

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université El hadj Lakhdar - Batna

Mémoire

Présenté à

La Faculté des Sciences – Département de Physique

Pour obtenir

Le diplôme de MAGISTERE En Physique

Option : Physique Energétique

Par
Guenoune Rabah

Thème

Simulation numérique d'un jet coaxial turbulent avec différence de densité

Soutenu devant le jury

Président: Dr S. BOUGOUL

Rapporteur: Dr A. SOUDANI

Examineur: Dr Z. NEMOUCHI

Dr R. BESSAIH

Dr M. Si-Ameur

M.C. U. Batna

M.C. U. Batna

Pr. U. Constantine

M.C. U. Constantine

M.C. U. Batna

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier, tous d'abords le Dr A.Soudani qui m'a proposé le thème de ce travail et qui a su, en tant qu'encadreur, m'initier à l'éthique même du métier de chercheur en me faisant partager, avec enthousiasme, sa passion du travail bien fait. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde estime.

Je tiens à remercier tous particulièrement le Dr S.Bougoul responsable du module de Mécanique des fluide, pour ses précieux conseils et l'intense effort qu'il a déployé tout au long de l'année théorique, et qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence des jury.

Je témoigne de ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur Z.Nemouchi pour m'avoir accueilli à l'Institut de Génie Mécanique à Constantine et pour l'intérêt qu'il a porté sur ce travail, ses remarques ont été d'un grand intérêt, je veuille trouver ici l'expression de mes vifs remerciements.

C'est avec un grand plaisir que j'adresse mes remerciements à Monsieur le Dr R.Bessaih et Monsieur le Dr M.Si-Ameur qui sont intéressé à ce travail et d'accepter d'être membre de jury, ainsi à l'ensemble du personnel de l'Institut, qu'ils en soient ici profondément remerciés.

Introduction:

L'étude du mouvement turbulent de fluide en présence de variations importantes de masse volumique est, depuis quelques années, la source d'un intérêt croissant. Un intérêt particulier tant sur le plan de la compréhension de la physique de tels phénomènes que sur celui de l'application industrielle, comme en combustion ou lors de la phase critique d'entrée dans l'atmosphère, d'un objet volant, où les différences de température entre la paroi et la couche externe donnent lieu à de fortes variations de masse volumique, ou encore lors de refroidissement des pales de turbines par injection d'un gaz différent. En effet, malgré l'importance de ces écoulements, il existe relativement peu d'études complètes, numériques ou expérimentales. L'attrait fondamental réside tout particulièrement dans le fait que le couplage des équations de conservation thermodynamique et de la mécanique (masse, quantité de mouvement, ...) devient fort par l'apparition d'une variable supplémentaire : la masse volumique.

Ces écoulements ont été étudiés en utilisant plusieurs schémas de décomposition moyenne. Nous en distinguerons, pour les modèles de fermeture au second ordre, trois types.

Le premier, utilisant des moyennes conventionnelles au sens de Reynolds, a fait l'objet de certains travaux comme ceux de Donaldson et al. [1], Janika et Kollman [2], Janika et Lumley [3], et Panchapakesan et Lumley [4].

Le second, originalement proposé par Favre [5], utilise des moyennes dites "pondérées par la masse". Notons que cette décomposition prend en compte de façon implicite certains effets de masse volumique rendant l'écriture des équations pratiquement identiques à celles du cas isovolume. C'est ainsi que de nombreux auteurs comme Kent et Bilger [6], Borghi et Dutouy [7], Jones [8], Chassaing [9], Vandromme [10], Viollet et al. [11], Ruffin et al. [12], adoptent cette décomposition pour étudier des écoulements turbulents à masse volumique variable, et ce, avec des modèles essentiellement développés pour des écoulements à masse volumique constante.

Notons, en particulier, les calculs de Chassaing [9] et al. [13], qui mettent en évidence des différences significatives entre deux modèles de fermeture semblables avec des regroupements binaires (Flux de masse inclus dans les grandeurs moyennes) ou tertiaires (Flux explicités en fonction des moments d'ordre deux) : il a utilisé les moyennes conventionnelles, en regroupant les corrélations convectives en trois contributions, dégageant un terme de flux basé sur la valeur instantanée de la masse volumique, il montre que les corrélations doubles impliquant la fluctuation de masse volumique sont liées, dans différents cas, au termes précédents, c'est à dire toute corrélation du type f est liée au terme de flux principal correspondant de type $\overline{f u_i}$, ces flux principaux font l'objet d'équation de bilan en tous points semblables à celles obtenues en situation où la masse volumique est constante.

Enfin, un troisième type de décomposition appelée "mixed-weighted", représentant un cas hybride des deux décompositions classiques de Favre et Reynolds, a été développée par Ha Minh et al. [14] et Mac Innes [15].

En définitive, les différentes méthodes actuellement mises en oeuvre permettent, pour la plupart, une assez bonne prédiction du comportement global d'un jet à masse volumique variable. Cependant il apparaît nettement qu'un raffinement est nécessaire, notamment en ce qui concerne la structure fine de la turbulence et plus particulièrement les modélisations de termes d'ordre supérieur (moments d'ordre trois, corrélations pression-vitesse, ...). Ceci

est d'autant plus critique dans la région de proche sortie des jets, où la turbulence est loin d'être en équilibre. Il ressort nettement de la littérature que la variation de masse volumique affecte de manière considérable l'évolution des grandeurs turbulentes.

Sarh cite: assur remarque que l'énergie cinétique de la turbulence, d'un jet d'air plan fortement chauffé, est plus forte que celle d'un jet froid. De plus, il note que le paramètre $\overline{v^2}/u^2$, qui peut être considéré comme un indicateur du mélange turbulent Browne et col cite: brow , augmente : une tendance à l'isotropisation semble apparaître lorsqu'un jet débouche dans un milieu ambiant qui est plus lourd. Panchapakesan et Lumley cite: apan observent, eux aussi, dans un jet d'hélium, une augmentation de l'énergie cinétique de la turbulence. Ces auteurs concluent que les différences rencontrées au niveau de la structure de la turbulence sont essentiellement induites par les effets de gravité, et ce, même dans les régions où les forces d'inertie sont censées être dominantes.

L'existence d'un mouvement organisé dans les écoulements de jets a été mise en évidence par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer, pour l'étude de la région de proche sortie, Bradshaw et col cite: brad , Cohen et wygnanski cite: cohe , Chua et antonia cite: chu . Ce mouvement contribue de façon significative au transfert de chaleur et de quantité de mouvement et joue un rôle important dans le contrôle du taux de réaction chimique en combustion Kumori et Ueda cite: kumo . L'entraînement d'un jet est aussi dépendant de l'existence de ces structures cohérentes Dahm et dimotakis. Dans les jets axisymétriques fortement chauffés étudiés à L'IMST Bahraoui cite: abah et Amielh cite: aami , une augmentation notable du nombre de prandtl de la turbulence a été observée. Ceci est également obtenu par Sarh cite: assur dans le cas d'un jet plan. Ce fait semble être lié à la diminution de l'importance des structures cohérentes ou au développement de structures de plus petites échelles ayant un caractère moins anisotrope; ce qui soutient d'ailleurs le résultat précité relatif à la tendance à une isotropisation de l'écoulement quand diminue. C'est d'ailleurs une des conclusions du colloque Euromech 237 Fulachier et col cite: fula : "puisque les variations de masse volumique affectent les flux turbulents, en particulier les tensions de Reynolds, on peut s'attendre à ce que les structures cohérentes soient aussi modifiées".

Une autre manifestation de l'influence des variations de densité sur la structure de la turbulence peut être appréhendée à travers le rapport de temps caractéristiques dissipatifs attachés au champ de scalaire $\overline{\tau}^2/2$ et vitesse $k/$. En effet une comparaison, entre résultats numériques et expérimentaux, effectuée à l'IMST Anselment et col cite: ansel a montré que ce rapport diminuerait pour de forts chauffages, résultats cohérent avec celui de Chassaing et chibat cite: acha qui préconisent de prendre 0.7 pour un jet de CO_2 s'épanouissant dans de l'air au lieu de 0.5, valeur alors établie pour le cas d'un contaminant passif. Notons que les échelles de temps caractéristiques dissipatifs sont essentielles pour bien caractériser la turbulence et le mélange; en particulier, les modélisations de combustion turbulente de type Lagrangien Borghi et Gonzales cite: abor font intervenir des temps de mélange qui semblent reliés aux temps caractéristiques Eulériens précités.

La stabilité des jets est aussi affectée par la variation de masse volumique; Monkewitz et Sohn cite: amok montrent que, lorsque le rapport des masses volumiques S est inférieur à 0.72, le jet devient absolument instable. Or la présence d'une instabilité absolue peut donner naissance à des oscillations auto-entretenues qui sont la cause de changements conséquents dans le développement d'un jet. Nous pouvons citer les travaux de Sreenivasan et col cite: sree pour des jets d'hélium dans de l'air ambiant, ou encore ceux de Monkewitz et col cite: monz sur des jets d'air fortement chauffés. Les visualisations de

Riva cite: ar , dans un jet d'hélium, dans lesquelles on observe des éjections intermittentes transversales de gaz, confirment ces résultats. Soulignons, toutefois, que lorsqu'un co-courant existe, même très faible, l'instabilité disparaît. On peut également penser que, pour un jet pleinement turbulent dès l'émission, le phénomène n'existe plus.

En ce qui concerne les grandeurs globales la majorité des travaux s'est consacrée à tester les lois de décroissance générales, il ressort nettement que les décroissances de scalaire demeurent supérieures à celles de la vitesse : "le scalaire se mélange mieux que la quantité de mouvement". Par ailleurs, de nombreux travaux montrent que l'entraînement et le mélange augmentent lorsque la masse volumique du jet diminue. Les toutes premières expériences de Corrsin et Ulberoi cite: acor sur un jet d'air fortement chauffé $S_{j/e} = 0.49$ montrent que les décroissances axiales de vitesse et de température sont plus prononcées que celles d'un jet avec faible chauffage $S = 0.95$. Ricou et Spalding cite: arico mesurent un entraînement, pour un jet d'hydrogène s'épanouissant dans de l'air au repos $S = 0.07$, plus fort que celui obtenu dans le cas d'un jet à densité constante. De même, Tombach cite: ato trouve qu'un jet d'hélium débouchant dans de l'air a un épanouissement plus important et une décroissance axiale de vitesse plus rapide que dans le cas d'un jet homogène. Des observations similaires ont été faites par Abramovich et col cite: ABR pour des rapports S variant de 0.14 à 0.79. Ainsi, la plupart des résultats s'accordent sur un effet global significatif de la variation de masse volumique : "plus le jet de gaz est léger, meilleur est son mélange".

D'autre part, il est rare, comme le soulignent Russ et Strykowski cite: arus , de retrouver des études systématiques concernant les effets des conditions initiales sur le développement d'un jet. Antonia et Bilger cite: aant se sont intéressés, pour un jet d'air C_{te} , à l'étude de l'effet d'un co-courant, et ils concluent que l'écoulement ne serait en similitude que pour des rapports $r = U_e/U_j$ suffisamment inférieurs à l'unité. L'éventuelle présence d'un confinement est elle-même sûrement à prendre en considération et une étude systématique de ce confinement, auquel s'ajoutent d'autres paramètres formant les conditions initiales, serait nécessaire. D'ailleurs, Matsumoto et col cite: matsu montrent que l'épaisseur de la paroi de la buse d'éjection peut avoir une influence considérable sur la croissance d'un jet et que celle-ci est d'autant plus forte que l'épaisseur de la buse est importante: néanmoins, lorsque le rapport r_v demeure faible $r_v = 0.2$, les effets précédents deviennent négligeables. Le nombre de Reynolds Re_j est aussi un paramètre d'importance. En effet, Pitts cite: pit obtient, indépendamment de la masse volumique, une diminution de la croissance d'un jet lorsque Re_j augmente.

D'autres paramètres globaux sont importants : les demi-largeurs L_u et L_s . Comme il est établi que la décroissance axiale du champ scalaire est plus rapide que celle du champ dynamique, il semble logique que L_s soit légèrement plus forte que L_u ce qui est, d'ailleurs, généralement observé, Fulachier et col cite: aful. De plus, la pseudo-similitude ne prévoit aucune influence de la masse volumique sur la croissance de ces grandeurs alors qu'il semblerait que, lorsque S diminue, la demi largeur augmente: c'est d'ailleurs ce que souligne Hinze cite: hinz. Notons que les mesures de Sarh cite: assur effectuées dans un jet chauffé de canal rectangulaire indiquent un comportement inverse. En fait, la similitude étant approchée, il subsisterait un effet de masse volumique alors non pris en compte. Soulignons que l'effet de densité sur la demi-largeur n'est en aucun cas comparable à celui qui existe sur le développement axial des champs dynamique et scalaire.

La configuration adoptée ici dans ce travail est celle d'un jet coaxial de deux tubes concentriques axisymétriques. Deux situations avec et sans variation de densité ont été considérées, avec un rapport de masse volumique variant de 0.14 He/air à 1 air/air ,

pour un flux de quantité de mouvement M_j constant a la sortie de la buse voir figure 1,1 . Ce choix se justifi par le fait que cette configuration de jet, est la plus repondue d'un point de vue pratique.

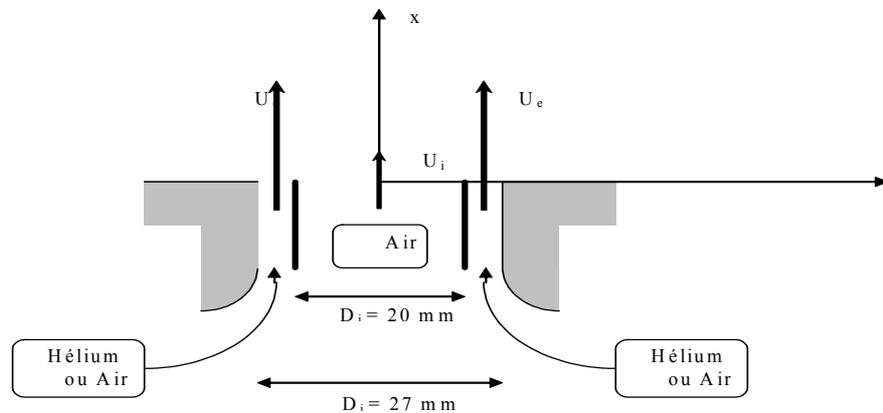


figure (1-1) Schéma de la buse coaxial.

Parmi ces applications pratiques on cite principalement le domaine de la combustion pour améliorer le mélange en combustion liquide, largement gouverné par la dynamique des écoulements

pour améliorer la performance des injecteurs de moteur de fusées pour éviter une mauvaise combustion et une flamme instable.

Les injecteurs sont composés de deux jets concentriques circulaires ou parviennent le carburant et le comburant, qui ne sont pas prémélangés. Les combustibles utilisés sont l'oxygène liquide et l'hydrogène gazeux. Le premier, lourd et à faible vitesse, est injecté dans la buse centrale. L'hydrogène, très léger et très rapide, est injecté dans la buse annulaire. Nous sommes donc en présence d'un écoulement diphasique, complexe par nature et encore plus complexe si l'on considère qu'il s'agit d'un écoulement réactif, donnant lieu aussi à de fortes augmentations de température dues au processus de combustion. La région d'étude est assez limitée dans l'espace: quelques stations en aval suffisent pour la combustion.

Une autre application est la réduction du bruit des moteurs d'avion, il a été observé empiriquement que le bruit produit par un jet simple pour une vitesse de sortie fixée peut être réduit grâce a un jet co-axial.

C'est dans le but de nous rapprocher de ces type d'écoulement que nous avons mené des recherches sur les jets coaxiaux, monophasique, isotherme, avec fortes différences de densité.

Les jets turbulents coaxiaux axisymétrique à densité pratiquement constante ont fait l'objet de nombreux travaux, on peut citer ceux de Ko et Chan, Ko et Au, Ko et Kwan cite: ak , plusieurs d'entre eux concernent des expériences réalisées avec des rapports de vitesse extérieure / intérieur plus petites que l'unité le plus ancien de ces travaux que nous connaissons est celui de Morton cite: am , qui développe un modèle simplifié mais qui ne prend pas en compte la région des cônes potentiels, ou la plus grosse partie du mélange se réalise.

Champagne et Wynanski cite: ach , réalisent un important travail expérimentale, ou ils mesurent les composantes axiale et radiale de la vitesse par thermo anémométrie. Ils présentent deux types de buses, avec des rapports de diamètre différent et comparent les résultats obtenus. On peut citer, aussi le papier de Williams et Al cite: aw , ou le but de l'étude est de trouver le jeu de la vitesse qui permettra de prédire l'atténuation du bruit du jet central.

D'autres travaux ceux de Ko et Kwuan ou les vitesses intérieures plus grandes que les vitesses extérieures sont à partir des mesures au fil chaud et au microphone.

Il y a aussi quelques travaux sur les jets coaxiaux homogènes, avec des rapports de vitesse de l'ordre de 1, ainsi, Ribeiro et Whitelaw 1980, présentent des jets coaxiaux à $r_v = 0,68, 1$ et $1,54$, avec une partie de l'étude consacrée aux jets avec une composante hélicoïdale.

L'équipe du Pef.Ko, de l'université de hong kong, a réalisé d'autres travaux sur les jets coaxiaux à densité constante, pour des rapports de vitesse entre 1 et 6.7. Ils ont réalisé des mesures des vitesses axiales et de pression (avec un microphone). Les travaux de Ko et Au 1985 et de Au et Ko 1987) ou les jets qu'ils étudient ne présentent pas de région de recirculation, comme conséquence de la géométrie de la buse bien profilée et de la laminarité des écoulements en sortie de buse.

Dahm et Al cite: ad montrent fondamentalement des visualisations réalisées dans des jets d'eaux coaxiaux, ils examinent les types de convection des grandes structures des couches de mélange initiales, en fonction des rapports de vitesse et des vitesses absolues. Ainsi à faible rapport, les tourbillons sont convectés comme les structures d'un sillage, et pour les forts rapports, ils sont convectés comme les tourbillons d'une couche de cisaillement. Tang et Ko cite: tang font une étude similaire sur les structures dans la région proche d'un jet coaxial homogène, à $r_v = 3$.

Par contre, l'effet de forts gradients de densité lorsque la masse volumique est variable a été étudié récemment par l'équipe de E. Hopfinger, du LEGI-IMG, qui a réalisé des études expérimentales sur les jets coaxiaux, tant homogènes qu'hétérogènes, pour un projet d'étude des injecteurs de moteurs fusée. Villermaux et al. cite: av ont développé un modèle simplifié pour l'établissement du début du régime de recirculation, en fonction du rapport des flux de quantité de mouvement extérieur/intérieur, M_j . Ils ont réalisé des mesures de vitesse, pression et concentration, pour différents rapports de vitesses, dans des jets coaxiaux homogènes (à eau).

Parmi les études sur les jets coaxiaux où les effets de densité variable ont été considérés a été faite par Gladnick et al. cite: ag. Ils ont utilisé une configuration de trois jets concentriques, avec de l'air et du CFC-12 ($CFC_{12} / air = 3.8$). Les rapports de vitesses extérieure/intérieure ont varié de 0.26 à 2, et pour ce dernier cas la valeur du rapport M_j est de l'ordre de $M_j = 15$, ce qui se situe dans la partie inférieure de la gamme de valeurs que nous avons envisagées.

Les jets axisymétriques simples avec différence de densité ont été largement étudiés. Plusieurs de ces études concernent le champ lointain du jet. Ainsi, on peut citer les articles de Pitts cite: ap, où il présente des mesures pour différents gaz injectés dans un écoulement co-courant, en fonction du nombre de Reynolds.

Ruffin et al., cite: aru ont montré que le paramètre le mieux adapté aux différences de densité dans les jets est le rapport des flux de quantités de mouvement initiales, entre le jet et le co-courant. L'étude est numérique et considère le champ lointain du jet. Dans la même ligne, Djeridane cite: adj présente une étude expérimentale du champ proche $x/D = 40$, où sont mesurées deux composantes de la vitesse et la concentration, en utilisant l'anémométrie laser. Il présente aussi une étude numérique, afin d'évaluer les termes qui n'ont pas pu être mesurés ou estimés à partir des mesures. Il conclut qu'il n'existe pas de véritable similitude, mais il établit des lois d'affinité.

Pour les jets à masse volumique variable, immergés dans un écoulement co-courant, nous pouvons citer l'étude de J.-C.Sautet 1992, L'auteur a mesuré l'évolution axiale des vitesses et concentrations par anémométrie laser. Afin d'étudier la dissipation scalaire, il a réalisé des mesures instantanées de densité par diffusion de MIE. Cette méthode, de mise

en oeuvre difficile, donne de bons résultats, malgré un grand rapport signal-bruit. Ainsi, pour les gaz plus légers, les profils présentent plusieurs pics et de plus grande amplitude que pour les gaz lourds. Pour un jet de gaz léger, les grandes structures sont plus développées et pénètrent profondément dans le jet, tandis que pour les gaz lourds, elles sont limitées à la région de la couche de mélange.

Objecifs du travail

Le premier objectif qui motive cette étude consiste à explorer le comportement des jets coaxiaux turbulents homogènes et hétérogènes en fonction des vitesses et des densité initiales, et de comprendre la dynamique et les processus de mélange des jets coaxiaux avec fortes différences de densité. La détermination de l'existence d'une zone de recirculation ou d'un cône potentiel, pour chaque type de jet, sont des priorités de ce mémoire. Les rapports initiaux des vitesses et des densités sont les paramètres qui vont définir le type de jet. En faisant varier les vitesses et densités, nous allons nous déplacer entre les deux extrêmes. Il y aura des combinaisons vitesse-densité initiales qui développeront un cône potentiel et d'autres qui conduiront à l'établissement d'une zone de recirculation. Un paramètre important dans cette étude est la longueur du cône potentiel et sa variation avec les paramètres de l'écoulement. Du point de vue de l'application aux injecteurs de moteurs fusée, c'est le cas intéressant, car il ne doit pas y avoir de recirculation à la sortie des injecteurs.

Le deuxième objectif de ce travail numérique c'est d'établir et formuler les équations des écoulements turbulents où la masse volumique est variable, dû à un mélange de gaz différent. Sur le plan de la modélisation de ce type d'écoulement, il existe plusieurs schémas de fermeture au second ordre, qui seront comparés et discutés. Le schémas adopté ici c'est la proposition de Favre.

Dans notre étude, la vitesse du jet annulaire sera toujours plus grande que celle du jet central et la densité du fluide annulaire sera toujours inférieure ou égale à celle du fluide injecté au centre.

Organisation du mémoire

La première partie de ce mémoire, commence par démontrer l'importance des jets coaxiaux, et fournir une bref étude bibliographique sur le sujet.

La deuxième partie est consacrée d'une façon détaillée à la description des jets coaxiaux et des couches de mélange. Et en rappelant les différentes formulations des équations ouvertes du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable, en présentant brièvement les principales propositions existantes, depuis la proposition de Favre qui a introduit la notion de moyenne pondérée par la masse volumique jusqu'à la nouvelle proposition de P.Chassaing.

La troisième partie illustre les équations de transport fondamentales de la mécanique des fluides.

La quatrième partie traite la méthode numérique basée sur des intégrales locales sur des volumes finis, et les principes de la discrétisation des équations de mouvement.

Enfin, dans la dernière partie de ce mémoire en présente les principaux résultats en appliquant la méthode numérique discutée au chapitre 4, où les résultats numérique pour chaque cas, homogène comme le cas hétérogène sont commentés et comparés avec les résultats expérimentaux pour pouvoir ensuite tirer les conclusions et faire les remarques nécessaires.

La physique de la turbulence des jets co-axiaux et des couches de mélange:

Les jets co-axiaux sont composés de deux tubes axisymétriques qui forment deux injecteurs séparant deux écoulements de fluide, central et annulaire. Le fluide ambiant est au repos.

Le champ d'écoulement, siège d'un fort gradient de vitesse produit par deux courants parallèles de vitesses U_1 et U_2 différentes, est dit couche de mélange.

dans le champ proche des jets co-axiaux, on distingue deux régions d'écoulement potentiel appelées cônes potentiels interne et externe. La fin du cône potentiel externe délimite la zone de développement initial des couches de mélange tandis que celle du cône potentiel interne marque le raccordement des deux jets en un jet simple. Au-delà de ce raccordement est la zone dite pleinement développée, qui est séparée de la première (de développement initial) par une zone intermédiaire.

Dans la zone initiale, développent deux couches de mélange qui croissent vers l'aval. Le saut de vitesse à l'interface extérieure, entre le jet annulaire et le fluide ambiant, Etant $U_2 - U_3 = 0$ la croissance spatiale de la couche de mélange qui s'y développe est indépendante du rapport des vitesses initiales r_u , alors que celle de l'interface intérieure est proportionnelle à $\frac{r_u - 1}{r_u + 1}$, $r_u = \frac{U_1}{U_2}$ voir figure ci-dessous.

