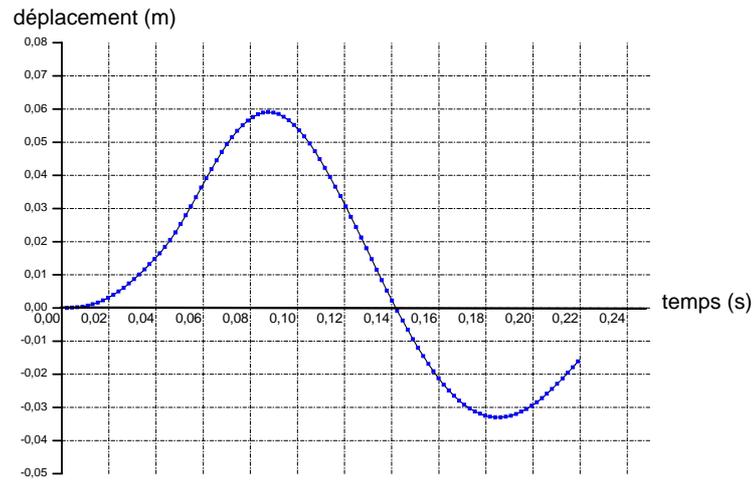


Figure 5.18 - Courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

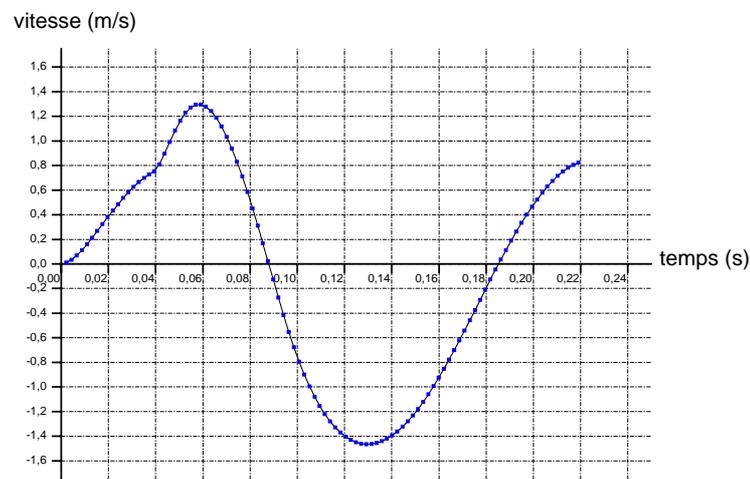


Figure 5.19 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

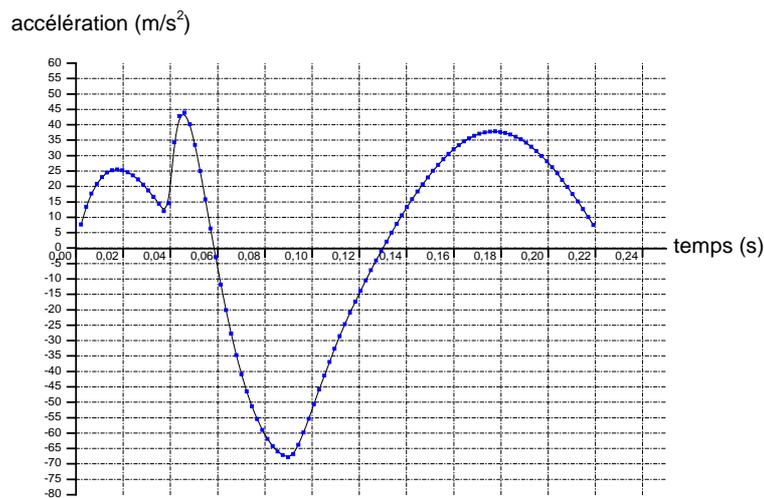


Figure 5.20 - Courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

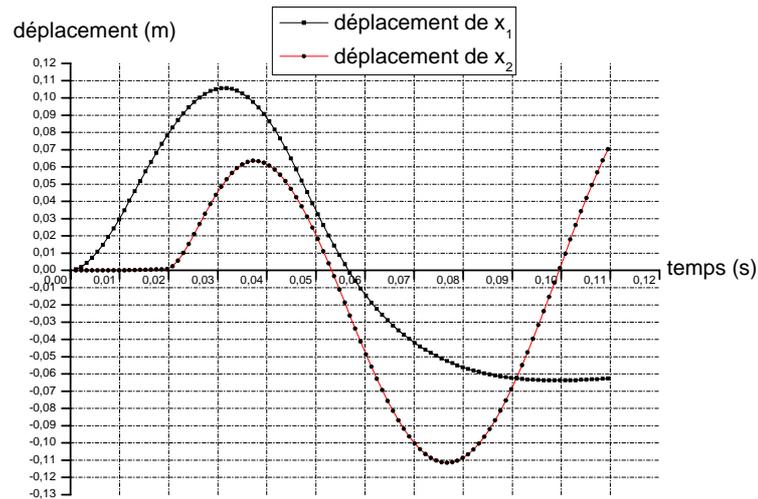
**c. La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 120 \text{ km/h}$** 

$$T_1 = 0.045 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.019 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.10 \text{ s}$$

