

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE EL HADJ LAKHDAR

BATNA

FACULTE DES SCIENCES



MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de :
Magister en Physique

Option

Physique des Rayonnements

Par

REKIK Rima

THEME

**Etude théorique de l'interaction d'un système a deux
niveaux avec un champ magnétique par l'approche des
intégrales de parcours**

Soutenue Devant Le Jury

Bouldjedri Abdelhamid	Prof	Université de Batna
Aouachria Mekki	MCA	Université de Batna
Chetouani Lyazid	Prof	Université de Constantine
Sid Abdelaziz	MCA	Université de Batna

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur

Année Universitaire: 2010/2011

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Atome à deux niveaux en interaction avec un champ magnétique variable dans le temps	7
2.1	Introduction	7
2.2	Formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaire	8
2.3	Calcul du propagateur pour le champ de Rabi	12
2.4	Premier cas :	12
2.5	La probabilité de transition	16
2.6	Deuxième cas	19
2.7	La Probabilité de transition	27
3	Action d'un champ magnétique statique sur une particule neutre du spin 1/2	30
3.1	Introduction	30
3.2	Formalisme intégrale du chemins en représentation des états cohérents angulaires . . .	31
3.3	Calcul du propagateur	34
3.4	Les fonctions d'onde	41
4	Conclusion générale	43

A	Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire	45
A.1	Introduction	45
A.2	Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique	46
A.3	Propagateur dans la base des états cohérents bosonique	53
A.4	Les états cohérents du moment angulaire	54
A.5	Propagateur dans la base des états cohérents angulaires	57

Chapitre 1

Introduction générale

La genèse du concept du spin fut l'une des plus difficiles de l'histoire de la physique quantique au début du XX^e siècle. L'effet Zeeman anomal, la structure hyperfine des raies spectrales ou encore l'expérience de Stern et Gerlach posaient, à cette époque, des grandes difficultés d'interprétation. L'invention du spin, par Samuel Goudsmit et George Uhlenbeck, a été révolutionnaire. Immédiatement après la publication de ce concept, le problème du facteur, 2, dans la structure fine du spectre de l'hydrogène identifié par Heisenberg, fut résolu par les deux physiciens. Leur interprétation incorporait la nouvelle notion du spin.

Le spin a d'abord été interprété comme un degré de liberté supplémentaire, s'ajoutant aux trois degrés de liberté de translation de l'électron : son moment cinétique intrinsèque (ou propre). En d'autres termes, l'électron ponctuel était vu comme tournant sur lui-même d'où le nom du spin. Cependant, il est vite apparu que cette rotation est purement quantique et n'a pas d'équivalent en mécanique classique. La représentation du spin en terme de rotation est donc abandonnée. Wolfgang Pauli avait déjà montré que, compte tenu des dimensions connues de l'électron, une rotation de l'électron nécessiterait une vitesse tangentielle de rotation à son équateur qui serait supérieure à la vitesse de la lumière, vitesse en principe infranchissable selon la théorie de la relativité restreinte.

La notion théorique du spin a été introduite par Pauli pour l'électron, afin d'expliquer un résultat

expérimental qui restait incompréhensible dans le cadre naissant de la mécanique quantique non-relativiste : l'effet Zeeman anomal. L'approche développée par Pauli consistait à introduire de façon *ad hoc* le spin en ajoutant un postulat supplémentaire aux autres postulats de la mécanique quantique non-relativiste (équation de Schrödinger).

En 1927, Wolfgang Pauli a proposé la modélisation du spin en termes des matrices, ce qui correspond à une écriture en termes d'opérateurs sur la fonction d'onde intervenants dans les équations de Schrödinger et de Pauli.

L'hamiltonien de Pauli pour une particule du spin $1/2$ soumise à l'action d'un champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$H_{int} = -\mu_0 \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}$$

où μ_0 est le rapport gyromagnétique. Ce problème concerne la dynamique du spin dans un champ magnétique externe.

Pour résoudre ces problèmes on écrit souvent l'équation du mouvement de Heisenberg pour le spin dans le champ magnétique externe qui, à son tour, conduit à des équations différentielles qui ne peuvent être résolues que dans un petit nombre des formes spéciales du champ magnétique.

Dans cette thèse, nous présentons une autre formulation de la mécanique quantique pour résoudre ces problèmes sans recours aux équations différentielles. Cette formulation, introduite par R. P. Feynman [1] pour quantifier des mouvements des systèmes au moyen d'intégrales fonctionnelles, est utilisée au même titre que l'équation de Schrödinger et de Heisenberg qui interviennent pratiquement dans tous les domaines de la physique et plus particulièrement en théorie quantique des champs. La conception essentielle dans cette approche est le propagateur qui contient toutes les informations sur le système physique. Ce propagateur est une somme de contributions de tous les chemins. Le principe de la superposition se manifeste déjà dans cette formulation et on peut dire, sans exagérer, qu'elle est concurrente à d'autres méthodes de quantification. Se basant essentiellement sur les notions simples

et connues de la mécanique classique comme les chemins ou trajectoires, l'action, le lagrangien, ... elle permet de décrire de manière élégante l'évolution des systèmes.

Depuis l'introduction des transformations spatio-temporelles dans le formalisme des intégrales des chemins ([2], [3]), et surtout les corrections purment quantiques, une classe de potentiels a été soulevée, cependant malgré le succès apparent de cette formulation théorique, du point de vue pratique il subsiste certaines difficultés comme l'obtention de solutions de certains problèmes solubles par l'équation de Schrödinger.

Il restait le problème du spin dont la difficulté principale réside dans le fait que cette grandeur physique n'a pas d'analogue classique. Sa nature exclusivement discrète rend sa description difficile au moyen du chemin qui par essence sont continue.

Des modèles à cet effet, ont été élaborés, comme le modèle bosonique ou fermionique de Schwinger [4], et surtout l'introduction des variables anticommutantes dites de Grassmann et les variables angulaires [5] ont permis de contourner cette difficulté. Du point de vue pédagogique, des solutions pour des interactions combinant le spin et d'autres variables par l'équation de Schrödinger peuvent être trouvées dans des livres de mécanique quantique usuels. Par le formalisme des intégrales des chemins, il n'y a que quelques interactions de ce type qui ont été traitées [6] en utilisant du modèle de Schwinger. Mais il est rare de trouver un calcul explicite en utilisant représentation géométrique du spin ([7], [8], [9], [10]). Pour ce faire, l'espace des états cohérents angulaires Appendice (A) peut être adéquat à cette étude (chapitre 2). Comme on va le voir à travers cette thèse, l'utilisation des états cohérents est parfois nécessaire pour le calcul du propagateur si l'on doit formuler suivant l'idée de Feynman à savoir une somme sur les chemins possibles, ces chemins étant affectés d'un poids c'est à dire $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, avec $S = \int L dt$ c'est l'action du système.

Le but de ce travail, à travers cette thèse, est d'utiliser le formalisme des intégrales des chemins dans la représentation des états cohérents angulaires pour extraire les probabilités de transition d'un atome très lourd du spin $\frac{1}{2}$ (système à deux états) en interaction avec une classe des champs

magnétiques dépendants du temps, dite classe de Rabi (chapitre2). Signalons que les calculs de ce premier chapitre ont été réalisés récemment par T.Boudjedaa et al [6] et ceux de l'article de M.J.Tahmasebi and Y.Sobouti [11] en utilisant la méthode de la classification. L'interaction d'un champ magnétique statique avec une particule neutre du spin $1/2$ fait l'objet du chapitre (3). La procédure du traitement, dans ce cas nécessite l'utilisation de deux espaces l'un de configuration, l'autre des états cohérents angulaires, pour décrire le mouvement respectivement extérieur et intérieur de l'atome. Signalons aussi que les calculs de ce dernier chapitre sont aussi basés sur l'article [12] en considérant l'équation de Schrödinger, et sur l'article [13] en considérant les intégrales des chemins dans la représentation des états cohérents fermioniques.

Chapitre 2

Atome à deux niveaux en interaction avec un champ magnétique variable dans le temps

2.1 Introduction

Considérons une particule du spin $1/2$ en interaction avec un champ magnétique dépendant du temps $\mathbf{B}(t)$, et nous proposons dans ce chapitre de calculer la probabilité de transition dans le formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaire. Physiquement cela correspond à un atome assez lourd (l'énergie cinétique étant absente sa masse $m \gg$) du spin $1/2$ soumis à l'action d'un champ variable $\mathbf{B}(t)$. L'équation de Schrödinger décrivant l'évolution du système est :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H_{int}(t) \psi(t) \quad (2.1)$$

avec

$$H_{int}(t) = -\frac{1}{2}g\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(t) = -\frac{1}{2}g(\sigma_x B_x(t) + \sigma_y B_y(t) + \sigma_z B_z(t)) \quad (2.2)$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme :

$$H = -u(t)\boldsymbol{\sigma}_+ - u^*(t)\boldsymbol{\sigma}_- - \Omega(t)\boldsymbol{\sigma}_z \quad (2.3)$$

avec

$$u(t) = \frac{g}{2}(B_x(t) - iB_y(t)) \quad , \quad \Omega(t) = \frac{g}{2}B_z(t), \quad (2.4)$$

les matrices de pauli sont défini par :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

g le rapport gyromagnétique et $B_i(t)$, ($i = x, y, z$) les composantes du champ magnétique. L'équation (2.1) admet une solution analytique [11] qui s'obtient naturellement dans le formalisme intégrale du chemin dans la représentation des états cohérents angulaire. Le but de ce chapitre est de résoudre l'équation (2.1) dans le formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaire, et de déterminer la probabilité de transition dans chaque cas.

Passons d'abord à la construction du formalisme intégrale du chemin.

2.2 Formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents angulaire

Parmi plusieurs façons ([14], [15]) pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales des chemins. Nous utilisons la plus simple ([16], [17]) qui consiste à :

- remplacer σ par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté suivant (θ, φ) :
- associer un état coherent $|\theta, \varphi\rangle$,

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle \quad (2.6)$$

résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $|\uparrow\rangle$ et dont le produit scalaire et le projecteur sont respectivement (Apendice A) :

$$\langle\theta, \varphi|\theta', \varphi'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\theta, \varphi\rangle \langle\theta, \varphi| = \mathbf{I}. \quad (2.8)$$

- Pour décrire le mouvement de la particule nous considérons l'état quantique $|\theta, \varphi\rangle$ où (θ, φ) sont les variables angulaire générant la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état $|\theta_i, \varphi_i\rangle$ à $t = 0$ à l'état final $|\theta_f, \varphi_f\rangle$ à $t = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution du temps :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \langle\theta_f, \varphi_f | U(T) | \theta_i, \varphi_i\rangle \quad (2.9)$$

où

$$U(T) = \mathbf{T}_D \exp\left(-i \int_0^T H_{int}(t) dt\right) \quad (2.10)$$

et $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation des intégrales des chemins subdivisons l'intervalle du temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . Utilisons d'abord la formule de

Trotter.

$$U(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-i\epsilon H_{int}(t)}]^{N+1} \quad \text{avec} \quad T = (N+1)\epsilon \quad (2.11)$$

$$U(T) = U(t_{N+1} - t_N)U(t_N - t_{N-1})\dots U(t_{n+1} - t_n)\dots U(t_1 - t_0) \quad (2.12)$$

où $t_{N+1} = t_f = T$, et $t_0 = t_i = 0$, $t_n = t_0 + n\epsilon$, $n = 0, \dots, N+1$.