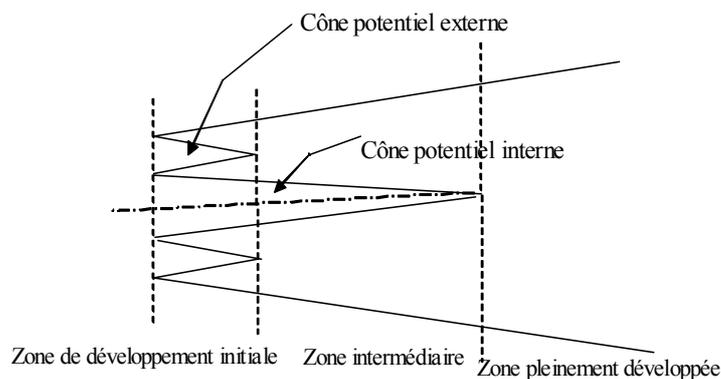
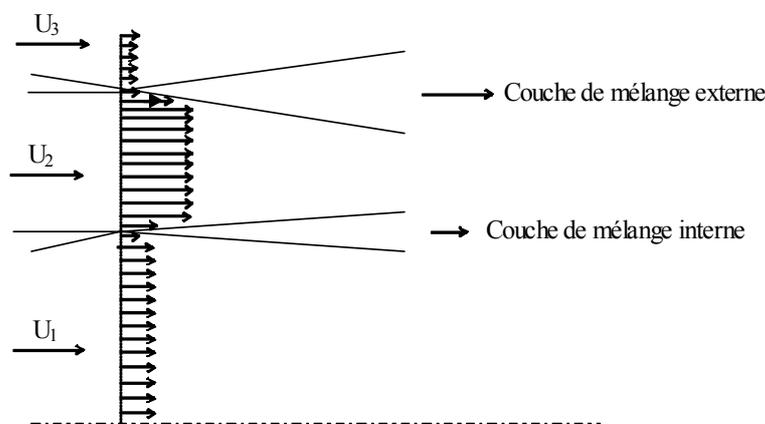


Figure (2-1) Les trois régions d'un jet coaxial



Figure(2-2) Couches de mélange

Notons également que les structures tourbillonnaires de la couche de mélange

extérieure dominant rapidement l'écoulement et gouvernent la dynamique du jet co-axial si $r_u \gg 3$.

Les couches de mélange représentent le mécanisme moteur de la dynamique du champ proche et méritent ainsi une attention particulière.

Couche de mélange:

Une couche de mélange est une sorte d'interface correspondant à une brusque différence de vitesse dans le fluide. On peut obtenir une couche de mélange telle que la figure (2-3) dans le sillage d'une plaque très fine de part et d'autre de laquelle les deux courants ont des vitesses différentes.

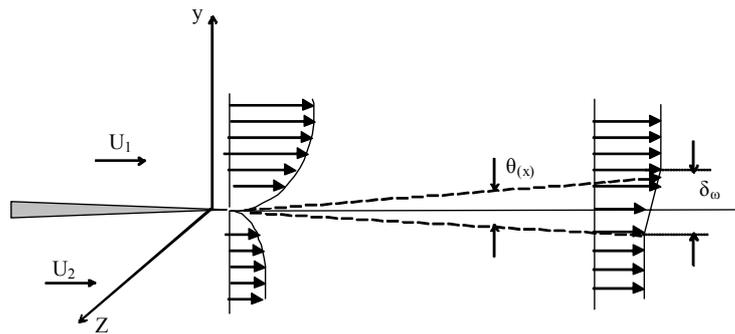


Figure (2-3) Couche de mélange

Notons ici que des tourbillons en spirale se forment et sont responsables d'une croissance de l'épaisseur de la couche $\delta_w(x)$. Il a fallu cependant attendre les célèbres expériences de A.ROSHKO et ses collaborateurs au CALECH dans le début des années soixante dix pour montrer l'existence de tourbillons cohérents de ce type dans des couches de mélange à très grand nombre de Reynolds. L'évolution spatiale de ces structures tourbillonnaires est exprimée en terme d'épaisseur de vorticité ω par la relation linéaire (Brown et Roshko, 1974):

$$\frac{d\omega}{dx} = 0.18 \frac{U_2 - U_1}{U_2 U_1} = 0.18 \frac{r_u - 1}{r_u + 1} \text{ où } r_u = \frac{U_2}{U_1} \quad \#$$

la relation entre ω et l'épaisseur de la quantité de mouvement

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{U - \bar{U}}{U} \right)^2 \right] \cdot dy \quad \#$$

où

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad \#$$

vitesse convective

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

est $\bar{\omega}$

Dans la couche de mélange, la vorticité (vitesse angulaire de rotation du tourbillon latent) est approximativement uniforme. A l'extérieur de la couche elle est nulle puisque les courants y sont uniformes. Une couche de mélange apparaît donc comme une nappe de vorticité (ou nappe tourbillonnaire) plongée au sein d'un écoulement sans vorticité (irrotationnel). Dans la nappe tourbillonnaire la vitesse du fluide parallèlement à la nappe qui subit un quasi discontinuité de part et d'autre de celle-ci, d'autre part dans le régime

laminaire, les parcelles fluides voyageront d'un côté ou l'autre de l'interface sans la traverser.

Supposons maintenant qu'une perturbation extérieure conduise à l'oscillation de la nappe tourbillonnaire voir figure 2-4.

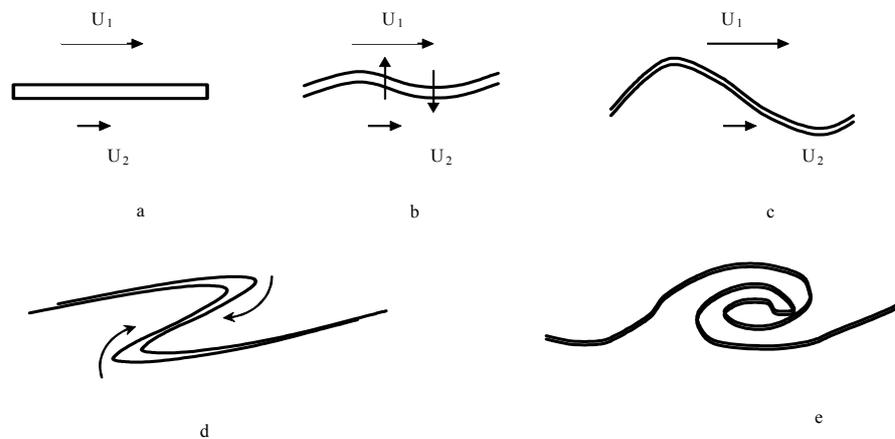


figure (2-4) Formation d'un tourbillon en spirale par instabilité d'

On premier lieu, un raisonnement analogue à celui fait pour la portance d'une aile permet de dire que la pression dans les parties concaves de la nappe va être supérieure à la pression dans les parties convexes. Donc le fluide va pousser la nappe tourbillonnaire vers le haut et vers le bas figure (2-4,b), accroissant l'amplitude de l'oscillation. On applique ensuite le théorème de Kelvin qui permet de dire, si l'on accepte de négliger la viscosité, que la nappe tourbillonnaire va être emportée par le fluide. En première approximation, la partie supérieure de la nappe sera donc emportée par le fluide du haut, et la partie inférieure par le fluide du bas. Puisque ce dernier est moins rapide la partie supérieure de la nappe tourbillonnaire va rattraper la partie inférieure, et provoquer une sorte de raidissement du front figure (2-4,c), puis par un nouveau mécanisme intervenant, conduisant à l'enroulement de la nappe tourbillonnaire par induction de vitesse, la partie inférieure va tendre à mettre en rotation autour d'elle la partie supérieure (dans le sens négatif, correspondant au signe de la vorticité de la couche de mélange que nous avons choisi de considérer). En même temps la partie supérieure va tendre à faire tourner la partie inférieure autour d'elle, dans le même sens, il en résulte un enroulement en spirale de la nappe tourbillonnaire, donc une concentration de vorticité dans la partie spirale (tourbillon de Kelvin-Helmoltz), au contraire, la vorticité dans les tresses extérieures diminue (figure (2-4,d et e))

Remarquons enfin que l'on peut observer très souvent dans la vie réelle ce type de tourbillon de Kelvin-Helmoltz: Dans l'eau d'un ruisseau ou d'une rivière, derrière un élargissement brusque du lit dans l'océan, derrière un cap, dans l'atmosphère, on trouve des tourbillons spiraux (d'axe horizontal) en aval des montagnes (dans des situations d'inversion thermique), ils sont alors marqués par des nuages. La tache rouge de Jupiter pourrait être aussi l'un d'entre eux, en aérodynamique, ces tourbillons sont lâchés derrière les avions, trains et automobiles, dans les chambres de combustion des moteurs d'avion, ces tourbillons sont nécessaires pour le mélange efficace du combustible à l'air.

Quelques caractéristiques générales de l'écoulement

Le caractère aléatoire:

Les variations irrégulières et imprévisibles de la vitesse, et des autres variables attachées au fluide, en fonction de l'espace et du temps constituent la manifestation la plus immédiatement perceptible de notre écoulement turbulent. Le recours à la méthode

statistique est apparu très tôt comme nécessaire pour faire face au défi que représentaient ces variations et pour obtenir les propriétés moyennes nécessaires à l'ingénieur. En dépit du caractère un peu artificiel de la séparation du mouvement instantané en un mouvement turbulent et un mouvement moyen qui n'a en fait d'existence qu'au plan statistique, cette méthode est toujours la plus utilisée. L'étude expérimentale couplée à l'analyse théorique puis à la modélisation des divers types de moyennes en un point (à travers les moments) ou en plusieurs points (à travers les corrélations et fonctions spectrales) a en effet conduit à une bonne compréhension globale de la physique des écoulements turbulents et à des méthodes de prévision relativement fiables de leurs propriétés essentielles.

Cette approche classique est cependant aujourd'hui battue en brèche pour deux raisons. La première est une prise de conscience de plus en plus nette de ce que la turbulence n'est pas un phénomène totalement aléatoire puisque l'on peut y identifier des mouvements organisés, les structures cohérentes, qui s'y répètent plus ou moins régulièrement et exercent une action parfois déterminante sur son évolution. La seconde est la possibilité offerte par les calculateurs les plus modernes d'une simulation numérique des irrégularités du comportement spatial et temporel des plus grandes échelles du mouvement turbulent, les gros tourbillons à d'ailleurs ne pas nécessairement confondre avec les structures cohérentes évoquées ci-dessus. Ainsi, la frontière entre la partie de l'écoulement qui pourra être calculée directement (et qui devra l'être si l'on recherche une précision maximale), et celle qui relèvera d'un traitement purement statistique sera vraisemblablement dans quelques années fixée par l'ingénieur lui-même en fonction de critères de coût et d'efficacité.

Cette évolution n'est d'ailleurs pas sans poser des problèmes au niveau conceptuel : existe-il à la limite une physique de la turbulence autre que celle contenue dans les équations de Navier ?

Le caractère non linéaire:

Une seconde caractéristique physique fondamentale de cet écoulement est la coexistence en son sein d'une gamme large et continue d'échelles de mouvements. Ceci est une conséquence directe de la non linéarité des équations de Navier-Stokes : même si l'énergie est concentrée au départ dans un domaine spectral restreint, cette non linéarité a pour effet une répartition sur toute l'étendue disponible en un temps fini. La non linéarité assure par ailleurs une interaction permanente entre toutes les échelles. La prédictibilité des grosses structures est donc nécessairement limitée par l'effet des petites, dont réciproquement l'universalité du comportement statistique est compromise par l'influence des grosses.

La physique des interactions non linéaires est aujourd'hui assez bien appréhendée, tout au moins dans les situations les plus simples. Dans les cas pratiques de turbulence développée, les plus grosses structures, nécessairement inhomogènes et anisotropes en raison des conditions aux limites, possèdent les échelles maximales autorisées par ces dernières. Les gros tourbillons responsables des flux et de la production d'énergie cinétique du mouvement turbulent par interaction avec le mouvement moyen, à un taux noté P , ont des échelles typiques de vitesse et de dimension de l'ordre de $u \sim U/5$ et $l \sim L/5$ si U et L sont les échelles globales correspondantes de l'écoulement considéré. Pour la turbulence tridimensionnelle à laquelle est généralement confronté l'ingénieur, les interactions de ces gros tourbillons ont pour effet un transfert, ou cascade de l'énergie cinétique produite, à un taux de l'ordre de $\frac{u^3}{l}$, vers des échelles de plus en plus petites pour lesquelles le comportement local de la turbulence devient progressivement isotrope et homogène, et donc universel. Le processus n'est limité que par la viscosité, lorsqu'il atteint des échelles suffisamment petites pour que le flux d'énergie transféré soit dissipé en chaleur sous l'effet

de celle-ci, à un taux noté ν . Les échelles des petits tourbillons dissipatifs sont celles de Kolmogorov, $\nu^{1/4}$ et $\nu^{3/4}$, mais leur structure exacte reste mal connue. L'expérience et l'analyse des différentes constantes de temps montrent que la turbulence a tendance à être en équilibre interne, c'est-à-dire que les taux de production, de transfert, et enfin de dissipation sont, au moins en moyenne, approximativement égaux :

$$P = U^3/25L$$

Ceci a des conséquences fondamentales pour des écoulements turbulents dont le nombre de Reynolds global, $Re = UL/\nu$, est grand ou même très grand. La turbulence accroît la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur dans une proportion considérable : son taux est en effet $U^3/25L$ au lieu d'être de l'ordre de U/L^2 , soit un rapport de $Re/25$ à 1. Paradoxalement, cette dissipation accrue n'est pas contrôlée par la viscosité, qui n'agit que sur l'échelle à laquelle elle s'opère, mais par les échelles globales qui fixent les taux des mécanismes inertiels de production et de cascade. La gamme d'échelles mise en jeu est très étendue, puisque les échelles dissipatives sont de l'ordre de $Re^{3/4}$ de la dimension des plus grosses structures. Enfin, les taux de cisaillement associés à ces petites échelles, de l'ordre de U/L , sont très supérieurs à celui, U/L caractérisant le mouvement moyen U/L .

Cet accroissement considérable des mécanismes moléculaires sous l'effet de la turbulence n'est pas limité à la dissipation visqueuse, mais s'étend aux diffusions de la chaleur ou de la masse dont l'efficacité croît en fonction des cisaillements locaux. C'est bien pourquoi le recours au mélange turbulent s'impose chaque fois que l'on désire uniformiser la composition d'un mélange fluide. En l'absence de diffusion moléculaire, le brassage par la turbulence aurait déjà pour effet une dispersion des hétérogénéités initiales vers des échelles de plus en plus petites, avec un accroissement corrélatif de la surface de contact entre les composants. Le mélange moléculaire s'exerce ainsi sur une surface considérablement accrue, mais son efficacité est encore augmentée par les cisaillements locaux qui réalisent un flux de variance vers les plus petites échelles, assez analogue à la cascade de l'énergie cinétique.

Le caractère diffusif :

L'effet de la turbulence qui a certainement la plus grande importance pratique pour l'ingénieur est sa capacité à diffuser spatialement toutes les grandeurs attachées au fluide avec une efficacité très largement supérieure à celle de la diffusion moléculaire. Par exemple, pour la quantité de mouvement, le rapport de la viscosité turbulente à la viscosité moléculaire est de l'ordre de $\nu_t/\nu = UL/25\nu = Re/25$ (on retrouve naturellement le rapport des taux de dissipation).

Les causes et les effets de cet accroissement des transferts au sein du fluide sont trop bien connus pour que nous nous y attardions. Un point sur lequel il convient cependant d'insister est que la diffusivité turbulente, étant une caractéristique non pas du fluide mais de l'écoulement, peut être dans une plus ou moins grande mesure contrôlée en agissant sur ce dernier. Lorsque, comme c'est souvent le cas en aéro ou en hydrodynamique, la diffusion turbulente a des effets néfastes d'accroissement des traînées de frottement ou des pertes de charge, on s'efforce d'en retarder l'apparition ou d'en diminuer le niveau. Il est cependant bien des situations où la diffusion turbulente a des effets bénéfiques : on s'efforce alors de la favoriser. C'est la situation de loin la plus fréquente dans les génies thermique et chimique où l'on recherche des transferts de chaleur et de matière les plus élevés possibles.

La diffusion par la turbulence est très généralement modélisée par l'intermédiaire de coefficients de diffusivité turbulente. Les limites de cette approche sont aujourd'hui bien connues : la dispersion par la turbulence met en jeu des échelles de plus en plus grandes à mesure que l'on s'éloigne de la source, et dans les situations permanentes, fait donc

Intervenir les échelles les plus grandes présentes dans l'écoulement. Ces dernières devraient rester petites vis-à-vis des échelles de variation des variables moyennes considérées pour que le concept de diffusivité turbulente, impliquant une relation de proportionnalité entre des flux et des gradients locaux, ait un sens. Cela étant impossible, ce concept se trouvera plus ou moins gravement en défaut dès que l'on sortira des situations les plus simples : un exemple bien connu est l'apparition de flux à contre-gradient.

En conclusion, la physique de la turbulence intéresse l'ingénieur à deux titres. D'abord parce que la turbulence est un phénomène auquel il est très fréquemment confronté et qu'il doit donc bien connaître pour mieux en comprendre, et si possible en prévoir les effets. Ensuite parce que la turbulence apparaît de plus en plus comme un outil dont il doit pouvoir mieux maîtriser l'emploi grâce à une meilleure connaissance de son origine et de ses mécanismes.

Les équations des écoulements turbulents

Ecrire des équations pour les écoulements turbulents ne pose pas beaucoup de problèmes, mais les résoudre est toute une autre histoire, une histoire qui continue de s'écrire à l'heure actuelle et qui n'est pas près d'être achevée.

La résolution directe des équations de Navier-Stokes se heurte à de formidables obstacles, comme les grandeurs U_i et P sont des variables aléatoires, il faudrait résoudre le système à tout instant, mais de telles simulations ne peuvent être envisagées et pour encore longtemps, pour le calcul d'écoulements pratiques, car elles sont très gourmandes en taille mémoire et temps de calcul, on est donc contraint de travailler sur des équations moyennées.

Il est presque paradoxal qu'à la fin du vingt unième siècle, alors que l'on a pu comprendre et modéliser de nombreux phénomènes à l'échelle des microparticules (domaine de la mécanique quantique) ou à l'échelle de l'univers (domaine de la mécanique relativiste), les écoulements des fluides les plus courants, comme l'eau et l'air, phénomène à l'échelle humaine, à l'exacte portée de notre vue, de notre ouïe, de notre toucher, soient encore aussi mystérieux, alors qu'ils appartiennent au domaine de la mécanique classique. Un mot résume le grand défi scientifique, la turbulence.

Considérons maintenant l'équation du bilan de quantité de mouvement dans un repère absolu fixe :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i V_j}{\partial x_j} = g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \#$$

où τ_{ij} représente le tenseur des contraintes de viscosité et g_i les composantes de l'accélération de la pesanteur.

En introduisant un opérateur de moyenne statistique classique (moyenne d'ensemble), tel que par définition, toute fonction du champ de l'écoulement $F(x_j, t)$ puisse être décomposée en :

$$F(x_j, t) = \overline{F(x_j, t)} + f(x_j, t) \quad \#$$

avec $\overline{f(x_j, t)} = 0$ #

L'équation ref: hhh donne immédiatement par passage à la moyenne :

$$\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{V_i V_j}}{\partial x_j} = g_i - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \quad \#$$

Toute la question consiste alors à expliciter, sur la base de la décompositions ref: ppp les

différents termes de cette équation, et tout particulièrement la valeur moyenne du produit :

$$M_{ij} = \overline{V_i V_j} \quad \#$$

Fluide à masse volumique constante:

Dans le cas où la masse volumique est constante (cte) on obtient :

$$\overline{M_{ij}} = \overline{V_i V_j} = \underbrace{\overline{V_i V_j}}_a + \underbrace{\overline{v_i v_j}}_b \quad \#$$

On note alors que :

- (i) les deux seules contributions qui s'introduisent par passage à la moyenne, regroupent, de façon indépendante, la vitesse moyenne et la fluctuation.
- (ii) En convenant de définir « le mouvement moyen » à partir du champ de vitesse moyenne, l'interprétation du terme (a) est immédiate.
- (iii) La corrélation convective (b) peut également s'interpréter en terme de « contrainte » dans le bilan de forces relatif au « mouvement moyen ».
- (iiii) Les deux contributions conservent la symétrie initiale de tenseur M_{ij} , propriété importante puisque M_{ij} intervient par une divergence.

Donc ces équations moyennes appelées les équations de Reynolds, elles ne diffèrent des équations de Navier-Stokes que par les termes $\overline{v_i v_j}$ qui sont des inconnues supplémentaires on dit que le système n'est pas fermé, pour pouvoir résoudre ce système, il faut trouver des équations supplémentaires en nombre suffisant, c'est le problème central de la turbulence ou problème de la fermeture c'est à dire le problème de la modélisation.

Depuis les années 1840 les chercheurs ont développé plusieurs modèles, il se posa alors rapidement le problème du choix d'un modèle par un utilisateur potentiel, qui se trouve dans une situation analogue à l'acheteur d'une voiture confronté à un large éventail de produits ne sachant a priori lequel choisir. Les critères de choix peuvent être multiples: qualités, fiabilité, souplesse, mise en oeuvre économique ect... Le choix est rendu difficile car les différents modèles ont rarement été testés dans des situations identiques. Pour clarifier la situation, une compétition a été organisée à l'université de STANFORD en californie en on a parlé avec humour des premières olympiades de la modélisation comme au decathlon, chaque modèle concurrent devait se soumettre aux mêmes épreuves. En additionnant les points, on aurait une base objective pour consacrer le champion. En fait, l'évaluation a également tenu compte du dopage des modèles, à savoir du nombre de constantes empiriques exigés par chacun d'entre eux. les meilleurs étant évidemment ceux qui en avait le moins. Les champions qui s'y révélèrent furent les modèles à plusieurs équations de transport de type ROTTA.

Le modèle K est certainement un de ces modèles de turbulence les plus populaires et les plus utilisés. Il est fondé à nouveau sur l'hypothèse de Boussinesq, consistant à postuler l'alignement entre le tenseur de déformation du champ moyen et le tenseur des contraintes de Reynolds par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente. On doit à Jones et Launder une des premières formulations de ce modèle et à Launder et Spalding la détermination des constantes usuelles:

Par analogie au tenseur des contraintes dans les écoulements laminaires Boussinesq a proposé:

$$\overline{v_i v_j} = \tau \left[\frac{\overline{V_i}}{x_j} - \frac{\overline{V_j}}{x_i} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \#$$

k : l'énergie cinétique turbulente

τ : viscosité cinématique turbulente estimée par la même analogie avec la viscosité laminaire, elle est proportionnelle à une certaine vitesse caractéristique ainsi qu'une longueur caractéristique.

$$t = \frac{L}{V}$$

L: longueur caractéristique

V: une vitesse caractéristique de la turbulence par analogie avec les vitesses moyennes des molécules dans le cas d'une viscosité laminaire

: coefficient de proportionnalité

La vitesse caractéristique de la turbulence est \sqrt{k} d'où on peut écrire: $t = c \cdot \sqrt{k} \cdot L$

avec $L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$

D'où: $t = c \cdot \frac{k^2}{\epsilon}$

D'où le modèle K-ε, nécessite la résolution de deux équations de transport semi-empiriques pour l'énergie cinétique k et le taux de dissipation de l'énergie turbulente ϵ .

Cela permet la détermination de t et de la contrainte de Reynolds $\overline{v_i v_j}$.

Equation de l'énergie cinétique turbulente:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{k} V_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{t}{k} \right) \frac{\bar{k}}{x_j} \right] + P \quad \#$$

Equation de la dissipation:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon V_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{t}{k} \right) \frac{\epsilon}{x_j} \right] - \frac{\epsilon}{K} + C_1 P - C_2 \epsilon \quad \#$$

où le terme P est le terme de production de l'énergie cinétique turbulente \bar{k} par l'écoulement moyen :

$$P = \overline{v_i v_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{V_i}{x_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad \#$$

Ce modèle possède 5 constantes, que l'on souhaite les plus universelles possible, ces constantes ont été déterminées dans les configurations de référence suivantes :

$$C_1 = 0.09 \quad C_2 = 1.44 \quad C_3 = 1.92 \quad C_4 = 1.0 \quad C_5 = 1.3$$

Fluide à masse volumique variable:

Lorsque la masse volumique est une fonction aléatoire, il vient:

$$\overline{M_{ij}} = -\overline{V_i V_j} - \overline{v_i V_j} - \overline{v_j V_i} - \overline{v_i v_j} - \overline{v_i v_j} \quad \#$$

Cinq contributions apparaissent ainsi, dont le regroupement peut être envisagé de différentes façons. Le cœur du problème est alors (i) d'explicitier d'un point de vue formel et (ii) d'interpréter sur le plan physique la distinction entre :

« mouvement moyen » (ou macroscopique) et mouvement d'agitation nécessairement associée à un tel regroupement.