$$dt = 0.0010 \text{ s}$$



**Figure 5.21** - Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_1, x_2$

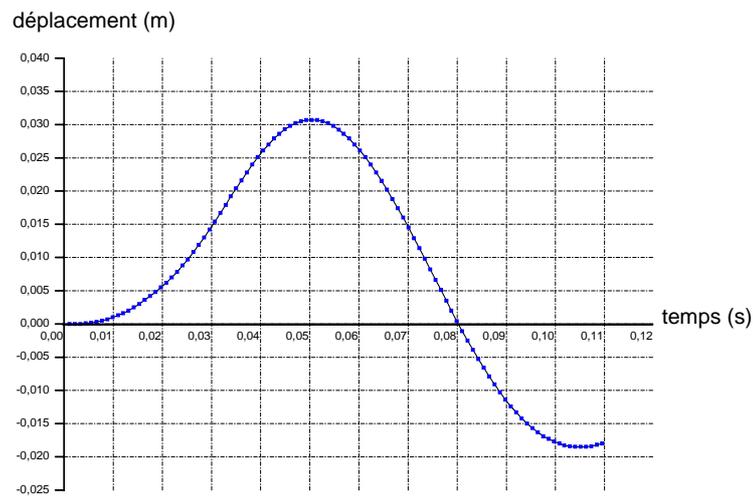


Figure 5.22 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

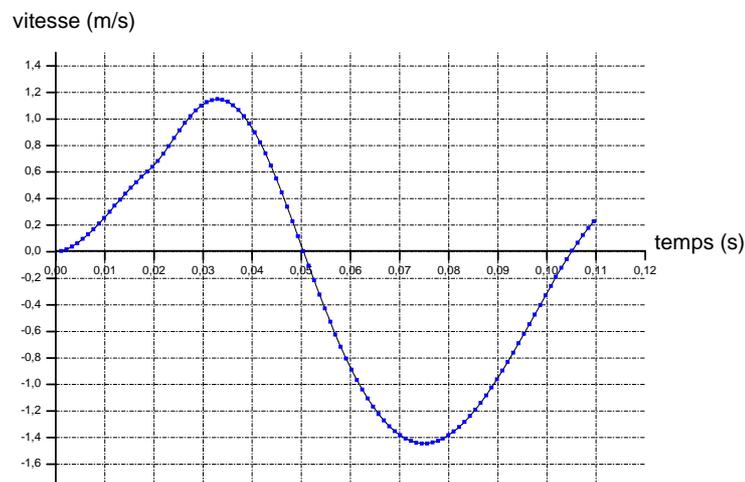


Figure 5.23 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

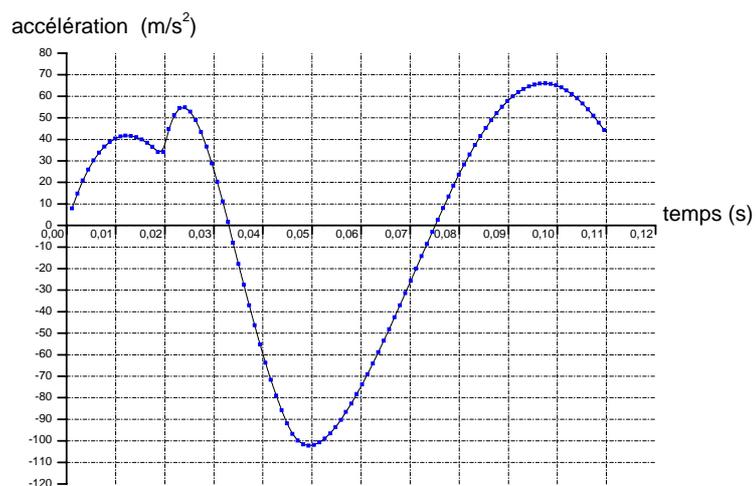


Figure 5.24 - courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

## 5. 2 Discussions des Résultats

A travers l'analyse sommaire des courbes représentatifs des résultats, il ressort de l'allure de ces dernières qu'elles illustrent bien la réalité du comportement vibratoire du véhicule et reflètent l'efficacité de l'algorithme de calcul.

L'expérience a montré que le seuil de l'inconfort commence à partir de la vitesse de 30Km/h pour un ralentisseur de géométrie bien étudiée. Nous proposons initialement une vitesse moindre de 20Km/h et ce pour compenser l'effet de la géométrie de l'obstacle utilisé réellement sur nos routes de forme sinusoïdal étroit.

➤ La courbe  $X_1(t)$  « déplacement vertical de l'essieu avant » coïncide exactement avec le dos d'âne en géométrie et dans le temps (c'est à dire qu'elle épuise bien la forme du dos d'âne pendant le déplacement du véhicule).Après avoir quitté l'obstacle, l'essieu continue à effectuer des oscillations de très petites amplitudes sur le reste du temps. Le phénomène est alors similaire au choc (amplitude assez grande dans un temps très court).

Influencé par la perturbation l'essieu arrière  $X_2(t)$  « déplacement vertical de l'essieu arrière » commence à vibrer dans son plan vertical avec de très petites amplitudes qui deviennent plus importantes dès que l'essieu rentre en contact avec le dos d'âne, mais beaucoup moins agressif que ceux de l'essieu l'avant. Cette situation s'explique par l'intervention du mouvement de tangage (mouvement de rotation de l'avant vers l'arrière autour de l'axe transversal passant par le centre de gravité) qui diminue de l'amplitude des d'oscillations. En conclusion, il est clair que le choc est perçu beaucoup plus à l'avant du véhicule qu'a l'arrière.

➤ La courbe  $X_3(t)$  relative au déplacement vertical du centre de gravité du véhicule atteindra sa valeur maximale au même moment ou sa vitesse  $\dot{X}_3(t)$  s'annule. C'est en ce moment juste que l'essieu avant quitte l'obstacle. A partir de cet instant l'amplitude diminue progressivement pour arriver à sa valeur nulle au même instant que la vitesse  $\dot{X}_3(t)$  est à son maximum. Le déplacement  $X_3(t)$  progresse dans le sens négatif juste au moment du contact de l'essieu arrière avec le dos d'âne avec l'amplitude plus petite que la précédente et ce par effet du tangage également.

➤ La courbe caractérisant l'accélération  $\ddot{X}_3(t)$  verticale du centre du véhicule représente bien la dérivée de la vitesse est assez remarquable au début et à la fin de chaque contact essieux avant et arrière avec l'obstacle et ceci est certainement du à la géométrie du dos d'âne (le début et la fin du dos d'âne sont marquées par des angles vifs).

➤ En examinant seulement les courbes  $X_3(t)$  pour trois différentes vitesses (20Km/h, 60Km/h et 120Km/h), Nous constatons ce qui suit :

1- L'amplitude maximale de déplacement verticale du centre de gravité  $X_3(t)$  diminue d'une manière remarquable (0.040m, 0.016m, et 0.008m) respectivement pour les trois vitesses considérées (20Km/h, 60Km/h, et 120Km/h).

2- Quant à la vitesse maximale de déplacement verticale du centre de gravité  $\dot{X}_3(t)$ , elle diminue progressivement en fonction de la vitesse de roulement du véhicule de la valeur (0.78 m/s pour V=20 Km/h), (0.74 m/s pour V= 60 Km/h) et (0.56 m/s pour V=120 Km/h).

3- L'accélération de déplacement vertical du centre de gravité  $\ddot{X}_3(t)$  augmente considérablement et atteint les valeurs suivantes (35m/s, 60m/s et 100m/s) respectivement pour les vitesses (20Km/h, 60Km/h, et 120Km/h).

La vitesse influente est plutôt celle pour laquelle l'étude doit être menée pour une gamme de vitesses plus large et pour une géométrie du dos d'âne déjà définie. S'appuyant plus sur l'accélération  $\ddot{X}_3(t)$  qui est un paramètre important en vibrations. Nous ne pouvant que tirer une conclusion partielle. La vitesse de roulement correspondant à ces résultats est la vitesse moyenne.

➤ Il ressort de l'examen du comportement du véhicule à travers le déplacement vertical  $X_3(t)$  du centre de gravité de la structure en gardant les mêmes vitesses de roulement pour une autre géométrie du dos d'âne ce qui suit.

1- Pour la vitesse  $V=20$  Km/h

$$L_0 = 0.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.04 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.2})$$

$$L_0 = 1.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.10 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.14})$$

2- Pour la vitesse  $V=60$  Km/h

$$L_0 = 0.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.016 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.6})$$

$$L_0 = 1.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.06 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.18})$$

3- Pour la vitesse  $V=120$  Km/h

$$L_0 = 0.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.008 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.10})$$

$$L_0 = 1.5, H_0 = 0.12 \quad \max X_3(t) = 0.030 \text{ m.} \quad (\text{Fig. 5.22})$$

Le maximum de  $X_3(t)$  diminue en fonction de la variation de la vitesse suivant la même progression que la précédente géométrie, cependant pour la même vitesse le  $\max X_3(t)$  augmente nettement en fonction de la longueur de l'obstacle. Cette longueur moyenne ( $L_0=1.5$  m) est à éviter parce que, en un temps très court les essieux sont excités provoquant doubles tangages avant arrière et inversement. La continuité des courbes relatives à la nouvelle géométrie de l'obstacle en est une explication. Plutôt une longueur du dos d'âne plus grande (supérieur à la longueur du véhicule) est recommandée. Ce qui va non seulement marquer la continuité des courbes relatives aux coordonnées généralisées, mais va diminuer et stabiliser le mouvement de tangage.

Il ressort de l'examen rapide des courbes  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  ainsi que les dérivées  $\dot{x}_3(t), \ddot{x}_3(t)$  Pour une géométrie du dos-d'âne mieux étudiée Comme illustrée sur la fig.5.25 (plus longue d'environ 5m, avec sortie et entrée plus douces que la précédente), que ces dernière sont continues toutes pour les différentes vitesses de roulement.

