REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE EL-HADJ LAKHDAR- BATNA

MÉMOIRE

Présenté à

LA FACULTE DES SCIENCES - DEPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIERE

Pour obtenir le diplôme de

MAGISTERE EN PHYSIQUE

Option : Physique des Matériaux Métalliques et Semi Conducteur

Par

Makhloufi Noureddine

Thème

Simulation numérique de la fissuration des composites par fatigue

---

Soutenue devant le jury :

♦ **Pr. S. BELHAS**	**Université de Batna**	**Président**
♦ **Pr. S. RECHAK**	**ENP d'Alger**	**Rapporteur**
♦ **Dr. C. BELAMRI**	**Université de Batna**	**Examinateur**
♦ **Dr. C. MAHFOUDI**	**Université d'Oum El Bouaghi**	**Examinateur**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2011 / 2012

Remerciements :

Je remercie en premier lieu, Dieu tout puissant de m'avoir donné un grand courage, et une grande patience pour mener à fin ce travail.

Je voudrai particulièrement exprimer ma plus grande reconnaissance et mon profond respect à Monsieur le Professeur ***Rechak Said*** *enseignant et Chef de département de génie mécanique à l'école national polytechnique pour son encadrement et ses conseils scientifiques tout au long de ce travail. Ses aides et recommandations des meilleures solutions m'ont donné l'appréciation et le dévouement à la recherche dans le domaine des matériaux composites.*

Je remercie vivement le Professeur ***Belhas Saida*** *enseignante à l'université de Batna, d'avoir accepté de présider le jury.*

Merci également au Docteur ***Belamri Cherif*** *Maitre de conférences à l'université de Batna d'accepter de juger mon travail.*

Mes remerciements vont également au Docteur ***Mahfoudi Chawki*** *Maitre de conférences à l'université d'Oum El-Bouaghi d'avoir accepté de juger mon travail et d'accepter d'être dans le jury malgré ses occupations.*

J'exprime ma grande gratitude envers ma petite famille particulièrement à mon épouse qui m'a encouragé infiniment pour finir ce travail.

Je remercie mes amis pour leur aide et leur soutient au long de ce parcours.

SOMMAIRE

Sommaire 1

Introduction générale.....4

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I.1. Notions fondamentales sur les matériaux composites…….…… 7

I.2 . Classification des matériaux composites…….……. ..8

I.3. Constituants fondamentaux d'un matériau composite…..…….. 9

I.4. Principaux types de composites ……..…...20

Chapitre II

Loi de comportement des

Matériaux composites

II.1. Lois de comportement d'un pli unidirectionnel ……... 23

II.2. Etude élastique d'un pli en contrainte plane……..…… …….....26

II.3. Loi du mélange ….....29

II.4. Loi de comportement élastique du pli dans un repère global… …….. …..…...30

II.4.1- Calcul des constantes élastiques dans le repère global (pour pli)…….……..34

II.5. Calcul de l'homogénéisation du pli…….……35

Chapitre III

Mécanique linéaire de la rupture

III.1. Introduction……37

III.2. Approche globale……37

III.3. Approche locale…… ……..40

III.4. Propagation des fissures par fatigue……45

Chapitre IV

Méthode des équations intégrales de frontières

IV.1. Introduction……..……52

IV.2. Equations d'élasticité linéaire…….…….52

IV.3. Procédure numérique…..…….…….61

Chapitre V

Simulation numérique

V.1. Formulation……...…… ….…….……64

V.2. Procédure de calcul……..……..…64

V.3. Estimation de la taille de la zone plastique……...……..…65

Chapitre VI

Résultats et interprétations

VI.1. Calcul des constantes effectives du matériau composite……..….68

VI.2.. Calcul du facteur d' intensité de contrainte K …….……..71

VI.3. Influence de l'orientation des fibres sur le facteur d'intensité de Contrainte …...….74

VI.4. Propagation des fissures :…….76

4.1. Fissure au centre d'une plaque :…… …….77

4.2. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 ° en mode I.…….....78

4.3. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 ° chargement selon les axes X et Y……79

4.4. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 ° chargement selon l'axe Yet cisaillement XY :…….....80

Conclusion générale…….…...83

Références bibliographiques…….…..…….84

NOMENCLATURE

NOTATIONS :*

V : Fraction volumique du materiau composite.

V_f *: Fraction volumique de la fibre*

V_m *: Fraction volumique de la matrice*

E_f *: Module élastique de Young pour la fibre* en *GPa*

E_m *: Module élastique de Young pour la matrice* en *GPa*

v_f *: Coefficient de Poisson de la fibre.*

v_m *: Coefficient de Poisson de la matrice.*

μ_f *:* Module de cisaillement de la fibre en *GPa*

μ_m *:* Module de cisaillement de la matrice en *GPa*

E_c *: Module élastique de Young effectif pour le materiau composite* en *GPa*

. μ_c *:* Module de cisaillement effectif du materiau composite en *GPa*

v_c *: Coefficient de Poisson effectif du materiau composite.*

N : Nombre d'élément de la discrétisation

u_i : Champ de déplacement dans la direction *i*

u_i^* : Champ de déplacement auxiliaire

.*a* : Fissure initiale en *m*

D_i : Discontinuité de déplacement *i* en *m*

D_j : Discontinuité de déplacement dans la direction *j*

D_x : Discontinuité de déplacement *x* en *m*

D_y : Discontinuité de déplacement *y* en *m*

μ *:* Module de cisaillement en *MPa*

^{i}x : Orientation de l'élément *i* suivant l'axe des *x* dans un repère global

^{i}y : Orientation de l'élément *i* suivant l'axe des *y* dans un repère global

$^{i}\beta$: Angle d'orientation de l'élément *i* suivant le repère local

$^{j}\beta$: Angle d'orientation de l'élément *j* suivant le repère local

σ_n^i : Contrainte normale de l'élément *i* en *MPa*

$A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$: Sont les coefficients d'influence relatifs aux contraintes sur la frontière

$B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$: Sont les coefficients d'influence relatifs aux déplacements sur la frontière

σ : Contrainte en *MPa*

σ_{ij} : Champ de contrainte en *MPa*

F_j : Les composants des forces de volume

$\overrightarrow{F^*}$: Charges concentrés unitaire

λ_1 : Exposant du champ de contrainte singulier en tête d'une fissure

λ_2 : Exposant du champ de contrainte singulier en tête d'une fissure

T (M.n) : Vecteur contrainte agissant au point *M* présentant une normale *n*

Γ: Contour

u : Est le champ de déplacement

F_i^* : Force de volume

D^- : Domaine intérieur

D^+ : Domaine extérieur

f_{ij}^a : Fonction

*K*1 : Facteur d'intensité de contrainte Mode I (Approche locale) en $MPa\sqrt{m}$

*K*2 : Facteur d'intensité de contrainte Mode II (Approche locale) en $MPa\sqrt{m}$

*K*3 : Facteur d'intensité de contrainte Mode III (Approche locale) en $MPa\sqrt{m}$

[U_i] : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction *i* en *m*

[U_x] : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction *x* en *m*

[U_y] : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction *y* en *m*

[U_z] : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction *z* en *m*

.*r* : Rayon au voisinage de la tête de fissure en *m*

G : Taux de restitution d'énergie *MPa* en *m*

γ : Energie de surface

w_p : Energie potentielle

ϕ_{ext} : Le travail des forces extérieures

W_e : L'énergie de déformation élastique du système

F : Force extérieure

P : Force imposée en N

$\overrightarrow{.u}$: Vecteur de déplacement

.*dS* : Surface correspondant au travail extérieur

KI : Facteur d'intensité de contrainte Mode I en $MPa\sqrt{m}$

KII : Facteur d'intensité de contrainte Mode II en $MPa\sqrt{m}$

KIII : Facteur d'intensité de contrainte Mode III en $MPa\sqrt{m}$

K_i : Facteur d'intensité de contrainte en *i* Mode en $MPa\sqrt{m}$

θ_c : Angle d orientation des fibres en degré

.β :angle d orientation de la fissure.

.κ: Constante élastique sans unité

ψ : Taux de mode sans unité

$R_{(KII,KI)}$: Rapport de KII sur KI

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte circonférentielle en *MPa*

Introduction générale

Dans le monde de l'industrie mécanique, le choix du type et du mode d'élaboration des matériaux usuels est conditionné par le domaine d'utilisation, les moyens de mise en forme et le prix de revient. Parfois, la réponse aux exigences de fonctionnalités rend la tâche plus complexe dans le sens où certains types de sollicitations exigent des dimensions trop importantes, un coût très élevé ainsi que des difficultés de façonnage. Ceci a poussé les chercheurs à l'élaboration d'un type de matériaux répondant à tous ces défis : **Les matériaux composites**. Ces derniers s'inscrivent dans la catégorie des matériaux modernes ayant révolutionné le monde industriel.

Un matériau composite (comme son nom l'indique) est composé de plusieurs constituants dont l'objectif est d'améliorer ses qualités mécaniques, thermiques et diélectriques. Il est essentiellement caractérisé par son gain de masse (encombrement réduit), sa grande performance, sa très bonne tenue en fatigue et son insensibilité à la corrosion. Ces caractéristiques lui ouvrent la possibilité d'utilisation dans tous les domaines : structure mécanique, navale, nucléaire, industrie automobile et médicale.



Fig .1.Structures dans différents domaines utilisant des pièces en composite

Toutefois, cette catégorie de matériaux n'échappe pas aux défauts d'élaboration, de mise en forme et de naissance de fissure suite à des charges cycliques. Ceci provoque un endommagement par propagation, par rupture d'interface fibre-matrice (délaminage) ou par rupture inter-laminaire des stratifiés.

Parfois, la fissuration dans les matériaux composites est un phénomène à conséquence très grave ; sa maîtrise constitue un grand défit scientifique. Dans certaines domaines de l'industrie, en particulier l'aéronautique, le nucléaire et l'aérospatiale, on exige des caractéristiques plus élevées afin d'écarter la probabilité de rupture brutale et coûteuse. En effet, sous certaines conditions de sollicitations, un défaut, même de la taille d'un grain, peut générer une catastrophe. Ceci étant, il ne faut pas mettre systématiquement hors d'usage toute structure présentant ce défaut ; il faut faire un calcul préventif d'endommagement.

L'objectif de cette étude est d'analyser un matériau composite fissuré. Nous avons choisi le composite à fibres longues unidirectionnelles qui est le plus répandu et qui constitue un élément de base. Il s'agit de suivre l'évolution de la fissure à partir d'une taille initiale sous l'effet d'un chargement cyclique à amplitude constante jusqu'à la taille critique et ainsi connaître la durée de vie.

Nous allons procéder par une simulation numérique pour connaître les contraintes et les déplacements en tout point du domaine et particulièrement sur la frontière de la fissure.

La méthode des éléments finis qui se présente comme étant un outil de base pour le calcul numérique dans la mécanique des solides approuve certaines difficultés dans ce genre de situation :

- Discrétisation de tout le domaine de la structure.
- Temps et moyens de calcul énormes.
- Choix de l'élément de modélisation qui s'adapte pour certains cas et par pour d'autres.

Nous avons donc décidé de simuler la propagation des fissures par la méthode des équations intégrales de frontière. Le modèle choisi est celui de la discontinuité des déplacements (MDD) qui s'adapte convenablement pour les structures présentant des discontinuités géométriques (fissures dans notre cas).

La mécanique linéaire élastique de la rupture est utilisée pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte K et du taux de restitution d'énergie G. Ensuite, nous déterminons l'angle et le chemin de fissuration ce qui permet de prédire la durée de vie, le nombre de cycle durant la propagation lorsque la taille de la fissure atteint sa valeur critique.

- Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique et des généralités sur les matériaux composites avec quelques définitions de base.

- Le chapitre deux est consacré à la définition des lois non exhaustives de comportement du matériau composite ainsi qu'à la technique d'homogénéisation.

- Dans le chapitre trois, nous présentons quelques rappels sur la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) et des notions de base sur le phénomène de fatigue. Nous allons expliquer les lois et les modèles décrivant la propagation des fissures ainsi que les critères permettant de déterminer le chemin de propagation.

- Le chapitre quatre est réservé à la présentation de la méthode des équations intégrales de frontière, de la discontinuité de déplacement et son adaptation aux structures fissurées.

- Le chapitre cinq décrit la procédure numérique de calcul et les démarches de simulation.

- Le chapitre six contient les résultats et les interprétations pour différentes applications concernant des structures avec fissures et chargements combinés faisant apparaître le mode couplé (modes un et deux). L'étude sera menée pour différentes orientations des fibres.

Enfin, nous terminons notre étude par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I . Notions fondamentales sur les matériaux composites

I.1. Définition :

On définit un matériau composite comme étant un assemblage intime de deux ou plusieurs corps non miscibles de natures différentes se complétant et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène dont les performances sont supérieures à celles de ses composants pris séparément [1].

I. 2. Caractéristiques générales

Un matériau composite est constitué d'une phase continue appelée **matrice** (liant) et d'une ou plusieurs phases discontinues appelées **renfort** ou fibre, généralement plus dure et confie au matériau des propriétés mécaniques élevées.

Dans le cas de plusieurs phases discontinues le composite est appelé **hybride**.

En plus de ces deux constituants de base, il faut ajouter une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice et transmet les contraintes de l'un à autre. Des produits chimiques entrent dans la composition mais n'interviennent pas dans le calcul des structures composites [1].

Les propriétés des matériaux composites résultent des :

- Propriétés des matériaux constituants,
- De leur distribution géométrique,
- De leur interaction.

Ainsi pour procéder à la description du matériau composite il est nécessaire de spécifier :

- La nature des constituants et leurs propriétés,
-La géométrie du renfort et sa distribution
- La nature de l'interface renfort-matrice.

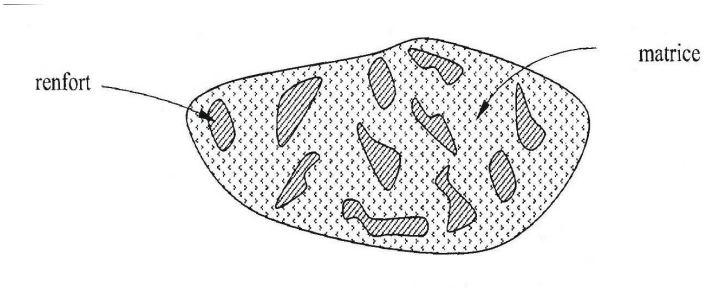


Fig. I.1 Matériau composite [1].

I.2. Classification des matériaux composites

Les matériaux composites sont classés suivant la forme ou la nature de leurs constituants on distingue :

I.2 .1 Classification selon la forme des constituants :

En fonction de la forme des constituants, on distingue deux grandes classes :

I.2.1.1 Composites à fibres :

Se sont des composites dont le renfort se trouve sous forme de fibres continues ou discontinues.

Leur orientation affecte considérablement les propriétés mécaniques du matériau.

I.2.1.2 Composites à particules :

On appelle composite à particule, le matériau dont le renfort se trouve sous forme de particules. Ces dernières sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés mécaniques du matériau ou de la matrice telles que la rigidité et la tenue à la température.

Dans la plus part des cas, les particules (charges) sont simplement utilisées pour réduire le cout du matériau sans toucher aux caractéristiques [1]. .

I.2 .2 Classification selon la nature des constituants :

Ces matériaux sont classés selon la nature de la matrice et le type de renfort qui lui convient, on trouve :

I.2 .2.1 Composite à matrice organique avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, …
- des fibres organique : kevlar, polyamide, …
- des fibres métalliques : bore, aluminium,…

I.2 .2.2 Composite à matrice métallique

Se sont des alliages légers et ultra légers d'aluminium de magnésium, de titane :

- des fibres minérales : carbone carbure de silicium.
- des fibres métalliques : bore.
- des fibres métallo-minérales : fibre de bore de carbone de silicium

I.2 .2.3 Composite à matrice minérale (céramique) avec :

- des fibres métallique : bore
- des particules métalliques : cermet
- des particules minérales carbures nitrures …

I.3. Constituants fondamentaux d'un matériau composite.

Un matériau composite, pris en sens adopté dans cette étude, est constitué d'une matrice continue et renforcée par des fibres. Ces fibres résistantes sont, en général, noyées dans une matrice. Cette dernière assure d'une part le maintient de la forme du renfort et d'autre part, la cohésion de l'ensemble [2].

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de maintenir les fibres en place, leur transmettre les sollicitations mécaniques extérieures et de les protéger vis-à-vis des agressions extérieures.

La combinaison fibre-résine aboutit tout naturellement à un matériau ayant une bonne résistance mécanique, une grande rigidité et une bonne résistance chimique [2,3].

I.3. 1. Matrice (Liant)

La matrice d'un composite est constituée de résine et de charge. L'ensemble résine-charge considéré comme matériau homogène appelé matrice [1].

Les résines utilisées dans le composite ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et les protéger des agressions du milieu extérieur tout en assurant la rigidité et la cohésion du matériau.