Ainsi pour l'équation de conservation de la masse, en introduisant la décomposition de Reynolds pour la masse volumique $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ et pour la vitesse $V_i = \bar{V}_i + v_i$, puis en moyennant, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \#$$

Nous avons donc une nouvelle corrélation à modéliser, $\overline{v_i v_j}$

Nous allons passer brièvement en revue les principales propositions existantes:

1- A l'exception de Janicka et Lumley cite: aj la majorité des auteurs s'accorde pour

utiliser une formulation « conservative » des équations générales de bilan cite: ah Ainsi, dès 1958, Favre cite: af1 introduit la notion de moyenne pondérée par la masse volumique qu'il développe dans une série de publications cite: af2 , cite: af3 , cite: af4 . Cette moyenne permet de retrouver formellement un système d'équations proche de celui obtenu pour un écoulement où la masse volumique est constante.

posant :

$$\tilde{V}_i = \frac{\overline{V_i}}{\overline{\rho}} \quad \text{et} \quad \overline{v_i} = 0 \quad \#$$

et on y associe la nouvelle décomposition de la variable V

$$V_i = \tilde{V}_i + v_i'' \quad \#$$

avec :

$$\overline{v_i''} = 0 \quad \text{mais} \quad \overline{v_i''^2} = \overline{v_i^2} \neq 0 \quad \#$$

et notant ici que la moyenne de Favre n'est donc pas centrée, contrairement à la décomposition de Reynolds.

Donc la valeur instantanée de n'importe quelle fonction F peut s'écrire comme suit:

$$F = \tilde{F} + f \quad \text{avec} \quad \overline{f} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\tilde{F}} = 0 \quad (\text{Favre})$$

$$F = \bar{F} + f \quad \text{avec} \quad \bar{f} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{F} = \overline{F} \quad (\text{Reynolds})$$

La valeur moyenne donc s'écrit:

$$\tilde{F} = \frac{\overline{F}}{\overline{\rho}} + F - \frac{\overline{f}}{\overline{\rho}} \quad \#$$

$$\bar{F} = F + \bar{f} \quad \#$$

et on peut facilement déduire la relation entre fluctuations:

$$f = \tilde{f} + \bar{f} \quad \#$$

donc on peut obtenir:

$$\overline{f} = \overline{\tilde{f}} + \overline{\bar{f}} \quad \#$$

en appliquant ref: B3 de fluctuation pour la nouvelle fonction G en multipliant par f et en faisant la moyenne on obtient:

$$\overline{f g} = \overline{f g} + \overline{g \bar{f}} + \overline{\bar{f} g} \quad \#$$

en multipliant maintenant ref: B3 par g et faisant la moyenne on déduit:

$$\overline{f g} = \overline{f g} + \overline{\bar{f} g} \quad \#$$

En basant sur ref: B4 et ref: B5 on peut avoir la relation entre

$$\overline{f g} = \overline{f g} + \overline{\tilde{f} g} \quad \#$$

l'expression M_{ij} se réduit alors à :

$$M_{ij} = -\overline{\tilde{V}_i \tilde{V}_j} - \overline{v_i v_j} \quad \#$$

En utilisant les relations de conjugaison des deux opérateurs $\overline{\quad}$ et $\tilde{\quad}$ par exemple ref: a1), on peut aisément vérifier que le regroupement des termes s'opère de la façon suivante :

$$\overline{M_{ij}} \left(\underbrace{-\overline{V_i V_j} \quad \overline{v_i V_j} \quad \overline{v_j V_i} \quad \overline{\frac{v_i \cdot v_j}{-}}}_{-V_i V_j} \right) \quad \#$$

$$\left(\underbrace{\overline{v_i v_j} \quad \overline{\frac{v_i \cdot v_j}{-}}}_{v''_i v''_j} \right)$$

Reprenons l'exemple de l'équation de conservation de la masse. On écrit maintenant que :

$$V_i \quad \tilde{V}_i \quad v_i \quad \#$$

et en prenant la moyenne d'ensemble, il vient :

$$\overline{V_i} \quad -\overline{\tilde{V}_i}, \text{ puisque } \overline{v_i} = 0 \quad \#$$

Finalement, la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{-}{t} \quad \frac{-}{x_j} (-\tilde{V}_j) = 0 \quad \#$$

On transforme de la même façon l'équation de Navier-Stokes, en décomposant toutes les variables selon Favre, à l'exception de la masse volumique et de la pression P il vient :

$$\frac{(-\tilde{V}_i)}{t} \quad \frac{(-\tilde{V}_i \tilde{V}_j)}{x_j} \quad \frac{\overline{P}}{x_i} \quad \frac{-}{x_j} [ij \quad \overline{v''_i v''_j}] \quad \#$$

Ainsi, grâce à l'usage de moyennes pondérées, le terme convectif ne comporte plus, en moyenne, que deux contributions, comme c'est le cas pour un fluide incompressible. Cette simplification du formalisme n'est évidemment pas obtenue de façon artificielle mais résulte de la conception même du raisonnement physique. En bref, l'analogie avec la situation incompressible ne peut être réalisée qu'en considérant une évolution moyenne (ou macroscopique) d'un système fermé (conservation de la masse en moyenne), ce qui conduit manifestement à limiter ce système par une surface mobile à la vitesse macroscopique \tilde{U}_i . Dès lors, et comme tous les bilans sont effectués dans des volumes, on assure l'étanchéité des surfaces de courant tangentes à cette vitesse et, partant, l'introduction d'un seul terme de flux (corrélation convective $\overline{v''_i v''_j}$).

La méthode est donc particulièrement bien adaptée à la formulation et à l'interprétation de la moyenne des termes convectifs du bilan de toute propriété « transportable » exprimée par unité de volume.

Modèle k où la masse volumique est variable :

L'équation de la conservation de l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{\overline{v_i v_i}}{2}$, s'écrit

comme suit :

$$\frac{(-k)}{t} \quad \frac{(-k \tilde{V}_j)}{x_j} \quad \underbrace{\frac{\overline{v''_i v''_j} \tilde{V}_i}{x_j}}_1 \quad \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(\overline{v''_j v''_i v''_i})}{x_j}}_2 \quad \underbrace{\frac{\overline{v''_i P}}{x_i}}_3 \quad \underbrace{\overline{v_i g_i}}_4 \quad \underbrace{\overline{v''_i \frac{ij}{x_j}}}_5 \quad \#$$

La signification de différents termes à droite de l'équation ref: eq est comme suit :

Le premier terme représente l'interaction entre les fluctuations et le gradient de vitesse moyenne, il est responsable de la production de l'énergie turbulente par le mouvement moyen.

Le deuxième terme représente la triple corrélation qui est encore la manifestation de fermeture du problème à ce niveau, si on veut pas considérer des corrélations d'ordre

plus élevé, ce terme doit être modélisé

Le troisième terme représente l'interaction des fluctuations de vitesse et la pression.

Les deux derniers termes représentent respectivement les forces de masse et les forces de viscosité.

La modélisation de ces différents termes est bien expliquée et discutée dans la littérature pour le cas où la masse volumique est constante, on va discuter et considérer brièvement ici uniquement le cas où la densité est variable.

Effets de la densité variable et de l'accélération:

L'effet de l'interaction pression-densité dans la modélisation des écoulements à densité variable turbulents, a été constaté dans les travaux de Starnier et Blinger cite: starn et Librovich et Lisitsyn cite: libr, ils ont remarqué que ce terme a une grande influence sur les écoulements réactifs, pour le cas de flamme de diffusion que pour la flamme turbulente de prémélange. Un effet très important a été démontré qu'il existe pour les deux cas même pour un relatif petit gradient de pression. Son effet est lié avec le mécanisme de flotabilité, où les morceaux de fluide à faible densité sont accélérés en relation avec le gradient moyen de pression vers les morceaux de fluide où la densité est plus importante, donc l'effet de ce terme ne peut être négligé comme il a été opté dans des études précédentes et la modélisation du terme $\overline{v''_i \frac{P}{x_i}}$ de l'équation ref: eq est nécessaire afin d'introduire des termes additionnels dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente k et dans son taux de dissipation .

Le terme $\overline{v''_i \frac{P}{x_i}}$ englobe aussi l'effet de l'accélération gravitationnelle puisque le terme $\overline{u_i g_i}$ dans l'équation moyenne de Favre est nul.

On peut écrire :

$$\overline{v''_i \frac{P}{x_i}} = \overline{v''_i} \frac{\overline{P}}{x_i} - \frac{\overline{(v''_i p)}}{x_i} + \overline{p} \frac{\overline{v''_i}}{x_i} \quad \#$$

Le terme $\overline{p} \frac{\overline{v''_i}}{x_i}$ on peut le négliger il implique la fluctuation de pression générée généralement par des tourbillons à l'échelle sub-kolmogorov où ils seront immédiatement dissipés par la viscosité.

Le terme $\frac{\overline{(v''_i p)}}{x_i}$ est incorporé dans le terme diffusif de turbulence dans le processus de modélisation.

Donc le terme qui reste à modéliser est $\overline{v''_i} \frac{\overline{P}}{x_i}$.

On peut écrire:

$$\overline{v''_i} \frac{\overline{P}}{x_i} = \frac{\overline{v_i}}{x_i} \frac{\overline{P}}{x_i}$$

Et en appliquant l'approximation de la diffusivité turbulente pour la corrélation $\overline{v_i}$ on obtient:

$$\overline{v_i} = \frac{t}{pr_t} \frac{\overline{P}}{x_i}$$

On a donc:

$$G = \overline{v''_i} \frac{\overline{P}}{x_i} = \frac{t}{pr_t} \frac{1}{2} \frac{\overline{P}}{x_i} \frac{\overline{P}}{x_i} \quad \#$$

Cette approximation avec $pr_t = 1$ a été introduit en premier dans les équations du modèle k par Jones Mcguirk cite: jone, sans aucune explication.

en écrivant :

$$\frac{1}{x_i} \frac{\bar{P}}{a_1}$$

où a_1 est l'accélération local, la génération de la turbulence par la flotabilité peut être obtenue de l'équation ref: dv , comme il a été présenté par Rodi, cite: rod1 cite: rod2 , Rodi propose $p_{rt} = 0.8$ pour un observateur en mouvement avec le fluide, l'accélération par un champs de pression extérieur est équivalent au champs gravitationel, on peut remarquer que les deux effets sont inclus dans l'équation ref: dv .

La question qui se pose est pourquoi on doit introduire le terme G dans l'équation de production de l'énergie k et dans son taux de dissipation à la fois?

lorsque la vorticité se forme d'un fluide plus leger que le fluide environnant, celle ci est stable pour une longue periode du temps, et lorsque la vorticité se forme d'un fluide plus lourd que le fluide environnant, la vorticité est instable, cette instabilité conduit vers une désintégration très rapid des tourbillons de fluid lourd.

L'explication est présenté par Turner cite: turn : de leger toubillons stabilise le mouvement de la même manière que la stratification de deux gaz dans le champs gravitationel sauf que la gravité du vortex est remplacée par la force centrifuge de rotation.

L'accélération des tourbillons de fluide léger génère généralement l'energie turbulente (fluctuation de vitesse structur e), et peut de dissipation, par contre l'accélération des tourbillons de fluide lourd provoque principalement la dissipation (intensification des petites echelles de mouvement) et génère peut d'energie.

Donc l'équation de l'énergie cinétique turbulente s'écrit comme suit:

$$\frac{(-k)}{t} - \frac{(-k\tilde{V}_j)}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left[\left(\frac{t}{k} \right) \frac{k}{x_j} \right] P - G \quad \#$$

L'introduction de l'effet de l'accélération dans l'équation de dissipation est plus difficile que l'équation d'énergie, Jones et Mc Guirk cite: jone estiment que la production de la dissipation par le processus d'accélération est équivalent à celle des contraintes de cisaillement et inclu deux termes utilisant le même coefficient egale à 1.44. Rodi propose l'équation de production de dissipation suivante:

$$P = 1.44 \frac{P}{k} P - G = 1 - C_2 R_f$$

où P et G sont respectivement les termes de production de l'energie turbulente par les contraintes de reynolds et

l'accélération, C_2 est une constante et R_f est le nombre de flux Richardson:

$$R_f = \frac{G}{P}$$

La constante C_2 peut être considérée nulle quand l'accélération est du même sens de l'écoulement moyen et 0.8 quand elle est perpendiculaire a se dernier.

Dans les écoulements turbulents de cisaillement la production d'énergie par les contraintes de reynolds et la dissipation sont approximativement égales, et l'accélération a relativement un petit effet qui peut changer considérablement la distribution d'énergie turbulente.

Equation de la dissipation donc est la suivante:

$$\frac{-}{t} - \frac{(-\tilde{U}_j)}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left[\left(\frac{t}{k} \right) \frac{k}{x_j} \right] \bar{K} C_1 P - G - C_2 \quad \#$$

où le terme P est le terme de production de l'énergie cinétique turbulente \bar{k} par l'écoulement moyen :

$$P = \overline{v''_i v''_j} \frac{\tilde{V}_i}{x_j} + \left(\frac{\tilde{V}_i}{x_j} - \frac{\tilde{V}_j}{x_i} \right) \frac{\tilde{V}_i}{x_j} - \frac{2}{3} k_{ij} \frac{\tilde{V}_i}{x_j} \quad \#$$

et le terme G est le terme de production de l'énergie turbulente par le mécanisme de flotabilité :

$$G = \overline{v''_i v''_i} \frac{\overline{P}}{x_i} - \frac{1}{\rho r} \frac{1}{2} \frac{\overline{P}}{x_i} \frac{\overline{P}}{x_i} \quad \#$$

2- Une autre possibilité de traitement consiste à définir « le mouvement macroscopique » à partir des seules valeurs moyennes des fonctions, et à considérer comme « corrélations convectives » l'ensemble des termes de l'expression ref: a1 , à l'exclusion donc de $\overline{V_i V_j}$ une partie de la difficulté se trouve ainsi reportée au niveau de l'identification de ces diverses corrélations.

3- Enfin, une troisième proposition exploite l'idée selon laquelle il y aurait lieu de distinguer, dans le regroupement des termes de l'équation ref: a1 la vitesse responsable du transport et la grandeur transportée, ici, la quantité de mouvement par unité de volume (Bauer, Summalt et Fila 9). Largement développée et approfondie par Ha Minh, Launder et Mac Innes 10, cette procédure revient à écrire \overline{M}_{ij} indifféremment sous l'une ou l'autre forme :

$$\overline{M}_{ij} = \underbrace{-\overline{V_i V_j}}_{\overline{G_j V_i}} \underbrace{\overline{v_i V_j}}_{\overline{g_j v_i}} \quad \#$$

ou :

$$\overline{M}_{ij} = \underbrace{-\overline{V_i V_j}}_{\overline{G_j V_i}} \underbrace{\overline{v_j V_i}}_{\overline{g_j v_i}} \quad \#$$

Ainsi, selon ces auteurs, la contribution « macroscopique » est prise égale à $\overline{G_i V_j}$ (ou $\overline{G_j V_i}$), le nouveau tenseur de Reynolds étant défini par $\overline{g_i v_j}$ ou $\overline{g_j v_i}$. On peut aisément vérifier que cette proposition, comme celle de Favre - équation ref: a2 - regroupe, dans la contribution « macroscopique » certaines corrélations. Par contre, et contrairement à l'expression de Favre, la symétrie indicielle est rompue au niveau de chaque contribution $\overline{G_i V_j}$ $\overline{G_j V_i}$ et $\overline{g_i v_j}$ $\overline{g_j v_i}$ et n'est rétablie que pour leur somme. Ces termes intervenant par leur divergence, il est manifeste que le traitement des équations, selon cette procédure, diffèrera radicalement de ce qu'il était en situation isovolume.

La nouvelle proposition de P.Chassaing:

le regroupement en trois termes:

le traitement des équations ouvertes du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable, tel qu'il est envisagé ici cite: ac2 , vise à :

- ne pas inclure de modifications sévères par rapport au cas incompressible, afin de permettre une référence simple aux schémas de fermeture largement développés dans ce cas.

- identifier aussi clairement que possible les analogies et différences entre les deux situations.

Considérant alors l'expression ref: a1 , il est clair que les fluctuations de masse volumique et de vitesse sont liées de deux façons : vecteur et tenseur du 2^e ordre. Compte tenu des objectifs poursuivis, seules les corrélations vitesse-masse volumique de caractère tensoriel, offrent, à l'évidence, une possibilité d'analogie avec le cas isovolume -équation ref: nnn -. Il est donc naturel de regrouper les termes de l'expression ref: a1 en trois contributions, en posant :

$$\overline{M}_{ij} = \overline{M}_{ij} + \overline{m}_{ij} + \overline{K}_i^j + \overline{K}_j^i \quad \#$$

avec

$$\begin{array}{llllll}
M_{ij} & \overline{V_i V_j} & \text{et} & \overline{M_{ij}} & -\overline{V_i V_j} & \# \\
m_{ij} & v_i v_j & \text{et} & \overline{m_{ij}} & \overline{v_i v_j} & \# \\
K & v & \text{et} & \overline{K} & \overline{v} & \# \\
K & v \overline{V} & \text{et} & \overline{K} & \overline{v \overline{V}} & \#
\end{array}$$

La différence de position des indices est utilisée ici simplement comme un moyen de distinguer un tenseur du second ordre symétrique (deux indices en position inférieure) d'un tenseur de même ordre non symétrique (un indice en position inférieure, un autre en position supérieure).

Discussion

-Les expressions ref: zzz à ref: eee font intervenir une même décomposition du vecteur vitesse, que la masse volumique soit ou non constante. Les notions fondamentales de cinétique en régime laminaire vont donc se transposer aux champs de vitesse moyenne et d'agitation du régime turbulent sans modifications entre les deux situations. Ainsi conservera-t-on une identité de propriétés au niveau du rotationnel, du tenseur des vitesses de déformation et des fonctions qui leur sont associées, telles que dissipation ou enstrophie par exemple.

Cette particularité assure en outre que lorsque la masse volumique varie, on pourra encore utiliser le fil conducteur de la modélisation en situation incompressible, en continuant d'analyser, les réponses d'un champ turbulent à des sollicitations caractérisées par des champs de gradients moyens spécifiques.

Enfin, cette même procédure permet de traiter de façon unitaire la classe des mouvements isovolumes en moyenne $\frac{\overline{U_i}}{x_i} = 0$, caractère qui n'implique nullement que la masse volumique du milieu soit constante.

- Dans l'équation ref: aaa, la contribution $\overline{M_{ij}}$ peut être considérée comme caractéristique «d'un mouvement moyen» dans le sens où elle ne fait intervenir que les seules valeurs moyennes des fonctions. Pour un fluide incompressible, elle s'identifie naturellement au terme (a) de l'équation ref: nnn .

- La deuxième contribution $\overline{m_{ij}}$ implique le mouvement d'agitation. A l'évidence, elle apparaît, par sa divergence, comme une extension directe du terme b de l'équation ref: nnn $\overline{v_i v_j}$ -. On notera, en outre, que c'est la valeur instantanée de la masse volumique qui figure dans cette corrélation, tout comme lorsqu'il est fait usage de la moyenne pondérée - équation ref: kkk -. Mais, contrairement au cas du fluide incompressible, et à celui du fluide compressible traité en moyenne de Favre, cette corrélation, ne rend pas compte, à elle seule, de l'ensemble des contributions de l'agitation turbulente. Cependant, comme nous le verrons par la suite, cette corrélation, et plus largement toute corrélation du type $\overline{f v}$ est régie par une équation de bilan. C'est pourquoi, nous lui réserverons le qualificatif de « flux principal ».

- La troisième contribution $\overline{K_i^j} - \overline{K_j^i}$ qui s'introduit dans l'équation ref: aaa, apparaît ainsi comme l'élément essentiel qui singularise le mouvement du fluide à masse volumique variable, aussi est-il jugé préférable - dans le souci d'identification des différences- de ne pas la réduire dans un regroupement à deux termes. En plus de l'aspect formel déjà signalé $\overline{K_i^j} - \overline{K_j^i}$ cette proposition correspond à une conception particulière de l'analyse physique que nous allons préciser ci-après.

Les différents types de « flux » :

En référence aux équations ref: kkk et ref: aaa , on peut dire qu'il existe deux possibilités de traitement en moyenne du terme de convection :

ou l'on définit une évolution macroscopique qui assure, en présence de variations de masse volumique, la conservation de la masse d'un domaine matériel dans un suivi lagrangien de celui-ci et en référence à cette évolution. On se retrouve alors dans une situation bien élucidée, de raisonnement sur un système fermé. Sur le plan formel, cela se traduit par une expression de $\overline{M_{ij}}$ ayant deux contributions : l'une pour la partie macroscopique, l'autre pour le flux

ou bien l'on considère un mouvement macroscopique qui n'assure pas la conservation de la masse. Le système reste « ouvert », ce qui a pour conséquence d'introduire, en plus des corrélations $\overline{v_i v_j}$ justiciables d'équations de bilan, des corrélations du type \overline{v} qui, par définition, sont à l'origine d'un terme « source » dans l'équation de continuité. Ces corrélations qui ne peuvent faire l'objet d'une équation de bilan simple ne doivent pas être interprétées dans un cadre strictement « mécanique » : en fait, comme nous allons le voir, elles sont à expliciter en tenant compte d'une loi d'état thermodynamique. C'est cet ensemble de considérations que cherche à traduire la dénomination de « flux extérieurs » ou « pseudo-flux » réservée à ces corrélations.

Expression des corrélations vitesse-masse volumique:

Lorsque la masse volumique varie, on sait qu'il n'est plus possible de découpler le problème dynamique de l'ensemble du problème massique. Il paraît alors naturel de mettre à profit cette interdépendance des diverses équations pour exprimer la corrélation \overline{K} .

Nous allons voir si la variation de masse volumique résulte du seul mélange isotherme de deux gaz non réactifs et sous une pression constante, on peut aisément établir l'équation d'état comme suite cite: ac1 :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C_1}{\rho_1} + \frac{C_2}{\rho_2} \quad \#$$

où C représente la fraction massique de l'espèce 1

L'équation ref: s1 est équivalente à :

$$a C + b = \frac{1}{\rho} \quad \#$$

où $a = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ et $b = \frac{1}{\rho_2}$

En introduisant la décomposition de Reynolds $C = \overline{C} + c$ et $\frac{1}{\rho} = \overline{\frac{1}{\rho}} + \frac{1}{\rho}$ on trouve :

$$a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] + b = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

$$a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] + b = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

En prenant la moyenne on peut obtenir :

$$a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] + b = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

En faisant la soustraction on obtient :

$$a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] + b - a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] - b = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}$$

$$a \left[\overline{C} + \overline{c} \right] + b = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{a}{1} \frac{1}{a \overline{C}} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \quad \#$$

où a est une constante, \overline{C} et c la moyenne et la fluctuation de la fraction massique d'une des espèces.

Multipliant par la fluctuation de vitesse v ou par la fluctuation de fraction massique

c et prenant la moyenne, on obtient respectivement :

$$\overline{K} = \overline{v} \frac{a}{1 - a\overline{C}} \overline{c v} \quad \text{et} \quad \overline{c} = \frac{a}{1 - a\overline{C}} \overline{c^2} \quad \#$$

donc la corrélation \overline{K} et plus largement toute corrélation du type \overline{f} est liée au terme de « flux principal » correspondant.

Les équations:

continuité :

$$\frac{\overline{c}}{t} - \frac{\overline{v}}{x_j} \overline{V_j} - \frac{\overline{K_j}}{x_j} = 0 \quad \text{avec} \quad \overline{K_j} = \overline{v_j} \quad \#$$

Dynamique:

$$\frac{\overline{v_i}}{t} - \overline{V_i} \overline{V_j} - \frac{\overline{v_i v_j}}{x_j} = \overline{A_i} - \overline{g_i} - \frac{\overline{P}}{x_i} - \overline{ij} \quad \#$$

où A_i regroupe l'ensemble des termes complémentaires, par référence au cas densité constante, soit:

$$\overline{A_i} = \frac{\overline{K_i}}{t} - \frac{\overline{K_j^i} - \overline{K_j^j}}{x_j} - \frac{\overline{v_i}}{t} - \frac{\overline{v_i V_j} - \overline{v_j V_i}}{x_j} \quad \#$$

Concentration:

En l'absence de réaction, le bilan d'espèce en terme de fraction massique conduit, par passage à la moyenne, à l'équation :

$$\frac{\overline{c}}{t} - \frac{\overline{c V_j}}{x_j} - \frac{\overline{c v_j}}{x_j} = \overline{A_c} - \frac{\overline{d_j}}{x_j} \quad \#$$

où d_j est le vecteur densité de flux de masse par transfert moléculaire et avec :

$$\overline{A_c} = \frac{\overline{c_i}}{t} - \frac{\overline{c V_j} - \overline{v_j C}}{x_j} \quad \#$$

La procédure proposée pour le traitement statistique des équations du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable repose sur l'emploi de moyennes conventionnelles. Elle se caractérise par une distinction, introduite au niveau des corrélations convectives, entre les « flux principaux » – de type $\overline{f v_i}$ – et les « corrélations extérieures » – de la forme \overline{f} – Ces dernières qui incluent notamment le terme source de l'équation moyenne de bilan de masse, peuvent être explicitées à partir des flux principaux en tenant compte de l'équation d'état relative à la variation de masse volumique considérée. Les « flux principaux », au contraire, font l'objet d'équation de bilan, en tous points semblables à celles obtenues en situation isovolume, à l'exclusion de termes complémentaires de même forme générique $\left(\overline{f} \frac{d\overline{G}}{dt} \right)$.

