REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THESE

Présentée

Au département de mécanique
Faculté des sciences de l'ingénieur
Université de Batna

Pour obtenir le titre de

Magister en Génie mécanique

***Option* : Construction**

Par
Mr. : BOUKHLOUF Brahim

Thème :

ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE DES STRUCTURES PLANES PAR LA METHODE DES ROTULES PLASTIQUES

Soutenue devant le jury composé de :

Dr. ZIDANI K.	M. de Conférence, université de Batna	Président
Pr. CHARIF A/hamid	Professeur, K.S.U Riadh	Rapporteur
Dr. MAZOUZ H.	M. de conférence, université de Batna	Co-rapporteur
Dr ABECHE K.	M. de conférence, université de Batna	Examinateur
Dr. ASSAS M.	M. de conférence, université de Batna	Examinateur
Dr. ZEDIRA H.	M. de conférence, centre univ. Kenchela	Examinateur

Remerciements

Je remercie en premier lieu Allah tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté de pouvoir accomplir ce travail.

Que Monsieur le Professeur CHARIF Abdelhamid directeur de thèse soit assuré de ma profonde reconnaissance pour avoir diriger mon travail, pour son aide permanent sur tous les plans. En particulier sa disponibilité malgré son éloignement et de m'avoir fait confiance tout au long de mes travaux.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur le Docteur MAZOUZ Hamoudi co-directeur de thèse pour avoir diriger mon travail et pour en avoir suivi toutes les étapes avec intérêt constant, pour ses précieux conseils et pour l'amicale sollicitude qu'il a toujours témoignée à mon égard.

Mes remerciements s'adressent également au président et aux membres du jury pour avoir accepter d'examiner ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A ma mère et mon père

A ma femme et mes enfants : Sara et Nessrine

A mes frères et sœurs en particulier Oussama

A mes amis, mes proches et toute personne ayant collaborer à cette thèse

A mon ami Rassim

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 1 Introduction

1.1 Introduction

La plupart des matériaux structuraux montrent comme premier comportement, celui réversible élastique jusqu'à une certaine limite (appelée la limite d'élasticité) au-delà de laquelle des déformations plastiques apparaissent et le comportement n'est plus réversible. Beaucoup de matériaux ont un comportement durcissant pour lequel il y a une certaine variation de contrainte avec les déformations plastiques, et pour ce qui est du cas de l'acier doux le comportement est parfaitement plastique (Figure1.1). Dans le présent travail, nous considérons ce denier type de comportement.

L'analyse élastique d'une structure est importante pour étudier son comportement, particulièrement en ce qui concerne sa solidité, sous le chargement pour lequel la structure est conçue. Cependant, si la charge est augmentée au delà de la limite élastique, la structure subit alors des déformations élasto-plastique, et avec un accroissement ultérieur un état entièrement plastique est atteint. L'apparition d'un nombre suffisant de ***Rotules Plastiques*** transforme ainsi la structure en un mécanisme qui s'effondrerait sous n'importe quel chargement additionnel.

La conception des structures basées sur l'approche plastique (désignée sous le nom de la *conception de limite*) est de plus en plus employée et acceptée par de divers recueils d'instructions, en particulier pour la construction en acier et permet de mieux optimiser la résistance réelle du matériau. On admet que ce denier se déforme de la façon idéalisée représentée sur la figure (1.1). La contrainte et la déformation sont proportionnelles jusqu'à la limite élastique, à laquelle la déformation augmente indéfiniment sans aucun accroissement ultérieur de contrainte. Ce type de relation contrainte-déformation idéalisée n'est pas considérablement différent de ce qui existe pour l'acier doux.

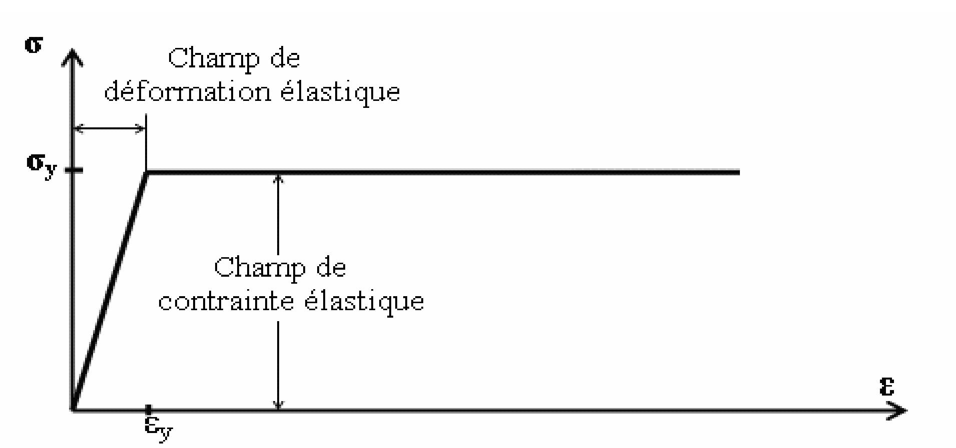


Figure1.1 : Relation idéalisée contrainte - déformation.

L’analyse non linéaire plastique est primordiale pour étudier le comportement post-élastique et la ductilité des structures. Cette ductilité constitue une capacité d’absorption de l’énergie et est très importante en génie sismique. Rappelons que lors d’un séisme d’intensité moyenne ou forte une incursion du comportement structural dans le domaine post-élastique est inévitable.
En résumé une analyse non linéaire judicieusement menée peut à la fois améliorer la sécurité de la structure et réduire son coût.

1.2 Portée du travail :

Le but de ce travail est l'analyse élasto-plastique des structures en portiques en utilisant la méthode des rotules plastiques, les méthodes matricielles et numériques seront décrites et employées à cet effet. Un programme Fortran sera employé. Le programme dépiste la formation successive des rotules plastique jusqu'à la rupture.

L'intérêt pratique d’un tel outil se situe dans la possibilité d'évaluer la vulnérabilité des structures existantes en détectant les zones les plus faibles (location des premières rotules plastique) pour des opérations éventuelles de renforcement.

1.3 Résumé du travail :

Après ce chapitre d'introduction, l'analyse plastique des poutres et des portiques à l'aide des rotules plastiques et la combinaison des mécanismes, est décrite dans le chapitre deux. L'utilisation classique du théorème des travaux virtuels pour déterminer la charge finale y est aussi présentée.

Le chapitre trois est consacré à l’analyse matricielle et numérique des structures en portiques plans. La matrice de rigidité d'un élément de portique dans les coordonnées locales et globales est déterminée. La contribution du cisaillement à l'énergie de déformation est prise en considération dans la dérivation. La transformation des charges réparties en forces nodales équivalentes est également présentée. L'effet de la présence des rotules internes sur la matrice de rigidité et le vecteur de force est également décrit.

L'analyse matricielle élasto-plastique utilisant la méthode des rotules plastiques ainsi que l'exécution du programme informatique, sont présentées dans le chapitre quatre. L'organigramme du programme permettant la détermination de la formation successive des rotules plastiques est détaillé, le programme exploite le comportement linéaire entre deux rotules successives et aucune itération n’est nécessaire pour localiser la prochaine rotule plastique.

Le chapitre cinq est consacré à l’analyse pseudo dynamique d’une structure. Le modèle mathématique ainsi que la détermination des fréquences et des modes propres d’une structure sont exposés.

Le chapitre six présente des exemples de validation du programme informatique dans les domaines de calcul linéaire, calcul élasto-plastique ainsi que le calcul dynamique.

Des conclusions et des recommandations sont données dans le chapitre sept.

Chapitre 2

Analyse plastique des poutres continues et des portiques

2.1 Introduction :

Ce chapitre décrit les méthodes classiques d'analyse plastique utilisant les rotules plastiques ainsi que les méthodes élémentaires de mécanique en considérant un comportement parfaitement plastique (Figure 2.1)

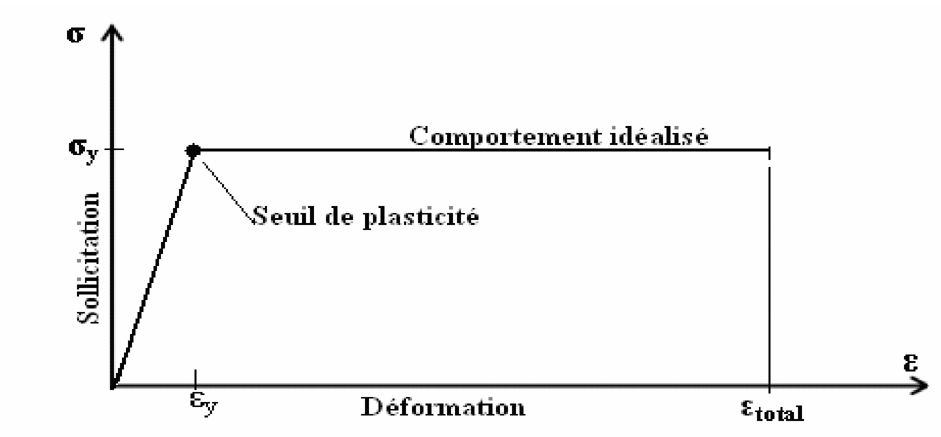
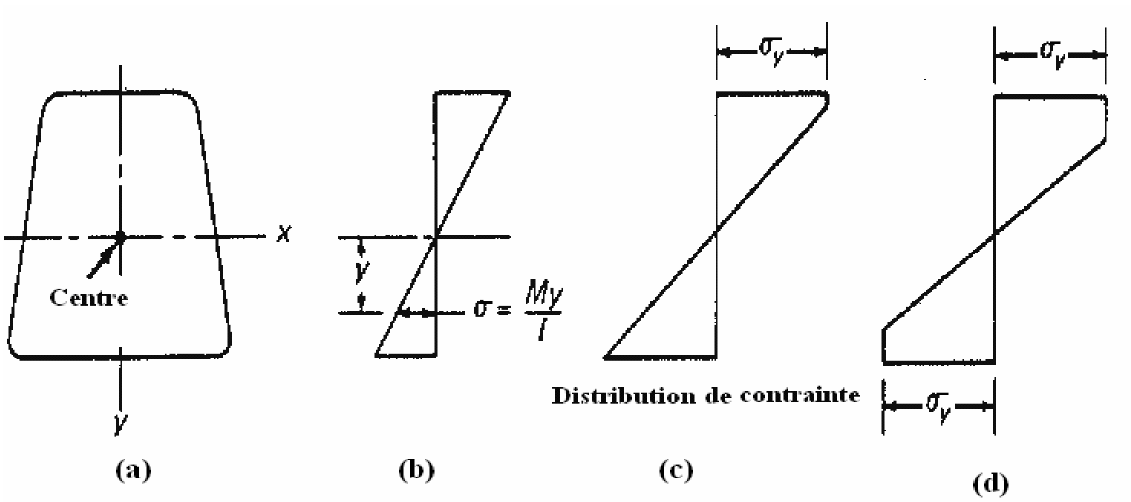


Figure 2.1: Relation idéalisée contrainte déformation.

2.2 Moment final

Considérons une poutre dont la section transversale possède un axe de symétrie (Figure 2.2) ; Cette poutre est soumise à une flexion dans son plan de symétrie.

Si le moment de flexion est petit, la contrainte et la déformation changent linéairement à travers la section suivant les indications de la figure 2.2(b). Quand le moment est augmenté, le champ de contrainte atteint les fibres supérieures figure 2.2(c), et avec un accroissement ultérieur le champ de contrainte touche les fibres inférieures figure 2.2(d). Si le moment de flexion continue à augmenter, le champ de contrainte s'étalera des fibres externes vers l'intérieur jusqu'à ce que les deux zones du champ de contrainte se rencontrent figure 2.2(e), la section transversale dans cet état serait ***entièrement plastique***.



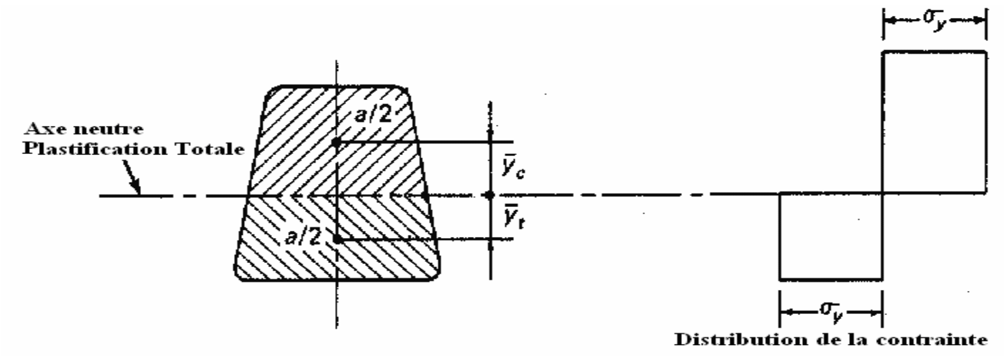


Figure 2.2 : Distribution de la contrainte dans une section transversale symétrique soumise à un moment de flexion dont la grandeur est croissante. (a) Section transversale de la poutre, (b) état élastique, (c) fibres supérieures plastifiées, (d) fibres extérieures et inférieures plastifiées.

La valeur du moment final dans l'état entièrement plastique peut être calculée en fonction de la contrainte de flexion. Puisque la force axiale est égale à zéro dans le cas considéré, l'axe neutre dans l'état entièrement plastique divise la section en deux secteurs égaux à σ_y, la tension et la compression sont chacune égale ($a\sigma_y$ /2), formant un couple égal au moment final.

$$M_p = \frac{1}{2}\alpha\, \sigma_y\, (\bar{y}_c + \bar{y}_t) \qquad (2.1)$$

Où y_c et y_t sont respectivement la distance des centres d'inertie de la section comprimée et de la section tendue à l'axe neutre dans l'état entièrement plastique.

Le moment maximum qu'une section peut supporter sans excéder la contrainte élastique est $M_y = \sigma_y Z$, où Z est le module de section. Le rapport $\alpha = M_p/M_y$ dépend de la forme de la section transversale et désigné sous le nom de *facteur de forme* ; il est toujours plus grand que l'unité ; Pour une section rectangulaire de section b×d, $Z=bd^2/6$, $M_p = \sigma_y bd^2/4$; par conséquent α =1.5. Pour une section circulaire d'un solide α =1.7, alors que pour des poutres en I et des canaux α varie dans l'intervalle 1.15 à 1.17.

2.3 Comportement plastique d'une poutre simple:

Pour considérer le déplacement supposant une relation idéalisée entre le moment de flexion et la courbure à une section, suivant les indications de la figure (2.3).

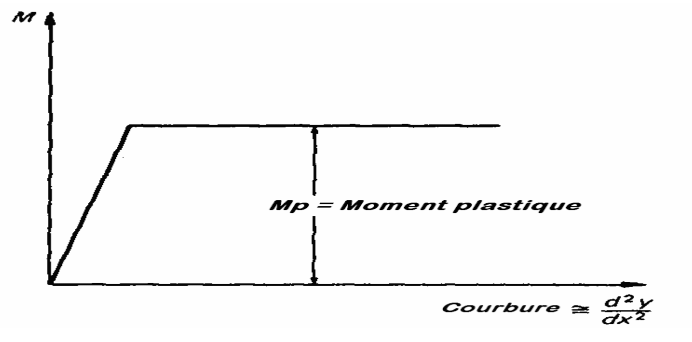


Figure. **2.3** : Relation idéalisée moment-courbure.

Si une charge P appliquée à mi-travée d'une simple poutre figure 2.4(a) est augmentée jusqu'à ce que le moment dans la section transversale de mi-travée atteint entièrement le moment plastique M_p alors, une rotule plastique est formée à cette section et l'effondrement se produira sous toute autre augmentation de charge. Selon la relation idéalisée supposée, la courbure, et par conséquent la rotation augmente à l'endroit de la rotule plastique à une charge constante, ce qui provoque la déflexion.

La charge critique P_c peut être facilement calculée à partir de la statistique.

$$Pc = 4M_p/l \tag{2.2}$$

Le moment de flexion est plus petit aux sections autres que la mi-travée que M_p, et en vertu des relations idéalisées la poutre demeure élastique loin de cette section. La configuration poutre fléchie dans les étapes élastiques et plastique est montrée dans la figure 2.4(b). L'augmentation dans la flexion pendant l'effondrement est provoquée par la rotation de la poutre à la rotule centrale sans changement simultané de la courbure des deux moitiés de la poutre. La figure 2.4(c) représente le changement dans la flexion de la poutre pendant son effondrement ; c'est une ligne droite pour chaque moitié de la poutre. La même figure montre également le mécanisme d'effondrement de la poutre.

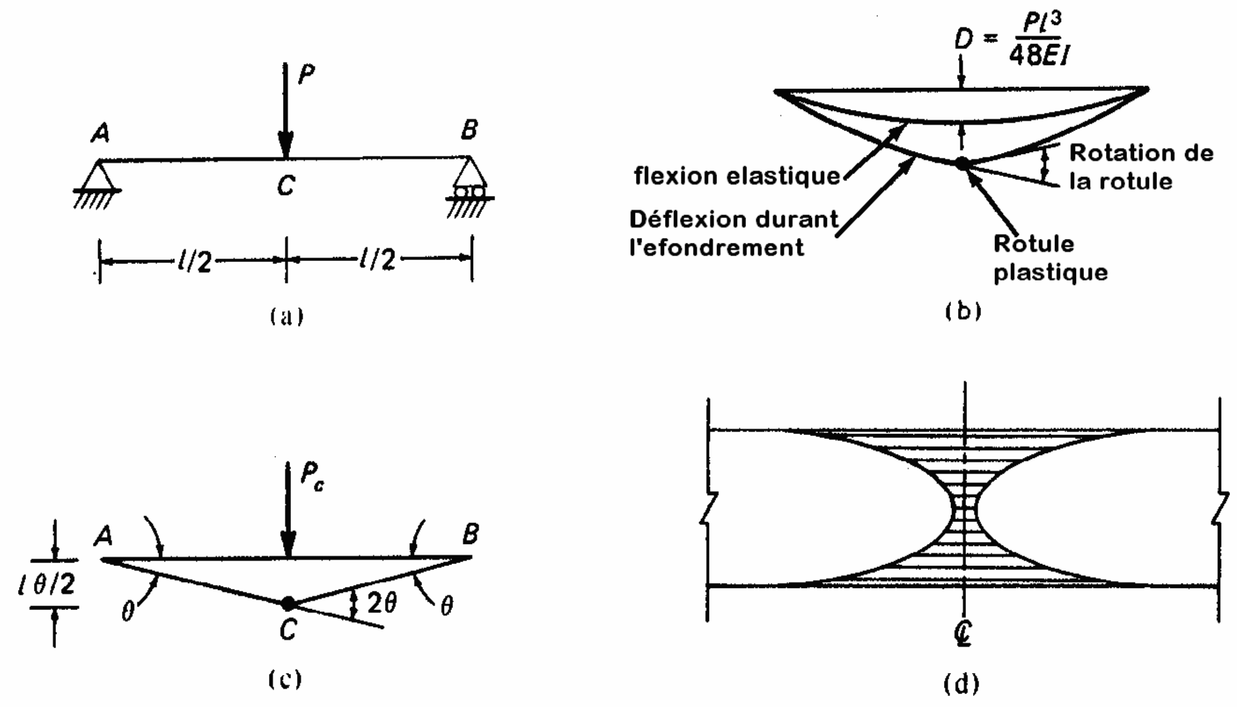


Figure 2.4: Comportement plastique d'une poutre simple, (a) poutre, (b) lignes de flexions, (c) changement dans la flexion pendant l'effondrement, (d) faisceau montrant la fragilité de la poutre dans sa section à mi-travée.

La charge d'effondrement de la poutre (et ceci s'applique également à une structure statiquement indéterminée) peut être calculée en égalisant le travail externe et travail interne pendant un mouvement virtuel du mécanisme d'effondrement. Laissons chaque moitié de la poutre dans la figure 2.4(c) acquérir un angle θ virtuel de rotation, de sorte que la rotation correspondante à la rotule soit 2θ, et le déplacement de haut en bas de charge P_c est de $l\theta/2$. Égalisant le travail effectué par la charge P_c au travail du moment plastique M_p à la rotule plastique, nous obtenons :

$$P_c = \frac{l\theta}{2} = M_p \; 2\theta \qquad (2.3)$$

Qui donne le même résultat que l'équation (2.2).

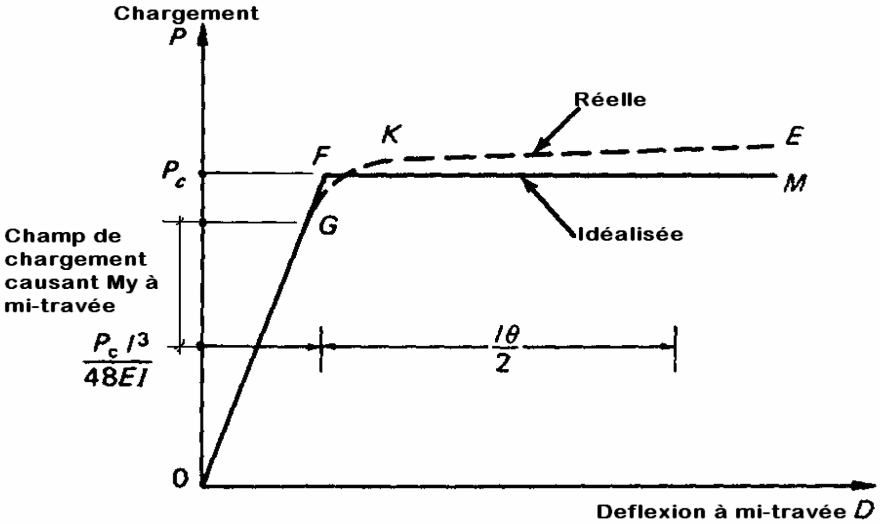


Figure 2.5: Relation Charge-flexion pour la poutre dans la figure 2.4.

La relation idéalisée entre la charge et la flexion centrale de la poutre est représentée par la ligne OFM dans la figure 2.5 ; Quand la charge d'effondrement correspondant au point F dans la figure 2.5 est atteinte, la flexion élastique à la mi-travée est :

$$D_F = P_c \frac{l^3}{48 \; El} \qquad (2.4)$$

Cependant, la relation réelle de la charge de flexion suit la courbe pointillée GKE. Quand le moment élastique $M_y = \sigma_y Z$ est atteint à la section de mi-travée, le champ et le comportement élastique se termine. Si la charge est augmentée par la suite, le comportement élastique est diffusé à l'intérieur de cette section et aussi latéralement à d'autres sections voisines. La figure 2.4(d) illustre cette diffusion. Après que M_y ait été atteint, la flexion surcroît par augmentation d'une unité de charge jusqu'à ce que le moment plastique M_p soit atteint, ce qui est indiqué par la courbe GK de figure 2.5. Dans la pratique, les sections en acier roulées continuent à montrer une petite élévation dans la courbe de charge flexion pendant l'effondrement (ligne KE) ; c'est dû à l'écrouissage qui n'est pas généralement considéré dans l'analyse plastique ordinaire.

2.4 Résistance ultime des poutres continues et des poutres encastrées aux deux extrémités.

a/ Considérons une poutre de section prismatique encastrée aux deux extrémités soumise à une charge uniforme d'intensité q figure 2.6(a), Les moments de flexion résultants sont :

$$M_A = M_c = -ql^2/12 \text{ et } M_B = ql^2/24.$$

Quand l'intensité de la charge est augmentée jusqu'à q_1 de tel façon que les moments aux appuis atteignent le moment plastique $M_p = q_1 l^2/12$, des rotules sont formées en A et en C. si q est encore augmenté, le moment aux appuis demeurera constant et égal à M_p et la rotation libre prend place de sorte que la flexion due à une charge supérieure à q_1 soit la même que pour une poutre simplement soutenue. L'effondrement se produira à une charge d'intensité q_c qui produit le moment de grandeur M_p à mi-travée, de sorte qu'une troisième rotule soit formée au point B. Les diagrammes du moment de flexion dus à la charge d'intensité q pour les cas $q = q_1$, $q_1<q<q_c$, et $q = q_c$ sont montrés dans la figure 2.6(b) et le mécanisme d'effondrement dans la figure 2.6(c). La charge d'effondrement q_c est calculée par l'équation des travaux virtuels.

$$M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 2\left(\frac{q_c l}{2}\right)\frac{\theta . l}{4} \qquad (2.5)$$

Où θ ,2 θ , θ sont respectivement, les rotations virtuelles dues aux rotules plastiques aux points A, B, et C et $\frac{\theta\ l}{4}$ est le déplacement de haut en bas correspondant à la charge résultante sur la moitié de la poutre. L'équation (2.5) donne l'intensité de la charge d'effondrement : $q_c = \frac{16\,M_p}{l^2}$

(2.6)

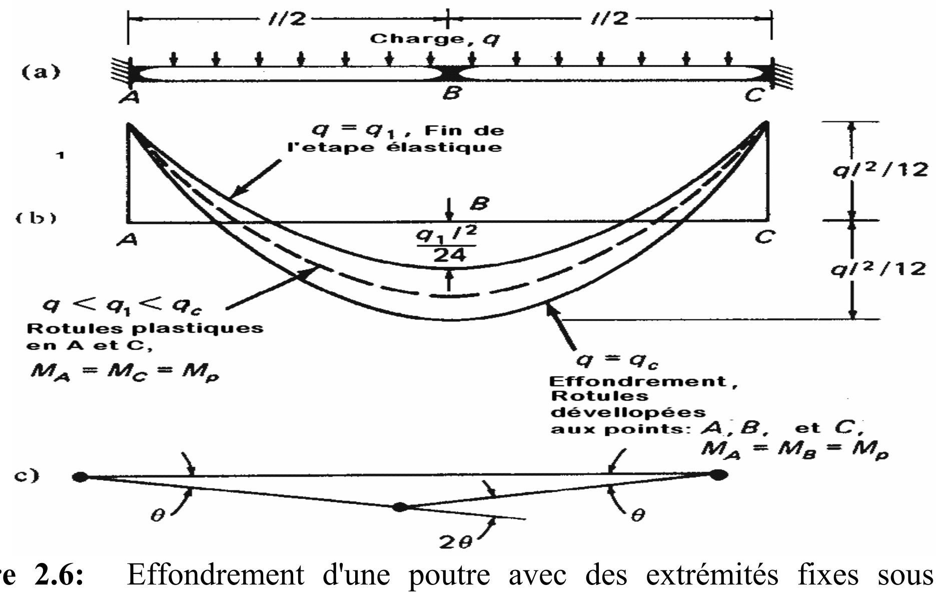


Figure 2.6: Effondrement d'une poutre avec des extrémités fixes sous une charge uniformément répartie. (a) poutre chargée. (b) diagrammes du moment de flexion pour les trois intensités de charge. (c) Mécanisme d'effondrement.

Si la poutre est de section rectangulaire, le moment plastique $M_p = 1.5\ M_y$ et l'intensité maximale du chargement calculée par la théorie élastique avec la contrainte maximale σ_y est

$q_e=12M_y/l^2$. Ainsi le rapport $q_c/q_e = 2$, qui indique clairement que la conception de la poutre considéré par la théorie élastique est conservatrice.

b/ Dans la conception plastique des poutres continues, nous traçons le diagramme du moment fléchissant pour chaque travée comme une simple poutre chargé avec la charge de calcul multipliée par le facteur de charge. Des valeurs arbitraires peuvent être choisies pour le moment fléchissant aux appuis et une ligne fermée AB'C'D dans la figure 2.7(d) est dessiné. La valeur du moment de flexion à n'importe quelle section sera alors l'ordonnée entre la ligne fermée et le diagramme du moment d'une simple poutre. La poutre peut avoir la capacité de résistance finale exigée si les sections sont alors choisies de sorte que le moment plastique résistant soit partout égal ou supérieur au moment de flexion. Cependant, la conception la plus économique est généralement acquise quand une section régulière d'une certaine dimension est utilisée pour qu'un mécanisme d'effondrement puisse se développer.

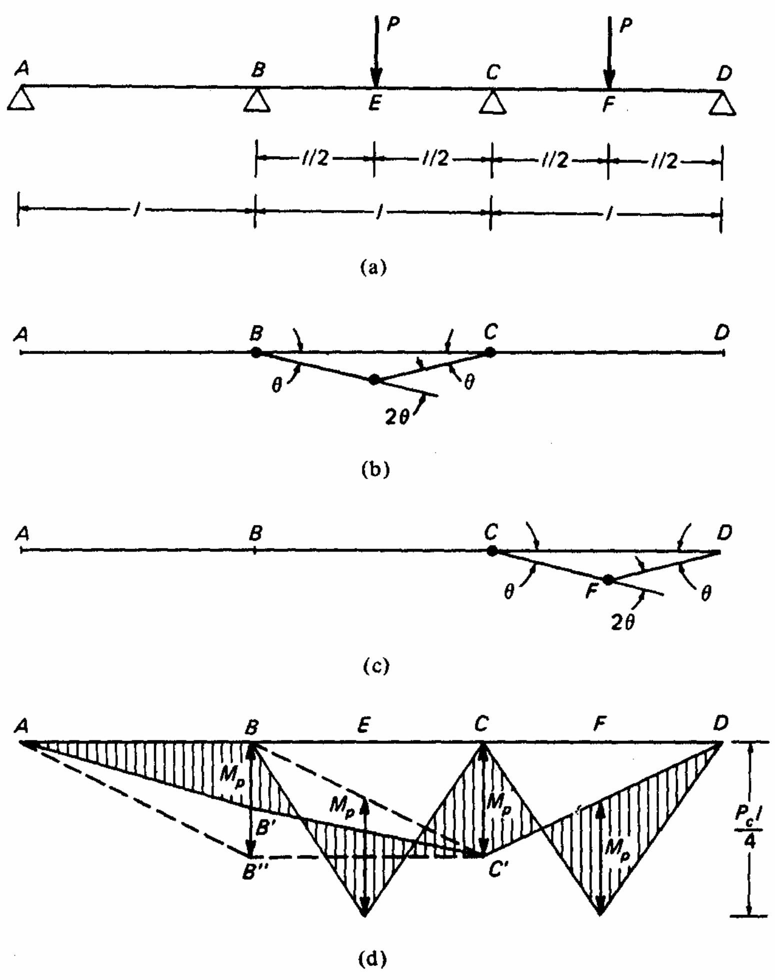


Figure 2.7: Analyse plastique d'une poutre continue. (a) poutre continue de section constante et de moment plastique de résistance M_p. (b) Mécanisme 1 d'effondrement. (c) Mécanisme 2 d'effondrement. (d) diagramme du moment de flexion.

Si les sections de la poutre sont données, les valeurs de la charge de ruine correspondant à tous les mécanismes possibles sont déterminées ; la charge réelle de ruine est la plus petite de ces dernières. Pour l'exemple dans la figure 2.7(a), la poutre continue qui possède une section constante avec un moment de résistance plastique M_p. Nous voulons trouver la valeur des deux charges égales à la charge P qui provoque l'effondrement ; on dénote cette valeur par la charge critique P_c.

La ruine peut se produire seulement par un des deux mécanismes montrés dans les figures 2.7(b) et (c). Par l'équation des travaux virtuels pour chacun des deux mécanismes, nous obtenons :

$$P_{C1}\left(\frac{l\theta}{2}\right) = M_p(\theta + 20 + \theta) \qquad \text{Voir Figure 2.7(b)}$$

D'où

$$P_{C1} = \frac{8M_P}{l} \tag{2.7}$$

et

$$P_{C2}\left(\frac{l\theta}{2}\right) = M_p(\theta + 2\theta) \qquad \text{Voir Figure 2.7(c)}$$

D'où

$$P_{C1} = \frac{6M_P}{l} \tag{2.8}$$

La plus petite de ces deux valeurs est la véritable charge d'effondrement : $P_c = 6M_p/l$. Le diagramme correspondant du moment de flexion est montré dans la figure 2.7(d), dans lequel les valeurs du moment de flexion aux points C et F sont égales à M_p. Quand l'effondrement se produit, la partie de la poutre entre A et C reste à l'étape élastique, et la valeur du moment de flexion au point B peut être calculée en analysant une poutre ABC continue, articulé (rotules) aux points A et C, et soumis à un couple dans le sens des aiguilles d'une montre de grandeur M_p au point C et à une charge verticale $P_C = 6M_p/l$ au point E.. Il est clair que la ligne AB'C' fermée du diagramme du moment de flexion puisse prendre n'importe quelle position entre les lignes limites AB"C et ABC avec le moment de flexion à en aucune section excédant M_p.

2.5 Portique rectangulaire

Déterminons la charge d'effondrement du portique présenté dans la figure 2.8(a), prenons 2Mp comme moment de résistance plastique pour la poutre BC et M_p pour les poteaux. Il y a seulement trois mécanismes d'effondrement possibles, qui sont montrés dans les figures 2.8(b),(c), et (d).

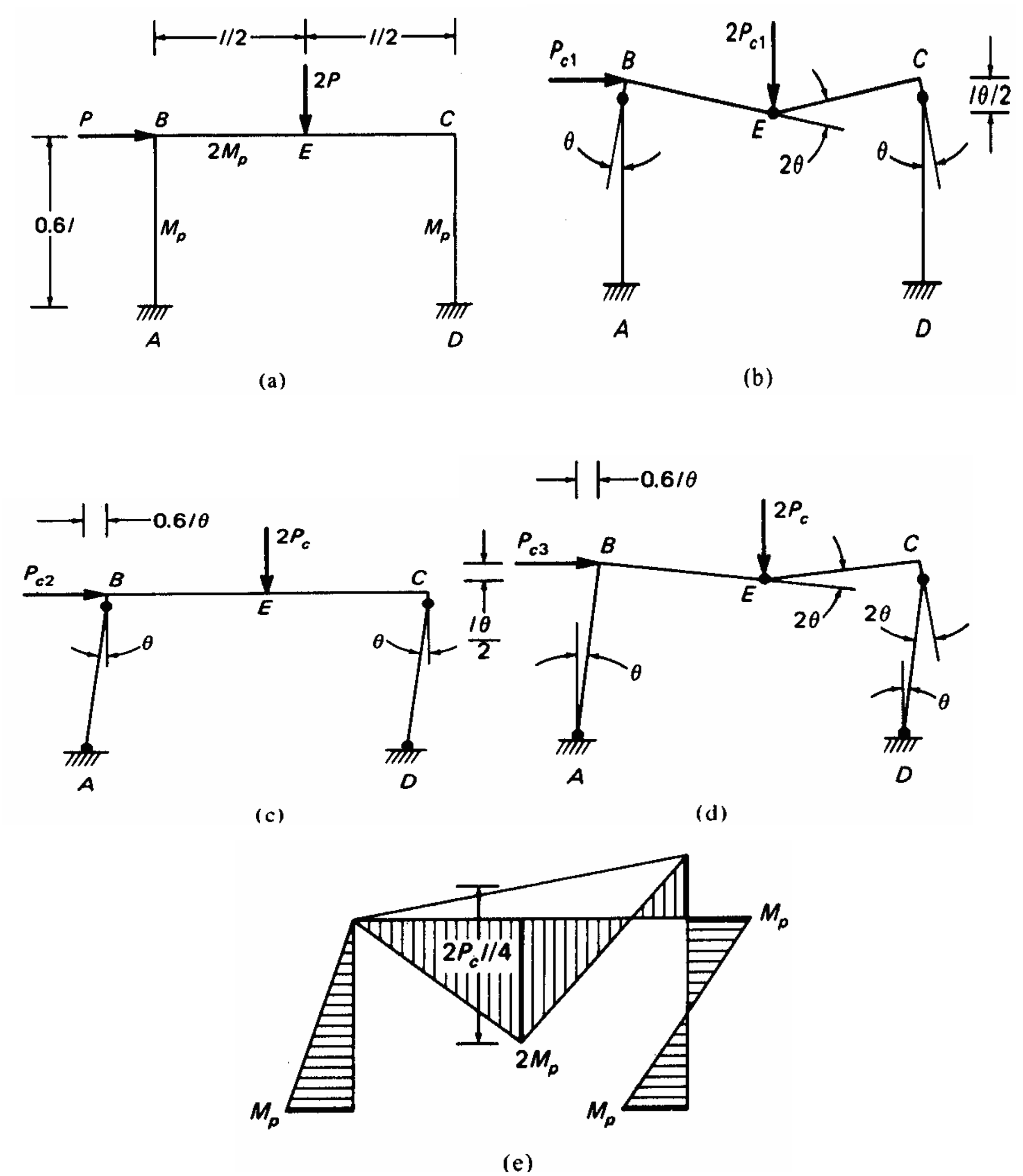


Figure 2.8: Analyse plastique d'un portique rectangulaire. (a) Chargement et propriétés, (b) mécanisme correspondant à la charge P_{c1}, (c) mécanismes correspondant à la charge P_{c2}, (d) mécanisme correspondant à la charge P_{c3}, (e) diagramme du moment fléchissant à l'effondrement.