Elles doivent être assez déformables et doivent présenter une bonne compatibilité avec les fibres et une masse volumique faible de manière à conserver les propriétés mécaniques élevées du matériau.

On distingue plusieurs types de matrices.

I.3. 1. 1. Matrices organiques :

Se sont des résines à base organique telle que : polyester, époxyde, phénolique, silicone, élastomère, caoutchouc et elles existent en différentes catégories, on trouve principalement :

I.3. 1. 1.1 -Résines thermodurcissables :

Polymère transformé en un produit infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation), ou physico-chimique (catalyse durcisseur) [3].

Leur mise en œuvre se fait par réaction ; les composants de base peuvent être liquides, en poudre ou en pate. On trouve :

- Les résines polyesters, insaturées, condensés, vinylesers.

- Les résines de condensation : phénoliques, aminoplaste.

- Les résines époxydes.

I.3. 1. 1.2. Résine thermoplastique :

Se sont des polymères pouvant être alternativement ramollis par chauffage et durcis par refroidissement. Cet aspect de déformabilité permet la récupération facile et le recyclage rapide. On trouve :

- Le polychlorure de vinyle(PVC) ;

- Le polyéthylène ;

- Le polypropylène ;

-le polystyrène.

I.3. 1. 1.3. Résine thermostable :

C'est un polymère représentant des caractéristiques mécaniques stables sous pressions et températures élevées (> 200°). Cette période est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 200 h sans perdre ses caractéristiques mécaniques [3].

Quelques caractéristiques mécaniques des résines :

Résines	**nom**	**ρ (kg/m^3)**	**E(MPa)**	***v***	**R(MPa)**	**Prix(F/kg)**
	Polyester	1300	3800	0.37	88	15
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	18
TD	Epoxide	1220	5200	0.38	121	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	200
	Polyimide	1217	3450	0.35	80	150
	Phénolique	1350	3000	0.36	70	10
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	25
TP	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	30
	Polyester saturé	1310	2800	0.33	55	
Métaux	Aluminium	2630	69000	0.33	358	13
	AcierXC10	7850	210000	0.29	1000	10
	Cuivre	8940	119000	0.30	350	11
	Magnésium	1660	4200	0.30	280	27

Tableau I.1. Caractéristiques mécaniques des résines

Avec :

ρ (kg/m^3): Masse volumique

E(MPa) : Module d'Young

v: Coefficient de Poisson

Chapitre II.

Lois de comportement des matériaux composites

II. Lois de comportement d'un matériau composite:

L'analyse du phénomène de propagation de fissure dans les matériaux composites passe inévitablement par l'illustration des lois de comportement et la définition des équations constitutives permettant d'étudier les contraintes et les déformations en tout point du domaine particulièrement au niveau des discontinuités géométriques (fissure dans notre cas). Ce qui permet d'appliquer la mécanique linéaire de la rupture et les lois de propagation des fissures.

Le matériau composite constitue un domaine très complexe pour cette analyse de part la forme variée des renforts (fibre ou particule), empilement des couches et leur nature variée.

L'analyse de base de la loi de comportement du composite revient à étudier un pli (plaque de composite à fibre unidirectionnelle à orientation quelconque) (figure. II).

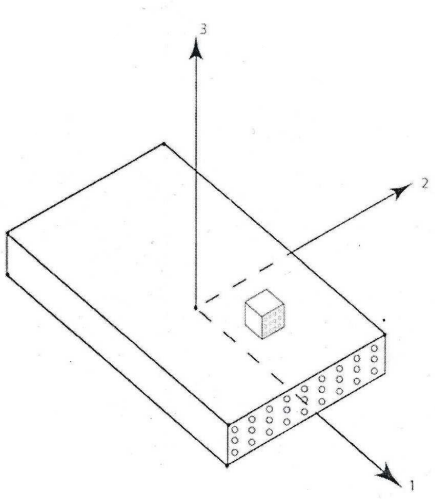


Fig. II.1

II.1 Equations constitutives d'un pli :

On considère un élément cubique d'un pli (matrice renfort), les axes 1 2 3 constituent le repère local orthogonal du pli tel que :

1- Axe dans la même direction de la fibre.

2, 3- Axe perpendiculaire au plan du pli et perpendiculaire à la fibre.

Appellation : Axe 1 : direction de la fibre**.**

Axes 2 et 3: direction de la matrice, ou direction transverse.

L'élément cubique est considéré élastique ; la loi d'élasticité pour un milieu continue est :

$$\sigma = \frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon ij} = C_{ijkl}.\varepsilon ij \ . \qquad (2.1)$$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2}\ c_{ij}.\varepsilon_{ij}.\varepsilon_{kl} \quad \text{(forme quadratique)} \qquad (2.2)$$

Où $w(\varepsilon)$: *potentiel élastique*

$\sigma = k\varepsilon(epsilon)$: Loi de Hook

La première analyse des contraintes et déplacements du pli considère l'élément cubique où le matériau fibre-matrice est considéré comme matériau élastique homogène .

Mais ce matériau élastique n'a pas les mêmes caractéristiques dans les trois directions donc c'est un matériau orthotrope.

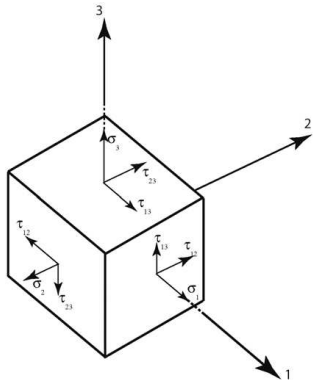


Fig. II.2

σ_1 , σ_2, σ_3 : Contraintes normales.

τ_1, τ_2, τ_3 : Contraintes tangentielles.

ε_1, ε_2, ε_3 : Déplacements normaux.

$\gamma 12$, $\gamma 23$, $\gamma 13$: Déplacements tangentiels.

La relation contrainte déplacement pour un milieu élastique orthotrope s'écrit :

$\{\varepsilon\} = [s].\{\sigma\}.$ $[S]$: matrice de souplesse (2.3)

En forme développée :

$$\boldsymbol{\varepsilon_{ij}} = \boldsymbol{S_{ijkl}}.\boldsymbol{\sigma_{kl}} \quad (2.4)$$

Symétrie de contrainte : $\boldsymbol{\sigma_{kl}} = \boldsymbol{\sigma_{lk}}$ et $\boldsymbol{S_{ijkl}} = \boldsymbol{S_{ijlk}}$

Symétrie de déformation : $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}} = \boldsymbol{\varepsilon_{ji}}$

En écriture matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1211} & S_{2222} & S_{2333} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1311} & S_{2322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1311} & 2S_{1322} & 2S_{1333} & 4S_{1323} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1223} & 4S_{1213} & 4S_{1212} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu 21}{E_2} & \frac{-\nu 31}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu 31}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu 32}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu 13}{E_1} & \frac{-\nu 23}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$E_1, E_2\ E_3$, modules d'élasticité dans les trois directions

v_{ij} : Coefficients de poisson

G_{12}, G_{13}, G_{23} : modules de cisaillement

Ainsi nous avons :

$\{\varepsilon\}$=[s]. $\{\sigma\}$: Forme compacte.

Pour l'écriture inverse, on a :

$$\{\sigma\} = [c].\{\varepsilon\} \qquad [C] = \text{inverse}[s]$$

[C]appelée matrice de rigidité.

Forme développée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.7)$$

[C]=inv[S]

On peut écrire :

$$C_{11}=\frac{1}{S}(S_{22}.S_{33} - S_{23}.S_{23}) \qquad C_{23}=\frac{1}{S}(S_{12}.S_{13} - S_{23}.S_{11})$$

$$C_{12}=\frac{1}{S}(S_{13}.S_{23} - S_{12}.S_{33}) \qquad C_{44}=\frac{1}{s_{44}}$$

$$C_{22}=\frac{1}{S}(S_{33}.S_{11} - S_{13}.S_{13}) \qquad C_{55}=\frac{1}{s_{55}} \qquad (2.8)$$

$$C_{13}=\frac{1}{S}(S_{12}.S_{23} - S_{13}.S_{22}) \qquad C_{66}=\frac{1}{s_{66}} \qquad C_{33}=\frac{1}{S}(S_{11}.S_{22} - S_{12}.S_{12})$$

Le pli est considéré comme élément orthotrope.

La matrice [C] est symétrique, donc on a :

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \qquad (2.8)$$

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2}$$

$$\frac{v_{23}}{E_2} = \frac{v_{32}}{E_2}$$

Un matériau est dit isotrope transverse si les caractéristiques dans l'axe 2 et 3 sont identiques.

Dans ce cas, on a : $E_2 = E_3$ et $v_{12} = v_{13}$ et $G_{12} = G_{13}$

$$G_{23} / \frac{E_2}{2(1+v_{23})}$$

Un matériau est dit isotrope si les caractéristiques dans l'axe 1,2 et 3 sont identiques.

$E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\quad v_{12} = v_{23} = v_{13} = v$ $\quad G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$

II.2.Etude élastique d'un pli en contrainte plane :

L'hypothèse de contrainte plane est la plus utilisée pour l'analyse d'un pli (considéré comme un élément plan de faible épaisseur).

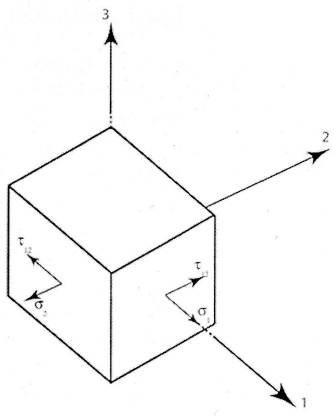


Fig.II.3 Contrainte plane

$$\begin{cases} \sigma_3=\tau_{23}=\tau_{12}=0 \\ v_{23}=0 \\ v_{13}=0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_3=s_{13}\sigma_1+s_{23}\sigma_2 \neq 0$$

Aussi la relation $\varepsilon \int f(\sigma)$ devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

$$[S]= \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-v21}{E_2} & 0 \\ \frac{-v21}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

$\sigma f(\varepsilon)$s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

$$C_{11}=\frac{s_{22}}{s_{11}s_{22}-s_{12}^2}=\frac{E_1}{1-v_{12}v_{21}}$$

$$C_{12}=\frac{s_{12}}{s_{11}s_{22}-s_{12}^2}=\frac{v_{12}E_2}{1-v_{12}v_{21}}$$

$$C_{22}=\frac{s_{11}}{s_{11}s_{22}-s_{12}^2}=\frac{E_2}{1-v_{12}v_{21}}$$

$$C_{66}=\frac{1}{s_{66}}=G12$$

II.3.Loi du mélange :

Précédemment, nous avons défini la relation contrainte déplacement pour un élément de pli (composite unidirectionnel) infinitésimal élastique dans un **repère local orthotrope**.

Ce qui a permis d'identifier d'une part la matrice de souplesse [S] ou $\{\varepsilon_{ij}\}=[S_{ijkl}]\{\sigma_{kl}\}$ d'une autre, la matrice [C]=inv [S] matrice de rigidité $\{\sigma_{ij}\}=[C_{ijkl}].\{\varepsilon_{kl}\}$.

Ce chapitre illustre l'étude élastique d'un pli (composite unidirectionnel U.D) et calcule les constantes élastiques tenant compte du taux du mélange Fibre - Matrice.

1°)-On suppose que

1- la matrice et les fibres sont linéaires élastiques.

2- Les fibres sont infiniment longues.

3- Espacement régulier des fibres.

Soit : V^f= fraction volumique de la fibre.

V^m= fraction volumique de la matrice.

Pour une unité de volume, on a :

$$\begin{cases} 0< V^f <1 & V^f+V^m=1 \\ 0< V^m <1 \end{cases}$$

Matrice supposée isotrope :

$E_1^m=E_2^m=E_3^m$ module élastique de Young longitudinale de la matrice.

$v_{12}=v^m$ coefficient de poisson de la matrice.

Fibre supposée isotrope transverse.

$$\begin{cases} E_3^f = E_2^f \\ v_{13}^f = v_{12}^f \\ v_{23}^f = v_{32}^f = v^f \end{cases}$$

-Direction longitudinale du pli (fibre longitudinale) :

On a : $E_1=E_1^f V^f+E^m V^m$ (2.12)

$v_{12}=v_{12}^f V^f+v^m V^m$ (2.13)

- Direction transversale

$$\frac{1}{E_2} = \frac{v^f}{E_2^f} + \frac{v^m}{E^m} \tag{2.14}$$

-Module de cisaillement:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{v^f}{G_{12}^f} + \frac{v^m}{G_m} \tag{2.15}$$

II.4. Loi de comportement élastique du pli dans un repère global :

Dans les chapitres précédents nous avons analysé le comportement élastique du pli dans son repère local.

En réalité un composite est composé de plis arbitrairement orientés (donc autant de repères locaux) ce qui rend la tâche difficile, pour cela on définit un repère global x, y, z où le pli du composite sera analysé dans ce dernier [4 ,5].

- Soit un élément infinitésimal du pli

- Orienté d'un angle θ dans le repère xyz.

La théorie de contrainte plane est plus commode pour le pli (considéré comme élément plan de faible épaisseur).

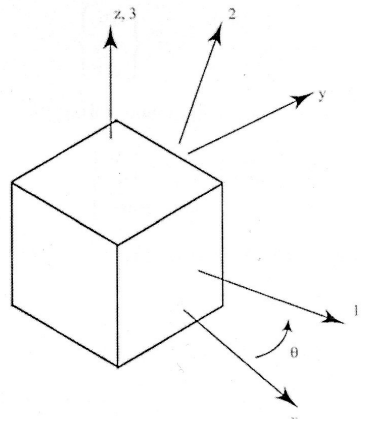


Fig.II.4 Repère globale orienté d'un angle θ .

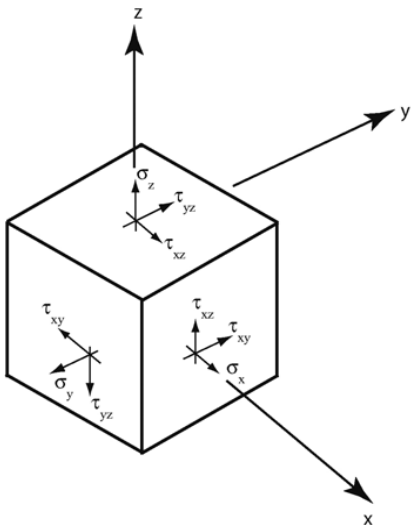


Fig. II.3 .Pli dans un repère global

En contrainte plane (la plus valide pour un U.D)

$\sigma_Z = \tau_{yz} = \tau_{xt} = 0$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.16)$$

[T] : matrice de passage.

Soit $m = cos\,\theta$ $n = sin\,\theta$

La matrice [T] s'écrit :

$$[T] = \begin{pmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2-n^2 \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

$[T]^{-1}$: inverse de [T]

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ m & -mn & m^2-n^2 \end{pmatrix} \quad \text{(références, [4 ,5])} \qquad (2.18)$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \text{inv}[T] . \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.19)$$

De même pour les déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{XY} \end{Bmatrix} \qquad (2.20)$$

La même transformation

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \text{inv}[T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{(références [4 ,5])} \qquad (2.21)$$

La relation de formation dans le repère local $\varepsilon = f(\sigma)$ équation (2.9)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Et la relation $\sigma = f(\varepsilon)$, équation (2.10)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 0 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\varphi_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.22)$$

Dans le repère global les deux dernières relations deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S_{11}} & \overline{S_{12}} & \overline{S_{16}} \\ \overline{S_{12}} & \overline{S_{22}} & \overline{S_{26}} \\ \overline{S_{16}} & \overline{S_{26}} & \overline{S_{66}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.23)$$

Où la matrice souplesse transformée $[\overline{S}]$ est exprimée par

$$[\overline{S}] = [T]^{-1}.\,[S].\,[T].$$

De même pour les contraintes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (2.24)$$

Tel que : $[\overline{Q}]$ = transformée de la matrice de rigidité $[Q]$.

$$[Q] = [T]^{-1}.\,[Q].\,[T]. \qquad (2.25)$$

Ainsi $[\overline{Q}]=[\overline{S}]^{-1}$ $[\overline{S}]=[\overline{Q}]^{-1}$

II.4.1- Calcul des constantes élastiques dans le repère global (pour pli)

Moyennement la même logique de transformation :

$$E_x = \frac{E_1}{m^4 \ (\frac{E_1}{G_{12}} - 2\,\nu 12)\, n^2\, m^2 + \frac{E_1}{E_2}\, n^4} \tag{2.26}$$

$$E_y = \frac{E_2}{m^4 + (\frac{E_2}{G_{12}} - 2\,\nu_{12})\, n^2\, m^2 + \frac{E_2}{E_1}\, n^4} \tag{2 .27}$$

$$\nu_{xy} = \frac{\nu_{12}\,(n^2 + m^2) - (1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}})\, n^2 . m^2}{m^4 + (\frac{E_1}{G_{12}} - 2\,\nu 12)\, n^2\, m^2 + \frac{E_1}{E_2}\, n^2} \tag{2.28}$$

$$\nu_{yx} = \frac{\nu_{21}\,(n^2 + m^2) - (1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{E_2}{G_{12}})\, n^2 . m^2}{m^4 + (\frac{E_2}{G_{12}} - 2\,\nu_{21})\, n^2\, m^2 + \frac{E_2}{E_1}\, n^2} \tag{2.29}$$

$$G_{xy} = \frac{G_{12}}{n^4 + m^4 + 2(\frac{2G_{12}}{E_2}\,(1 + 2\,\nu_{21}) + \frac{2G_{12}}{E_2} - 1)\, n^2 m^2} \tag{2.30}$$

Par la même analogie, on définit les coefficients d'influence du premier et quatrième ordre :

Influence 2eme ordre $\eta_{xy,x} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x}$ (2.31)

$$\eta_{xy,y} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y} \tag{2.32}$$

D'une manière explicite

$$\eta_{xy,x} = \frac{\overline{S_{16}}}{\overline{S_{11}}} \quad (2.33)$$

$$\eta_{xy,y} = \frac{\overline{S_{16}}}{\overline{S_{11}}} \quad (2.34)$$

Les coefficients du premier ordre s'écrivent :

$$\eta_{xy,x} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \quad (2.35)$$

$$\eta_{yx,y} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \quad (2.36)$$

On peut écrire également :

$$\eta_{xy,x} = \frac{\overline{S_{16}}}{\overline{S_{66}}} \quad (2.37)$$

$$\eta_{yx,y} = \frac{\overline{S_{26}}}{\overline{S_{66}}} \quad (2.38)$$

Ainsi le comportement élastique d'un pli est clairement défini dans un repère global et les coefficients élastiques sont définit.