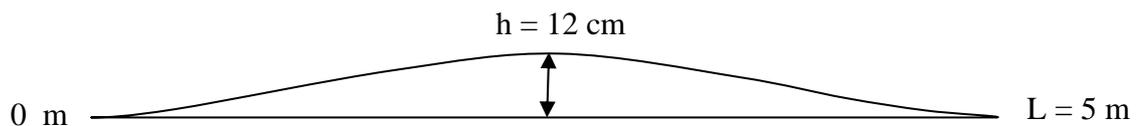


Figure 5. 25 - dos d'âne sinusoidale

### 5. 3 Tracer les courbes sur la longueur 5 m

Le profil en long conseillé est sinusoidal avec une longueur de 5 m et une hauteur de 12 cm.

L'équation du profil est la suivante :  $h = 0.06(1 - \cos \frac{2\pi}{L} x)$  d'où  $x = vt$

Ou  $x$  et  $h$  sont les coordonnées orthogonales et  $L$  la longueur du ralentisseur, les trois dimensions étant exprimées en mètres.

a) La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 20 \text{ km/h}$

$$T_1 = 0.86 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.47 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 1.25 \text{ s}$$

$$dt = 0.0125 \text{ s}$$

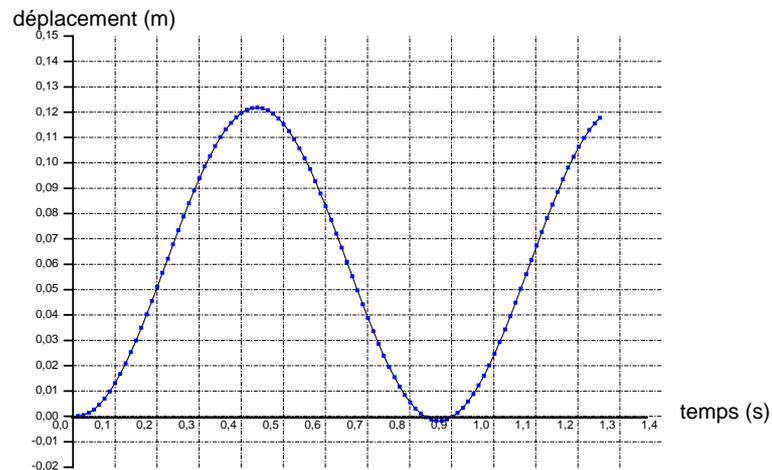


Figure 5.26 (a) - Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_1$

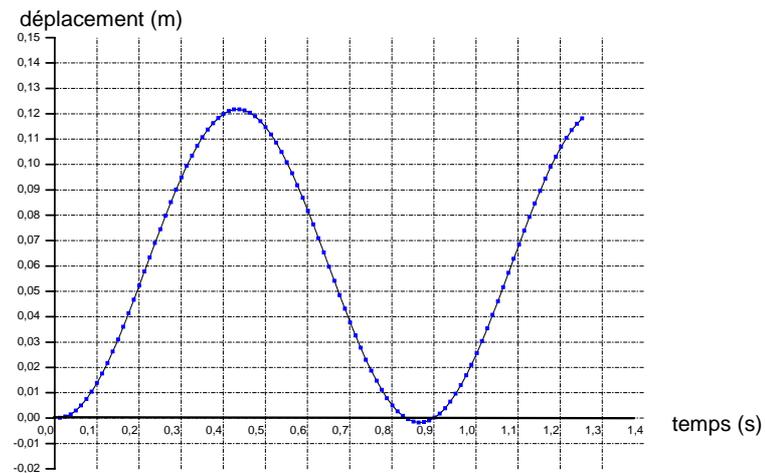


Figure 5.26 (b) - Courbes de déplacements verticales des essieux avant et arrière  $x_2$