Introduisons les relations des fermetures (2.8) entre chaque paire de $U(\epsilon)$. Alors l'expression (2.9) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) &= \langle \theta_{N+1}, \varphi_{N+1} | U(t_{N+1} - t_N) \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_N d\cos(\theta_N) | \theta_N, \varphi_N \rangle \langle \theta_N, \varphi_N | U(t_N - t_{N-1}) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_{N-1} d\cos(\theta_{N-1}) | \theta_{N-1}, \varphi_{N-1} \rangle \langle \theta_{N-1}, \varphi_{N-1} | \dots \\ &\quad \dots \times \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_n d\cos(\theta_n) | \theta_n, \varphi_n \rangle \langle \theta_n, \varphi_n | U(t_{n+1} - t_n) \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_{n-1} d\cos(\theta_{n-1}) | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \langle \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} | \dots \\ &\quad \dots \times \frac{1}{2\pi} \int d\varphi_1 d\cos(\theta_1) | \theta_1, \varphi_1 \rangle \langle \theta_1, \varphi_1 | U(t_1 - t_0) | \theta_i, \varphi_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec

$$\langle \theta_n, \varphi_n | U(t_{n+1} - t_n) | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle = \langle \theta_n, \varphi_n | e^{-i\epsilon H_{int}(t)} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle, \quad (2.14)$$

et

$$(\theta_{N+1}, \varphi_{N+1}) = (\theta_f, \varphi_f), \quad (\theta_0, \varphi_0) = (\theta_i, \varphi_i), \quad (2.15)$$

qui s'écrit sous forme compacte

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int \dots \int \prod_{n=1}^N d\varphi_n d\cos(\theta_n) \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle \theta_n, \varphi_n | e^{-i\epsilon H_{int}} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \quad (2.16)$$

Evaluent l'élément de la matrice figurant dans (2.16) on premier order en ε :

$$\begin{aligned}
\langle \theta_n, \varphi_n |^{-i\varepsilon H_{int}} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle &= \langle \theta_n, \varphi_n | 1 - i\varepsilon H_{int} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle + O(\varepsilon^2) \\
&= \langle \theta_n, \varphi_n | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle \left[1 - i\varepsilon \frac{\langle \theta_n, \varphi_n | H_{int} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle}{\langle \theta_n, \varphi_n | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle} \right] + O(\varepsilon^2) \\
&\simeq \langle \theta_n, \varphi_n | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle e^{-i\varepsilon \mathcal{H}_{int}(\theta_{n-1}, \varphi_{n-1}, \theta_n, \varphi_n)}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

avec

$$\mathcal{H}_{int}(\theta_{n-1}, \varphi_{n-1}, \theta_n, \varphi_n) = \frac{\langle \theta_n, \varphi_n | H_{int} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle}{\langle \theta_n, \varphi_n | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle} \tag{2.18}$$

le propagateur s'écrit sous la forme discrete suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\
&\times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N+1} [\log \langle \theta_n, \varphi_n | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle - i\varepsilon \mathcal{H}_{int}(\theta_{n-1}, \varphi_{n-1}, \theta_n, \varphi_n)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle de Feynamn

$$K = \int \mathcal{D}path \exp(i Action(path)), \tag{2.20}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle \theta, \varphi | \sigma_z | \theta', \varphi' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')}, \tag{2.21}$$

$$\langle \theta, \varphi | \sigma_+ | \theta', \varphi' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')}, \tag{2.22}$$

$$\langle \theta, \varphi | \sigma_- | \theta', \varphi' \rangle = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')}. \tag{2.23}$$

Le propagateur prend la forme discrete suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\
& \prod_{n=1}^{n=N+1} \left\{ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right. \\
& + i\varepsilon\Omega(t) \left[\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right] \\
& \left. + i\varepsilon u(t) \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) + i\varepsilon u^*(t) \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \right\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressent. Procédons alors au calcul de $\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T)$.

2.3 Calcul du propagateur pour le champ de Rabi

Les formes du champ magnétique étudiées dans ce chapitre appartiennent à une classe du champ solubles exactement, dite classe de Rabi. On va calculer le propagateur dans chaque cas, suivant le formalisme intégrale du chemin dans la représentation des états cohérents du spin et en va déduire la probabilité de transition dans chaque cas.

2.4 Premier cas :

$$\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, B_0) \tag{2.25}$$

Dans ce cas

$$u(t) = \frac{g}{2} (B_x(t) - iB_y(t)) = \omega_1 e^{i\omega t}, \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{g}{2} B_1 \quad \text{et} \quad \Omega(t) = \frac{g}{2} B_0 = \frac{\omega_0}{2} \tag{2.26}$$

Le propagateur (2.24) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\
& \prod_{n=1}^{n=N+1} \left\{ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right. \\
& + i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \left[\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right] \\
& + i\varepsilon \omega_1 e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp \frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \\
& \left. + i\varepsilon \omega_1 e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \right\} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Notons que (2.27) s'écrit sous la forme adéquate suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \\
& \times \prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \right) R(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Avec :

$$R(t_n) = e^{i\varepsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_z} + i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

On intègre sur tous les angles (φ_n, θ_n) utilisant

$$\int_0^\pi d\cos \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} = \int_0^\pi d\cos \theta \sin^2 \frac{\theta}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi e^{+im\varphi} = 2\pi \delta_{m,0}. \quad (2.30)$$

On obtient :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} \lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^N \prod_{n=1}^{N+1} R(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrices suivant [6]

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^N \left(e^{i\varepsilon\Omega(j)\sigma_z} + i\varepsilon K(j) \right) &= e^{i \sum_{j=1}^N \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} + \sum_{l=1}^N (i\varepsilon) e^{i \sum_{l+1}^N \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l) e^{i \sum_1^{l-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} \\
&+ \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^{l_1-1} (i\varepsilon)^2 e^{i \sum_{l_1+1}^N \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_1) e^{i \sum_{l_2+1}^{l_1-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_2) e^{i \sum_1^{l_2-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} + \dots \\
&+ \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \dots \sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1} \sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1} (i\varepsilon)^N e^{i \sum_{l_1+1}^N \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_1) e^{i \sum_{l_2+1}^{l_1-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_2) e^{i \sum_{l_3+1}^{l_2-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} \\
&K(l_3) \dots e^{i \sum_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_{N-1}) e^{i \sum_{l_N+1}^{l_{N-1}-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z} K(l_N) e^{i \sum_1^{l_N-1} \varepsilon\Omega(j)\sigma_z}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

où $K(j)$ c'est une matrice antidiagonal donnée par :

$$K(j) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 e^{i\omega t_j} \\ \omega_1 e^{-i\omega t_j} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

A la limite $N \longrightarrow +\infty$: le produit devient

$$\begin{aligned}
R(T) &= e^{i \int_0^T ds \Omega(s) \sigma_z} + i \int_0^T ds_1 e^{i \int_{s_1}^T ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_1) e^{i \int_0^{s_1} ds \Omega(s) \sigma_z} \\
&+ (i)^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 e^{i \int_{s_1}^T ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_1) e^{i \int_{s_2}^{s_1} ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_2) e^{i \int_0^{s_2} ds \Omega(s) \sigma_z} \\
&+ \dots (i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{N-1}} ds_N e^{i \int_{s_1}^T ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_1) e^{i \int_{s_2}^{s_1} ds \Omega(s) \sigma_z} \\
&K(s_2) e^{i \int_{s_3}^{s_2} ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_3) \dots K(s_{N-1}) e^{i \int_{s_N}^{s_{N-1}} ds \Omega(s) \sigma_z} K(s_N) e^{i \int_0^{s_N} ds \Omega(s) \sigma_z} + \dots \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Un calcul simple nous montre que les termes paires et impaires sont les éléments diagonaux et anti-diagonaux de $R(T)$ respectivement

$$\begin{aligned}
R_{11}(T) &= e^{i \int_0^T ds \Omega(s)} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} \times \\
&e^{i \int_{s_1}^T ds \Omega(s)} u(s_1) e^{-i \int_{s_2}^{s_1} ds \Omega(s)} u^*(s_2) \dots e^{-i \int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds \Omega(s)} u^*(s_{2n}) e^{i \int_0^{s_{2n}} ds \Omega(s)} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Insérons les expressions $u(t) = \omega_1 e^{i\omega t}$ et $\Omega(t) = \frac{\omega_0}{2}$ dans la formule (2.35) et nous avons obtenu :

$$R_{11}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(i\omega_1)^{2n} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{i\Delta s_3} \dots \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{-i\Delta s_{2n}} \right] e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \quad (2.36)$$

et on a :

$$R_{12}(T) = -i \int_0^T ds_1 e^{i \int_{s_1}^T ds \Omega(s)} u(s_1) R_{11}^*(s_1) \quad (2.37)$$

D'après cette expression on trouve :

$$R_{12}(T) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[(i\omega_1)^{2n+1} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{i\Delta s_3} \dots \int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1} e^{i\Delta s_{2n+1}} \right] e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \quad (2.38)$$

Ainsi

$$R_{22}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(i\omega_1)^{2n} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{i\Delta s_{2n}} \right] e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} = R_{11}^*(T) \quad (2.39)$$

et :

$$R_{21}(T) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[(i\omega_1)^{2n+1} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1} e^{-i\Delta s_{2n+1}} \right] e^{-i\frac{\omega_0}{2}T} = -R_{12}^*(T) \quad (2.40)$$

Avec $\Delta = \omega - \omega_0$

le propagateur prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f} & \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \\ \sin \frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f} & \cos \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}(T) & R_{12}(T) \\ R_{21}(T) & R_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varier que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$

respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(\theta_f + 2n\pi, \varphi_f + 4n\pi, \theta_i, \varphi_i; T) \\ &= \mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) \end{aligned} \quad (2.42)$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

2.5 La probabilité de transition

Calculons la probabilité de transition entre les deux états propre de σ_z

$$P_{\uparrow\downarrow} = |\langle \uparrow | U(T) | \downarrow \rangle|^2 \quad (2.43)$$