La variation de l'angle $\boldsymbol{\theta}$**.** Orientation de la fibre du composite est d'une grande influence sur ces modules. On illustre dans le chapitre résultats l'influence sur chaque module élastique ce qui permet de générer une forme plus ample quant au choix adéquat de cette orientation pour une sollicitation du composite quelconque.

II.5. Calcul de l'homogénéisation du pli.

Nous avons indiqué que l'étude de la rupture et la propagation des fissures dans les matériaux composites passe inévitablement par la théorie de la mécanique linéaire élastique (M.L.E.R) qui est formulée avec l'hypothèse d'un matériau homogène isotrope ; or le composite est en réalité hétérogène orthotrope, pour cela plusieurs théories font l'objet d'une approche d'homogénéisation pour lui donner une formulation isotrope et contourner les problèmes liés aux hétérogénéités.

L'application du concept d'homogénéisation consiste à chercher un milieu homogène équivalent isotrope et chercher ses propriétés élastiques et mécaniques en fonction de ses constituants ; fibre et matrice.

Les approches théoriques :

a. Modèle série et parallèle :

Ces modèles sont connus sous le nom de ‘’*loi de mélange*’’. Ces expressions données par les équations (2.12), (2.14) permettent le calcul des quatre modules du composite, E_L, E_T, E_{LT}, G_{LT} (module élastique longitudinal et transversal) et de ν_{LT}(coefficient de Poisson) [6].

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.39)$$

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (2.40)$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (2.41)$$

$$E_T = \frac{E_m E_f}{E_m V_f + G_f V_m} \quad (2.42)$$

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{G_m V_f + G_f V_m} \quad (2.43)$$

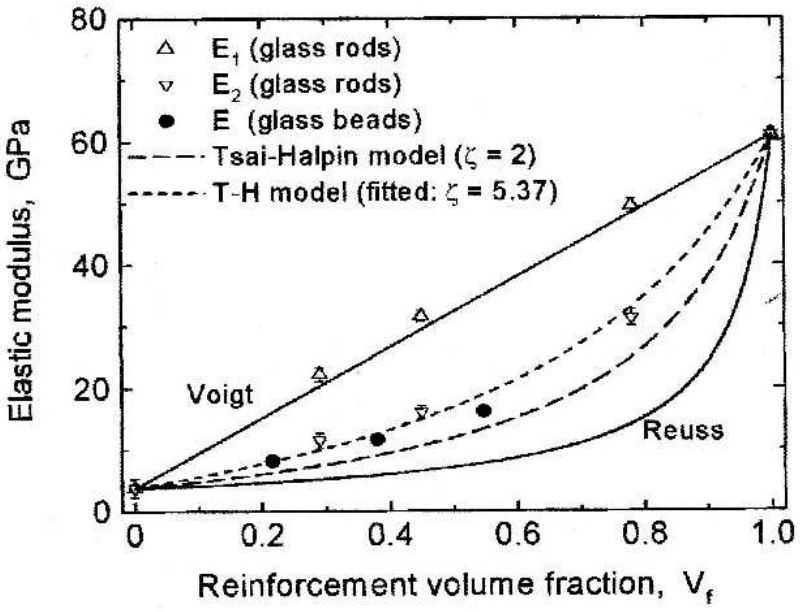


Fig. II.4 Courbe de Voigt et Reuss représentant le module de Young en fonction de la fraction volumique Vf [6].

En ce qui concerne les modules, ils représentent respectivement, la borne supérieure de **Voigt** (1889) (associations des deux constituants mis en parallèle, avec le compromis de la continuité de la déformation) et la borne inférieure de **Reuss** (1929) (associations des deux constituants mis en série).

b . Modèle d'Halpin-Tsai *:*

Il fait partie des modèles semi empiriques. Il est bien adapté au composite renforcé par des fibres courtes alignées. Les modules sont déterminés par les équations (2.44), (2.45) (référence [1]).

-*M*c correspond aux modules du composite : E_T, G_L, ou v_{TL}

- M_f correspond aux modules des fibres : E_f, G_f ou v_f

- M_m correspond aux modules de matrice : M_m, G_m ou v_m

$$Mc = M_m \left(\frac{1+\xi\,\eta\,v_f}{1-\eta\,v_f} \right) \qquad (2.44)$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1+\xi\,\eta\,v_f}{1-\eta\,v_f} \right) \qquad (2.45)$$

Avec :

$$\eta = \frac{\frac{M_f}{M_m}-1}{\frac{M_f}{M_m}+\xi} \quad , \quad \eta' = \frac{\frac{\sigma_f}{\sigma_m}-1}{\frac{\sigma_f}{\sigma_m}+\xi}$$

ξest un facteur dépendant de la forme de la fibre, d*a* la distribution des fibres et de la fraction volumique de celles ci. Par contre, les termes, η' dépendent du module de la résistance relative de la fibre de la matrice.

A partir des équations d'Halpin-Tsai, une estimation du module d'un composite renforcé par des fibres courtes à distribution aléatoire dans un plan ou dans un volume est possible à l'aide de l'approche de Tsai-Pagano basée sur la théorie de l'élastique orthotrope.

La génération de l'approche de Tsai-Pagano est une approche sur un composite quasi-isotrope traité dans le plan comme s'il était un stratifié composé des plis unidirectionnels à angles définis avec le respect de la symétrie matérielle. Pour chaque couche du stratifié le module est calculé par l'approche de Tsai-Pagano. Cette approche est donnée par Halpin-Kardos

c- Modèle Tsai-Pagano

Son expression est donnée par l'équation.

$$E_c = \frac{3}{8} E_l + \frac{5}{8} E_l \qquad (2.46)$$

d. Modèle d'Halpin-Tsai modifié :

La modification sur le modèle d'Halpin-Tsai est réalisée à l'aide d'un terme multiplicateur φ fonction de ϕ_{max} (type d'arrangement des renforts). Les expressions sont données par les équations (2.47) et (2.48).

$$Mc = M_m \left(\frac{1+\xi\ \eta\ V_f}{1-\eta\ \varphi\ V_f} \right) \quad (2.47)$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1+\xi\ \eta'\ V_f}{1-\eta'\ \varphi\ V_f} \right) \quad (2.48)$$

$$\varphi = 1+\left(\frac{1-\phi_{max}}{\phi^2_{max}} \right) V_f \quad (2.49)$$

$$\xi = 2l/d$$

ξ , dépend du facteur de forme *l/d* (*l* et *d* désignent respectivement la longueur et le diamètre de la fibre). Ce modèle est applicable sur les composites renforcés par de fibres courtes.

e- Modèle de Hirsch :

Ce modèle est défini pour approcher les valeurs de Voigt et Reuss.

$$M_c = \cos\theta\ .\ [\ M_f\ .\ V_f + M_m\ .\ V_m\ ] + (1-\cos\theta).\ \frac{M_f.M_m}{M_m.V_f+M_f.V_m} \quad (2.50)$$

f. **Modèle de Cox :**

$$M_c\ /\ M_f\ V_f \quad 1\text{›}\ \frac{\tanh \beta l/2}{\beta l/2} \quad \rightharpoonup\ M_m\ \ V_m \quad (2.51)$$

$$\sigma_c\ /\ \sigma_f\ \sigma_f \quad 1\text{›}\ \frac{\tanh \beta l/2}{\beta l/2} \quad \rightharpoonup\ \sigma_m\ \ \sigma_m \quad (2.52)$$

$$\beta\ /\left(\frac{2\pi G_m}{M_f\ A_f\ \ln\left(\frac{R}{2}\right)}\right)^{1/2} \quad (2.53)$$

.r : Rayon de la fibre

R : Distance entre les fibres centre à centre

A_f : Aire de la fibre

$$G_{TH} = G_m \left(1+\frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f-G_m}+\frac{K_m+7G_{m/2}}{2K_m+8G_{m/2}}(1-V_f)}\right) \quad (2.54)$$

Chapitre III
Mécanique linéaire de la rupture

Chapitre III. Mécanique linéaire de la rupture :

III. 1.Introduction :

Le dimensionnement et le calcul des pièces et des structures consistent à déterminer leurs limites de fonctionnement et ne pas dépasser leurs capacités de résistances. Cette étude est fondée sur la théorie d'élasticité et la résistance des matériaux avec l'hypothèse d'un milieu élastique homogène et isotrope.

Mais on observe souvent des ruptures brutales à conséquences graves à cause de l'existence des défauts (vide ou fissure), cependant les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent pas prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tous défaut d'ou le développement de la mécanique de la rupture définit comme étant la science étudiant les structures avec ses défauts. Elle est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique appelée fissure crée par endommagement sous l'effet d'une sollicitation ou par défaut d'élaboration lors de la mise en forme. Elle permet également de contrôler l'évolution de la fissure, analyser l'état de contrainte et prévoir la rupture ceci par l'introduction de deux approches qualifiées de globales et locales [8,9,11].

III.2.Approche globale :

Formulée PAR Griffith (1920) pour les matériaux fragiles et généralisée par Lemaitre et Chaboche en 1970 [10] consiste à calculer le taux de l'énergie restituée « G » au cours d'une fissuration fictive de longueur da et il y aurait rupture lorsque G $\geq$ Gc, ou Gc valeur critique caractéristique du matériau.

11.2. 1-Formulation: (Théorie de Griffith) :

Basée sur le principe de conservation de l'énergie totale.

Soit un solide élastique:

$$W_{tot} = W_{élast} + W_{ext} + W_{a.} + W_{cin} \qquad (3\text{-}1)$$

$W_{élast}$: énergie élastique.

W_{ext} : travail des forces extérieures

W_A= énergie dissipée pour séparer deux surfaces

$W_A = 2.\gamma.S$

γ: tension superficielle

W_{cin} : énergie cinétique.
Principe de conservation de l'énergie totale:

$$dW_{tot=} dW_{élast} + dW_A + dW_A + dW_{cin} = 0 \quad (3\text{-}2)$$

$$\partial W_{cin} = -(\partial W_{élast+} \partial W_{ext+} \partial W_A). \quad (3\text{-}3)$$

La propagation n'est possible que si $W_{cin} \geq 0$

$$\partial W_{élast} + \partial W_{ext} + \partial W_A \leq O$$

$$W_A = 2\ \gamma\ A$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(W_{élast} + W_{ext}) + 2.\gamma \leq 0 \quad (3\text{-}4)$$

On définit **le taux de l'énergie restituée** au cours d'une propagation d*a* par :

$$G = -\frac{\partial}{\partial a}(W_{élast} + W_{ext}) \quad (3\text{-}5)$$

$$-G + 2\ \gamma \leq O$$

Soit : $G \geq 2\ \gamma$ (3-6)

$G < 2.\gamma$ pas de propagation ($w_{cin} < 0$)

$G = 2.\gamma$ début de propagation.

$G > 2.\gamma$ propagation instable.

11.2. 2.Formulation intégrale :

Consiste à écrire le taux de restitution d'énergie en fonction du champ de contrainte et de déplacement sur les frontières du domaine fissuré.

Milieu plan:

On considère un domaine Ω présentant une discontinuité de taille *a* : $\partial\Omega$ frontière du domaine extérieur.

$\xi^+ \cup \xi^-$ Frontière de la fissure

$\partial\Omega$ frontière du domaine

U_i Déplacement

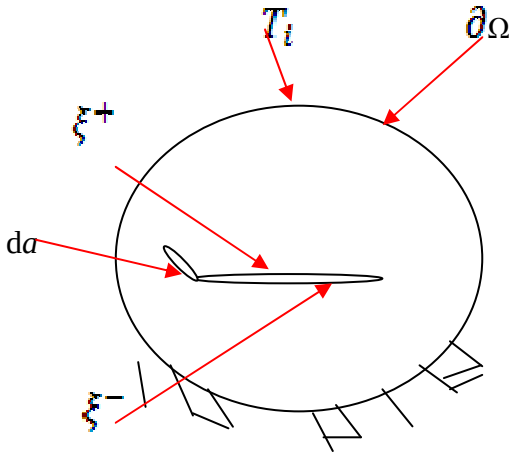


Fig.III.1

$$G = -\frac{\partial}{\partial a}(W_{élast} + W_{ext})$$

pour un solide élastique linéaire

$$W_{élast} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma ij \, \varepsilon ij \, d\Omega \qquad (3\text{-}7)$$

$$W_{ext} = -\int_{\partial\Omega \cup \xi^+ \cup \xi^-} Ti \frac{dUi}{dA} d\xi \qquad (3\text{-}8)$$

Le théorème de ***GREEN-STOKS*** permet de transformer intégrale de surface en intégrale curviligne.

$$\frac{1}{2} \int_{d\Omega} \sigma ij \, \varepsilon ij \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left(Ti \frac{dUi}{dA} + Ui \frac{dTi}{dA} \right) d\Gamma \qquad (3\text{-}9)$$

L'équation (2-4) devient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \cup \xi^+ \cup \xi^-} \left(Ti \frac{dUi}{dA} + Ui \frac{dTi}{dA} \right) dT \qquad (3\text{-}10)$$

L'expression précédente permet le calcul de G connaissant les champs de sollicitations sur les contours extérieurs et permet aussi de le déterminer expérimentalement.

III.3.Approche locale (en termes d'intensité de contrainte) :

La deuxième approche permet d'étudier l'état de contrainte dans la zone proche de l'extrémité de la fissure pour un matériau soumis à un champ de contrainte axiale [11].

Les premiers travaux dans ce domaine ont été élaborés par Irwin [8.11]. Il a introduit un facteur qui permet de décrire le champ de contrainte singulier au voisinage de la discontinuité (fissure) selon les principaux modes de fissuration et qui est formulé de la même façon.

III.3.1.Principaux mode de fissuration

a. Mode I : Mode ouverture ou le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure

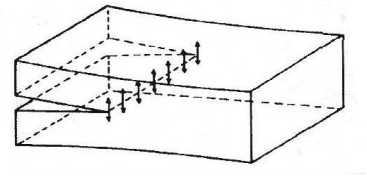


Fig.III.2

$[U_1]=0$

$[U_2] \neq 0$

$[U_3]=0$

b. Mode II : Mode de cisaillement plan

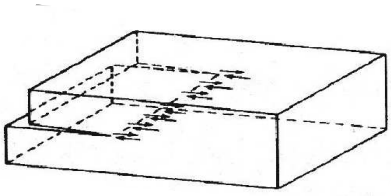


Fig.III.3

. $[U_1] \neq 0$

$[U_2] =0$

$[U_3]=0$.

c. Mode III :Mode de cisaillement transversal (anti plan)

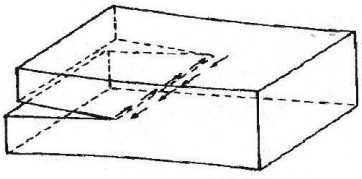


Fig.III.4

. $[U_1] =0$

$[U_2]=0$ $[U_3] \neq 0$

III.3.2. Formulation :

L'approche locale est formulée (par IRWINE) en considérant un milieu élastique linéaire présentant une fissure de taille primaire « a » sous un chargement σ [8, 9,11].