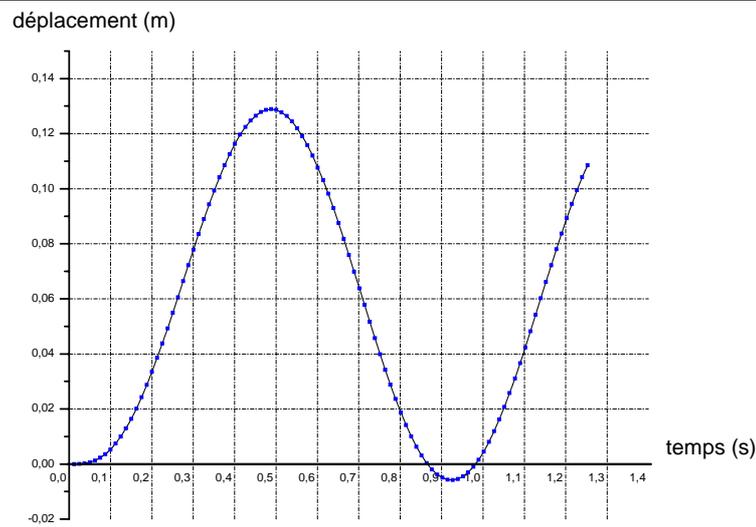


Figure 5.27 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

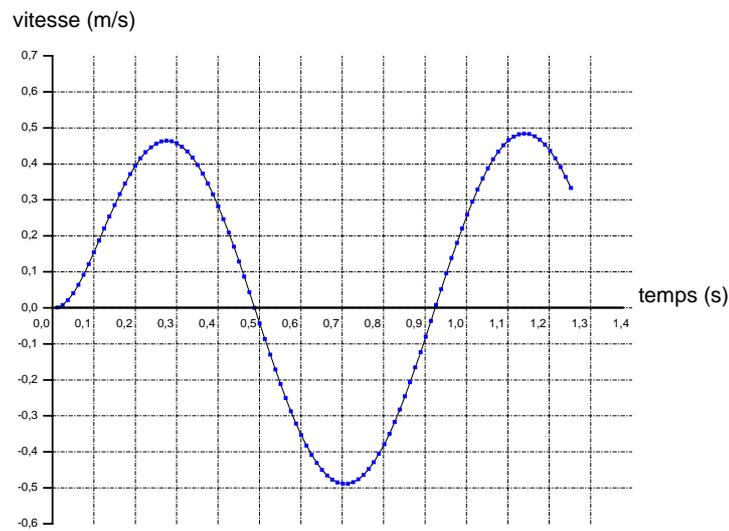


Figure 5.28 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

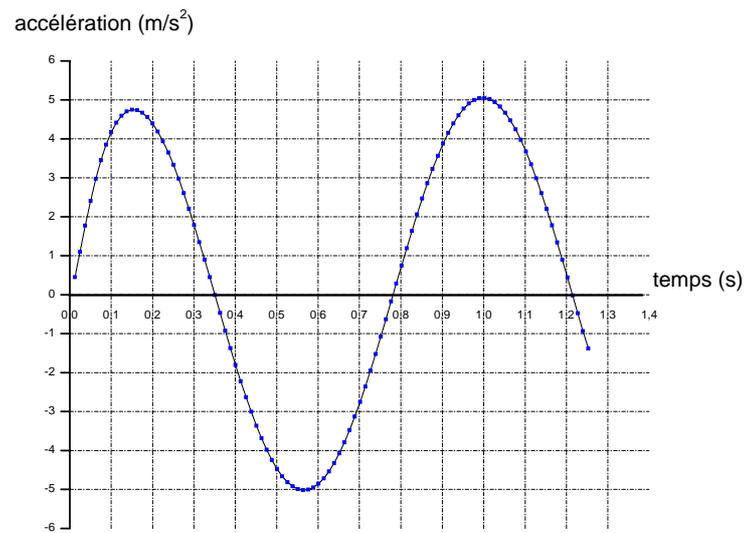


Figure 5.29 - Courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

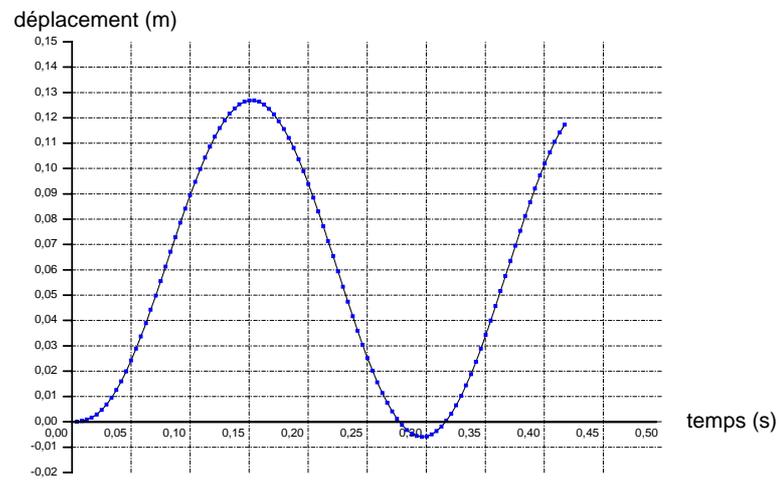
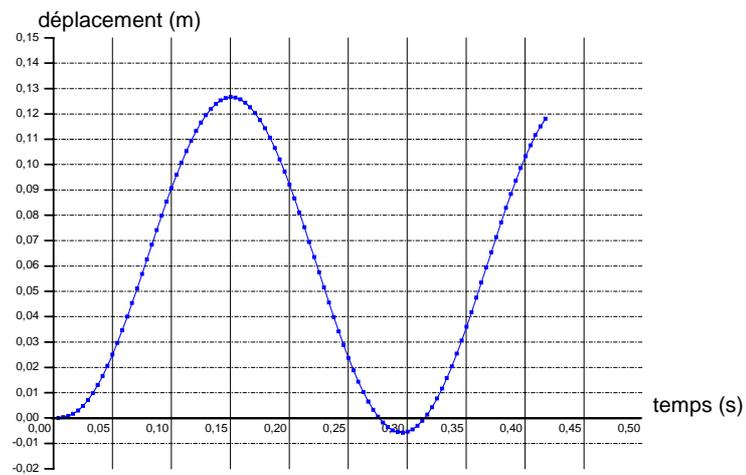
**b) La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 60 \text{ km/h}$** 

$$T_1 = 0.28 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.15 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.41 \text{ s}$$

$$dt = 0.0041 \text{ s}$$

**Figure 5.30 (a) - Courbes de déplacements verticaux d'essieu avant  $x_1$** **Figure 5.30 (b) - Courbes de déplacements verticales d'essieux arrière  $x_2$**

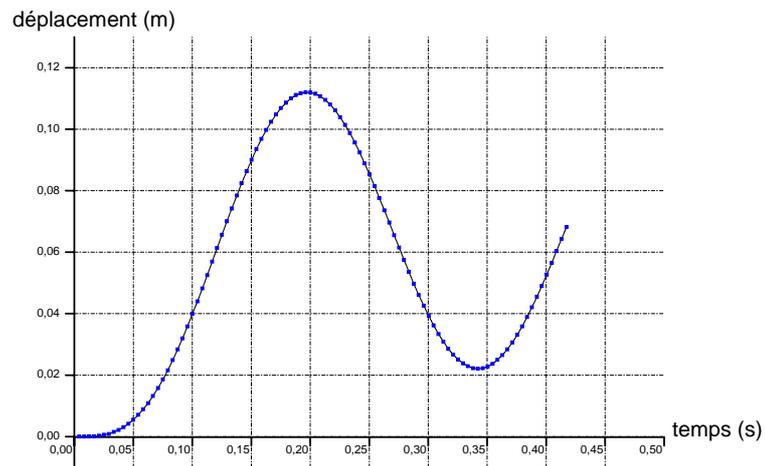


Figure 5.31 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

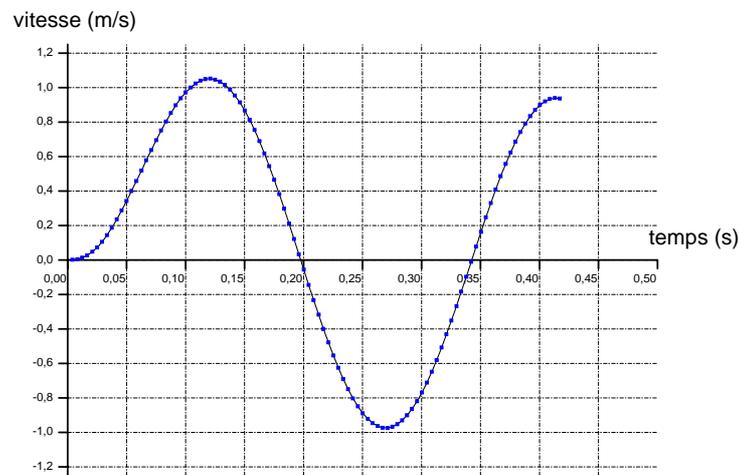


Figure 5.32 - Courbe de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

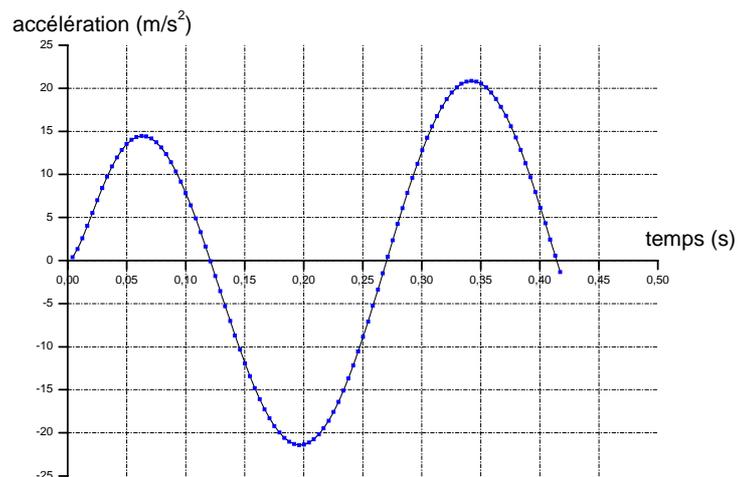


Figure 5.33 - courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

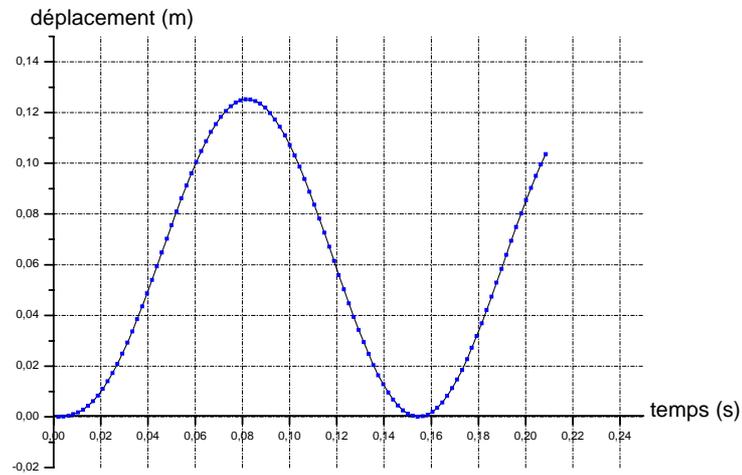
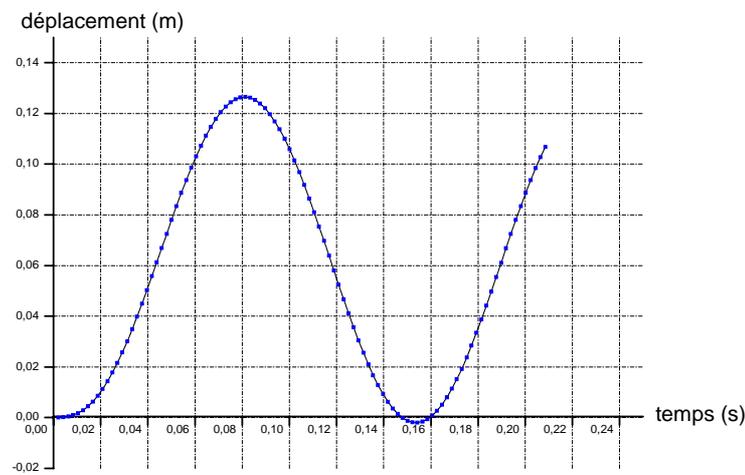
**c) La vitesse de déplacement du véhicule  $V = 120 \text{ km/h}$** 

$$T_1 = 0.14 \text{ s}$$

$$T_2 = 0.079 \text{ s}$$

$$T_{\max} = 0.20 \text{ s}$$

$$dt = 0.002 \text{ s}$$

**Figure 5.34 (a)** - Courbes de déplacements verticaux d'essieu avant  $x_1$ **Figure 5.34 (b)** - Courbes de déplacements verticales d'essieu arrière  $x_2$