En introduit les relations des fermetures

$$\int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} |\theta_f, \varphi_f\rangle \langle \theta_f, \varphi_f| = 1, \quad \int \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} |\theta_i, \varphi_i\rangle \langle \theta_i, \varphi_i| = 1 \quad (2.44)$$

on trouve

$$P_{\uparrow\downarrow} = \left| \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle \right|^2 \quad (2.45)$$

avec

$$\langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \text{et} \quad \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \quad (2.46)$$

On integre sur les variables angulaires, la probabilité de transition prend la forme suivante :

$$P_{\uparrow\downarrow} = |R_{12}(T)|^2 \quad (2.47)$$

Evaluons maintenant $R_{12}(T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T . Soit

$$R_{12}(p) = \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} R_{12}(T) \quad (2.48)$$

où $R_{12}(T)$ s'écrit sous la forme :

$$R_{12}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega_1)^{2n+1} F(0, T) e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \quad (2.49)$$

Avec

$$\begin{aligned} F(0, T) &= \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(0, s_1) \\ F_1(0, s_1) &= \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} F_2(0, s_2) \end{aligned} \quad (2.50)$$

et on obtient par itération :

$$F_{2n}(0, s_{2n}) = \int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1} e^{i\Delta s_{2n+1}} \quad (2.51)$$

La transformée de Laplace de $F(0, T)$ est :

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pT} F(0, T) dT = \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(0, s_1) \quad (2.52)$$

qui peut être réécrite comme

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{+\infty} dT e^{-(p-i\Delta)T} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta(T-s_1)} F_1(0, s_1) \quad (2.53)$$

En utilisant le théorème de convolution, on obtient

$$\tilde{F}(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_1(0, p - i\Delta) \quad (2.54)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(0, p - i\Delta) &= \int_0^{+\infty} dT e^{-(p-i\Delta)T} F_1(0, T) \\ &= \int_0^{+\infty} dT e^{-(p-i\Delta)T} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} F_2(0, s_2) = \frac{1}{p - i\Delta} \tilde{F}_2(0, p)\end{aligned}\quad (2.55)$$

Effectuons le même calcul pour tous les autres termes , on obtient :

$$\tilde{F}(0, p) = \left[\frac{1}{p(p - i\Delta)} \right]^{n+1} \quad (2.56)$$

Insérons ce résultat dans $R_{12}(p)$ et effectuons la somme, on obtient

$$R_{12}(p) = \frac{i\omega_1}{p(p - i\Delta) + \omega_1^2} \quad (2.57)$$

Ce résultat est valable pour $|\frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{p(p-i\Delta)}| < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour ou cette condition est vérifiée.

Prenons l'inverse de la transformée de Laplace

$$K(\uparrow, \downarrow; T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp e^{pT} \frac{i\omega_1}{p(p - i\Delta) + \omega_1^2} \times e^{i\frac{\omega_0}{2}T} \quad (2.58)$$

En utilisant la continuation analytique, le resultat de l'inversion est

$$K(\uparrow, \downarrow; T) = \frac{i\omega_1}{\lambda} e^{i[(\omega_0 + \Delta)/2]T} \sin \lambda T, \quad (2.59)$$

avec $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2}$.

La probabilité de transition est alors donnée par

$$P_{1/2, -1/2} = |K(\uparrow, \downarrow; T)|^2 = \frac{4\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sin^2 \frac{T}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \quad (2.60)$$

Cette formule est exactement la formule bien connue de Rabi donnée dans la littérature [17].

Par un calcul identique, on trouve les autre éléments de la matrice $R(T)$ comme suit :

$$R_{11}(T) = e^{-i(\Delta/2)T} \left(\cos \lambda T - i \frac{\Delta}{2\lambda} \sin \lambda T \right) \quad (2.61)$$

$$R_{21}(T) = \frac{i\omega_1}{\lambda} e^{i[(\omega_0+\Delta)/2]T} \sin \lambda T \quad (2.62)$$

$$R_{22}(T) = e^{-i(\Delta/2)T} \left(\cos \lambda T + i \frac{\Delta}{2\lambda} \sin \lambda T \right) \quad (2.63)$$

Il est facile de montrer que

$$P_{1/2,1/2} + P_{1/2,-1/2} = 1 \quad (2.64)$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_{1/2,1/2} &= |K(\uparrow, \uparrow; T)|^2 = \left| e^{-i(\Delta/2)T} \left(\cos \lambda T - i \frac{\Delta}{2\lambda} \sin \lambda T \right) \right|^2 \\ &= \cos^2 \frac{T}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sin^2 \frac{T}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.6 Deuxième cas

$$B(t) = \left(B_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t, \left(\frac{\omega}{g} - B_0 \right) e^{-\lambda t} - \frac{\omega}{g}, B_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t \right) \quad (2.66)$$

Avec : $B_1 = 2\frac{\omega_1}{g}$ et $B_0 = \frac{\omega_0}{g}$, dans ce cas [11]

$$u(t) = \omega_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t - \frac{i}{2} [(\omega - \omega_0) e^{\lambda t} - \omega], \quad \Omega(t) = \omega_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t \quad (2.67)$$

Le propagateur sera donné comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\
& \prod_{n=1}^{n=N+1} \left\{ \cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right. \\
& + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \cos \omega t \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp \frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right] \\
& + i\varepsilon \left(\omega_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t - \frac{i}{2}[(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t} - \omega] \right) \cos \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp \frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \\
& \left. + i\varepsilon \left(\omega_1 e^{-\lambda t} \sin \omega t + \frac{i}{2}[(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t} - \omega] \right) \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \exp -\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \right\} \quad (2.68)
\end{aligned}$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \\
& \times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} R_1(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (2.69)
\end{aligned}$$

avec la matrice $R_1(t_n)$ est donné par :

$$R_1(t_n) = 1 + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \sin \omega t_n \sigma_x + i\varepsilon \frac{1}{2} [(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t_n} - \omega] \sigma_y + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \cos \omega t_n \sigma_z \quad (2.70)$$

Faisons d'abord une transformation unitaire sur les variables angulaires, afin d'éliminer le terme ωt du champ magnétique dans le propagateur (2.68).

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \\ \sin \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \\ \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} e^{+i\frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \quad (2.72)$$

Le propagateur en fonction des nouvelles variables angulaires θ' et φ' , s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta'_f, \varphi'_f; \theta'_i, \varphi'_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d \varphi'_n}{2\pi} \\ &\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{\frac{i}{2} \varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_n} \end{pmatrix} R_2(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

avec

$$\begin{aligned} R_2(t_n) &= e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} R_1(t_n) e^{-i \frac{\omega t_n - 1}{2} \sigma_y} \\ &= e^{+i \frac{\omega \varepsilon}{2} \sigma_y} + i \varepsilon \omega_1 e^{-\lambda t_n} \sin \omega t_n e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \sigma_x e^{-i \frac{\omega t_n - 1}{2} \sigma_y} \\ &\quad + \frac{1}{2} i \varepsilon [(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t} - \omega] e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \sigma_y e^{-i \frac{\omega t_n - 1}{2} \sigma_y} + i \varepsilon \omega_1 e^{-\lambda t_n} \cos \omega t_n e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \sigma_z e^{-i \frac{\omega t_n - 1}{2} \sigma_y}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Le deuxième terme se transforme comme suit

$$\begin{aligned} e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \sigma_x e^{-i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} &= \left(\cos \frac{\omega t_n}{2} + i \sigma_y \sin \frac{\omega t_n}{2} \right) \sigma_x \left(\cos \frac{\omega t_n}{2} - i \sigma_y \sin \frac{\omega t_n}{2} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \sin \omega t_n & \cos \omega t_n \\ \cos \omega t_n & -\sin \omega t_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

et la quatrième terme se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} e^{+i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} \sigma_z e^{-i \frac{\omega t_n}{2} \sigma_y} &= \left(\cos \frac{\omega t_n}{2} + i \sigma_y \sin \frac{\omega t_n}{2} \right) \sigma_z \left(\cos \frac{\omega t_n}{2} - i \sigma_y \sin \frac{\omega t_n}{2} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t_n & -\sin \omega t_n \\ -\sin \omega t_n & -\cos \omega t_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

En conséquence l'expression de $R_2(t_n)$ est simplifiée à la forme suivante :

$$R_2(t_n) = 1 + i\varepsilon e^{-\lambda t_n} \left[\omega_1 \sigma_z + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \sigma_y \right] \quad (2.77)$$

Insérant ce résultat dans l'équation (2.73), le propagateur $\mathbf{K}(\theta'_f, \varphi'_f; \theta'_i, \varphi'_i; T)$ devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta'_f, \varphi'_f; \theta'_i, \varphi'_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi} \\ &\times \prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2} \varphi'_n}, \quad \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_n} \right) R_2(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Utilisant la transformation temporelle suivante :

$$\tau = \varepsilon e^{-\lambda t_n}, \quad \tau = s_n - s_{n-1}, \quad s_n = \frac{1 - e^{-\lambda t_n}}{\lambda} \quad (2.79)$$

Le propagateur $\mathbf{K}(\theta'_f, \varphi'_f; \theta'_i, \varphi'_i; T)$ devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta'_f, \varphi'_f; \theta'_i, \varphi'_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi} \\ &\prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2} \varphi'_n}, \quad \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_n} \right) R_3(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2} \varphi'_{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Avec

$$R_3(t_n) = 1 + i\tau \left[\omega_1 \sigma_z + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \sigma_y \right] \quad (2.81)$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$R_3(t_n) = 1 + i\tau \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} [\sigma_y \sin \gamma + \sigma_z \cos \gamma] \quad (2.82)$$

avec

$$\cos \gamma = \frac{2\omega_1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{(\omega - \omega_0)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2}} \quad (2.83)$$

A ce stade il est préférable d'introduire une deuxième rotation d'un angle γ dans l'espace du spin afin de pouvoir intégrer sur les variables angulaires

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \\ \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta''_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi''_n} \\ \sin \frac{\theta''_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi''_n} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

$$\left(\cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \right) = \left(\cos \frac{\theta''_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi''_n}, \sin \frac{\theta''_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi''_n} \right) e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \quad (2.85)$$

En insérant cette transformation dans l'expression (2.80), le propagateur $\mathbf{K}(\theta''_f, \varphi''_f; \theta''_i, \varphi''_i; T)$ devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta''_f, \varphi''_f; \theta''_i, \varphi''_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta''_n) d\varphi''_n}{2\pi} \\ &\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta''_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi''_n}, \sin \frac{\theta''_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi''_n} \end{pmatrix} R_4(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta''_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi''_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta''_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi''_{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

l'expression de la matrice $R_4(t_n)$ est simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} R_4(t_n) &= e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \left[1 + i\tau \sqrt{\frac{1}{4}(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} (\sigma_y \sin \gamma + \sigma_z \cos \gamma) \right] e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \\ &= 1 + i\tau \sqrt{\frac{1}{4}(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} (\sigma_y \sin \gamma + \sigma_z \cos \gamma) e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \end{aligned} \quad (2.87)$$

telque :