L'équation des travaux virtuels pour chacun de ces mécanismes donne :

$$M_p\,(\theta+\theta) + 2\,M_p(2\theta) = 2\,P_{c1}\left(\frac{l\theta}{2}\right) \qquad \text{Voir figure 2.8(b)}$$

D'où $$P_{c1} = \frac{6\,M_p}{l} \tag{2.9}$$

$$M_p\,(\theta+\theta+\theta) = 2\,P_{C2}\,(0.6\,l\theta) \qquad \text{Voir figure 2.8(c)}$$

D'où $P_{C2} = 6.67\dfrac{M_p}{l}$ (2.10)

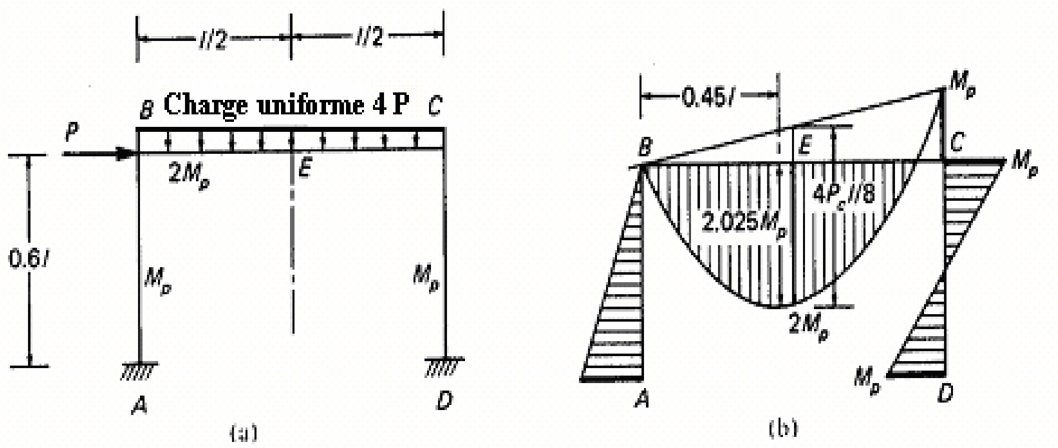
$$M_p\ (\theta + \theta + 2\theta) + 2\ M_p(2\theta) = 2\ P_{C3}\ (0.6\ l\theta)\left(\frac{l\theta}{2}\right)$$ Voir figure 2.8(d)

D'où $P_{C3} = 5\dfrac{M_p}{l}$ (2.11)

La charge de ruine du portique est la plus petite des charges : P_{C1}, P_{C2}, et P_{C3}, ainsi $P_C = P_{C3} = 5M_p/l$, et l'effondrement du portique peut se produire avec le mécanisme figure 2.8(d). Le diagramme correspondant du moment de flexion dans la figure 2.8(e) a une valeur M_p aux rotules plastiques A, C, et D et 2Mp à la rotule E, avec le moment de résistance plastique excédé en aucun autre point. Un contrôle sur les calculs peut être fait en vérifiant que le diagramme du moment de flexion dans la figure 2.8(e) satisfait l'équilibre statique.

2.5.1 Localisation des rotules plastiques sous des charges uniformément reparties:

Considérons le portique analysé dans la section précédente mais avec une charge verticale 4P répartie sur la poutre BC, suivant les indications de la figure 2.9(a) ; la charge horizontale P est inchangée. Dans ce cas-ci, la position du moment de flexion positif maximum dans BC n'est pas connue, de sorte que l'endroit de la rotule plastique doit être déterminé.
Appliquons l'équation du travail virtuel au mécanisme dans la figure 2.8(d), chargé comme dans figure 2.9(a), avec la rotule dans la poutre supposée à la mi-travée.
Le diagramme du moment de flexion pour le mécanisme dans figure 2.8(d) avec les charges dans la figure 2.9(a) est montré dans figure2.9(b), à partir duquel on peut voir que le moment complètement plastique 2Mp est légèrement plus grand dans la moitié gauche de la poutre.



$P_c = 5M_p/l$

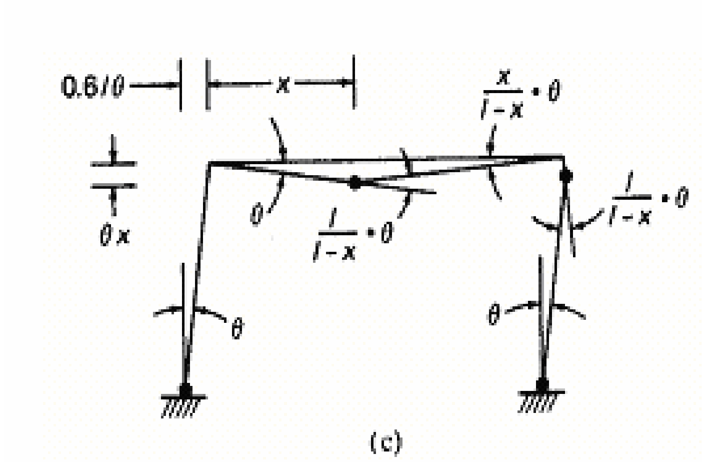


Figure 2.9: Portique soumis à la charge distribuée analysée en sec. 2.5.1. (a) Chargement et propriétés du portique, (b) diagramme du moment de flexion dû au chargement en partie (a) sur le mécanisme dans fig. (2.8d), (c) mécanisme correspondant à la charge d'effondrement P_c dans l'équation (2.4).

2.5.2 Combinaison des mécanismes élémentaires

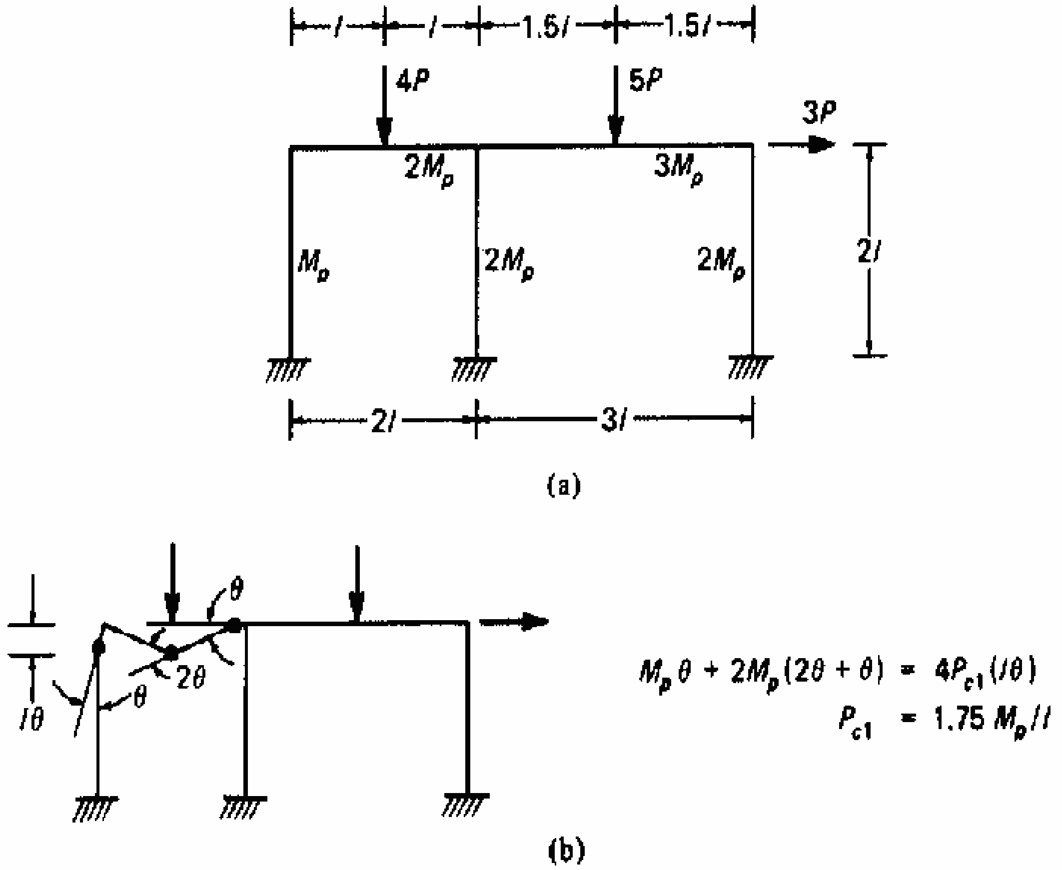
Maintenant nous pouvons considérer l'analyse plastique des portiques plans en général ; Un nombre suffisant de rotules plastiques est introduit aux endroits supposés pour former un mécanisme et la charge correspondante de ruine est calculée par l'équation du travail virtuel. La valeur déterminée de cette façon est une limite supérieure de la valeur exacte de la charge, la charge indiquée est plus grande que la charge exacte, en d'autres termes, si le moment plastique M_p exigé pour n'importe quel effondrement particulier est calculé selon n'importe quel mécanisme, puis la valeur résultante du moment plastique M_p est une limite inférieure au moment de résistance plastique. Dans le calcul pratique, le mécanisme exacte peut être obtenu en considérant les mécanismes élémentaires et en les combinant pour obtenir le plus bas qui donne la valeur exacte de la charge de ruine.

Considérons le portique sur la figure 2.10(a) avec les membres prismatiques ; les valeurs relatives du moment totalement plastique sont indiquées. Trois mécanismes élémentaires sont montrés dans les figures 2.10(b), (c), et (d) et l'équation du travail virtuel pour chacun est donnée à coté de chaque mécanisme.

Le mécanisme 2 donne la charge critique P_c la plus basse et la combinaison avec les autres mécanismes nous permet d'atteindre une valeur plus petite de P_c. Deux combinaisons sont montrées dans les figures 2-10(e) et (f). le mécanisme 4 est une combinaison des mécanismes 2 et 3 avec une modification de l'endroit de la rotule au-dessus du poteau central. La charge d'effondrement résultante est $P_{c4} = 1.33M_p/l$. le mécanisme 5 est une combinaison des mécanismes 1, 2, et 3, encore avec la même modification, donnant une valeur $P_{c5} = 1.31M_p/l$, qui est inférieur à toutes les valeurs précédentes.

Pour déterminer si P_{c5} est la limite inférieure de P_c, le diagramme correspondant du moment fléchissant est tracé ; Si le moment en aucune section n'est plus grand que son moment plastique, P_{c5} est la limite inférieure et la solution est correcte. Le diagramme du moment fléchissant de la figure (2.11) prouve que le mécanisme 5 est le mécanisme le plus correct. Dans la construction de ce diagramme, les valeurs connues des moments aux rotules plastiques ont été marquées la première fois, et les autres ordonnées sont déterminées alors par des calculs simples.

Il est possible qu'en traçant le diagramme du moment de flexion nous constations que le moment à une certaine section excède le moment de résistance plastique; Si l'excès est petit, de l'ordre de cinq (5%) pour cent, alors on peut considérer que le portique peut supporter les charges précédemment calculées, chacune réduite de 1/1.05. Certaines publications suggèrent que si pour une charge d'effondrement particulière calculée pour un faux mécanisme, le moment de résistance plastique n'excède 30 pour cent dans n'importe quel point, une évaluation raisonnable de la résistance à la flexion exigée peut être obtenue en augmentant la valeur calculée de M_p de la moitié du plus grand moment.



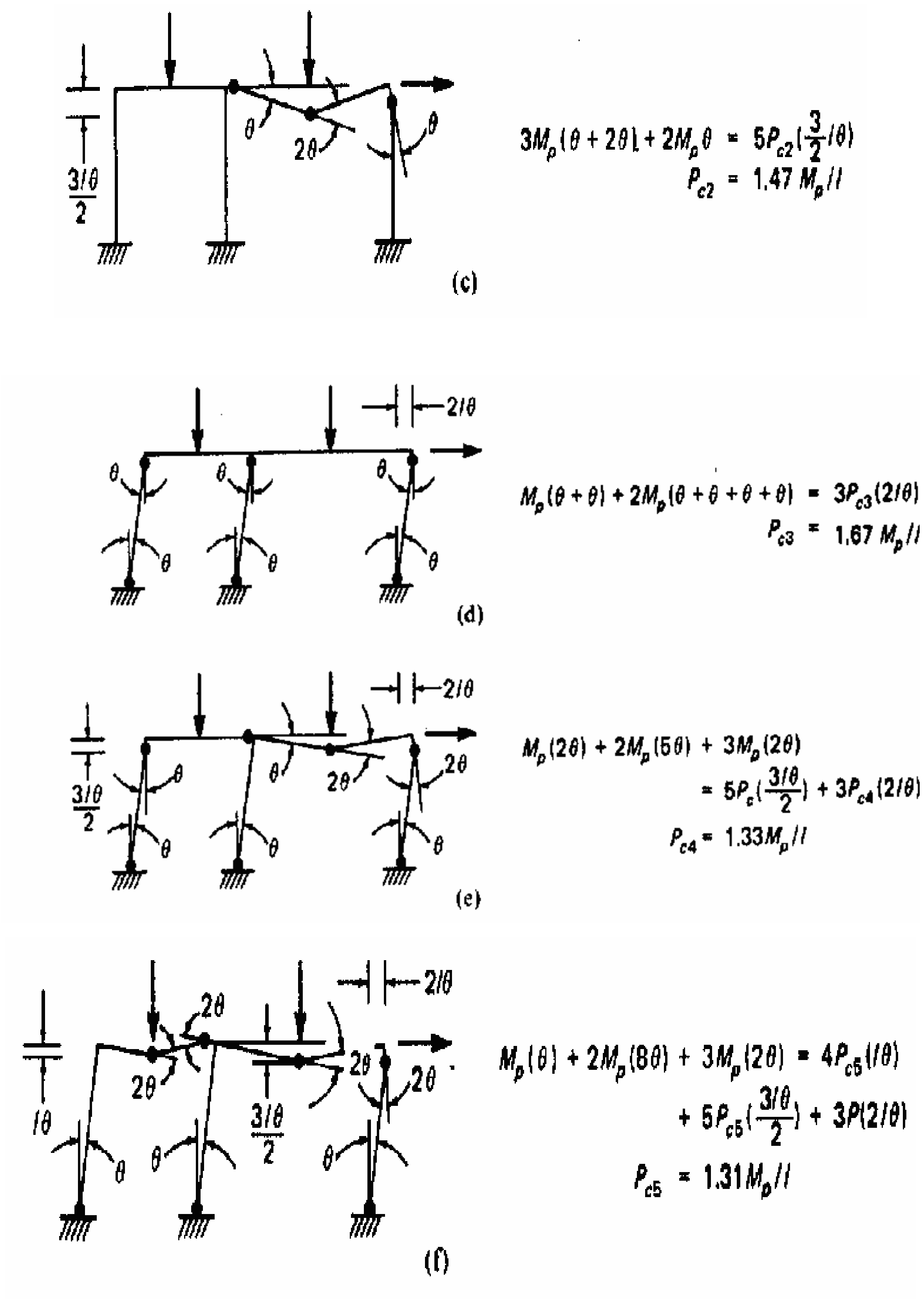


Figure 2.10: Analyse plastique d'un portique multi-compartiment, (a) propriétés du portique et du chargement, (b) mécanisme 1, (c) mécanisme 2, (d) mécanisme 3, (e) mécanisme 4, (f) mécanisme 5.

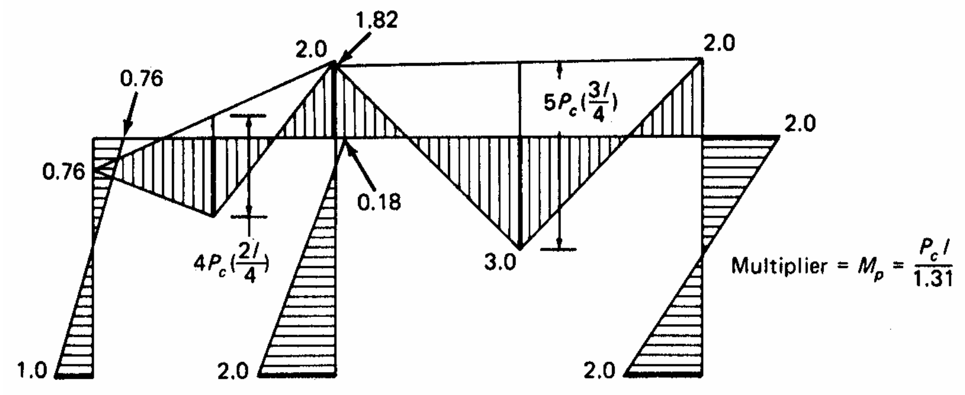


Figure 2.11: diagramme du moment de flexion pour le mécanisme 5 dans la figure 2.10(f).

2.7 Portique avec les membres inclinés

En calculant l'angle entre les extrémités des membres à une rotule plastique dans un portique non rectangulaire, il serait commode de localiser le centre instantané autour duquel une partie du portique tourne pendant l'effondrement.

Considérons le portique pignon dans la figure 2.12(a), pour lequel un mécanisme1 d'essai est donné sur la figure 2.12(b). Joignant les rotules plastiques en A et C et prolongeant la ligne AC pour rencontrer la ligne GF prolongée, elles se rencontre au point O, le centre de la rotation de la partie CDF. Les parties ABC et GF tournent respectivement autour des point A et G, Pendant l'effondrement les points C et F se déplacent respectivement vers les lignes AO et GO , cela le long de la tangente commune aux cercles dont les centres localisés aux centres de rotation A, O, et G. Prenons θ_1 l'angle de la rotation de GF, les angles de rotation des parties du portique par rapport à leurs centres instantanés peuvent être déterminés facilement par la géométrie :

$\theta_2 = \theta_1/4$ et $\theta_3 = 3\theta_2 = 3\theta_1/4$. Les rotations relatives des parties du portique avec les rotules plastiques sont représentées dans la figure 2.12(b), et le travail virtuel interne correspondant W est la somme du travail effectué aux quatre rotules A, C, F, et G ; ainsi :

$W = M_p [\theta_3 + (\theta_3 + \theta_2) + (\theta_2 + \theta_1) + \theta_1]$

$W = 4 M_p \theta_1$

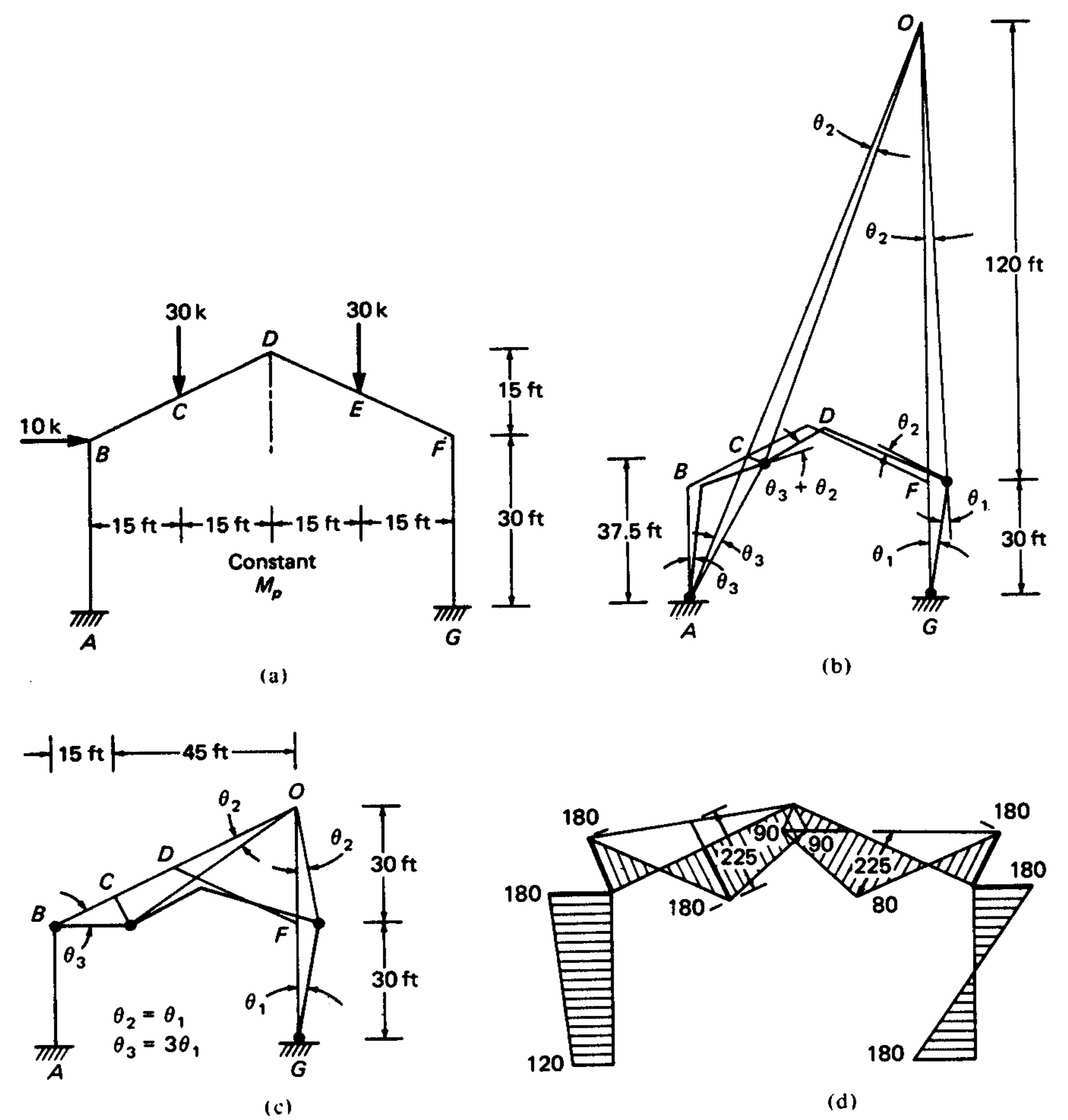


Figure 2.12: Analyse plastique d'un portique pignon. (a) Propriétés et chargement. (b) Mécanisme 1. (c) Mécanisme 2. (d) diagramme du moment fléchissant pour le mécanisme 2.

La translation des charges externes correspondant aux rotations ci-dessus est calculée à partir de la géométrie du mécanisme, et le travail virtuel externe est obtenu comme suit :

Point chargé	Déplacement (feet)	Chargement (x 1000 livres)	Travail extérieur(k.feet)
B	$0.75\theta_1$ x 30 = $22.5\theta_1$	10	$225\theta_1$
C	$0.75\theta_1$ x 15 = $11.25\theta_1$	30	$337.5\theta_1$
E	$0.25\theta_1$ x 15 = $3.75\theta_1$	30	$112.5\theta_1$

Total = $675\theta_1$

Égalisant le travail externe au travail interne, nous obtenons :

$$M_p = 168.75 \text{ k ft}$$

Si le moment de flexion correspondant à ce mécanisme est esquissé, il sera clair que la valeur M_p = 168.75 soit dépassée à plusieurs points, ce qui signifie que le mécanisme 1 n'est pas le mécanisme d'effondrement réel. Un deuxième mécanisme est montré sur la figure 2.12(c), pour lequel les centres instantanés sont B, O, et G pour respectivement les parties BC, CF et FG. Une petite rotation virtuelle arbitraire θ_1 est attribué pour FG, et les rotations correspondantes pour les autres parties sont déterminées en termes de θ_1 en considérant la géométrie du mécanisme. L'équation du travail pour ce mécanisme donne M_p = 180 k ft. Le diagramme correspondant du moment fléchissant est montré dans la figure 2.12(d) : la valeur M_p n'est pas dépassée, indiquant que l'effondrement a lieu selon le mécanisme 2.

2.8 Effet des forces axiales sur la capacité du moment plastique.

Dans les sections précédentes nous avons supposé que l'état entièrement plastique correspond à un moment plastique M_p et à la formation d'une rotule plastique. Cependant, en présence d'une force compression ou de tension axiale élevée, une rotule plastique peut être formée par un moment M_{pa} dont la valeur est plus petite que celle de M_p. Nous pouvons maintenant obtenir une expression de M_{pa} pour une section transversale rectangulaire soumise à une force axiale de tension ou de compression ; Tout effet du flambement sera ignoré.

Les figures 2.13 (a) à (e) montrent les changements de la distribution de contrainte dans une section transversale rectangulaire b x d soumise simultanément à une force de compression axiale P et à un moment de flexion M dans le plan vertical, à mesure que la valeur de M et de P est augmentées à une valeur constante de M/P jusqu'à ce que l'étape entièrement plastique soit atteinte. Les valeurs de la force axiale et du moment sont à ce stade égales à :

$$P = 2\sigma_y \, b y_o \qquad (2.12)$$

et

$$M_{pa} = \frac{\sigma_y b}{4}\left(d^2 - 4y_o^2\right) \qquad (2.13)$$

Où σ_y est La contrainte de flexion et y_0 la distance du centre de surface de la section à l'axe neutre.

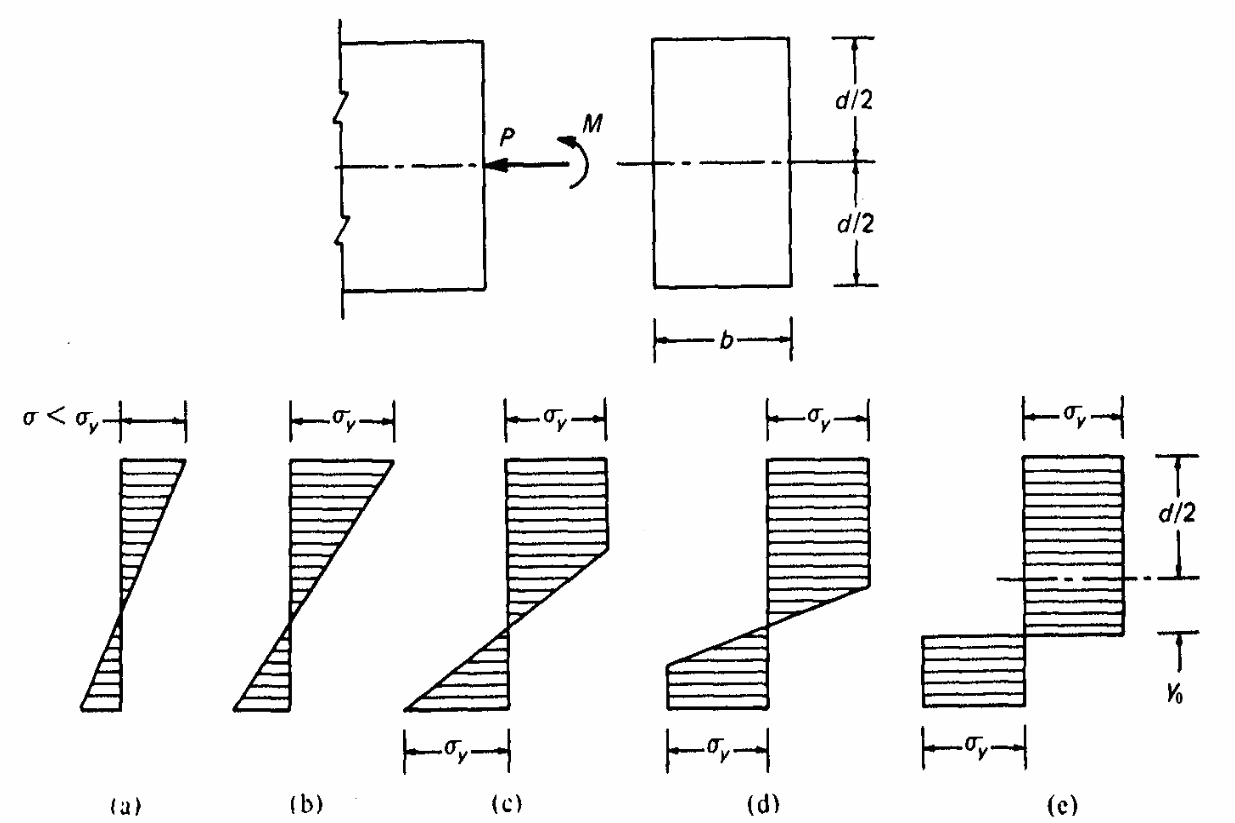


Figure 2.13: Distribution de la contrainte dans une section rectangulaire soumise à un moment de flexion croissant M et à une force axiale P croissante à une valeur constante du rapport M/P .

En l'absence de la force axiale, $y_o = 0$, le moment parfaitement plastique est alors :

$$M_p = \sigma_y \frac{bd^2}{4} \tag{2.14}$$

D'une autre part, si la force axiale est la seule cause de l'état entièrement plastique, sa valeur est :

$$P_y = \sigma_y \, bd \tag{2.15}$$

Des équations (2.14) – (2.15) on peut obtenir:

$$\frac{M_{pa}}{M_p} = 1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 \tag{2.16}$$

La courbe d'interaction de M_{pa}/M_p tracé par rapport P/P_y dans la figure 2.14 peut être employée pour déterminer la résistance d'une section sous le chargement combiné d'une force axiale et d'un moment de flexion à partir des résistances dans deux cas de chargement la force axiale seule et moment de flexion seul.

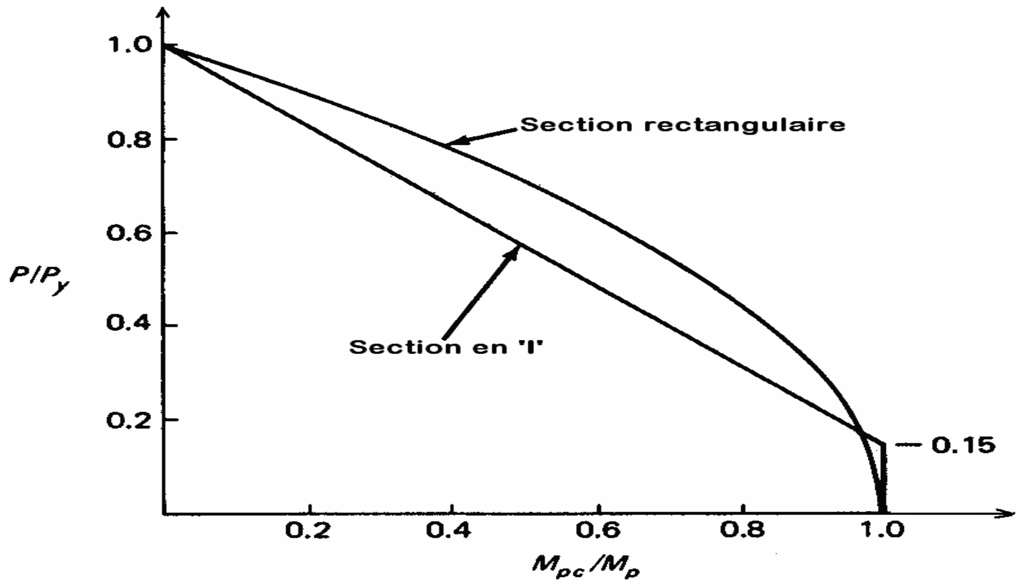


Figure 2.14: Courbes d'interaction force axiale et moment de flexion pour une section rectangulaire et une section d'un profilé en I.

La forme de la courbe d'interaction dépend de la géométrie de la section transversale. Pour toute section d'un grand profile en 'I' utilisé dans la construction en acier, les courbes d'interaction font partie d'une bande étroite et peuvent être rapprochées par deux lignes droites montrées dans la figure 2.14. De cette figure il est évident que quand le $P/P_y \leq 0.15$, l'effet de la charge axiale est négligé et quand $P/P_y \geq 0.1\ 5$, il faut employer l'équation :

$$\frac{M_{pa}}{M_p} = 1.18\left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \qquad (2.17)$$

2.9 Effet du cisaillement sur la capacité du moment plastique

La présence du cisaillement dans une section dans laquelle le moment de flexion est grand peut limiter la capacité finale de chargement d'une structure à une valeur au-dessous de celle qui provoque le moment entièrement plastique M_p à l'endroit des rotules plastiques. Quoi que dans la majorité des cas pratiques l'influence du cisaillement soit petite, il y a des circonstances quand le cisaillement peut produire une rotule plastique à un moment de flexion M_{pc} sensiblement plus petit que M_p.

Les hypothèses principales faites dans la détermination de l'équation d'interaction pour M_{pc}/M_p pour les sections rectangulaires et grand profiles en I sont :

1. Les parties externes de la poutre sont dans un état de fléchissement et résistent seulement à la flexion, alors que la partie centrale est dans un état élastique et résiste au cisaillement.

2. L'effort de cisaillement dans la partie centrale (rectangulaire) est calculé par les équations élastiques habituelles.

On admet que la résistance de la section est épuisée quand la contrainte de cisaillement dans les extensions de la partie centrale cède sous le cisaillement pur, qui, selon le critère de Von Mises-Hencky égale à $\sigma_y / \sqrt{3}$. Avec ces hypothèses, l'équation suivante peut être déduite:

$$\frac{M_{pc}}{M_p} = \frac{8bc^2}{9\alpha Z}\left(\sqrt{1+\frac{9\alpha Z}{4bc^2}} - 1\right) \tag{2.18}$$

Où b est la largeur de la section rectangulaire ou du profilé d'une section en I, Z est le module de section, α est défini dans la section 2.2, et ‘c’ est l'ampleur du cisaillement (= moment de flexion/force de cisaillement).

Chapitre 3

Analyse matricielle des structures en portique plan

Chapitre 3 Analyse matricielle des structures en portique plan

3.1 Introduction

Les constructions constituées d'éléments poutres (portiques et treillis) constituent le type de structure le plus répandu et étudié. L'analyse de ces structures nécessite en général une modélisation tridimensionnelle complexe. Il est cependant souvent possible de simplifier l'étude en considérant des ossatures discrètes 'nues' dans le plan ou l'espace avec des noeuds rigides ou articulés. La modélisation est bien souvent suffisante. Les effets des autres constituants de la structure (planchers, cloisons) ainsi que la déformabilité des noeuds semi-rigides peuvent être pris en compte par des techniques appropriées. L'analyse classique de ces structures (hyperstatiques) est basée sur deux méthodes reposant sur les mêmes hypothèses d'élasticité linéaire et petitesse des déformations:

a/ Méthode des forces ou les inconnues sont les forces hyperstatiques.

b/ Méthode des déplacements ou les inconnues sont les degrés de liberté.

Dans chacune des deux techniques, les calculs se réduisent toujours à la résolution d'un système d'équations linéaires $AX = B$,

A est une matrice carrée et symétrique en vertu du théorème de réciprocité de Betti-Maxwel, X est le vecteur des inconnues et B le vecteur second membre.

Dans la méthode des forces A est appelée matrice de flexibilité (souplesse) et X et B représentent les forces et déplacements respectivement.

Dans la méthode des déplacements A est appelée matrice de rigidité (raideur) et X et B sont les déplacements et forces. Quand le nombre d'inconnues est élevé la solution manuelle du système d'équation devient impossible et c'est pour cela que de nombreuses méthodes approchées ont été proposées, souvent au prix d'hypothèses restrictives supplémentaires. La plus connue de ces méthodes approchées est celle de *Cross*. Les détails des techniques classiques sont exposés dans tous les ouvrages de calcul des structures et il est donc inutile d'y revenir ici. Avec l'avènement des ordinateurs au début des années cinquante la résolution de grands systèmes d'équations devint désormais possible. On se rendit compte également par la suite que si la machine pouvait être utilisée pour la résolution des équations, elle pouvait tout aussi bien être exploitée pour générer ces équations. C'est ainsi que la méthode des déplacements devint privilégiée du fait que la matrice de rigidité de la structure associée à la structure est toujours unique et sa génération est systématique et simple contrairement à la méthode des forces ou la matrice de souplesse dépend du choix des inconnues de départ. Seule la version de la méthode des déplacements adaptée à l'informatique est exposée dans ce travail laissant de coté les anciennes formulations. Ce chapitre traite les structures à nœuds rigides et /ou articulés dans le plan ou dans l'espace.

La matrice de rigidité de la structure sera construite par simple sommation des matrices de rigidité des différents éléments composant la structure. Après prise en compte des conditions d'appuis et de chargement, la résolution du système $KU = F$ donnera les déplacements nodaux desquels seront déduits les efforts dans chaque élément. L'analyse matricielle des structures discrètes a été d'une grande inspiration pour le développement de la méthode des éléments finis et constitue toujours une bonne initiation pédagogique à cette dernière.