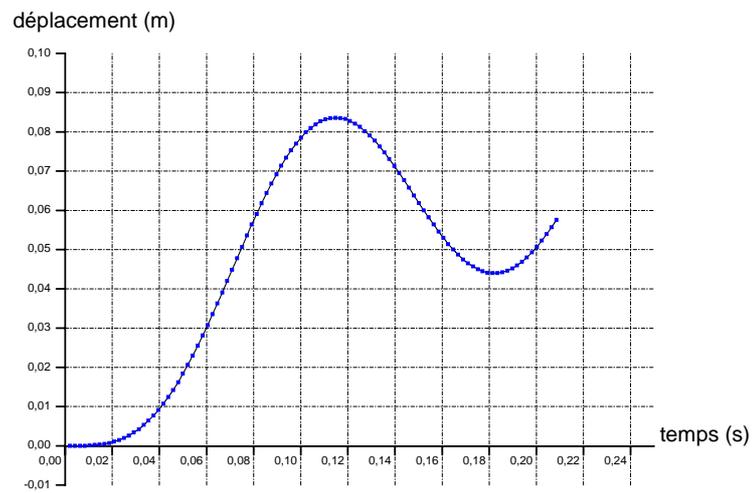


Figure 5.35 - courbe relatif du déplacement verticale de centre de gravité de la structure

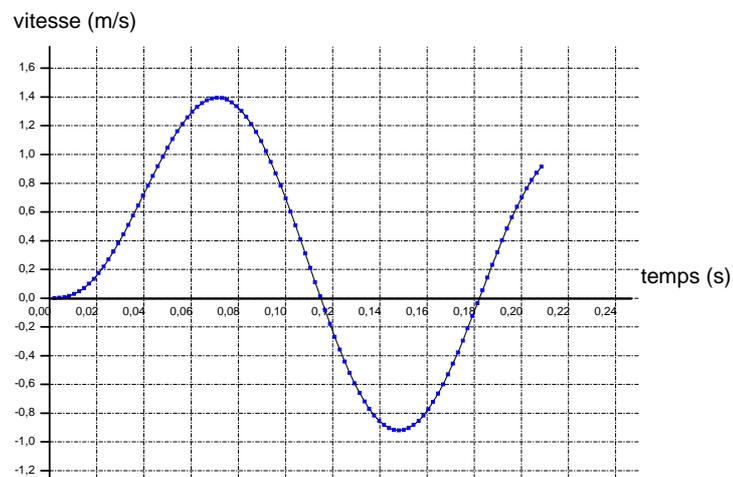


Figure 5.36 - Courbes de vitesse de déplacement du centre de gravité du véhicule

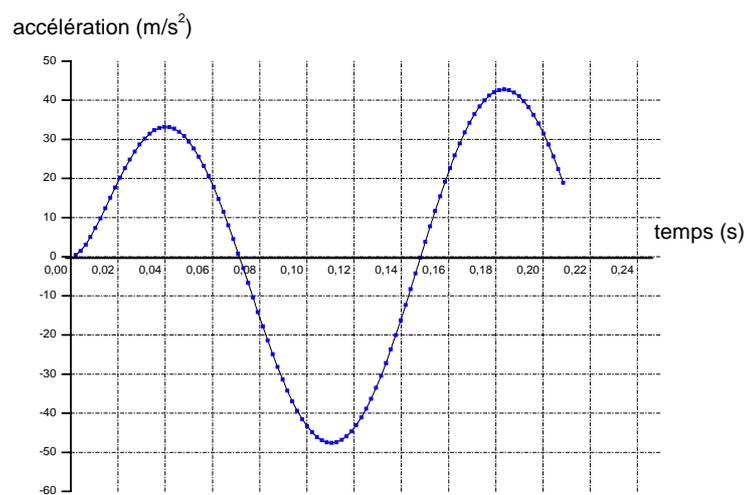


Figure 5.37 - courbe représentant l'accélération de déplacement du centre de gravité du véhicule

#### 5. 4 Discussions des Résultats

- Les courbes  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont pratiquement confondues, en effet un la longueur du dos d'âne d'environ 5m, les essieux se trouvent excités les deux à la fois d'une part. De l'autre part, il est visible comme le montre les graphes que lorsque  $X_1(t)$  est à son maximum, l'effet du tangage l'est aussi, et qu'à partir de ce moment  $X_2(t)$  ne fait que compenser l'effet du tangage jusqu'à ce que l'essieu arrière sera sur le point le plus haute du dos-d'âne.
- L'allure des courbes  $X_3(t)$  pour toutes les vitesses est très proche que ceux de  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  un peut moins pour grande vitesse.
- Les vitesses  $\dot{X}_3(t)$  augment progressivement avec l'augmentation de la vitesse de roulement.
- L'accélération  $\ddot{X}_3(t)$  augment rapidement avec l'augmentation de la vitesse de roulement comme précédent

De l'a il est claire que la géométrie conseillée à retenir est sinusoïdale avec longueur 5m et  $h_0 = 12$  cm.

Le seuil de sécurité est atteint pour une voiture bon état à la vitesse 60 km/h comme le montrent les courbes  $\dot{X}_3(t)$  et  $\ddot{X}_3(t)$

## **Conclusion générale**

La présente étude nous montre combien l'analyse du comportement dynamique d'un système est assez complexe. Car dépendant de beaucoup de paramètres influents, la formulation devient incapable d'en tenir compte.

Les méthodes de calculs présentés ne sont pas en mesure de tenir compte de tous les phénomènes responsables du bon fonctionnement du véhicule. Ainsi les vibrations provenant d'une source déterministe sont maîtrisés beaucoup plus que ceux d'une source aléatoire (non contrôlable) et la mécanique classique n'est plus en mesure d'analyser ce type d'excitation et incapable d'expliquer les effets qui apparaissent.

La tendance actuelle est de construire des systèmes dynamiques rationnels nécessitant des méthodes d'analyses puissantes capables d'en tenir compte, comme on peut le faire si l'on veut se donner les moyens, d'inclure dans le calcul l'ensemble de l'environnement influant. Seulement, il n'existe pas à notre connaissance d'études complètes qui tient compte de tous les effets.

L'intérêt des études dont on a fait la synthèse est considérable car, menées par des chercheurs à la fois remarquable sur le plan scientifique et également très au faite des nécessités technologiques, elles ont largement dégagés les phénomènes et les paramètres qui doivent être pris en compte plus que d'autres (les véhicules de transports sont plutôt mieux suspendus en charge qu'à vide) autrement, il n'existe pas de suspension qui répond à tous les chargements.