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \sigma_z e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} &= \left(\cos \frac{\gamma}{2} - i\sigma_x \sin \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_z \left(\cos \frac{\gamma}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma & i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

et

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \sigma_y e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} &= \left(\cos \frac{\gamma}{2} - i\sigma_x \sin \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_y \left(\cos \frac{\gamma}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \sin \gamma & -i \cos \gamma \\ i \cos \gamma & -\sin \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

donc :

$$e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} [\sigma_y \sin \gamma + \sigma_z \cos \gamma] e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \tag{2.90}$$

d'où

$$R_4(t_n) = 1 + \frac{i\tau}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sigma_z = e^{\frac{i\tau}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sigma_z} \tag{2.91}$$

Alors le propagateur $\mathbf{K}(\theta_f'', \varphi_f''; \theta_i'', \varphi_i''; T)$ prend la forme diagonale suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f'', \varphi_f''; \theta_i'', \varphi_i''; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta_n'') d \varphi_n''}{2\pi} \\
&\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n''}, & \sin \frac{\theta_n''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n''} \end{pmatrix} R_4(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''} \\ \sin \frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

On intègre sur tous les angles (φ_n, θ_n) utilisant

$$\int_0^\pi d\cos\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} = \int_0^\pi d\cos\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} = 2\pi\delta_{m,0}. \quad (2.93)$$

On trouve :

$$\mathbf{K}(\theta_f'', \varphi_f''; \theta_i'', \varphi_i''; T) = \left(\cos \frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, \quad \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^N \prod_{\substack{n=1 \\ \leftarrow}}^{N+1} R_4(t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin \frac{\theta_i''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrices figurant dans (2.94) suivant [6] on obtient

$$\mathbf{K}(\theta_f'', \varphi_f''; \theta_i'', \varphi_i''; T) = \left(\cos \frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, \quad \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \right) e^{i\frac{S}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2}\sigma_z} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin \frac{\theta_i''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Retournons aux anciennes variables angulaires,

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin \frac{\theta_i''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} e^{+i\frac{\omega T_i}{2}\sigma_y} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, \quad \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\omega T}{2}\sigma_y} e^{+i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

nous obtenons que le propagateur prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} M(T) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

la matrice $M(T)$ et donnée par l'expression suivante :

$$M(T) = e^{-i\frac{\omega T}{2}\sigma_y} e^{+i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} e^{i\frac{S}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2}\sigma_z} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \quad (2.99)$$

les éléments de la matrice $M(T)$ est donné par :

$$M_{11} = \sin \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \left(\sin \frac{\omega T}{2} \sin \gamma + i \cos \frac{\omega T}{2} \cos \gamma \right) + \cos \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \cos \frac{\omega T}{2} \quad (2.100)$$

$$M_{12} = \sin \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \left(\cos \frac{\omega T}{2} \sin \gamma + i \sin \frac{\omega T}{2} \cos \gamma \right) - \cos \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sin \frac{\omega T}{2} \quad (2.101)$$

$$M_{21} = \sin \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} \sin \gamma + i \sin \frac{\omega T}{2} \cos \gamma \right) + \cos \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \sin \frac{\omega T}{2} \quad (2.102)$$

$$M_{22} = \sin \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \left(\sin \frac{\omega T}{2} \sin \gamma - i \cos \frac{\omega T}{2} \cos \gamma \right) + \cos \frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \cos \frac{\omega T}{2} \quad (2.103)$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varier que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(\theta_f + 2n\pi, \varphi_f + 4n\pi, \theta_i, \varphi_i; T) \\ &= \mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T), \end{aligned} \quad (2.104)$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

2.7 La Probabilité de transition

L'amplitude de transition de l'état initiale $|m_i\rangle = |\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ à l'état finale $|m_f\rangle = |\downarrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ est liée à $K(f, i; T)$ par :

$$K(m_f, m_i; T) = {}_y\langle\downarrow|U(T)|\uparrow\rangle_y \quad (2.105)$$

Calculons la probabilité de transition entre les deux états propre de σ_y

$$P_{\downarrow\uparrow} = |K(m_f, m_i; T)|^2 \quad (2.106)$$

En introduit les relations des fermuteres

$$\int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi} |\theta_f, \varphi_f\rangle \langle\theta_f, \varphi_f| = 1, \quad \int \frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi} |\theta_i, \varphi_i\rangle \langle\theta_i, \varphi_i| = 1 \quad (2.107)$$

on trouve

$$\begin{aligned} K(m_f, m_i; T) &= \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi} \frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi} \langle m_f | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | m_i \rangle \\ &= \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi} \frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi} \frac{1}{2} \langle [|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle] | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | [|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle] \rangle \end{aligned} \quad (2.108)$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
K(m_f, m_i; T) &= \frac{1}{2} \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \\
&\times \left\{ \langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \uparrow \rangle + i \langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle + \right. \\
&\left. i \langle \downarrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \uparrow \rangle - \langle \downarrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle \right\} \quad (2.109)
\end{aligned}$$

Avec

$$\langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \text{et} \quad \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}. \quad (2.110)$$

$$\langle \downarrow | \theta_f, \varphi_f \rangle = \sin\left(\frac{\theta_f}{2}\right) e^{\frac{i}{2}\varphi_f} \quad \text{et} \quad \langle \theta_i, \varphi_i | \uparrow \rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \quad (2.111)$$

(2.109) devient :

$$K(m_f, m_i; T) = K_{11}(T) + K_{12}(T) + K_{21}(T) + K_{22}(T) \quad (2.112)$$

Avec

$$K_{11}(T) = \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \frac{1}{2} \langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \uparrow \rangle = \frac{1}{2} M_{11}(T) \quad (2.113)$$

$$K_{12}(T) = \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \frac{1}{2} \langle \uparrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle = \frac{1}{2} M_{12}(T) \quad (2.114)$$

$$K_{21}(T) = \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \frac{1}{2} \langle \downarrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \uparrow \rangle = \frac{1}{2} M_{21}(T) \quad (2.115)$$

$$K_{22}(T) = \int \frac{d \cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d \cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi} \frac{1}{2} \langle \downarrow | \theta_f, \varphi_f \rangle K(f, i; T) \langle \theta_i, \varphi_i | \downarrow \rangle = \frac{1}{2} M_{22}(T) \quad (2.116)$$

d'où

$$K(m_f, m_i; T) = K(\downarrow, \uparrow; T) = \frac{1}{2} [M_{11}(T) - M_{22}(T) + i(M_{12}(T) + M_{21}(T))] \quad (2.117)$$

En substituant les éléments de la matrice $M(T)$ dans l'expression (2.117), la probabilité de transition dans ce cas s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{\downarrow\uparrow} &= \frac{1}{4} |(M_{11}(T) - M_{22}(T)) + i(M_{12}(T) + M_{21}(T))|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| 2i \cos \gamma \sin \left[\frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \right] e^{\frac{i}{2}\omega T} \right|^2 \\ &= \cos^2 \gamma \sin^2 \left[\frac{S}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \right] \end{aligned} \quad (2.118)$$

En insérant l'expression (2.78) et (2.82) dans (2.117), la probabilité de transition devient :

$$P_{\downarrow\uparrow} = \frac{4\omega_1^2}{4\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \sin^2 \left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{2\lambda} \sqrt{4\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right] \quad (2.119)$$

Cette formule est exactement la formule donnée dans la littérature [11].

Chapitre 3

Action d'un champ magnétique statique sur une particule neutre du spin 1/2

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'étudier le mouvement d'une particule libre neutre du spin 1/2 soumise à l'action d'un champ magnétique variable $\mathbf{B}(y)$ statique de la forme suivante [12]

$$\mathbf{B}(y) = B_0 \begin{pmatrix} \sin 2\kappa y \\ 0 \\ \cos 2\kappa y \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Ce champ auquel est soumise la particule qui se déplace sur une droite, suivant l'axe y , dépendant uniquement de la position. Son mouvement est régi par l'hamiltonien,

$$H = H_0 + H_{int} = \frac{p^2}{2m} - \mu_0 B_0 (\boldsymbol{\sigma}_z \cos 2\kappa y + \boldsymbol{\sigma}_x \sin 2\kappa y), \quad (3.2)$$

où μ_0 est le rapport gyromagnétique, B_0 et κ sont deux constantes arbitraires.

Ce hamiltonien (3.2) réécrit comme :

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu_0 B_0 (\sigma_z \cos 2\kappa y + \sigma_+ \sin 2\kappa y + \sigma_- \sin 2\kappa y) \quad (3.3)$$

avec

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{et} \quad H_{int} = -\mu_0 B_0 (\sigma_z \cos 2\kappa y + \sigma_+ \sin 2\kappa y + \sigma_- \sin 2\kappa y) \quad (3.4)$$

les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Nous allons voir que l'étude de ce genre d'interaction nécessite une construction d'un formalisme décrivant le mouvement extérieur et intérieur relatif à ce système.

3.2 Formalisme intégrale des chemins en représentation des états cohérents angulaires

Nous désignons par y la variable réelle qui décrit la position de l'atome, avec le projecteur correspondant

$$\int |y\rangle \langle y| dy = 1, \quad (3.6)$$

– et (θ, φ) les variables polaires génèrent la dynamique du spin.

Pour la description du système, nous allons considérer l'état quantique $|y; \theta, \varphi\rangle$, reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par la variable réelle y tandis que les variables angulaires (θ, φ) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initial $|y_i; \theta_i, \varphi_i\rangle$ à $t_i = 0$ vers l'état

final $|y_f; \theta_f, \varphi_f\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit :

$$K(f, i; T) = \langle y_f, \theta_f, \varphi_f | \mathbf{U}(T, 0) | y_i, \theta_i, \varphi_i \rangle, \quad (3.7)$$

avec

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-i \int_0^T H dt), \quad (3.8)$$

et $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson . Pour passer à la représentation des intégrales des chemins subdivisons l'intervalle du temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N + 1)\varepsilon$. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$\mathbf{U}(T, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-i\varepsilon H_0} e^{-i\varepsilon H_{int}}]^{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}) . \quad (3.9)$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \frac{1}{2\pi} \int \prod_{n=1}^N d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ &\times \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle y_n, \theta_n, \varphi_n | e^{-i\varepsilon H_0} e^{-i\varepsilon H_{int}} | y_{n-1}, \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

après l'action de H_{int} sur les états $|y_n\rangle$, on note que

$$\langle y_n, \theta_n, \varphi_n | e^{-i\varepsilon H_0} e^{-i\varepsilon H_{int}} | y_{n-1}, \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle = \langle y_n | e^{-i\varepsilon H_0} | y_{n-1} \rangle \langle \theta_n, \varphi_n | e^{-i\varepsilon H_{int}} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle, \quad (3.11)$$

et le propagateur devient séparable

$$K(f, i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle y_n | e^{-i\varepsilon H_0} | y_{n-1} \rangle \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int \prod_{n=1}^N d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ \times \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle \theta_n, \varphi_n | e^{-i\varepsilon H_{int}} | \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle, \quad (3.12)$$

avec

$$y_{N+1} = y_f, \quad , \quad y_0 = y_i \quad \text{et} \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f, \quad , \quad \Omega_0 = \Omega_i. \quad (3.13)$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle y_n | e^{-\frac{i\varepsilon}{2m} p^2} | y_{n-1} \rangle = \sqrt{m/2\pi i\varepsilon} \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon} (y_n - y_{n-1})^2\right), \quad (3.14)$$

$$\langle \Omega | \sigma_y | \Omega' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')}, \quad (3.15)$$

$$\langle \Omega | \sigma_+ | \Omega' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')}, \quad (3.16)$$

$$\langle \Omega | \sigma_- | \Omega' \rangle = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')}. \quad (3.17)$$

Le propagateur prend la forme discrète suivante

$$K(f, i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \exp \frac{im}{2\varepsilon} (\Delta y_n)^2 \\ \left\{ \cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} + \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right. \\ \left. - i\varepsilon \mu_0 B_0 \cos 2\kappa y \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} - \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right] \right. \\ \left. + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sin 2\kappa y \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1})} + \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1})} \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressons. Procédons alors au calcul de $K(f, i, ; T)$.