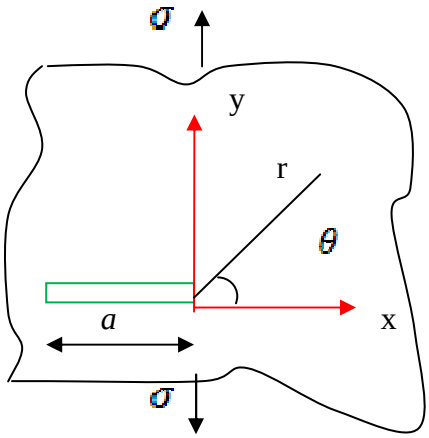


Fig.III.5

Les contraintes au voisinage de la fissure sont exprimées par [8.11] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \qquad (3\text{-}11)$$

Les déplacements au voisinage de la fissure sont exprimés par :

$$U_i = \text{K}.\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i\,(\theta) \qquad (3\text{-}12)$$

Le facteur d'intensité de contrainte K est :

$$K_I = \sigma.\sqrt{\pi a}.\text{f}.(\frac{a}{b}) \qquad (3\text{-}13)$$

En mode mixte :

$$K_I = \sigma.\sqrt{\pi a}.\text{f}.(\frac{a}{b})sin^2\beta \qquad (3\text{-}14)$$

$$K_{II} = \sigma.\sqrt{\pi a}.\text{f}.(\frac{a}{b})\sin\beta.\cos\beta \qquad (3\text{-}15)$$

Avec :

f(a/b) : facteur de forme dépendant de la géométrie et du mode de chargement.

g_i : Fonction décrivant le déplacement dans le milieu dépendant du mode de déformation

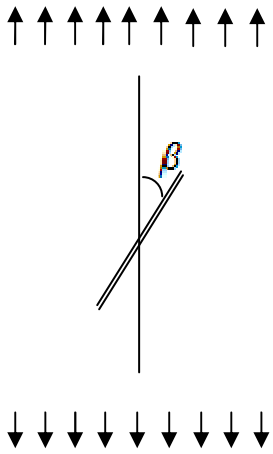


Fig.III.6

L'écriture du champ de contrainte et de déplacement au voisinage d'un front de fissure est donnée par les formules [8.11] :

Le champ de contrainte :

$$\sigma_{XX} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 - \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \quad (3\text{-}16)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}}\left[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \quad (3\text{-}\mathbf{17})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \quad (3\text{-}18)$$

Le champ de déplacement :

$$u_x = \frac{K_I}{G}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\ (\text{k-}\cos\theta)\right)$$

$$+\ \frac{K_{II}}{G}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\ (\text{k}+\cos\theta+2)\right) \qquad (3\text{-}19)$$

$$u_y = \frac{K_I}{G}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\ (\text{k-}\cos\theta)\right)$$

$$-\ \frac{K_{II}}{G}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\ (\text{k}+\cos\theta+2)\right) \qquad (3\text{-}20)$$

Avec: G : module de cisaillement

$k = 3 - 4\nu$ en contrainte plane

$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en déformation plane

Les facteurs d'intensité de contraintes mesurent la force de la singularité de contrainte. Nous pouvons interpréter ces facteurs en fonction des discontinuités:

$$D_y = U_Y(r, \pi) - U_y(r, -\pi) = 2K_I\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{k+1}{G} \qquad (3\text{-}21)$$

$$D_x = U_x(r, \pi) - U_x(r, -\pi) = 2K_{II}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{k+1}{G} \qquad (3\text{-}22)$$

En conclusion, les facteurs d'intensité de contrainte apparaissent comme des facteurs de discontinuité de déplacement, ainsi la méthode de discontinuité de déplacement constitue une meilleure approche de calcul numérique.

Facteurs d'intensité de contrainte

Il est possible de trouver le facteur d'intensité de contrainte pour le mode α par :

$$K_\alpha = \lim_{r\to\infty} \sqrt{2\pi r}\ \sigma_{tf}$$

Le facteur d'intensité de contrainte est couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Une autre alternative permet de calculer ces facteurs. Ces facteurs sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure.

$$K_I = \lim_{r\to 0}(\sigma_{yy}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8\,(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}[U_y]\right) \qquad (3\text{-}23)$$

$$K_{II} = \lim_{r\to 0}(\sigma_{yx}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8\,(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}[U_x]\right) \qquad (3\text{-}24)$$

$$K_{III} = \lim_{r\to 0}(\sigma_{yz}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8\,(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}[U_z]\right) \qquad (3\text{-}25)$$

[Ui] représente la discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction i.

Dans notre étude, c'est cette technique qui est utilisée pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

III.3.3. Relation entre K et G.

D'après la formulation d'IRWINE [12]. On définit la relation entre le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie par :

$$G = \frac{1}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \qquad \text{c.p} \qquad (3\text{-}26)$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \qquad \text{d.p} \qquad (3\text{-}27)$$

III.4. Propagation des fissures par fatigue:

Au cours de la sollicitation cyclique, les contraintes apparentes ne sont pas assez intenses pour provoquer la rupture de la pièce, en effet c'est l'application des cycles de sollicitation qui contribue à une modification structurale du matériau, par conséquent ses propriétés mécanique et physique, ainsi ce dernier perd localement ses capacités de résistances et là; les microfissures prennent naissances [9]. En vue d'une meilleure compréhension du phénomène, nous avons, jugé utile de présenter dans ce chapitre les modifications que subit le matériau en question.

III.4.1- Facteurs causant la fissuration :

Les concentrations de contrainte contribuant à la germination des microfissures sont d'origines diverses:

III.4.1.1 .Facteurs métallurgiques :

La composition du matériau, sa mise en forme, les traitements thermiques subits, tous ces facteurs engendrent des défauts à 1' intérieur de la structure qui, au cours de la sollicitation deviennent des microfissures et augmentent de taille par propagation.

III.4.1.2 .Facteurs géométriques :

Les changements de section, rainure, filetage, entaille, concentrent des contraintes intensivement affectées en fatigue.

III.4.1.3 .Etat de surface :

Dans de nombreux cas pratiques, les couches superficielles sont les plus sollicitées et les fissures en prennent naissance. Ces irrégularités se comportent comme des micros entailles qui provoquent des fissurations. Pour éviter la fissuration à cette origine, il est recommandé d'augmenter la résistance de la surface par cémentation, éviter l'adoucissement de la couche superficielle.

III.4.1.4 .Conditions de sollicitation:

Plusieurs types de sollicitation peuvent favoriser la fatigue : l'effet de l'environnement (corrosion), la température et le chargement cyclique. Ce dernier est le plus important, pratiquement l'affectation par ce mode est liée à l'histoire de l'amplitude de chargement constante ou variable, le rapport de chargement :

$$R = \sigma \text{ min} / \sigma \text{ max}$$

Le rapport de chargement d'amplitude constante affecte moins le matériau qu'un chargement d'amplitude variable.

III.4.2. Principaux types de fatigue:

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre des éprouvettes à des cycles d'efforts périodiques (généralement sinusoïdaux) d'amplitude maximale (σ) et de fréquence constantes et

à noter le nombre de cycles au bout desquels la rupture se produit est N. A chaque éprouvette correspond un point de plan (σ,N) et à partir d'un lot d'éprouvettes soumises à des contraintes

maximales différentes, on obtient une courbe dite de Wöhler connue sous le nom de courbe S-N (Stress-Number of cycles) et qui illustre les principales étapes de fatigue [8,9].

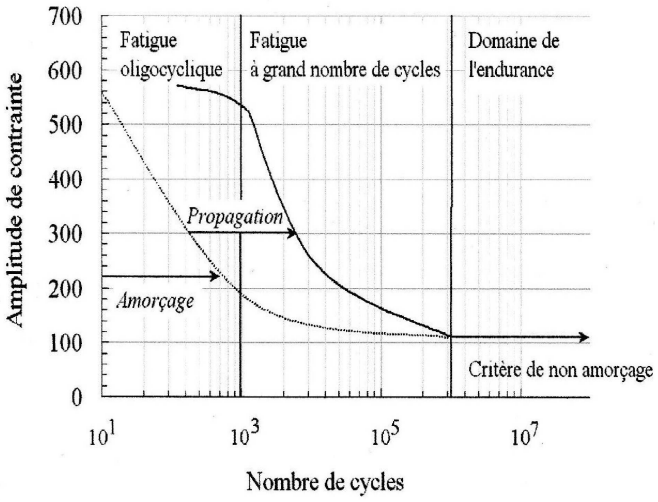


Fig.III.7

III.4.2.1.Fatigue Oligocyclique :

En générale, ce type de fatigue est obtenu pour une contrainte apparente dépassant la limite élastique du matériau:

$$\sigma_{pf} > \sigma_{nom} > Re > \sigma_g$$

σ_{pf} : contrainte prés de la fissure

σ_{nom} : contrainte nominale

Re : limite élastique

σ_g : contrainte globale caractérisée par une plastification étendue et un

nombre de cycles à a rupture très limité.

II.4.2.2. Fatigue d'endurance limitée :

C'est le domaine habituel de fatigue là ou la contrainte globale est au dessous de la limite élastique mais générant une contrainte près de la fissure dépassant la limite élastique, caractérisée par une plastification locale dont la taille dépend de l'intensité de contrainte. Le nombre de cycles à la rupture croit lorsque la contrainte à la rupture décroît.

III.4.2.3. Fatigue d'endurance illimitée :

Généralement ce cas se présente pour des niveaux de contrainte faible, le nombre de cycles à la rupture dépasse la durée **de vie prévue.** Phénomène d'apparence rentable mais un problème d'optimisation s'impose. On évite par conséquent un tel dimensionnement.

III.4.3. Etapes d'évolution de la fissure :

Nous avons décrit les principales lois de la mécanique linéaire de la rupture qui constituent les outils de base pour toute étude des structures fissurées.

Nous décrivons dans ce qui suit l'évolution des fissures et leur propagation jusqu'à la rupture.

III. 4. 3. 1- Amorçage

C'est la première étape d'endommagement, les variations structurales et mécaniques se manifestent par l'apparition d'intrusion et d''extrusion puis germination de microfissure.

Cette étape est caractérisée par le nombre de cycles à l'amorçage.

$$Na = A(\Delta\varepsilon_{pl})^{\alpha} \qquad (3\text{-}28)$$

A, α constantes du matériau

Un autre aspect d'amorçage est celui du matériau contenant initialement une fissure provenant d'un défaut de mise en forme.

Dès les premiers cycles de sollicitations aucune propagation n'est notable, il y a vieillissement du matériau, et au delà d'un certain nombre de cycles, il y aurait propagation, ce dernier caractérise le nombre de cycles à l'amorçage [9,10].

$$Na = \frac{a_0}{da/dN} \qquad a_0 \text{ taille initiale} \qquad (3\text{-}29)$$

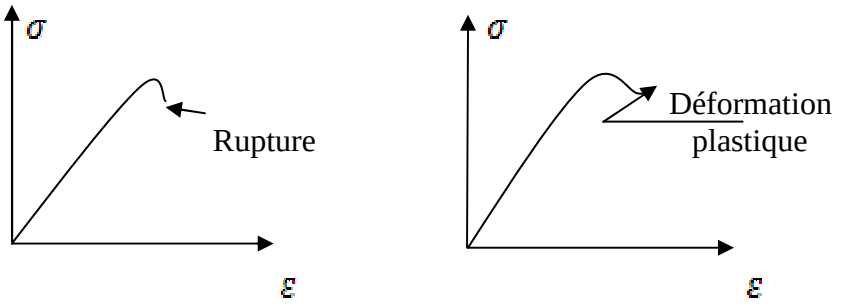
III. 4. 3. 2- Propagation stable

Une fois la fissure est amorcée, elle passe au stade de propagation. Cette étape est caractérisée par une propagation stable de la fissure jusqu' à un seuil critique ou la rupture surgis rapidement. Elle constitue l'étape de fonctionnement admissible.
Une structure est fiable lorsque sa durée de vie à ce stade est dominante en endommagement. Pour cela toute pièce fissurée en fonctionnement nécessite une prédiction de la durée stable afin d'éviter la rupture à conséquence grave.

III. 4. 3.3- Propagation instable :

C'est l'étape de rupture brutale, le matériau a atteint le seuil critique de propagation; la plastification est étendue, le nombre de cycles à la rupture est très limité (matériau ductile).

Le fonctionnement à ce stade est déconseillé. Pour les matériaux fragiles cette étape est dominante en propagation et donc la rupture est brutale.



Matériau fragile Fig .III.8 Matériau ductile

III.4.3.Modèles décrivant la propagation :

La principale loi décrivant la propagation des structures et pièces fissurées est la loi de Paris [9].

$$\frac{\partial a}{\partial N} = C\Delta K^{\eta/2} \quad \text{(loi de Paris)} \qquad (3\text{-}30)$$

$\Delta k = K_{max} - K_{min}$

N : le nombre de cycles.

a : taille de la fissure

K_{max} : Facteur d'intensité de contrainte pour un chargement maximal.

K_{min} : Facteur d'intensité de contrainte pour un chargement minimal.

C et η : Constantes du matériau à la fatigue.

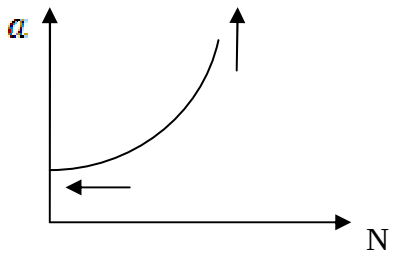


Fig.III.9 . Nombre de cycle en fonction de la taille de fissure

Conditions initiales $a = a_0$ *et* N = 0

$$\partial_a = \partial N\ C\Delta K)^{\eta} \qquad \text{et} \qquad \partial N = \frac{\partial a}{C(\Delta K)^{\eta}}$$

Avec $\Delta K = K_{max}(a) - K_{min}(a)$ (3-31)

$$\partial N = \frac{\partial a}{C\,[K_{max}(a) - K_{min}(a)]^{\eta}}$$

$$N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{\partial a}{C\,[K_{max}(a) - K_{min}(a)]^{\eta}}$$

$$N = \frac{2}{C(\Delta K\sigma)^{\eta}\pi^{1/2}}\left(\frac{1}{\eta-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_c}^{\eta-1}} - \frac{1}{\sqrt{a}^{\eta-1}}\right) \qquad (3\text{-}32)$$

a_c *:* Taille critique de la fissure.

Si on regarde attentivement la courbe a = f(N) établie par la loi de Paris, on remarque que cette dernière ne rend pas compte de l'existence de deux asymptotes qui définissent la rupture par instabilité et 1'existence d'un seuil au dessous duquel la croissance des fissures est quasi nulle. Pour traduire ces effets, certains modèles ont été proposés, citons le modèle de **Forman** pour **la propagation instable**.

$$\frac{\partial a}{\partial N} = \frac{C\,\Delta K^{\eta}}{(1-R)(K_{IC}-K_M)} \qquad (3\text{-}33)$$

R: rapport de chargement $R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$

K_M : valeur maximale.

Pour le seuil de non fissuration

$$\frac{\partial a}{\partial N} = C\left(\frac{K_M\frac{1-R}{m} - K_{th}}{K_{IC} - K_M}\right) \qquad (3\text{-}34)$$

m: Coefficient de l'ordre de 0.5.

K_{Ic} : Valeur critique du facteur d'intensité de contrainte.

III.4.3.1. Critique des modèles

L'ensemble des modèles proposés et pratiquement tous, décrivent la propagation en mode découplé. La plupart des structures travaillent en sollicitation combinée. La prédiction de la fissuration pour ce cas est approchée par la loi de Paris généralisée et formulée à base du taux de restitution d'énergie par Le Maitre et Chaboche [8,9].

$$\frac{\partial a}{\partial N} = \frac{1}{c^{n/2}} \left(G_M^{*n/2} - G_m^{*n/2} \right) \qquad (3\text{-}35)$$

Avec :

$$G_M^* = \left(\sqrt{G_m} - \sqrt{G_s} \right)^2 \quad ; \quad G_m^* = \left(\sqrt{G_m} - \sqrt{G_s} \right)^2 \qquad (3\text{-}36)$$

G_m : Taux d'énergie restituée minimal

G_M : Taux d'énergie restituée maximal. .

G_s Seuil de l'énergie restituée.

Le problème de l'asymptote de rupture par instabilité n'est pas pris en considération.

III.4.3.2- Influence de la zone plastique

Comme nous 1'avons déjà cité, l'analyse élastique cerne bien la réa1ité pour les matériaux fragiles, mais insuffisante pour les matériaux ductiles ; on procède donc à une estimation de la taille de la zone plastique en forme et en dimension, pour rester toujours dans le domaine élastique. Les principaux modèles proposés à ce sujet sont ceux d'Irwine et de Dugdal, le premier est le plus adopté [11,12].

III.4.3.2.1-La taille de la zone plastique :

Modèle D'IRWINE:

Nous rappelons qu'en élasticité linéaire, la contrainte à fond de fissure varie comme $r^{-1/2}$.