Sur le plan physique, cette distinction résulte de la prise en considération d'une évolution moyenne d'un système à masse non conservative. Sans prétendre à l'obtention d'on ne sait quels avantages décisifs au niveau de la formulation des équations ouvertes, on peut conclure que cette alternative permet d'engager la procédure de modélisation, sur la base suivante :

- absence de modifications sévères par rapport au cas incompressible,
- identité des propriétés cinématiques des champs de vitesse moyenne et d'agitation qu'il y ait ou non variation de masse volumique,
- identification des différences, selon qu'elles résultent de la perte du caractère isovolume ou de fluctuations de densité,
- fixation du niveau de fermeture (2^e ordre) en raison de l'expression des « flux extérieurs »
- progression graduée de la modélisation en traitant par exemple les écoulements de

fluides à masse volumique variable en deux temps, selon qu'ils sont ou pas isovolumes en moyenne.

Formulation mathématique

Depuis quelque décennies Prandtl, Navier-Stokes et Reynolds ont pu découvrir les lois fondamentales de la mécanique des fluides, il restait aux ingénieurs et hommes de science à exploiter ces lois et à les mettre au service de l'homme.

Equation de continuité:

C'est un principe de physique il exprime la continuité de fluide c'est à dire qu'aucune partie de fluide ne peut y avoir un prélevement ou un apport de masse du milieu extérieur, le principe est exprimé par l'équation suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} - \frac{W}{r} = 0 \quad \#$$

Equations de Navier-Stokes (équations de quantité de mouvement):

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement et les causes qui le produisent, on peut dire que le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées.

Suivant la direction axiale ox:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] \quad \#$$

Suivant la direction u_r :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right] \quad \#$$

suivant la direction u_θ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{WV}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{W}{r^2} \right]$$

Ces équations générales vont être simplifiées dans le cadre des hypothèses générales suivantes considérées dans notre étude:

- h1: Evolution isotherme
- h2: le fluide est incompressible ($\rho = cte$)
- h3: L'écoulement est axisymétrique
- h4: L'écoulement est permanent

Les équations deviennent donc comme suit:

Equation de continuité:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} = 0 \quad \#$$

Equation de quantité de mouvement suivant ox:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right] \quad \#$$

Equation de quantité de mouvement suivant or :

$$U \frac{V}{x} \quad V \frac{V}{r} \quad \frac{1}{r} \frac{P}{r} \quad \left[\frac{2V}{x^2} \quad \frac{2V}{r^2} \quad \frac{1}{r} \frac{V}{r} \quad \frac{V}{r^2} \right] \quad \#$$

Il est bien entendu légitime de se poser la question de la validité de ces équations du mouvement (équation de Navier-Stokes) qui rappellent le principe fondamental de la dynamique $F = m \vec{a}$ pour une parcelle fluide. Dans le cas laminaire, il y a de nombreuses validations de l'équation : pour l'écoulement de Poiseuille dans un canal ou un tuyau par exemple, on retrouve expérimentalement les profils de vitesses paraboliques et la loi de perte de charge prédits par la théorie. Il en est de même pour le profil de vitesse dans une couche limite, un jet ou un sillage, ou dans l'écoulement entre deux cylindres tournants (écoulement de Couette-Taylor). D'autres validations existent pour des fluides chauffés, ou pour des écoulements compressibles.

Quand les écoulements sont turbulents, ces prédictions théoriques ne sont plus valables, mais c'est parce que l'hypothèse d'écoulement parallèle et indépendant du temps faite dans le cas laminaire n'est plus satisfaite. Ceci ne remet pas en cause l'équation de Navier-Stokes elle-même. Comme cette équation effectue une moyenne des fluctuations caractéristiques des mouvements moléculaires, on peut s'attendre à ce qu'elle soit correcte tant que les plus petites échelles d'espace (l'échelle de Kolmogorov) et de temps sont plus importantes que les échelles d'agitation moléculaire. Ceci est vrai pour la plupart des écoulements, même chauffés et compressibles. Notons cependant qu'au-delà d'un nombre de Mach de 15, l'échelle de Kolmogorov devient du même ordre que les échelles moléculaires, et l'équation de Navier-Stokes n'est plus valable : il faut alors considérer directement les équations au niveau moléculaire (équation de Boltzmann). Nous retenons de cette analyse que tous les écoulements turbulents, même hypersoniques, peuvent être décrits par l'équation de Navier-Stokes en dessous de Mach 15.

La résolution numérique directe de ces équations instantanées du mouvement turbulent nécessite des moyens informatiques très puissants que ce soit du côté capacité de stockage ou du temps de calcul. Ceci est dû au mouvement désordonné des particules les unes par rapport aux autres, où en un point considérer le vecteur vitesse \vec{V} n'est pas stable ni en grandeur ni en direction.

C'est pour cette raison que les chercheurs ont orienté leurs travaux vers la modélisation de la turbulence, c'est à dire les théories cherchant à prédire statistiquement les caractéristiques de la turbulence, sans résolution explicite de l'équation de Navier-Stokes.

Ces modélisations sont très importantes dans un contexte industriel, elles peuvent aussi dans certains cas simples fournir des informations théoriques intéressantes sur le comportement de la turbulence. Les divers paramètres (vitesse, pression, etc...) seront décomposés en une partie moyenne et une partie fluctuante, nous prenons l'exemple d'une expérience de laboratoire, telle une couche de mélange, supposons que l'on ait placé une sonde à une certaine distance x , celle-ci enregistrera un signal très fluctuant dans le temps autour d'une valeur moyenne. On peut déterminer cette dernière en prenant l'intégrale du signal sur une très longue période T , dès que T est assez grand devant les périodes d'oscillation correspondant aux gros tourbillons cohérents.

Dans ce sens, tous les paramètres de l'écoulement auront une composante moyenne et une fluctuation c'est cette dernière qui a un caractère aléatoire et qui oscille autour de zéro. Pour la vitesse U dans la direction de l'écoulement on aura donc : $U = \bar{U} + u(t)$ où \bar{U} est la vitesse V dans la moyenne (qui peut dépendre de la position de la sonde) et u la fluctuation dépendant du temps. La vitesse direction transverse peut de la même façon s'écrire $V = \bar{V} + v(t)$ bien que les fluctuations oscillent autour de zéro, leurs carrés sont toujours positifs, ils ont donc des valeurs moyennes non nulles, on pourra ainsi introduire les quantités $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, dans une couche de mélange, ou dans un sillage turbulent,

ces quantités sont de l'ordre de $0.1 \cdot \overline{U^2}$ ou \overline{U} est la vitesse moyenne amont du fluide, en fait $\overline{v^2}, \overline{w^2}$ sont inférieurs d'environ 30% à $\overline{u^2}$, ce qui traduit le rôle prépondérant de la vitesse longitudinale dans la génération de la turbulence, les racines carrées de ces quantités, appelées écart-type donnent un ordre de grandeur des fluctuations instantanées de divers composantes de la vitesse, elle sont d'environ le tiers de U . Notons enfin que la pression $P = \overline{P} + p$ peut aussi être séparée en une partie moyenne et une partie fluctuante.

L'idée de Boussinesq et Reynolds donc était d'oublier le mouvement instantané du fluide, trop complexe, et de chercher des équations prédisant simplement le mouvement moyen, auquel se superposent les mouvements d'agitation tourbillonnaires et de turbulence.

On peut écrire donc:

$$\overline{U} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U dt$$

$$\overline{V} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V dt$$

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P dt$$

Regles de la moyenne:

La moyenne statistique définit précédemment vérifie les propriétés suivantes:

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F} \quad \overline{\overline{G}} = \overline{G}$$

$$\overline{\overline{FG}} = \overline{F \cdot G} \quad \overline{f \cdot g}$$

$$\overline{\frac{F}{G}} = \frac{\overline{F}}{\overline{G}}$$

$$\overline{F \cdot x_i} = \overline{F} \cdot x_i$$

F et G désignant deux fonctions aléatoires quelconques.
une constante.

D'après ces propriétés on aura :

$$\overline{u} = 0$$

$$\overline{v} = 0$$

$$\overline{Uv} = 0$$

$$\overline{UV} = \overline{U} \cdot \overline{V} = \overline{uv}$$

$$\overline{UU} = \overline{U} \cdot \overline{U} = \overline{u^2}$$

Les équations moyennes (EQUATION DE REYNOLDS):

- Equation de continuité:

En prenant la moyenne de l'équation instantanée de continuité on obtient :

$$\frac{\overline{U}}{x} + \frac{1}{r} \frac{r\overline{V}}{r} = 0 \quad \#$$

En se basant sur la propriété : $\overline{U \cdot u} = \overline{U} \cdot \overline{u}$ et $\overline{V \cdot v} = \overline{V} \cdot \overline{v}$ on trouve:

$$\frac{\overline{U}}{x} + \frac{1}{r} \frac{r\overline{V}}{r} - \frac{\overline{u}}{x} - \frac{1}{r} \frac{r\overline{v}}{r} = 0 \quad \#$$

Faisant la soustraction des deux équations on obtient :

$$\frac{\overline{u}}{x} + \frac{1}{r} \frac{r\overline{v}}{r} = 0 \quad \#$$

Donc le mouvement moyen et les fluctuations vérifient le principe de la continuité.

Equations de quantité de mouvement:

Equation suivant ox:

$$\frac{\overline{U\overline{U}}}{x} - \frac{\overline{u^2}}{x} - \frac{\overline{U\overline{V}}}{r} - \frac{\overline{uv}}{r} - \frac{1}{x} \frac{p}{x} \left[\frac{2\overline{U}}{x^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r\overline{U}}{r} \right] \right] \quad \#$$

Equation suivant or:

$$\frac{\overline{U\overline{V}}}{x} - \frac{\overline{uv}}{x} - \frac{\overline{V\overline{V}}}{r} - \frac{\overline{v^2}}{r} - \frac{1}{r} \frac{p}{r} \left[\frac{2\overline{V}}{x^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r\overline{V}}{r} \right] - \frac{V}{r^2} \right]$$

Après le traitement statistique des équations instantanées gouvernant notre écoulement, le système qui se forme est ouvert en raison de la présence des doubles corrélations: \overline{uv} , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, les équations ne sont donc pas en nombre égal à celui des inconnues.

La question est donc de savoir s'il est possible d'obtenir la fermeture des équations du mouvement moyen, d'où le recours à un modèle de turbulence qui procède à la fermeture du système ouvert en reliant directement les grandeurs: $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, \overline{uv} , aux caractéristiques du mouvement moyen.

Modele à deux équations de transport (modèle k-)

Par analogie au tenseur des contraintes dans les écoulements laminaires Boussinesq a proposé:

$$\overline{u_i u_j} = \tau \left[\frac{\overline{U_i}}{x_j} - \frac{\overline{U_j}}{x_i} \right] = \frac{2}{3} \tau_{ij} K \quad \#$$

k : l'énergie cinétique turbulente

τ : viscosité cinématique turbulente estimée par la même analogie avec la viscosité laminaire, elle est proportionnelle à une certaine vitesse caractéristique ainsi qu'une longueur caractéristique.

$$\tau = c \cdot V \cdot L$$

L : longueur caractéristique

V : une vitesse caractéristique de la turbulence par analogie avec les vitesses moyennes des molécules dans le cas d'une viscosité laminaire

c : coefficient de proportionnalité

La vitesse caractéristique de la turbulence est \sqrt{k} d'où on peut écrire:

$$\tau = c \cdot \sqrt{k} \cdot L \quad \text{avec } L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$$

$$\text{D'où : } \tau = c \cdot \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$$

D'où le modèle $K-\epsilon$, nécessite la résolution de deux équations de transport semi-empiriques pour l'énergie cinétique k et le taux de dissipation de l'énergie turbulente ϵ .

Cela permet la détermination de τ et de la contrainte de Reynolds $\overline{u_i u_j}$.

Les equations à densité variable (Equations de Favre):

- Equation de continuité:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho \tilde{U}}{x} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \rho \tilde{V} \right) = 0 \quad \#$$

Equations de quantité de mouvement:

Equation suivant ox:

$$\frac{(-\overline{\tilde{U}\tilde{U}})}{x} - \frac{\overline{u^2}}{x} - \frac{1}{r} \frac{(r-\overline{\tilde{U}\tilde{V}})}{r} - \frac{1}{r} \frac{(r-\overline{u v})}{r} - \frac{1}{x} \frac{\overline{P}}{x} \left[\frac{2\tilde{U}}{x^2} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \left[\frac{r}{r} \frac{\tilde{U}}{r} \right] \right] \quad \#$$

Equation suivant or:

$$\frac{(-\overline{\tilde{U}\tilde{V}})}{x} - \frac{\overline{u v}}{x} - \frac{1}{r} \frac{(r-\overline{\tilde{V}\tilde{V}})}{r} - \frac{1}{r} \frac{(r-\overline{v^2})}{r} - \frac{1}{r} \frac{\overline{P}}{r} \left[\frac{2\tilde{V}}{x^2} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \left[\frac{r}{r} \frac{\tilde{V}}{r} \right] \right] - \frac{\tilde{V}}{r^2} \quad \#$$

avec :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k_{ij} \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_j} = \frac{1}{2} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad \#$$

Modele k- à densité variable:

Les deux équations de transport sur l'énergie cinétique turbulente k et la partie incompressible de la dissipation ϵ s'écrivent:

$$\frac{(-\overline{k})}{t} - \frac{(-\overline{k\tilde{U}_j})}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left[\left(\frac{t}{k} \right) \frac{k}{x_j} \right] = P - G \quad \#$$

$$\frac{-\epsilon}{t} - \frac{(-\overline{\epsilon\tilde{U}_j})}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left[\left(\frac{t}{\epsilon} \right) \frac{\epsilon}{x_j} \right] = \overline{K} C_1 P - G - C_2 \epsilon \quad \#$$

avec:

$$P = \overline{u_i u_j} \frac{\tilde{U}_i}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left(\frac{\tilde{U}_i}{x_j} \frac{\tilde{U}_j}{x_i} \right) \frac{\tilde{U}_i}{x_j} - \frac{2}{3} k_{ij} \frac{\tilde{U}_i}{x_j} \quad \#$$

$$G = \overline{u_i} \frac{\overline{P}}{x_i} - \frac{\overline{v_i}}{x_i} \frac{\overline{P}}{x_i} - \frac{1}{2} \frac{t}{pr_t} \frac{\overline{P}}{x_i} \frac{\overline{P}}{x_i} \quad \text{avec : } 0.7 \quad pr_t = 1 \quad \#$$

où pr_t désigne le nombre de Prandtl turbulent, dans la version du modèle où la masse volumique est variable on conserve les valeurs standard du modèle où la masse volumique est constante, à savoir:

$$c = 0.09 \quad c_1 = 1.44 \quad c_2 = 1.92 \quad k = 1.0 \quad 1.3$$

Equation de transport de la concentration:

$$\frac{(-\overline{\tilde{C}})}{t} - \frac{(-\overline{\tilde{C}\tilde{U}_j})}{x_j} - \frac{1}{x_j} \left[\left(d \frac{t}{Sc_t} \right) \frac{\tilde{C}}{x_j} \right] \quad \#$$

où Sc_t le nombre de Schmidt, $\frac{t}{d_t}$.

La masse volumique :

Dans le cas d'un mélange non-réactif, où la fraction massique de chaque espèce est conservée, l'inverse de la masse moléculaire peut être décomposé linéairement en fonction de C_{gaz} . La loi des gaz parfaits permet, pour un écoulement isotherme à pression constante M/Cte , de déduire la masse volumique moyenne du mélange (gaz air) comme suit:

$$\frac{1}{M_{mélange}} = \frac{1}{M_{gaz}} \frac{C}{C_{gaz}} + \frac{1}{M_{air}} \frac{C}{C_{air}} \quad \#$$

L'équation ref: fu est équivalente à :

$$a C = b \quad \#$$

où $a = \frac{1}{1}^2$ et $b = 2$

En introduisant la décomposition de Favre pour $C = \tilde{C} + c'$ et de Reynolds pour

on trouve :

$$a \left[\begin{array}{c} - \\ (\tilde{C} \quad c') \end{array} \right] = b$$

$$a \left[\begin{array}{c} -\tilde{C} \quad \tilde{C} \quad \underbrace{-c' \quad c'}_c \end{array} \right] = b$$

$$a \left[\begin{array}{c} -\tilde{C} \quad \tilde{C} \quad c' \end{array} \right] = b$$

En prenant la moyenne on peut obtenir :

$$a \tilde{C} = b$$

$$\left(1 \quad a \tilde{C} \right) = b$$

ce qui donne:

$$\frac{b}{(1 \quad a \tilde{C})} \quad \#$$

Modele numérique

Introduction:

Les phénomènes physiques d'intérêt dans cette présente étude sont gouvernés par des équations différentielles générales pour la variable transportable. Notre objectif essentiel est de développer les moyens de la résolution de ces équations. A cette étape, intervient le concept de la discrétisation. L'équation discrétisée est une relation algébrique reliant les valeurs de par un groupe de point du maillage. Une telle équation est dérivée des équations différentielles et alors exprime les mêmes informations physiques que l'équation différentielle.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles telles que : la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis.....

Dans la présente étude, on utilisera la méthode des volumes finis qui consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôles entourant les noeuds du maillage, les équations aux dérivées partielles sont alors intégrées sur chaque volume de contrôle. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant sa valeur de la variable aux valeurs des variables des points adjacents. Cette méthode présente l'avantage d'être efficace, stable, convergente et préserve le principe de conservation de tous scalaire transportable dans le domaine d'écoulement, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.

Forme générale de l'équation de transport:

Les équations différentielles aux dérivées partielles présentées dans le chapitre (2), peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de conservation de la quantité dépendante, qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r V}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\quad}{x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \quad}{r} \right] = S \quad \#$$

ou :

: est la variable dépendante.

: Le coefficient de diffusion

S : Le terme sources/puits.

Le tableau suivant rappelle les variables et les coefficients des équations qui gouvernent les phénomènes physiques.

Equations			S
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement ox	U	t	$-\frac{1}{x} \left(p + \frac{2}{3} k \right) S_u$
Quantité de mouvement or	V	t	$-\frac{1}{r} \left(p + \frac{2}{3} k \right) t \frac{V}{r} S_v$
Energie cinétique turbulente	K	$\frac{t}{t}$	$P_k G$
Dissipation		$\frac{t}{t}$	$C_1 \bar{k} P_k G C_2 \bar{k}$
Concentration	C	$D \frac{t}{Sc_t}$	0

avec:

$$P_k = \frac{1}{t} \left[2 \left(\left(\frac{U}{x} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right) + \left(\frac{U}{x} - \frac{V}{r} \right)^2 \right]$$

$$G = \frac{1}{v_i} \frac{\bar{P}}{x_i} = \frac{1}{\rho r t} \frac{1}{2} \frac{\bar{P}}{x_i} \frac{\bar{P}}{x_i}$$

$$S_u = \left[\frac{1}{x} t \quad \frac{U}{x} \quad \frac{1}{r} t \quad \frac{V}{x} \right]$$

$$S_v = \left[\frac{1}{r} t \quad \frac{V}{r} \quad \frac{1}{x} t \quad \frac{U}{r} \right]$$

Maillage

Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes de contrôles de telle façon qu'il soit entièrement recouvert par eux Figure 4-1. Chaque volume de contrôle de dimension $X \cdot R \cdot 1$, doit conserver les grandeurs scalaires P , k , et C dans le noeud du maillage p qui se situe au centre du volume de contrôle et les grandeurs vectorielles U et V au milieu des segments reliant les deux noeuds adjacents. Ces quatre faces sont repérées à l'aide des quatre points, cardinaux e, w, n, s et les centres des volumes adjacents par E, W, N, S.

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volume de contrôle typique Figure 4-1, et pour l'expression des grandeurs vectorielles, le volume de contrôle décalé (Figure (4-2 a et 4-3) est utilisé pour les avantages suivants :

- Une localisation des vitesses apportant une bonne estimation des flux convectés dans les bilans des grandeurs scalaires.

- Une localisation de la pression permettant une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

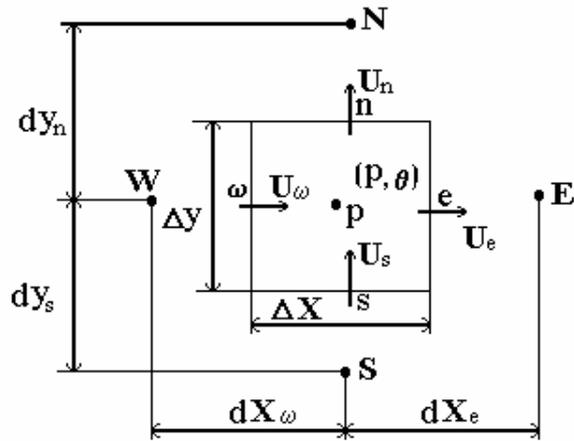


Figure (4-1) volume de contrôle typique

Figure(4-2) volume décalé à droite

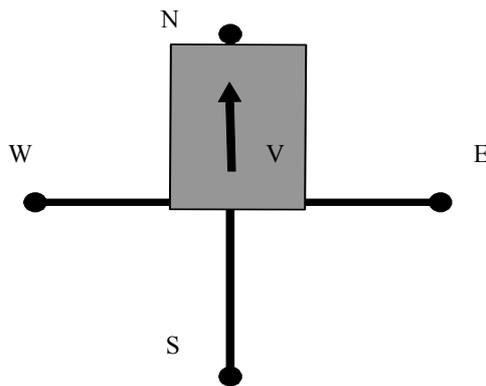


Figure (4-3) volume décalé vers le haut

Discrétisation de l'équation de transport:

Afin de faciliter la résolution numérique des équations différentielles qui gouvernent les phénomènes physiques, nous sommes portés à utiliser le concept de la discrétisation dite: sp, qui consiste à remplacer les équations différentielles par un système d'équations algébriques. Par conséquent, elles sont réduites à un nombre fini de paramètres.

L'équation de transport est intégrée sur le volume de contrôle typique, avec l'évaluation

des termes (diffusif, convectif et source) aux interfaces.

$$\frac{U}{x} = \frac{1}{r} \frac{rV}{r} - \frac{1}{x} \left[\frac{r}{x} \right] = \frac{1}{r} \frac{r}{r} \left[\frac{r}{r} \right] S \quad \#$$

Terme diffusif et convectif :

En faisant intervenir les flux totaux aux interfaces suivant X et R définis par :

$$J_r = rV = r \frac{r}{r}$$

$$J_x = U = \frac{r}{x}$$

l'intégration du flux J_r sur le volume de contrôle donne :

$$\int_w^e \frac{1}{r} \frac{J_r}{r} r dr dx = \int_w^e J_{r_n} - J_{r_s} dx \quad \#$$

avec:

$$J_{r_n} = J_{r_s} = \left[rV_n \left(\frac{r}{r} \right)_n \right] - \left[rV_s \left(\frac{r}{r} \right)_s \right] \quad \#$$

Pour exprimer les flux sur les interfaces du volume de contrôle, on suppose que le profil de la variation de la variable dépendante est linéaire entre les noeuds du maillage.

On aura donc :

$$\begin{aligned} rV_n &= r v_n \frac{N - P}{2} \\ rV_s &= r v_s \frac{S - P}{2} \\ \left(\frac{r}{r} \right)_n &= r_n \frac{N - P}{r} \\ \left(\frac{r}{r} \right)_s &= r_s \frac{P - S}{r} \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} J_{x_e} &= r_p U_e \frac{E - P}{2} = r_p \frac{E - P}{x_e} \\ J_{x_w} &= r_p U_w \frac{P - W}{2} = r_p \frac{P - W}{x_w} \end{aligned}$$

Le terme source:

$$\int_w^e S r dr dx = \bar{S} r_p r x \quad \#$$

Le terme S est supposé constant dans le volume de contrôle.

En rassemblant tous les termes de l'équation générale de transport après leur intégration, on obtient l'équation suivante :

$$J_e - J_w - r_p r = J_n - J_s - x \bar{S} r_p r \quad \#$$

Coefficient de l'équation de discrétisation finale.