3.3 Calcul du propagateur

Notons que (3.18) s'écrit sous forme suivante

$$K(y_f, \Omega_f, y_i, \Omega_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^N dy_n \prod_{n=1}^{N+1} e^{\frac{im}{2\varepsilon} \Delta y_n^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \right) R(y_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

avec

$$R(y_n, t_n) = 1 - i\varepsilon H_{int}$$

$$= 1 + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_z \cos 2\kappa y_n + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_x \sin 2\kappa y_n \quad (3.20)$$

Faisons d'abord une transformation unitaire sur les variables angulaires, afin d'éliminer le terme $2\kappa y_n$ du champ magnétique dans le propagateur (3.19)

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \\ \sin \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} = e^{-i\kappa y_n \sigma_y} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \\ \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} e^{+i\kappa y_n \sigma_y} \quad (3.22)$$

Le propagateur (3.19) devient :

$$K(y_f, \Omega'_f, y_i, \Omega'_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^N dy_n \prod_{n=1}^{N+1} e^{\frac{im}{2\varepsilon} \Delta y_n^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_1(y_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

où

$$R_1(y_n, t_n) = e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} R(y_n, t_n) e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y}$$

$$= e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} (1 + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_z \cos 2\kappa y_n + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_x \sin 2\kappa y_n) e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y}$$

$$= e^{i\kappa(y_n - y_{n-1}) \sigma_y} + i\varepsilon \mu_0 B_0 \cos 2\kappa y_n e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} \sigma_z e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y} + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sin 2\kappa y_n e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} \sigma_x e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y} \quad (3.24)$$

Avec

$$e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} \sigma_z e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y} = e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} \sigma_z e^{-i(\kappa y_n) \sigma_y} e^{i(\kappa \Delta y_n) \sigma_y} \quad (3.25)$$

ou :

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} \Rightarrow y_{n-1} = y_n - \Delta y_n \quad (3.26)$$

$$e^{i(\kappa y_n) \sigma_y} \sigma_z e^{-i(\kappa y_{n-1}) \sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos 2\kappa y_n & -\sin 2\kappa y_n \\ -\sin 2\kappa y_n & -\cos 2\kappa y_n \end{pmatrix} e^{i(\kappa \Delta y_n) \sigma_y} \quad (3.27)$$

et :

$$e^{i\kappa y_n \sigma_y} \sigma_x e^{-i\kappa y_{n-1} \sigma_y} = e^{i\kappa y_n \sigma_y} \sigma_x e^{-i\kappa y_n \sigma_y} e^{i\kappa \Delta y_n \sigma_y}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2\kappa y_n & \cos 2\kappa y_n \\ \cos 2\kappa y_n & -\sin 2\kappa y_n \end{pmatrix} e^{i(\kappa \Delta y_n) \sigma_y} \quad (3.28)$$

En insérant (3.27) et (3.28) dans (3.24) on trouve :

$$\begin{aligned} R_1(y_n, t_n) = & e^{i\kappa \Delta y_n \sigma_y} + i\varepsilon \mu_0 B_0 \left[\cos 2\kappa y_n \begin{pmatrix} \cos 2\kappa y_n & -\sin 2\kappa y_n \\ -\sin 2\kappa y_n & -\cos 2\kappa y_n \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \sin 2\kappa y_n \begin{pmatrix} \sin 2\kappa y_n & \cos 2\kappa y_n \\ \cos 2\kappa y_n & -\sin 2\kappa y_n \end{pmatrix} \right] e^{i\kappa \Delta y_n \sigma_y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donc :

$$R_1(y_n, t_n) = e^{i\kappa(\Delta y_n) \sigma_y} + i\varepsilon \mu_0 B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{i(\kappa \Delta y_n) \sigma_y} \quad (3.30)$$

Alors le propagateur $K(y_f, \Omega'_f, y_i, \Omega'_i; T)$ prend la forme suivante :

$$K(y_f, \Omega'_f, y_i, \Omega'_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^N dy_n \prod_{n=1}^{N+1} e^{\frac{im}{2\varepsilon} \Delta y_n^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} [e^{i\kappa(\Delta y_n) \sigma_y} + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_z e^{i(\kappa \Delta y_n) \sigma_y}] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Introduisons maintenant l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left[\frac{-i\varepsilon}{2m} p_n^2 + ip_n \left(\Delta y_n + \frac{\varepsilon \kappa \sigma_y}{m} \right) \right] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon \hbar}} \exp \left[\frac{im}{2\varepsilon} \left(\Delta y_n + \frac{\varepsilon \kappa \sigma_y}{m} \right)^2 \right]. \quad (3.32)$$

d'ou le porpagateur devient

$$\begin{aligned}
K(y_f, \Omega'_f, y_i, \Omega'_i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi} \\
&\times \exp \sum_{n=1}^{n=N+1} \left[\frac{-i\varepsilon}{2m} p_n^2 + ip_n \Delta y_n - i \frac{\varepsilon}{2m} \kappa^2 \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi} \prod_{n=1}^{N+1} \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_2(p_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.33)
\end{aligned}$$

avec

$$R_2(p_n, t_n) = 1 + i\varepsilon \mu_0 B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\varepsilon \frac{p_n \kappa}{m} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

intégrons sur les N variables y_n . Le propagateur devient

$$\begin{aligned}
K(f, i; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{n=N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi} \prod_{n=1}^{n=N} (2\pi \delta(p_n - p_{n-1})) \\
&\times e^{-\frac{i\varepsilon}{2m} \sum_{n=1}^{n=N+1} p_n^2} \exp \left[i(p_{n+1} y_{n+1} - p_1 y_0) - i \frac{T}{2m} \kappa^2 \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi} \prod_{n=1}^{N+1} \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_2(p_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

La présence de la distribution de Dirac dans (3.35) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement i. e :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{N+1} = p. \quad (3.36)$$

Alors le propagateur (3.35) prend la forme suivante :

$$K(y_f, \Omega'_f, y_i, \Omega'_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi} \\ \times \prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, \quad \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \right) R_2(p, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin \frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

avec

$$R_2(p, t_n) = 1 + i\varepsilon \mu_0 B_0 \sigma_z + i\varepsilon \frac{p\kappa}{m} \sigma_y. \quad (3.38)$$

donc :

$$R_2(p, t_n) = 1 + i\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2} [\sin 2\vartheta(p) \sigma_y + \cos 2\vartheta(p) \sigma_z] \quad (3.39)$$

où

$$\cos 2\vartheta(p) = \frac{\mu_0 B_0}{\sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2}}, \quad \sin 2\vartheta(p) = \frac{\frac{\kappa p}{m}}{\sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2}} \quad (3.40)$$

A ce stade il est préférable d'introduire une deuxième rotation d'un angle $\vartheta(p)$ dans l'espace du spin afin de pouvoir intégrer sur les variables angulaires

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \\ \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} = e^{i\sigma_x \vartheta(p)} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta''_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi''_n} \\ \sin \frac{\theta''_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi''_n} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, \quad \sin \frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, \quad \sin \frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} e^{-i\sigma_x \vartheta(p)} \quad (3.42)$$

avec $\tan 2\vartheta(p) = \frac{\kappa p}{m\mu_0 B_0}$, le propagateur (3.37) devient

$$K(y_f, \Omega_f'', y_i, \Omega_i''; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{d \cos(\theta_n'') d\varphi_n''}{2\pi} \\ \times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_n''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n''} & \sin \frac{\theta_n''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n''} \end{pmatrix} R_3(p, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''} \\ \sin \frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

où

$$R_3(p, t_n) = 1 + i\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2} \sigma_z. \quad (3.44)$$

Nous avons ensuite intégré sur toutes les variables angulaires selon Ref. 20. Puis, Eq. (3.43) devient

$$K(y_f, \Omega_f'', y_i, \Omega_i''; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] \\ \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f''}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f''} & \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{n=1 \\ \leftarrow}}^N (-1)^N R_3(p, t_n) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin \frac{\theta_i''}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Développons le produit (de type matriciel 2×2) figurant dans l'expression (3.45) suivant [6], nous trouvons alors

$$K(y_f, \Omega_f'', y_i, \Omega_i''; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] \\ \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f''}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f''} & \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} R_3(T) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin \frac{\theta_i''}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

avec

$$R_3(T) = e^{iT \sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2}} \sigma_z. \quad (3.47)$$

Retournons aux anciennes variables angulaire,

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \\ \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} = e^{-i\sigma_x \vartheta(p)} e^{i\kappa y_i \sigma_y} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, & \sin \frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} e^{-i\kappa y_f \sigma_y} e^{i\sigma_x \vartheta(p)}, \quad (3.49)$$

le propagateur (3.46) s'écrit sous la forme :

$$K(y_f, \Omega_f, y_i, \Omega_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] K_p(\Omega_f, \Omega_i, T), \quad (3.50)$$

où

$$K_p(\Omega_f, \Omega_i, T) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{T}) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin \frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

tel que

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}) = e^{-i\kappa y_f \sigma_y} e^{i\sigma_x \vartheta(p)} R_3(T) e^{-i\sigma_x \vartheta(p)} e^{i\kappa y_i \sigma_y}. \quad (3.52)$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varier que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(y_f, \Omega_f, y_i, \Omega_i; T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(y_f, \theta_f + 2n\pi, y_i, \varphi_f + 4n\pi, \theta_i, \varphi_i; T) \\ &= K(f, i; T), \end{aligned} \quad (3.53)$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaires.