Cette singularité est limitée par l'existence de la zone plastique qui constitue une zone de relaxation.

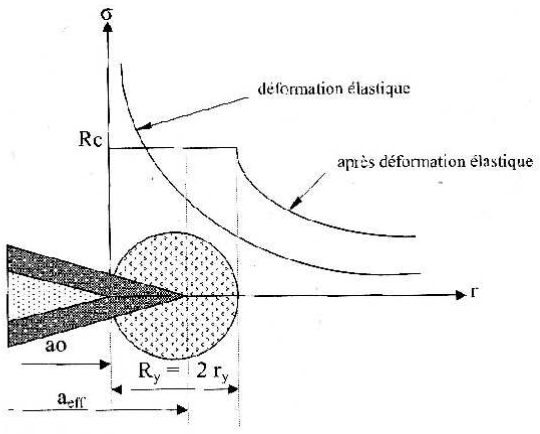


Fig.III.11

Irwine a estimé que la taille de la zone plastique est obtenue pour une valeur de contrainte σ_y globale appliquée, de forme circulaire de rayon :

$$r_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_I}{\sigma_y}\right)^2 \qquad (3\text{-}37)$$

La taille de fissure corrigée est $a = a_0 + r_y$ (3-38)

III.4.3.2.2-Direction de propagation :

Selon les conditions de chargement (direction et intensité), la fissure se propage selon une direction caractéristique d'une sollicitation maximale. La détermination de cette direction est possible à l'aide de deux critères : Critère de G_{max} (taux de restitution d'énergie max) et le critère de la contrainte.

a. Critère de G_{max} :

Ce critère consiste à déterminer le taux de restitution d'énergie pour un incrément de fissure d*a* pour différentes directions et la valeur maximale ainsi trouvée est une direction de branchement de la fissure.

b. Critère de la contrainte maximale

De même, on calcule la contrainte normale maximale au voisinage du front de fissure pour différentes orientations θ . Les points ou 1a contrainte est la maximale forment 1a direction de propagation.

Les deux critères présentent une équivalence en terme de sollicitation (le point le plus sollicité sera le départ de fissure).
La différence réside dans la mise en œuvre, tel que le critère de contrainte maximale s'adapte

mieux en éléments finis (de point de vue optimisation).
En équation intégrale le critère de Gmax est le mieux adapté.

Chapitre. IV

Méthode des équations intégrales

De frontières

Chapitre .IV Méthode des équations intégrales de frontières

IV.1. Introduction :

La résolution des problèmes posés en engineering est généralement obtenue par la modélisation mathématique caractérisée par un domaine définissant le domaine de validité et d'emploi de la solution suggérée, un système d'équation différentielle décrivant la physique du problème et ses conditions aux limites.

La solution analytique du modèle ainsi formulé est possible lorsque la géométrie est simple, le domaine est homogène, les conditions aux limites sont relativement simples et la loi de comportement est linéaire.

En réalité pour de nombreux cas la solution analytique n'est pas évidente (géométrie complexe, domaine hétérogène, système non linéaire,…).

Pour ce genre de situation, on fait appel aux solutions approchées en utilisant des méthodes numériques. Une première solution approchée de résolution est la méthode des éléments finis (FEM) ; une méthode puissante et appliquée dans de nombreuses disciplines; cependant malgré sa souplesse et son vaste champ d'application, elle présente un nombre d'inconvénient quand le domaine est infini ou lorsque ce dernier présente des singularités telles que les discontinuités géométriques (fissures en particulier).

En revanche une méthode plus adaptée à ce genre de situations est la méthode des équations intégrales de frontière (BEM).

Plusieurs méthodes intégrales ont le même principe, on adopte la méthode de la discontinuité de déplacement (MDD) qui s'adapte mieux aux problèmes de fissuration.

Le but de ce chapitre est d'illustrer le principe de la méthode ainsi que ses formulations mathématique et numérique.

Elle est essentiellement formulée pour approcher des domaines à discontinuités en se basant sur la résolution de l'équation de base de l'élasticité.

IV.2.1. Equation d'élasticité:

Soit un milieu homogène isotrope; la relation contrainte- déformation s'écrit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\ \varepsilon_{ij} + \lambda\ \varepsilon_{ij}\ \ \delta_{ij} \qquad i,j,k = 1,2,3 \qquad (4\text{-}1)$$

Condition d'équilibre

$$\sigma_{ij=} -F_i \qquad (4\text{-}2)$$

F_i forces appliquées

Les équations (4-1) et (4-2) donnent :

$$\sigma_{ij} = 2\ \mu\ \varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\ \ \delta_{ij} = -\ F_i)$$

Or $$\varepsilon_{ij}= \frac{1}{2}\ (\ u_{ij} + u_{ij}\ )$$

En termes de déplacement :

$$\mu\ u_{i,ij} + \mu\ u_{j,ii} + \lambda u_{k,kj} = -F_j \qquad (4\text{-}3)$$

Avec

$$(\ \lambda + 2\ \mu)\ u_{l,jl} - \mu\ (u_{j,ii} - u_{j,ii}) = -\ Fj$$

Autrement dit ;

$$(\ \lambda\ + 2\ \mu)\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div u} - \mu\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \text{u}\ \ + \text{F}\ = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

Equation de **Navier** pour l'élasticité linéaire

IV.2.2 Résolution de l'équation de Navier:

La résolution de l'équation (4-4) revient à écrire le champ de déplacement sous forme de fonction, transformant cette dernière en équation différentielle intégrable sous certaines conditions aux limites.

Soit

$$\text{u} = \text{grad}\ \boldsymbol{x} + \text{B} \qquad (4\text{-}5)$$

On remplace dans (4-4), on obtient :

$$(\lambda + \mu) \text{ grad div grad } x + (\lambda + \mu) \text{ grad div B}$$

$$+\mu \text{ grad x} + \mu \text{ B} + \text{F} = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

avec

$$\Delta B = 0$$

$$F = 0$$

après simplification, (4-6) devient:

$$(\lambda + \mu) \text{ grad div B} + (\lambda + 2\mu) \text{ grad } \Delta x = O \qquad (4\text{-}7)$$

Après intégration, on obtient:

$$\Delta x = \frac{-\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{ div B} \qquad (4\text{-}8)$$

Or $\Delta(\text{OM-B}) = \Delta(x_1.B_1 + x_2.B_2 + x_2.B_3)$

$$= 2\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1} + \frac{\partial B_2}{\partial X_2} + \frac{\partial B_3}{\partial X_3}\right)$$

$$+ \left(x_1.\Delta B_1 + x_2.\Delta B_2 + x_3.\Delta B_3\right)$$

Ou bien $\Delta(\text{OM-B}) = 2 \text{ div B} + \text{OM. B} = 2 \text{ div B} \qquad (4\text{-}9)$

L'équation (4-7) s'identifie à:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu.}{\lambda + 2\mu} \Delta (\text{OM . B}) \qquad (4\text{-}10)$$

Résolution de l'équation (4-10)

Solution homogène: Obtenue pour $\Delta x_0 = 0$

$$x_0 = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu.}{\lambda + 2\mu}. B_0 \qquad (4\text{-}11)$$

Avec ΔBo = O

Solution particulière

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu.}{\lambda+2\mu} \text{ OM . B} \qquad (4\text{-}12)$$

La solution générale :

$$U = B - \frac{\lambda+\mu.}{\lambda+2\mu} \text{ grad (OM .B + Bo)} \qquad (4\text{-}13)$$

Pour un milieu isotrope :

$$\begin{cases} U_x = B_x - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial_x}(xB_x + yB_y + Bo) \\ U_y = B_y - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial_y}(xB_x + yB_y + Bo) \end{cases} \qquad (4\text{-}14)$$

B_X , B_y, B_o : Fonction de **Papkovic** satisfaisant l'équation de **Laplace.**

$\Delta B_x = 0$, $\Delta B_y = 0$, $\Delta B_o = 0$

-Principe de la méthode

La solution singulière de l'équation de l'élasticité due à une discontinuité de déplacement dans un milieu infini est :

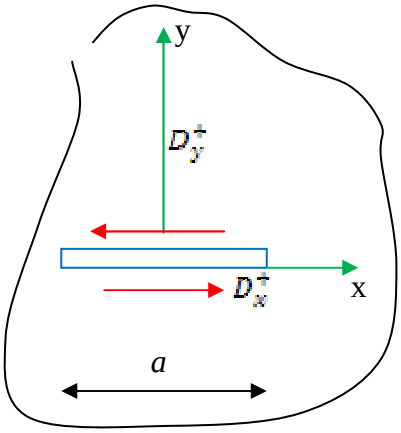


Fig. **IV.1** : Discontinuité de Déplacement

$$D_i = U_i(x,0-) - U_i(x,0+) \text{ ou } \begin{cases} D_x = U_x(x,0-) - U_x(x,0+) \\ D_y = U_y(x,0-) - U_y(x,0+) \end{cases} \qquad (4\text{-}15)$$

De même le champ de déplacement a la même forme, avec B satisfait les conditions aux limites caractéristiques des modes de fissuration.

Les conditions aux limites:

Mode I

$$\begin{cases} \sigma_{xy}(x,o) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_y(x, o) = 0 & x > |\alpha| \\ D_y = U_y(x, 0_-) - U_y(x, 0_+) & x \geq |\alpha| \end{cases} \qquad (4\text{-}16)$$

Condition sur B:

$$B_x = 0$$

$$B_y = 4(1-\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$B_0 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \cdot \varphi$$

Avec $\Delta \varphi = 0$

Mode II :

$$\begin{cases} \sigma_{yy}(x.0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_x(x.0) = 0 & x > |\alpha| \\ D_x = U_x(x.0_-) - U_x(x.0_+) & \end{cases} \qquad (4\text{-}17)$$

Condition sur B：

$$B_x = 0$$

$$B_y = 4(1-\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$B_0 = 8(1-\nu)^2 \cdot \varphi$$

Champ de déplacement :

$$U_x = (1-2\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2(1-\nu)\frac{\partial \chi}{\partial y} + x\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \quad (4\text{-}18)$$

$$U_y = 2(1-2\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (1-2\nu)\frac{\partial \chi}{\partial x} + y\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (4\text{-}19)$$

Champ de contrainte :

$$\sigma_{xx} = 2G_{cisa}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + x\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right) + 2G_{cisa}\left(2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + x\,\sigma\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial y^2}\right) \quad (4\text{-}20)$$

$$\sigma_{yy} = 2G_{cisa}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right) + 2G_{cisa}\; y\;\frac{\partial^3 \chi}{\partial x\,\partial y^2} \quad (4\text{-}21)$$

$$\sigma_{xy} = -2G_{cisa}\, y\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + 2G_{cisa}\left(2\frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x\,\partial y^2}\right) \quad (4\text{-}22)$$

$$G_{cisa} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Avec :

$\frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x\,\partial y^2}$ soient finis .

Pour satisfaire les conditions aux limites, la fonction arc tg $\frac{y}{x}$ présente les propriétés suivantes :

$$\text{Lim Arc tg}\frac{y}{x} = \begin{cases} \pi & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \\ \pi & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cherchons les relations de σ et U en fonction des discontinués :

$$D_x = 2\,(1-\nu)\,\frac{\partial}{\partial y}\,(x\,(x.0_-)+x(x.0_+)) \qquad |x| < a$$

$$D_y = 2\,(1-\nu)\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\sigma\,(x.0_+)+\sigma(x.0_+)) \qquad |x| < a$$

Ou bien

$$\frac{\partial}{\partial y}(x.0_-) - \frac{\partial x}{\partial y}(x.0_+) = \frac{D_x}{2\,(1-\nu)} \qquad |x| < a$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x.0_-) - \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x.0_+) = \frac{D_y}{2\,(1-\nu)}$$

D'autre part soit:

$$h(x.y) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right) \qquad (4\text{-}23)$$

en passant à la limite

$$h(x.0_-) - h(x.0_+) = -2\pi \qquad |x| < a$$

par combinaison

$$\frac{-1}{2\pi}\left[\,h\,(x.0_-) - h(x.0_+)\right] = \frac{2\,(1-\nu)}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x.0_-) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x.0_+)\right]$$

On obtient:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x.y) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{Dy}{(1-\nu)}\,h\,(x.y)$$

Après intégration :

$$\varphi\,(x,y) = \frac{Dy}{4\pi(1-\nu)}\left[\,y\text{Arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) - y\text{Arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right)\right] \qquad (4\text{-}24)$$

$$X(x,a) = \mathrm{Ln}\left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} + (x+a)\mathrm{Ln}\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}$$

Les fonctions harmoniques φ et x traduisent les contraintes et les déplacements nuls à l'infini et vérifient les conditions.

On pose :

$$\varphi\,(x.y) = \frac{D_y\, F(x.y)}{4\pi\,(1-v)}$$

et

$$X(x,y) = \frac{D_x\, F(x.y)}{4\pi\,(1-v)} \qquad (4\text{-}25)$$

Les déplacements :

$$\begin{cases} U_x = \left(D_x\, 2(1-v)F_3 - yF_5\right) + \left(D_y - (1-2v)\,F_2 - yF_7\right) \\ U_y = \left(D_y\, 2(1-v)F_2 - yF_4\right) + \left(D_y\, 2(1-2v)\,F_3 - yF_5\right) \end{cases} \qquad (4\text{-}26)$$

Les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G_{cisa}\, D_x \left(2F_4 + yF_6\right) + 2G\, D_y \left(-F_5 + yF_7\right) \\ \sigma_{yy} = 2G\, D_x \left(-yF_6\right) + 2G\, D_y \left(-F_5 + yF_7\right) \\ \sigma_{xy} = 2G\, D_x \left(-F_5 + yF_7\right) + 2G\, D_y \left(-yF_7\right) \end{cases} \qquad (4\text{-}27)$$

Avec:

$$F_2 = F.x = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[\text{Ln}\left((x-a)^2+y^2\right)^{1/2} + \text{Ln}\left((x+a)^2+y^2\right)^{1/2}\right] \quad (4\text{-}28)$$

$$F_3 = F.y = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)}\left[\text{Arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right)\right] \quad (4\text{-}29)$$

$$F_4 = F.xy = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right) \quad (4\text{-}30)$$

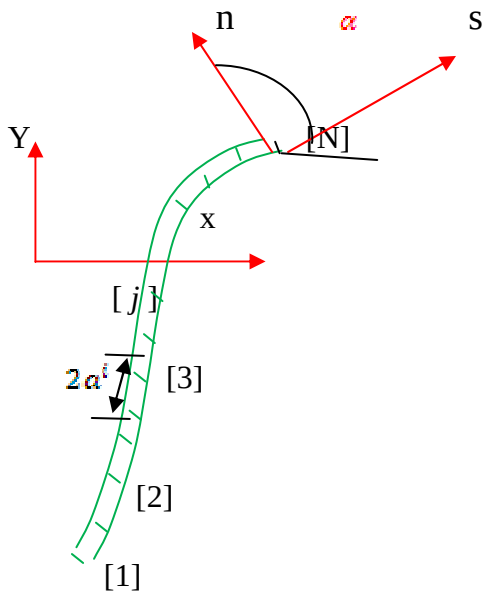
$$F_5 = F.xy = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right) \quad (4\text{-}31)$$

$$F_6 = F.xy = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{(x-a)^2-y^2}{(x-a)^2+y^2} - \frac{(x+a)^2-y^2}{(x+a)^2+y^2}\right) \quad (4\text{-}32)$$

$$F_7 = F.xy = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{x-a}{((x-a)^2+y^2)^2} - \frac{x+a}{((x+a)^2+y^2)^2}\right) \quad (4\text{-}33)$$

I V-3) –Procédure numérique

La solution singulière trouvée est relative à une discontinuité de déplacement constante sur un segment fini dans un milieu infini. Elle est généralisée par une procédure numérique pour construire une méthode des éléments de frontières et résoudre des problèmes complexes. L'idée est de discrétiser une discontinuité de courbure quelconque en N éléments aussi petits que l'on veut (courbure négligeable) analyser un élément dans un repère local. L'effet d'une discontinuité de déplacement d'un point quelconque de la frontière du domaine peut être écrit d'après l'équation.



$$\sigma_s^i = A_{ss}^{ij}\, D_s^i + A_{sn}^{ij}\, Dn^j$$

$$\sigma_n^i = A_{ns}^{ij}\, D_s^i + A_{nn}^{ij}\, Dn^j \qquad (4\text{-}34)$$

Fig. IV.2 : Discrétisation d'une fissure en N segments

Les A_{ss}^{ij} A_{sn}^{ij} A_{ns}^{ij} A_{nn}^{ij} sont appelés coefficients d'influences.