On définit les flux convectifs sur les différentes interfaces :

$$F_e = r_p U_e r$$

$$F_w = r_p U_w r$$

$$F_n = rV_n x$$

$$F_s = rV_s x$$

Les flux diffusifs :

$$D_e = \frac{e r}{x_e}$$

$$D_w = \frac{w r}{x_w}$$

$$D_n = \frac{n x}{r_n}$$

$$D_s = \frac{\delta x}{r_s}$$

définissons les nombres de Pecklet correspondants :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

considérons maintenant l'équation de continuité

$$\frac{U}{x} - \frac{1}{r} \frac{rV}{r} = 0 \quad \#$$

l'intégration de cette équation sur un volume de contrôle typique donne :

$$\int_{w_s}^{e_n} \frac{U}{x} r dr dx - \int_{w_s}^{e_n} \frac{1}{r} \frac{rV}{r} r dr dx = 0 \quad \#$$

on aura :

$$e U_e - w U_w - r_p r - r V_n - r V_s - x = 0 \quad \#$$

exprimée en flux convectif :

$$F_e - F_w - F_n - F_s = 0$$

on multiplie cette dernière équation par la grandeur physique p et on la soustrait de l'équation ref: ee on aura :

$$J_e - F_e p - J_w - F_w p - r_p r - J_n - F_n p - J_s - F_s p - x \bar{S} r_p x r = \#$$

Le problème dans cette équation est de déterminer les flux aux interfaces. Pour cela des schémas d'approximation sont entrepris sous la forme générale suivante :

Forme générale d'approximation:

On s'intéresse au flux total J qui traverse l'interface entre les noeuds i et $i+1$

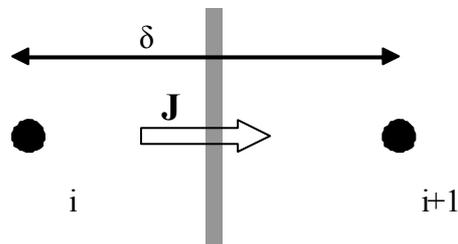


Figure (4-4) Schématisation du flux

La valeur du flux total qui traverse l'interface est donnée par:

$$J = U \frac{\delta x}{\delta x} \quad \#$$

on pose la forme adimensionnelle

$$J = J \frac{\delta x}{\delta x} = P_e \frac{\delta x}{\delta x} \quad \#$$

Où : P_e est le nombre de Pecklet.

La valeur de U à l'interface est interpolée entre U_i et U_{i+1}

$$U = \frac{U_i + U_{i+1}}{2} \quad \#$$

et le gradient sera un multiple de

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{\delta x} \quad \#$$

Où α et β sont des coefficients adimensionnels, ils dépendent du nombre de Pecklet.
On aura donc :

$$J = P_e \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1} - \beta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i \quad \#$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$J = B \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i - A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1} \quad \#$$

ou A et B sont des fonctions de P_e

$$B = B(P_e) \quad \#$$

$$A = A(P_e) \quad \#$$

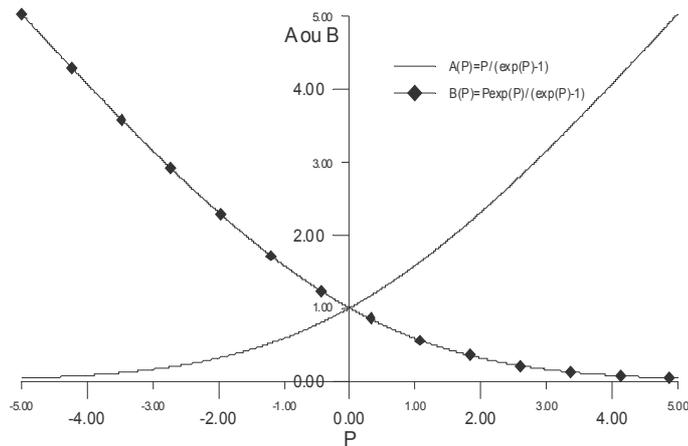


Figure (4-5) Variation de A et B en fonction du nombre

D'après les propriétés de ces deux équations $A(P)$ et $B(P)$ présentées par Patankar cite: sp

1. Si $\alpha = \beta$ donc le flux diffusif doit être égal à zéro ce qui mène à

$$J = P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i - P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1} \quad \#$$

De l'équation ref: wwa et ref: wave on obtient :

$$B = A = P \quad \#$$

2. La deuxième propriété des équations A et B est la symétrie de ces deux fonctions par rapport à $P = 0$

D'où:

$$A(-P) = B(P) \quad \#$$

$$B(-P) = A(P) \quad \#$$

Par conséquent si la fonction $A(P)$ est définie uniquement par les valeurs positives de P de ces deux propriétés on peut définir $A(P)$ et $B(P)$ sur tout le domaine de P .

Pour les valeurs de Peclet négatives

L'équation ref: iii donne :

$$A(P_e) = B(P_e) = P_e \quad \#$$

Et de l'équation ref: qqq on obtient :

$$A(P_e) = A(P_e) = P_e \quad \#$$

Donc:

$$A P_e \quad A |P_e| \quad P_e \quad \#$$

De ce fait pour toutes les valeurs de Peclet fonction A et B sont données par les expressions suivantes :

$$A P_e \quad A |P_e| \quad || P_e, 0 || \quad \#$$

$$B P_e \quad B |P_e| \quad || P_e, 0 || \quad \#$$

ou :

l'opérateur $|a|$ donne la valeur absolue de a

l'opérateur $||a, b||$ donne le maximum des deux grandeurs a et b

En combinant l'équation ref: wwa et la première propriété exprimée par l'équation ref: iii on aura :

$$J P_e \quad A \quad \#$$

donc d'après la définition de pecklet on aura:

$$J F_i \quad AD \quad \#$$

$$J F_{i1} \quad BD \quad \#$$

on appliquant les formes des équations ref: uuu et ref: ooo sur le noeud principal P , on aura suivant x :

$$J_e F_e P \quad AD_e P \quad E \quad \#$$

$$J_w F_w P \quad BD_w W \quad P \quad \#$$

et suivant R :

$$J_n F_n P \quad AD_n P \quad N \quad \#$$

$$J_s F_s P \quad BD_s S \quad P \quad \#$$

en remplaçant ces équations dans l'équation ref: zor , on aura enfin :

$$AD_e P \quad E \quad BD_w W \quad P \quad AD_n P \quad N \quad BD_s S \quad P \quad \bar{S} r_p \quad x \quad r \quad \#$$

l'équation ref: jjj peut se mettre sous la forme :

$$A_P P \quad A_E E \quad A_W W \quad A_N N \quad A_S S \quad b \quad \#$$

ou :

$$A_E \quad D_e A |P_e| \quad \max F_e, 0$$

$$A_W \quad D_w A |P_w| \quad \max F_w, 0$$

$$A_N \quad D_n A |P_n| \quad \max F_n, 0$$

$$A_S \quad D_s A |P_s| \quad \max F_s, 0$$

$$A_p \quad A_E \quad A_W \quad A_N \quad A_S \quad \#$$

$$b \quad [\bar{S}] r_p \quad x \quad r \quad \#$$

Fonction $A P$ pour différents schémas numérique.

Le Tableau suivant donne les expressions de la fonction $A |P|$ pour différents schémas numériques.

$$S_u \begin{bmatrix} \frac{P_W}{x} & \frac{P_P}{x} & \frac{K_W}{x} & \frac{K_P}{x} \\ t & n \frac{V_{PN}}{x} & \frac{V_{WN}}{x} & a_n \end{bmatrix} v_u \begin{bmatrix} t & s \frac{V_P}{x} & \frac{V_{WP}}{x} \\ t & w \frac{U_P}{x} & \frac{U_W}{x} a_w \end{bmatrix} a_s$$

$$S_{Pu} \begin{bmatrix} t & e \frac{U_E}{x_e} a_e \\ t & e \frac{a_e}{x_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & w \frac{U_P}{x_w} a_w \\ t & w \frac{a_w}{x_w} \end{bmatrix}$$

Expression de la source de la composante V:

L'intégration se fait sur le volume de contrôle correspondant de la figure 4-7 :

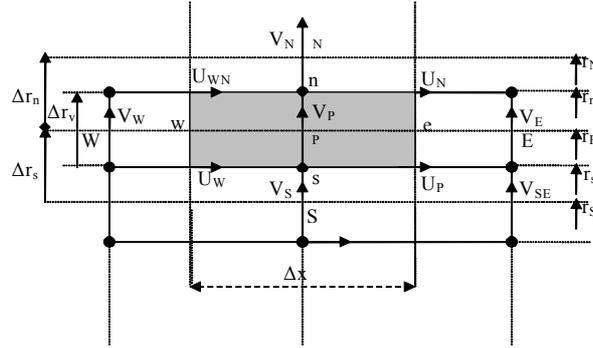


Figure (4-7) Volume de contrôle pour V

$$rS_v \begin{bmatrix} r \left[\frac{P}{r} \left(\frac{2}{3} K \right) \left\{ \frac{V}{r} \quad t \quad \frac{V}{r} \quad \frac{U}{x} \right\} \right] \\ n_e rS_v x r \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_v \begin{bmatrix} s \left[\frac{P}{r} \left(\frac{2}{3} K \right) \left\{ \frac{V}{r} \quad t \quad \frac{V}{x} \quad \frac{U}{r} \right\} \right] r x r \end{bmatrix}$$

on pose:

$$S_v \quad A \quad B \quad C \quad D$$

où:

$$A \quad \frac{P}{r} \left(\frac{2}{3} K \right) v_v \begin{bmatrix} \frac{P_N}{r_v} & \frac{P_P}{r_v} & \frac{2}{3} \frac{K_N}{r_v} & \frac{K_P}{r_v} \end{bmatrix} v_v$$

$$B \quad \begin{bmatrix} \left\{ \frac{1}{r} \quad r \quad t \quad \frac{V}{r} \right\} r x r \end{bmatrix}$$

$$C \quad \frac{V_v}{r_P r_n} \begin{bmatrix} r_n \quad t \quad n \frac{V_N}{r_n} & \frac{V_P}{r_n} & r_s \quad t \quad s \frac{V_P}{r_s} & \frac{V_S}{r_s} \end{bmatrix}$$

$$D \quad \begin{bmatrix} \left\{ \frac{U}{x} \quad t \quad \frac{U}{r} \right\} r x r \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_v}{x} \begin{bmatrix} t & \frac{U}{r} e & t & \frac{U}{r} w \\ t & e \frac{U_N}{r_v} & \frac{V_P}{r_v} & t & s \frac{U_{NW}}{r_v} & \frac{U_W}{r_v} \end{bmatrix}$$

$$D \quad \left(2 \quad t \quad p \frac{V_P}{r_p^2} \right) v_v$$

Expression de la source de l'énergie turbulente k :

$$S_k \quad P_k \quad r r x$$

$$S_k \quad S_k^s \quad S_{pk}^w \cdot K_p$$

où:

$$S_k \quad P_k$$

$$S_{pk} \quad v_k \quad \left({}^2 C \frac{K^2}{t} \right) v_k$$

$$\overline{P_k} = \frac{n}{s} \frac{e}{w} P_k r r x$$

Pn peut écrire le terme P_k sous la forme:

$$P_k = A + B$$

où:

$$A = \frac{n}{s} \frac{e}{w} 2 \left[\left(\frac{U}{x} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{V_P}{r} \right)^2 \right] r r x$$

$$A = \left[\left(\frac{U_P}{x} \frac{U_W}{x} \right)^2 + \left(\frac{V_P}{r} \frac{V_S}{r} \right)^2 + \left(\frac{V_P}{r} \right)^2 \right] v_k$$

$$B = \frac{n}{s} \frac{e}{w} \left[\left(\frac{U}{r} - \frac{V}{x} \right)^2 \right] r r x$$

$$\left[\frac{U_N}{r} \frac{U_S}{r} - \frac{V_E}{x} \frac{V_W}{x} \right]^2 v_k$$

Expression de la source du taux de dissipation :

$$\overline{S} = \frac{h}{s} \frac{e}{w} \left[\left(C_1 \overline{K} P_k \right) + \left(C_2 \overline{K} \right) \right] r r x$$

$$\overline{S} = S + S_p$$

$$S = \left(C_1 \overline{K} P_k \right) v$$

$$S_p = \left(C_2 \overline{K} \right) v$$

avec :

$$P_k = A + B$$

où : A et B les expressions déterminées précédemment

Conditions aux limites:

Condition à l'entrée:

Généralement dans la simulation des écoulements, le profil d'entrée est déduit des données expérimentales. Dans cette étude on a pris un profil uniforme.

La distribution d'entrée de la vitesse transversale est :

$$\overline{V} = 1, J = 0, \quad J = 1, n_j$$

Les conditions initiale de l'énergie cinétique turbulente et sont taux de dissipation sont évaluées en considérant les approximations de prandtl :

$$K = 1, J = 0.01 \overline{U}^2, J = 1, J$$

$$1, J = \frac{K^{1.5}}{1, J}$$

Condition à la sortie:

A la sortie le régime est établi (écoulement développé), ce qui traduit par la non variation par rapport à x donc on a:

$$\frac{U}{x} = \frac{V}{x} = \frac{K}{x} = \frac{C}{x} = 0$$

En discrétisant cette condition on aura :

$$A_E = NIM2, J = 0 \text{ avec : } U = NIM1, J = U = NIM2, J$$

Condition à l'axe de symétrie:

Près de l'axe de symétrie, il n'y a pas de variation par rapport à r pour les variables $U, K,$ et $C,$ avec $V = 0$.

$$\frac{U}{r} = \frac{K}{r} = \frac{C}{r} = 0$$

La discrétisation de cette condition se fait comme suit:

Sur l'axe de symétrie, la face inférieure du volume de contrôle est nulle figure, ce qui signifie par conséquent que le flux sud sur cette partie du maillage est égale à zéro.

D'après l'équation de transport discrétisée pour le noeud $j = 2$:

$$A_P = P_i, 2 = A_N = N_i, 3 = A_S = S_i, 1 = A_E = N_i = 1, 2 = A_W = S_i = 1, 2 = b$$

des flux sud nuls $S = 0$ donc $A_S = 0$

Sachant que $A_p = A_E = A_W = A_N = A_S$ on peut réécrire l'équation discrétisée comme suit :

$$\begin{aligned} & A_E \frac{U_{E,i,1,2} - U_{E,i,2}}{r} + A_W \frac{U_{W,i,1,2} - U_{W,i,2}}{r} + A_N \frac{U_{N,i,3} - U_{N,i,2}}{r} + A_S \frac{U_{S,i,1} - U_{S,i,2}}{r} = 0 \\ & \text{donc le terme } A_S \frac{U_{S,i,1} - U_{S,i,2}}{r} = 0, \text{ d'où la condition au limite : } U_{S,i,1} = U_{S,i,2} \end{aligned}$$

Condition à la frontière libre:

Près de la frontière libre, il n'ya pas de variation par rapport à r pour les variables $U, V, K,$ et C

$$\frac{U}{r} = \frac{V}{r} = \frac{K}{r} = \frac{C}{r} = 0$$

La discrétisation s'effectue comme suit :

$$A_N \frac{U_{N,i,njm2} - U_{N,i,njm1}}{r} = 0 \text{ avec } V_{i,njm1} = V_{i,njm2}$$

Equation algébrique de pression.

Algorithme simple:

Pour la résolution des équations de quantité de mouvement, il faut connaître le champ de pression, or ce dernier est inconnu. Pour cette raison Patankar et splading 1980 ont développé une méthode qui utilise l'équation de continuité pour obtenir le champs de pression, si le bon champs de pression est pris en compte dans le traitement des équations des quantités de mouvement, alors les vitesses obtenues vérifiant l'équation de continuité. Cette dernière apparaît donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression. Cette méthode est basée sur le principe suivant:

On peut écrire l'équation de continuité discrétisée après l'intégration comme suit :

$$U_e a_e + U_w a_w + V_n a_n + V_s a_s = 0 \quad \#$$

On suppose une distribution de pression P après la résolution on obtient U, V la substitution de U et V dans l'équation de continuité donne :

$$U_e a_e + U_w a_w + V_n a_n + V_s a_s = m \quad \#$$

m est un résidu massique dû au champs de pression incorrect P pour avoir un résidu massique nul on introduit des vitesses correctives \dot{U} et \dot{V} dans l'équation de continuité on obtient:

$$\left(U + \dot{U} \right)_e a_e + \left(U + \dot{U} \right)_w a_w + \left(V + \dot{V} \right)_n a_n + \left(V + \dot{V} \right)_s a_s = 0 \quad \#$$

D'après les deux équations précédentes nous pouvons déduire:

$$\left(\dot{U} \right)_e a_e + \left(\dot{U} \right)_w a_w + \left(\dot{V} \right)_n a_n + \left(\dot{V} \right)_s a_s = -m \quad \#$$

Retournons maintenant aux équations discrétisées des composantes de vitesses U, V en fonction du champ exact de pression.

$$A_p U_p = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S - \left(P_W - P_P \right) \frac{r}{r} \quad \#$$

$$A_p V_p = A_E V_E + A_W V_W + A_N V_N + A_S V_S - \left(P_S - P_P \right) \frac{r}{x} \quad \#$$

Les équations précédentes s'écrivent de la même sorte pour les vitesses approchées:

$$A_p \dot{U}_p = A_E \dot{U}_E + A_W \dot{U}_W + A_N \dot{U}_N + A_S \dot{U}_S - \left(P_W - P_P \right) \frac{r}{r} \quad \#$$

$$A_p \dot{V}_p = A_E \dot{V}_E + A_W \dot{V}_W + A_N \dot{V}_N + A_S \dot{V}_S - \left(P_S - P_P \right) \frac{r}{x} \quad \#$$

Après soustraction on trouve:

$$A_p \dot{U}_p = A_E \dot{U}_E + A_W \dot{U}_W + A_N \dot{U}_N + A_S \dot{U}_S - \left(P_W - P_P \right) \frac{r}{r} \quad \#$$

$$A_p V_p - A_E V_E - A_W V_W - A_N V_N - A_S V_S - (P_S - P_P) r_x^V \quad \#$$

On suppose maintenant que la vitesse se corrige en un point en fonction des corrections de pression seulement sans tenir compte des corrections des vitesses des points voisins, donc les équations pour les correction se réduisent a:

$$A_p \dot{U}_p - (P_W - P_P) r_r^U \quad \#$$

$$A_p V_p - (P_S - P_P) r_x^V \quad \#$$

Par conséquent on tire les valeurs des corrections des vitesses:

$$\dot{U}_p = \frac{(P_W - P_P) r_r^U}{A_p^U} \quad \#$$

$$V_p = \frac{(P_S - P_P) r_x^V}{A_p^V} \quad \#$$

On note par : $du = \frac{r_r^U}{A_p^U}$ et $dv = \frac{r_x^V}{A_p^V}$

Les r_r^U et r_x^V sont les aires des faces des volumes de contrôle des composantes U et V respectivement:

$$\dot{U}_p = du (P_W - P_P) \quad , \quad V_p = dv (P_S - P_P)$$

Rappelons que les (e,w,n,s) du volume de contrôle de la pression P contiennent les noeuds du stockage des composantes de vitesse, on aura par un même raisonnement :

$$\dot{U}_e = du_e (P_P - P_E)$$

$$\dot{U}_w = du_w (P_W - P_P)$$

$$V_n = dv_n (P_P - P_N)$$

$$V_s = dv_s (P_S - P_P)$$

En substituant les valeurs des corrections des vitesses précédentes on obtient l'équation discrétisée de la correction de pression P :

$$du_e (P_P - P_E) a_e - du_w (P_W - P_P) a_w - dv_n (P_P - P_N) a_n - dv_s (P_S - P_P) a_s = m \quad \#$$

$$A_p P_p - A_E P_E - A_W P_W - A_N P_N - A_S P_S = m \quad \#$$

avec :

$$A_E = du_e a_e \quad , \quad A_N = dv_n a_n$$

$$A_W = du_w a_w \quad , \quad A_S = dv_s a_s$$

Séquence des opérations itératives:

Les étapes sont les suivantes:

1- donner un champ de pression initial P

2- résoudre les équations de quantité de mouvement pour les vitesses U et V

3- résoudre l'équation de la correction de pression P

4- corriger P : $P = P + P$

5- corriger les champs des composantes de vitesses U et V en utilisant les formules des corrections.

6- résoudre l'équation de la concentration C .

7- calculer la nouvelle valeur de ϕ d'après l'équation d'état.

refaire les étapes de 2 à 7 jusqu'à la convergence.

Method de résolution (Algorithme TDMA)

Le système d'équations algébriques non linéaires contient $IL - 2$ $JL - 2$ équations, ceci après incorporation des conditions aux limites, avec IL et JL représentant respectivement les nombres totaux des noeuds suivant X et R.

L'équation algébrique s'écrit pour le noeud P du maillage comme suit :

$$A_P P + A_E E + A_W W + A_N N + A_S S = \bar{S} \quad \#$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$A \bar{S}$$

Où : A est une matrice de $IL - 2$ $JL - 2$ éléments.

Vecteur des inconnues i, j .

La résolution directe du système étant compliquée, on utilise donc une méthode de résolution itérative qui détermine les valeurs de la variable sur chaque colonne indépendamment des autres colonnes. Ainsi pour déterminer les valeurs de la variable sur la colonne (i), on suppose que ces valeurs sont connues sur les colonnes (i-1) et (i+1).

L'équation algébrique est alors réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues P , N et S .

Pour le noeud i, j du maillage, l'équation algébrique pourra s'écrire :

$$A_S i, j + i, j - 1 + A_P i, j + i, j + A_N i, j + i, j - 1 + A_E i, j + i + 1, j + A_W i, j + i + 1, j = \bar{S} i, j \quad \#$$

En posant :

$$a_j = A_P i, j$$

$$b_j = A_N i, j$$

$$c_j = A_S i, j$$

$$d_j = A_E i, j + i + 1, j + A_W i, j + i + 1, j + \bar{S}$$

l'équation ref: aa s'écrit donc sous la forme suivante :

$$c_j + j - 1 + a_j + j + b_j + j - 1 = d_j \quad \#$$

avec : $C_1 = 0$ et $b_{JL} = 0$

Pour tous les noeuds $J = 2, JL$ de la colonne, on a un système tridiagonale on utilise l'algorithme TDMA pour le résoudre :

Les équations ref: r1 peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$j + \frac{c_j}{a_j} + j - 1 + \frac{b_j}{a_j} + j - 1 = \frac{d_j}{a_j} \quad \#$$

Ou :

$$2 + \frac{c_2}{a_2} + 1 + \frac{b_2}{a_2} + 1 = \frac{d_2}{a_2}$$

$$3 + \frac{c_3}{a_3} + 2 + \frac{b_3}{a_3} + 2 = \frac{d_3}{a_3}$$

$$jL + \frac{c_{jL}}{a_{jL}} + jL - 1 + \frac{b_{jL}}{a_{jL}} + jL - 1 = \frac{d_{jL}}{a_{jL}}$$

Puisque c_1 est connu, on élimine c_2 puis c_3 et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une relation de récurrence pour c_j :

$$j + P_j + j - 1 = Q_j \quad \#$$

Détermination de P_j et Q_j :

Pour le noeud $i, j - 1$, on a :

$$j - 1 + P_{j - 1} + j - 1 = Q_{j - 1} \quad \#$$

En remplaçant ref: r4 dans ref: r1 on obtient :

$$c_j + P_{j - 1} + j - 1 + Q_{j - 1} + a_j + j + b_j + j - 1 = d_j \quad \#$$

D'où on a :

$$a_j - c_j P_{j-1} \quad d_j - c_j P_{j-1} \quad b_j \quad \#$$

$$j \quad \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad j-1 \quad \frac{d_j - c_j P_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad \#$$

De ref: r2 et ref: r3 on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad \#$$

$$Q_j = \frac{d_j - c_j P_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad \#$$

On peut dire finalement qu'on a résolu la matrice en faisant un balayage suivant X (colonne par colonne).

Pour la résolution de la matrice en faisant un balayage suivant r (ligne par ligne), on utilisera les mêmes étapes que le balayage suivant X , en supposant que les valeurs de la variable sur les lignes $(j-1)$ et $(j-1)$ sont connues.

Structure du code de calcul

Le code de calcul utilisé est constitué d'un programme principal et de sous programmes, la fonction de chaque subroutine est :

Init: calcul des différents paramètres géométriques du maillage et initialisation des variables

Calcu: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de transport de la composante approchée U de la vitesse.

Calcv: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de transport de la composante approchée V de la vitesse.

Calcp: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de la correction de pression P et correction des composantes de vitesses U et V .

Calcte: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente K .

Calced: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de transport du taux de dissipation ϵ .

Calcc: calcul des coefficients A_i et résolution de l'équation de transport de la concentration.

Modu: calcul des conditions aux limites de la composante U .