3.4 Les fonctions d'onde

Calculons d'abord l'amplitude de transition entre les états propres du spin, en prenant a titre d'exemple le calcul de l'élément de la matrice $K_p(\uparrow, \uparrow; T)$ où :

$$K_p(\uparrow, \uparrow; T) = \frac{1}{2\pi} \int d\cos(\theta_f) d\varphi_f \frac{1}{2\pi} \int d\cos(\theta_i) d\varphi_i \langle \uparrow | \Omega_f \rangle K_p(\Omega_f, \Omega_i; T) \langle \Omega_i | \uparrow \rangle. \quad (3.54)$$

avec

$$\langle \uparrow | \Omega_f \rangle = \cos \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \quad \text{et} \quad \langle \Omega_i | \uparrow \rangle = \cos \frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \quad (3.55)$$

En substituant l'équation. (3.55) dans l'équation. (3.54) et en intégrant sur les coordonnées polaires, l'équation. (3.55) prend la forme

$$K_p(\uparrow, \uparrow; T) = \mathbf{S}_{11}. \quad (3.56)$$

De la même manière, nous procédons pour les éléments restants. Le résultat prend la forme d'une matrice

$$K_p(y_f, y_i; T) = \mathbf{S}(T), \quad (3.57)$$

Finalement on trouve l'expression exact du propagateur

$$K(y_f, y_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] \mathbf{S}(T),$$

qui coïncide avec ceux obtenus dans la réf.[12] et [13] en utilisant l'équation de Schrödinger et les integrales des chemins dans la représentation des états cohérents fermioniques respectivement.

Le propagateur prend la forme suivante

$$K(y_f, y_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT \frac{\kappa^2}{2m} \right] e^{-i\kappa y_f \sigma_y} e^{i\sigma_x \vartheta(p)}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{iT\sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2}} \mathbf{\Lambda}_+ e^{-i\sigma_x \vartheta(p)} e^{i\kappa y_i \sigma_y} \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left[ip(y_f - y_i) - \frac{iTp^2}{2m} - iT\frac{\kappa^2}{2m} \right] e^{-i\kappa y_f \sigma_y} e^{i\sigma_x \vartheta(p)} \\
& \times e^{-iT\sqrt{\left(\frac{\kappa p}{m}\right)^2 + (\mu_0 B_0)^2}} \mathbf{\Lambda}_- e^{-i\sigma_x \vartheta(p)} e^{i\kappa y_i \sigma_y},
\end{aligned} \tag{3.58}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda}_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}_+ \boldsymbol{\eta}_+^\dagger, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{\Lambda}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}_- \boldsymbol{\eta}_-^\dagger, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Par comparaison avec la décomposition spectrale habituel

$$K(y_f, y_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_+} \Psi_{p,+}(y_f) \Psi_{p,+}^*(y_f) + \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_-} \Psi_{p,-}(y_f) \Psi_{p,-}^*(y_f) \tag{3.60}$$

Nous déduisons alors les fonctions d'onde convenablement normalisées

$$\Psi_{p,\pm}(y) = e^{ipy} e^{-i\kappa y \sigma_y} e^{i\sigma_x \vartheta(p)} \boldsymbol{\eta}_\pm, \tag{3.61}$$

avec les valeurs propres correspondentes

$$E_\pm = \frac{1}{2m} \left\{ p^2 + \kappa^2 \mp \sqrt{(2\kappa p)^2 + (2m\mu_0 B_0)^2} \right\}. \tag{3.62}$$

Ce résultat coïncide exactement avec celle de la littérature [12, 13].

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'interaction du spin ou en général aux systèmes à deux niveaux avec un champ extérieur. Les matrices de Pauli $\vec{\sigma}$ représentant les deux niveaux de l'atome ont été remplacées par un vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté suivant les angles polaires (θ, φ) via la représentation géométrique du spin et le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs au spin, nous avons pu élaborer un formalisme intégral du chemin en représentation des états cohérents du spin.

Dans le chapitre (2) nous avons étudié le spin en interaction avec une classe du champ magnétique dépendant du temps, dite classe de Rabi pour l'obtention, des probabilités de transition.

L'utilisation des rotations dans l'espace des états cohérents angulaires et des transformations temporelles ont été nécessaires pour simplifier l'étude, dans chacun des cas. L'amplitude de transition a été déduite pour chacun des cas.

Dans le chapitre (3) nous avons étudié l'action d'un champ magnétique statique sur une particule neutre du spin 1/2. L'utilisation de l'espace des phases a simplifié énormément le calcul et grâce à certaines rotations dans l'espace des états cohérents angulaires. Le spectre et les fonctions d'onde correspondantes ont été retrouvées exactement.

L'étude de ces trois cas simples a démontré encore une fois la puissance et l'élégance par lesquelles

la technique de l'intégrale du chemin traite un système tel un système à deux niveaux. Différentes techniques du calcul ont été utilisées et les résultats ont été retrouvés.

Ce travail peut être élargi et généralisé. Par exemple dans le chapitre (1) nous pouvons considérer une classe des champs magnétiques dont l'amplitude peut être écrite en fonctions de fonctions spéciales telles hypergéométriques, de Bessel...etc.

Dans le chapitre (3) nous pouvons encore modifier l'expression du champ magnétique par exemple l'étude d'un mouvement d'une particule de spin $1/2$ soumis à une force harmonique et au potentiel de Pöschl-Teller... etc et interagissant avec un champ magnétique. Ces travaux seront l'objet d'une autre étude plus profonde.

En conclusion nous pouvons affirmer qu' à travers l'étude des trois problèmes écrites dans les chapitres (2 – 3), que le formalisme des intégrales des chemins a pu être maîtrisé. La détermination des probabilités de transitions ainsi que les fonctions d'onde et les énergies correspondantes pour les différents mouvements de manière exacte, confirme la justesse de la manipulation des transformations utilisés.

Annexe A

Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire

A.1 Introduction

Les états cohérents $|Z\rangle$ de l'oscillateur harmonique ont été introduit pour la première fois par Schrödinger en 1926 en cherchant le minimum de la relation d'Heisenberg [18]. Ces états cohérents ont été généralisés par perelomov[17] et leurs introductions dans le formalisme des intégrales du chemins au moyen des états cohérents de type bosoniques ou fermioniques, et en fonctions des angles ont été faits par divers auteurs comme Klauder [14], Ohnuki et Kashiwa, [15] et Klauder respectivement [16].

Les états cohérents sont utilisés dans les différents domaines de la physique particulièrement en optique quantique [19]. Par exemple le champ produit par un laser est décrit par un état cohérent bosonique. Ils ont un nombre de propriétés intéressantes, et sont définis alternativement par :

- i) états propres de l'opérateur d'annihilation a qui vérifient la relation de commutation $[a^\dagger, a] = 1$
- ii) sont créés à partir de l'état de vide $|0\rangle$ par l'opérateur unitaire dit de déplacement D
- iii) états pour lesquels l'incertitude de Heisenberg est minimale.

A.2 Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique

Considérons donc le problème aux valeurs propres de l'opérateur de destruction a

$$a |Z\rangle = Z |Z\rangle, \quad (\text{A.1})$$

où z est un nombre complexe. L'adjoint de cette relation est

$$\langle Z| a^\dagger = Z^* \langle Z|. \quad (\text{A.2})$$

Nous allons montrer l'existence des états $|Z\rangle$ en les construisant explicitement. Pour cela, nous multiplions (A.1) par $\langle n|$ état nombre :

$$\langle n| a |Z\rangle = Z \langle n|Z\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Par ailleurs, l'adjoint de la relation $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ et $\langle n| a = \sqrt{n+1} \langle n+1|$. Multipliant cette égalité par $|Z\rangle$ conduit à

$$\langle n| a |Z\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|Z\rangle. \quad (\text{A.4})$$

En égalant les membres de droite des deux dernière égalités, nous obtenons

$$\langle n|Z\rangle = \frac{Z}{\sqrt{n}} \langle n-1|Z\rangle = \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|Z\rangle. \quad (\text{A.5})$$

En utilisant la décomposition de l'unité $1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$, on trouve

$$|Z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| Z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \langle 0| Z\rangle, \quad (\text{A.6})$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \langle Z|Z\rangle &= \langle 0|Z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \langle Z|n\rangle = \langle 0|Z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \frac{(Z^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle z|0\rangle, \\ &= |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z|^{2n}}{n!} = |\langle 0|Z\rangle|^2 e^{|Z|^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Puisque la norme est finie, sa valeur est arbitraire. Donc, nous faisons le choix

$$\langle 0|Z\rangle = \langle Z|0\rangle = e^{-|Z|^2/2}, \quad (\text{A.8})$$

ce qui conduit à $\langle Z|Z\rangle = 1$. De cette manière, les états propres de l'opérateur de destruction a sont univoquement définis comme

$$|Z\rangle = e^{-|Z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{A.9})$$

On appelle *états cohérents* les états propres (A.9). L'expression (A.9) pour les l'état cohérent $|z\rangle$ résulte de l'action d'un opérateur agissant sur le vide. Pour ce travail, nous partons de la propriété

$$e^{Za^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{A.10})$$

Puisque $a|0\rangle = 0|0\rangle$, on peut remplacer $|0\rangle$ par $e^{-z^*a}|0\rangle$ sans rien modifier. Donc

$$e^{-|Z|^2/2} e^{Za^\dagger} e^{-Z^*a} |0\rangle = e^{-|Z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |Z\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Pour terminer cette dérivation, nous utilisons le théorème :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (\text{A.12})$$

pour tout couple d'opérateurs A et B qui commutent avec leur commutateur. Ce théorème conduit au résultat

$$|Z\rangle = e^{Za^\dagger - Z^*a} |0\rangle = D(Z) |0\rangle, \quad (\text{A.13})$$

qui exprime d'une manière compacte la relation entre le vide et un état cohérent en terme d'un opérateur unitaire de déplacement $D(Z)$. L'opérateur $D(Z)$ vérifie les propriétés suivantes

$$D(Z) D^\dagger(Z) = D^\dagger(Z) D(Z) = 1, \quad D^\dagger(Z) = D(-Z), \quad (\text{A.14})$$

$$D(Z) D(Z') = \exp\left(\frac{ZZ'^* - Z^*Z'}{2}\right) D(Z + Z'), \quad (\text{A.15})$$

d'où

$$D(Z) D(Z') = \exp(ZZ'^* - Z^*Z') D(Z') D(Z) \quad (\text{A.16})$$

Il est facile de montrer que

$$[a, D(Z)] = Z D(Z), \quad [a^\dagger, D(Z)] = Z^* D(Z), \quad (\text{A.17})$$

$$D^\dagger(Z) a D(Z) = a + Z, \quad D^\dagger(Z) a^\dagger D(Z) = a^\dagger + Z^*, \quad (\text{A.18})$$