L'influence des N éléments sur le i^{eme} élément est obtenue par superposition :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^{n} A_{ss}^{ij}\, D_s^i + \sum_{j=1}^{N} A_{sn}^{ij}\, Dn^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^{n} A_{ns}^{ij}\, D_s^i + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij}\, Dn^j \end{cases} \qquad (4\text{-}35)$$

Quant aux déplacements :

$$\begin{cases} U_s^i = \sum_{j=1}^{n} B_{ss}^{ij}\, D_s^i + \sum_{j=1}^{n} B_{sn}^{ij}\, Dn^j \\ U_n^i = \sum_{j=1}^{n} B_{ns}^{ij}\, D_s^i + \sum_{j=1}^{n} B_{nn}^{ij}\, Dn^j \end{cases} \qquad (4\text{-}36)$$

Avec B_{SS}^{IJ} B_{ns}^{IJ} B_{nn}^{ij} sont les coefficients d'influence des déplacements.

Résolution :

Une fois les différents systèmes sont formulés, on calcule:
Les discontinuités selon les conditions aux limites sur les déplacements et les contraintes on résout le système

$$[\sigma] = [A]\{D\}$$

Où

$$[U] = [B]\{D\}$$

Puis on calcule par le même système le champ de contraintes et de déplacement en importe quel point en reformulant les matrices $[A]$ et $[B]$.

Transformation en coordonnées :

Nous rappelons que les systèmes formulés sont écrits en coordonnées locales et pour des raisons de programmation on procède à une transformation dans le repère globale.

Coordonnées :

$$\begin{cases} X = (x - C_x)\cos\beta + (y - C_y)\sin\beta \\ Y = -(x - C_x)\sin\beta\,(y - C_y)\cos\beta \end{cases} \quad (4\text{-}37)$$

Déplacement :

$$\begin{cases} U_x = \frac{U}{X}\cos\beta - \frac{U}{y}\sin\beta \\ U_y = \frac{U}{y}\cos\beta - \frac{U}{y}\sin\beta \end{cases} \quad (4\text{-}38)$$

Contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\sigma}{xx}\cos^2\beta - \frac{2\sigma}{xy}\sin\beta\cos\beta + \frac{\sigma}{xy}\sin^2\beta \\ \sigma_{yy} = \frac{\sigma}{xx}\cos^2\beta - \frac{2\sigma}{xy}\sin\beta\cos\beta + \frac{\sigma}{yy}\sin^2\beta \\ \sigma_{xy} = (\frac{\sigma}{xx} - \frac{\sigma}{yy})\cos\beta\sin\beta + \frac{\sigma}{xy}(\cos^2\beta\ \sin^2\beta) \end{cases} \quad (4\text{-}39)$$

Chapitre .V

Simulation numérique

Chapitre V. Simulation numérique :

V. 1 .Introduction :

La fatigue des structures est un problème sérieux révélant d'un grand intérêt des chercheurs dans le domaine de la mécanique des solides, plus encore difficile en matériaux composite vue les catastrophes que peut causer une rupture surtout en aéronautique et l'industrie nucléaire.

Cependant pour assurer la fiabilité, il faut prédire la durée de vie de la structure. En réalité, ces dernières sont soumises à des chargements complexes à amplitudes variables. Des expériences réalisées sur des éprouvettes et simulant les conditions en service sont relativement longues, couteuses, complexes à réaliser et nécessitent des équipements sophistiqués ce qui n'est pas toujours possible.

Une autre technique d'approche plus économique de ce problème facile à mettre en œuvre, simulant correctement l'état de chargement, est la simulation numérique de la propagation. La simulation est possible soit par la méthode des éléments finis soit par celle des équations intégrales de frontière.

Des travaux de simulation en éléments finis ont été élaborés mais présentant des difficultés de maillage **(**à chaque incrément de propagation da l'éprouvette est remaillée), ce qui nécessite un temps d'exécution énorme, surtout pour des géométries complexes.

Dans le but d'une meilleure optimisation, nous avons essayer d'apporter un élément de solution, simulant le phénomène en utilisant la méthode des équations intégrales (méthode de discontinuité de déplacement).Après on donne une description sommaire des principales démarches suivies pour élaborer ce travail.

V. 2. Procédure de calcul :

Le travail de recherche effectué consiste à l'élaboration d'un code de calcul numérique permettant de suivre la propagation des fissures dans les matériaux composites à fibres longues unidirectionnelles pour différents modes de chargement en contraintes plane quelque soit l'orientation des fibres. La liaison fibre-matrice est supposée parfaite pour éviter le phénomène de délaminage.

Dans la première étape : Nous calculons les constantes élastiques du composite dans un repère d'orthotropie quelconque à partir des constantes élastiques de ses constituants fibres et matrices ; ensuite par la technique d'homogénéisation, on détermine les constantes effectives :

Module de Young Ec, coefficient de poisson νc et module de cisaillement du composite.

La deuxième partie : Nous constituons un fichier de données relatif au matériau en question puis on procède au maillage du domaine extérieur et de la fissure (la fissure est discrétisée à 50 éléments, ensuite on calcule les coefficients d'influence, les contraintes, les déplacements en tout point du domaine et les discontinuités sur la frontière da la fissure.

La troisième partie : Elle est consacrée au calcul des facteurs d'intensité de contrainte K_I et K_{II} et le taux de restitution d'énergie, nous calculons aussi l'influence de l'orientation des fibres sur les facteurs d'intensité de contrainte.

La quatrième partie : On incrémente la fissure d'un élément propageant d$a = \frac{a}{50}$, on calcule le rayon r de la zone plastique au front de fissure selon le modèle d'**Irwin** et on corrige la taille de la fissure par $a = a_0$ + r , on refait le calcul des contraintes, déplacements, discontinuités, K_I , K_{II} et G .

La cinquième partie : On détecte la direction de propagation.

On effectue un balayage au front de fissure entre $-\pi$ et + π avec un pas de un degré et on détermine les cordonnées et l'angle du point correspondant au taux de restitution d'énergie G_{max}, ce point est la direction de propagation.

La sixième partie : On calcule le nombre de cycle pour chaque incrémentation par intégration numérique (méthode de **Simson)** jusqu'à atteindre les valeurs critiques Gc, a_c ou K_c qui constitue le nombre de cycles à l'endommagement et à la rupture, l'ensemble des points de propagation constitue le chemin que suivra la fissure.

A ce stade le programme termine l'exécution.

Chapitre. VI

Résultats et interprétations

Chapitre VI. Résultats et commentaires

L'étude de la propagation des fissures dans les matériaux composites fait appel à la mécanique linéaire de la rupture et la définition de la loi de comportement.

Ces derniers sont en réalité hétérogènes orthotropes ainsi le calcul est très complexe.

Pour cela, on procède à la technique d'homogénéisation pour calculer les constantes effectives du matériau.

Plusieurs modèles ont été proposés à ce sujet. Les premiers travaux sont ceux de Voigt et Reuss qui définissent la valeur maximale du module de Young et du coefficient de Poisson (borne supérieure de Voigt) et la valeur minimale (borne inférieure de Reuss) (figure II.4) par la loi des mélanges. Par la suite, plusieurs modèles ont été proposés en vue d'approcher la loi de comportement, nous citons: les modèles de Halpin-Tsai, Halpin-Tsai modifié, Tsai-Pagano, Hirch, Cox, méthode hybride et méthode Echelby.Tous ces modèles sont encadrés par les valeurs de Voigt et Reuss.

Les travaux de recherche effectués dans ce domaine optent pour le choix d'un des modèles selon le type de composite et la nature du travail effectué.

Dans d'autres cas, on considère que les constantes effectives sont celles calculées par Voigt [5].

Certain travaux de recherches (calcul numérique) considèrent que le module de Young du composite est égale a la valeur moyenne de E_l et E_t [30]. D'autres travaux ont choisi le modèle de Halpin -Tsai [28], d'autres utilisent le modèle Eschelby [27]. La méthode hybride d'homogénéisation est souvent utilisée [24].

On s'intéresse dans notre travail à étudier aussi l'influence de l'orientation des fibres sur la durée de vie de la structure fissurée. Le modèle d'homogénéisation de Hirsch est le mieux adapté, il donne également une bonne approche de Voigt si theta=0 degré (inclinaison des fibres par rapport à l'axe X) et une bonne approche de Reuss si l'angle $\theta = 90°$.

Le coefficient de poisson est souvent approché par la loi de mélanges [6].

VI.1. Calcul des constantes effectives

Le matériau composite pris en exemple à étudier est le carbone – époxy avec les caractéristiques suivantes :

V_f = 0.6 V_m = 0.4

E_1^f = 233 GPa E_1^f = 23.1 GPa

E_m = 4.62 Nu_{12f} = 0.2 Nu_m = 0.36 G_{12f} = 8.96 MPa G_m = 1.6985

Le code de calcul numérique établi permet de calculer le module élastique de Young, le coefficient de poisson et le module de cisaillement dans un repère global avec θ angle d'orientation des fibres par rapport à l'axe xx , àpartir des constantes de la fibre et de la matrice et calcule ensuite les constantes effectives par homogénéisation.

θ (degré)	E_x (GPa)	E_y (GPa)	*EcHIRSCH(GPa)*
0	141.6480	08.8846	141.6480
10	72.1519	08.9796	71.1922
20	31.0729	09.3247	29.7614
30	17.6568	10.1073	16.6453
40	12.3991	11.7008	12.2357
45	11.02	12.82	11.548
50	10.1041	14.8930	11.8148
60	09.1422	21.6490	15.3956
70	08.8499	37.8376	27.9232
80	08.8502	81.7615	69.1006
90	08.8846	141.6480	141.6480

Tableau VI .1. Constantes effectives par homogénéisation (modules de Young).

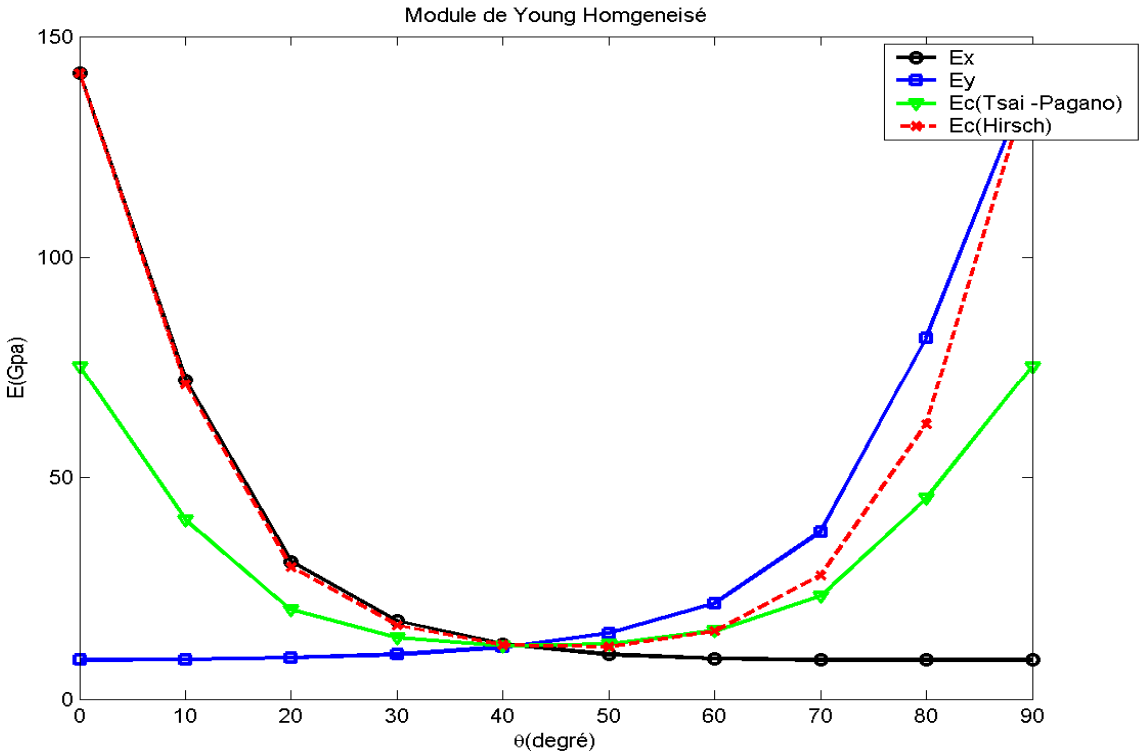


Fig VI .1.Homogénéisation des constantes élastique

θ (degré)	*Nuc*	Gc_{cisa} *(GPa)*
0	0.2640	4.0472
10	0.3197	4.2990
20	0.3343	5.1031
30	0.3224	6.4616
40	0.2952	7.8695
50	0.2524	7.8695
60	0.1921	6.4818
70	0.1175	5.1031
80	0.0471	4.2990
90	0.0166	4.0472

Tableau VI .2. Constantes effectives par homogénéisation (modules de Poisson et cisaillement).

VI.2. Calcul du facteur d intensité de contraintes K en fonction de la taille de fissure

Une fois le matériau composite est homogénéisé; on procède au calcul du facteur d'intensité de contrainte KI et du taux de restitution d'énergie G numériquement, puis ils sont comparés aux valeurs analytiques obtenus à partir des équations précédentes.

On considère une fissure au centre d'une plaque composite (carbone -époxy) avec fibres orientées à 30 degré chargées selon YY

σ_{yy}=125 MPa θ =30 degré

Ec=16.645 Gpa Nuc=0.322

La taille initiale de la fissure initiale est a_0= 0.5 cm ; discrétisée à 50 éléments à un nœud.

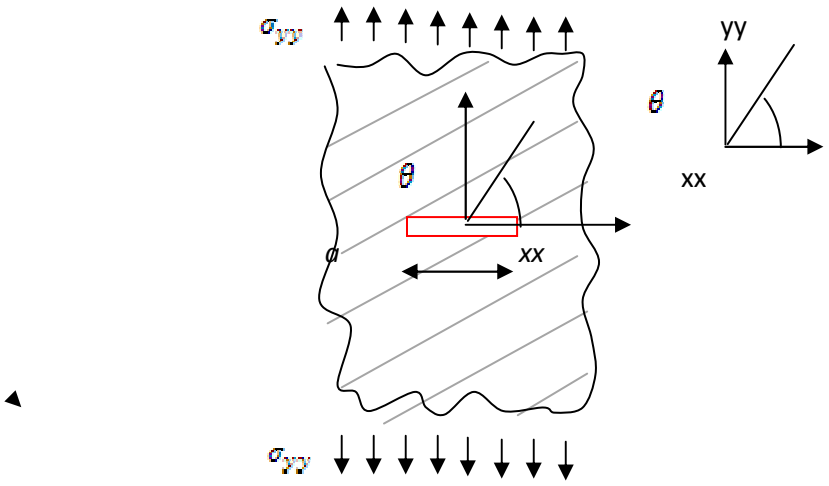


Fig VI .2. Fissure sollicitée en mode I

***a*(cm)**	**KI Num**	**KI anal**	**Erreur %**	**Gnum**	**Ganal**	**Erreur %**
0.5	157.23	156.61	3.9	1.38	1.47	6.1
1	223.01	221.56	6.4	2.75	2.95	6.7
1.5	273.80	271.30	9.2	3.99	4.42	9.6
2	312.51	313.25	2.3	5.36	5.89	8.9
2.5	349.51	350.22	2 .0	6.55	6.45	1.6
3	386.2	383.65	6.6	7.85	7.97	1.5

Tableau V I.3. Facteur d'intensité de contrainte et taux de restitution d'énergie