3.2 Hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire (Quelques notions de la R.D.M)

3.2.1 Méthodes énergétiques :

Pour déterminer les déformations par cette méthode, la loi de conservation de l'énergie peut être énoncée ainsi :

Le travail mécanique des forces extérieures est égal au travail mécanique des forces intérieures (effort internes) ou autrement dit on dira que tant que les sollicitations restent dans le domaine élastique le travail mécanique des forces extérieures (charges) s'accumule pratiquement en totalité comme énergie potentielle (travail mécanique interne) dans la structure

3.2.2 Travail mécanique des forces extérieures

Le travail mécanique élémentaire d'une force est égal au produit du module de la force et du déplacement élémentaire de son point d'application suivant la direction de son support

D'après la loi de Hooke généralisé, il existe une relation entre le déplacement du point d'application de la force et son intensité

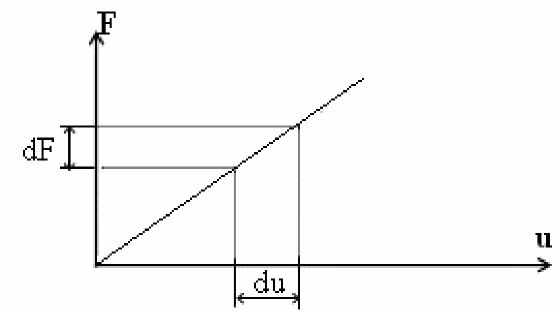


Figure 3.1 : Relation de Hooke

$dW = F.du$
$u = k.F$

Pour un déplacement élémentaire du

$du = k.dF$

Donc le travail mécanique correspondant à la force F est :

$dW = F.du = F.k.dF$

Le travail mécanique total est :

$$W = \int dW = K \int F.dF = K\frac{1}{2}F^2 = \frac{1}{2}KF(u.K) = \frac{1}{2}F.u$$

$$W = \frac{1}{2}F.u$$

Le travail mécanique produit par un système de forces est :

$$W = \frac{1}{2}\sum F_i.u_i \qquad (3.1)$$

Où F est la Force généralisée (Forces et moments)

3.2.3 Travail mécanique des forces internes (efforts)

L'action des forces extérieures produit dans les éléments de la structure une sollicitation caractérisée par l'apparition des efforts et des déformations dans tous les points du matériau.

Le travail mécanique effectué par les efforts internes s'appelle travail mécanique intérieur ou énergie potentielle de déformation. A chaque instant, il existe un équilibre entre le travail mécanique extérieur et le travail mécanique intérieur.

L'évaluation du travail mécanique intérieur se fait en partant des contraintes et déformations unitaires évaluées pour chaque sollicitation simple.

Considérons un petit élément d'une structure linéaire élastique de section dA et de longueur dL, l'aire dA peut être sollicitée par des contraintes normales σ ou par des contraintes tangentielles τ.

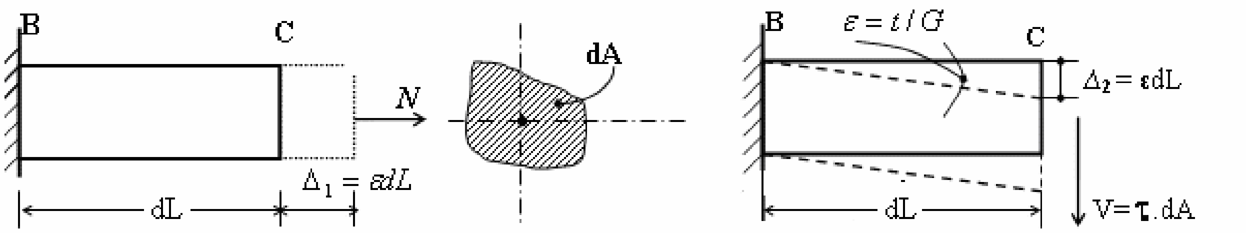


Figure 3.2 : Elément soumis (a) à un effort normal N et (b) à un effort tranchant V.

Le déplacement du point C sous l'action des deux efforts est :

$$N \rightarrow \Delta_1 = \left(\frac{\sigma}{E}\right).dL$$

$$V \rightarrow \Delta_2 = \left(\frac{\tau}{G}\right).dL$$

E : module d'élasticité en traction ou en compression

G : module d'élasticité en cisaillement.

Les efforts N et V en produisant des déplacements, les énergies produites dans les deux éléments sont :

$$dU_1 = \frac{1}{2}(\sigma.dA)\Delta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{E}\right)dL.dA$$

$$dU_2 \frac{1}{2}(\tau.dA)\Delta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau^2}{G}\right)dL.dA$$

En utilisant l'indice ε comme déplacement généralisé l'équation ci-dessus peut être mise sous la forme générale :

$$dU = \frac{1}{2}\sigma.\varepsilon.dV \tag{3.2}$$

dV = dL.dA : volume de la structure

σ : contrainte généralisée

ε : σ/E ou ε = τ/G

Mais G est relié à E par la relation : G = E/2(1+ν)

Avec ν : coefficient de poisson.

dU peut s'écrire aussi sous la forme :

$$dU = dV\int_0^{\varepsilon f} \sigma.d\varepsilon \tag{3.3}$$

a) Energie de déformation due à l'effort normal :

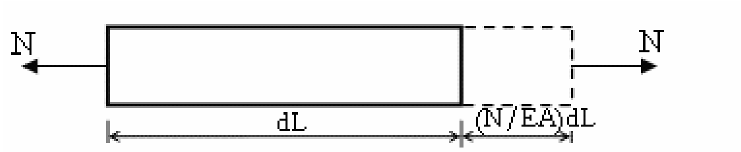


Figure 3.3 : (a) élément soumis à un effort normal

La contrainte normale σ = N/A

Le déplacement ε = N/EA

Le volume dV = dL.A

En injectant dans l'équation (3.3) l'expression de l'énergie de déformation est :

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2 dL}{EA} \tag{3.4}$$

b) Energie de déformation due au moment fléchissant :

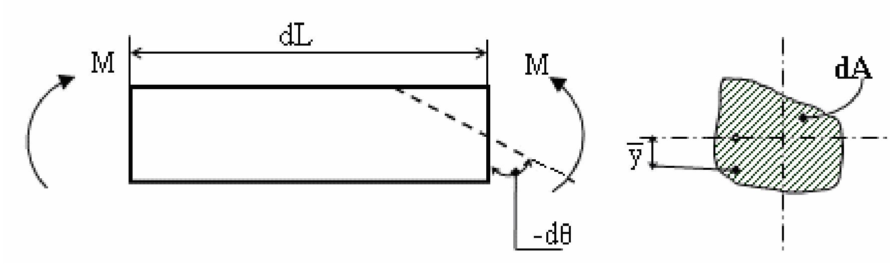


Figure 3.3: (b) Elément soumis à un moment fléchissant

La contrainte normale dans une section élémentaire da de distance y de l'axe vaut : $\sigma = \dfrac{M\bar{y}}{I}$

Le déplacement correspondant ε = σ/E

En injectant dans (3.3) on aura :

$$dU = \frac{1}{2}\frac{M^2\bar{y}^2}{EI^2}dV = \frac{1}{2}\frac{M^2\bar{y}^2}{EI^2}dA.dL$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M^2.dL}{EI^2}\int_A \bar{y}^2.dA = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dL$$

L'énergie totale dans tout élément sera :

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dL \qquad (3.5)$$

Nous pouvons trouver le même résultat en considérant le travail extérieur du à un couple M créant une rotation dθ :

$$\Delta W = -\Delta U = -\frac{1}{2}M.d\theta$$

$$-d\theta = \frac{d^2y}{dx^2}dL = \frac{Mdl}{EI}$$

$$U = -\frac{1}{2}\int M.d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dL$$

c) énergie de déformation due à l'effort tranchant :

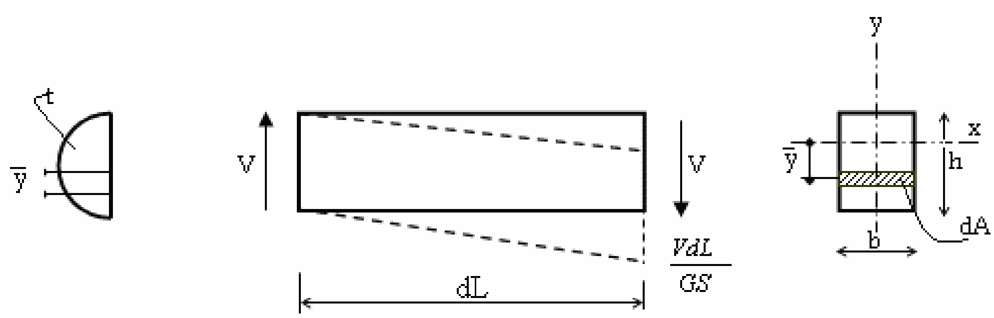


Figure3.3 :(c) élément soumis à l'effort tranchant

Si l'élément Δl est soumis à un effort tranchant V

$\sigma = \tau \qquad\qquad \varepsilon = \dfrac{\tau}{G}$

$$\Delta U = \int_A \frac{\tau^2}{G} dL.dA$$

L'intégration se fait par rapport à da donc l'énergie dépend de l'équation de variation de la contrainte τ le long de dA.

Pour une section rectangulaire $\tau = \dfrac{V}{2}\left(\dfrac{d^2}{4} - \bar{y}^2\right)$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{V^2 dL}{4GI^2}\int^{d/2}\left(\frac{d^2}{4} - \bar{y}^2\right)^2$$

$$\Delta U = \frac{k}{2}\left(\frac{V^2}{GS}\right)dL$$

L'énergie totale dans tout l'élément est

$$U = \frac{K}{2}\int_0^L \frac{v^2}{GS} dL \tag{3.6}$$

S : moment statique de la section

d) Energie de déformation due à un effort de torsion

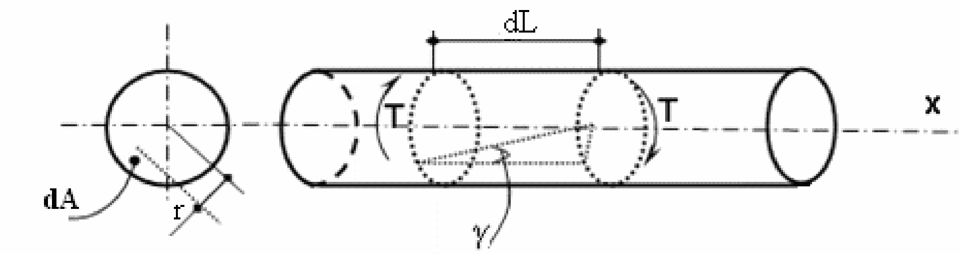


Figure 3.3 : (d) élément soumis à une torsion

$$\tau = T\frac{r}{J}$$

J : moment d'inertie polaire

Le déplacement correspond $\varepsilon = \dfrac{\tau}{G}$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2 dl}{GJ} dA.dL = \frac{1}{2}\frac{T^2 dL}{GJ^2}\int_0^L r^2 dA = \frac{1}{2}\frac{T^2 dL}{GJ}$$

D'où l'énergie accumulée dans tout l'élément :

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2}{GJ} dL \tag{3.7}$$

e) Energie de déformation totale :

Dans une structure ou tous ces types de sollicitations (efforts intérieurs) sont présents l'énergie totale de déformation sera égale à la somme des énergies internes de toutes ces sollicitations.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA} dL + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dL + \frac{K}{2}\int_0^L \frac{V^2}{GS} dL + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{T^2}{GJ} dL$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + \frac{KV^2}{GS} + \frac{T^2}{GJ} \right] dL \qquad (3.8)$$

3.2.4 Théorème de Maxwell Betti :

Le déplacement au point j causé par une force unité appliquée au point i est numériquement égal au déplacement au point i causé par une force unité appliquée au point j, à condition que la loi de Hooke soit vérifiée.

3.2.5 Méthode énergétique de Castigliano :

La méthode de Castigliano permet de calculer les déplacements en des points particuliers des barres, par extension on peut calculer le déplacement en tous les points ainsi que résoudre les problèmes hyperstatiques.

Enoncé du théorème : si en un point i est appliquée une force Fi, alors le sens du déplacement u est celui de la direction de la force Fi ; le déplacement donnée par la relation :

$$u = \frac{dW}{dFi}$$

Oǔ :

W : énergie potentielle élastique total de la poutre due à toute les forces extérieures.

$u = \dfrac{dW}{dN}$ (Translation axiale)

$v = \dfrac{dW}{dv}$ (Translation perpendiculaire à la ligne moyenne de la barre)

$\varphi = \dfrac{dW}{dM}$ (Rotation)

3.3 Méthode des déplacements

Cette méthode a été conçue pour le calcul des structures hyperstatiques formées de barres généralement droites encastrées aux deux nœuds et que l'on désigne habituellement du nom de portique ou cadre.

Cette méthode prend comme inconnues les déplacements subis par les nœuds de la structure, c'est-à-dire translations et rotations qui permettent d'arriver à la position déformée. Le nombre d'inconnue est donc égale au nombre des déplacements des nœuds.

Pour les structures élastiques, la position déformée est une position d'équilibre cette position déformée est définie à partir des déplacements (rotations et translations) de chaque nœud ; nous pouvons ainsi trouver les efforts dans chaque barre.

Une étape préliminaire de la méthode des déplacements consiste à remplacer la structure initiale par une autre appelée système statique de base (provenant de la première) ou sont introduites les liaisons supplémentaires pour empêcher toute possibilité de déplacement des nœuds.

Le système de base est donc formé par un ensemble de barres parfaitement encastrées aux extrémités, en écrivant les conditions d'équilibre pour chaque nœud vis-à-vis de la translation et de la rotation, on obtient les équations nécessaires pour déterminer les valeurs inconnues des déplacements.

Nous rappelons que le système statique de base présente des liaisons supplémentaires par rapport à la structure réelle, il en découle alors que les résultantes des réactions ayant été engendrées dans ces liaisons par des forces extérieures et par l'empêchement des déplacements doivent être nulles dans la structure réelle.

Dans ce chapitre seule la version de la méthode des déplacements adoptée à l'informatique est exposée, la matrice de rigidité de la structure sera construite par simple sommation des matrices de rigidité des différents éléments composant la structure, après prise en compte des conditions aux appuis et de chargement, la résolution du système KU = F donnera les déplacements nodaux desquels seront déduits les efforts dans chaque élément. L'analyse matricielle des structures discrètes a été à l'origine du développement de la méthode des éléments finis.

3.4 matrices de rigidités élémentaires planes

3.4.1 Matrice de rigidité d'un élément de treillis (barre ou ressort)

Un ressort ou un élément de treillis de raideur k travaille à l’effort normal seulement. La force F et le déplacement U ayant le mémé sens positif sont proportionnellement liés: F = KU

Si E est le module d’élasticité, A la section de l’élément et L sa longueur (figure 3.4.1), le déplacement est alors: $U = \Delta L = L\varepsilon = L\frac{\sigma}{E} = L\frac{F}{EA}$ (3.9)

Donc : $F = \frac{EA}{L}U$ d’ou $k = \frac{EA}{L}$ (3.10)

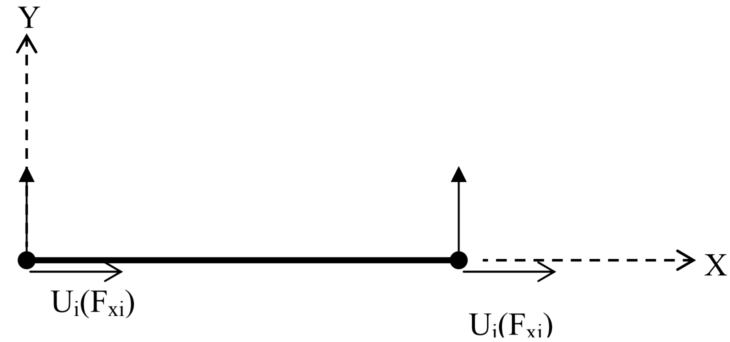


Figure 3.4: élément barre (ressort)

L’élément est décrit par deux nœuds i et j l’axe longitudinal x est orienté du nœud début i vers le nœud fin j et l’axe y est perpendiculaire à l’axe x. ces axes forment le repère local de l’élément.

Si $u_i = 1$ *et* $u_j = 0$ *alors* $F_{Xi} = ku_i = k = -F_{Xj}$

Si $u_i = 0$ *et* $u_j = 1$ *alors* $F_{Xi} = -ku_j = -k = -F_{Xj}$

Les forces F_{y1} et F_{y2} sont nulles.

En superposant sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad \text{Oŭ} \quad F=KU \qquad (3.11)$$

Avec $K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (3.12)

La relation (3.12) donne la matrice de rigidité uni-axiale d’un élément de treillis liant les déplacements et les forces aux nœuds.

On peut réécrire le système dans le plan en tenant compte des déplacements v_i et v_j selon l’axe y (l’axe longitudinal x et l’axe y qui lui es t perpendiculaire forment le repère local de la barre) ;

on obtient : $\begin{bmatrix} F_{xi} \\ 0 \\ F_{xj} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$ donc $k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3.13)

La relation (3.13) donne la matrice de rigidité plane d'un élément de treillis dans le repère local.

3.4.2 Matrice de rigidité d'un élément de portique (poutre)

Considérons un élément de portique avec deux noeuds *i* et *j* (Fig. 3.5), dans le plan chaque nœud possède trois degrés de liberté : deux translations *u et v*, et une rotation θ autour de l'axe z, qui est perpendiculaire au plan. A ces degrés de liberté correspond respectivement deux forces *N* (force axiale) et *V* (force de cisaillement) et un moment de flexion *M*. Ces quantités seront cependant désignes respectivement comme déplacements et forces et sont exprimées dans le système des coordonnes locales de l'élément. L'axe *x* est l'axe longitudinal de l'élément.

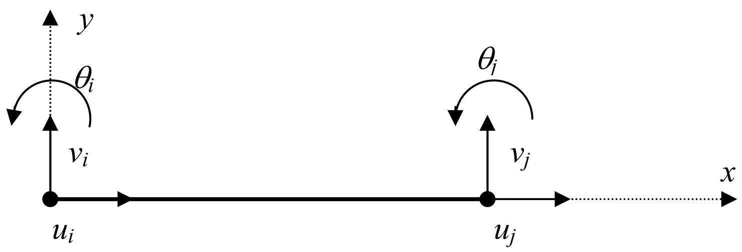


Figure.3.5: Élément de portique plan dans le système des coordonnées locales

Trois équations d'équilibre relient les forces nodales en l'absence des charges reparties :

$$N_i + N_j = 0 \qquad V_i + V_j = 0 \qquad M_i + M_j - V_i L = 0 \tag{3.14}$$

Dans ces équations d'équilibre, la force axial et le moment de flexion sont indépendants.

L est la longueur de l'élément, *A* est la section et *I* est le moment d'inertie suivant l'axe *z*. *E* est le module d'élasticité du matériau.

Afin de déterminer la matrice de rigidité de l'élément du portique plan, qui est de dimension 6x6, nous devons trouver les relations entre les déplacements nodaux et les forces en considérant séparément les d.d.l.

Considérons en premier le noeud *i* :

1/ $u_i \neq 0$ (comportement axial ou membranaire) :

Toutes les forces sont nulles sauf :

$$N_i = -N_j = \frac{EA}{L} u_i \tag{3.15}$$

2/ v_i et $\theta_i \neq 0$ (comportement flexionnel) :

Le moment de flexion et l'effort tranchant dans une section de l'abscisse x sont :

$$M(x) = M_i - V_i x \qquad \text{et} \qquad V(x) = V_i \tag{3.16}$$

L'énergie de tension due au moment de flexion et à l’effort tranchant est :

$$U=\int_0^L\left(\frac{M^2}{2EI}+\frac{V^2}{2GA_r}\right)dx=\frac{1}{2EI}\left(V_i^2\frac{L^3}{3}+M_i^2L-M_iV_iL^2\right)+\frac{V_i^2L}{2GA_r} \tag{3.17}$$

G est le module de cisaillement lié au module d'élasticité et le coefficient de Poisson par :

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.18}$$

A_r est la section réduite de cisaillement.

Notons :

$$\alpha=\frac{12EI}{GA_rL^2} \tag{3.19}$$

Pour une section rectangulaire *bh* la section de cisaillement et le moment d’inertie sont:

$$A_r=\frac{5}{6}A=\frac{5}{6}bh \qquad\qquad I=\frac{bh^3}{12}$$

Remplaçant le module de cisaillement (3.18) dans l'expression (3.19) qui devient ainsi :

$$\alpha=2.4(1+\nu)\left(\frac{h}{L}\right)^2 \tag{3.20}$$

Le coefficient de cisaillement α est inversement proportionnel au carré du rapport (*L/h*).

En général l'énergie de cisaillement (dernier terme de la relation (3.17) est très petit et est négligé dans des méthodes classiques. Cependant pour les éléments courts il devient important et doit être pris en compte. Dans ce travail on le considère systématiquement.

L'expression d'énergie de tension devient :

$$U=\int_0^L\left(\frac{M^2}{2EI}+\frac{V^2}{2GA_r}\right)dx=\frac{1}{2EI}\left(V_i^2\frac{L^3}{3}+M_i^2L-M_iV_iL^2+\alpha V_i^2\frac{L^3}{12}\right) \tag{3.21}$$

Les déplacements sont donnés par le premier théorème de Castigliano :

$$v_i=\frac{\partial U}{\partial V_i}=\frac{1}{2EI}\left(2V_i\frac{L^3}{3}-M_iL^2+\alpha V_i\frac{L^3}{6}\right) \tag{3.22}$$

$$\theta_i=\frac{\partial U}{\partial M_i}=\frac{1}{2EI}\left(2M_iL-V_iL^2\right) \tag{3.23}$$

Nous constatons que les déplacements dans l’équation (3.22) dépendent du coefficient de

cisaillement tandis que les rotations dans l’équation (3.23) non. La prochaine section illustre l'effet de l'énergie de cisaillement sur les déplacements.

3.4.3 Effet de la force de cisaillement sur le déplacement

La relation (3.22) donne l'expression du déplacement total dans le noeud *i.*

Le dernier terme de l'équation (3.22) donne le déplacement provoqué par la force de cisaillement.

Appliquons cette relation à la poutre de la figure (3.6).

Figure.3.6: déplacement dans une poutre console.

La force de cisaillement et le moment de flexion dans l'extrémité libre (noeud *i*) sont:

$$V_i = -P \qquad \text{et} \qquad M_i = 0$$

Le déplacement du noeud libre *i* donné par l'équation (3.23) devient :

$$v = v_M + v_V = \frac{PL^3}{3EI} + \alpha \frac{PL^3}{12EI}$$

Nous reconnaîtrons facilement le déplacement causé par le moment de flexion dans le premier terme. Le deuxième terme donne le déplacement causé par l'effort tranchant. Les expressions normales sont :

$$\frac{v_M}{v} = \frac{4}{4+\alpha} \qquad\qquad \frac{v_V}{v} = \frac{\alpha}{4+\alpha}$$

La figure (3.6) donne la variation de ces déplacements normalisé en fonction de l'élancement *L/h* pour un coefficient de poisson 0.2 en considérant une section rectangulaire pour laquelle l'expression de α est donné par (3.20).

On voit clairement que pour des éléments avec un petit faible rapport (*L/h* < 4), la contribution de la force de cisaillement devient importante et ne doit pas être négligée.

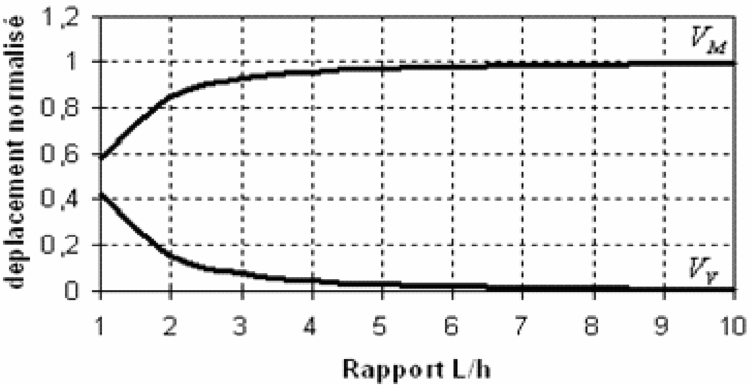


Fig.3.6: Variation des déplacements dus au moment et à l'effort tranchant avec prise en compte de l'élancement L/h

Maintenant étudions séparément les effets des deux d.d.l. v_i et θ_i.

a/ $v_i \neq 0$ et $\theta_i = 0$:

les équations (3.22) et (3.23) donne :

$$\theta_i = 0 \qquad \text{donc} \qquad M_i = \frac{V_i L}{2} \tag{3.24}$$

$$v_i = \frac{1}{2EI}\left(2V_i\frac{L^3}{3} - V_i\frac{L^3}{2} + \alpha V_i\frac{L^3}{6}\right) = \frac{V_i L^3}{12EI}(1+\alpha) \tag{3.25}$$

Par substituant nous obtenons:

$$V_i = \frac{12EI}{L^3(1+\alpha)}v_i \qquad M_i = \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)}v_i \tag{3.26a}$$

$$V_j = -\frac{12EI}{L^3(1+\alpha)}v_i \qquad M_j = \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)}v_i \tag{3.26b}$$

b/ $v_i = 0$ et $\theta_i \neq 0$:

Les équations (3.22) et (3.23) donne :

$$v_i = 0 \qquad \text{donc} \qquad M_i = \frac{V_i L}{6}(1+\alpha) \tag{3.27}$$

$$\theta_i = \frac{1}{2EI}\left(V_i\frac{L^2}{3}(4+\alpha) - V_i L^2\right) = \frac{V_i L^2}{6EI}(4+\alpha) \tag{3.28}$$

Par substitution nous obtenons:

$$V_i = \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)}\theta_i \qquad M_i = \frac{EI(4+\alpha)}{L(1+\alpha)}\theta_i \tag{3.29a}$$

$$V_j = -\frac{6EI}{L^2(1+\alpha)}\theta_i \qquad M_j = \frac{EI(2-\alpha)}{L(1+\alpha)}\theta_i \tag{3.29b}$$

Avec une procédure semblable nous établissons des relations de déplacement force dans le noeud j et par la superposition nous trouvons les relations nodales finales suivantes :

$$N_i = \frac{EA}{L}u_i - \frac{EA}{L}u_j$$

$$V_i = \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3}v_i + \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}\theta_i - \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3}v_j + \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}\theta_j$$

$$M_i = \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}v_i + \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L}\theta_i - \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}v_j + \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L}\theta_j$$

$$N_j = -\frac{EA}{L}u_i + \frac{EA}{L}u_j \tag{3.30}$$

$$V_j = -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3}v_i - \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}\theta_i + \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3}v_j - \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}\theta_j$$

$$M_j = \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}v_i + \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L}\theta_i - \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2}v_j + \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L}\theta_j$$

Ces relations peuvent être exprimées sous forme matricielle tel que $[F]=[k][U]$ avec les vecteurs force et déplacements donnés par :

$$[F] = \begin{bmatrix} N_i & V_i & M_i & N_j & V_j & M_j \end{bmatrix}^T \tag{3.31a}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{bmatrix}^T \tag{3.31b}$$

$[k]$ est la matrice de rigidité donnée par :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Si nous prenons $\alpha = 0$ dans le cas ou l'énergie de cisaillement est négligée nous obtenons la forme classique de la matrice de rigidité:

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

3.5 Transformation géométrique

La précédente matrice de rigidité est établie dans le système des coordonnées locales SCL ou l'axe x est l'axe longitudinal de l'élément. Pour assembler les matrices de rigidité de plusieurs éléments dans de différentes orientations nous devons exprimer dans système unique celui des coordonnées globales SCG.

Les forces et les déplacements sont des vecteurs et sont non sensible aux axes de translation. Nous considérons donc seulement les axes de rotation avec la même origine.

Notons $\bar{x}$, $\bar{y}$ axes locales et x , y les axes globales.

$\bar{x}$ est l'axe longitudinal de l'élément. $\bar{z}$ et z sont les axes perpendiculaires au plan sont les mêmes.

si φ est l'angle entre les axes $\bar{x}$ et x (Fig.3.5.1), nous avons les relations suivantes entre les vecteurs forces et déplacements dans le noeud *i*:

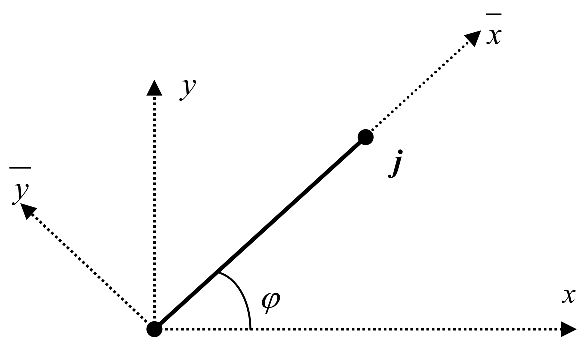


Figure3.7: Systèmes des coordonnées globales et locales

$$\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \bar{\theta}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\\ \theta_i\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\bar{F}_{xi}\\ \bar{F}_{yi}\\ \bar{M}_{zi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{yi}\\ M_{zi}\end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

En pratique l'angle φ est déduit des coordonnées nodales comme suit :

$$\cos\varphi = \frac{L_x}{L} = \frac{X_j - X_i}{L} \qquad \sin\varphi = \frac{L_y}{L} = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

Sous forme matricielle:

$$[\bar{U}_i]=[R][U_i] \qquad \text{et} \qquad \bar{F}_i=[R][F_i] \qquad (3.35)$$

$[R]$ est la matrice de rotation donnée par:

$$[R]=\begin{bmatrix}\lambda & \mu & 0\\ -\mu & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

Avec: $\lambda=\cos\varphi = \frac{L_x}{L}$ $\qquad \mu=\sin\varphi = \frac{L_y}{L}$

Si nous considérons les deux noeuds *i* et *j*, nous avons :

$$\begin{bmatrix}[\bar{U}_i]\\ [\bar{U}_j]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[R] & [0]\\ [0] & [R]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[U_i]\\ [U_j]\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}[\bar{F}_i]\\ [\bar{F}_j]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[R] & [0]\\ [0] & [R]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[F_i]\\ [F_j]\end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

Ou sous forme matricielle:

$$[\bar{U}]=[T][U] \qquad [\bar{F}]=[T][F] \qquad avec \qquad [T]=\begin{bmatrix}[R] & [0]\\ [0] & [R]\end{bmatrix} \qquad (3.38a)$$

La relation inverse est:

$$[U]=[T]^T[\bar{U}] \qquad [F]=[T]^T[\bar{F}] \qquad (3.38b)$$

$[T]$ est appelée matrice de transformation géométrique.

On remarque que $[T]^{-1}=[T]^T$ (transformation orthogonale).

Si nous substituons dans l'équation d'équilibre local:

$$[\bar{F}]=[\bar{K}][\bar{U}] \qquad donc \qquad [T][F]=[\bar{K}][T][U]$$

D'ou: $\qquad [F]=[T]^T[\bar{K}][T][U]=[K][U]$

La relation entre les matrices est par conséquent:

$$[K]=[T]^T\left[\overline{K}\right][T] \tag{3.39}$$

En notant:

$$a=\frac{EA}{L} \qquad\qquad f=\frac{12\,EI}{(1+\alpha)L^3} \tag{3.40}$$

a et f représentent respectivement les rigidités axial et flexionnelle.

La relation (3.38) donne la matrice de rigidité dans le système global :

$$[K]=\begin{bmatrix}
\lambda^2 a+\mu^2 f & \mu\lambda(a-f) & -\mu\frac{fL}{2} & -\lambda^2 a-\mu^2 f & -\mu\lambda(a-f) & -\mu\frac{fL}{2} \\
\mu\lambda(a-f) & \mu^2 a+\lambda^2 f & -\lambda\frac{fL}{2} & -\mu\lambda(a-f) & -\mu^2 a-\lambda^2 f & \lambda\frac{fL}{2} \\
-\mu\frac{fL}{2} & -\lambda\frac{fL}{2} & \frac{fL^2}{12}(4+\alpha) & \mu\frac{fL}{2} & -\lambda\frac{fL}{2} & \frac{fL^2}{12}(2-\alpha) \\
-\lambda^2 a-\mu^2 f & -\mu\lambda(a-f) & \mu\frac{fL}{2} & \lambda^2 a+\mu^2 f & \mu\lambda(a-f) & \mu\frac{fL}{2} \\
-\mu\lambda(a-f) & -\mu^2 a-\lambda^2 f & -\lambda\frac{fL}{2} & \mu\lambda(a-f) & \mu^2 a+\lambda^2 f & -\lambda\frac{fL}{2} \\
-\mu\frac{fL}{2} & \lambda\frac{fL}{2} & \frac{fL^2}{12}(2-\alpha) & \mu\frac{fL}{2} & -\lambda\frac{fL}{2} & \frac{fL^2}{12}(4+\alpha)
\end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Les matrices de rigidité exprimées en coordonnées locales ou globales peuvent être divisées en quatre matrices secondaires comme montrées par les lignes en points tillés:

$$[k]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\
0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\
\hdashline
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\
0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L}
\end{array}\right] \tag{3.42}$$

L'équation d'équilibre est:

$$\begin{bmatrix}[F_i]\\ [F_j]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[K_{ii}] & [K_{ij}]\\ [K_{ji}] & [K_{jj}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[U_i]\\ [U_j]\end{bmatrix} \qquad donc \qquad [K]=\begin{bmatrix}[K_{ii}] & [K_{ij}]\\ [K_{ji}] & [K_{jj}]\end{bmatrix} \tag{3.43}$$

3.6 Matrice de rigidité de la structure

Pour une structure composée *de n* éléments, nous devons assembler toutes les matrices de rigidité des éléments exprimées dans le système global.
Pour chaque élément e de nœuds i et j, en utilisant la relation (3.41) nous avons:

$$\begin{bmatrix}[F_i^e]\\ [F_j^e]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[K_{ii}^e] & [K_{ij}^e]\\ [K_{ji}^e] & [K_{jj}^e]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[U_i^e]\\ [U_j^e]\end{bmatrix} \quad ou \quad [F^e]=[K^e][U^e] \tag{3.44}$$

Par extension des matrices et des vecteurs à tous les degrés de liberté de la structure la précédente équation peut être écrite comme suit:

$$[F^e]=[K^e][U] \tag{3.45}$$

Le vecteur de force et la matrice de rigidité sont spécifiques à l'élément e mais le déplacement correspond à toute la structure d.d.l et est le même pour tous les éléments.

L'équilibre de structure est exprimé par:

$$[F]=\sum_{e=1}^{n}[F^e]=\left(\sum_{e=1}^{n}[K^e]\right)[U]=[K][U] \tag{3.46}$$

Donc : $$[K]=\sum_{e=1}^{n}[K^e] \tag{3.47}$$

La matrice de rigidité de la structure est ainsi obtenue en additionnant les matrices de rigidité de tous les éléments.

L'exécution numérique cependant n'exige pas l'expansion des matrices d'éléments. La force venant de l'élément e au noeud i est déduite de (3.41) :

$$[F_i^e]=[K_{ii}^e][U_i]+[K_{ij}^e][U_j] \tag{3.48}$$

Toute la force dans le noeud i est obtenue en additionnant des contributions de tous les éléments reliés à ce noeud :

$$[F_i]=\sum_e [F_i^e]=\sum_e\left([K_{ii}^e][U_i]+[K_{ij}^e][U_j]\right)$$

Donc : $$[F_i] = \left(\sum_e [K_{ii}^e]\right)[U_i] + \left(\sum_e [K_{ij}^e]\right)[U_j]$$

(3.49)

Ceci signifie que dans le noeud i toutes les sous matrices $\lfloor K_{ii}^e \rfloor$ des éléments reliés à ce noeud sont ajoutées. Des sous matrices $\lfloor K_{ij}^e \rfloor (i \neq j)$ sont placées dans les positions correspondantes sans addition parce qu'entre deux noeuds quelconques i et j il n'y a qu'un seul élément simple. L'absence d'élément entre deux noeuds p et q signifie que la sous-matrice $\lfloor K_{pq} \rfloor$ est nulle. Les sous matrices structurales sont alors :

Sous matrices diagonales : $[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$

Sous matrices non diagonales: $\lfloor K_{pq} \rfloor \neq 0 \;\Leftrightarrow$ un élément existe entre p et q.