Dans notre travail, nous avons entrepris l'étude du comportement vibratoire du véhicule roulant à la vitesse constante à la rencontre d'un obstacle de type dos d'âne dont la géométrie est définie. Les courbes de déplacements, vitesses et accélérations de différentes coordonnées caractérisant le comportement de la structure sont tracées pour différentes vitesses et différentes géométries de l'obstacle. La lecture et l'analyse de ces courbes nous informent sur les paramètres (vitesse et géométrie de l'obstacle) les plus influents.

L'intérêt qu'on s'y fixe est d'identifier et corriger le défaut survenant pendant l'exploitation du véhicule à la rencontre de l'obstacle souvent de géométrie mauvaise, placées de manière malheureusement non étudié sur les routes nationales grandes circulation.

On s'y limite à donner dans ce travail la méthode générale de calcul et le programme correspondant qui permet de déterminer les déplacements des coordonnées et leurs dérivées

premières et secondes pour différents paramètres intervenants (chargement, vitesse de déplacement du véhicule, nature de la chaussée, caractéristiques du véhicule,.....). Pour un éventuel calcul de résistance, le programme calcule aussi les forces dynamiques dans chaque coordonnée à tous moments. Nous laissons l'application particulière au bon choix de l'utilisateur de ce mémoire pour l'étude et l'influence de tel ou tel paramètre.

Nous terminons enfin notre conclusion par quelques dispositions dont il faut prendre soin afin d'éviter le danger qui peut arriver à la rencontre du dos d'âne.

- Le profil du ralentisseur conseillé est sinusoïdal de longueur d'environ cinq mètres, avec une hauteur de douze centimètres maximum.

L'expression analytique du profil est :  $h = 0.06(1 - \cos \frac{2\pi}{L} vt)$

- La localisation doit préciser le ralentisseur, sa forme et ses dimensions ainsi que son marquage et sa signalisation.
- Le seuil de sécurité est atteint pour une vitesse de 60 Km/h pour un véhicule bon état (théorique) et au-delà, il y a risque de perte de contrôle.
- Des fondations spéciales pour ralentisseurs doivent être prévus, car les sollicitations engendrent comme nous l'avons vu des vibrations qui peuvent être à l'origine de détériorations et de nuisances dans les immeubles proches des routes.

- [1] S. Boukerroum, N. Hamzaoui et N. Ouali. Performances d'une suspension semi active à commande continuellement variable modifiée d'un modèle de demi-véhicule. *CSM 2006 Alger, 18 - 20 Novembre 2006*
- [2] S. Berstein et P. Milza, Histoire de la France au XX<sup>e</sup> siècle Editions Complexe, *France 1945-1958, 1999*
- [3] D. Puiboube, Un siècle d'automobile en France, 2000 p 136
- [4] J. Reimpell, H. S, Betzler. The automotive chassis: engineering principles. 2<sup>nd</sup> édition.2001, SAE
- [5] P. Duysinx, partim Eléments de suspension .Ingénierie des Véhicules Terrestres .Suspension .*Université de Liège Année Académique 2007-2008*
- [6] J.P. Haste, -all, Optimization on Macpherson Suspensions with spring. *Society of quto; qtive Engineersm Inc 1997-01000*
- [7] J. Reimpell, H.Stoll, J.Betzler. The automotive chassis: engineering principles.2<sup>nd</sup> edition. 2001, SAE
- [8] F. Djaba. Comportement vibratoire d'un véhicule (camion) excitation déterministe. Mémoire ingénieur 2001 *université de Batna-Alger*
- [9] C. Demoucroun, A. Ouakka, M. Pétrequin et S.Hriri. Modélisation d'un sous-système de suspension automobile. 18<sup>ème</sup> *Congrès français de mécanique, Grenoble, 27-31 aout 2007*
- [10] M.A. Julien. Dynamique de la voiture automobile. Technique et documentation. *Paris 1960*
- [11] F. A. Rodrigues, Etude de la dynamique non linéaire d'amortisseurs du type squeeze film *février 2003*
- [12] M. Blundel and D.Harty, The multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics.2004. Society of Automotive Engineers (SAE)
- [13] A.A. Silaev, Théorie spectral de la suspension à ressort des véhicules de transport, deuxième édition revue et complétée, *Moscou1972, Masinostroenie, 192p*
- [14] K. Seghir & R. Benbouda, Détermination des caractéristiques probabilistes du comportement dynamique d'un véhicule. (Algorithme de calcul de la fonction de transfert) *18 ème Congrès Français de Mécanique Grenoble, 27-31 août 2007*
- [15] S.P. Timosenko, Vibration dans le domaine technique ; *Moscou, 1967*
- [16] M. Lalanne, et P. Berthier, Mécanique de vibrations linéaires, *Masson1986*
- [17] G. Rill, Vehicle dynamique, *March 2009*

- [18] G. Genta, Motor Vehicle Dynamics, World Scientific, *London, 1997*
- [19] Y.L.Kavalev, Calcul des vibrations d'une automobile, dans le cas des suspensions caractéristiques non linéaires. *Automobile 1980*
- [20] Babakovim, Théorie des vibrations ; *Moscou, 1958*
- [21] D.Hartog, Vibration mécaniques, *Paris, Dunod 1960*
- [22] J .C.Butcher, the Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. John Wiley-Sons. (1987) [*MA.65/276*]
- [23] A. Pecker, Dynamique des structures et des ouvrages .Ecole nationale des pontes et chaussés Edition 2006
- [24] J.Ryu, State and parameter estimation for vehicle dynamics control using GPS December 2004
- [25] A.M.Stuat – A.R. Humphries, Dynamical Systems and Numerical Analysis. *Cambridge Univ. Press. (1996): [MA 65/377]*
- [26] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs deuxième édition. *1996*
- [27] J.P.Nougier, Méthodes de calcul numérique .*Masson, 1984*
- [28] E. Hairer, Travaux pratiques en collaboration avec A. Abdulle, Introduction à l'analyse numérique, *Université de Genève Section de mathématiques 2001*

---

**\*\*\*\*\*Programme 1\*\*\*\*\*****Calculs des coefficients de l'équation caractéristique**

Dimension A (100,100), B (100,100), D (100,100), K (100,100),

M (100,100), C (100), N=4

Ks1=25000, Ks2=21739, Kp1=800000, Kp2=800000

L1=1, L2=1.15

DO 3 I=1, N, 1

DO 4 J=1, N, 1

K (I, J) =0, M (I, J) =0

4 Continue

3 Continue

DO 5 I=1, N, 1

Read (\*,\*) X1

M (I, I) =X1

5 Continue

K (1, 1) =Kp1+Ks1

K (1, 2) =0

K (1, 3) = -Ks1

K (1, 4) = - (Ks1)\*L1

K (2, 2) = Kp2+Ks2

K (2, 3) = -Ks2

K (2, 4) = Ks2\*L2

K (3, 3) = Ks1+Ks2

---

$$K(3, 4) = Ks1 * L_1 - Ks2 * L_2$$

$$K(4, 4) = Ks1 * (L_1 ** 2) + Ks2 * (L_2 ** 2)$$

DO 6 I=2, N, 1

DO 7 J=1, N, 1

$$K(I, J) = K(J, I)$$

7 Continue

6 Continue

DO 8 I=1, N, 1

DO 9 J=1, N, 1

WRITE (\*,\*) 'K', '(I, J)', K(I, J)

9 Continue

8 Continue

$$C(1) = 0$$

DO 10 I=1, N, 1

DO 11 J=1, N, 1

$$A(I, J) = K(I, J) / M(I, I), B(I, J) = K(I, J) / M(I, I)$$

11 Continue

$$C(1) = C(1) + B(I, I)$$

10 Continue

$$C(1) = -C(1)$$

Write (\*,\*) 'C(1)', C(1)