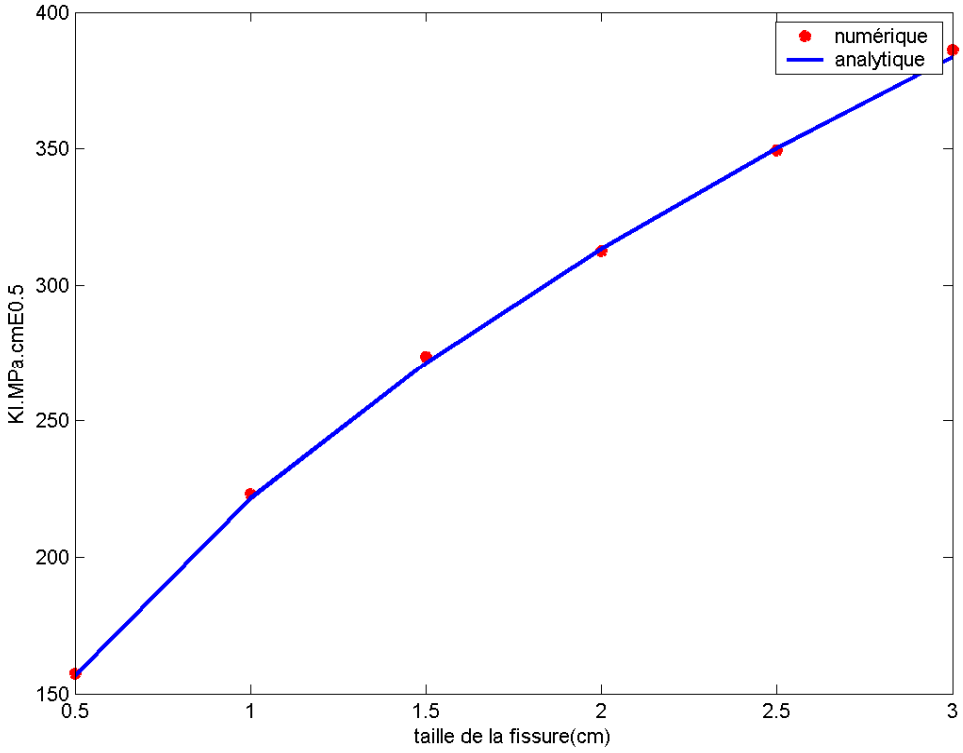


Fig.VI.3. Facteur d intensité de contrainte en fonction de la taille de fissure

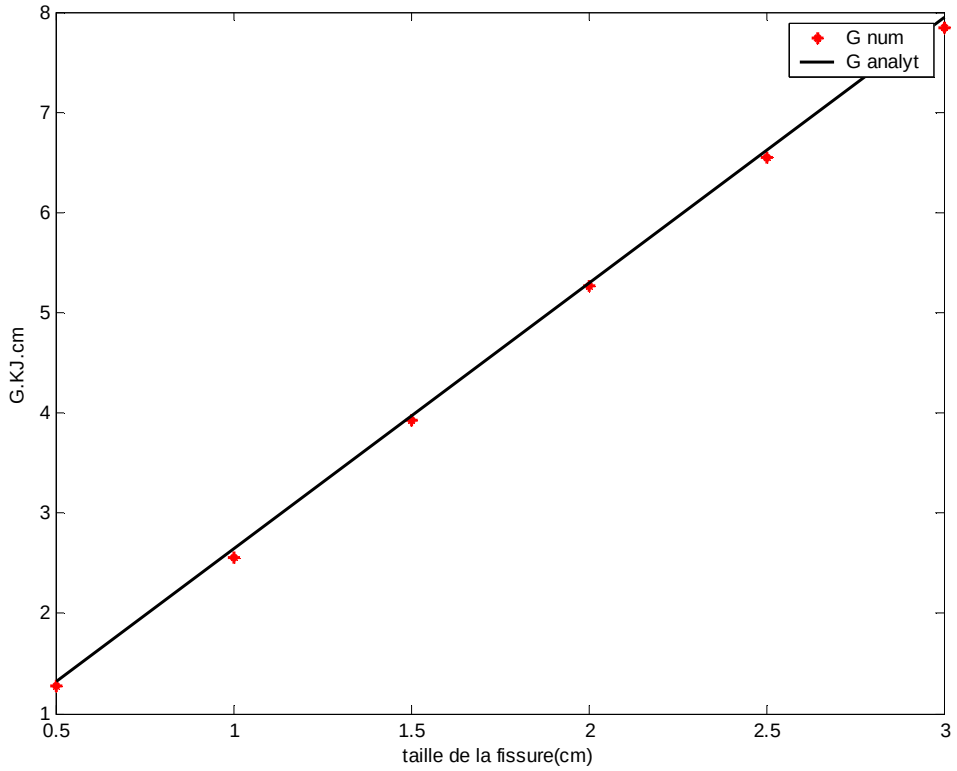


Fig.IV . 4. Taux de restitution d énergie en fonction de la taille de fissure

On remarque le bon accord entre les résultats numériques et analytiques avec une erreur moyenne de 5.6% et qui peut encore diminuer en augmentant le nombre d'élément de discrétisation ce qui nécessite un temps de calcul relativement long.

VI.3. Influence de l'orientation des fibres sur le facteur d'intensité de contrainte :

Dans cet exemple, nous étudions l'effet de l'orientation des fibres sur le facteur d'intensité de contrainte dans une mème plaque chargée par σ_{yy} =150MPa et comportant une fissure au centre de taille a_0=1.5 cm.

On définit α(alpha) angle entre les fibres et la direction de chargement, on varie l'angle α entre 0 et 90 degré avec un pas de 10 degrés et on calcule le facteur d'intensité de contrainte à chaque fois. On constate que lorsque les fibres sont dans la même direction de chargement α(alpha)=0, la valeur de KI est maximale ce qui explique la direction la plus résistante de la structure et qui diminue lorsque l'angle α(alpha) diminue.

Cette conclusion est similaire à celle du travail effectué dans la référence [24] et confirmée dans la théorie en utilisant le principe de Piggot [6]. Dans notre cas, le calcul est réalisét à base de la variation des constantes effectives pour chaque orientation.

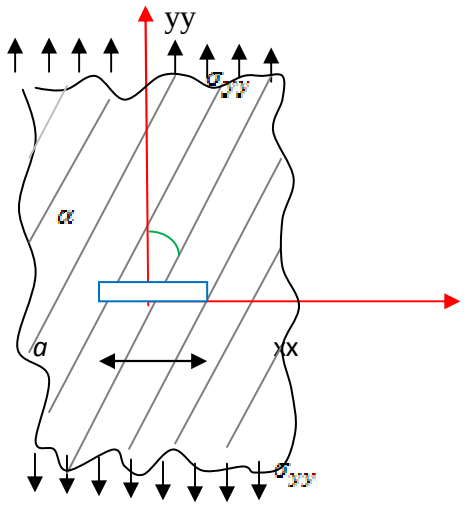
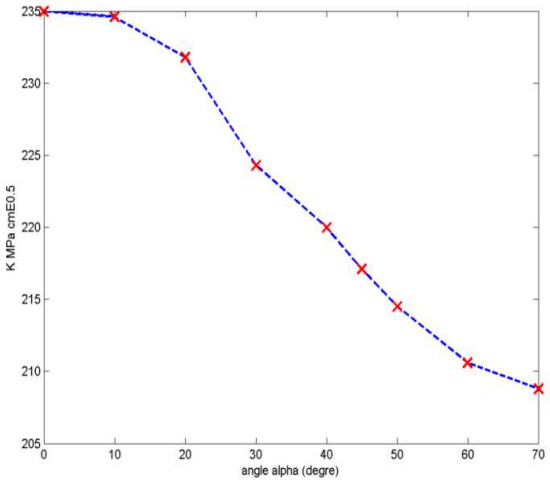


Fig VI .5. Fissure sollicitée en mode I (fibre quelconque)

α(degré)	K_I
0	235.0
10	234.6
20	231.8
30	226.3
40	220.0
45	217.1
60	216.6
70	208.8
80	210.5



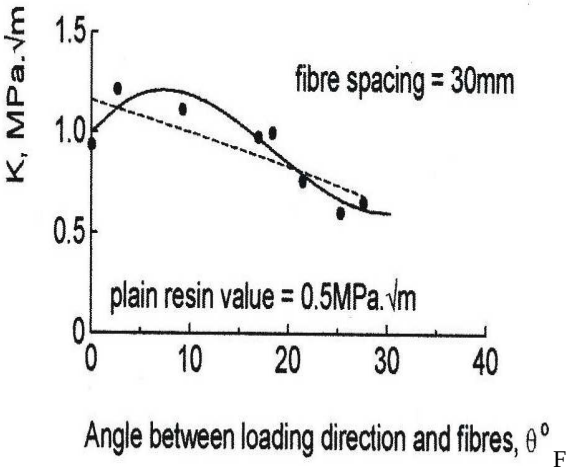


Fig . VI .6 Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'angle d'orientation des fibres

Fig . VI .7.fact K et θ F

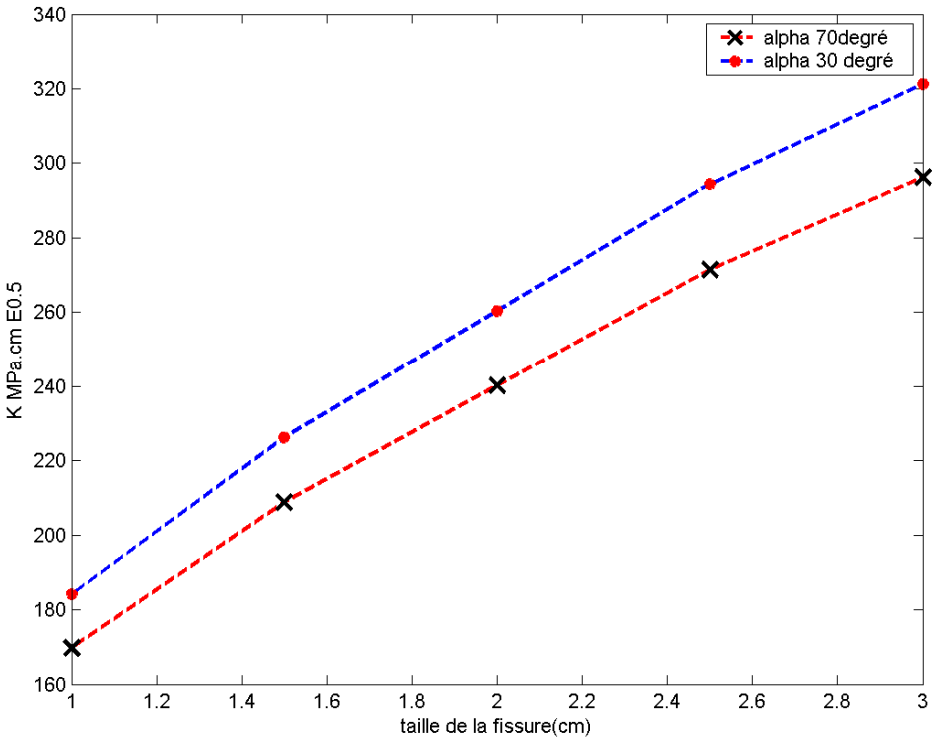


Fig . VI .8. Facteur d'intensité de contrainte en fonction de la taille de fissure pour différentes orientations de fibres

VI.4. Propagation des fissures :

4.1. Fissure au centre d'une plaque :

Dans cette partie de calcul, on simule une fissure en propagation sous l'effet d'un chargement cyclique selon l'axe yy de faible intensité, d'amplitude constante avec les conditions aux limites suivantes :

σ_{yymax} =25MPa σ_{yymin} =0MPa a_0=1.5 cm θ= 30 degré Ec=16.645 GPa Nuc=0.322

La fissure discretisée à 20 élements à un nœud est incrémentée sur ses deux bouts par un élement propageant de taille a_0/20.à chaque incrementation la fissure augmente de taille.

On calcule le nombre de cycle l'ayant propagé, ensuite un balayage à la tète de fissure est effectué entre -180 et +180 degré avec un pas de 1 degré pour determiner le point ou le taux de restitution d'energie prend sa valeur maximale (critère de Gmax). Ce point correspond à la direction de propagation, on recupère les coordonnées des points M1 et M2 et l'angle de propagation.

Le calcul analytique du nombre de cycle se fait par la formule citée dans le chapitre 3, la correction de la zone plastique se fait selon le modèle d'Irwine.

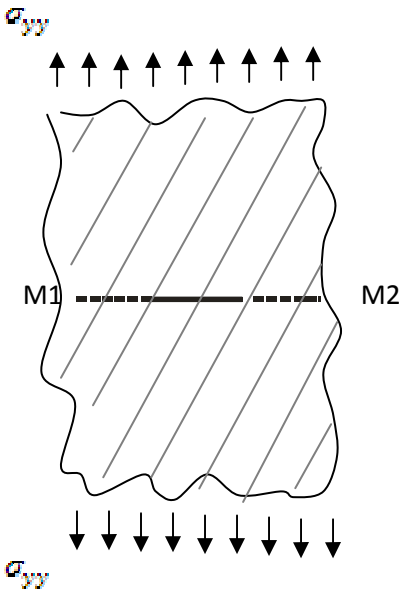


Fig . VI .8 Trajectoire de la fissure en propagation sollicitée en mode I

a(cm)	N(nombre de cycle) num	N(nombre de cycle) analy	Erreur %	M1		M2		Angle de propagation(degré)
				X1(cm)	Y1(cm)	X2(cm)	Y2(cm)	
1.8	9953	7463		-0.90	0	0.90	0	00
2.3	21875	24888		-1.15	0	1.15	0	//
2.8	44193	44103		-1.42	0	1.42	0	//
3.2	52889	55909		-1.61	0	1.61	0	//
3.7	66378	64324		-1.85	0	1.85	0	//
4.2	69540	69496		-2.11	0	2.11	0	//
4.6	72817	72528		-2.32	0	2.32	0	//
5.1	76235	75177		-2.60	0	2.60	0	//
5.6	75368	76595		-2.82	0	2.82	0	//

Tableau VI. 5. Taille de fissure et nombre de cycles de propagation de la fissure

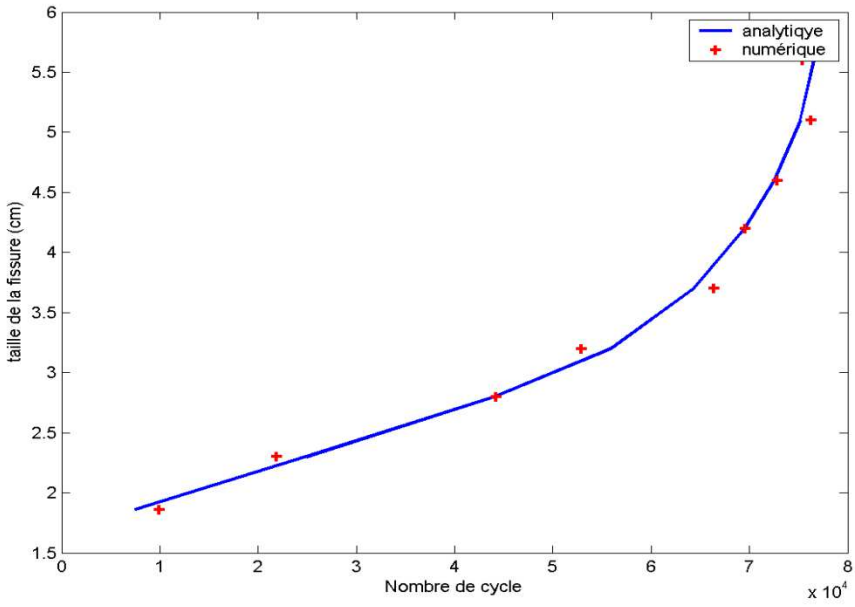


Fig . VI .9. Nombre de cycle à la propagation en fonction de la taille de fissure (fissure)

La fissure se propage par ses deux bouts horizontalement (mode I) l' ensemble des pionts constituent la direction de propagation.

On remarque le bon accord entre les valeurs numerique et analytique avec une erreur moyenne de 4.5%.

4.2. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 degré chargement selon l'axe YY:

Un autre test de performance du code de calcul effectué est celui de la même plaque fissurée inclinée à 45° chargée suivant YY.

Et des fibres inclinées à θ= 70 degrés.

σ_{yymax} =25MPa, σ_{yymin} =0MPa, a_0=1.0 cm θ= 70 degré (orientation des fibres), Ec=27.92 GPa, Nuc=0.117

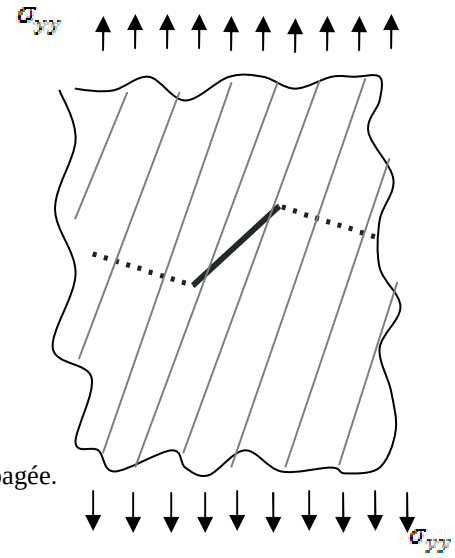


Fig . VI .9. Trajectoire de la fissure propagée.

Sollicitée en mode I et II

a(cm)	N(nombre de cycle) num
1.3	32490
1.64	35697
1.98	55401
2.3	65804
2.6	73597
2.9	77640
3.2	79480
3.6	81350

M1		M2		Angle de propagation(degré)
X1	Y1	X2	Y2	
-0.66	-0.34	0.66	0.34	-4
-0.72	-0.33	0.72	0.33	//
-0.88	-0.32	0.88	0.32	//
-1.04	-0.31	1.04	0.31	//
-1.21	-0.30	1.21	0.30	//
-1.37	-0.28	1.37	0.28	//
-1.54	-0.27	1.54	0.27	//
-1.7	-0.26	1.7	0.26	

La fissure se dévies de - 4 degré et se propage en mode I et en mode (ouverture et jusqu'à une taille critique). Le calcul analytique n'est pas envident d'où l'intérêt du calcul numérique.

4.3. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 degré chargement selon l'axe YY et XX :

La même plaque avec fissure inclinée à 45°, mais cette fois ci le chargement est selon l'axe XX

et YY d'une même valeur σ_{yy} = σ_{xx}=25 MPa.