Modv: calcul des conditions aux limites de la composante V .

Modte: calcul des conditions aux limites de l'énergie cinétique turbulente.

Moded: calcul des conditions aux limites de la dissipation.

Modc: calcul des conditions aux limites de la concentration.

Lisolv: résolution du système d'équations algébriques associé à la variable en général.

Print: impression des résultats.

Critère de convergence:

On procède au calcul du résidu comme suit:

$$Resor = \sum_{i=2}^{ni-1} \sum_{j=2}^{nj-1} \left| \left[A_V V \quad S \quad A_P P \right] \right| \quad \#$$

La solution est considérée avoir convergé si la somme absolue des résidus de chaque variable est inférieure à 0.5% du flux d'entrée

Remarque:

-Resor : somme absolue des résidus correspondant à la variable générale

-Sorcel maximum de resor (resorm, resoru, resorv, resork, resor , resorc)

- sormax

Un test se fait, durant le calcul, sur le nombre d'itérations. Ce dernier niter est fixé à une valeur maximal (maxit), si cette valeur est atteinte (niter maxit), sans que le premier test soit vérifié sorcel sormax , le calcul s'arrete, dans ce cas la solution n'a pas convergé.

La sous relaxation :

Puisque la variable varie fortement d'une itération à une autre, on est amené à introduire un coefficient de sous relaxation de la variable comme suit :

$$\frac{A_p}{P} = A_E E + A_W W + A_N N + A_S S + S - 1 \quad A_p \quad p$$

Ainsi que pour la pression :

$$P = P_{ref} + \omega (P - P_{ref}) \quad \text{avec : } \omega = 0 \quad 1$$

Discussion des résultats

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus, par le code de calcul élaboré. La figure (5-1) montre la géométrie du problème étudié:

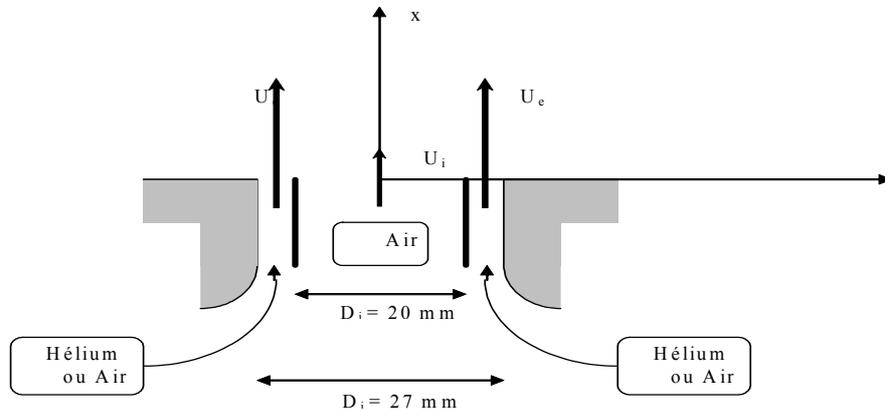


Figure (5-1) Géométrie du problème

Le tableau suivant donne les valeurs numériques des paramètres caractéristiques de la géométrie.

R_1 m	R_2 m	R m	L m
0.01	0.0135	0.10	0.80

Les paramètres utilisés ici sont:

-le rapport de diamètre caractérisant la géométrie, D_e/D_i

-le rapport de vitesses débitantes, caractérisant la cinématique, $r_v = U_e/U_i$

-le rapport de densité, $S = \rho_e/\rho_i$

-le rapport caractéristique de la quantité de mouvement, $M_j = r_v^2 S$

Dans notre étude les paramètres précédents ont pour valeurs :

- $M_j = 1.35$, constante dans cette étude,

- r_v variable entre 3 et 12 ($r_v = 1$ pour le cas limite d'un jet annulaire).

- $S = 1$ pour les jets homogènes air-air; $S = 0.14$ pour les jets hélium-air.

Les vitesses débitantes extérieures ont été maintenues constantes pour un gaz donné ($U_e = 6m/s$ pour l'air et $U_e = 16m/s$ pour l'hélium) et on a fait varier r_v en modifiant la vitesse du jet central U_i , et pour évaluer l'influence des différences de densité sur le développement des jets coaxiaux, on a mené des calculs en gardant constante la quantité de mouvement du jet extérieure (une vitesse $U_e = 16m/s$ d'hélium correspond à $U_e = 6m/s$ d'air).

Les calculs sont effectués sur un maillage non uniforme comportant 40 30 noeuds, pour la stabilité numérique des facteurs sont utilisés pour sous-relaxer à chaque itération les champs de vitesse et le champs de pression P . La solution est considérée avoir convergé si la somme absolue des résidus de chaque variable est inférieure à 0.5% du flux d'entrée correspondant.

Cas homogène

Profils radiaux de vitesse — air/air — M 9

Les figures 5,2, est 5,3 montrent que le jet coaxial présente 02 pics de vitesse moyenne, qui persiste au-delà de $4D_i$ pour les mesures expérimentales $6.88D_i$ pour les calculs numériques et disparaît à une distance égale $10.17D_i$. On a donc une transition de comportement du jet coaxial à un jet rond, entre ces deux distances, le jet coaxial a un comportement similaire au jet simple, pour une distance approximative égale $6D_i$ et 10.17 pour le calcul numérique.

Donc les profils indiquent l'existence d'une région central d'écoulement potentiel, appelée coeur potentiel interne, entourée d'une région d'écoulement potentiel externe et des deux couches de mélange aux interfaces.

Le fluide situé sur le bord du jet central est donc fortement accéléré entre ces deux positions, par entraînement dans la couche de mélange interne. Corrélativement, par conservation du débit, l'écoulement est décéléré dans la partie central, et la vitesse sur l'axe a chuté entre la section de sortie et la section à $x/D_i = 1.43$, on note également le ralentissement du jet annulaire entre les deux sections.

La longueur du cône potentiel de ce jet est donc inférieure à $1.43D_i$ pour cette configuration d'écoulement, au-delà de $x/D_i = 1.43$, les effets d'entraînement par la couche de mélange interne se sont déjà fait sentir dans la région central, et pour $x/D_i = 5.5$ la vitesse sur l'axe a augmenté par rapport à la section précédente. On assiste donc progressivement à un transfert de quantité de mouvement du jet annulaire vers le jet central, jusqu'à ce que la bosse des profils des vitesses, ait disparu et que le maximum des vitesses à travers une section du jet est situé sur l'axe. On constate que cette condition est réalisée à $x/D_i = 6$ à 7 pour les mesures expérimentales est à $x/D_i = 10.17$ pour les calculs numériques.

On remarque aussi d'après la figure 5 4, lorsque le rapport de vitesse devient supérieur à une valeur critique r_v , une zone de recirculation apparaît près de la buse sur l'axe du jet coaxial, marquée par des vitesses négatives indiquant le retour du fluide vers l'arrière.

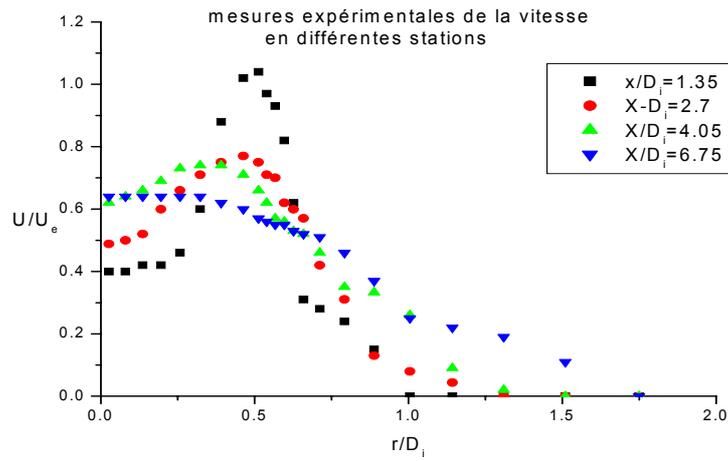
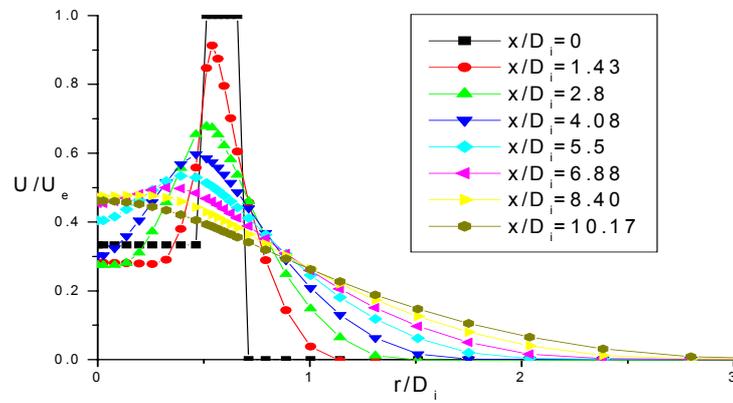


Figure (5-2) mesures expérimentales de la vitesse en



Figure(5-3) Profils radiaux de vitesse d'un jet coaxial

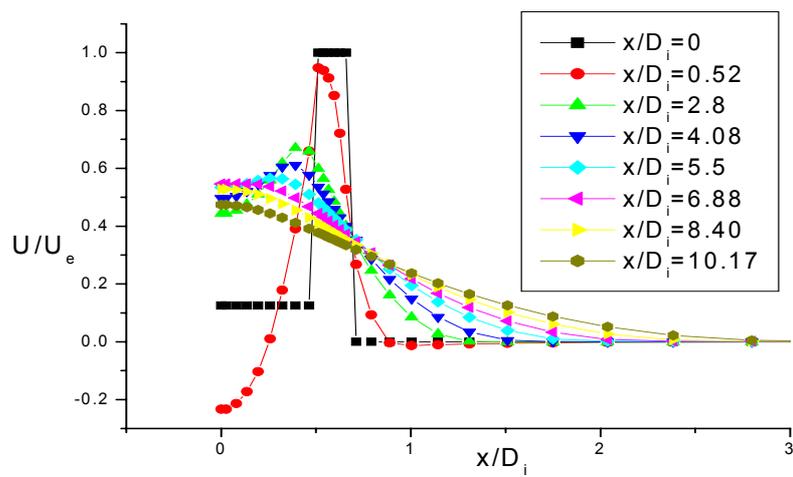
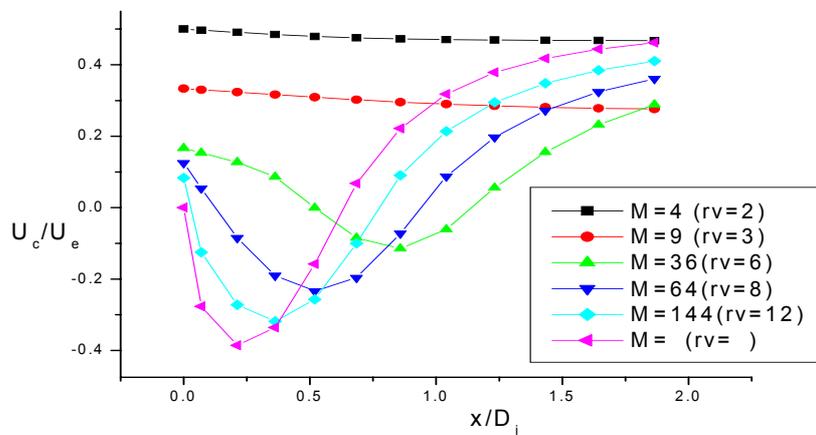


Figure (5-4) Profils radiaux de vitesse d'un jet coaxial homogène(

Profils axiaux de vitesse dans la zone proche de la buse:

La figures 5-5 montre les profils axiaux de la vitesse moyenne, rapportées à la vitesse débitante extérieur, U_e , les profils de vitesse moyenne présentent une diminution de la vitesse central U_c , d'autant plus marquée que M augmente, pour arriver à un minimum aux alentours de x/D_i , ensuite, le fluide est réaccélééré. Ces résultats nous permettent de préciser la position du minimum relatif de U_c/U_e soit $x/D_i = 0.5 - 0.9$, pour $M_j = 36$ ($r_v = 6$), et $M_j = 64$ ($r_v = 8$), les profils indiquent une région de vitesse moyenne négative, par contre, pour un écoulement avec forte vitesse de retour M_j , r_v les vitesses sont toujours négatives au sein de la bulle de recirculation $0.3 < x/D < 0.5$.

Près de la buse, la couche de mélange interne se referme sur elle-même, pour aller se pincer sur l'axe du jet. Elle crée une dépression par entraînement du fluide interne, qui en fonction de la vitesse d'entraînement et des densités des courants, mesure sa force avec la pression dynamique du jet central $0.5 \rho U_j^2$, lorsque la dépression est suffisamment grande une zone de recirculation proche de la buse s'installe, ce phénomène apparaît quand le rapport des flux de quantité de mouvement, M_j atteint une valeur critique $M_c = 30$.



Figure(5-5) Profils axiaux des jets coaxiaux homogènes (air-air) en

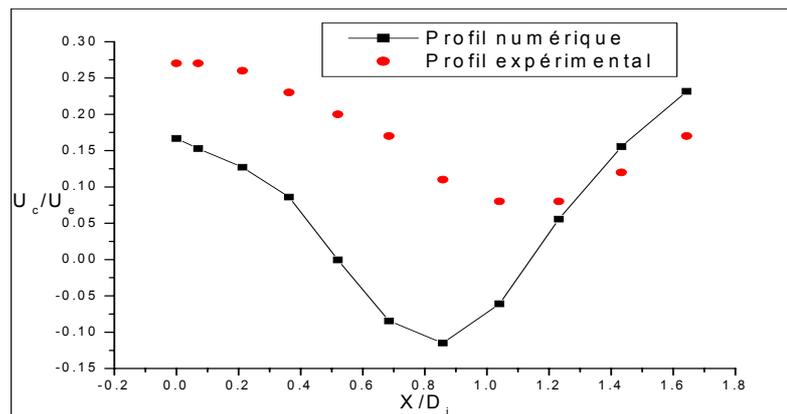


Figure (5-6) Superposition du profil numérique et expérimental

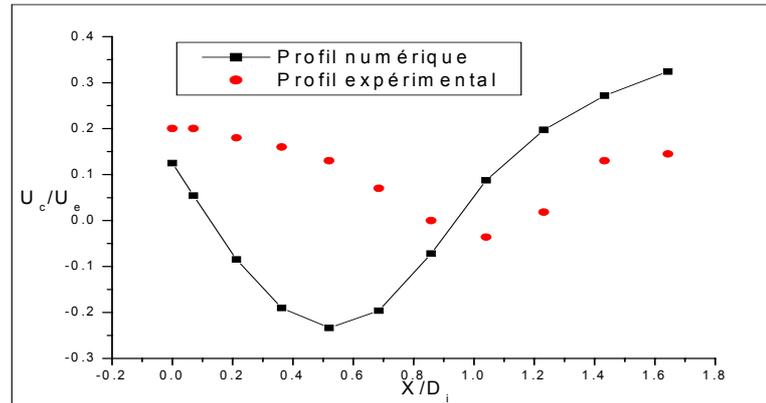


Figure (5-7) Superposition du profil numérique et

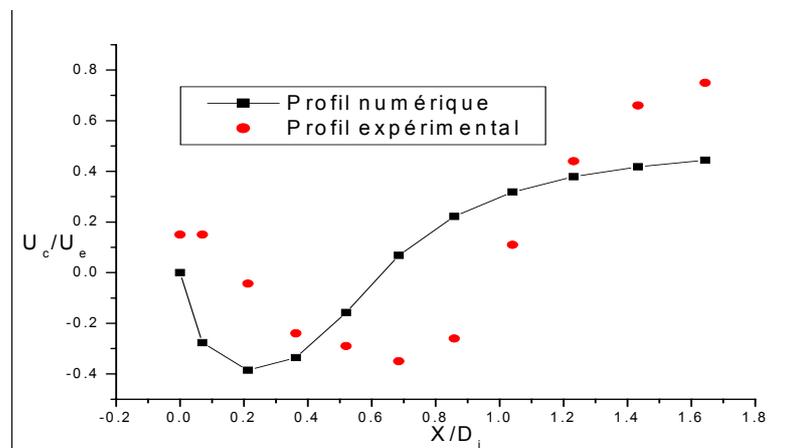


Figure (5-8) Superposition du profil numérique et expérimental

Profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente k :

La figure 5 9 montre les profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente k en différentes stations. L'évolution des profils confirme celle des vitesses moyennes, les deux couches de mélange interne et externe sont très clairement mises en évidence près de la buse à $x/D_i = 1.43$, marqué par une intensification de la turbulence liée au gradient de vitesse plus élevé pour la couche externe que pour la couche de mélange interne. On note un très faible niveau de l'énergie cinétique turbulente k , dans le jet central, puisque la couche interne n'a pas encore atteint cette région pour cette distance de la buse, ce n'est plus le cas pour $x/D_i = 4.08$, il y a une augmentation importante de l'énergie cinétique turbulente ce qui indique que la couche de mélange interne a atteint l'axe du jet à cette distance. Cette énergie turbulente importante au niveau de l'axe de symétrie n'est pas le résultat d'une production local puisque le gradient de vitesse moyenne est nul, mais c'est dû aux mécanismes de transport par convection et par diffusion.

On observe d'après la figure 5 10, que pour des rapports de vitesses très élevés apparaît une zone de recirculation, marquée par une turbulence intense près de la buse sur l'axe du jet.

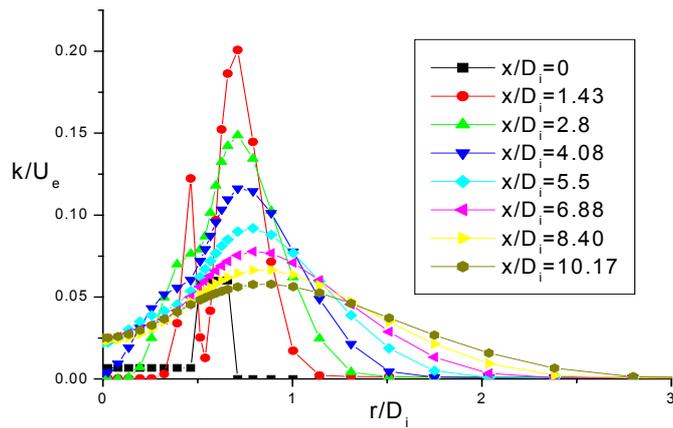


Figure (5-9) Profils radiaux de l'énergie cinétique

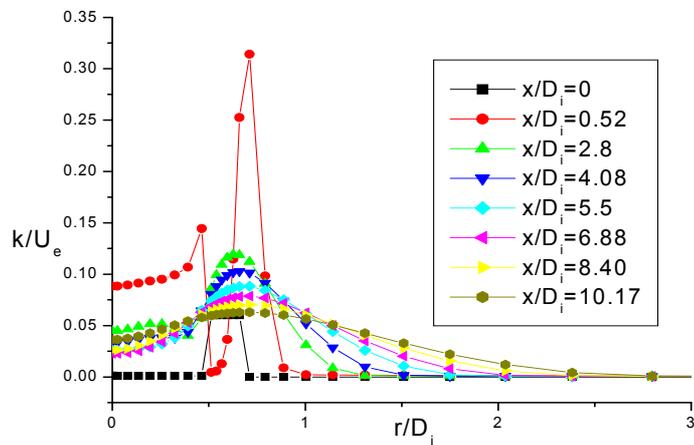


Figure (5-10) Profils radiaux de l'énergie cinétique

épaississement du jet coaxial:

la figure 5.11 montre que la vitesse maximale rapportée a la vitesse annulaire est inversement proportionnelle à la distance X/D_i

La figure 5 12 montre l'épaississement du jet coaxial noté $(r_{1/2})$. Le calcul de ce dernier est déterminé à chaque stations par la positions radiale ou la vitesse U est données par la relations suivante:

$$U = \frac{\bar{U}/U_{c \max}}{2}$$

Le jet s'épaissit dans le sens de l'écoulement à cause de l'influence du frottement et pour cette raison que la vitesse maximale décroît dans cette direction, sachant que la quantité de mouvement reste constante d'une station a une autre.

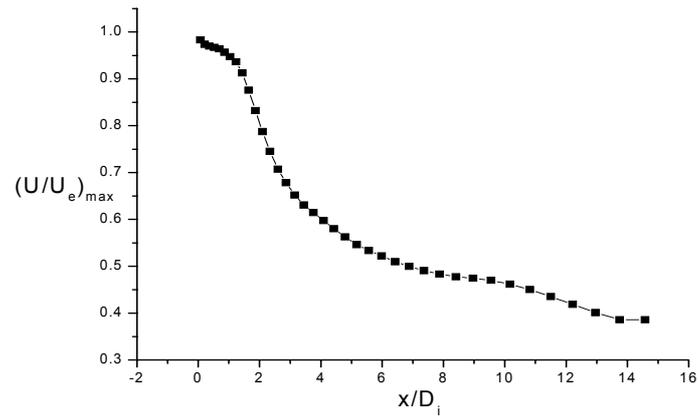


Figure (5-11) Evolution axiale de la vitesse maximal

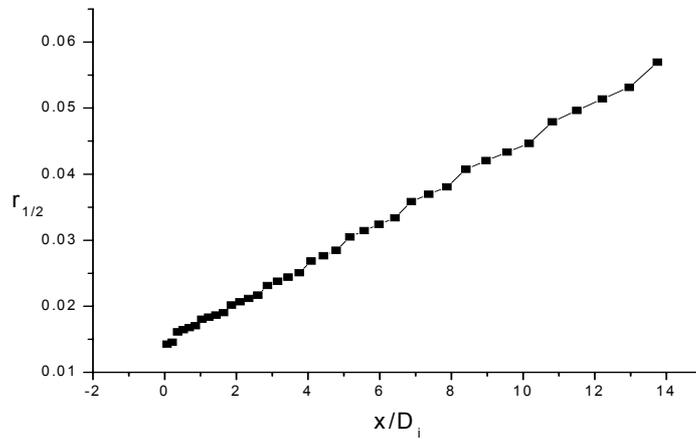


Figure (5-12) croissance spacial du jet coaxial

Contraintes de reynolds:

La figure 5, 13 présente les profils radiaux des contraintes de reynolds, en ce qui concerne les doubles corrélations $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, l'allure générale des courbes est similaire à celle de k , les pics correspondent aux couches de mélange interne et externe, alors que les creux correspondent au cône potentiel central et extérieur. On note ici que le modèle k ne capte pas bien l'anisotropie des contraintes de reynolds. Pour le profil de la contrainte \overline{uv} le premier pic est négatif dû au gradient de vitesse moyenne positif, puis il devient positif là où il ya un gradient de vitesse négatif. Ensuite elle diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle s'annule dans la zone de l'écoulement libre, où on peut négliger l'effet de la turbulence.

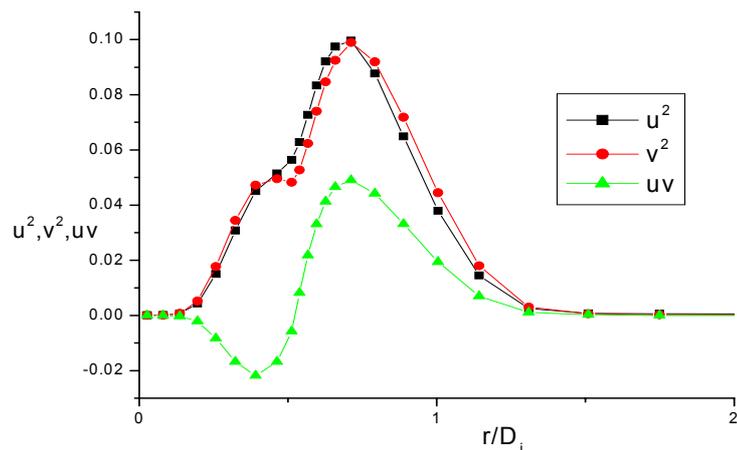


Figure (5-13) profils radiaux des contraintes de Reynolds, à $x/$

Bilan d'énergie:

La figure 5, 14 présente le bilan d'énergie de k dans une station, on constate que l'énergie convective est négative près du centre puis elle devient positive proche de la frontière du jet; dans la région du centre l'énergie cinétique turbulente augmente vers l'aval, donc le flux convectif sortant dans un volume de contrôle est plus grand que le flux convectif entrant, ce qui donne une contribution négative. Par contre dans la région près de la frontière l'énergie cinétique turbulente diminue en se déplaçant vers l'aval, donc il va y avoir dans le volume de contrôle un flux convectif entrant plus important que celui sortant, ce qui donne une contribution positive.

La production a une valeur nulle au centre, au niveau de l'axe de symétrie, où le gradient de vitesse est nul puis elle augmente jusqu'à une valeur limite correspondant à un gradient de vitesse maximal. Après elle diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle s'annule à la frontière de la couche visqueuse.