3.7 Remarques sur les matrices de rigidités

- Un élément ij de la matrice correspond à la force en i due à un déplacement unitaire en j.
- La matrice de rigidité est symétrique (théorème de Betti-Maxwell).
- Tous les éléments diagonaux sont positifs car le déplacement et la force qui le cause en un point sont toujours de même sens.
- La matrice est singulière (son déterminant est nul) car en absence d'appuis la structure est un mécanisme instable.
- La matrice de rigidité d'une poutre est composée de deux parties, une membrane (axiale), donnée par les premières et quatrièmes lignes identiques à la matrice de rigidité d'un treillis et l'autre partie 4x4 décrivant le comportement flexionnel.
- Dans la partie flexionnelle la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne n'est pas nulle car l'équilibre tient compte des forces et moments.

Ces remarques sont valables aussi bien pour la matrice de rigidité de la structure que pour les matrices de rigidité élémentaires.

3.8 Importance de la numérotation nodale

Sans influencer sur les résultats finaux, la numérotation nodale affecte toutefois la forme de la structure. Dans une structure compose de plusieurs éléments, chaque noeud est connecté en général à un nombre limité d'éléments. Ceci montre que plusieurs sous matrices composant la matrice de rigidité de la structure sont nulles. La topologie de la matrice dépend donc de la numérotation montrer dans l'exemple qui suit :

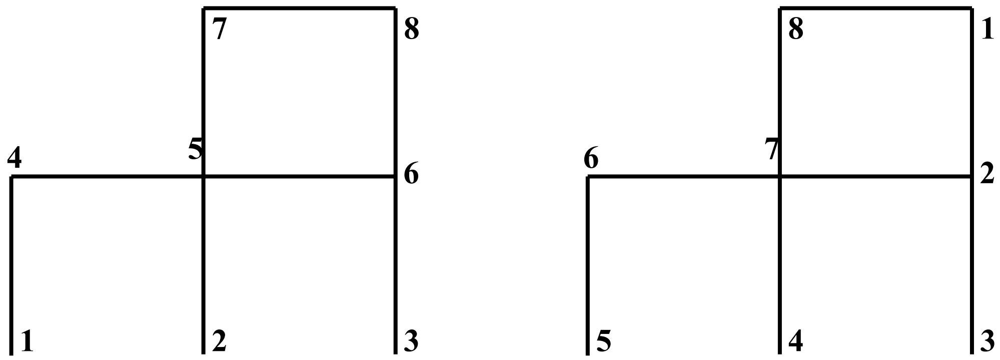


Figure 3.8 : Effet de la numérotation sur la topologie de la matrice

La matrice de rigidité en termes de sous matrices pour les deux cas sont:

$$
\begin{bmatrix}
K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} & 0 & 0 \\
K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{52} & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & 0 \\
0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & K_{68} \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{75} & 0 & K_{77} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{86} & 0 & K_{88}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 & K_{27} & 0 \\
0 & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} & 0 \\
0 & K_{72} & 0 & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{87} & K_{88}
\end{bmatrix}
$$

Le nombres de termes non nuls (sous matrices) est le même mais leurs positions changent. La largeur de la demi-bande contenant les éléments non nuls est de quatre sous matrices dans le premier cas et de huit dans le deuxième. En termes de sous matrice, la largeur de la demi-bande est égale à la plus grande différence entre les numéros d'un nœud plus un.

$$L_B = Max(N_J - N_I) + 1$$

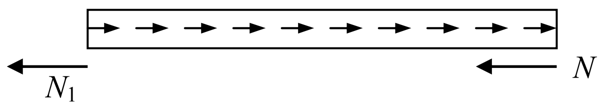
Une judicieuse numérotation peut placer les termes non nuls autour de la diagonale de la matrice et cet aspect de bandes peut avoir comme conséquence la grande épargne numérique en termes de nombre de calculs et de mémoire.

3.9 Forces nodales équivalentes

L'équation d'équilibre KU = F lie les forces appliquées aux déplacements des nœuds, il faut par conséquent transformer les charges appliquées dans les travées en forces nodales équivalentes pour pouvoir utiliser les relations matricielles précédentes. Les forces nodales équivalentes ne sont autres que les réactions d'appuis (forces et moments) changées de signe. Ces dernières sont connues et disponibles dans la plupart des ouvrages de la résistance des matériaux mais ont été établis en négligeant l'énergie de cisaillement. Pour déterminer les réactions d'appuis et donc les forces nodales équivalentes dans le cas général, il suffit d'évaluer énergie de déformation u et d'appliquer le théorème de Castigliano aux déplacements nuls. Pour les forces verticales nous considérons des forces descendantes et donc négatives selon la convention de signe adoptée. Les forces nodales équivalentes sont donc égales aux expressions des réactions changées de signe (positives).

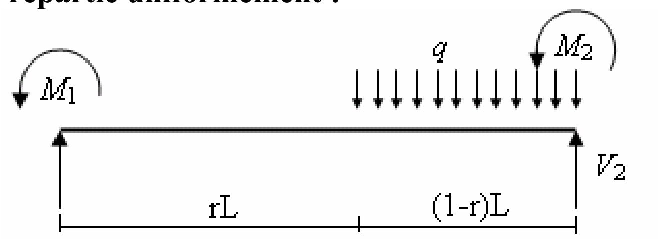
3.9.1 Effort normal uniformément reparti :

q : effort normal par unité de longueur



$$N_1 = N_2 = q\frac{L}{2} \tag{3.50}$$

3.9.2 Charge latérale repartie uniformement :



Les expressions de la force et du moment dans une section d'abscisse x sont :

$0 \le x \le rL$: $\quad V(x) = V_1 \qquad M(x) = M_1 - V_1\, x$

$rL \le x \le L$: $\quad V(x) = V_1 - q(x - rL) \qquad M(x) = M_1 - V_1\, x + \frac{q}{2}(x - rL)^2$

L'énergie de déformation est:

$$U = \int_0^L \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{V^2}{2GA_r} \right) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(M^2 + \alpha V^2 \frac{L^2}{12} \right) dx \tag{3.51}$$

Substituons M et V par leurs expressions dans les deux parties en intégrant nous obtenons :

$$U = \frac{1}{2EI}\left[M_1^2 L + V_1^2 (4+\alpha)\frac{L^3}{12} - M_1 V_1 L^2 + q^2 (1-r)^3 \left[9(1-r)^2 + 5\alpha\right]\frac{L^5}{180}\right]$$

$$+\frac{1}{2EI}\left[M_1 q(1-r)^3 \frac{L^3}{3} - V_1 q(1-r)^2 \left[3(1-r)^2 + 4r(1-r) + \alpha\right]\frac{L^4}{12}\right] \qquad (3.52)$$

Appliquant le premier théorème de Castigliano et sachant que les déplacements nodaux sont nuls, on trouve:

$$v_1 = \frac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \qquad \theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = 0 \qquad (3.53)$$

Qui nous donnent deux équations en fonction de V_1 et M_1 :

$$V_1(4+\alpha)\frac{L}{6} - M_1 - q(1-r)^2\left[3(1-r)^2 + 4r(1-r) + \alpha\right]\frac{L^2}{12} = 0 \qquad (3.54)$$

$$2M_1 - V_1 L + q(1-r)^3 \frac{L^2}{3} = 0 \qquad (3.55)$$

Après substitution, nous trouvons les efforts suivant dans le noeud 1:

$$V_1 = \frac{qL(1-r)^2}{2(1+\alpha)}\left[-r^2 + 1 + \alpha\right] \qquad (3.56)$$

$$M_1 = \frac{qL^2(1-r)^2}{12(1+\alpha)}\left[-3r^2 + (2r+1)(1+\alpha)\right] \qquad (3.57)$$

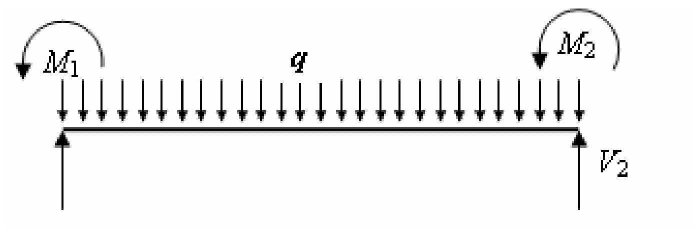
Les relations d'équilibre nous permettent de déduire les efforts dans le noeud 2 :

$$V_2 = \frac{qL(1-r)}{2(1+\alpha)}\left[-r^3 + r^2 + (r+1)(1+\alpha)\right] \qquad (3.58)$$

$$M_2 = \frac{qL^2(1-r)^2}{12(1+\alpha)}\left[3r^2 + (2r+1)(1+\alpha)\right] \qquad (3.59)$$

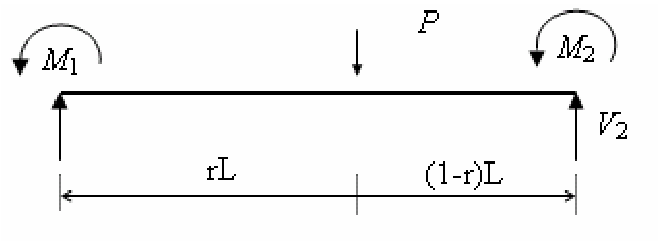
Les relations (3.56) à (3.59) montre qu'en général les réactions d'appuis dépendent du coefficient de cisaillement α.

Cependant si la charge uniforme est appliquée sur toute la travée ($r = 0$), nous retrouvons les valeurs habituelles, qui ne dépendent pas de l'énergie de cisaillement.



$$V_1 = V_2 = \frac{qL}{2} \qquad M_1 = -M_2 = \frac{qL^2}{12} \qquad (3.60)$$

3.9.3 Charge latérale concentrée:



Les efforts dans une section d'abscisse x sont :

$0 \le x \le rL$: $\quad V(x) = V_1 \qquad M(x) = M_1 - V_1 x$

$rL \le x \le L$: $\quad V(x) = V_1 - q(x - rL) \qquad M(x) = M_1 - V_1 x + P(x - rL)$

Après substitution dans l'expression de l'énergie de déformation et après intégration nous obtenons

$$U = \frac{1}{2EI}\left[M_1^2 L + V_1^2(4+\alpha)\frac{L^3}{12} - M_1 T_1 L^2 + P^2(1-r)\left[4(1-r)^2 + \alpha\right]\frac{L^3}{12}\right]$$

$$+\frac{1}{2EI}\left[M_1 P(1-r)^2 L^2 + PV_1(1-r)\left[2(r^2+r-2)-\alpha\right]\frac{L^3}{6}\right] \qquad (3.61)$$

Appliquant le théorème de Castigliano aux déplacements nodales nous obtenons deux équations en termes de V_1 et de M_1 :

$$V_1(4+\alpha)\frac{L}{6} - M_1 + P(1-r)\left[2(r^2+r-2)-\alpha\right]\frac{L}{6} = 0 \qquad (3.62)$$

$$2M_1 - V_1 L + PL(1-r)^2 = 0 \qquad (3.63)$$

Après substitution, nous trouvons dans le noeud 1 les efforts suivants:

$$V_1 = P\frac{(1-r)}{(1+\alpha)}\left[-2r^2 + r + 1 + \alpha\right] \qquad (3.64)$$

$$M_1 = PL\frac{r(1-r)}{2(1+\alpha)}\left[-2r + 2 + \alpha\right] \qquad (3.65)$$

Les efforts dans le noeud 2 sont déduits en utilisant les équations d'équilibre:

$$V_2 = P\frac{r}{1+\alpha}\left[-2r^2 + 3r + \alpha\right]$$

(3.66)

$$M_2 = -PL\frac{r(1-r)}{2(1+\alpha)}\left[2r + \alpha\right] \qquad (3.67)$$

Ces relations montrent que les réactions d'appuis dépendent en général de l'énergie de cisaillement. Cependant si la force concentrée est appliquée au milieu de la travée(r = 0.5) ou sur un des deux nœuds (r = 0 or r = 1), la dépendance disparaît et nous retrouvons les valeurs habituelles.

Afin d'éviter les transformations des efforts concentrés ou dissymétriques, il suffit de prévoir des nœuds supplémentaires dans tous les points d'application d'efforts concentrés aux extrémités des charges réparties. Ainsi seule la transformation de la charge répartie sur toute la travée en forces nodales équivalentes est nécessaire.

Le vecteur force se décompose donc en deux parties :

$$[F] = [F_n] + [F_s] \tag{3.68}$$

$[F_n]$ sont les forces appliqués directement sur les noeuds.

$[F_s]$: sont les forces nodales équivalents aux charges en travée et sont égales aux réactions d'appuis changées de signes.

En général les forces nodales sont exprimées directement dans le repère global S.C.G alors que les forces en travée sont exprimées dans le repère local S.C.L quelque soit l'orientation de l'élément.

Les précédentes relations pour chaque élément e deviennent:

$$[F^e] = [K^e][U^e] = [F_n^e] + [T^e]^T [\overline{F}_s^e] \tag{3.69}$$

Une force en travée est caractérisée par le numéro du noeud de l'élément chargé, la direction de la force et sa valeur. La direction de la force correspond au numéro du degré de liberté global (local).

3.10 Prise en compte des conditions limites:

En l'absence d'appuis la structure est instable et sa matrice de rigidité est singulière, la résolution du système linéaire $KU = F$ ne peut donc s'effectuer avant la prise en compte des conditions aux limites.

IL existe diverses méthodes pour introduire les conditions aux limites citons ici trois méthodes.

3.10.1 Méthode du terme diagonal prépondérant ou pénalisant.

Pour chaque composante de déplacement U_i fixé à une valeur connue U_i^0 (éventuellement nulle) $U_i = U_i^0$, on ajoute un nombre Ω très grand par rapport aux termes k_{ij} de la matrice de rigidité et on remplace la composante de force correspondante F_I par $\Omega u_i^0 + F_i$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & .... & k_{1i} & .... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & .... & k_{2i} & .... & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & .... & k_{ii}+\Omega & .... & k_{in} \\ \vdots & \vdots & .... & \vdots & .... & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & .... & k_{ni} & .... & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \Omega U_i^0 + F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

$U_I = 0 \quad \Rightarrow$ Nœud i est un appui.

$U_i \neq 0 \quad \Rightarrow$ Déplacement imposé.

L'équation 'i' devient : $\Omega U_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} U_j = \Omega U_i^0 + F_i$ (3.71)

Or $\Omega U_i >> \sum_{j=1}^{n} k_{ij} U_j$ donc la résolution du système donnera $U = U_i^0$

On prend en général $\Omega = 10^{20} Max\left|k_{ij}\right|$ ou simplement 10^{30}

3.10.2 Méthode du terme unité sur la diagonale.

Cette méthode consiste à modifier pour chaque déplacement imposé $U_i = U_i^0$ le vecteur F et la matrice K comme suit :

$F_i = U_i^0$ $\qquad$ $K_{ii} = 1$

Pour $j \neq i$: $\quad F_j = F_j - K_{ji} U_i^0$ $\qquad$ $K_{ij} = K_{ji} = 0$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & ... & 0 & ... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & ... & 0 & ... & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & ... & 0 & ... & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1i} U_i^0 \\ F_2 - K_{2i} U_i^0 \\ \vdots \\ U_i^0 \\ \vdots \\ F_n - K_{ni} U_i^0 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

La résolution de ce système donnera:

Équation i : $U_i = U_i^0$

Equation $j \neq i : \sum_{j=1}^{n} K_{ij} U_j = F_j$ $\quad$ l'équation j ne change donc pas.

Cette deuxième méthode est très précise mais n'est pas adéquate en cas de présence d'appuis élastique. Par ailleurs le nombre élevé de zéro peut poser des problèmes de conditionnement numérique sauf si le stockage en est adopté. Mais même dans ce dernier cas l'effet d'un déplacement imposé ne doit pas être considéré dans l'assemblage en profil car il ne constitue qu'un des nombreux cas de chargements possibles.

3.10.3 Suppression des équations et tableau NUM

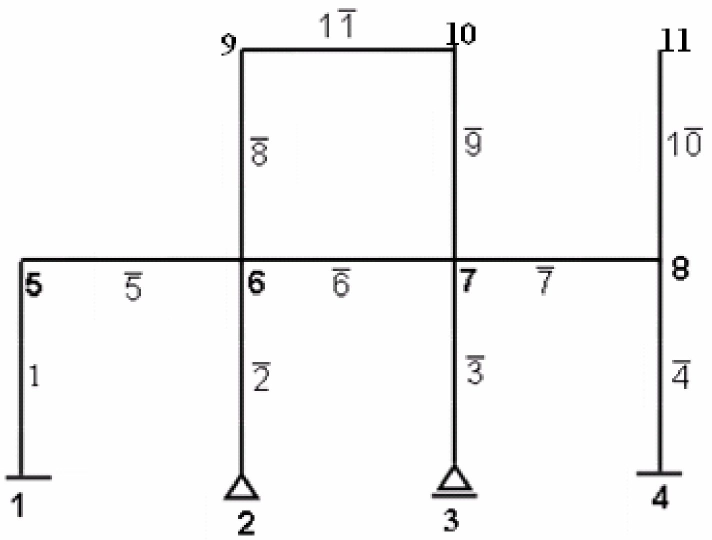
Les deux méthodes précédentes montrent que si le déplacement imposé U_i^0 est nul (degré de liberté inactif), son équation n'influe pas sur les autres et peut donc être éliminée pour tous les cas de chargement. Par contre le déplacement imposé non nul ne constitue qu'un cas particulier de chargement (degré de liberté actif) et l'équation correspondante ne doit pas être éliminée ce cas est pris en compte en général par la méthode de pénalisation.

La suppression des équations se fait en repérant à partir des données relatives aux conditions d'appuis tous les autres (degrés actifs) jusqu'au dernier dont le numéro N_{eq} donnera le nombre total d'équations. Le tableau NUM est de dimension NDDLxNND (nombre de degrés de liberté x nombre de nœuds), repérer d'abord les ddl non nuls ou actifs (code 1) et les ddl nuls ou inactifs (code 0) et numéroter par la suite les équations des degrés de libertés actifs.

Le tableau NUM est formé à la lecture des données.

NUM(ID,IN) ID: de 1 à NDDL, IN: de 1 à NND

Penons un exemple concret pour illustrer cette méthode:



Nombre de nœud NND= 11

Nombre de degrés de liberté par nœud NDDL=3

Nombre de nœuds par éléments ndel=2

Etape 1 : repérage des ddl actifs et inactifs

$$\text{NUM}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : numérotation des équations.

$$\text{NUM}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 \end{bmatrix}$$

Les équations d'un élément de nœuds i et j sont obtenues à partir des colonnes i et j du tableau NUM. Les numéros i et j de chaque élément sont données par le tableau LOCEL des connectivités. Ce tableau LOCEL (localisation des éléments) est de dimension NEL x NDEL (Nombre d'éléments NEL par le nombre de nœuds par élément NDEL) est construit à la lecture des données. Dans l'analyse matricielle des structures discrètes, NDEL=2.

LOCEL(IN,IE)   IE : de 1 à NEL ; IN : de 1 à NDEL

Pour notre exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Pour l'élément 3 : LOCEL(1,3)=3   et   LOCEL(2,3)=7

le vecteur de localisation des équations de chaque élément LOCEQ est de dimension NDDL x NDEL. Pour l'élément 3 de nœuds 3 et 7, ce vecteur est :

$$\text{LOCEQ} = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 10 \quad 11 \quad 12]^T$$

J : de 1 à NDEL x NDDL , IN : de 1 à NDEL , ID : de 1 à NDDL

$$\text{LOCEQ}(J) = \text{NUM}(\text{INxNDDL} + \text{ID} - \text{NDDL}) \tag{3.73}$$

Le vecteur LOCEQ donne les équations de chaque élément et permet d'effectuer l'assemblage de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale de la structure. Il n'est pas nécessaire de pré voir un tableau de localisation des équations pour tous les éléments, le même vecteur LOCEQ peut être utilisé pour contenir successivement les équations de chaque élément.

Le tableau NUM est généré par la subroutine EQUANUM et le vecteur LOCEQ par la subroutine EQULOC. Le tableau NUM contient toutes sur les conditions limites et il permet de supprimer toutes les équations des d.d.l inactifs et de retrouver facilement leurs positions.

3.10.4 Effet du diaphragme rigide et imposition des contraintes :

Des relations liant certains ddl de la structure peuvent être prises en considération par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou des technique de pénalisation mais en introduisant de nouvelles variables. En analyse des structures les relations les plus usuelles sont celles dues à la présence d'un diaphragme rigide au niveau des planchers. Cela signifie que les translations horizontales de tous les nœuds appartenant au diaphragme sont égales

Il est donc possible de réduire le nombre d'équations la technique utilisée consiste à donner le même numéro à toutes les équations des d.d.l égaux.

Ainsi dans notre exemple si les déplacements horizontaux des nœuds 5,6,7 et 8 sont égaux ainsi que ceux des nœuds 9 et 10, le nombre d'équation diminue de 4 et le tableau NUM devient :

$$NUM=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 13 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 9 & 11 & 14 & 16 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 & 17 & 20 \end{bmatrix}$$

La contrainte du diaphragme rigide est surtout utilisé en analyse dynamique de l'effet du séisme (dont les composantes horizontales sont souvent prépondérantes) sur les structures.

Dans l'espace la présence du diaphragme rigide signifie que les deux translations horizontales u et w et la rotation θ_Y par rapport à l'axe vertical y sont pour tous les nœuds du diaphragme. La prise en compte d'un diaphragme rigide implique que l'effort normal dans les poutres du diaphragme est nul.

3.11 Structures avec des articulations internes

Les sections précédentes sont concernées par des structures composées de noeuds rigides. Il y a des cas où les articulations internes existent dans la structure telle que des structures combinant des éléments portique et treillis. L'étude des articulations internes est particulièrement importante dans l'élastoplasticité pour tenir compte de l'apparition des rotules plastiques.

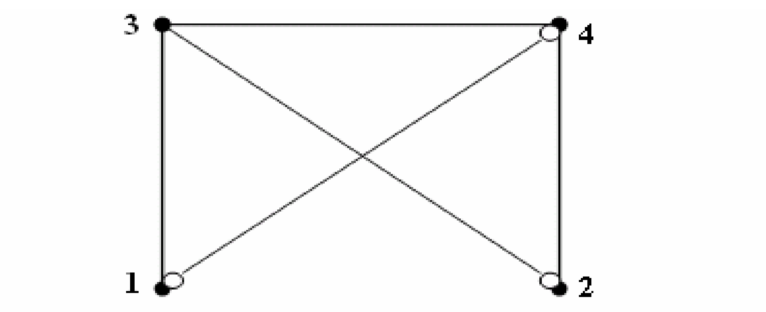


Figure.3.8: Structure avec des articulations internes.

Tous les noeuds sont d'abord considérés en tant que rigides et toutes les matrices de rigidité d'élément sont 6x6. Sur la figure (3.8), les éléments 1-3, 2-4, et 3-4 ont les extrémités rigides (noeuds). L'élément 1-4 diagonal est doublement articulé tandis que la diagonale 2-3 à l'extrémité 2 articulée et l'extrémité 3 rigide. Ces articulations internes (rotules) doivent être impliquées dans les matrices de rigidité.

Les nouvelles matrices de rigidité sont obtenues comme pour un élément normal de portique en considérant un moment nul dans la rotule et en employant le théorème de Castigliano. Par exemple si le noeud *i* est rotulé, nous devons prendre zéro pour M_i dans l'expression (3.21) de l'énergie de déformation et dans les équations d'équilibre (3.14). Nous obtenons les matrices de rigidité suivantes dans des coordonnées locales :

1/ Noeud *i* (1) articulé et le noeud *j* (2) rigide :

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & 0 & 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & \frac{12EI}{(4+\alpha)L} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

2/ Noeud *i* (1) rigide et le noeud *j* (2) articulé :

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & \frac{12EI}{(4+\alpha)L} & 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & -\frac{12EI}{(4+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(4+\alpha)L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

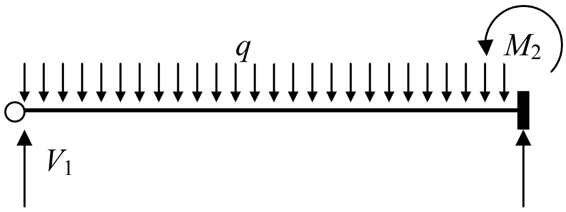
3/ Les noeuds *i* (1) et *j* (2) articulé :

Nous obtenons dans ce cas la matrice de rigidité d'élément treillis passer à six d.d.l.

3.11.1 Effet des articulations internes sur les forces nodales équivalentes

Les transformations de la charge repartie en forces nodales équivalentes est affecté par la présence d'articulation internes. Considérons le cas d'une charge uniformément repartie

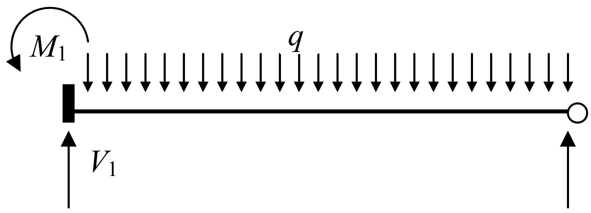
a/ noeud *i* (1) articulé et le noeud *j* (2) rigide :



En prenant $M_1 = 0$ dans l'équation d'équilibre (3.1) et dans l'expression de l'énergie de déformation (3.8) on obtient:

$$V_1 = \frac{qL}{2}\frac{3+\alpha}{4+\alpha} \qquad V_2 = \frac{qL}{2}\frac{5+\alpha}{4+\alpha} \qquad M_2 = -\frac{qL^2}{2(4+\alpha)} \qquad M_1 = 0$$

b/ noeud *i* (1) rigide et le noeud *j* (2) articulé :



En prenant $M_2 = 0$ dans l'équation d'équilibre (3.14) et dans l'expression de l'énergie de déformation (3.21) on obtient:

$$V_2 = \frac{qL}{2}\frac{3+\alpha}{4+\alpha} \qquad V_1 = \frac{qL}{2}\frac{5+\alpha}{4+\alpha} \qquad M_1 = \frac{qL^2}{2(4+\alpha)} \qquad M_2 = 0$$

Si l'élément est doublement articulé les deux moments sont nuls et l'effort tranchant est égal à $qL/2$.

3.12 Résolution du système linéaire

La résolution du système d'équation linéaire $[K]\{U\} = \{F\}$ est une étape importante dans la résolution des systèmes linéaires en analyse structurelle ; la méthode la plus utilisée à cette fin est la méthode de Gauss avec ses nombreuses variantes ; elle consiste dans une première phase à transformer par des éliminations successives la matrice initiale en une matrice triangulaire supérieure et résoudre ensuite le système ensuite le système par substitutions à rebours.

Nous allons expliciter cette formulation mathématique très proche de nombreuses solutions manuelles nous partons de l'équation :

$$k_{11}u_1 + \sum_{i=2}^{n} k_{1i}u_i = f_1$$

D'où on déduit que (si $k_{11} \neq 0$) : $u_1 = \dfrac{1}{k_{11}}\left[f_1 - \sum_{i-1}^{n} k_{1i}u_i \right]$

Remplaçant u_1 par cette valeur dans l'équation 'j' :

$$k_{j1}u_1 + \sum_{i=1}^{n} k_{ji}u_i = f_j$$

Nous obtenons : $\dfrac{k_{j1}}{k_{11}}\left[f_1 - \sum_{i=2}^{n} k_{1i}u_i \right] + \sum_{i=2}^{n} k_{ji}u_i = f_j$

Où encore : $\sum_{i=2}^{n}\left(k_{ij} - \dfrac{k_{ji}}{k_{11}}k_{1i} \right)u_i = f_j - \dfrac{k_{ij}}{k_{11}}f_1$

Cette équation étant valable pour j = 2 jusqu'à n. on continue ensuite pour les lignes 2,3,…jusqu'à n-1 où on obtient alors : $k_{nn}^{'} = f_n^{'}$ (le signe (') signifie que le terme est modifié par les calculs successifs). Ce qui nous donne la valeur de u_n.

En reprenant l'équation (n-1) jusqu'à (1) ; on détermine les valeurs u_i en utilisant la dernière équation de la ligne 'i' :

$$k_{11}^{'}u_i + \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij}u_j = f_j^{'}$$

3.13 Détermination des efforts internes

Après la résolution du système linéaire et la détermination des déplacements inconnus, les forces internes dans les éléments sont alors déduites. Elles sont obtenues par superposition des forces provoquées par les déplacements nodaux et ceux provoqués par les charges réparties. Les forces internes sont exprimées dans le système local pour chaque élément.

$$\left[\overline{F}^{e}\right] = \left[\overline{K}^{e}\right]\left[\overline{U}^{e}\right] = \left[\overline{F}_n^{e}\right] + \left[\overline{F}_s^{e}\right] \tag{3.59}$$

$[F_n]$ sont les forces appliqués directement sur les noeuds.

$[F_s]$: sont les forces nodales équivalents aux charges en travée et sont égales aux réactions d'appuis changées de signes.

Les forces internes dans les noeuds i et j de l'élément e sont incluses dans le vecteur $\left[\overline{F}_n^{e}\right]$ donné par :

$$\left[\overline{F}_n^{e}\right] = \left[N_i^e \quad T_i^e \quad M_i^e \quad N_j^e \quad T_j^e \quad M_j^e\right]^T \tag{3.60}$$

De la relation (3.55), nous obtenons:

$$\left[\overline{F}_n^e\right] = \left[\overline{K}^e\right]\left[\overline{U}^e\right] - \left[\overline{F}_s^e\right] = \left[\overline{K}^e\right]\left[T^e\right]\left[U^e\right] - \left[\overline{F}_s^e\right] \tag{3.61}$$

Cette dernière relation donne les valeurs nodales des forces internes.

3.14 Détermination des réactions dans les appuis

Les réactions d'appuis ne sont pas nécessaires pour l'analyse structurale mais il est toujours intéressant de les trouver. Si la technique de suppression d'équation est employée dans l'assemblage de la matrice de rigidité structurale, alors le système permettant de déterminer les réactions d'appuis est perdu ; les réactions sont au lieu de cela déterminées en additionnant toutes les forces des éléments reliés à n'importe quel noeud.

Les forces dans le noeud i sont :

$$\left[F_i\right] = \sum_e \left[F_i^e\right] = \sum_e \left(\left[K_{ii}^e\right]\left[U_i\right] + \left[K_{ij}^e\right]\left[U_j\right]\right)$$

$$\left[F_i\right] = \left(\sum_e \left[K_{ii}^e\right]\right)\left[U_i\right] + \left(\sum_e \left[K_{ij}^e\right]\right)\left[U_j\right] \tag{3.62}$$

Cette relation donne non seulement les réactions dans les appuis mais recherche également toutes les forces nodales extérieures appliquées à d'autres nœuds (non appuis). Ce dernier aspect peut être employé pour vérifier la précision des calculs numériques.

Chapitre 4

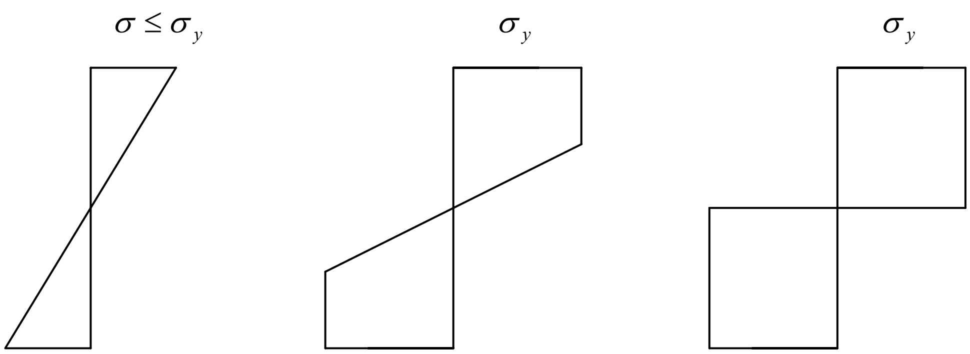
Analyse elastoplastique numérique des structures en portique plan

4.1 Introduction

Ce chapitre décrit l'extension de la méthode matricielle pour traiter le comportement élasto-plastique des structures en portique. La méthode plastique des rotules plastiques est employée. Après la formation de chaque rotule plastique, la matrice de rigidité de l'élément correspondant est corrigée et assemblée dans la matrice de rigidité de la structure. Le vecteur force est également corrigé en cas de présence des charges reparties sur l'élément. Le comportement structural entre la formation de deux rotules plastiques successives demeure linéaire (premier état d'analyse). Ce fait est exploité pour éviter des itérations. L'indice de charge causant l'apparition de la prochaine rotule plastique est déduit par l'extrapolation linéaire d'un incrément standard.

4.2 La méthode des rotules plastiques

En supposant un comportement élasto-plastique parfait (sans durcissement) et sans aucune dépendance de l'histoire du chargement, les contraintes à travers une section soumise à la flexion seront élastiques (Figure4.1) à de basses charges. Quand la charge est augmentée les déformations plastiques apparaissent dans les fibres extrêmes c'est la plastification partielle et la propagation de la déformation à travers la section donne la plastification totale.



a/ contrainte élastique b/ plastification partielle c/ plastification totale

Figure 4.1 : contraintes dans une section fléchie

Le moment plastique M_p (le moment où la section est entièrement plastifiée) est plus grand que le moment élastique M_e (le moment où la fibre extrême atteint la limite d'élasticité). Par exemple pour une section rectangulaire bh :

$$M_e = \frac{b\sigma_y}{2}\frac{h}{2}\frac{2h}{3} = \frac{bh^2\sigma_y}{6} \qquad M_p = b\sigma_y \frac{h}{2}\frac{h}{2} = \frac{bh^2\sigma_y}{4} = 1.5M_e \qquad (4.1)$$

Une section totalement plastifiée ne peut supporter plus longtemps un moment de flexion. Elle se comporte comme une rotule (articulation) et c'est la rotule plastique. La méthode des rotules plastiques a été employée pendant des années dans l'analyse limite de plasticité.
Une technique alternative intéressante de l'analyse élasto-plastique des structures consiste à suivre pas à pas la formation des rotules plastiques et l'histoire du chargement par accroissement. La formation de chaque rotule plastique diminue le degré d'hyperstaticité d'une unité. Le dernier chargement plastique sur une structure avec un degré d'hyperstaticité *n* peut être atteint après la formation de (*n*+1) rotules.
Avec la correction convenable de la matrice de rigidité de la structure après la formation d'une rotule plastique, le comportement demeure linéaire. Des analyses linéaires successives peuvent être alors utilisées pour suivre le comportement élasto-plastique de la structure. En comparant les rapports des moments réels aux moments plastiques pour chaque extrémité d'élément, il est possible de détecter la position de la prochaine rotule plastique. Ceci nous permettra d'éviter des itérations entre deux rotules successives. Cette technique non seulement détermine la charge plastique finale mais fournit des informations intéressantes sur la chronologie de la formation de ces rotules. Elle peut être employée pour détecter les régions les plus faibles (positions des premières rotules plastiques) dans une structure existante pour un renforcement éventuel.

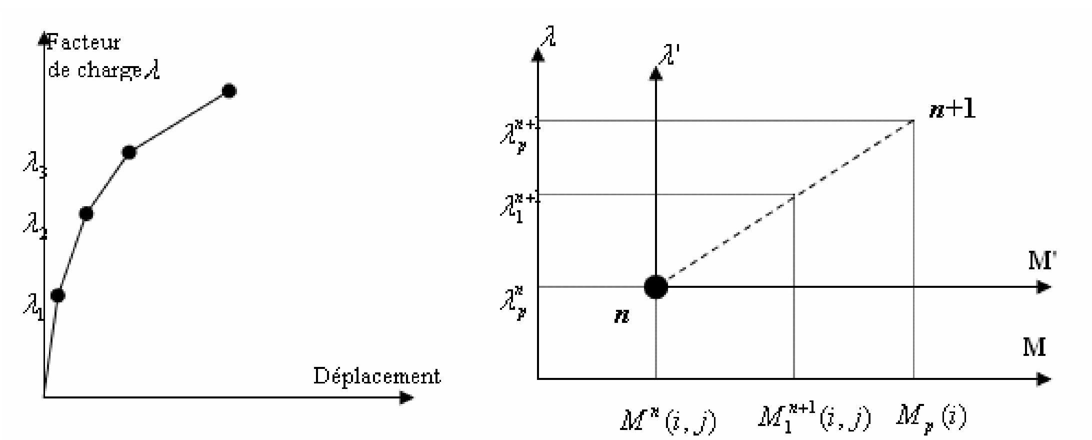


Figure 4.2 :(a) formation Successive de rotules plastiques ;(**b**) Interpolation linéaire entre deux rotules plastiques successives

A un point (*i* , *j*) correspond un noeud *j* (*j* = 1 or *j* = 2) de l'element *i* (*i* = 1 à au nombre total d'elements).

λ_p^n est le facteur de charge à la formation de la rotule plastique numéro *n*.

$M^n(i,j)$ est le moment corespondant dans le point (*i* , *j*) non rotulé encore.