pour cette raison, l'opérateur $D(Z)$ est appelé opérateur de Déplacement. Il reste une difficulté à sur monter, c'est celle de vérifier que les états cohérents forment une base orthonormée. Nous allons démontrer dans cette section que les états cohérents forment une base, mais d'une nature assez particulière car elle n'est pas orthogonale. Nous allons aussi voir qu'il est parfaitement possible de

travailler avec une base qui ne bénéficie pas de cette propriété qui semble essentielle en mécanique quantique. Nous savons déjà que la définition (A.9) impliquent que les états cohérents sont normalisables, et nous avons fait le choix $\langle Z | Z \rangle = 1$. Considérons maintenant le produit scalaire de deux états cohérents

$$\begin{aligned} \langle Z | Z' \rangle &= e^{-(|Z|^2 + |Z'|^2)/2} \sum_{n,m} \frac{Z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{(Z')^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \\ &= e^{-(|z|^2 + |z'|^2)/2} \sum_{n,m} \frac{(Z^* Z')^n}{n!} = e^{-(|Z|^2 + |Z'|^2)/2} e^{Z^* Z'}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

et donc

$$|\langle Z | Z' \rangle|^2 = \exp \left(-|Z - Z'|^2 \right). \quad (\text{A.20})$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux et ne peuvent donc pas former un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. Par contre, il a une propriété essentielle qui reste vérifiée, à savoir l'existence d'une relation de fermeture ou décomposition de l'unité. Pour démontrer cela, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int |Z\rangle \langle Z| d^2 Z &= \frac{1}{\pi} \int e^{-|Z|^2} \sum_{n,m} \frac{(Z)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(Z^*)^m}{\sqrt{m!}} |n\rangle \langle m| d^2 Z \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{+\infty} e^{-|Z|^2} |Z|^{n+m} |Z| d|Z| \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} 2\pi \delta_{n,m} \int_0^{+\infty} |Z|^{n+m+1} e^{-|Z|^2} d|Z|, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

on pose $x = |Z|^2$ d'où

$$\frac{1}{\pi} \int |Z\rangle \langle Z| d^2 Z = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \pi \delta_{n,m} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \pi \delta_{n,m} n! = \sum_n |n\rangle \langle n| = 1, \quad (\text{A.22})$$

cette relation représente la relation de fermeture et tout état peut s'écrire dans la base des états cohérents

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle = \psi(a^\dagger) |0\rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \int |Z\rangle \langle Z| \psi(a^\dagger) |0\rangle d^2 Z \\
&= \frac{1}{\pi} \int |Z\rangle \langle Z| 0\rangle \psi(Z^*) d^2 Z,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

en utilisant la relation (A.8), ceci conduit à l'égalité

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 Z \psi(Z^*) e^{-|Z|^2/2} |Z\rangle. \tag{A.24}$$

En particulier, si $|\psi\rangle$ est l'état cohérent $|Z'\rangle$, on a

$$c_n = e^{-|Z'|^2/2} \frac{Z'^n}{\sqrt{n!}}, \tag{A.25}$$

$$\psi(Z^*) = \sum_n e^{-|Z'|^2/2} \frac{(Z'Z^*)^n}{n!}, \tag{A.26}$$

et donc

$$|Z'\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 Z e^{-(|Z|^2 + |Z'|^2 - 2Z^*Z')/2} |Z\rangle. \tag{A.27}$$

Ainsi la base des états cohérents est surcomplète puisque tout vecteur de la base peut être exprimé comme une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la base.

Etudions maintenant les propriétés physiques de ces états cohérents.

– La valeur moyenne du nombre de photons dans un états cohérent $|Z\rangle$

$$\langle n \rangle = \langle Z | a^\dagger a | Z \rangle = |Z|^2. \tag{A.28}$$

- La valeur moyenne de n^2 dans ce même état

$$\langle n^2 \rangle = \langle Z | a^\dagger a a^\dagger a | Z \rangle = \langle Z | a^\dagger a^\dagger a a + a^\dagger a | Z \rangle = |Z|^4 + |Z|^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (\text{A.29})$$

- La variance d'un état cohérent

$$\Delta n = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle. \quad (\text{A.30})$$

- La fluctuation du nombre de photons

$$f(n) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{\langle n \rangle}. \quad (\text{A.31})$$

Cette propriété est fondamentale : plus l'intensité associée à un état cohérent est élevée, plus les fluctuations autour de cette intensité sont petites. C'est de cette propriété que les états cohérents tirent leur nom. C'est aussi par le biais de cette propriété qu'une relation peut être établie entre les états cohérents et le champ produit par un laser qui est en bonne première approximation dans un état cohérent. La probabilité de trouver n photons dans l'état cohérent $|Z\rangle$ est donnée par la distribution de poisson

$$P_n = |\langle n | Z \rangle|^2 = \frac{|Z|^{2n}}{n!} e^{-|Z|^2} = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (\text{A.32})$$

Pour terminer cette section, nous allons évaluer les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion dans l'état cohérent. Ces valeurs peuvent être obtenues en exprimant X et P en fonction de a et $a^\dagger$

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a), \quad P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (\text{A.33})$$

par un calcul simple on trouve

$$\langle X \rangle_Z = \langle Z | X | Z \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (Z + Z^*), \quad \langle P \rangle_Z = \langle Z | P | Z \rangle = i\sqrt{2\hbar m\omega} (Z - Z^*), \quad (\text{A.34})$$

$$\langle X^2 \rangle_Z = \frac{\hbar}{2m\omega} [(Z + Z^*)^2 + 1], \quad \langle P^2 \rangle_Z = \frac{\hbar m\omega}{2} [1 - (Z - Z^*)^2], \quad (\text{A.35})$$

et donc

$$\Delta X_Z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta p_Z = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. \quad (\text{A.36})$$

On note que $\Delta X \cdot \Delta P$ prend sa valeur minimale :

$$\Delta X_Z \cdot \Delta P_Z = \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{A.37})$$

qui se traduit par la relation

$$\langle Z | a^\dagger a | Z \rangle = \langle Z | a^\dagger | Z \rangle \langle Z | a | Z \rangle, \quad (\text{A.38})$$

pour les états $|\psi\rangle \neq |Z\rangle$ qui diffèrent des états cohérents l'incertitude de Heiesberg s'écrit

$$\langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle \geq \langle \psi | a^\dagger | \psi \rangle \langle \psi | a | \psi \rangle. \quad (\text{A.39})$$

A.3 Propagateur dans la base des états cohérents bosonique

L'amplitude de transition de l'états initial $|Z_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'états final $|Z_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'operateur d'évolution du temps

$$K(Z_f, Z_i; T) = \langle Z_f | \mathbf{U}(T, 0) | Z_i \rangle, \quad (\text{A.40})$$

où

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-i \int_0^T H dt),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N + 1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \rightarrow \infty$. En peut écrire l'operateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}(T, 0) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}). \quad (\text{A.41})$$

Nous introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, \dots, t_N$

$$\frac{1}{\pi} \int |Z_n\rangle \langle Z_n| d^2 Z_n = 1. \quad (\text{A.42})$$

Le propagateur prend la forme

$$K(Z_f, Z_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 Z_n}{\pi} \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle Z_n | e^{-i\varepsilon H} | Z_{n-1} \rangle. \quad (\text{A.43})$$

En évaluant l'élément de matrice figurant dans (1.43) on premier ordre en ε

$$\begin{aligned}
\langle Z_n | e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H} | Z_{n-1} \rangle &\simeq \langle Z_n | 1 - i\varepsilon H | Z_{n-1} \rangle \\
&= \langle Z_n | Z_{n-1} \rangle \left[1 - i\varepsilon \frac{\langle Z_n | H | Z_{n-1} \rangle}{\langle Z_n | Z_{n-1} \rangle} \right] \\
&\simeq \langle Z_n | Z_{n-1} \rangle e^{-i\varepsilon \mathcal{H}(Z_{n-1}, Z_n^*)},
\end{aligned} \tag{A.44}$$

avec

$$\mathcal{H}(Z_{n-1}, Z_n^*) = \frac{\langle Z_n | H | Z_{n-1} \rangle}{\langle Z_n | Z_{n-1} \rangle}, \tag{A.45}$$

et le produit de deux états cohérents est donné par la relation (A.19). Dans ce cas le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$K(Z_f, Z_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 Z_n}{\pi} \exp \left\{ i\varepsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{i}{2} \left(Z_n^* \frac{\Delta Z_n}{\varepsilon} - Z_n \frac{\Delta Z_n^*}{\varepsilon} \right) - \mathcal{H}(Z_{n-1}, Z_n^*) \right] \right\}. \tag{A.46}$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérents bosonique

$$K(Z_f, Z_i; T) = \int \mathcal{D}Z \exp \exp \left\{ i \int \left[\frac{i}{2} \left(Z^* \dot{Z} - Z \dot{Z}^* \right) - \mathcal{H}(Z, Z^*) \right] \right\}, \tag{A.47}$$

avec

$$\mathcal{D}Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 Z_n}{\pi}. \tag{A.48}$$

A.4 Les états cohérents du moment angulaire

Les états cohérents du moment angulaire peuvent être considérés comme les états quantiques associés au système classique dont le moment cinétique possède une direction déterminée. Dans la

représentation associée aux états cohérents, tout élément diagonal d'un observable tend vers l'observable classique associée, lorsque le moment cinétique devient grand (limite classique). Par exemple, la valeur moyenne du moment dipolaire électrique dans un état cohérent possède les mêmes caractéristiques que le dipôle optique classique.

Ces états cohérents de moment angulaire minimisent les inégalités appropriées de même que les états cohérents bosoniques font pour les inégalités de Heisenberg. Ceux-ci concernent les inégalités du triplet d'opérateurs S_x, S_y, S_z , à partir de $[S_x, S_y] = iS_z$ on obtient les inégalités pour le produit des variances calculées dans un état arbitraire $|\psi\rangle$.

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle (\Delta S_y)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |\langle S_z \rangle|, \quad (\text{A.49})$$

avec

$$\Delta S_x = S_x - \langle S_x \rangle, \quad \Delta S_y = S_y - \langle S_y \rangle \quad \text{et} \quad \langle S_z \rangle = \langle \psi | S_z | \psi \rangle. \quad (\text{A.50})$$

Lorsque $|\psi\rangle = |s, m\rangle$, avec $S_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle$ on peut voir que :

$$|m| \leq s(s+1) - m^2. \quad (\text{A.51})$$

L'égalité est atteinte lorsque la projection de S_z suivant le vecteur $\vec{k}$: $m = \pm s$ c'est-à-dire pour les états $|\vec{k}\rangle = |s, \pm s\rangle$.