On remarque aussi que la région où le taux de dissipation est maximal correspond à celle du taux de production.

En ce qui concerne le flux diffusif de l'énergie ; on constate qu'il est négatif dans la région où on a enregistré un maximum de production ; puis il devient positif loin de cette région c'est à dire au centre et au frontière du jet. On voit donc ici que la diffusion joue le rôle d'un distributeur, c'est à dire, elle transporte l'énergie produite vers le centre, et la frontière, là où il n'y a pas de mécanisme de production.

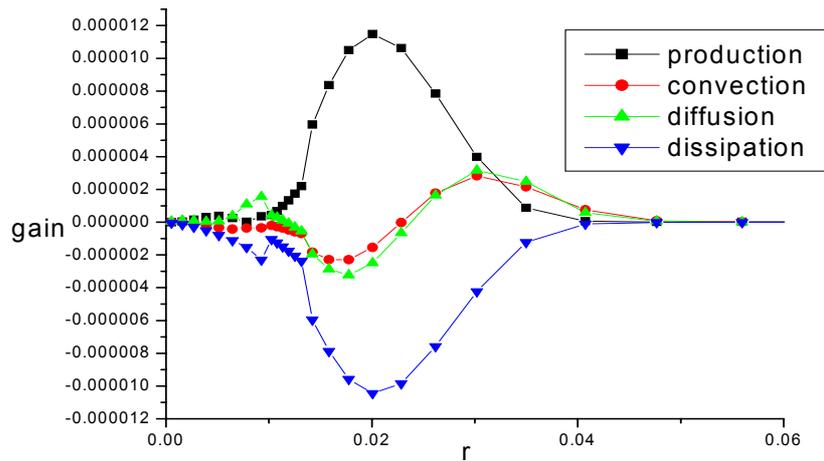


Figure (5-14) Bilan énergétique, à $x/D = 6$

Cas hétérogène:

Dynamique des jets coaxiaux hétérogènes:

D'après les figures 5 15 , 5 16 , 5 17 , 5 18 , 5 19 , 5 20 , 5 21 et 5 22 on observe que les jets coaxiaux avec différences de densité sont le siège d'instabilités déjà observées dans les jets homogènes. Par contre l'influence de la variation de la densité sur l'entraînement du fluide extérieur par le jet, est clairement remarqué dans la région initiale. Un gaz plus léger que l'ambient dans lequel il s'épanouit, se mélange plus rapidement, et possède un entraînement plus important, qu'un gaz lourd figure 5 17 .

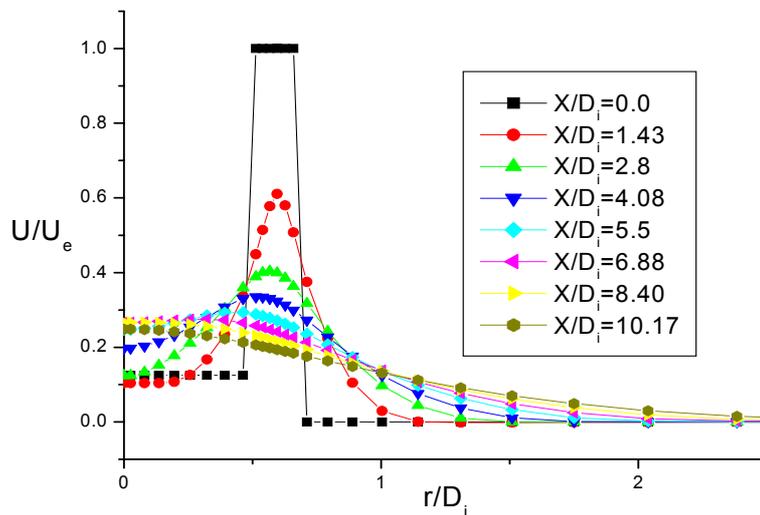


Figure (5-15) Profils numériques radiaux de vitesse d'un jet

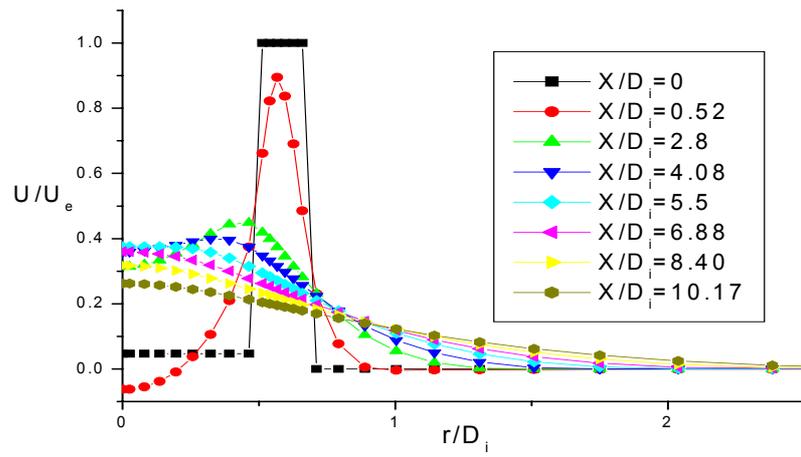
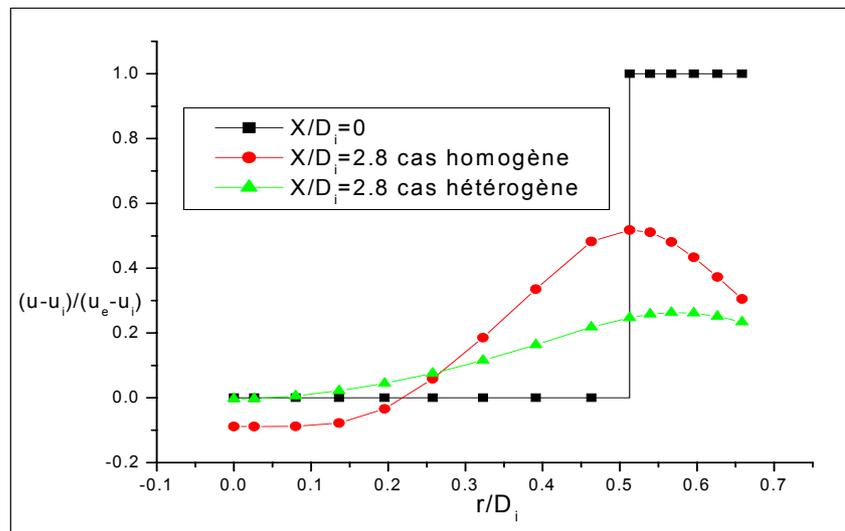


Figure (5-16) Profils radiaux de vitesse du jet coaxial, hélium-air, à



Figure(5-17) comparaison de l'entraînement du jet annulaire entre

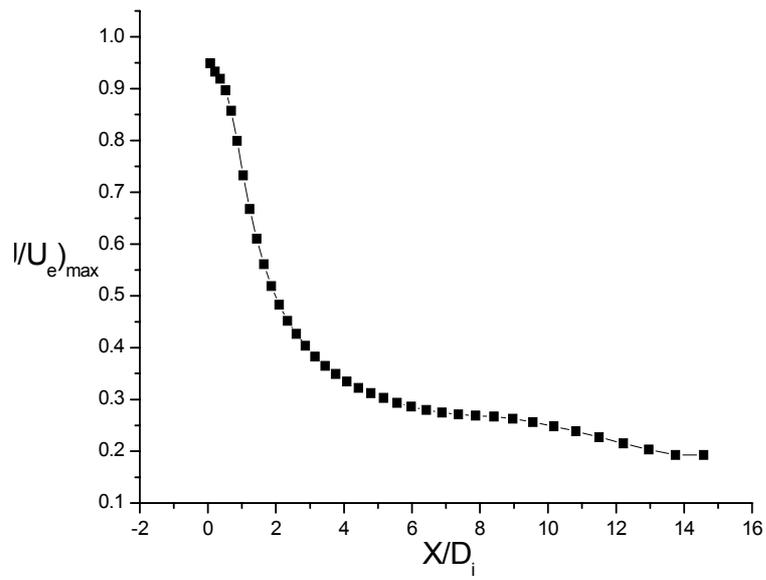


Figure (5-18) Evolution axiale de la vitesse maximale

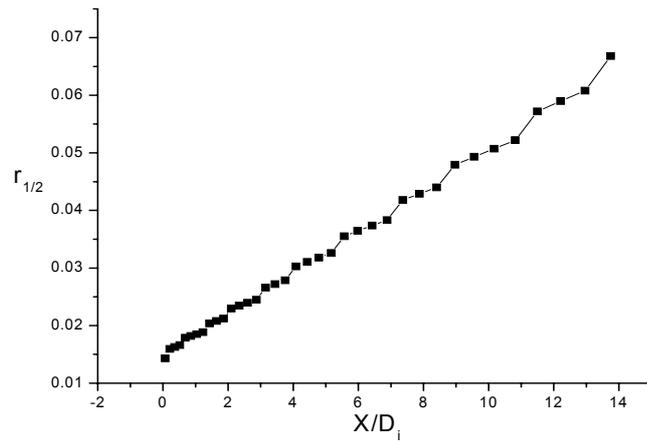


Figure (5-19) Croissance spacial du jet coaxial

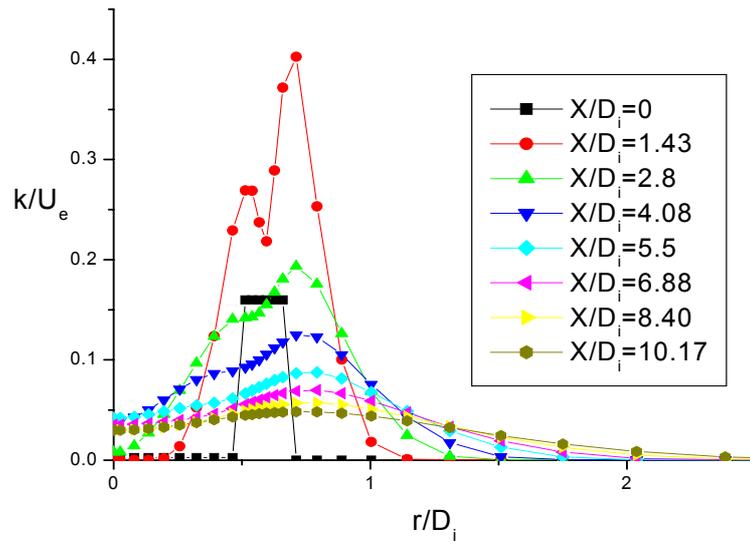


Figure (5-20) Profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente

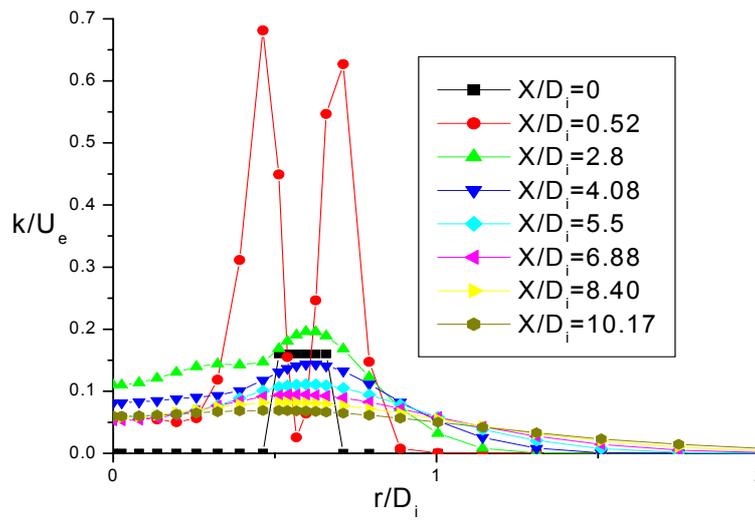


Figure (5-21) profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente k ,

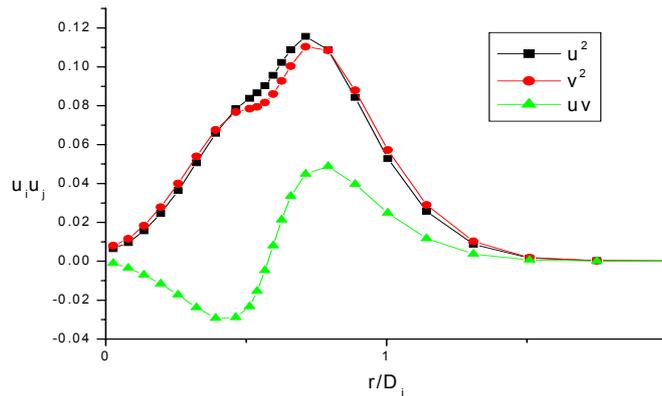


Figure (5-22) Profils radiaux des contraintes de

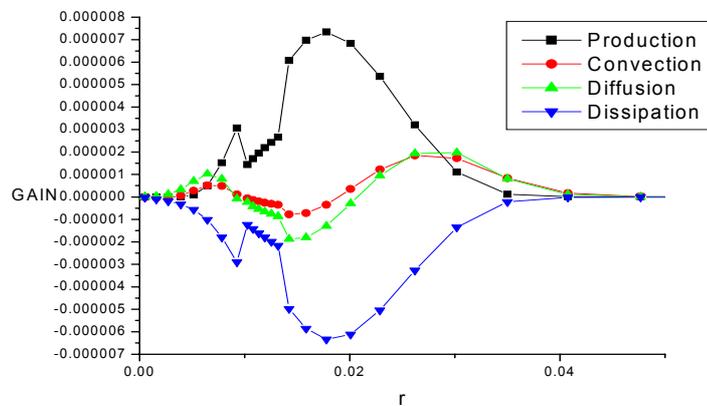


Figure (5-23) Bilan d'énergie pour à $X/D = 6$, pour $M_j = 9$ et

Profils axiaux de vitesse dans la zone proche de la buse:

On peut observer d'après la figure 5-24 que les courbes ont les mêmes allures que pour les jets homogènes. Lorsque le rapport M_j est faible, le jet central est très peu affecté par la présence de l'écoulement extérieur. Une augmentation du rapport M_j se traduit par un entraînement accru du fluide provenant du jet central, par l'installation d'une dépression de plus en plus grande dans les couches de mélange, et des vitesses qui diminuent sur l'axe. Cet effet s'accroît si r_v est plus élevé et, en conséquence, l'abscisse x/D_i du minimum se rapproche de la buse. Au-delà, la couche de mélange interne a envahi la région centrale et le fluide est réaccélééré sur l'axe. On peut observer encore l'écart important entre les jets homogène et hétérogène. Pour le jet homogène, le rapport critique r_{vc} vaut approximativement 6 à 5, tandis que pour les jets hétérogènes $r_{vc} = 20$. Si on trace la même figure en fonction du rapport des quantités de mouvement M_j , on constate un assez bon regroupement des résultats en valeur critique M_c correspondant à l'apparition de la recirculation est de l'ordre de 30 pour le cas homogène et 40 pour le cas hétérogène, l'entraînement devrait être favorisé par l'effet de densité lorsque l'écoulement rapide est le moins dense. L'écart entre les deux cas pourrait tout de même s'expliquer par le ralentissement du jet annulaire au contact de l'air ambiant.

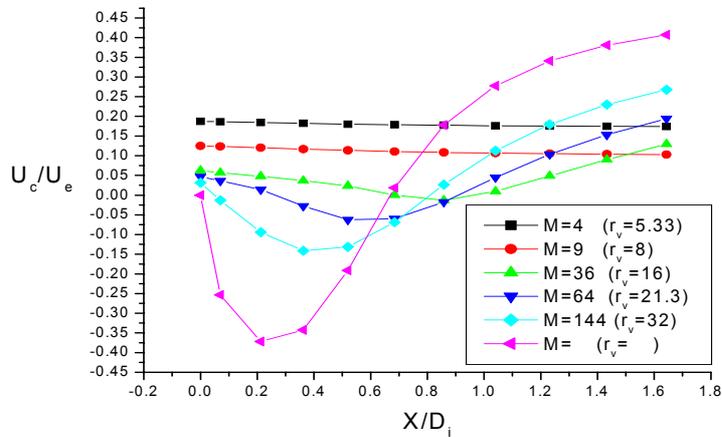


Figure (5-24) Profils axiaux de la vitesse des jets coaxiaux hétérogènes,

Les champs de densité des jets coaxiaux:

Les calculs du champ de concentration nous ont permis de déterminer les évolutions axiales et radiales de la masse volumique moyenne des jets coaxiaux.

Afin d'étudier le mélange et pouvoir comparer les profils de la densité moyenne, la masse volumique a été adimensionnalisée par ρ_i à l'aide des densités du fluide du jet annulaire à l'entrée ρ_e , et du jet central ρ_i

où

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_i}{\rho_e}$$

la moyenne est

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_i}{\rho_e}$$

le gaz injecté au centre est l'air, et dans l'anneau, c'est l'hélium.

La figure 5-25 présente les profils axiaux de la masse volumique moyenne pour le couple hélium-air, $S = 0.140$, et pour différentes valeurs du rapport de quantité de mouvement, M_j . Sur l'axe On peut observer que l'allure des courbes est la même lorsque M_j augmente, la densité moyenne présente une variation axiale plus importante pour les faibles valeurs de M_j , le gradient axial est beaucoup moins raide.

Une estimation de la longueur du cône potentiel peut être faite à partir des valeurs moyennes, $\bar{\rho}$ moyenne reste égale à 1 jusqu'à une abscisse qui correspond à la longueur du cône potentiel. A partir de cette abscisse la couche de mélange interne atteint l'axe du jet, la densité moyenne est affectée par l'arrivée du fluide riche en hélium, et la densité décroît en conséquence, et le jet annulaire entraîne le fluide ambiant (l'air), ce qui fait augmenter la densité moyenne.

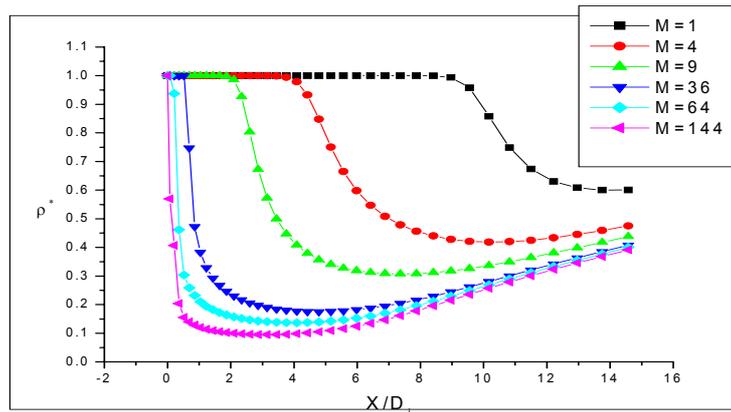


Figure (5-25) Profils axiaux de densité normalisée, en

La figure 5 26 montre la comparaison entre le profil axial numérique et expérimental de la densité normalisée, pour un jet coaxial hélium-air, $M_j = 9$, le fluide ambiant est l'air, on remarque que les calculs numériques prévoient un cône potentiel plus long que les mesures expérimentales, mais l'allure est la même pour les deux cas.

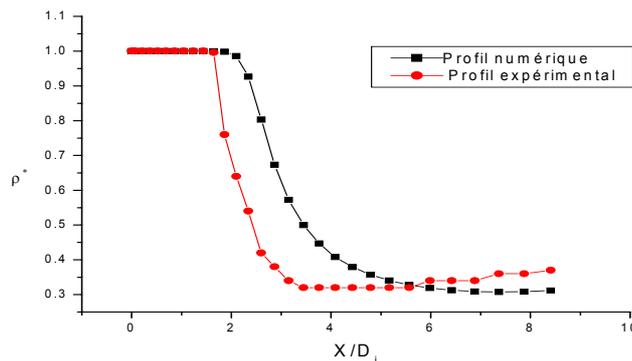


Figure (5-26) Comparaison entre profil numérique et

Profils radiaux des jets coaxiaux helium-air, $M_j = 9$:

Les figures 5,27 a et 5,27 b montrent les profils radiaux de la densité moyenne, en différentes stations. Plus on se déplace vers l'aval, à $1 < x < 2$, les deux couches de mélange interagissent, et au centre du jet annulaire $r/D_i = 0.62$, on ne retrouve plus d'hélium pur. La couche de mélange interne atteint l'axe du jet à $x/D_i = 2.09$. A partir de l'abscisse $x/D_i = 2.09$, on assiste à une homogénéisation de la densité dans la partie centrale de l'écoulement. Ainsi, à $x/D_i = 5.16$, le profil moyenne présente encore un minimum prononcé $0.26, r/D_i = 0.5$, mais la densité moyenne sur l'axe s'est beaucoup enrichie en hélium 0.35 , pour $x/D_i = 10.17$, le minimum de est pratiquement sur l'axe .

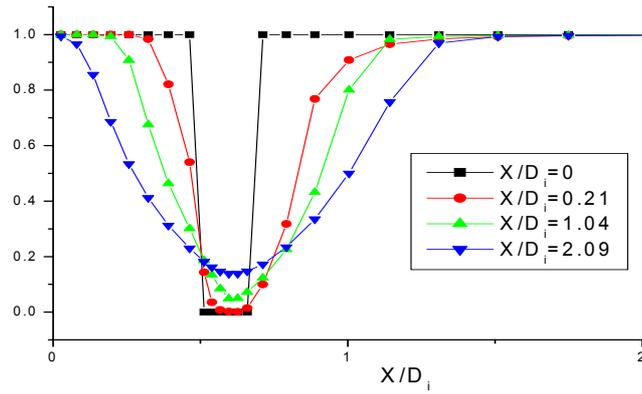


Figure (5,27-a) Profils radiaux de la masse volumique

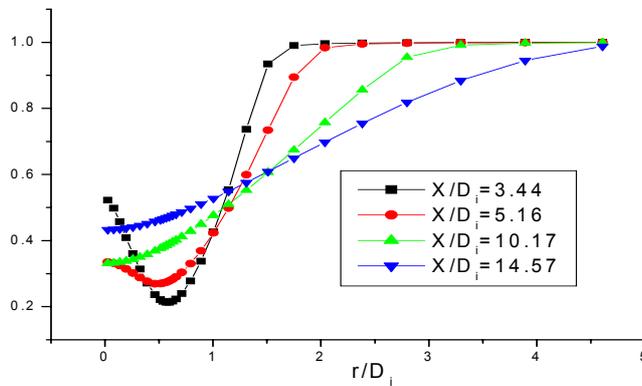


Figure (5,27-b) Profils radiaux de la masse volumique

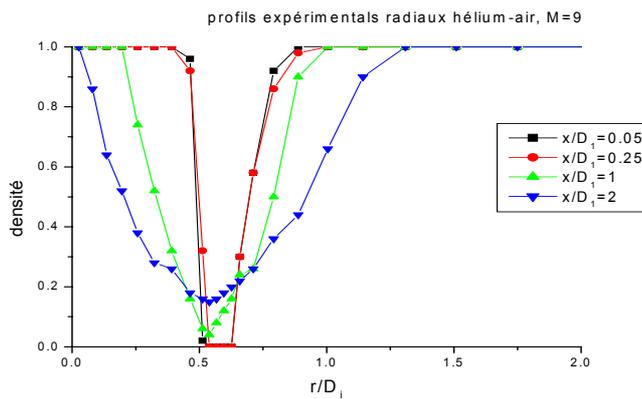


Figure (5-28) résultats expérimentaux de la densité en
L'influence de l'ambiante, pour M_j 9 et S 0.140:

Du fait des fortes différences de densité entre les gaz utilisés et l'ambiante, il nous a paru intéressant d'étudier l'influence du fluide ambiant sur le jet. Notre étude traitant des jets coaxiaux où le jet annulaire est très léger (hélium) et l'ambiant (air) 7 fois plus lourd, il est possible que ce dernier produit un ralentissement du jet coaxial sur les bords et une

augmentation de l'angle d'ouverture du jet.

Les profils de densité moyenne des figures 5-29 et 5-30, se superposent bien, jusqu'à $4D_i$, pour le cas axial et $0.6r/D_i$ pour le cas radial puis nous trouvons une courbe qui décroît asymptotiquement à zéro, dans le cas où l'ambient est de l'hélium. On a donc une couche de mélange externe qui dépend assez fortement du fluide ambient, et du fluide injecté dans l'anneau.