$M_p(i)$ est le moment plastique pour l'element *i*.

λ_p^{n+1} est le facteur de charge (inconnu) qui doit provoquer la prochaine rotule numérotée $n+1$

λ_1^{n+1} est le facteur de charge standard pour rechercher la rotule n+1.

$M_1^{n+1}(i,j)$ est le moment correspondant au point (i , j) non rotulé encore.

Seul le facteur de charge λ_p^{n+1} est inconu.

Il est determiné par l'interpolation linéaire (Fig.4.3) comme suit:

$$\lambda_p^{n+1} = \lambda_p^n + \left(\lambda_1^{n+1} - \lambda_p^n\right)\left(\frac{M_p(i) - M^n(i,j)}{M_1^{n+1}(i,j) - M^n(i,j)}\right) \tag{4.2}$$

Ce facteur doit être déterminé pour le noeud qui est le plus proche de la rotulation,c'est le point avec le plus grand rapport du moment réel réduit et du moment plastique réduit donnés par :

Moment réel réduit : $M'(i,j) = M_1^{n+1}(i,j) - M^n(i,j)$ (4.3)

Moment plastique réduit : $M'_p(i,j) = M_p(i) - M^n(i,j)$ (4.4)

Les analyses linéaires successives sont faites en effectuant des chargements d'axes λ' et M' à chaque fois et en cummulant ensuite les moments et les facteurs de charge.

Avec le changement des axes la relation 4.2 devient :

$$\lambda_p^{n+1} = \lambda_1 \frac{M'_p(i,j)}{M'(i,j)} \tag{4.5}$$

Le même facteur de charge λ_1 peut être utilisé dans toutes les étapes.

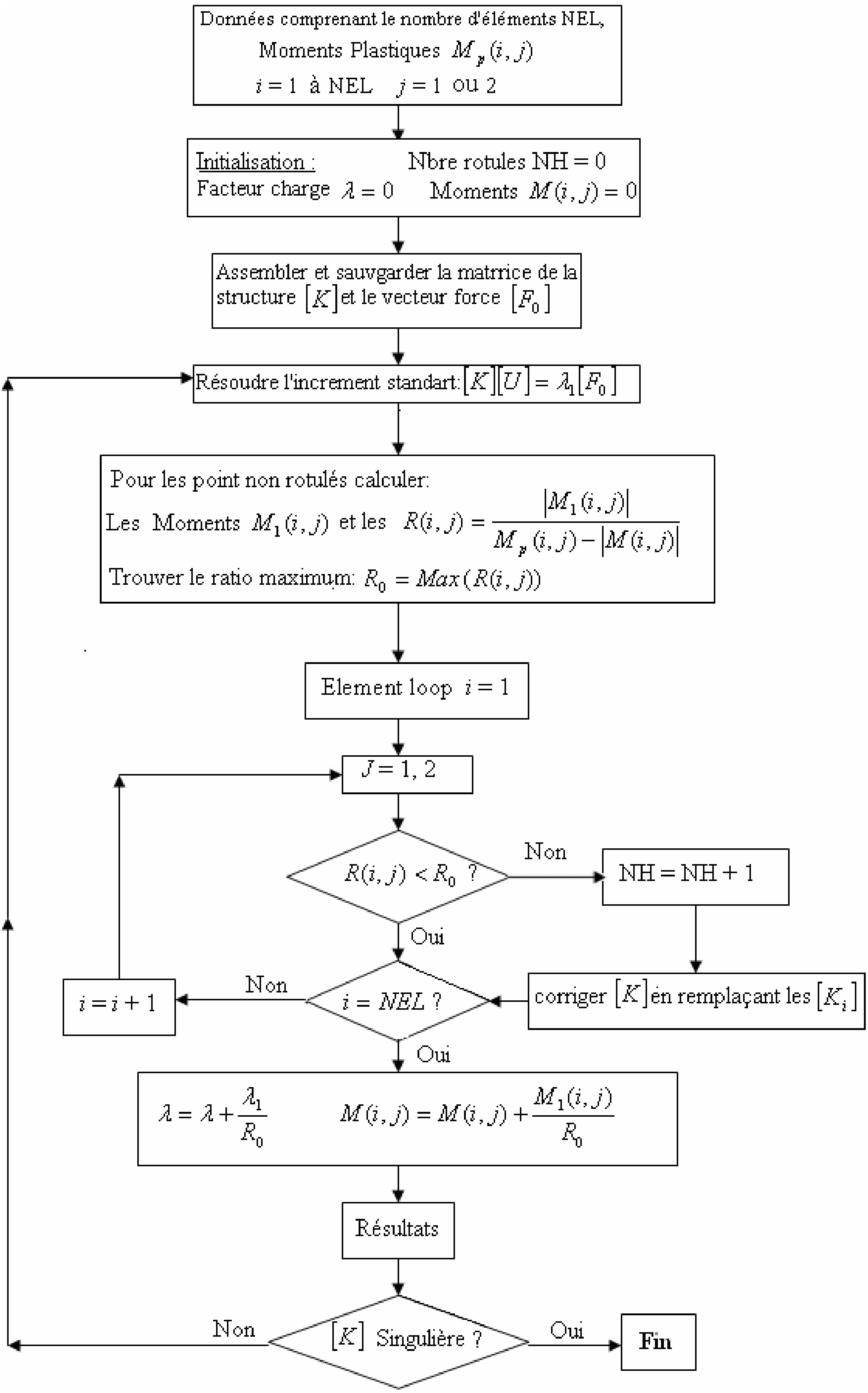
Le rapport $\frac{M'}{M'_p}$ est calculé seulement pour les points susceptibles d'être rotulés.

La matrice de rigidité de la structure n'est pas réassemblée à chaque étape. Elle est au contraire sauvegardée et corrigée par substitution de la matrice de rigidite de l'element rotulé par sa matrice mise à jour.

4.3-Organigramme elasto-plastique

L'organigramme suivant résume les différentes étapes employées dans le programme informatique pour dépister la formation successive des rotules plastiques jusqu'à l'instabilité complète de la structure , qui correspond au facteur de charge final. L'instabilité de la structure est facilement détectée numériquement par le programme, elle correspond à une matrice de rigidité singulière.

Organigramme elastoplastique:



On doit préciser que si le chargement inclut des charges réparties, le vecteur force $[F_o]$ est actualisé chaque fois qu'un élément chargé est rotulé. Les éventuelles rotules en travée peuvent être captées en balayant la longueur pour chaque membre chargé ou simplement en ajoutant des noeuds supplémentaires dans les travées chargées. Dans la première méthode, un troisième noeud fictif est ajouté travée et l'algorithme de condensation statique est utilisé pour éliminer ce noeud en travée. Dans notre travail, nous employons la technique des noeuds supplémentaires toutes les fois que les chargements en travées existent.
L'information de rotulation (dans les deux extrémités de chaque élément) est mémorisée dans un vecteur d'indicateurs.

4.4 Exécution du programme

Le programme est mis en œuvre dans le langage du Fortran 95 et est une transcription des méthodes théoriques et numériques décrites dans le présent et les chapitres précédents. Microsoft Fortran Power Station et Compaq Visual Fortran ont été utilisés comme compilateurs.

4.4.1-Entrée et traitement des données :

Le programme lit à partir d'un fichier toutes les données générales comprenant la géométrie (coordonnées nodales, connectivités des éléments), les propriétés matérielles, les conditions aux limites et le chargement. Avant le traitement le programme effectue la vérification de quelques données ; La vérification inclut la présence des conditions aux limites suffisantes aussi bien que les noeuds non reliés et les éléments dont la longueur est nulle. Les conditions aux limites aux appuis (déplacements sont nuls) sont traitées en supprimant les équations correspondantes. Les conditions aux limites peuvent également couvrir les appuis élastiques. Le chargement peut inclure les forces concentrées, les charges distribuées et les déplacements imposés non nuls.

4.4.2 Assemblage et résolution avec la technique Sky-Line ou en profil

Le programme emploie la technique de profil (sky line) pour assembler et résoudre le problème de matrice de rigidité. Le profil de la matrice de rigidité de structure est d'abord déterminé ainsi que la localisation des équations de chaque élément. Les routines comportant les matrices de réduction et substitution sont adaptées à la technique de profil.

4.4.3 Résultats du programme :

Le programme fournit dans un fichier de résultats un écho de toutes les données d'entrée et de tous résultats d'analyse incluant pour chaque rotule plastique : le facteur de charge correspondant, les déplacements des noeuds, les forces internes des éléments et les réactions d’appuis.

4.4.4 Résultats graphiques :

Le programme produit un écho graphique de la structure et montre l'endroit des rotules plastiques successives ; Il livre également une courbe de charge-déplacement; L'utilisateur choisira le noeud et le degré de liberté pour cela.

4.5 Application du programme

4.5.1 Analyse elastoplastique

Le programme peut être employé pour déterminer la réponse élasto-plastique d'une structure jusqu'à la rupture. La ductilité de la structure qui est donnée par la déformation post-élastique peut être ainsi estimée et évaluée.

4.5.2 Analyse dynamique

Le programme livre l’évolution des périodes propres de la structure avec la formation successive des rotules plastiques. En considérant seulement le déplacement horizontal comme degré de liberté dynamique, les propriétés dynamiques ne seront ainsi affectées que par l’apparition des rotules dans les poteaux.
Les résultats produits par le logiciel confirment cela. Confirmation par des exemples.

4.5.3 Analyse push-over des structures non linéaires:

L'analyse de cheminement des rotules successives est d'un intérêt très pratique pour des structures existantes, afin d’analyser leur vulnérabilité en détectant les zones les plus faibles (endroits des premières rotules) et pour concevoir une méthode appropriée de renforcement. Cette technique est plus connue sous le nom de **push-over** et est particulièrement employée pour évaluer la résistance sismique des structures existantes. Le chargement peut combiner des charges verticales constantes (poids propre et surcharges) et une charge latérale croissante (action du tremblement de terre). Dans ce cas-ci le chargement constant doit être appliqué d'abord et les forces internes résultantes de l’élément devraient être considérées comme forces internes initiales constantes dans l'analyse initiale sous la charge variable croissante. L'action latérale croissante (tremblement de terre) peut également être sous forme de déformée imposée comme par exemple donné par le mode fondamental de vibration ou n'importe quelle combinaison modale.

4.5.4-Poutre faible/conception de poteaux résistants dans les connexions poteaux- poutres :

Beaucoup de règlements sismiques exigent dans les connexions entre poutres et poteaux que la conception doit être effectuée de telle manière que les rotules plastiques apparaissent dans les poutres avant les poteaux. La raison est que les poutres sont plus ductiles que des poteaux. Le manque de ductilité dans les poteaux est provoqué par la force axiale compressive. Dans la pratique il est souvent très difficile de répondre à cette exigence de code sismique. Le présent programme peut cependant dans une pré analyse de conception détecter toutes les connexions poutres poteaux ne remplissant pas cette condition et guider le processus de correction.

Chapitre 5

Analyse dynamique numérique des structures en portique plan

Chapitre 5 Analyse dynamique d'une structure en portique plan

5.1 Introduction

Le grand public s'il trouve aujourd'hui naturel de profiter des progrès de la technologie, a également pris conscience du danger qui les accompagne ; c'est pourquoi il exige des techniciens et des ingénieurs des réalisations (constructions) toujours moins coûteuses et plus fiables, contradiction évidente que seule une conception mieux comprise permet de survenir. Il est ainsi devenu nécessaire au fil des années de raffiner les schémas mathématiques utilisés au stade de projet, pour tenter de les faire approcher d'une réalité souvent complexe.
Dans ce domaine, l'apparition des calculateurs électroniques dés le début des années cinquante a permis le développement de méthode numériques à une très grande puissance telles que la méthode des éléments finis. Celle-ci aujourd'hui est d'un usage courant dans l'industrie pour l'étude des structures dont la complexité rend vaines les méthodes de la résistance des matériaux classiques.

C'est ainsi que la conception de la plupart des structures exige à présent la détermination de leurs réponse aux sollicitations de nature dynamique qu'elles sont amenés a rencontrer au moins une fois au cours de leurs existences. Or, le comportement dynamique d'une structure est très fréquemment lié à des phénomènes que ne peut permettre de prévoir la seule considération des chargements statiques ou pseudo statiques. Le tristement fameux pont de Tacoma constitue un exemple heureusement extrême de tels phénomènes.

Avant d'arriver à un état critique (de ruine) notre structure passe par des états intermédiaires d'évolution de son comportement vis-à-vis à des charges dynamiques (sismiques dans le cas des portiques) pour suivre le comportement de la structure il faut faire des analyses linéaires successives dont chacune est caractérisée par une seule manière de conduite. Nous allons donc dans ce chapitre suivre l'évolution des valeurs et modes propres dans chaque étape jusqu'à la ruine.

5.2 Détermination du modèle mathématique de la structure.

On peut déterminer la réponse dynamique d'une structure linéaire que si ses modes et ses fréquences propres sont connus. Dans la plupart des cas un nombre relativement limité de modes permet d'obtenir une précision satisfaisante. On doit se rappeler aussi que les caractéristiques physiques de la structure et les conditions de chargement ne sont en général connues que de manière approchée ; c'est pourquoi l'idéalisation et la méthode de résolution utilisée doivent posséder des ordres d'approximation comparables. Il reste cependant que les problèmes de dynamique des structures rencontrés dans la pratique vont de modèles extrêmement simplifiés avec seulement quelques degrés de liberté à des modèles très élaborés par les éléments finis avec des centaines de degrés de liberté.

Donc la détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à des chargements dynamiques en particulier sismiques. Si le calcul des masses et de leurs positions peut être effectuer avec une bonne précision par contre celui des raideurs est souvent très approché. Par ailleurs, quelque soit le type de structure il faut tenir compte de l'imprécision souvent très importante des données relatives au sol de fondation. La figure (5.1) présente deux exemples de modélisations de structures planes, dans le premier les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est affecté la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure 5.1(a) par le rectangle en pointillé pour le nœud central. Si la rigidité axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à N = 2 x 6 = 12. et si en plus on admet que les masses qui reviennent à la structure le long de sa hauteur sont supposées concentrées au niveau de ses différents planchers et que ces derniers sont supposés infiniment rigides dans leurs plans horizontaux, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points on abouti au modèle 'brochette' de la figure 5.1 (b), dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et sa rigidité est égale à la somme des rigidités des poteaux d'un niveau le nombre de degrés de liberté est réduit à
N = 2x3 = 6

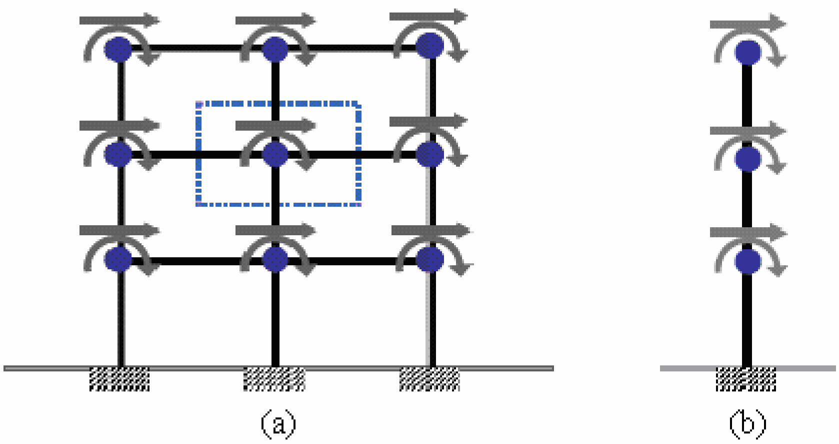


Figure 5.1 : Modélisation en masses concentrées

Pour l’étude du comportement dynamique d’une structure en phase plastique, on l’assimilera à une console verticale à masses concentrées entre des colonnes de masses négligeables et de rigidités latérales ‘Khi’ en prenant en compte uniquement les déplacements horizontaux, on appelle fréquemment ce type de modélisation de la structure par un modèle brochette ou structure en chaîne.

5.2.1 Equation de l’équilibre dynamique (Masses concentrées)

Rappelons que le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre des composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci. Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés noeuds où sont concentrées les masses. Dans le cas le plus général, un noeud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à N=6p où p est le nombre de noeuds. La figure 5.1 présente deux exemples de modélisations de structures planes entrant dans ce cadre. Dans le cas du portique à deux travées, les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des noeuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces noeuds. A chaque noeud est affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure 5.1 par le rectangle pointillé pour le noeud central. Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des noeuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à 2p=12. Si de plus les planchers sont considérés comme infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle "brochette" de la figure 5.1b, dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et la raideur en flexion-cisaillement des poutres verticales est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau. Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à 2p=6

L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure 5.1 peut être obtenue par la méthode directe en écrivant en chaque noeud et pour *chaque degré de liberté* que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- $\underline{F}_S$: forces élastiques
- $\underline{F}_D$: forces d'amortissement
- $\underline{F}_I$: forces d'inertie
- $\underline{P}$: forces appliquées extérieures

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté i :

$$F_{Si} + F_{Di} + F_{Ii} = P_i \qquad (5.1)$$

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points.
Ainsi, en supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté i s'exprime par :

$$\mathbf{F}_{Si} = k_{i1}\, u_1 + k_{i2}\, u_2 + \ldots = \sum_{j=1}^{N} k_{ij}\, u_j \qquad (5.2a)$$

Soit pour l'ensemble des degrés de libertés, sous forme matricielle :

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{K}}\ \underline{\mathbf{U}} \qquad (5.2b)$$

Note: dans la suite les matrices seront représentées par un symbole gras souligné.
Les coefficients k_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par un déplacement Unité imposé au degré de liberté j.
La matrice **K** représente l'ensemble des coefficients d'influence k_{ij} est la matrice de raideur du système.
Les forces d'amortissement étant nulles puisque le système analysé est non amorti $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$.
Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{Ii} = m_{i1}\, \ddot{u}_1 + m_{i2}\, \ddot{u}_2 + \ldots = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\, \ddot{u}_j \qquad (5.3a)$$

Soit sous forme matricielle

$$\mathbf{F}_{\mathbf{I}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} \qquad (5.3b)$$

La matrice aux coefficients m_{ij} est la matrice masse du système.

Le coefficient m_{ij} représente la force engendrée suivant le degré de liberté i par une accélération unité imposée au degré de liberté j.
Regroupant les équations (5.2b) et (5.3b), l'équation d'équilibre dynamique du dynamique du système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \qquad (5.4)$$

Les matrices **M** et **K** ont pour dimensions NxN, et les matrices **U** et **P** pour des dimensions Nx1 où N représente le nombre de degrés du système (égale au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

5.3 Structure et propriété de la matrice de rigidité

5.3.1 Construction de la matrice de rigidité (cas général)

La définition de la matrice de raideur (éq. 5.2b) montre que le terme k_{ij} de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour maintenir son déplacement nul sous

l'effet d'un déplacement unitaire appliqué au seul degré de liberté j; en particulier le terme k_{ii} est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.
L'exemple de la figure 5.2, constitué de deux masses reliées par des ressorts de raideur k_1 et k_2, illustre cette définition.

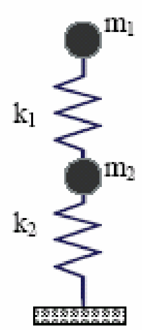


Figure 5.2 : système masse ressort à deux degrés de liberté

Le système possède deux degrés de liberté, les déplacements u_1 et u_2 des deux masses. Un déplacement unitaire (u_1=1) appliqué à la masse m_1, en maintenant le déplacement u_2 de la masse m_2 nul, nécessite d'appliquer une force k_1, à la masse m_1 et $-k_1$ à la masse m_2. De même, un déplacement unitaire u_2 appliqué à la masse m_2, tout en maintenant une valeur nulle pour u_1, nécessite l'application d'une force $-k_1$ à la masse m_1 et (k_1+k_2) à la masse m_2. Il en résulte la structure de la matrice **K**.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \qquad (5.5)$$

Dans le cadre d'une formulation à l'aide des coordonnées généralisées, la construction de la matrice de rigidité **K** s'appuie sur le principe des travaux virtuels.

Prenons l'exemple d'une poutre droite dans le cadre d'une formulation en éléments finis. En se restreignant à l'étude des déplacements transverses de la poutre, il existe quatre degrés de liberté pour la poutre (déplacements transverses et rotations des deux extrémités de la poutre); le déplacement de tout point de la poutre s'exprime par :

$$u(x) = \sum \psi_i(x)\, u_i \qquad (5.6)$$

Où $\psi_i(x)$ sont les fonctions de forme du déplacement qui ne sont pas précisées pour l'instant. $\psi_i(x)$ représente le déplacement transverse de la poutre pour un déplacement unitaire u_i=1, et pour $u_j(j \neq i)$=0.

Considérons une rotation $u_2=1$ de l'extrémité de la poutre (figure 5.3); sous l'effet de cette rotation, la déformée de la poutre est $\psi_2(x)$ et le moment qui s'y développe vaut :

$$M(x) = EI(x)\,\psi_2''(x) \tag{5.7}$$

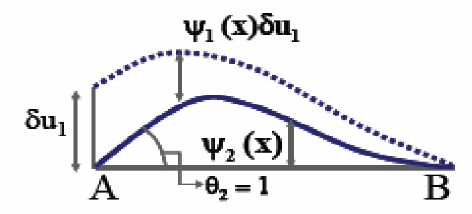


Figure 5.3 : Principe des travaux virtuels pour une poutre.

Pour calculer par exemple le terme k_{12} de la matrice de raideur, on applique un champ de vitesse virtuelle

$$\delta\underline{\hat{u}}^T = \{\delta\hat{u}_1, 0, 0, 0\}$$

Soit **P** le vecteur des efforts appliqués aux degrés de liberté résultants de l'application de la déformée $\psi_2(x)$.

Le travail des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuelle $\delta\bar{u}$ vaut :

$$\mathscr{P}_e(\delta\underline{\hat{u}}) = \underline{\mathbf{P}}^T\,\delta\underline{\hat{u}} = p_1\,\delta\hat{u}_1 \tag{5.8}$$

Par suite de la définition donnée ci-dessus du terme k_{12}, il en résulte que :

$$p_1 = k_{12} \tag{5.9}$$

Le travail des efforts internes en négligeant la contribution de l'effort tranchant (poutre en flexion), s'écrit :

$$\mathscr{P}_i(\delta\underline{\hat{u}}) = -\int_0^L M(x)\,d(\delta\hat{\mathfrak{R}}) \tag{5.10}$$

où $\delta\hat{\mathfrak{R}}$ est la vitesse de rotation virtuelle associée à $\delta\hat{u}_1$ Par définition de $\psi_1(x)$, la vitesse virtuelle $\delta\hat{u}_1$, induit en tout point de la poutre une vitesse $\psi_1(x)$ $\delta\hat{u}_1$ et donc une vitesse de rotation $\delta\hat{\mathfrak{R}} = \psi_1'(x)\,\delta\hat{u}_1 \Rightarrow d(\delta\hat{\mathfrak{R}}) = \psi_1''(x)\,\delta\hat{u}_1\,dx$. L'équation (5.10) devient en tenant compte de (5.7) :

$$\mathscr{P}_i(\delta\underline{\hat{u}}) = -\int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_2''(x)\,\delta\hat{u}_1\,dx \tag{5.11}$$

La puissance des quantités d'accélération étant nulle (problème statique), le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\mathscr{P}_e(\delta\hat{u}) + \mathscr{P}_i(\delta\hat{u}) = 0 \tag{5.12}$$

Valable pour tout champ de vitesse virtuelle $\delta\bar{u}$: il en résulte :

$$k_{12} = \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_2''(x)\,dx \tag{5.13}$$

De façon général le terme k_{ij} de la matrice de raideur s'obtient par :

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_j''(x)\,dx \tag{5.14}$$

5.3.2 Exemple : Poutre droite

Les fonctions $\psi_i(x)$ s'obtiennent aisément à partir de la résistance des matériaux.

Rappelons que $\psi_1(x)$ (respectivement $\psi_3(x)$) représente la déformée de la poutre pour un déplacement unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de libertés étant maintenus égaux à 0. De même $\psi_2(x)$ (respectivement $\psi_4(x)$ représente la déformée de la poutre sous l'action d'une rotation unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de liberté étant maintenus égaux à 0 (fig. 5.4).

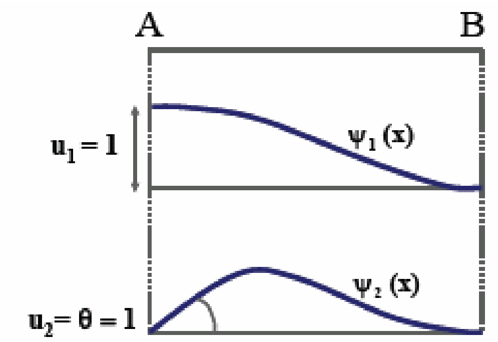


Figure 5.4 : Fonctions de forme de la poutre droite.

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$
$$\psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$
$$\psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$
$$\psi_4(x) = -x\left(\frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad (5.15)$$

Le déplacement d'un point quelconque de la poutre s'obtient alors par (6.6) où u_1, u_3 représentent les déplacements transverses des noeuds A et B, u_2 et u_4 les rotations de ces mêmes noeuds. L'équation différentielle du mouvement de la poutre prend la forme (5.4) dans laquelle :$q^T.=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$

L'application de l'équation (5.14) permet alors de calculer les éléments de la matrice de raideur qui, dans le cas d'une inertie constante, prend la forme :

$$
\underline{K} = \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \qquad (5.16)
$$

5.3.3 Matrice de rigidité latérale d’un portique

Les poteaux sont supposés encastré aux deux extrémités ; la rigidité d’un poteau bi encastré est égale à : $12EI/h^3$ ou :

I : inertie du poteau dans la direction considérée

H : hauteur du poteau

E : module de Young.

D’après les hypothèses décrites précédemment pour le modèle mathématique, les poteaux d’un même niveau auront tous les mêmes déplacements à l’extrémité supérieure donc la rigidité latérale ‘Khi ‘ de la colonne ‘i’ à l’ étage ‘i’ sera égale à la somme des rigidités des poteaux de cet étage : $Kh_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{12EI}{h_i^3}$

m : nombre de poteaux de l’étage.

h_i : hauteur des poteaux à l’étage ‘i’

Donc la matrice de rigidité Kh correspondant aux degrés de libertés horizontaux du modèle ; sera obtenue en considérant l’équilibre de ces derniers vis-à-vis des déplacements horizontaux.

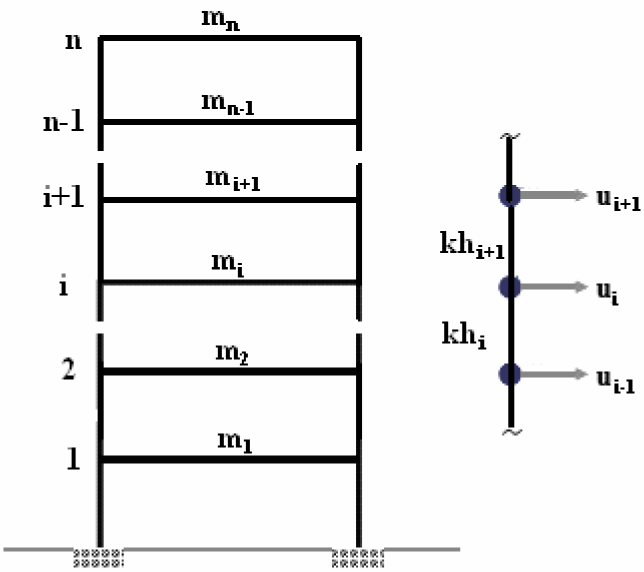


Figure (5.3) : Portique subissant des déplacements latéraux**.**

La force de rappel élastique F_{Si} appliquée à la masse 'i' est :

$$F_{Si} = Kh_i(u_i - u_{i-1}) - Kh_{i+1}(u_{i+1} - u_i) \qquad u_0 = 0$$

$$F_{S1} = Kh_1(u_1 - u_0) - Kh_2(u_2 - u_1)$$
$$F_{S2} = Kh_2(u_2 - u_1) - Kh_3(u_3 - u_2)$$
$$\vdots$$
$$F_{Sn} = Kh_n(u_n - u_{n-1})$$

Sous la forme matricielle nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \\ \vdots \\ F_{Sn-1} \\ F_{Sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kh_1 + Kh_2 & -Kh_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -Kh_2 & Kh_2 + Kh_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -Kh_n \\ 0 & 0 & 0 & -Kh_n & Kh_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice de rigidité est une matrice bande tri diagonale et symétrique

5.3.4 Propriété de la matrice de rigidité $\underline{\mathbf{K}}$

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de force $\underline{\mathbf{P}}$ appliquée aux degrés de libertés du système est une quantité positive qui vaut :

$$V = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i u_i \qquad (5.17)$$

En tenant compte de la définition de la matrice de raideur (eq.5.2b), l'énergie élastique s'exprime également par :

$$V = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}} \qquad (5.18)$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que la matrice $\underline{\mathbf{K}}$ définie positive. Elle possède donc une matrice inverse, appelée matrice de flexibilité :

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{K}}^{-1} \qquad (5.19)$$

Par ailleurs, la matrice $\underline{\mathbf{K}}$ est *symétrique.* Ce résultat, évident pour l'élément de poutre comme le montre l'équation (5.14), peut être obtenu de façon plus générale par application du théorème de Betti-maxwell. Ce théorème exprime le résultat suivant : soit deux champs de forces P_1 et P_2 induisant des champs de déplacements $\underline{\mathbf{U}_1}$ et $\underline{\mathbf{U}_2}$, alors le travail de $\underline{\mathbf{P}_1}$ dans le champ $\underline{\mathbf{U}_2}$ est égal au travail de $\underline{\mathbf{P}_2}$ dans le champ $\underline{\mathbf{U}_1}$.

$$\underline{\mathbf{P}}_1^T \underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{P}}_2^T \underline{\mathbf{U}}_1 \qquad (5.20)$$

Tenons compte de $\underline{\mathbf{P}_1} = \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}_1}$ il vient :

$$\underline{P}_2^T\,\underline{U}_1 = [\underline{K}\,\underline{U}_2]^T\,\underline{U}_1 = \underline{U}_2^T\,\underline{K}^T\,\underline{U}_1 \quad \text{et}$$

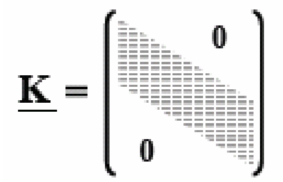
$$\underline{P}_1^T\,\underline{U}_2 = \left[\underline{P}_1^T\,\underline{U}_2\right]^T = \underline{U}_2^T\,\underline{P}_1 = \underline{U}_2^T\,\underline{K}\,\underline{U}_1$$

soit d'aprés l'équation (5.20):

$$\underline{K}^T = \underline{K} \tag{5.21}$$

5.3.5 Structure de la matrice de rigidité K

La formulation de la matrice **K** dans le cadre de la méthode des éléments finis ne conduit pas à une matrice pleine dans laquelle tous les cœfficients sont non nuls. Il en résulte qu'un grand nombre de termes sont nuls et que la matrice **K** a une structure bande. Par exemple dans le cas d'une poutre droite la matrice de rigidité sera tridiagonale.



5.4 Structure et propriété de la matrice masse

La modélisation en masse concentrée n'introduit aucun couplage entre les degrés de liberté. Il en résulte pour la matrice de masse une structure diagonale qui présente beaucoup d'avantages pour le traitement numérique.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & m_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Si par contre pour la modélisation on adopte une formulation en coordonnées généralisées, il en résulte un couplage entre degrés de liberté et une structure bande analogue à celle de la matrice de rigidité.

Avec ce choix de modélisation la construction de la matrice masse procède comme celle de raideur en le principe des travaux virtuels aux forces d'inertie.

On notera que la construction d'une matrice de masse consistante est plus laborieuse que celle de masses concentrées ; d'un point de vue numérique, on introduit une complication supplémentaire dans le traitement des équations sans que le gain en précision soit nécessairement significatif. Aussi bien souvent, dans la pratique, on privilégie l'utilisation d'une matrice masse diagonale.

5.5 Exemple (vibration libre d'un portique plan)

Considérons le portique plan de la figure 5.5 pour lequel on admettra que les planchers sont infiniment rigides dans leur plan pour autoriser la modélisation de la structure par un modèle brochette. Supposons de plus, à titre de simplification, que les poteaux possèdent une grande raideur axiale et de flexion. Dans ces conditions, les seuls déplacements possibles des noeuds sont les translations horizontales (figure 5.5b). Le système de la figure 5.5 possède trois degrés de liberté (3 noeuds x 1 déplacement possible). Avec les valeurs de raideur des poteaux et de masses indiquées sur la figure 5.5, les matrices masse et raideur du système s'écrivent :

$$\underline{K} = 600\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

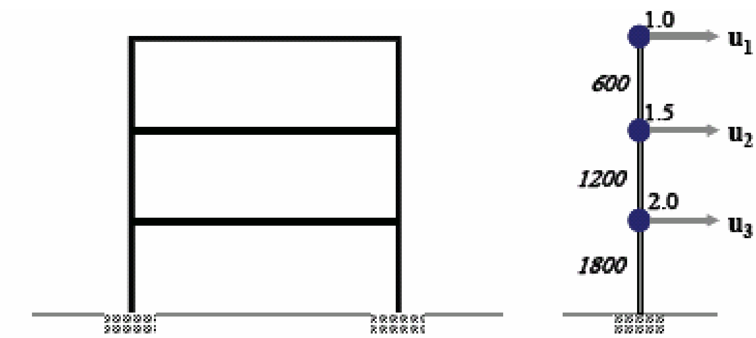


Figure 5.5 : a)portique plan b) modèle mathématique

Si on impose au portique de la figure 5.5 un déplacement initial au noeud 1 et que de cette position initiale on relâche le système, celui-ci entre en vibration. La variation dans le temps du déplacement du noeud intermédiaire, par exemple, prend l'allure indiquée sur la figure 5.6.
Cette vibration se poursuit indéfiniment dans le temps et présente une périodicité. Cependant, contrairement au cas de l'oscillateur à un degré de liberté, la vibration du système n'est plus sinusoïdale.

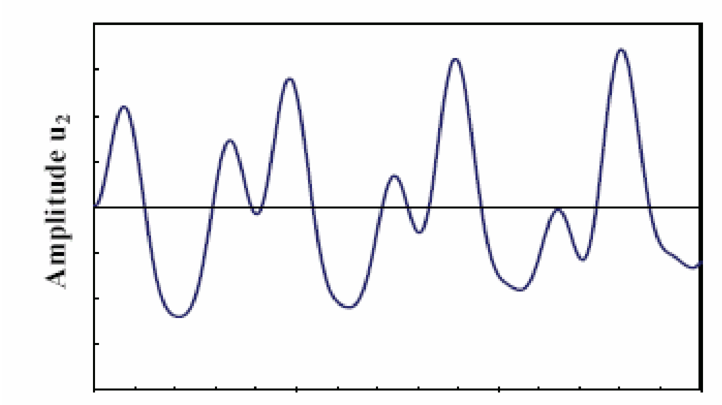


Figure 6.6 : Vibration libre du portique de la figure 6.5.

5.5 Fréquences propres et modes propres.

La vibration libre du système est solution de l'équation (5.5), ou (5.10), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$\underline{\mathbf{M}}\,\underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (5.23)$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{t}+\boldsymbol{\theta}) \qquad (5.24)$$

Reportant (5.24) dans (5.23), il vient :

$$\left[\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}\right]\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (5.25)$$

Le système matriciel (5.25) n'a de solution non triviale ($\underline{\mathbf{\Phi}} \neq \underline{\mathbf{0}}$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det\left[\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}\right] = 0 \qquad (5.26)$$

Les matrices $\underline{\mathbf{K}}$ et $\underline{\mathbf{M}}$ étant définies positives, il en résulte que l'équation (5.26) possède N racines réelles où N est la dimension des matrices $\underline{\mathbf{K}}$ et $\underline{\mathbf{M}}$, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (5.25).

On nomme *fréquences propres* du système les quantités :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \qquad (5.27)$$

Qui sont au nombre de N. La plus faible fréquence f_i est dénommée fréquence fondamentale, f_2 fréquence d'ordre 2, etc……

A chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\underline{\mathbf{\Phi}}_i$ solution de l'équation :

$$\left[\underline{\mathbf{K}} - \omega_i^2 \underline{\mathbf{M}}\right]\underline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{i} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (5.28)$$

Qui du fait que ω_i^2 est une valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative prés :

$\underline{\Phi_i} = \{ \Phi_1\Phi_2\ldots \ldots\Phi_n \}$ (5.29)

Le système possède N vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés modes propres du système.