L'état $|s, s\rangle$ sera considéré comme l'état quantique associé au système classique dont le moment angulaire pointe dans la direction Oz . Par la suite, l'état quantique associé à un moment angulaire classique pointant dans la direction $\vec{n}$ repérée par les angles (θ, φ) sera obtenu à l'aide de la rotation amenant Oz sur $\vec{n}$. On définira donc l'état cohérent du moment angulaire $|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle$, associé au vecteur unitaire $\vec{n}$, par :

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |s, s\rangle \quad (\text{A.52})$$

cet état est le résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $|\vec{k}\rangle = |s, s\rangle$.

Les états cohérents ne forment pas un ensemble orthonormé. Le produit scalaire de deux états cohérents angulaires

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \left[\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \right]^{2s} \quad (\text{A.53})$$

Les états $|\Omega\rangle$ forment un ensemble complétif. On peut en effet montrer la relation de fermeture

$$\frac{2s+1}{4\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbf{I}. \quad (\text{A.54})$$

Nous considérons maintenant un spin $s = 1/2$ décrit par les opérateurs de spin $S_i, i = (x, y, z)$ avec l'espace de Hilbert à deux dimensions engendré par exemple par les vecteur propre $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ de S_z . Pour chaque orientation dans l'espace réel caractérisé par un angle polaire θ et un angle azimutal φ on peut introduire un état cohérent de spin [16].

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle \quad (\text{A.55})$$

Ces états ne sont pas orthogonales, mais constituent une base surcomplète dans l'espace de Hilbert.

Le produit scalaire de deux états cohérents de spin et le projection sont respectivement

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbf{I}. \quad (\text{A.57})$$

En outre, les éléments de matrice des opérateurs de spin prennent la forme suivante :

$$\langle \Omega | S_z | \Omega' \rangle = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \right], \quad (\text{A.58})$$

$$\langle \Omega | S_x | \Omega' \rangle = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} \right], \quad (\text{A.59})$$

$$\langle \Omega | S_y | \Omega' \rangle = \frac{1}{2i} \left[\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} \right]. \quad (\text{A.60})$$

A.5 Propagateur dans la base des états cohérents angulaires

L'amplitude de transition de l'état initial $|\Omega_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'état final $|\Omega_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution du temps

$$K(\Omega_f, \Omega_i; T) = \langle \Omega_f | \mathbf{U}(T, 0) | \Omega_i \rangle, \quad (\text{A.61})$$

où

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-i \int_0^T H dt),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N + 1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \rightarrow \infty$. On peut écrire l'opérateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}(T, 0) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}). \quad (\text{A.62})$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, \dots, t_N$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi_n d\cos(\theta_n) |\Omega_n\rangle \langle \Omega_n| = \mathbf{I}. \quad (\text{A.63})$$

Le propagateur prend la forme

$$K(\Omega_f, \Omega_i; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle \Omega_n | e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar} H(t_n)} | \Omega_{n-1} \rangle. \quad (\text{A.64})$$

Evaluant l'élément de matrice figurant dans (A.64) on premier ordre en ε

$$\begin{aligned} \langle \Omega_n | e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar} H} | \Omega_{n-1} \rangle &= \langle \Omega_n | 1 - i\varepsilon H | \Omega_{n-1} \rangle + O(\varepsilon^2) \\ &= \langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle \left[1 - i\varepsilon \frac{\langle \Omega_n | H | \Omega_{n-1} \rangle}{\langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle} \right] + O(\varepsilon^2) \\ &\simeq \langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle e^{-i\varepsilon \mathcal{H}(\Omega_{n-1}, \Omega_n)}, \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

avec

$$\mathcal{H}(\Omega_{n-1}, \Omega_n) = \frac{\langle \Omega_n | H | \Omega_{n-1} \rangle}{\langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle}. \quad (\text{A.66})$$

le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante

$$K(\Omega_f, \Omega_i; T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N+1} [\log \langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle - i\varepsilon \mathcal{H}(\Omega_{n-1}, \Omega_n)] \right\} \quad (\text{A.67})$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérents bosonique

$$K(Z_f, Z_i; T) = \int \mathcal{D}Z \exp \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int \left[\frac{i}{2} \left(Z^* \dot{Z} - Z \dot{Z}^* \right) - \mathcal{H}(Z, Z^*) \right] \right\}, \quad (\text{A.68})$$

avec

$$\mathcal{D}Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 Z_n}{\pi}. \quad (\text{A.69})$$

Bibliographie

- [1] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path integrals, (McGraw-Hill, New York 1965).
- [2] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum mechanics, Statistics and polymer Physics (Word Scientific, Singapor, 1990).
- [3] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, (Springer-Verlag Berlin 1998).
- [4] J. Schwinger, Quantum Theory of angular Momentum,edited by L.Biedenharn and H.von Dam (Academic Press, New York, 1965).
- [5] Coherent states, edited by J. R. Klauder and B. Skagerstam(Word Scientific, Singapore, 1985).
- [6] M. Aouachria and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C 25, 333 (2002). M. Aouachria, L. Chetouani, Chinese. J. Phys. 40, 496 (2002) T. Boudjedaa, A..Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann, J. Math.Phys.36,1602 (1995).
Kh. Nouicer, L. Chetouani, Phys. Lett. A 281, 218 (2001).
Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 51, 865 (2001).
- [7] M. Aouachria, L. Chetouani, Can. J. Phys. 87, 389 (2009).
- [8] M. Aouachria, J. Korean Phys. Soc. 58, 689 (2011).
- [9] M. Aouachria, Chin. J. Phys., in press (2011).
- [10] A. Alscher, H. Grabert, J. Phys. A. 32, 4907 (1999).

- [11] M. J. Tahmasebi and Y. Soboti Mod. phys.Let B 20, 1255 (1992).
- [12] M. Calvo and S. Codriansky, J. Math. Phys. 24, 553 (1983).
- [13] Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Phys. Scrip. 64, 19 (2001).
- [14] J. Klauder, Ann. Phys. (NY)11, 123 (1960).
- [15] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).
- [16] J. R. Klauder, Phys. Rev. D 19, 2349 (1979).
- [17] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986), A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. 26, 22 (1972).
- [18] F. Steiner. DESY Preprint, DESY 87-146, October (1987).
- [19] A. Inomata, H. Kuratsuji, C.C. Gerry Path Integrals Methodes and their Applications (Word Scientific, Singapore, 1992).

Résumé

Dans cette thèse, trois problèmes d'interaction de type spin-champ ont été considérés dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins de Feynman.

Il s'agit d'un atome à 2 niveaux en mouvement soumis

1-l'effet d'une champ magnétique dépendant du temps.

2- à l'effet champ magnétique dépendant du temps et à l'amortissement.

Finalement un cas pour le quelle le champ magnétique et statique été aussi considéré. Il s'agit d'une particule neutre de spin 1/2 soumis à un champ magnétique statique.

Le calcul est basé sur l'amplitude de transition qui a été exprimée d'abord sous la forme standard $\int \mathcal{D}(\text{path}) \exp \frac{i}{\hbar} S(\text{path})$, où $S = \int L dt$ est l'action décrivant les mouvements extérieurs (centre de masse) et intérieur de l'atome.

Pour le traitement, le vecteur $\vec{\sigma}$ relative au spin a été remplacé par un vecteur unitaire $\vec{n}$ dont l'orientation est définie par les angles (θ, φ) .

A l'aide du formalisme des intégrales de chemins, le propagateur relatif aux trois problèmes on été déterminé suivant la méthode des perturbations sous forme de série, qui dans ces cas, ont put être sommées exactement.

Les propriétés physiques telles que les fonctions d'ondes, les niveaux d'énergies ainsi que la probabilité de transition, ont été alors déterminés exactement pour tous les problèmes considérés. Les résultats trouvés sont aussi en bon accord avec ceux donnés par d'autres auteurs en résolvant l'équation de Schrödinger.

Mots clés: *Intégral de chemins, les états cohérents, les fonctions d'onde*

Absract

In this thesis, three problems of spin-field type interactions have been considered in the context of the formalism of the integrals of paths of Feynman.

It is about an tow-level atom in movement submitted

1-to the effect of a time dependent magnetic field

2- to the effect of a time dependent magnetic field and with damping.

Finally a static magnétic field case has also been considered. It is about an 1/2 spinning neutral particle in static magnetic field.

The calculation is based on the amplitude of transition that has first been expressed in a standard

where form $\int \mathcal{D}(\text{path}) \exp \frac{i}{\hbar} S(\text{path})$, where $S = \int L dt$ is the action describing the movement's exterior (centre of masse) and interior of the atom.

For the treatment, the relative vector to the spin $\vec{\sigma}$ has been replaced by a unit vector $\vec{n}$ whose orientation is defined by the angles (θ, φ) .

Following the technique of path integral, the propagators for three problems has been determined according to the perturbation méthodes in the form of a series, that in these cases can be added precisely.

The physical properties as the wave functions, energy levels as well as the probability transition have been determined for all considered problems. Our results are also in good agreement with those given by other authors by solving the equation Schrödinger.

Key words: *Path-integral, the coherents states, the wave functions*

ملخص

في هذه الرسالة ثلاث مسائل تخص التفاعلات ذات الصنف سبين-حقل تم علاجها في إطار نظرية التكامل على المسالك لـ Feynman.

يتعلق الأمر بذرة ذات مستويين من الطاقة في حالة حركة و الخاضعة لـ

1- فعل موجة كهرومغناطيسية كلاسيكية مستقطبة دائرا.

2- فعل موجة كهرومغناطيسية كلاسيكية مستقطبة دائرا و الاضمحلال.

و في الأخير حالة أخرى ستاتيكية صرفة و يتعلق الأمر بجسيم غير مشحون ذو سبين-نصف في تفاعل مع حقل مغناطيسي ستاتيكي.

الحساب يعتمد أساسا على سعة الانتقال التي قمنا بكتابة عبارتها أولا على الشكل النظامي

$$\int D(path) \exp(i/\hbar) S(path)$$
 حيث $S(path)$ الفعل الذي يصف الحركة الخارجية (مركز الثقل) و الداخلية للذرة .

لدراسة هذه الحالات قمنا بتعويض الشعاع $\vec{\sigma}$ الموافق لللف الذاتي بشعاع وحدة $\vec{n}$ اتجاهه معرف بالزوايا (θ, φ) .

باستعمال طريقة نظرية الاضطرابات في تقريب التكامل على المسالك قمنا بحساب المنتشرات على شكل سلاسل من الحدود هذه السلاسل في هذه الحالات تمكنا من جمعها بدقة.

الخصائص الفيزيائية مثل الدوال الموجية و مستويات الطاقة و كذلك احتمال الانتقال حسبت بدقة في جميع المسائل المعتمدة.

نتائجنا هي أيضا في اتفاق جيد مع تلك التي تعطى من قبل مؤلفين آخرين من خلال حل المعادلة Schrödinger

الكلمات المفتاحية: التكاملات على المسالك – الحالات المتلاحمة – الدوال الموجية .