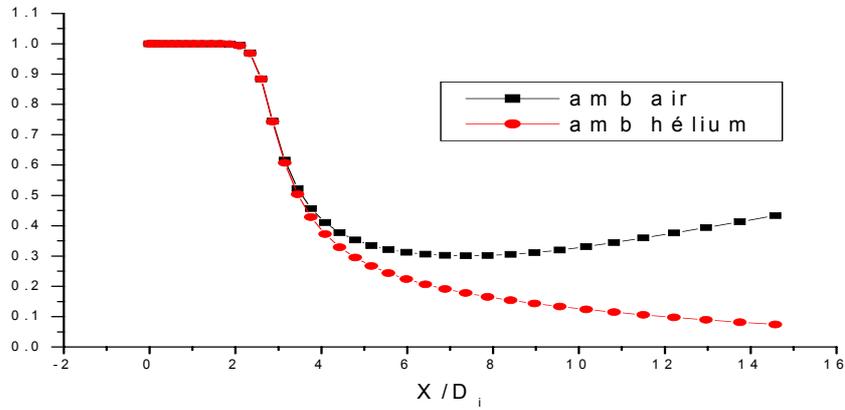


Figure (5-29) Profils axiaux de densité normalisée, $M_j = 9$, $S = 0.140$, pour

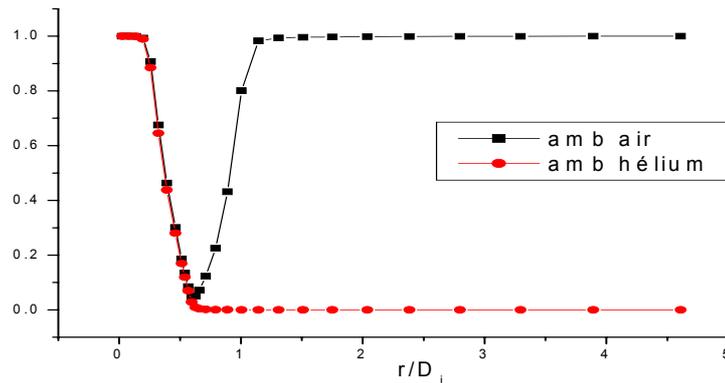


Figure (5-30) Profils radiaux des jets coaxiaux à $M_j = 9$, pour

Pour la largeur du jet pour un fluide ambient différent de l'air de la figure on remarque la même largeur, néanmoins, la présence d'air comme fluide ambient favorise l'entraînement. L'évolution axiale de la vitesse maximal représentée sur la figure montre une décroissance plus prononcée pour le couple (air-hélium), avec l'ambient de l'air que le cas homogène, et le cas avec l'ambient de l'hélium.

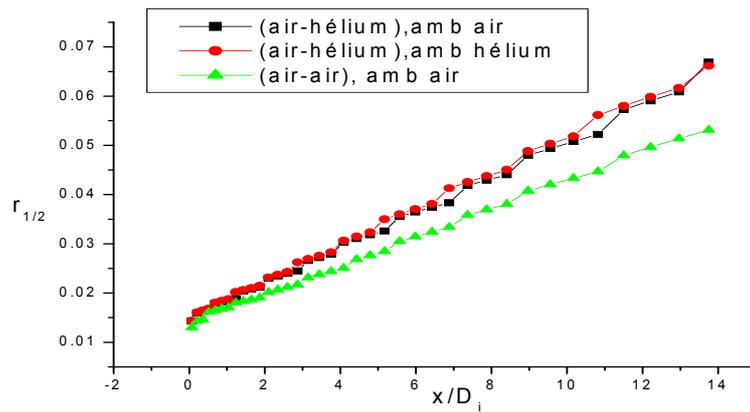


Figure (5-31) Influence de l'ambiante sur l'épaississement du

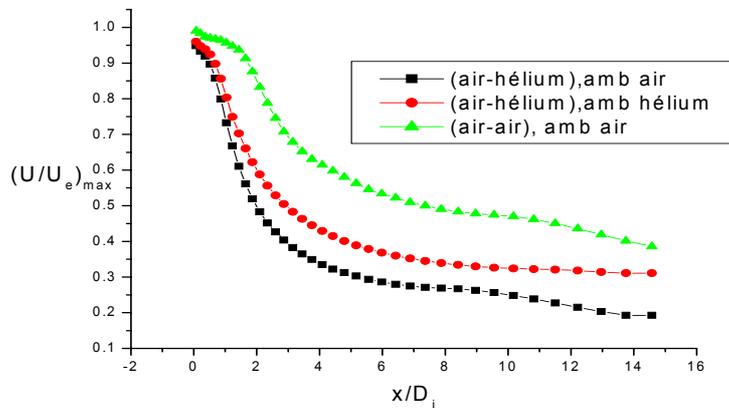


Figure (5-32) Influence de l'ambiante sur la décroissance de

Conclusions et perspectives:

Cette étude avait comme objectif principal de simuler numériquement la dynamique et le processus de mélange des jet coaxiaux avec forte différence de densité, d'un point de vue technologique, ce type de jet est appliqué aux injecteurs de moteurs de fusée, d'où l'importance de délimiter le cas avec et sans recirculation. L'établissement d'une bulle de recirculation ainsi que le développement d'un cône potentiel sont fortement dépendants des conditions initiales d'injection, c'est à dire le champs de vitesses et de densité et du développement du mélange entre les deux jets. Ainsi, sur la base des résultats numériques obtenus, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1-les différents résultats s'accordent pour montrer que, si le rapport des vitesses r_v devient supérieur à une valeur critique r_{vc} , le jet coaxial est le siège d'une recirculation d'autant plus intense que le rapport des vitesses est grand.

2-Nous avons vérifié que le rapport de vitesse, r_v , n'est pas un paramètre représentatif de l'écoulement de jet coaxiaux hétérogène, les calculs effectués avec différents couples de gaz permettent d'explorer l'influence du rapport de densités S de 1 à 0.140. L'étude montre que les résultats sont très différents d'une valeur de S à l'autre si on adopte une représentation en fonction de r_v , mais qu'un bon regroupement est opéré si on utilise $M \quad r_v^2 S$, le rapport des flux de quantité de mouvement initiaux, qui prend en compte

simultanément les effets de vitesses et de densité.

3-les résultats montrent que la recirculation apparaît pour une valeur critique M_c estimée approximativement, 30 à 40 pour l'ensemble des gaz utilisés.

4-la largeur du jet est plus petite pour S plus grand, puisqu'un gaz plus léger que l'ambiant dans lequel il s'épanouit, se mélange plus rapidement, et donc possède un entraînement plus important, qu'un gaz lourd.

5-une augmentation du paramètre M produit une augmentation de l'activité turbulente et du mélange.

Plusieurs études futures peuvent se dégager de ce mémoire on peut citer: simuler numériquement l'écoulement en utilisant d'autres méthodes que la moyenne de Favre, comme par exemple la proposition de P.Chassaing.

étudier l'écoulement avec forte différence de densité en inversant la position de la buse, c'est à dire que l'écoulement peut avoir soit la direction de la pesanteur, soit la direction contraire, pour capter les zones où l'écoulement présente des caractéristiques convectives et les zones où les effets de flottabilité sont prépondérants.

Nous envisageons également d'étudier l'effet d'une rotation du jet extérieur et ses conséquences sur l'écoulement dans le champ proche.

- aca **CAMANO, E.B. ET FAVRE MARINET, M.**, 1994, On the initial region of inhomogeneous coaxial jets. Advances in turbulence 5, Kluwer Academic Publ., R. Benzi Ed., pp 58 - 62.
- ABR **ABRAMOVICH G.N., YAKOVLEVSKY O.V., SMIRNOVA I.P., SECUNDOV A.N.**, 1969, An investigation of the turbulent jets of different gases in general stream. Astronaut. Acta 14.
- ansel **ANSELMET F., SCHIESTEL R., BAHRAOUI E.M., ZAHIBO I. ET FULACHIER L.**, 1988, Experimental investigation and turbulent flux modelling of a strongly heated turbulent jet. Coll. Euromech 237, Marseille.
- aami **AMIELH M**, 1989, Etude expérimentale d'un dilueur de jet chaud. Thèse de Doctorat, IMST, Marseille.
- aant **ANTONIA R.A. ET BILGER R.W.**, 1973, An experimental investigation of an axisymmetric jet in coflowing air stream. J. Fluid Mech., vol. 61, pp. 805 - 822.
- abor **BORGHI R. ET GONZALES M.**, 1986, Applications of Lagrangian models to turbulent combustion. Comb. and Flame, vol. 63, pp. 239 - 250.
- abr1 **BORGHI R. ET DUTOYA D.**, 1978, On the scales of the fluctuations in turbulent combustion. 17th Intl. Symp. on Combustion. The Combustion institute.
- brow **BROWNE L.W, ANTONIA R.A. ET CHAMBERS A.J.**, 1984, The interaction region of a turbulent plane jet. J. Fluid Mech., vol. 149, pp. 335 - 373.
- brad **BRADSHAW P., FERRISS D.H. ET JOHNSON R.F.**, 1964, Turbulence in the noise-production region of a circular jet. J. Fluid Mech., vol. 19, pp. 591 - 625.
- acor **CORRSIN S. ET UBEROI M.S.**, 1949, Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet. National Advisory Committee for Aeronautics, NACA Technical Note n°1865, Washington.
- cohe **COHEN J. ET WYGNANSKI I**, 1987, The evolution of instabilities in the axisymmetric jet : The linear growth of disturbances near the nozzle. J. Fluid Mech., vol. 176, pp. 191 - 219.
- chu **CHUA L.P. ET ANTONIA R.A.**, 1992, Spatial organization of large structures in the near-field of a circular jet. Fluid Dynamics Research, vol. 9, pp. 59 - 71.
- arus **RUSS S. ET STRYKOWSKI P.J**, 1993, Turbulent structure and entrainment in heated jets: the effects of initial conditions, Phys. Fluids A, pp. 3216 - 3225.
- arico **RICOU F.P. ET SPALDING.**, 1961, Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets. J. Fluid Mech., vol. 11, pp 21 - 32.

- aans **ANSELMET F., ANTONIA R.A, BENABID T. ET FULACHIER L.**, 1990, Effects of wall suction on the transport of a scalar by coherent structures in a turbulent boundary layer. Structure of turbulence and drag reduction, Ed. A. Gyr, Springer-verlag, pp. 349 - 336.
- aful **FULACHIERL., ANSELMET F. ET AMIELH M.**, 1990, Quelques résultats sur les écoulements subsoniques à masse volumique variable, 27^{ème} coll. d'Aérodyn. App. Marseille.
- fula **FULACHIERL., BORGHI R., ANSELMET F. ET PARANTHOEN P.**, 1989, Influence of density variations on the structure of low-speed turbulent flows : a report on EUROMECH 237. J. Fluid Mech., vol. 203, pp. 577 - 593.
- assur **SARH M**, 1990, Contribution à l'étude des jets turbulents à masse volumique variable et des flammes de diffusion turbulentes, Thèse de Doctorat Es-Science, Univ. Paris .
- sree **SREENIVASAN K.R., RAGHU S. ET KYLE D.**, 1989, Absolute instability in variable density round jets. Exp. Fluids, vol. 7, pp. 309 - 318.
- amac **MAC INNES J.M**, 1985, Turbulence modelling of flows with non-uniform density. Ph.D. Thesis, Faculty of Technology, Univ. of Manchester.
- matsu **MATSUMOTO R., KIMOTO K. ET TSUCHIMOTO N.**, 1973, A study on double concentric jets- First report, Experimental results on air -air flow. Bulletin of JSME.
- apitt **PITTS W.M**, 1991, Effects of global density ratio on the centreline mixing behavior of axisymmetric turbulent jets, Exp. Fluids, vol. 11, pp 135 - 141.
- pit **PITTS W.M**, 1991, Reynolds number effects on the mixing behavior of axisymmetric turbulent jets. Exp. Fluids, vol. 11, pp. 135 - 141.
- apan **PANCHAPAKESAN ET LUMLEY**, 1993, Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium - Part 2. helium jet. J. Fluid Mech., vol. 246, pp. 225 - 247.
- ato **TOMBACH I.H**, 1969, Velocity measurements with a new probe in inhomogeneous turbulent jets, Ph.D. Thesis. California Institute of technology.
- tang **TANG S.K. ET KO N.W.M.**, 1994, Coherent structures in an unexcited coaxial jet. Experiments in Fluids, vol. 17, pp 147 - 157.
- abah **BAHRAOUI E.M**, 1987, Contribution à l'étude d'un jet turbulent axisymétrique en présence de forts gradients de température. Thèse de Doctorat ès-Sciences, IMST, Marseille.
- ach **CHAMPAGNE, F.H ET WYGNANSKI, I.J.**, 1971, An experimental investigation of coaxial jets, International Jr. Of heat and Mass transfer, Vol. 14, pp 1445 - 1461.
- ad **DAHM, W.J.A., FRIELER, C.E. ET TRYGGVASON, G.**, 1994, Vortex structures in the near field of coaxial jet. Jr. of fluid Mechanics, vol. 241, pp 371 - 402.
- adj **DJERIDANE, T.**, Contribution à l'étude expérimentale des jet turbulents axisymétrique à densité variable. Thèse de l'institut de mécanique statistique de la turbulence, Marseille, 1994.
- ag **GLADNICK, P., ENOTIADIS, J., LARUE, ET SAMUELSEN, G.**, 1990, Near field characteristics of turbulent coflowing jet. AIAA Jr., Vol. 28, No. 8, pp 1405 - 1414.
- ak **KO, N.W.M ET KWAN, A.S.H.**, 1976, Coherent structures in subsonic coaxial jets, Jr. Of Sound and Vibration, Vol. 48 2 , pp 203 - 219.
- ako **KO, N.W.M ET KWAN, A.S.H.**, 1976, The initial region of subsonic coaxial jets, Jr. of fluids Mechanics, Vol. 73, part 2, pp 305 - 332.
- kumo **KUMORI S. ET UEDA H.**, 1985, The large-scale coherent structure in the intermittent region of the self-preserving round free jet. J. Fluid Mech., col. 152, pp. 337 - 359.
- am **MORTON, B.R.**, 1962, Coaxial turbulent jets, International Jr. of Heat and Mass Transfer, Vol. 5, pp 955 - 965.

- amok **MONKEWITZ P.A. ET SOHN K.**, 1989, Absolute instability in hot jets. AIAA., vol. 26, pp. 911 916.
- monz **MONKEWITZ P.A., BECHERT D.W., BARSIKOW B. ET LEHMANN B.**, 1990, Self-excited oscillations and mixing in heated round jet. J. Fluid Mech., vol. 213, pp. 611 639.
- sp **SUHAS V. PATANKAR.**, Numerical heat transfert and fluid flow, Mc Graw-hill-1981.
- ap **PITTS, W.M.**, 1991, Reynolds number effects on the behavior of axisymmetric turbulent jets. Experiments in fluids, Vol. 11, pp 135 141.
- ar **RIVA, R.**, Ecoulement de fluides inhomogènes: stabilité de jets, transferts turbulents dans les couches limites. Thèse de l'Institut National Polytechnique, Grenoble, France, 1991.
- aru **RUFFIN, E., SCHIESTEL, R., ANSELMET, F., AMIELH, M. ET FULACHIER, L.**, 1994, Investigation of characteristics scales in a variable density turbulent jet using a second-order model. Phys. Fluids, Vol. 6, No. 8, August.
- aru1 **RUFFIN, E., SCHIESTEL, R., ANSELMET, F. ET FULACHIER, L.**, 1993, Second-order modelling of variable density turbulent jets: evaluation in the near-field region. Congrès IAHR, Paris.
- at **TANG, S.K. ET KO, N.W.M.**, 1994, Coherent structures in an unexcited coaxial jet. Experiments in Fluids, Vol. 17, pp 147 157.
- av **VILLERMAUX E., REHAB H., ET HOPFINGER E.J.**, 1994, Breakup Régimes and self-sustained pulsations in coaxial jets, Meccanica, Vol. 29, pp 393 401.
- aw **WILLIAMS, T.J., ALI, M.R.M.H. ET ANDERSON, J.S.**, 1969, Noise and flow characteristics of coaxial jets, Jr. Mechanical engng. Science, Vol.11, No. 2, pp 133 142.
- aed **EDITH BEATRIZ CAMANO SCHETTINI**, Etude expérimentale des jets coaxiaux avec différences de densité, Thèse de l'Institut national polytechnique de grenoble, France, 1996.
- aj **JANICKA J., LUMLEY J.L.**, Second-order modeling in non-constant density flow FDA 81 01(Janvier 1981) Sibley School of Mech. and Aero., Cornell University.
- ah **HA MINH H.**, Résolution des équations d'écoulement de fluide de type elliptique en variables premières. Rapport M3 25 I.M.F.T (Février 1979).
- ah1 **HA MINH H.**, 1981, A new approach to the analysis of turbulent mixing in variable density flow. 3rd Symp. on Turbulent Shear Flows. The Univ. of California.
- hinz **HINZE J.O.**, 1975, Turbulence. Second edition, Mc Graw-hill serie in Mech. Engineering.
- af1 **FAVRE A.**, Equations statistiques des gaz turbulents (CR.Ac.Sci.,T.246, 1958, pp.2576, 2723, 2839, 3216).
- af2 **FAVRE A.**, Equations des gaz turbulents compressibles. I. Formes générales (J. de Mécanique.Vol. 4, n°3, 1965, pp.361 390).II. Méthode des vitesses moyennes; méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique (J. de mécanique,ol. 4, 1965, pp.390 421).
- af3 **FAVRE A.**, Equations statistiques aux fluctuations turbulentes d'entropie, de concentration, de rotationnel, dans les écoulements compressibles (CR. . AcSci. T.273, 1971, pp. 1289 1924).
- af4 **FAVRE A.**, Equations statistiques des fluides turbulents compresibles.5^e Cong. Can. de Méc. Appliquée. Université New Brunswick, 1975, pp G34.
- ac1 **CHASSAING P.**, Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre.Thèse Docteur-ès-Sciences, I.N.P. Toulouse, n°42, 1979 .
- ac2 **CHASSAING P.**, 1985 Une alernative à la formulation des équations du mouvement

- turbulent d'un fluide à masse volumique variable. *J. Méc. Théo. Appl.* 4, 375-389.
- acha **CHASSAING P. ET CHIBAT M.**, 1988, Second order modelling of variable density mixing layer and jets. *Coll. Euromech 237*, Marseille.
- ach1 **CHASSAING P.**, 1992, Incidences du traitement statistique des équations ouvertes sur la modélisation au second ordre des écoulements à masse volumique variable. *Journées d'études sur les écoulements à masse volumique variable*, Orléans 14-15 Mai.
- van **VANDROMME D.**, 1980, Turbulence modelling in variable density flow. Ph.D. Thesis, Fre Univ. of Brussels.
- kent1 **KENT J.H. ET BILGER R.W.**, 1976, The prediction of turbulent diffusion flame fields and nitric oxide formation. 16th Intl. Symp. on Combustion institute.
- rod1 **RODI W.**, 1980, paper in *Prediction methods for Turbulent Flows*. Kollmann, W.(ed.), pp 259-349, Hemisphere Publishing Corp., New York, London.
- rod2 **RODI W., ET HOSSAIN M.S.**, 1982, paper in *Turbulent Buoyant Jets and plumes*, Rodi, W.(ed.), Pergamon Press, Oxford, New York.
- starn **STARNER S.H., ET BILINGER R.W.**, 1980, *Comb. Sci. Tech.* 21, 259.
- libr **LIBROVICH V.B., ET LISITSYN.**, 1977, *AIAAJ* 15, 227.
- jone **JONES W.P., ET MC GUIRK J.**, 1980, Mathematical modeling of Gas Turbine Combustion Chambers, AGARD CP 275.
- turn **TURNER J.S.**, 1957, *Proc. Roy. Soc. A* 239, 61.
- dona **DONALDSON C.D., SULLIVAN R. ET ROSENBAUM H.**, 1972, A theoretical study of the generation of atmospheric-clear air turbulence, *AIAA J.*, vol. 10, pp. 162-170.
- j1on **JONES W.P.**, 1979, Models for turbulent flows with variable density and combustion. VKI Lecture Serie.
- j1an **JANICKA J. ET KOLLMANN W.**, 1979, A prediction model for turbulent diffusion flows including NO formation. AGARD Conf. Proc. CP-275.

SOMMAIRE

Notations et terminologies

Chapitre 1: Introduction	3
-1-1 Objectifs du travail	10
-1-2 Organisation du mémoire	11
Chapitre 2: La physique de la turbulence des jets coaxiaux	12
-2-1 Couche de mélange	14
-2-2 Quelques caractéristiques générales de l'écoulement	16
2-2-1 Le caractère aléatoire	16
2-2-2 Le caractère non linéaire	17
2-2-3 Le caractère diffusif	19
-2-3 Les équations des écoulements turbulents	20
2-3-1 Fluide à masse volumique constante	21
2-3-2 Fluide à masse volumique variable	24
-2-4 La nouvelle proposition de P. Chassaing	32
2-4-1 Discussion	33
2-4-2 Les différents types de flux	34
2-4-3 Expression des corrélations vitesse-masse volumique	35
Chapitre 3: Formulation mathématique	38
-3-1 Equation de continuité	38
-3-2 Equations de Navier-stokes	38
3-2-1 Suivant la direction ox	39
3-2-2 Suivant la direction or	39
3-2-3 Suivant la direction u_θ	39
-3-3 Les équations moyennes (équations de Reynolds)	42
3-3-1 Equation de continuité	42
3-3-2 Equations de quantité de mouvement	43
-3-4 Modèle à deux équations de transport (modèle $k-\varepsilon$)	43
-3-5 Les équations à densité variable (équations de Favre)	44
3-5-1 Equations de continuité	44
3-5-2 Equations de quantité de mouvement	44
-3-6 Modèle $k-\varepsilon$ à densité variable	45
-3-7 Equation de transport de la concentration	45
-3-8 La masse volumique ρ	46
Chapitre 4: Modèle numérique	47
-4-1 Introduction	47
-4-2 Forme générale de l'équation de transport	48
-4-3 Maillage	49
-4-4 Discrétisation de l'équation de transport	50
4-4-1 Coefficient de l'équation de discrétisation finale	52
-4-5 Expression de la source pour les différentes équations	58
4-5-1 Expression de la source de la composante u	58
4-5-2 Expression de la source de la composante v	60
4-5-3 Expression de la source de l'énergie turbulente k	60
4-5-4 Expression de la source du taux de dissipation ε	61
-4-6 Conditions aux limites	61
4-6-1 Condition à l'entrée	61

4-6-2 Condition à la sortie	62
4-6-3 Condition à l'axe de symétrie	62
4-6-4 Condition à la frontière libre	63
- 4-7 Equation algébrique de pression	63
4-7-1 Algorithme de simple	63
-4-8 Méthode de résolution (Algorithme TDMA)	66
-4-9 Structure du code de calcul	69
-4-10 Critère de convergence	70
-4-11 La sous relaxation	70
Chapitre 5: Discussion des résultats	71
-5-1 Cas homogène	72
5-1-1 Profils radiaux de vitesse air-air M=9	72
5-1-2 Profils axiaux dans la zone proche de la buse	74
5-1-3 Profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente k	77
5-1-4 Epaissement du jet coaxial	78
5-1-5 Contrainte de Reynolds	80
5-1-6 Bilan d'énergie	80
-5-2 Cas hétérogène	82
5-2-1 Dynamique des jets coaxiaux hétérogènes	82
5-2-2 Profils axiaux dans la zone proche de la buse	86
-5-3 Les champs de densité des jets coaxiaux	88
5-3-1 Profils radiaux des jets coaxiaux hélium air M=9	89
-5-4 Influence de l'ambiante pour M=9 et S=0.140	91
Chapitre 6: Conclusions et perspectives	94
 La Bibliographie	 96

Nomenclature

C	Fraction massique ou concentration
D_i	Diamètre intérieur de la buse coaxiale
D_e	Diamètre extérieur de la buse coaxiale
M_j	Rapport de quantités de mouvements initiales
r_v	Rapport de vitesse initiale
S	Rapport de masse volumique initiale
M	La masse molaire
U_i	Vitesse du jet central ou intérieur
U_e	Vitesse du jet annulaire ou extérieur
S_c	Nombre de Schmidt
R_e	Nombre de Reynolds
S_Φ	Terme de source relatif à la variable Φ
k	Energie cinétique turbulente
A_p	
A_E	
A_W	Coefficients du système d'équations algébriques
A_N	
A_S	
R_f	Nombre de Richardson
$u_i u_j$	Contrainte de Reynolds en notation indicielle
u^2	Contrainte de Reynolds suivant ox
v^2	Contrainte de Reynolds suivant or
uv	Contrainte de Reynolds tangentielle
X, r, θ	Coordonnées cylindriques

Symboles grecs

ρ	Masse volumique ou densité de fluide
μ	Viscosité dynamique
μ_t	Viscosité turbulente
ν	Viscosité cinématique
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinématique turbulente
δ_{ij}	Symbole de KRONECKER
Γ_Φ	Coefficient de diffusion de la variable Φ
$\sigma_k \sigma_\varepsilon$	Constantes empiriques de la modélisation

Indices et exposants

() _i	Relative à la buse intérieure
() _e	Relative la buse extérieure
() _a	Relative à l'ambient
()	La moyenne de Favre
()	La moyenne de Reynolds
E	Indice du plan EST
W	Indice du plan OUEST
N	Indice du plan Nord
S	Indice du plan Sud
t	Turbulent