La solution générale de l'équation (5.25) s'écrit alors :

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\Phi i} \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (5.30)$$

Où les constantes θ_i sont déterminés par les conditions initiales et les $\underline{\Phi_i}$ sont définis à une constante multiplicative près.

Reprenant le portique de la figure 5.5, les fréquences propres sont solutions de :

$$\det\begin{bmatrix} 600-\omega^2 & -1 & -2 \\ -1 & 1800-1.5\omega^2 & 0 \\ 0 & -2 & 3000-2\omega^2 \end{bmatrix}$$

Soit $\omega_1 = 14.5$ rad/s $\omega_2 = 31.1$ rad/s $\omega_3 = 46.1$ rad/s

Les modes propres sont obtenus comme solution de l'équation (5.28).ils sont dessinés sur la figure 5.7 en normant le déplacement du nœud au sommet 1.dans tous les modes.

Figure 5.7: modes propres du portique

La réponse temporelle du système causée par l'application d'un déplacement initial, d'amplitude $\underline{\Phi} = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$ correspond à la somme des réponse de chaque mode (équation 5.30).elle est représentée sur la figure 5.8.

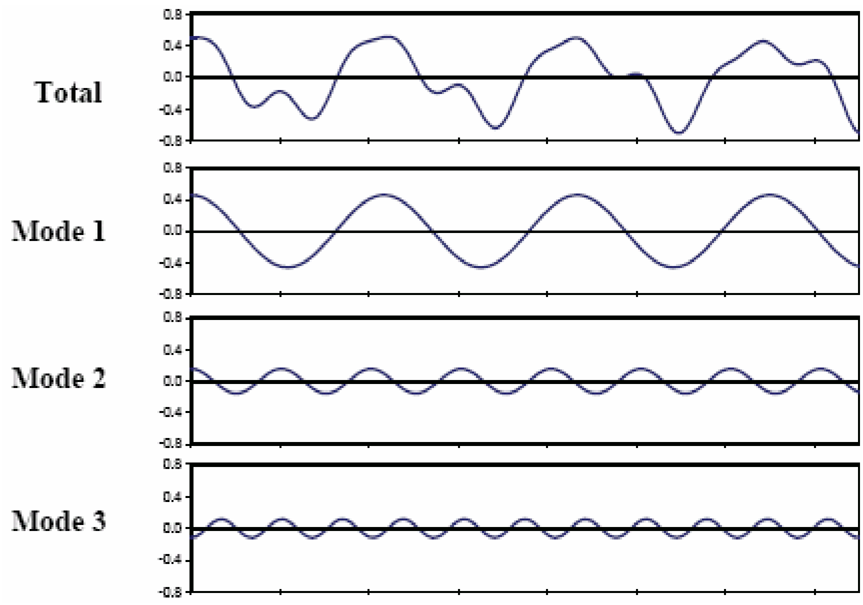


Figure 5.8: vibration libre du portique de la figure 5.5 (nœud 2)

5.6.1 Conclusion

On retiendra qu'un système possède N fréquences propres réelles et N modes propres associés. Des modes propres constituent une base orthogonale complète. La base des modes propres, dénommée *base modale*, permet donc d'exprimer un déplacement quelconque du système en fonction des déformées modales.

5.6 Notion de masses modales

Pour le calcul dynamique notre structure est considérée comme console verticale encastrée à sa base, libre de se déformer dans toutes les directions et de masse M égale à la somme des masses des n niveaux composant la structure.

Lorsque la console subit une secousse figure (5.9), la console se met à vibrer, le mouvement vibratoire résultant est la superposition des mouvements vibratoires découplés dans différents modes propres de la console, réagissant indépendamment les uns des autres à l'excitation initiale. En fait, on peut montrer que tout se passe comme si chaque mode vibrait avec une partie de la masse totale M. le mouvement vibratoire de la console est la superposition du mouvement d'une série de console C1,C2,C3,... et de masses m_1,m_2,$m_{3...}$,et vibrant selon les modes propres 1,2,3…

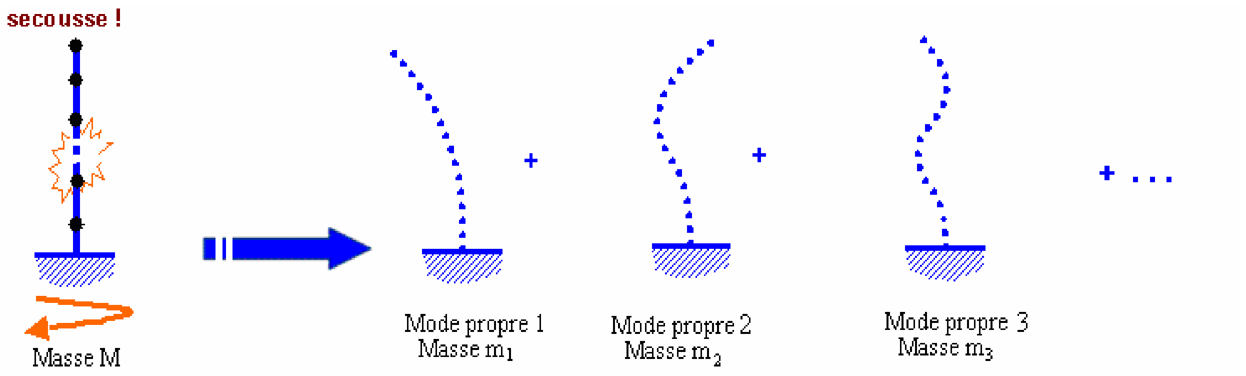


Figure 5.9: Modes propres masses modales

On appelle masse modale du mode i la masse de la structure mobilisée par le mode i dans le mouvement vibratoire de la console.

5.7.1 Propriétés

L'équation donnant la masse modale est : $m_j^* = D_j M\Delta$

ou Dj est le vecteur propre du mode, M est la matrice masse et Δ est le vecteur donnant la direction de la sollicitation, il a pour composante 1 dans la direction du mouvement et 0 pour les autres degrés de liberté : $\Delta^T = \{1,0,0,1,0,0....\}$

La première propriété est que la somme ou bien des masses modales de tous les modes propres, est égale à la masse totale de la structure.

Les premiers modes (les plus grandes périodes) captent les plus grosses masses modales.

Les réponses de tous les modes de vibration contribuant de manière significative à la réponse globale doivent être prises en compte. Dans le code européen Eurocode8 on considère cette condition comme réalisée si la somme des masses modales effectives pour les modes considérés atteint au moins 90% de la masse totale de la structure et si tous les modes dont la masse modale effective est supérieure à 5% de la masse totale sont pris en compte.

5.8 Quelques méthodes de calcul des valeurs et vecteurs propres :

Etant donnée que la détermination des fréquences et les modes de vibration pour un système ayant plus de deux degrés de liberté par résolution de l'équation caractéristique (5.6) est difficile et ne sert donc dans la pratique. On a besoin d'autre s méthodes plus efficaces, dans le domaine de calcul des valeurs et vecteurs propres est très vaste, nous citons ici quelques méthodes de calcul :

S'il s'agit de la détermination de la fréquence fondamentale on peut se servir de la méthode de Rayleigh, pour déterminer tout les modes et les fréquences on peut utiliser la méthode de Stodola, Holzer ou Jacobi.

5.8.1 Méthode de Rayleigh

Elle est basée sur la loi de conservation de l'énergie totale du système non amorti. Cette méthode approchée ramène l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seule degré de liberté, pour appliquer cette méthode il est nécessaire d'exprimer le déplacement de la structure en fonction d'une déformée supposée et d'une coordonnée généralisée.

5.8.2 Méthode de Stodola

La méthode de Stodola est une bonne méthode puisqu'elle permet de déterminer tous les modes de vibration et les fréquences correspondantes.

$$\left[[KH]-\omega_n^2[M]\right]\phi=0\Rightarrow[KH]\phi=\omega_n^2[M]\phi\Rightarrow\phi=\omega_n^2\Delta[M]\phi$$

Avec : $\Delta=[KH]^{-1}$: Matrice de souplesse

$$\Rightarrow\frac{1}{\omega_n^2}\phi_n=\Delta[M]\phi_n$$

Le produit $\Delta[\mathrm{M}]$ caractérise les propriétés dynamiques de la structure, on l'appelle matrice dynamique.

$$\Delta[M]=D\Rightarrow\frac{1}{\omega_n^2}\phi_n=D\phi_n$$

On fait une hypothèse sur $\phi_n^{(0)}$ et multipliant la matrice dynamique (à gauche) on obtient une nouvelle déformée :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\phi_n^{(1)}=D\phi_n^{(0)} \tag{5.31}$$

En général la nouvelle déformée différera de l'hypothèse initiale, sauf s'il s'agit du mode vrai, on lui attribue l'indice (1). En pratique l'équation (5.31) ne pourra pas être écrite directement

Car la fréquence de vibration n'est pas connue, le produit matriciel de D par la déformée $\phi_n^{(0)}$ sera désignée par : (5.32)

$$\overline{\phi}_n^{(1)}=D\phi_n^{(0)}$$

$$\text{donc}: \ \overline{\phi}_n^{(1)}=\frac{1}{\omega_n^2}\phi_n^{(1)}=\overline{\phi}_n^{(1)} \tag{5.33}$$

Si on suppose que l'amplitude calculée est égale à l'amplitude initiale, une équation équivalente à (5.31) permet de calculer la fréquence, considérons la coordonnée de déplacement d'un point "k" arbitraire on a :

$$\overline{\phi}_{kn}^{(1)}=\frac{1}{\omega_n^2}\phi_{kn}^{(0)}\Rightarrow\omega_n^2=\frac{\phi_{kn}^{(0)}}{\overline{\phi}_{kn}^{(1)}} \tag{5.34}$$

En général un résultat différent sera obtenu pour chacune des coordonnées, la vraie fréquence du $n^{ième}$ mode sera alors située entre les valeurs maximum et minimum à partir de l'équation $\left(\frac{\phi_{kn}^{(0)}}{\overline{\phi}_{kn}^{(1)}}\right)_{\min} < \omega_n^2 < \left(\frac{\phi_{kn}^{(0)}}{\overline{\phi}_{kn}^{(1)}}\right)_{\max}$; La méthode est donnée par l'organigramme (5.9) suivant :

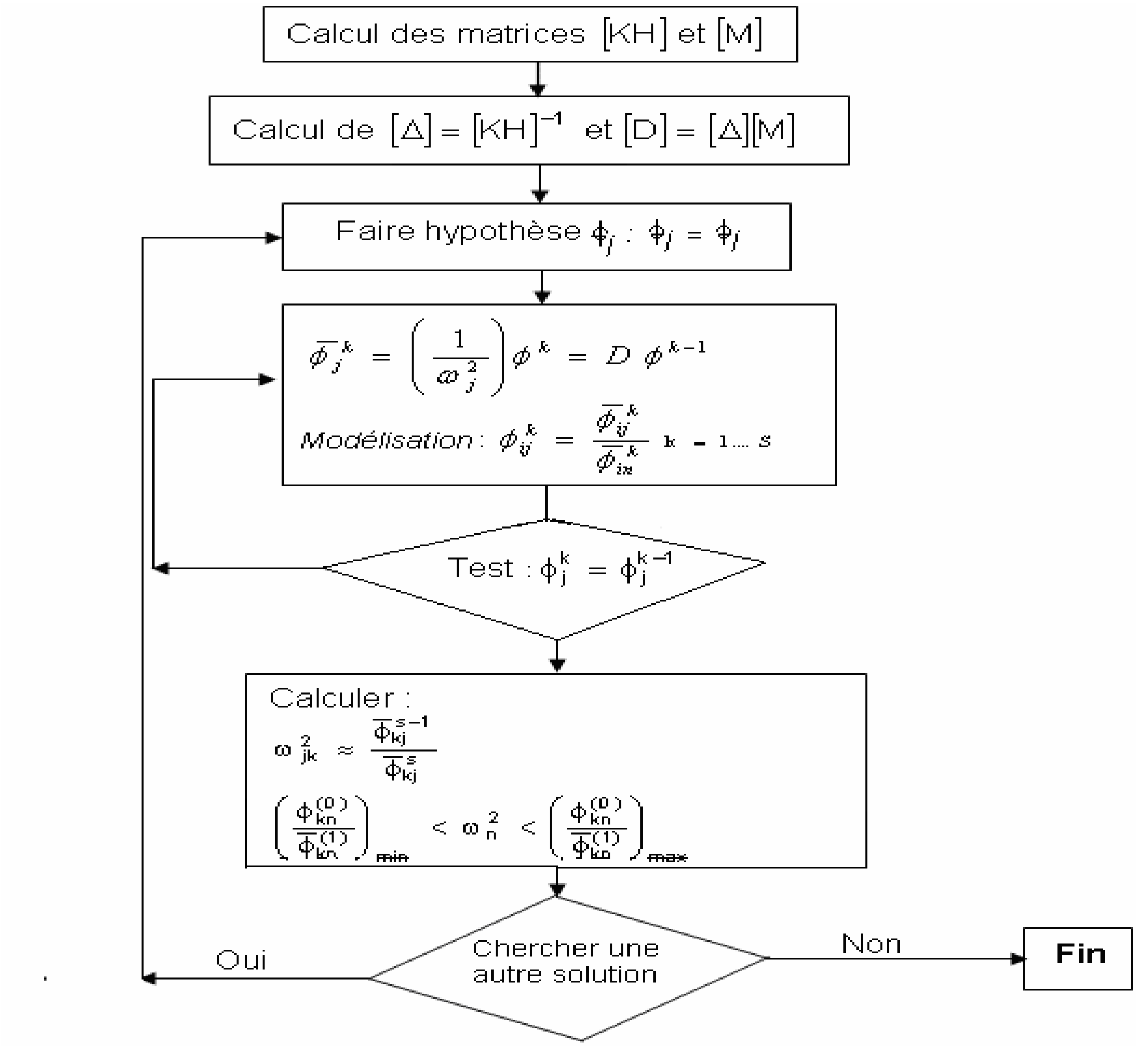


Figure 5.10 : Organigramme de la méthode de Stodola

5.8.3 Méthode de Holzer

La méthode de Holzer est une méthode itérative basée sur la notion de rigidité relative de niveau, elle se prête bien pour les structures en portique. Le procédé de la méthode est donné sous forme d'organigramme dans la figure (5.10) :

Où Khj, mj sont la rigidité et masse relatives au niveau j.

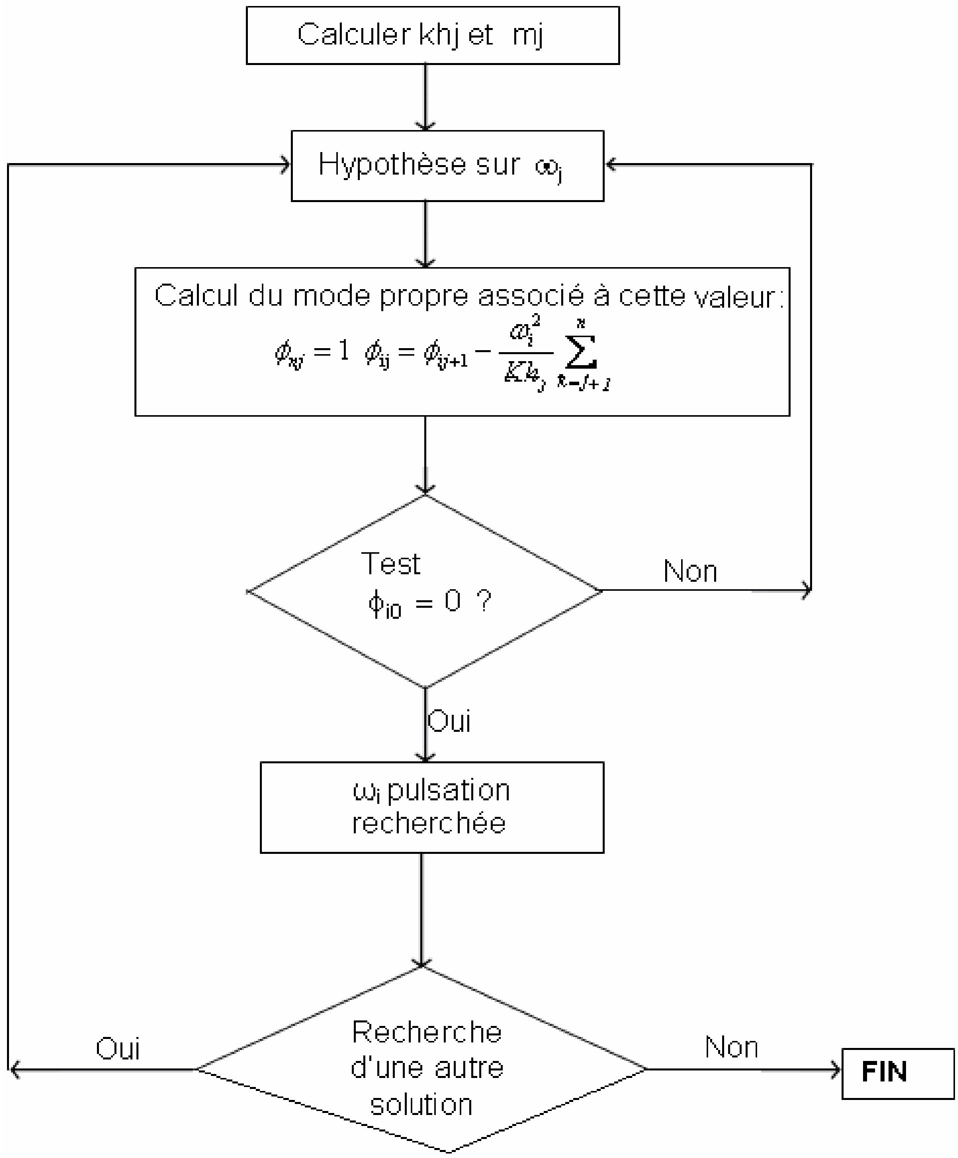


Figure 5.11 : Organigramme de la méthode de Holzer

5.8.4 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi permet de calculer les valeurs et vecteurs propres d'un système de dimension N (N inférieur à 100) dont les matrices sont symétriques et définies positives ce qui est le cas dans notre calcul.

La méthode consiste à transformer les matrices [K] et [M] en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives :

$$\begin{array}{ll} \left[K^1\right]=[K] & \left[M^1\right]=[M] \\ \left[K^2\right]=\left[Q^1\right]^T\left[K^1\right]\left[Q^1\right] & \left[M^2\right]=\left[Q^1\right]^T\left[M^1\right]\left[Q^1\right] \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \left[K^{k+1}\right]=\left[Q^k\right]^T\left[K^k\right]\left[Q^k\right] & \left[M^{k+1}\right]=\left[Q^k\right]^T\left[M^k\right]\left[Q^k\right] \end{array} \tag{5.35}$$

Les matrices $[K^{k+1}]$ et $[M^{k+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$, $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\lambda]=\left[K^d\right]\left[M^d\right]^{-1} \qquad \text{Où : } \lambda_1=\frac{K_{ii}^d}{M_{ii}^d} \tag{5.36}$$

$$[X]=\left[Q^1\right]\left[Q^2\right]......\left[Q^k\right]\left[Q^{k+1}\right]\begin{bmatrix} 1/\sqrt{M_{ii}^d} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{M_{ii}^d} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{M_{nn}^d} \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation [Q] :

Chaque matrice $[K^k]$ est choisi de manière à ce qu'un terme (i,j) diagonal et non nul de $[K^k]$ et $[M^k]$ soit nul après la transformation (1) la matrice $[Q^k]$ a la structure suivante :

$$\begin{array}{cl} \left[Q^k\right]=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & & 0 \\ & & 1 & a & \cdots & \cdots \\ & & b & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{Ligne i} \\ \text{Ligne j} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \text{Colonne i} \quad \text{Colonne j} & \end{array} \tag{5.37}$$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{k+1}=M_{ij}^{k+1}=0$; Soit en supprimant par simplicité l'indice k+1 sur les termes de chaque matrice

$$\begin{aligned} a.K_{ii}+(1+ab)+b.K_{jj}&=0 \\ a.M_{ii}+(1+ab)+b.M_{jj}&=0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Dans le cas particulier ou $\frac{K_{ii}}{M_{ii}} = \frac{K_{jj}}{M_{jj}} = \frac{K_{ij}}{M_{ij}}$ les valeurs de a et b sont :

a = 0 et $b = -\frac{K_{ij}}{K_{ij}}$ (5.39)

Dans le cas général notons :

$c_1 = K_{ii}M_{ij} - M_{ii}K_{ij}$
$c_2 = K_{jj}M_{ij} - M_{jj}K_{ij}$
$c_2 = K_{ii}M_{jj} - M_{ii}K_{ij}$

$$d = \frac{c_3}{2} + signe(c_3)\sqrt{\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1c_2}$$

$a = \frac{c_2}{d}$ $\mathrm{b} = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{d}}$ (5.40)

Lorsque [M] est définie positive, le coefficient $\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1c_2$ est positif.

Lorsque d = 0, a et b sont donnés par (5.39)

L'algorithme correspondant à la méthode générale qu'on vient d'évoquée ci-dessus est représenté par la figure ci-après :

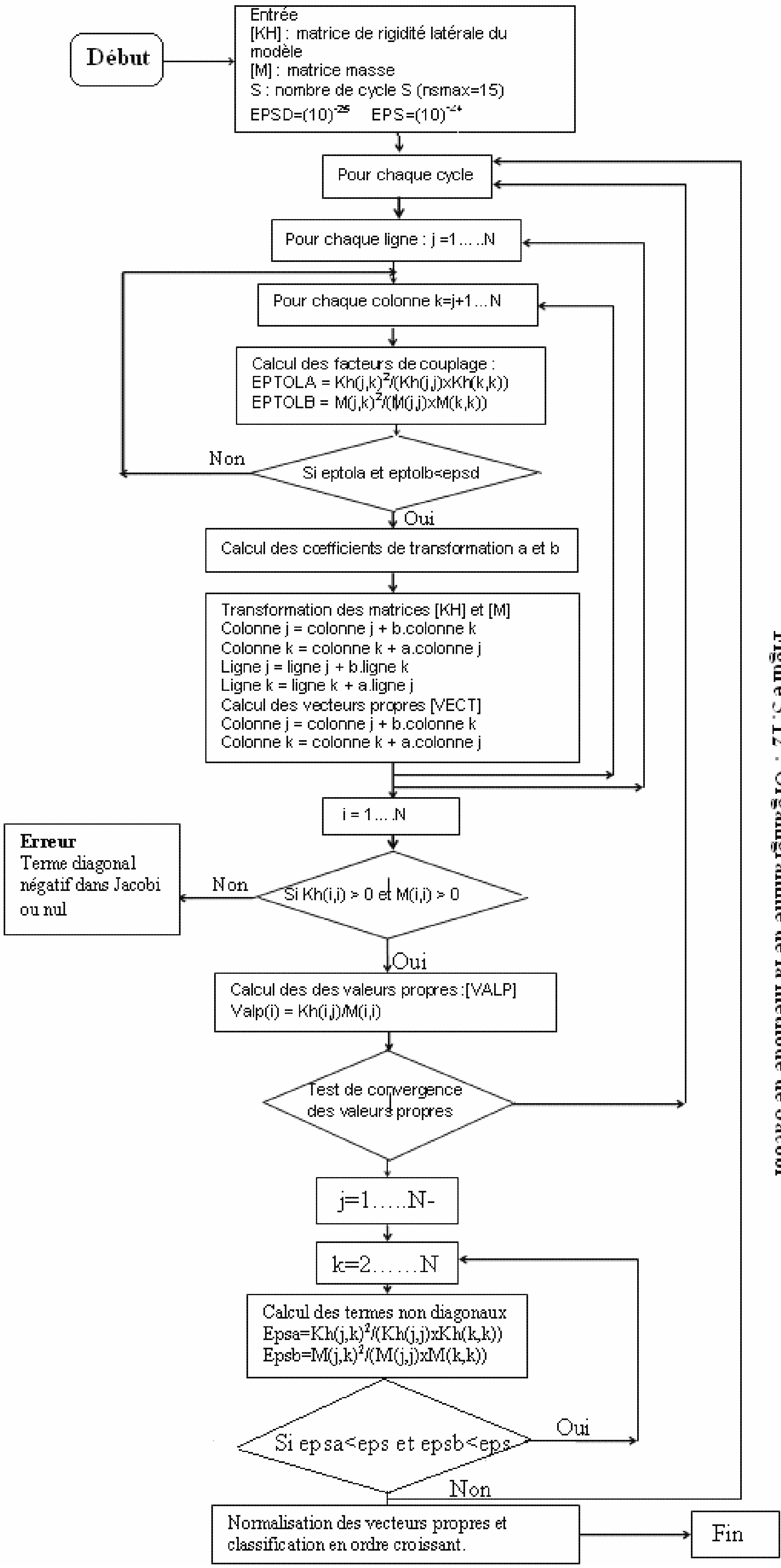


Figure 5.12 : Organigramme de la méthode de Jacobi

Chapitre 6

Validation du programme et informatique et étude de cas

6.1 Introduction :

Les possibilités du programme seront illustrées avec quelques exemples de validation, en premier avec une analyse élasto-plastique avec trois exemples et puis une analyse élasto-plastique avec calcul dynamique en deux exemples suivra.

6.2 Analyse élasto-plastique

6.2.1 Exemple1 : étude d'un portique avec des éléments inclinés (STEP).

Cet exemple sera traité en détail, les différentes étapes d'analyse sont reproduites afin de comparer avec les résultats numériques fournis par le programme.

Considérons le portique asymétrique montré dans la figure 6.1 avec la répartition des éléments et des noeuds indiquées. Notons que tous les points de charges concentrées concentrés doivent être employés en tant que points nodaux (des nœuds), et de même pour n'importe quel point auquel un changement brusque de section se produit.

En raison de la taille de la matrice finale de rigidité (24 x 24), seulement le résultat de l'analyse pour chaque étape de chargement sera donné. Le vecteur de déplacement est écrit dans l'ordre suivant : $[U]^T = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ .... \quad u_8 \ v_8 \ \theta_8]^T$

Où les indices se référer aux numéros des noeud dans la figure6.1.

Etape1

Une analyse élastique est exécutée avec la valeur de P_c = 1. Les moments d'extrémités correspondants à l'élément $\left\{M_u^{(1)}\right\}$ sont énumérés ci-dessous. De ces valeurs, on peut constater que quand P_c = 34.458 kip, la capacité plastique du moment est atteint à l'extrémité à gauche de l'élément 7.

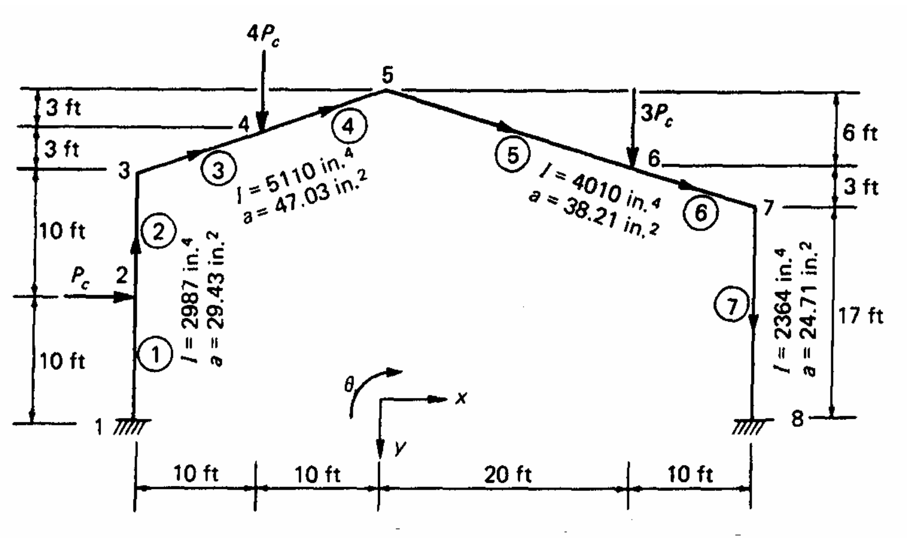


Figure 6.1. Portique avec des éléments inclinés.

Les moments d'extrémité de l'élément à la fin de l'étape 1 (Kip -ft)

Elément	Début et fin de l'élément	Capacité Moment Plastique M_p	Moment dû à P_c = 1 kip $\{M_u^{(1)}\}$	Multiplicateur de charge	N^{bre} d'étape 1 rotule est formée	Moments à la fin de l'étape 1 $M^{(1)}$
1	1	765.0	7.56			260.61
	2	765.0	5.62			19.36
2	1	765.0	-5.62			-19.36
	2	765.0	18.69			643.92
3	1	1275.0	-18.69			-643.92
	2	1275.0	-12.65			-446.23
4	1	1275.0	12.65			446.23
	2	1275.0	-4.59			-158.06
5	1	1015.0	4.59			158.06
	2	1015.0	-9.61			-331.18
6	1	1015.0	9.61			331.18
	2	1015.0	17.88			616.00
7	1	616.0	-17.88	34.458	1	-616.00
	2	616.0	-12.94			-445.75

Les déplacements nodaux à la fin de l'etape1 sont:

$\{D\} = 34.458 \times 10^{-4}$ {0, 0, 0 | - 48.42, 5.213, -0.5819

- 52.38, 10.43, 1.018 | - 3.336, 182.9, 1.309 | 23.78, 278.5, 0.4194 |

47.93, 183 .7, - 1.416 | 97.06, 9.373, -0.882 | 0, 0, 0}

Etape 2

Le portique est modifié, avec une rotule interne à l'extrémité gauche du membre 7 est maintenant analysée dans cette étape. Dans le procédé d'assemblage, $[S^{*}_{HL}]$, remplacera donc $[S^{*}]$.

Une charge additionnelle peut maintenant être appliquée et le portique est analysé avec la rigidité modifiée. Les moments aux extrémités de l'élément $\left\{M_u^{(1)}\right\}$ pour $P_c = 1$ sur le portique avec une rotule au dessus de l'élément 7 sont donnés ci-dessous. On peut constater que la valeur du moment plastique est atteinte à l'extrémité droite de l'élément 2 quand la valeur additionnelle de P_c est 5.871. Les moments d'extrémité de l'élément à la fin de l'étape 2 sont :

$M^{(2)}\} = \{M^{(1)}\} + 5.871 \left\{M_u^{(1)}\right\}$

Les moments d'extrémité de l'élément à la fin de l'étape. 2.

Element	Début et fin de l'element	M_p-$\{M^{(1)}\}$	Moment du à P_c = 1 kip $\left\{M_u^{(2)}\right\}$	multiplicateur de charge	Nbre d'étape avec 1 Rotule formée	5.871x $M^{(2)}_u$	Moments à la fin de léetape2 $M^{(2)}$
1	1	504.39	-1.42			-8.31	252.30
	2	745.64	6.02			35.34	54.71
2	1	745.64	-6.02			-35.34	-54.71
	2	121.08	20.62	5.871	2	121.08	765.00
3	1	631.08	- 20.62			-121.08	765.00
	2	828.77	-16.24			-95.38	541.61
4	1	828.77	16.24			95.38	541.61
	2	1116.94	-13.11			76.98	-235.04
5	1	856.94	13.11			76.98	235.04
	2	683.82	-24.37			143.08	-474.26
6	1	683.82	24.37			143.08	474.26
	2	399.00	0.00			0.00	616.00
7	1	0	0		1	0	- 616.00
	2	170.25	-24-83			-145.79	-591.54

Les déplacements nodaux provoqués par la charge ajoutée dans l'étape 2 sont :

$\{D\} = 5.871 \times 10^{-4}$ {0, 0, 0 | 29.42, 5.800, 0.6179 | 212.2, 11.60, 2.832|
327.1, 402.9, 3.054 | 408.0, 677.2, 1.565 |
449.3, 528.7, - 3.281 | 602.9, 8.185, -4.856 | 0, 0, 0}

Étape 3

Une deuxième rotule interne est maintenant formée à l'extrémité gauche de l'élément 3, et $[S^*_{HL}]$, est utilisé à la place de $[S^*]$, les moments d'extrémités de l'élément seront donnés ci-dessous. On peut constater que Les moments d'extrémité de l'élément à la fin de l'étape 2 sont :

$$\{M^{(3)}\} = \{M^{(2)}\} + 1.522 \left\{M_u^{(3)}\right\}$$

Où $\left\{M_u^{(3)}\right\}$ sont les moments dus à $P_c = 1$ sur le portique avec les deux premières rotules plastiques.

Les moments d'extrémités de l'élément à la fin de l'étape 3:

Elément	Extrémité de l'élément	M_p-$\{M^{(2)}\}$	Moment du à $P_c = 1$ kip $\left\{M_u^{(3)}\right\}$	Multiplicateur de charge	Nombre d'étape lesquelles 1 rotule est formée	1.552 $\left\{M_u^{(3)}\right\}$	Moments à la fin de l'étape3 $M^{(3)}$
1	1	512.70	8.91			13.56	265.86
	2	710.29	- 9.45			-14.39	40.32
2	1	710.29	9.45			14.39	- 40.32
	2	0	0		2	0	765.0
3	1	515.00	-0.00			-0.00	- 765.0
	2	733.39	- 34.60			- 52.66	- 594.3
4	1	733.39	34.60			52.66	594.27
	2	1039.96	-29.19			-44.44	- 279.5
5	1	779.96	29.19			44.44	279.48
	2	540.74	- 29.73			-45.25	- 519.5
6	1	540.74	29.73			45.25	519.52
	2	399.00	0.00			-0.00	616.00
7	1	0	0		1	0	- 616.0
	2	24.46	- 16.07	1.522	3	- 24.46	-616.00

Les déplacements nodaux dus à la charge supplémentaire dans l'étape 3 sont :

$$\{D\} = 1.522 \times 10^{-4} \{0, 0, 0 \mid -90.65, 5.263, - 1.526 \mid$$
$$- 336.6, 10.53, 7.093 \mid - 104.1, 792.0, 5.338 \mid 27.47, 1233.0, 2.102 \mid$$
$$147.4, 825.6, - 5.516 \mid 390.1, 9.271, - 7.439 \mid 0, 0, 0\}$$

Étape 4

Une troisième rotule est ajoutée à la structure à l'extrémité droite de l'élément 7, et $[S^*_{HL}]$ est employée dans le processus d'assemblage. Notons que le nœud 8 reste fixé. Comme alternative, le noeud 8 peut être traité comme une rotule extérieure, sur quoi $(S^*_{HL}]$ 7 est utilisée dans l'analyse et seulement le mouvement horizontal et vertical sont supprimés au nœud 8.

Les moments aux extrémités sont donnés ci-après et nous concluons que l'incrément de 15.484 P_c peut produire une quatrième à l'extrémité gauche de l'élément 6. Les moments d'extrémité après l'incrément sont

$\{M^{(4)}\} = \{M^{(3)}\} + 15.484 \left\{M_u^{(4)}\right\}$

Où $\left\{M_u^{(4)}\right\}$ est le moment due à $P_c = 1$ sur le portique avec les deux premières rotules plastiques.

Les moments d'extrémités de l'élément à la fin de l'étape 4:

Elément	Extrémité l'élément	Mp-{M(2)}	Moment du à Pc = 1 kip $\left\{M_u^{(3)}\right\}$	Multiplicateur de charge	Nombre d'étape lesquelles 1 rotule est formée	1.552 $\left\{M_u^{(3)}\right\}$	Moments à la fin de l'étape3 M(3)
1	1	499.14	-10.00			- 154.8	111.01
	2	714.68	0.00			0	40.32
2	1	714.68	-0.00			-0.00	-40.32
	2	0	0		2	0	765.00
3	1	515.00	-0.00			-0.00	- 765.00
	2	680.73	-38.00			- 588.4	-1182.67
4	1	680.73	38.00			588.40	1182.67
	2	995.52	- 36.00			-557.44	- 836.92
5	1	735.52	36-00			557.44	836.92
	2	495.48	- 32.00			-495.48	-1015.00
6	1	495.48	32.00	15.484	4	495.48	1015.00
	2	399.00	0.00			-0.00	616.00
7	1	0	0		1	0	-616.00
	2	0	0		3	0	-616.00

Les déplacements nodaux dus à la charge supplémentaire dans l'étape 3 sont :

$\{D\} = 15.484 \times 10^{-4}$ {0,0,0 | 66.49,5.343,0.8311 | 166.2,10.69,8.126 |

434.7, 909.0, 6.198 | 589.7, 1426, 2.450 |

736.3, 936.6, - 6.347 | 1013, 9.110, - 8.416 | 0, 0, 0}

La quatrième rotule étant inséré dans le portique, un mécanisme est formé et aucun autre progrès ne peut être accompli dans l'analyse, puisque les très grandes déformations (entièrement hors du contexte avec la petite théorie des petites déformations) apparaîtront après l'exécution du programme informatique.