DO 12 P=2, N, 1, S2=0

DO 13 I=1, N, 1

DO 14 J=1, N, 1

$$D(I, J) = A(I, J)$$

```
IF (I.EQ.J) THEN
D (I, J) =A (I, J) +C (P-1)
END IF

14 Continue

DO 15 J=1, N, 1, S=0
DO 16 q=1, N, 1, S=S+D (I, J)*B (I, J)

16 Continue

A (I, J) =S

15 Continue

S2=S2+A (I, I)

13 Continue

C (P) = -S2/P

Write (*,*)'C (' , P,)', C (P)

12 Continue

DO 17 I=1, N, 1

WRITE (*,*)'M','( , I,',', I,)', M (I, I)

17 Continue

STOP

END
```

## \*\*\*\*\*Programme2\*\*\*\*\*

Résolution de l'équation caractéristique par la méthode de BAIRSTOW

Dimension A(100), B(100), SIG(100), Réel(100), IMAGI(100)

N=4

N1=N

Write (\*,\*) 'COEFFICIENTS DANS L'ORDRE DECROISSANT'

DO 1 I=1, N+1, 1

Read (\*,\*) AN

A (I) =AN

Write (\*,\*) A (I)

1 Continue

GOTO 260

90 S=0

P=0

100 Call NET(S1,P1,A,B,S,P,SIG,DS,DP,D,N)

AA= (ABS (S1-S) +ABS (P1-P))

BB= (ABS (S1) +ABS (P1))

C=AA/BB

S=S1

P=P1

E=0.0001

IF (C.GT.E) GOTO 100

DO 2 J=1, 4, 1

Call NET(S1,P1,A,B,S,P,SIG,DS,DP,D,N)

S=S1

P=P1

2 Continue

Call EQ2(S, P, N, REEL, IMAGI, P, SIG)

Write (\*,\*)'r'

N=N-2

DO 3 I=1, N+1, 1

A (I) =B (I)

3 Continue

260 IF (N.GT.2) GOTO 90

IF (N.EQ.2) GOTO 310

Reel (2) =-A(2)/A(1)

IMAG I (2) =0

GOTO 340

310 S=-A (2)/A (1)

P=A (3)/A (1)

Call EQ2(S, P, N, REEL, IMAGI, P, SIG)

340 DO 4 I=2, N1+1, 1

Write (\*,\*) I, Reel (I), IMAGI (I)

4 Continue

GOTO 670

670 STOP

END

**SUBROUTINE NET(S1,P1,A,B,S,P,SIG,DS,DP,D,N)**

Dimension A (100), B (100), SIG (100), REEL (100), IMAGI (100)

B(1)=A(1)

---


$$B(2)=A(2)+S*B(1)$$

$$B(3)=A(3)+S*B(2)-P*B(1)$$

$$SIG(1)=0$$

$$SIG(2)=B(1)$$

$$SIG(3)=B(2)+S*SIG(2)$$

DO 5 K=4, N+1, 1

$$B(K) = A(K) + S*B(K-1) - P*B(K-2)$$

$$SIG(K) = B(K-1) + S*SIG(K-1) - P*SIG(K-2)$$

5 Continue

$$D = SIG(N+1)*SIG(N-1) - SIG(N)*SIG(N)$$

$$DS = B(N)*SIG(N) - B(N+1)*SIG(N-1)$$

$$DP = B(N)*SIG(N+1) - B(N+1)*SIG(N)$$

$$520 \quad S1 = S + DS/D$$

$$P1 = P + DP/D$$

Return

END

**Subroutine EQ2(S, P, N, Reel, IMAGI, SIG, ELT)**

Dimension SIG (100), Reel (100), IMAGI (100)

$$ELT = S*S - 4*P$$

IF (ELT.LT.0) Then

Call EQ21(S, P, N, Reel, IMAGI, SIG, ELT)

Else

$$Reel(N+1) = 0.5*(S + SQRT(ELT))$$

$$Reel(N) = P/REEL(N+1)$$

$$IMAGI(N+1) = 0$$

IMAGI (N) =0

End if

Return

END

**SUBROUTINE EQ21(S, P, N, REEL, IMAGI, SIG, ELT)**

Dimension SIG (100), Reel (100), IMAGI (100)

Reel (N+1) =S/2

Reel (N) =S/2

IMAGI (N+1) =SQRT (-ELT)/2

IMAGI (N) =-IMAGI (N+1)

Return

END

### Description des étapes de calcul (programme) de la méthode R-K4

Nous écrivons le système d'équations différentielles sous la forme :

$$\left\{ \dot{Z} \right\} = - \underbrace{[G]}_I \left\{ Z \right\} + \underbrace{[N]}_II \left\{ \dot{H} \right\} + [M] \left\{ H \right\} \quad [4-4]$$

Le programme se compose essentiellement d'une partie déclarative qui contient les données (constantes) techniques, dont une partie qui s'occupe les fonctions d'entrée et leurs dérivées

(Page 52) que nous définissons dans le programme par :

$$\begin{cases} FNH1(T) = h_1(t) \\ FNH1P(T) = \dot{h}_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} FNH2(T) = h_2(t) \\ FNH2P(T) = \dot{h}_2(t) \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} FNF1(T) = \frac{C_{p1}}{M_1} FNH1P(T) + \frac{K_{p1}}{M_1} FNH1P(T) \\ FNF2(T) = \frac{C_{p2}}{M_2} FNH2P(T) + \frac{K_{p2}}{M_2} FNH2P(T) \end{cases}$$

(T) : étant la variable temps

La procédure (sous programme) INIT détermine les éléments des deux matrices [B] et [C] c'est-à-dire ceux de la matrice [G] qui sont d'ailleurs fonctions des paramètres techniques du véhicule.

Ces éléments peuvent être constants, comme variables cela dépend de l'objectif du calcul ; par exemple si on veut calculer ou choisir les rigidités de la suspension, il est question de véhicule en charge ou à vide.

Les deux autres procédures sont celle de RUNGE KUTTA notée RUNG et celle notée « defin » qui calcule la partie droite du système d'équation à l'instant donné.

La variable principale est le temps « t » dont le pas de discrétisation est (dt)

Les paramètres variables sont

- La nature de la chaussée, c'est-à-dire (V, h0, L0)
- Le nombre d'équations est fixe :  $n_{eq} = 8$
- Le nombre des pas de l'intervalle « t » :  $nstep = 100$

La procédure RUNG détermine ZZ[j] que nous introduisons dans la matrice à deux rangs

$Z [i, j] = ZZ[j]$ .

J=1..4, représente les vitesses d'après le changement de variable

J=5..8, représente les déplacements

L'indice « i » est celui du temps.

Dans la matrice Axe [i, j] sont récoltés les accélérations (j=1..4)

Donc le programme ainsi écrit, nous fournira à toute instant de l'intervalle du temps « t » les déplacements, vitesses et accélérations de chaque coordonnées «  $X_i$  » ce qui nous permettra si l'on veut calculer les forces élastiques, de frottements visqueux et d'inerties.

\*\*\*\*\***Programme 3**\*\*\*\*\*

Résolution des équations différentielle et déterminée les différentes coordonnées

**Parameter** (nstep=100, neq=8)

Real az (8), z (nstep, 8), axe (nstep, 8), tt (nstep), b (4, 4), c (4, 4), zp (8), zz (8), uu (8)

Real fel1 (nstep), fel2 (nstep), ffr1 (nstep), ffr2 (nstep)

real L<sub>0</sub>,L,L<sub>1</sub>,L<sub>2</sub>,Cs<sub>1</sub>,Cs<sub>2</sub>,Cp<sub>1</sub>,Cp<sub>2</sub>,Ks<sub>1</sub>,Ks<sub>2</sub>,Kp<sub>1</sub>,Kp<sub>2</sub>,M<sub>1</sub>,M<sub>2</sub>,M<sub>3</sub>,J<sub>3</sub>,v,h<sub>0</sub>

!fel1; fel2; ffr1; ffr2;

L =2.15 m; L<sub>1</sub> =1.00 m ; L<sub>2</sub> =1.15 m

Cs<sub>1</sub>=8150 N.s/m; Cs<sub>2</sub>=7080 N.s/m; Cp<sub>1</sub>=5500 N.s/m;

Cp<sub>2</sub>=5000 N.s/m.