σ_{yymax} =25MPa, σ_{yymin} =0MPa , a_0=1.0 cm , θ= 70 degré (orientation des fibres)

Ec=27.92 GPa, Nuc=0.117

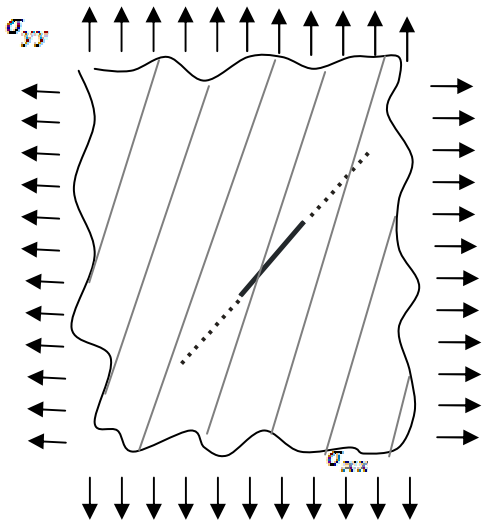


Fig. VI .9 Fissure en propagation sollicitée en mode I .orientation quelconque de fibre

a(cm)	Nombre de cycle
1.3	21850
	32315
1.64	39544
1.98	50130
2.3	57675
2.6	62315
2.9	65032
3.2	69235
3.6	

M1		M2		Angle de propagation (degré)
X1	Y1	X2	Y2	
-0.49	-0.49	0.49	-0.49	45
-0.61	-0.61	0.61	-0.61	//
-0.73	-0.73	0.73	-0.73	//
-0.84	-0.84	0.84	-0.84	//
-0.96	-0.96	0.96	-0.96	//
-1.07	-1.07	1.07	-1.07	//
-1.19	-1.19	1.19	-1.19	//
-1.31	-1.31	-1.31	-1.31	//

Tableau VI. 6. Taille de fissure et nombre de cycle de propagation de la fissure inclinée 45°

Dans ce cas la fissure soumise à un chargement équilibrée σ_{yy}=σ_{yy} se propage en mode I et suit sa direction initiale (angle de propagation 45°).

4.4. Fissure au centre d'une plaque inclinée à 45 degré chargement selon l'axe YY et cisaillement XY :

L'objectif du travail effectué est de mettre en place un outil de calcul numérique permettant de simuler différents cas de figures : chargement quelconque, fissure et fibre à orientation quelconque.

Dans cet exemple, nous prenons un chargement avec les conditions aux limites suivantes:

σ_{yy} =25MPa, σ_{xy} =18MPa, a_0=1.0 cm , θ= 70 degré, (orientation des fibres), Ec=27.92GPa, Nuc=0.117, fissure orientée à 30° :

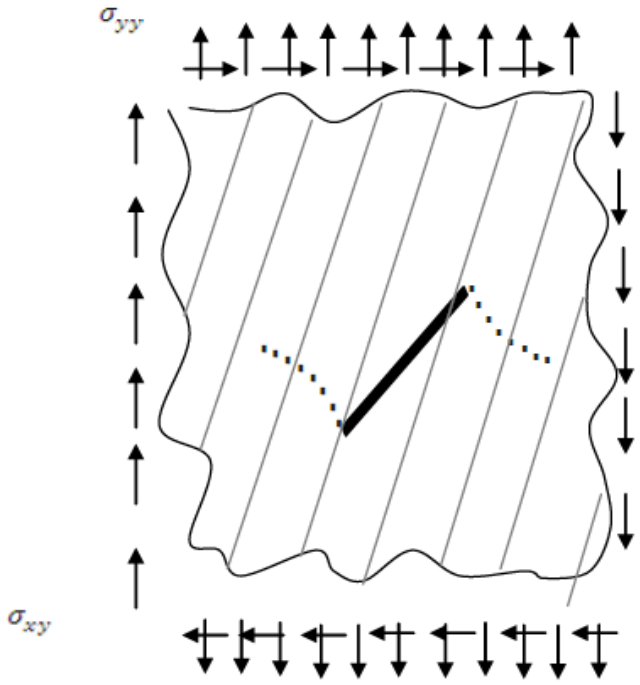


Fig. VI.10. Fissure en propagation sollicitée en mode I et II .trajectoire curviligne

a (cm)	Nombre de cycle	M1		M2		Angle de propagation (degré)
		X1	Y1	X2	Y2	
1.32	15635	-0.56	-0.21	+0.56	+0.21	-41°
1.65	24630	-0.74	-0.1	+0.74	+0.01	-40°
1.98	32733	-0.80	-0.01	+0.8	+0.1	-39°
2.3	42318	-0.96	+0.2	+0.96	-0.2	-38°
2.65	48485	-1.095	+0.3	+1.095	-0.3	-36°
2.9	53318	-1.18	+0.4	+1.18	-0.4	-35
3.2	58712	-1.36	+1.36	+1.36	-1.36	-34
3.9	63460	-1.45	+1.45	+1.45	-1.45	-32

Tableau VI. 7. Taille de fissure et nombre de cycle de propagation de la fissure inclinée 30°

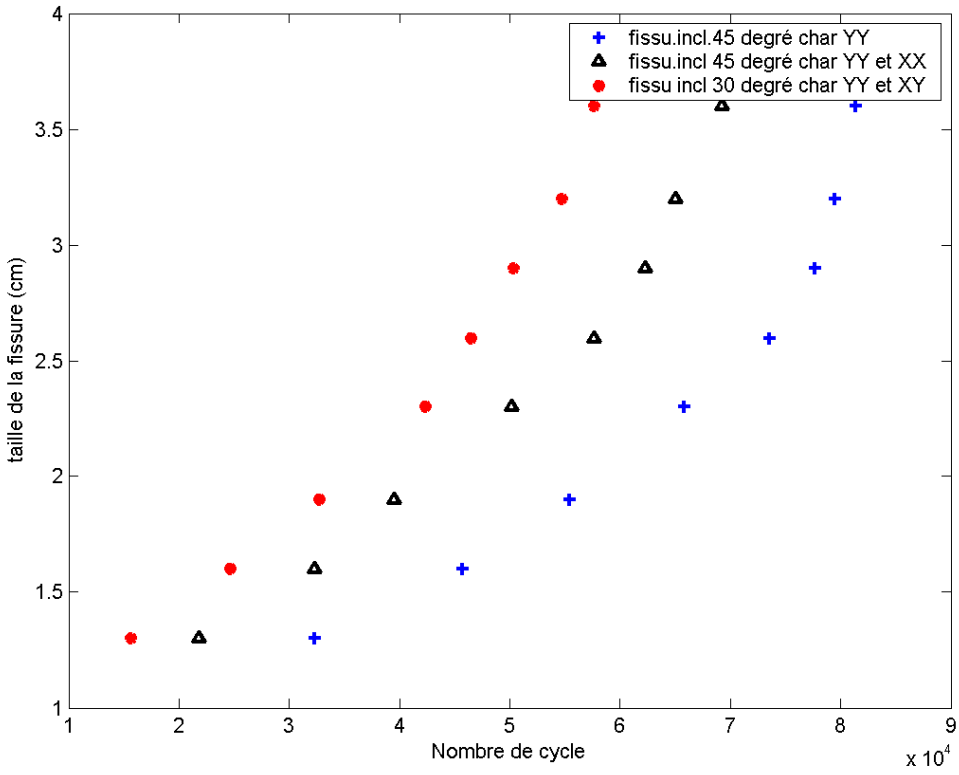


Fig. VI .11. Nombre de cycle pour différent mode de chargement

En réalité les structures sont soumises à des modes de sollicitation combinées avec une orientation quelconque de la fissure et des fibres, ce genre de situation est traité dans cette exemple et on remarque que le cisaillement dévie l'orientation de la fissure ce qui peut constituer une bonne solution pratique lorsqu'on veut parfois orienter cette dernière selon une direction privilégiée.

L'effet des chargements combinés sur la durée de vie est illustré sur la figure VI .11.

La durée de vie d'une structure est plus courte lorsque les chargements sont multiples.

Conclusion générale

L'étude de la propagation des fissure par fatigue dans les matériaux composites suscite encore l'intérêt des chercheurs vue leur caractère hétérogène anisotrope, et l'absence d'un modèle cohérant permettant d'approcher au mieux la loi de comportement d'où le recours à la technique d'homogénéisation pour pouvoir mettre en œuvre la théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture et les lois de propagation décrites initialement pour le cas isotrope élastique.

L'étude menée dans le cadre de ce travail consiste à calculer les constantes effectives d'un matériau composite unidirectionnel à fibres longues par homogénéisation ensuite, on procède à la détermination numérique des contraintes, déplacements et discontinuité au front de fissure par la méthode des discontinuités des déplacements (M.D.D) qui s'adapte très bien pour les matériaux à discontinuités géométriques par une discrétisation fine de la frontière ce qui permet de calculer le taux de restitution d'énergie G et les facteurs d'intensité de contrainte KI et KII. Ces derniers sont comparés à des calculs analytiques existants dans la theorie ; le résultat est satisfaisant.

Pour voir l'influence de l'orientation des fibres sur le facteur d'intensité de contraintes, on varie l'angle entre les fibres et la direction de chargement, on calcule les constantes effectives correspondantes et on refait l'analyse des champs de contraintes et déplacements et calculer le facteur d'intensité de contrainte. Le résultat obtenue est qualitativement similaire à celui décrie par la loi de Piggot [6] basée sur une analyse énergétique et à celui des travaux de recherche effectuée dans le domaine [24].

L'étape suivante consiste à soumettre des structures composites fissurées à un chargement cyclique d'amplitude constante et calculer le nombre de cycle et la trajectoire de fissuration.

Dans un premier temps le test est de pratiquer sur une plaque avec fissure horizontale perpendiculaire à la direction de chargement (mode I), on calcule le facteur d'intensité de contrainte, le taux de restitution d'énergie et le nombre de cycles par la lois de Paris pour chaque incrément de fissure. L'angle de propagation est déterminé par le critère de Gmax, l'ensemble des points leur correspondant constitue la trajectoire de fissuration. Le résultat est conforme à la théorie.

Nous pratiquons d'autres tests de simulation pour étudier des cas de sollicitations combinées pour des fissures et fibres à orientation quelconques.

Ainsi le code de calcul élaboré permet d'analyser la propagation des différents cas de sollicitation quelque soit l'orientation des fibres et pour des positions de fissure différentes dans la structure aussi bien pour les matériaux composite unidirectionnel que pour un matériau isotrope à comportement élastique linéaire. De plus on détermine la trajectoire au cours de la propagation jugée très important pour des cas pratiques.

Pour les composites à fibres courtes unidirectionnelle ou aléatoirement orientées, ils sont facilement traités par notre code de calcul en adoptant le critère de Tsai-Paganot pour l'homogénéisation de ses constantes effectives.

Nous traitons facilement les composites à particules de part leur loi de comportement élastique isotrope.

Nous espérons étendre l'étude pour des composites à fibres longues multidirectionnelles aléatoirement orientées pour avoir un code de calcul complet.

Nous espérons aussi réaliser des tests expérimentaux pour l'étude des lois de comportement.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

[1]- **J-M-BERTHELOT** - Matériaux composites comportement mécanique Et analyse des structures- Ed. MASSON Paris,1992.

[2]-**Maxim Manéra- Jean-Jacques Massot** –Manuel de calcul des composites verre –résine

PLURALIS ,Paris,1988.

[3**]- S.LAROS ,j.j.BARRAU** -Calcul des structures en matériaux composites-

EYROLLES-MASSON ,Paris ,1987.

[4**]- Nadia bahlouli -** cours de matériaux composite

université de technologie de Compiègne

[5**]- Prof Rafic Younes –** cours de matériaux composites

Université de Beyrouth -2008

[6]- Bryan Harris –Engineering composite materials

The institute of materials London 1999

[7]- Valery V .Vasiliev- Mecanics and analysis of composite materials

Elsevier 2001

[8]- SYLVIE POMMIER -Mécanique des matériaux-

Université pierre et Marie Curie ,2009-2010

[9]- CLAUDE BATHIAS-JEANPAL-BAILON -La fatigue des matériaux et des structures

EDITION MALINE ,1980.

[10]- J.LEMAITRE –J.L.CHABOCHE. –Mécanique des matériaux solides-

Dunod, 1985

[11]- H.D.BUI -Mécanique de la rupture fragile

EDITION MASSON .1978

[12]- BERNARD BARTHELEMY – Notions pratiques de la mécanique de la rupture-

EDITION EYROLLES , Paris 1980

[13]- Fatigue of structures and matérials-

Cours de master université Purdu-Indiana U.S.A.1984

[14]-D.GAY –Matériaux composites-

HERMES ,Paris,1997

[15]- BANARJEE.-Boundary element methode in ingineering science-

M.C. CRAW HILL 1981

[16]- John.H.Mathews – Numerical Methodes using Matlab

Pearson 2004

[17]- Belkacemi Y. « Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe Thèse de doctorat, Université des sciences et techniques de Lille. 1990

[18]-C.T.E.I.M : application de la méthode des équations intégrales à la mécanique. Rapp.1984.

[19]-Crouch S.L-Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method _ Int.j.for Num.Meth.in Eng., 1976

[20]-Crouch S.L, STRAFIELD A.M -Boundary element methods in Geomechanics _Ed.George Allen and uwin.

[21]- Rouainia.M, Modélisation numérique de la progression de fissures dans les solides élastique. 1990

Rapport de stage, université des sciences et techniques de Lille.1990

[22]-Zienkiwicz. Méthode des élément finis.

[23]-F L MATTHEWS ,G A O Davis,D Hitching and CSoutis

-Finite element modelling of composite materials and structures-.

Woodhead publishing limited Cambridge England 2003.

[24]-MIGUEL PATRICIO –Crack propagation on highly heterogeneous composite materials-.

Eindoven University of technology library.2008.

[25]- Pongtorn PROMBUT-Caractérisation de la propagation de Délaminage Des stratifiés composites multidirectionnels- Doctorat de l'université de Toulouse 2007.

[26]- M.L.C. Morcus- Numerical simulation of crack growth in fibre reinforced composites

Master Traineeship at Queen Mary, University of London 2010.

[27]-Abir El Maghrabi – comportement des matériaux composites à fibres courtes : application à l'impact de basse vitesse.2008

[28]-Christiane El Hadj – modélisation du comportement élastique en dommageable du matériau composite à renfort tridimensionnel

Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne 2006

[29]- Crack deflection and interface debonding in composite materials elucidated by the configuration force theory

R .Zhou, Z.Li department of engineering mechanics 2011

[30]- Estimation of elasticity coefficients by pseudo-periodic homogenization of a carbon nanotube reinforced composite material

Willy LECLERC, Philippe KARAMIAN, Alexandre VIVET, Alain CAMPBELL

Université de Caen-Basse Normandie, France 2011

[31]- Modeling dynamic crack propagation in fibre reinforced composites including frictional effects

S.K Dwivedi, H.D Espinosa. Department of Mechanical Engineering Northwestern University 2002

[32]- Crack propagation rate depinding on structure of modeling composite materials

T.Ishihara, I.Ishihara SEEDA Advanced Technologie Institute. Japan

[33]-Numerical simulation of crack growth in fibre reinforced composite

M.L.C.Morcus .2010.

Résumé :

Les matériaux composites, par leurs caractéristiques mécaniques élevées ont pu révolutionner le monde industriel mais les défauts que peuvent présenter ces derniers lors de l'élaboration et la mise en forme constituent un grand défit. La fissuration est le problème majeur.

Le travail effectué consiste à mettre en place un outil de calcul numérique et simulation par la méthode des équations intégrales de frontière de la propagation de fissure sur un composite à fibres unidirectionnelles longues sollicitées en contrainte plane moyennant la technique d'homogénéisation, ensuite prédire la durée de vie afin d'éviter les endommagements brusques souvent non tolérés.

A partir d'une taille initiale a_0, on calcule les facteurs d'intensité de contraintes **K** et le taux de restitution d'énergie de fissuration **G** par la théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture (meilleur théorie pour l'étude de la rupture des composites) , ce qui permet de déterminer l'angle d'orientation de la fissure à la propagation. L'ensemble des points obtenus par incrémentation de la taille de la fissure constitue le chemin de propagation ainsi la durée de vie est predite.

Summary:

Composite materials with their high mechanical properties have revolutionized the industrial world but the defects that may have during there elaboration and formatting are a major challenge. Cracking is the major problem.

The work done is to develop a numerical simulation tool by the method of boundary integral equation of crack propagation in composites materials loaded in plane stress and with the use of homogenization calculation the composite material will be considered as an homogeneous material.

We compute the prediction of the life duration to avoid sudden damage often not tolerated .

From an initial size of crack a_0, we calculate the stress intensity factor K then the rate of energy release G crating through the theory of linear elastic mechanical fracture (the best theory for the study of fracture composites materials), what determines the orientation angle of the crack propagation.

The set of points obtained by incrementing the size of the crack gives the propagation path. Determining at last the prediction of life duration of structures.