La charge d'effondrement dans l'exemple ci-dessus est la charge dans la première étape plus les incréments aux étapes suivantes, à savoir,

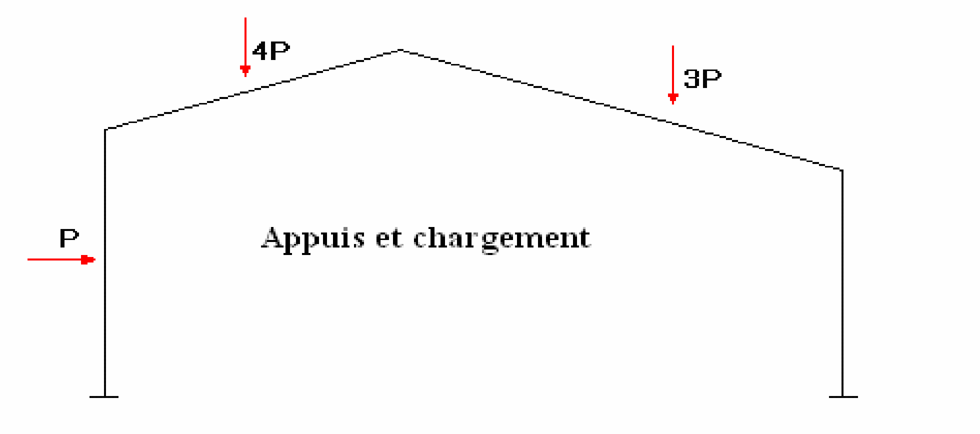
$P_c = 34.458 + 5.871 + 1.522 + 15.484 = 57.335$ kip

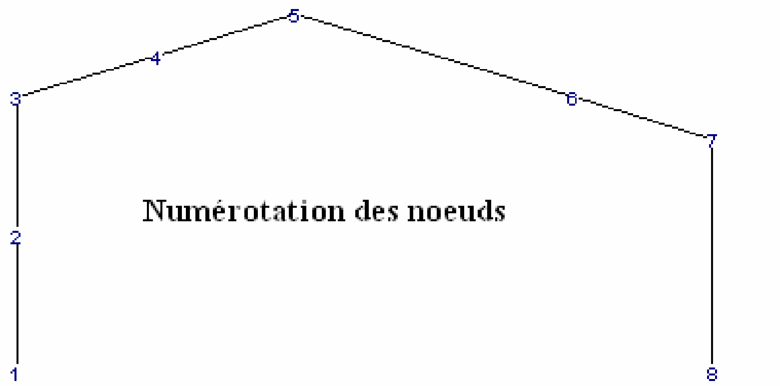
$P_C = 26.087$,425 kg

Remarque : *les résultats des déplacements sont donnés en unités anglo-saxon le radian pour la rotation et le 'Inch' pour les translations.*

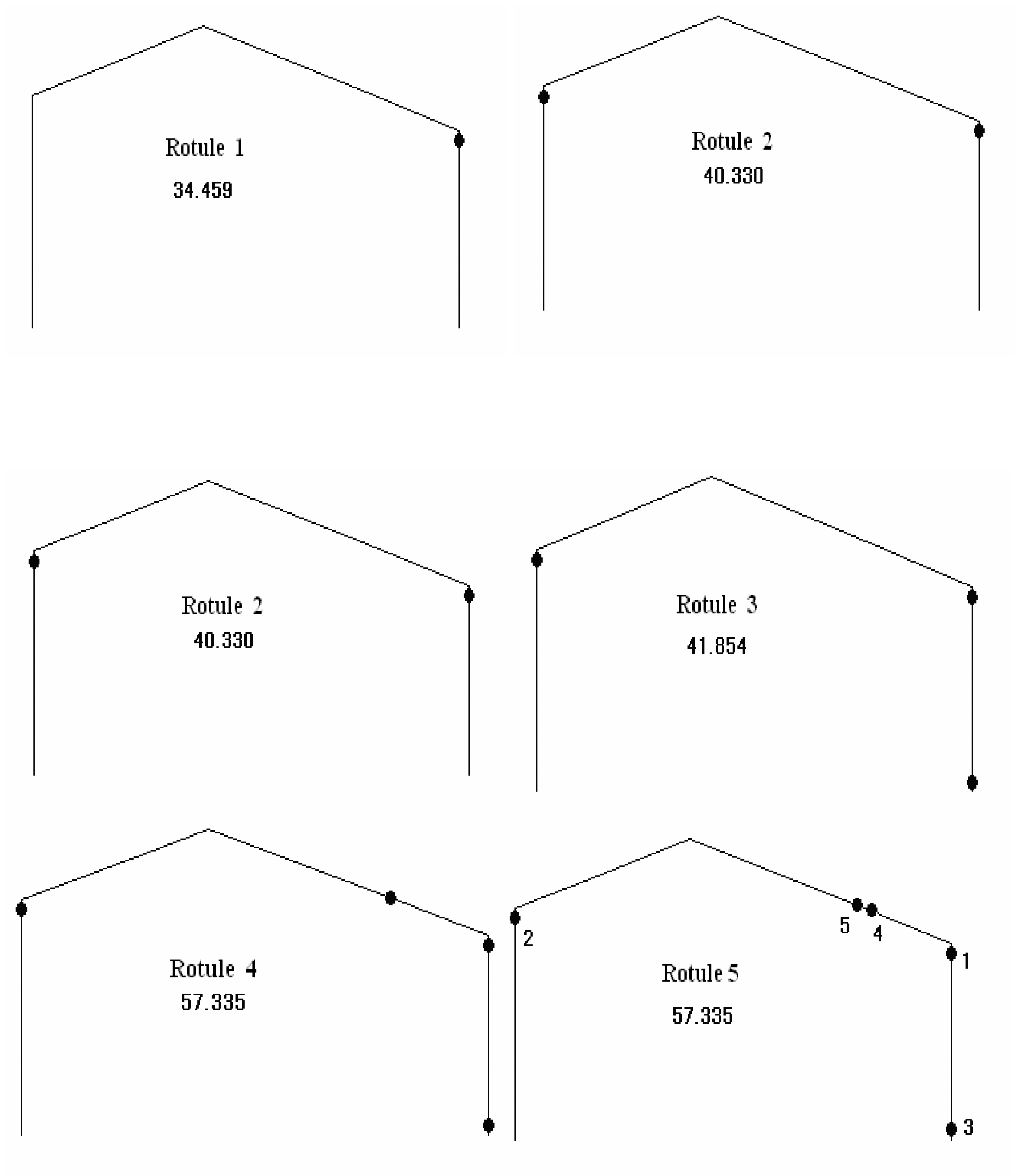
Résultats graphiques:

Le modèle et la numérotation des noeuds sont montrés ci-dessous :



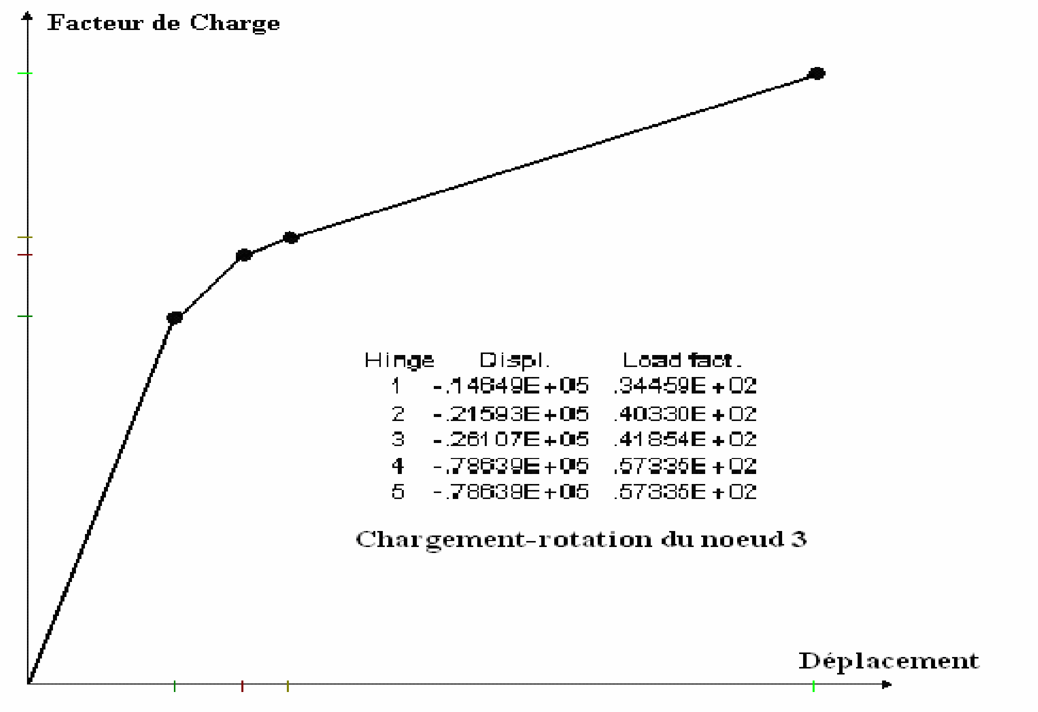


La formation successive de rotules plastique est illustrée dans la figure suivante qui donne l'endroit et le facteur de charge correspondant de chaque rotule plastique.



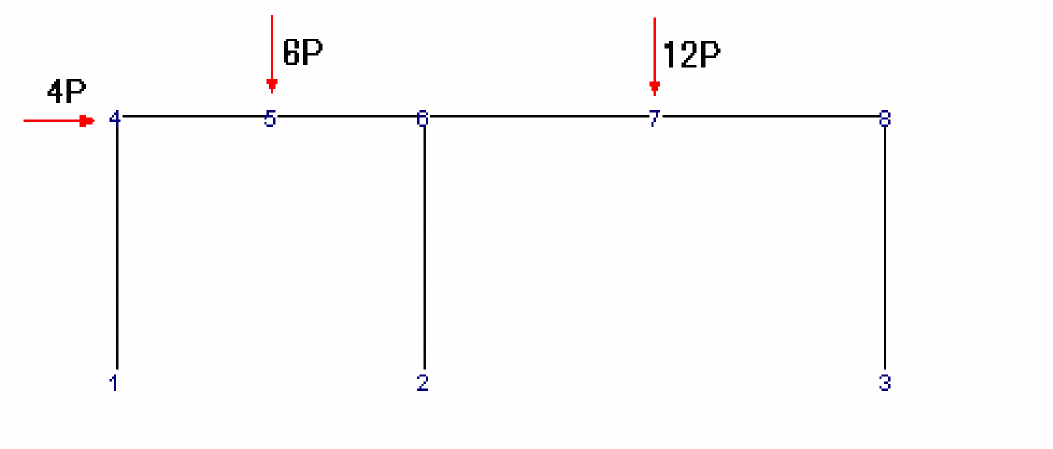
Nous pouvons constater que les résultats du programme sont exactement identiques que ceux trouvés analytiquement pour toutes les rotules plastiques.

La figure ci-dessous montre la courbe charge-rotation du noeud 3 et confirme le comportement linéaire entre les rotules successives de même que la perte de rigidité après la formation des rotules.

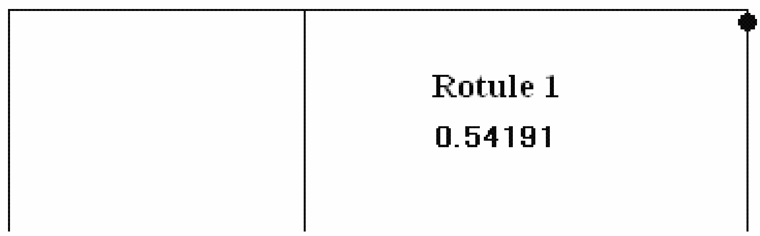


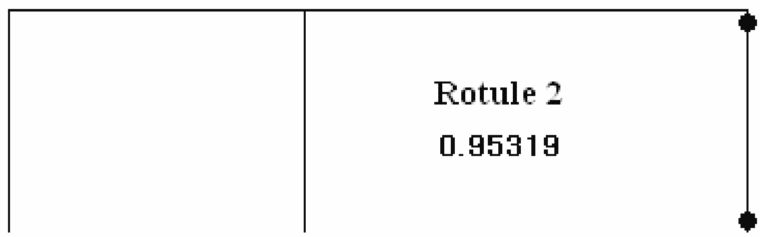
6.2.2 Exemple 2: Portique à deux compartiments. (STEP1)

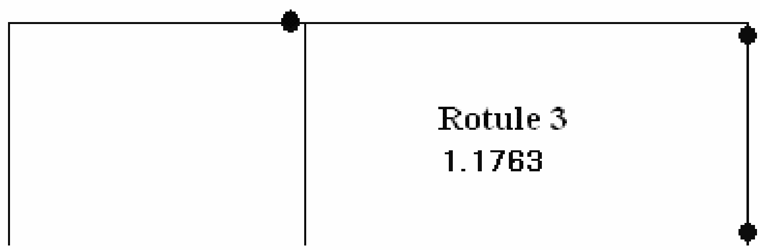
La géométrie, le chargement, les conditions aux limites et la numérotation de noeud sont montrés sur la figure suivante :

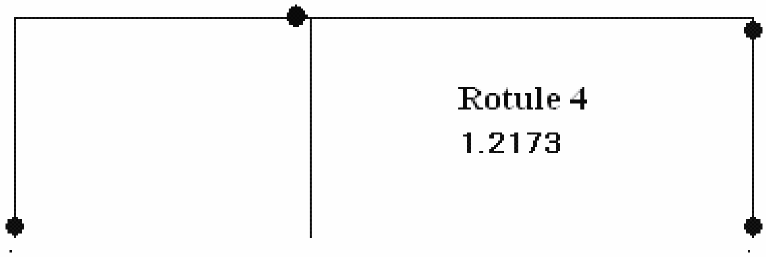


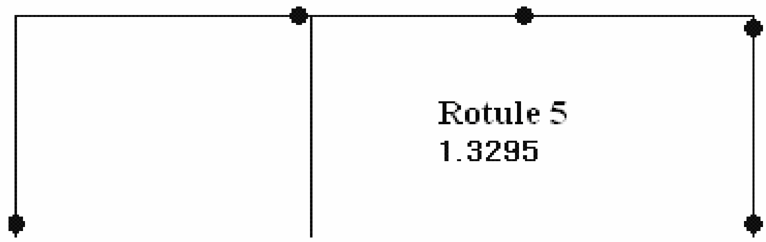
La formation successive des rotules plastiques et le facteur de charge dans chaque étape :

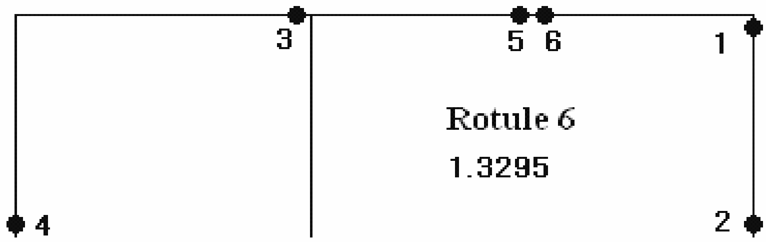


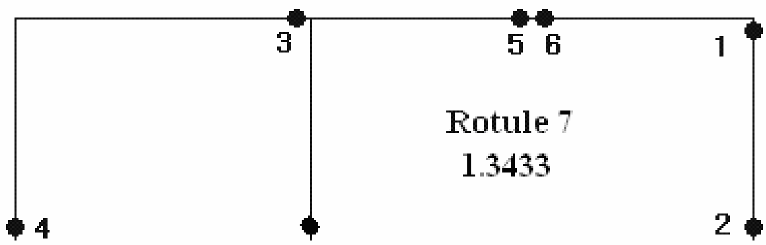


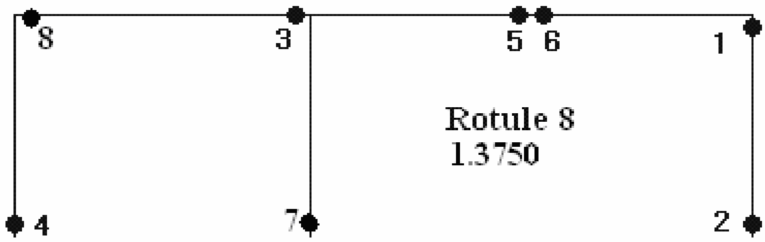



Rotule 4
1.2173


Rotule 5
1.3295

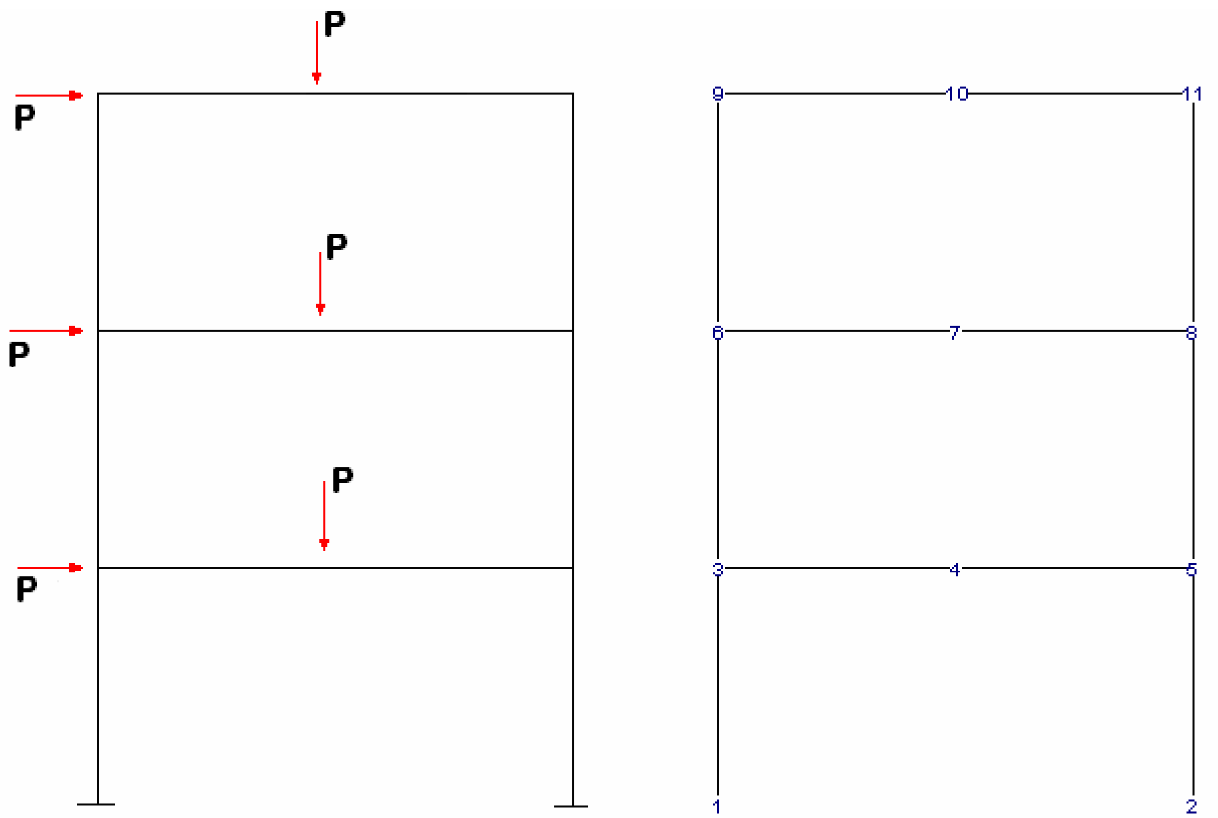

3
5 6
1
Rotule 6
1.3295
4
2


3
5 6
1
Rotule 7
1.3433
4
2

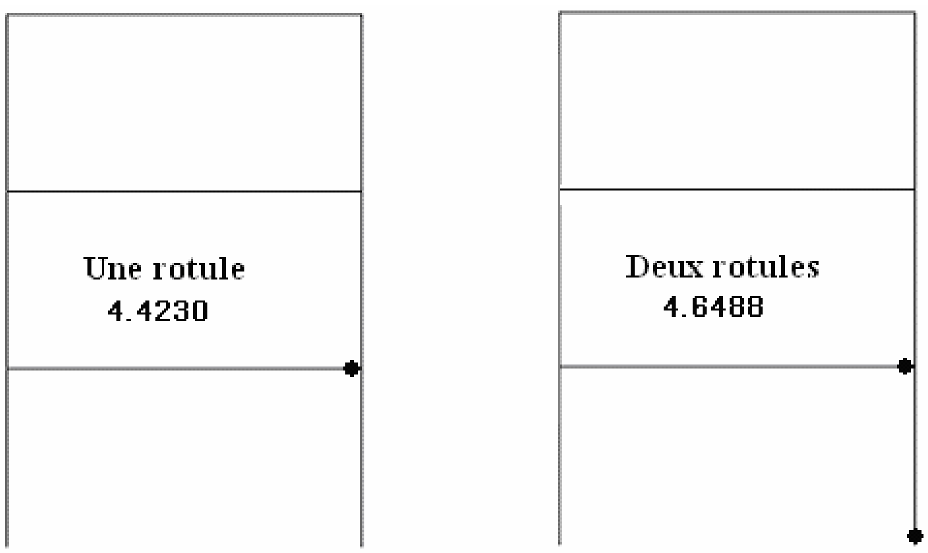

8
3
5 6
1
Rotule 8
1.3750
4
7
2

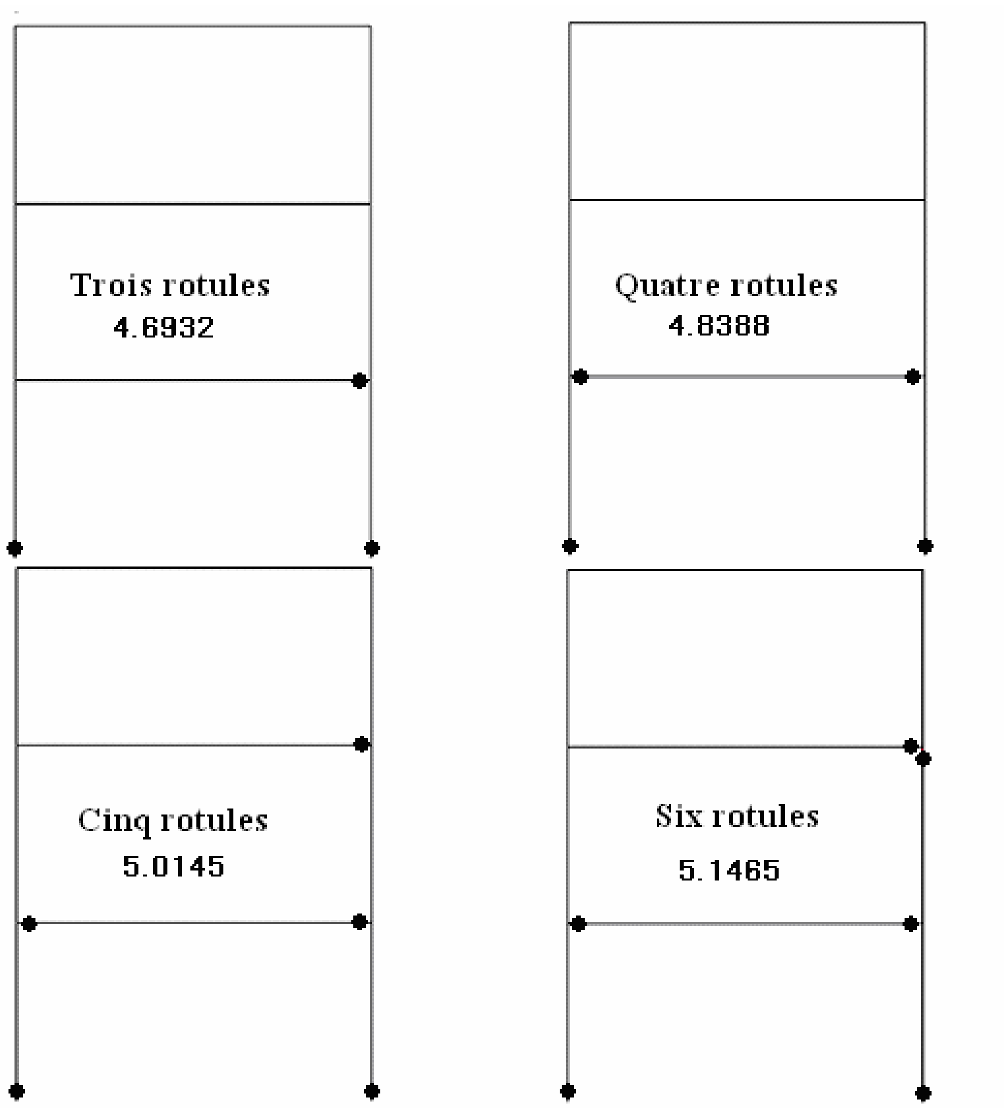
6.2.3 Exemple 3 : Portique à trois planchers. (STEP2)

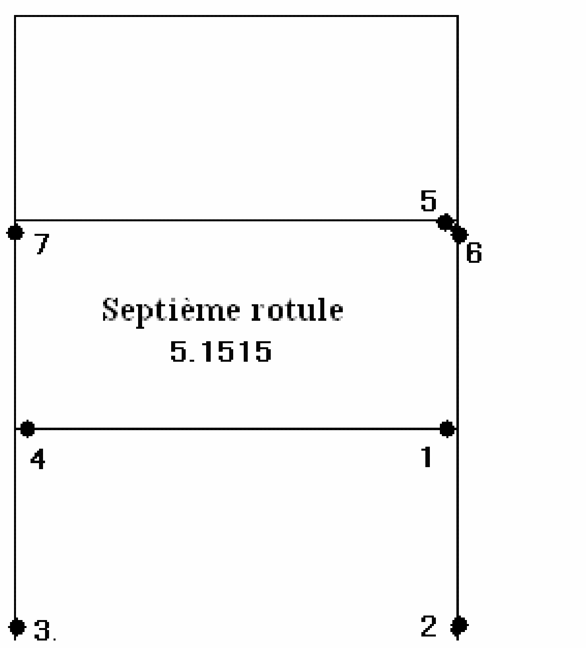
La géométrie, le chargement, les conditions aux limites et la numérotation de noeud sont montrés sur la figure suivante :

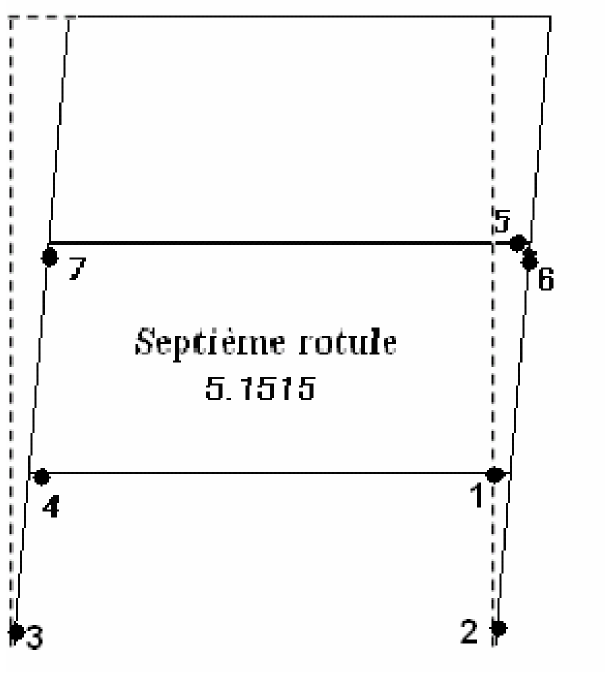


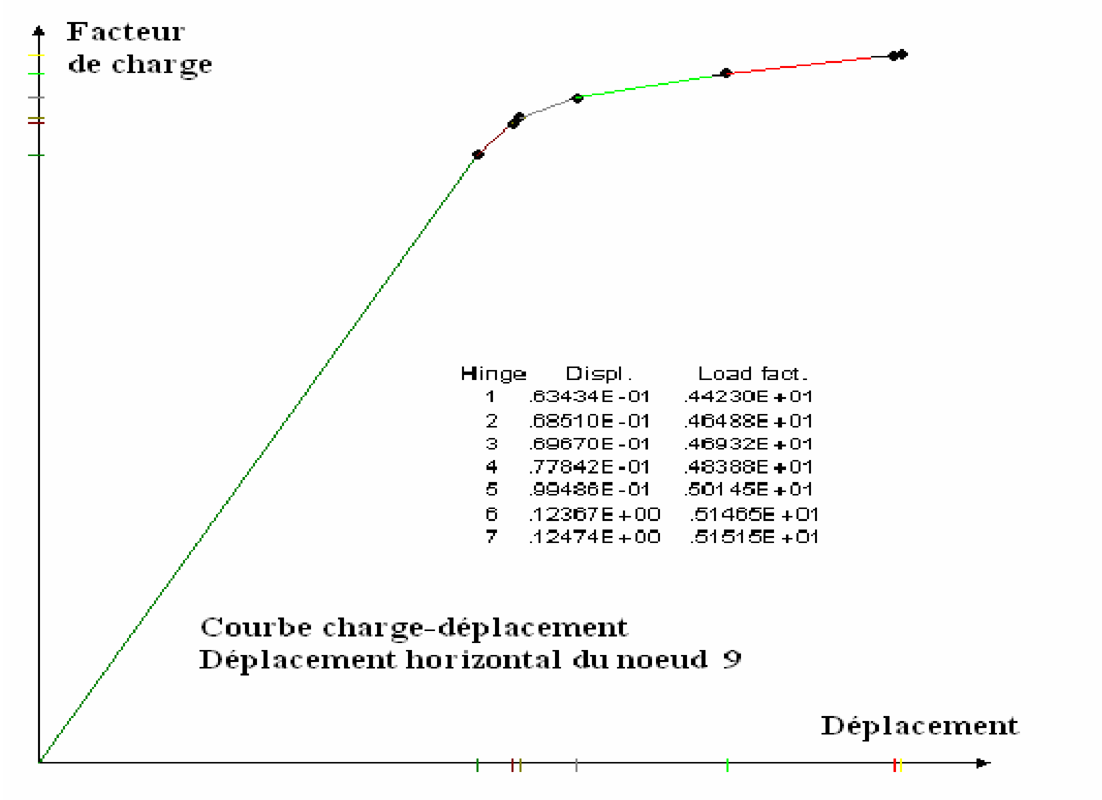
Cet exemple peut être considéré comme impulsion à l'analyse de **push-over** sous un chargement latéral croissant semblable à un chargement de tremblement de terre.




Trois rotules
4.6932
Quatre rotules
4.8388
Cinq rotules
5.0145
Six rotules
5.1465


5
7
6
Septième rotule
5.1515
4
1
3.
2





Nous pouvons constater que sous un chargement latéral la perte en rigidité est plus grande quand la rotule est formée dans un poteau.

6.3 Analyse élasto-plastique avec calcul dynamique

6.3.1 Introduction

Le programme informatique dans sa partie dynamique intègre l'évolution des caractéristiques dynamiques de la structure avec l'apparition des rotules plastiques ; le programme reconnaît automatiquement le nombre de niveaux et demande leurs masses respectives en utilisant des unités cohérentes.

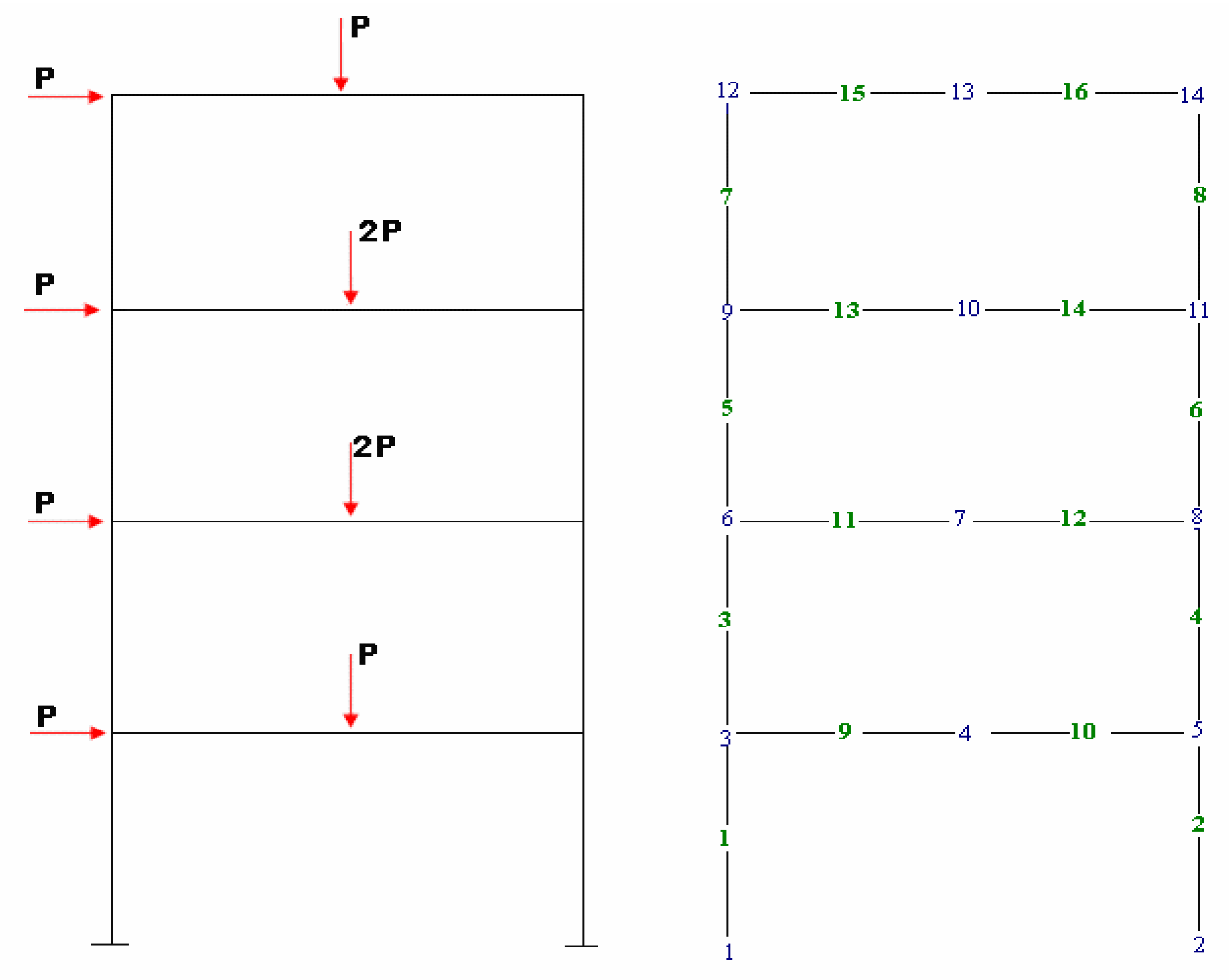
l'analyse dynamique se fait vis à vis de la rigidité latérale avec l'hypothèse des planchers agissant comme des diaphragmes rigides(chapitre 5) ; par conséquent, seules les rotules apparaissant dans les poteaux affectent les caractéristiques dynamiques de la structure.

Les résultats dynamiques donnent les périodes de tous les modes à l'apparition de chaque rotule ainsi que les masses modales.

Le programme donne donc les caractéristiques dynamiques initiales (avant plastification) et leur évolution après chaque rotule dans un poteau.