Ks<sub>1</sub>=25000 N/m.; Ks<sub>2</sub>=21739 N/m.; Kp<sub>1</sub>=800000 N/m;

Kp<sub>2</sub>=800000. N/m

M<sub>1</sub>=55 Kg. ; M<sub>2</sub>=55 Kg. ; M<sub>3</sub>=900 Kg.

J<sub>3</sub>=2000

Write (\*,\*)'-----lire le L0-----'

Read (\*,\*) L0

Write (\*,\*)'-----lire la vitesse v -----'

Read (\*,\*) v

Write (\*,\*)'-----lire la hauteur h0-----'

Read (\*,\*) h0

$$t_1 = L_0 / v$$

$$t_2 = (L - L_0) / v$$

$$t_{\max} = (L + L_0) / V$$

$$dt = t_{\max} / nstep$$

Write (\*,\*) t1, t2, tmax, dt

---

\*\*\*\*\*Programme principal\*\*\*\*\*

**Call init**

t=0

Do i=1, nstep

**Call rung (zz)**

tt (i)=t

Do j=1, neq

z (i,j)= zz(j)

! (j=1.4 vitesse j=5.8 déplacements)

Enddo

**Call defin (Zp)**

Do j=1, neq

Axe (i, j) =zp(j)

! (j=1.4 accelerations)

(Calcul des forces de frottements et élastique relatives aux châssis)

fel1 (i)

Suspension avant

fel2 (i)

Suspension arrière

ffr1 (i)

!amortisseur avant

ffr2(i)

!amortisseur arrière

Ifin =ifin+1

End do

---

**Function fnf1 (t)**

If (t.le.t1) then

fnh1

fnh1p

Else

If (t.le.t2) then

fnh1

fnh1p

Endif

End if

fnf1

End function fnf1

**Function fnf2 (t)**

If (t.le.t2) then

fnh2

fnh2p

Else

fnh2

fnh2p

Endif

fnf2

Endfunction fnf2

**Subroutine init**

! (Coefficients d'amortissements)

b (1,1)= (Cs1+Cp1)/M1

$$b(1,2)=0$$

$$b(1,3)=-C_{s1}/M_1$$

$$b(1,4)=-L_1 * c_{s1}/M_1$$

$$b(2,1)=0$$

$$b(2,2)=(C_{s2}+C_{p2})/M_2$$

$$b(2,3)=-C_{s2}/M_2$$

$$b(2,4)=L_2 * C_{s2}/M_2$$

$$b(3,1)=-C_{s1}/M_3$$

$$b(3,2)=-C_{s2}/M_3$$

$$b(3,3)=(C_{s1}+C_{s2})/M_3$$

$$b(3,4)=(L_1 * C_{s1} - L_2 * C_{s2})/M_3$$

$$b(4,1)=-L_1 * C_{s1}/J_3$$

$$b(4,2)=L_2 * C_{s2}/J_3$$

$$b(4,3)=(L_1 * c_{s1} - L_2 * C_{s2})/J_3$$

$$b(4,4)=(L_1 * L_1 * C_{s1} + L_2 * L_2 * C_{s2})/J_3$$

! (Vérification des éléments des matrices)

Do i=1, 4

Write (\*,\*) (b(i, j), j=1,4)

Enddo

! (Coefficients de rigidité)

$$C(1,1) = (k_{s1} + k_{p1})/M_1$$

$$c(1,2) = 0$$

$$c(1,3) = -K_{s1}/M_1$$

$$c(1,4) = -L_1 * k_{s1}/M_1$$

$$c(2,1) = 0$$

$$c(2,2) = (Ks2 + Kp2 / M2)$$

$$c(2,3) = -Ks2 / M2$$

$$c(2,4) = L2 * Ks2 / M2$$

$$c(3,1) = -Ks1 / M3$$

$$c(3,2) = -Ks2 / M3$$

$$c(3,3) = (Ks1 + Ks2) / M3$$

$$c(3,4) = (L1 * Ks1 - L2 * Ks2) / M3$$

$$c(4,1) = -L1 * Ks1 / J3$$

$$c(4,2) = L2 * Ks2 / J3$$

$$c(4,3) = (L1 * Ks1 - L2 * Ks2) / J3$$

$$c(4,4) = (L1 * L1 * Ks1 + L2 * L2 * Ks2) / J3$$

! (Vérification des éléments des matrices)

Do I=1, 4

Write (\*,\*) (c(i, j), j=1, 4)

Enddo

Do i=1, neq

zz(i)=0

End do

End subroutine init

### **Subroutine defin (Zp)**

Real Zp (8)

$$A1 = -(b(1,1) * zz( ) + b(1,3) * zz( ) + b(1,4) * zz( ))$$

$$Y1 = -(c(1,1) * zz( ) + c(1,3) * zz( ) + c(1,4) * zz( ))$$

$$Zp(1) = A1 + Y1 + fnf1(t)$$

$$A2 = -(b(2,2) * zz( ) + b(2,3) * zz( ) + b(2,4) * zz( ))$$

$$Y2 = -(c(2,2) * zz( ) + c(2,3) * zz( ) + c(2,4) * zz( ))$$

$$Zp(2) = A2 + Y2 + fnf2(t)$$

$$A3 = -(b(3,1) * zz( ) + b(3,2) * zz( ) + b(3,3) * zz( ) + b(3,4) * zz( ))$$

$$Y3 = -(c(3,1) * zz( ) + c(3,2) * zz( ) + c(3,3) * zz( ) + c(3,4) * zz( ))$$

$$Zp(3) = A3 + Y3$$

$$A4 = -(b(4,1) * zz( ) + b(4,2) * zz( ) + b(4,3) * zz( ) + b(4,4) * zz( ))$$

$$Y4 = -(c(4,1) * zz( ) + c(4,2) * zz( ) + c(4,3) * zz( ) + c(4,4) * zz( ))$$

$$Zp(4) = A4 + Y4$$

$$Zp(5) = zz(1)$$

$$Zp(6) = zz(2)$$

$$Zp(7) = zz(3)$$

$$Zp(8) = zz(4)$$

ENDSUBROTINE DEFIN

### **SUBROTINE RUNG (ZZ)**

real Yi(8), Yj(8), Yk(8), YL(8), uu(8), zz(8), zp(8)

Do K=1, neq

zz(K) = Uu (K)

Enddo

Do K=1, neq

Call defin (Zp)

Yi(K) = zp(K) \* dt

zz(K) = uu(K) + Yi(K) / 2

Enddo

T = t + dt / 2

Do K=1, neq

---

Call defin (zp)

$Y_j(K) = zp(K) * dt$

$zz(K) = uu(K) + Y_j(K) / 2$

Enddo

Do K=1, neq

Call defin (zp)

$Y_k(K) = zp(K) * dt$

$zz(K) = uu(K) + Y_k(K) / 2$

Enddo

$t = t + dt / 2$

Do K=1, neq

Call defin (zp)

$Y_L(K) = zp(K) * dt$

$zz(K) = uu(K) + (Y_i(K) + 2 * Y_j(K) + 2 * Y_k(K) + Y_L(K)) / 6$

Enddo

ENDSUBROTINE RUNG

**END**