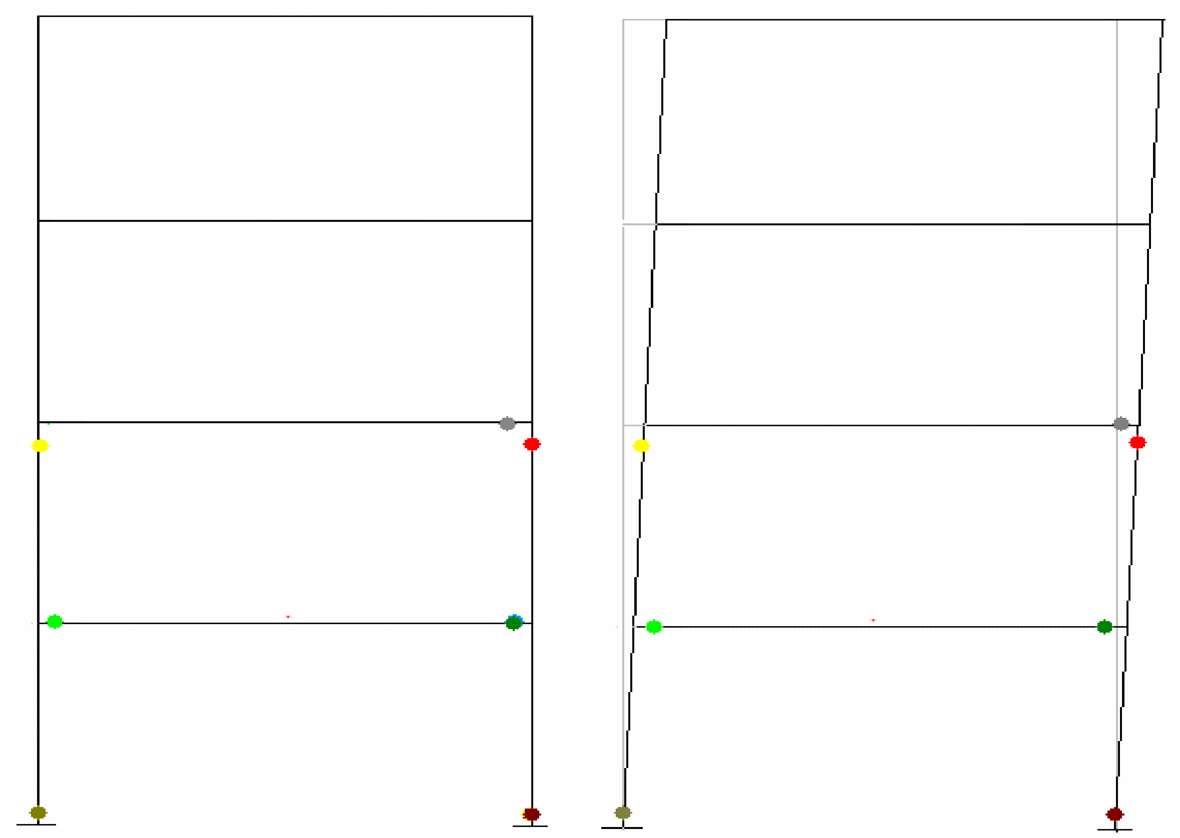
6.3.2 Exemple 1 : Portique à quatre planchers.(STEPD1)

1. Chargement, numérotation des nœuds et des éléments de la structure :

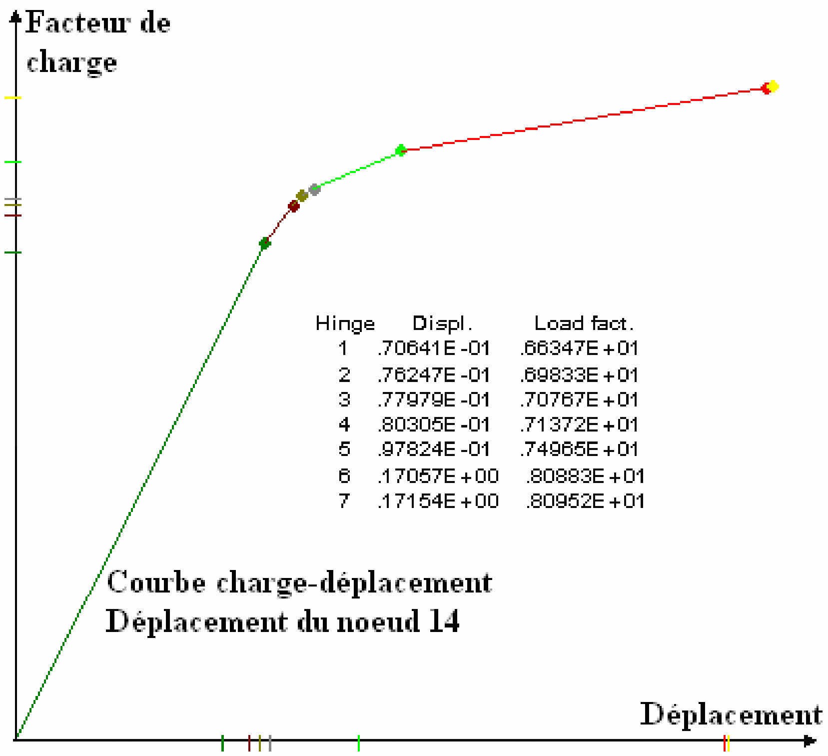


2. formation des rotules et déplacement de la structure avant effondrement :

On constate qu'il y a formation de quatre rotules dans les poteaux et trois dans les poutres.

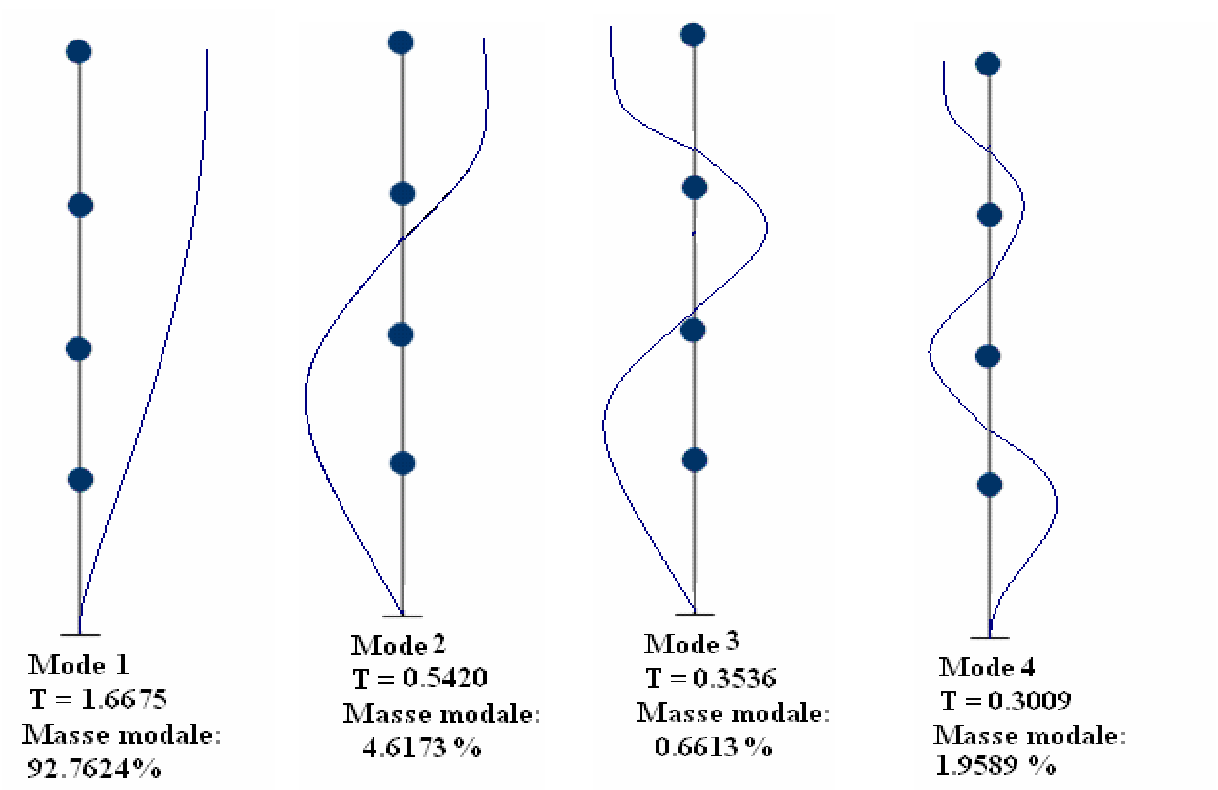


3. Graphe élasto-plastique charge-déplacement montrant la formation successive des rotules plastiques dans la structure, indiquant les déplacements du nœud 14 après chaque plastification (rotule plastique) :

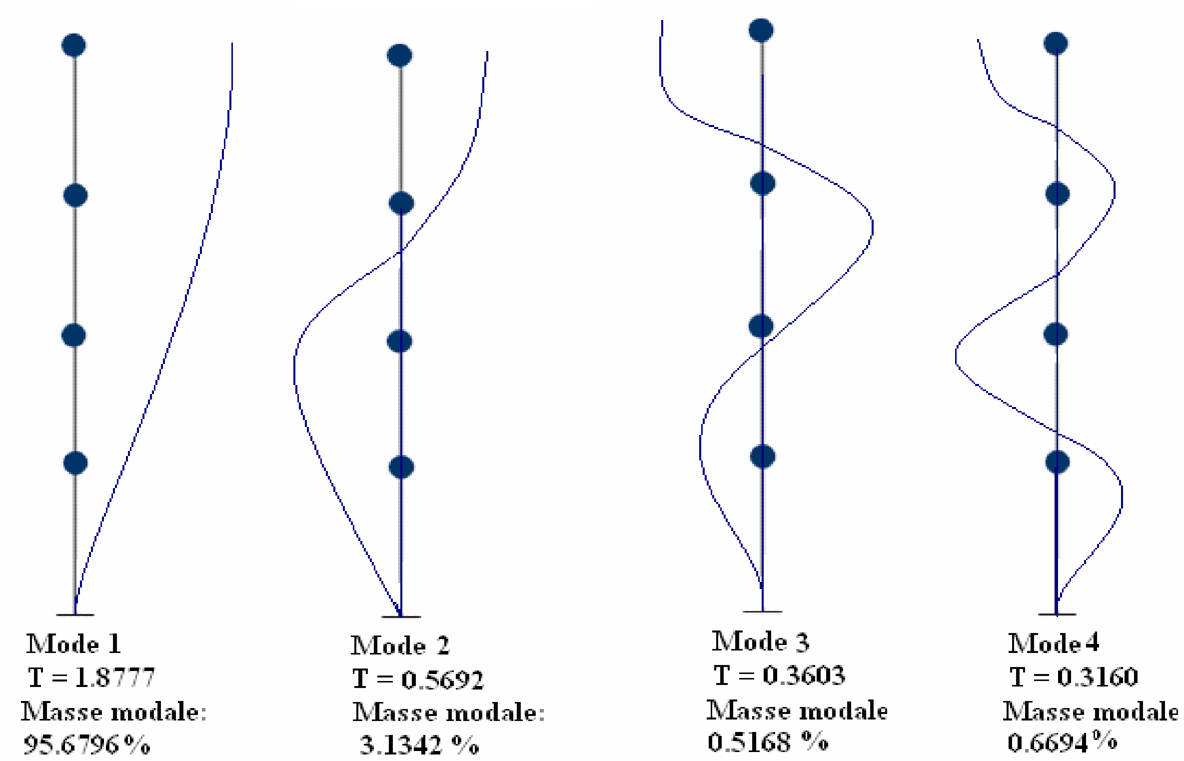


4. les caractéristiques dynamiques initiales (avant plastification) et leurs évolutions après chaque rotule formée dans un poteau.

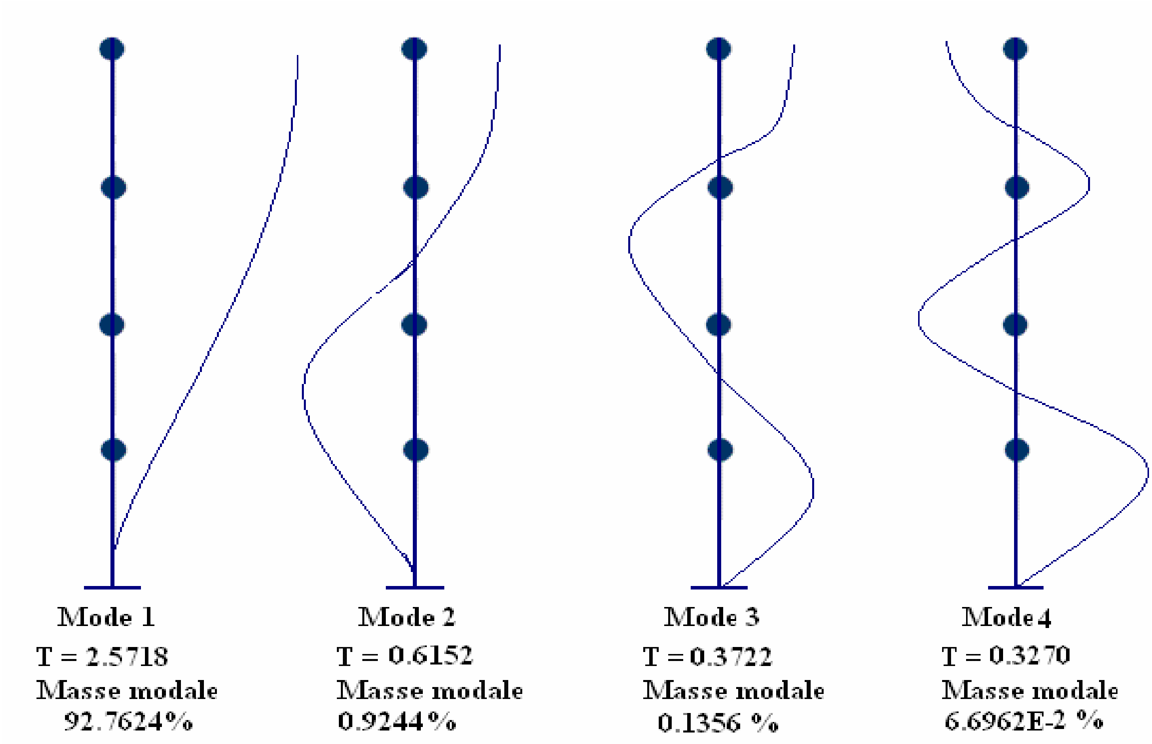
Les résultats dynamiques donnent les périodes de tous les modes à l'apparition de chaque rotule ainsi que les masses modales.



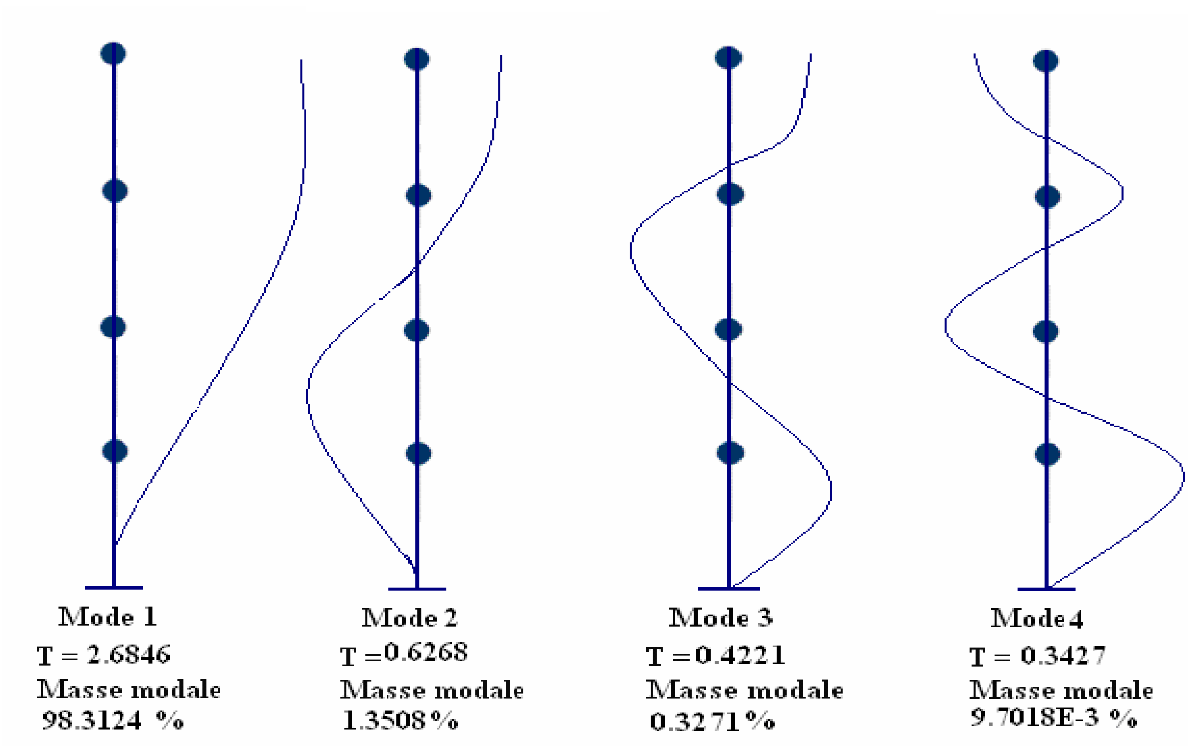
- Etat dynamique de la structure après formation de la première rotule dans un poteau



- Etat dynamique de la structure après formation de la deuxième rotule dans un poteau

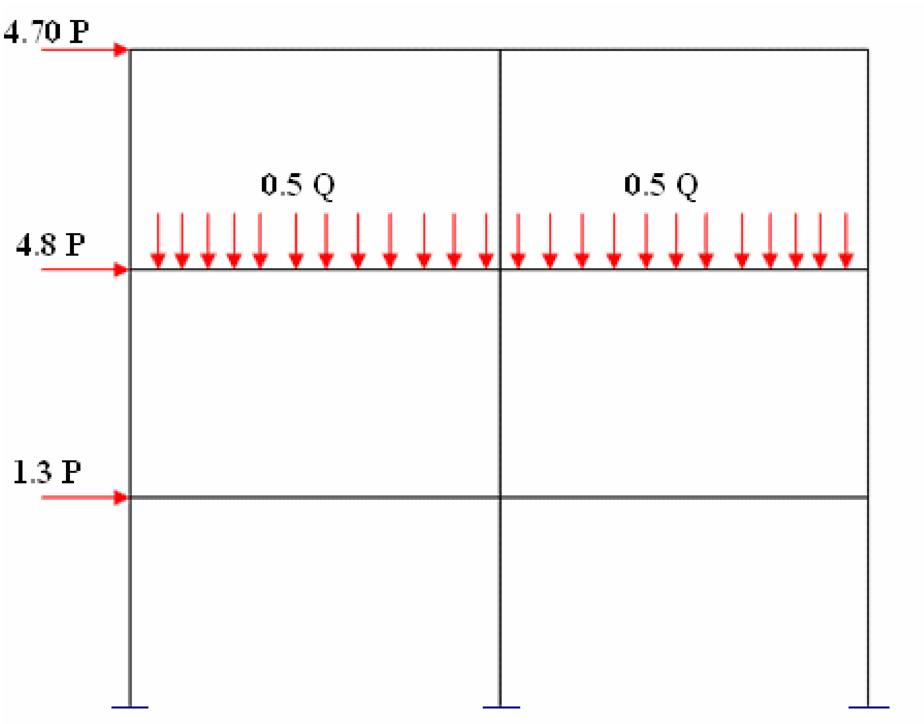


- Etat dynamique de la structure après la formation de la troisième rotule dans un poteau

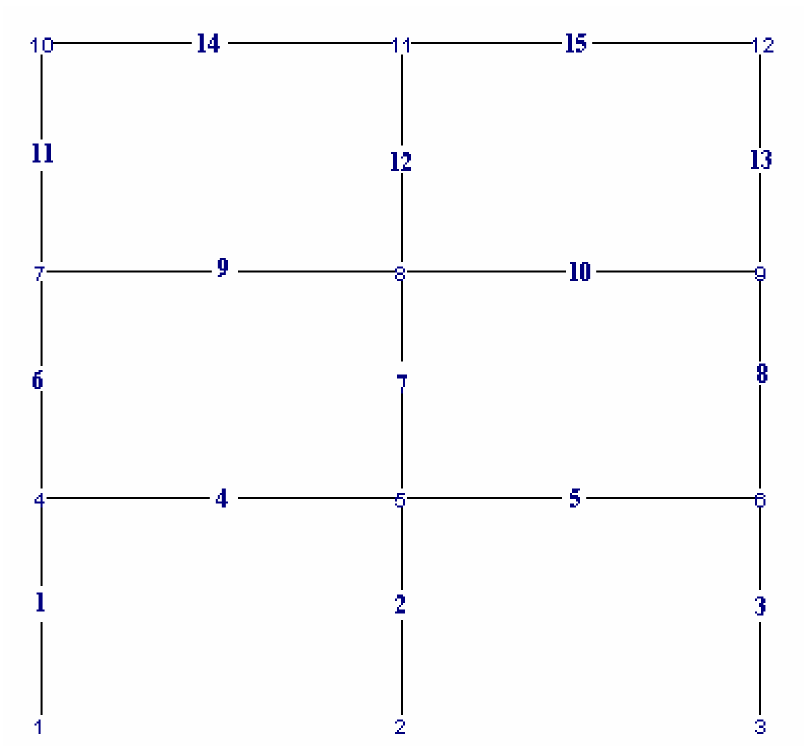


6.3.2 Portique à deux compartiments et trois planchers (STEPD2) :

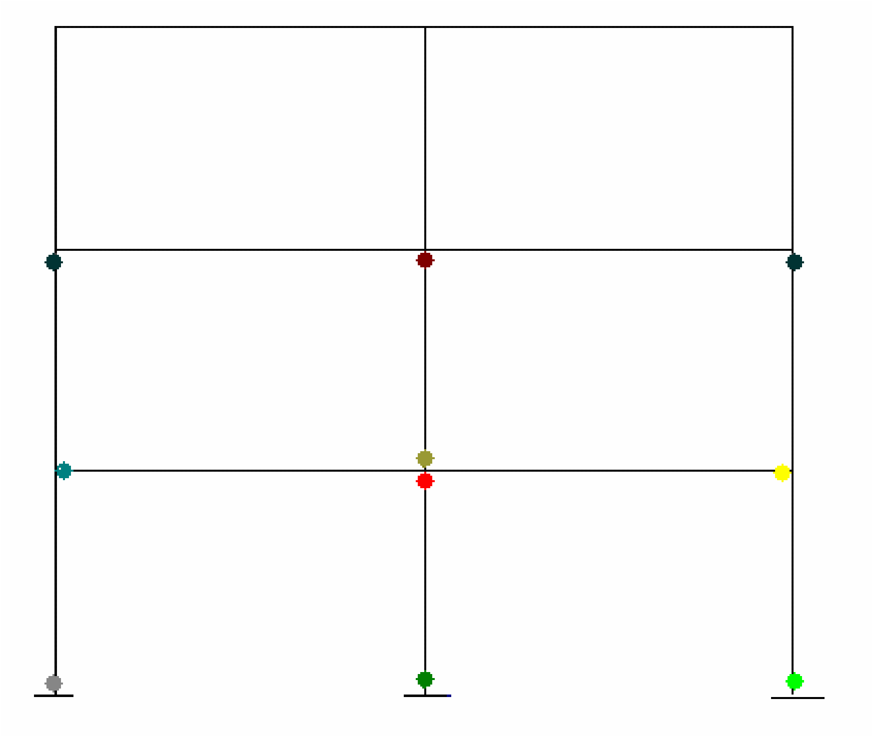
1. Structure et Chargement :



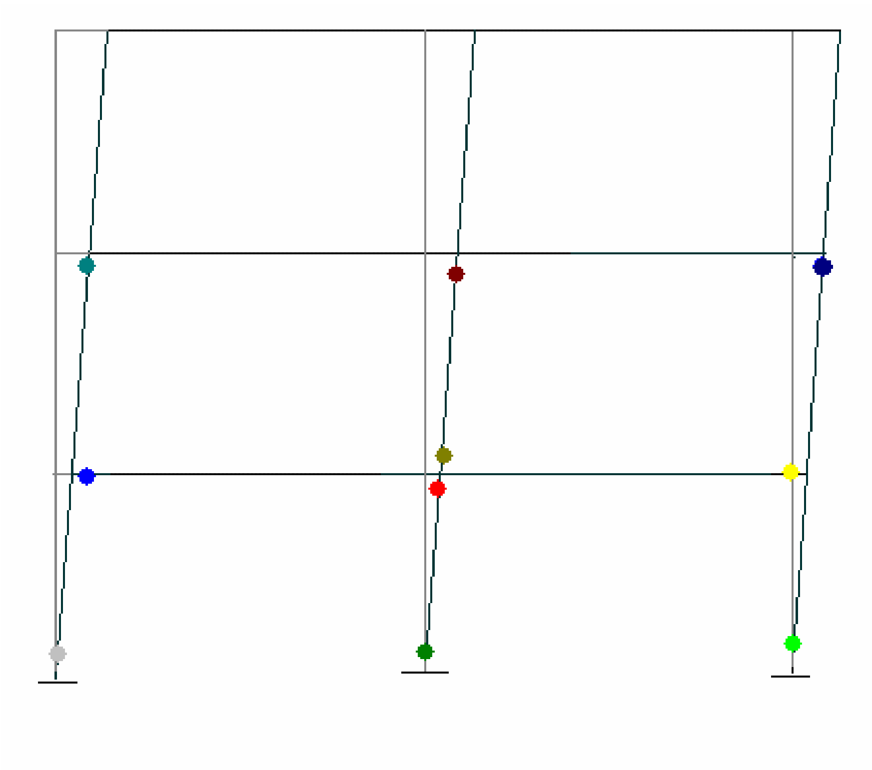
2. Numérotation des nœuds et des éléments de la structure :



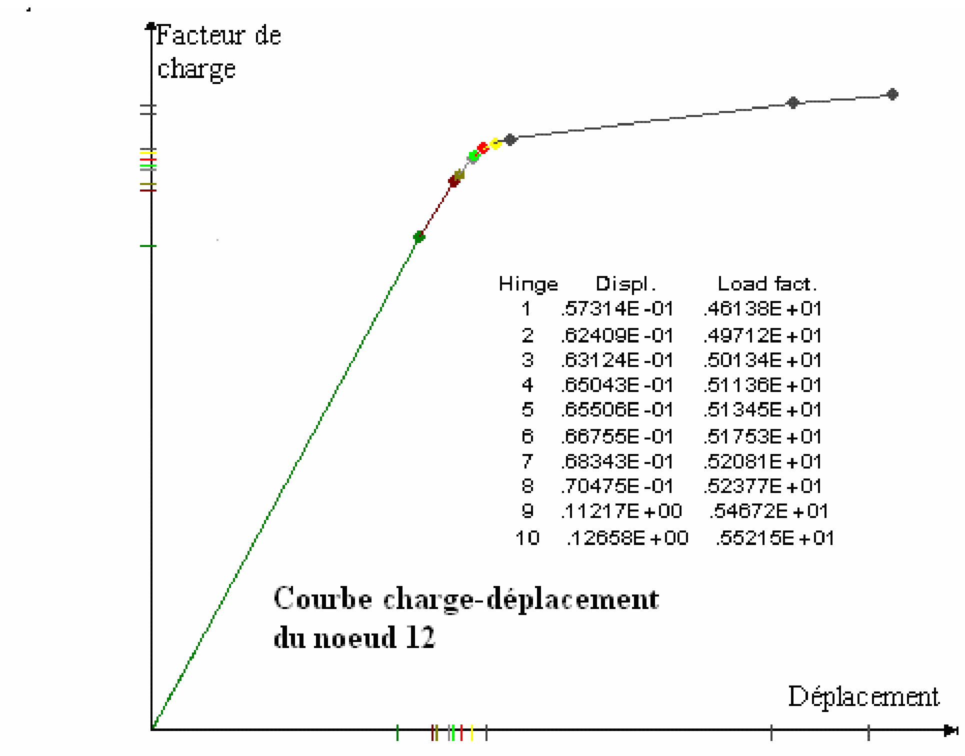
3. Formation des rotules : on constate qu'il y a formation de huit rotules dans les poteaux et deux dans les poutres



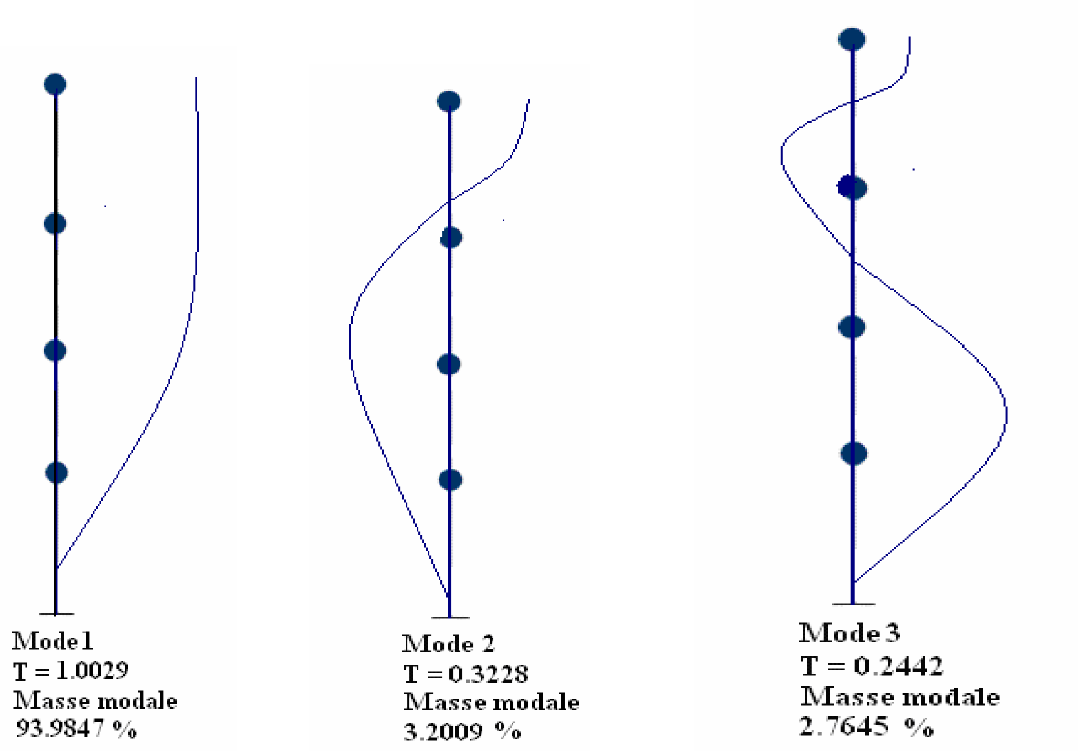
4. Déformation de la structure avant l'effondrement (déplacement horizontal latéral) :



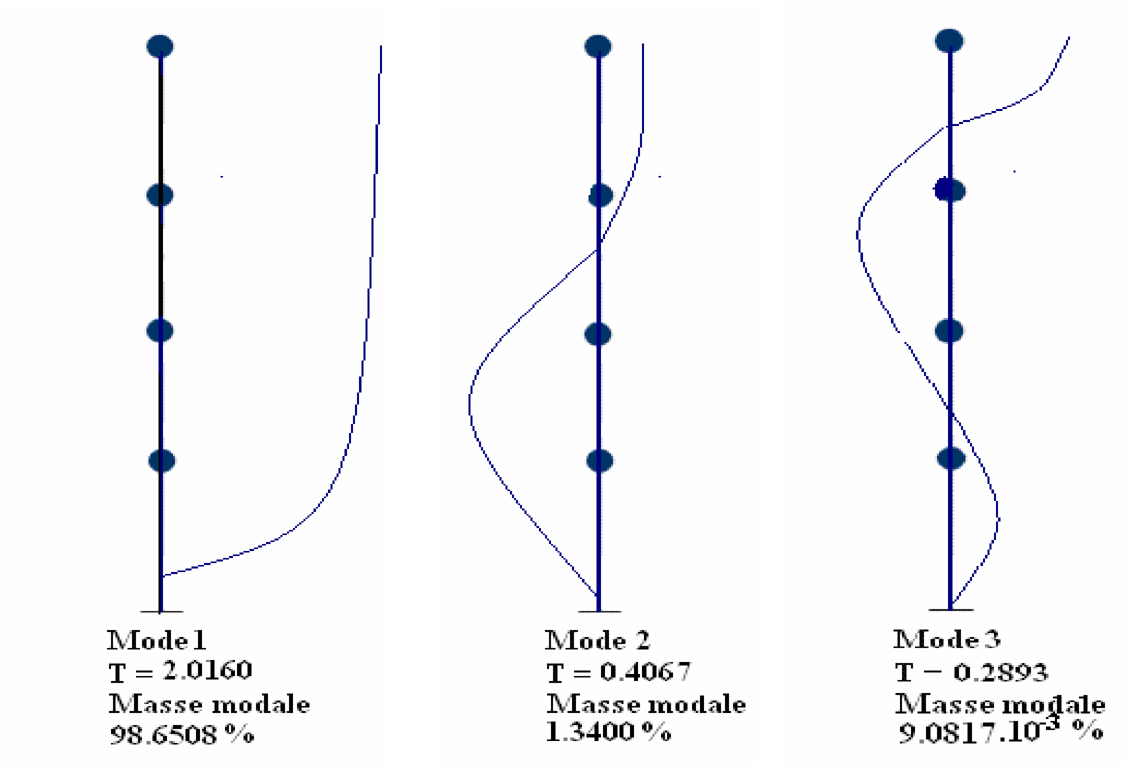
5. Graphe élasto-plastique montrant la formation successive des rotules plastiques dans la structure, indiquant les déplacements du nœud 12 avant et après chaque plastification (rotule plastique) :



6. Etat dynamique initial de la structure avant plastification



6. Etat dynamique de la structure après formation de la dernière rotule avant plastification totale (effondrement après la dixième rotule)



Chapitre 7

Conclusions

Chapitre 7 Conclusions

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes de ce travail :

L’objectif de ce travail est l’analyse élasto-plastique et le calcul automatique de la charge de ruine d’une structure en portique plan en suivant la formation successive des rotules plastiques dans la structure. L'analyse élasto-plastique fournit des informations plus réalistes (pratiques) sur le vrai comportement et la capacité de résistance finale des structures.

La méthode des rotules successives employée dans ce travail ne permet pas seulement de déterminer la charge de ruine d’une structure mais fournit aussi des informations utiles sur le comportement non linéaire et l’apparition des rotules plastiques. La technique peut ainsi être utilisée pour évaluer la performance et la vulnérabilité des structures existantes en détectant les zones les plus faibles, qui sont les endroits des premières rotules plastiques, et concevoir en conséquence une méthode appropriée de renforcement. La méthode dite «Push-Over» fondée sur cette technique est maintenant reconnue et agréée par plusieurs règlements sismiques pour l’évaluation des performances des structures existantes et pour la «conception basée sur la performance».

L'outil peut également être utilisé pour garantir un critère important de conception parasismique qui est celui de «poutre faible - poteau fort» aux nœuds des portiques. La formation des rotules plastiques dans les poutres est désirable car ces dernières ont un comportement plus ductile que les poteaux et assurent une meilleure capacité de dissipation de l’énergie sismique. Le réflexe de surdimensionnement des poutres est dans ce cas préjudiciable et cet outil permet de parer à ces situations et répondre à cette exigence de «poutre faible - poteau fort».
L’analyse dynamique fournissant les caractéristiques dynamiques initiales (avant plastification) et leur évolution après chaque rotule a par ailleurs confirmé l’effet néfaste des rotules apparaissant dans les poteaux.

Il serait intéressant d’étendre ce travail aux structures tridimensionnelles et d’incorporer l’élastoplasticité réelle des matériaux (avec écrouissage).

Références Bibliographiques

[1] K.Bendani & H.Missoum

‘‘Méthodes numériques de calcul des structures’’

O.P.U 1993

[2] N&S Taibi

‘‘Pratique du fortron77 (cours et exercices résolus)’’

2eme édition, Berti édition 1992

[3] Bernard Halphen & Jean Salencon

‘‘Elasto-plasticité’’

Presse de l’école des ponds et chaussées Paris 1987

[4] M .Mimoun, F.Z.Mimoun-Aouadja

‘‘Plasticité des structures O.P.U 1991’’

[5] Ray.W.Clouth & Joseph Penzien

‘‘Dynamique des structures (tome 1) : Principes fondamentaux’’

Édition Pluralis 1980

[6] A.Ghali &A.M.Neville

‘‘Structural analysis (A unified classical and matrix approach)’’

The. Tan Chiang book Co. (Taipei. Taiwan)

[7] A. Ghali, A.M. Neville

“Structural Analysis: A Unified Classical and matrix Approach”

Intext Educational Publishers, 1972

[8] R. C. Coates, M.G. Coutie, F.K. Kong

"Structural Analysis"   Nelson, 1980

[9] J.F Auboin

"Calcul des structures et informatique''

Edition Eyrolles, Paris1983

[10] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot.

"Une présentation de la méthode des éléments finis''

Collection de l'université de Compiègne

[11] A. Charif

"Matrix Analysis of Structures", Lecture Notes

[12] A. Charif

"Elastic-Plastic Analysis of Structures", Lecture Notes

[13] LARRY J.SEGERLIND

''Applied finite Element Analysis''
Second edition copy right 1984.

[14] ZIENKIEWICZ

The finite element Method for the edition copy right 1989.