



UNIVERSITE DE BATNA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



*Mémoire*

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN  
ELECTRONIQUE  
Option : Contrôle Industriel

*Thème*

---

*Platitude et planification de trajectoires  
en robotique*

---

*Etudié par :*

*SRAIRI Fawzi  
(Ingénieur d'état en électronique)*

**Jury :**

M. BOULEMDEN	(Prof)	Université de Batna	Président
L. SAIDI	(M.C)	Université de Batna	Rapporteur
T. BENCHOUIA	(M.C)	Université de Biskra	Examineur
K. CHAFAA	(M.C)	Université de Batna	Examineur
N. SLIMANE	(MC)	Université de Batna	Examineur

# SOMMAIRE

Introduction générale .....	1
-----------------------------	---

## CHAPITRE 1 : Problématique et état de l'art

I.1	Introduction .....	4
I.2	Modélisation de la cinématique des véhicules à roues .....	4
I.2.1	Hypothèses de modélisation .....	4
I.2.2	Roulement sans glissement et non holonomie .....	5
I.2.3	Modélisation des robots à roues .....	8
I.3	Planification de trajectoire .....	11
I.3.1	Chemins et trajectoires .....	11
I.3.2	Evitement réactif d'obstacles .....	12
I.4	Poursuite de trajectoire .....	15
I.4.1	Rappel sur la commande en boucle ouverte et fermée .....	15
I.4.2	Le problème de poursuite de trajectoire .....	16
I.5	Conclusion .....	19

## CHAPITRE 2 : Outils Pour la Commande des Systèmes Plats

II.1	Introduction .....	20
II.2	Généralités .....	20
II.2.1	Variété .....	20
II.2.2	Difféomorphisme .....	21
II.2.3	Champ de vecteurs .....	21
II.2.4	Courbe intégrale .....	21
II.2.5	Dérivée de Lie .....	21
II.2.6	Crochet de Lie .....	21
II.2.7	Distributions de champs de vecteurs .....	22

II.3	Brève introduction à la géométrie des jets infinis .....	23
II.3.1	Jets infinis, coordonnées.....	23
II.3.2	champs de vecteurs.....	23
II.3.3	Systèmes .....	25
II.4	Equivalence au sens de Lie-Bäcklund et bouclages dynamiques.....	26
II.4.1	Equivalence .....	26
II.4.2	Bouclages dynamiques .....	28
II.4.2.1	Transformations dynamiques endogènes .....	28
II.4.2.2	Bouclages dynamiques endogènes .....	28
II.5	Systèmes commandés, commandabilité .....	29
II.5.1	Commandabilité des systèmes linéaires .....	29
II.5.1.1	Critère de Kalman.....	29
II.5.1.2	Forme canonique de commandabilité.....	30
II.5.1.3	Détermination des trajectoires de référence par la méthode polynomiale.....	31
II.5.1.4	Suivi de trajectoire, placement de pôles .....	33
II.5.2	Commandabilité des systèmes non linéaires .....	34
II.5.2.1	Commandabilité au premier ordre.....	35
II.5.2.2	Commandabilité locale et crochets de Lie.....	35
II.6	Conclusion.....	36

<b>CHAPITRE 3 : Les Systèmes Plats</b>
--

III.1	Introduction .....	38
III.2	Définition de la platitude dans le cadre de l'algèbre différentielle.....	38
III.3	Platitude et linéarisation .....	41
III.3.1	Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique .....	41
III.3.2	Linéarisation par bouclage dynamique endogène .....	43
III.3.3	Quelques propriétés liées à la platitude .....	45
III.3.3.1	Systèmes linéarisables par bouclage statique .....	45
III.3.3.2	Système à une seule commande .....	45
III.3.3.3	Systèmes affines en commande.....	45
III.3.3.4	Algorithme d'extension dynamique .....	46

III.4	Génération des trajectoires pour les systèmes plats .....	46
III.4.1	Génération de trajectoires sans contraintes .....	48
III.5	Conclusion .....	48

#### **CHAPITRE 4 : Platitude des robots mobiles**

IV.1	Introduction .....	50
IV.2	Convergence des trajectoires .....	51
IV.3	Architecture de la commande .....	52
IV.4	Application .....	52
IV.4.1	Robots mobiles différentiel à deux roues .....	52
IV.4.2	Robot mobiles à trois roues .....	54
IV.4.3	Platitude des modèles dynamiques .....	56
IV.4.4	Planification d'une trajectoire désirée .....	59
IV.4.5	Conception des lois de commande: .....	60
IV.4.6	Résultats de simulations .....	63
IV.5	Conclusion .....	67

#### **CHAPITRE V : Platitude des manipulateurs mobiles**

V.1	Introduction .....	69
V.2	Recherche d'un modèle dynamique .....	69
V.2.1	Modèle dynamique de la Base mobile .....	71
V.2.2	Modèle dynamique du bras manipulateur .....	72
V.2.3	Modèle dynamique du manipulateur mobile .....	73
V.3	Structure d'équations de mouvement .....	74
V.4	Platitude différentielle .....	75
V.5	Application .....	77
V.5.1	Construction de difféomorphisme .....	78
V.5.2	Planification des trajectoires désirées pour le mouvement point à point .....	79
V.5.3	Conception du contrôleur .....	79
V.5.4	Résultats des simulations .....	81
V.6	Conclusion .....	84

<b>Conclusion générale</b> .....	<b>86</b>
----------------------------------	-----------

Références .....	88
------------------	----

Annexe .....	92
--------------	----

## **Introduction Générale**

De nombreuses techniques de commande non linéaires possèdent, au plan méthodologique, un niveau de maturité suffisant pour traiter efficacement des problèmes liés au contrôle/commande des systèmes industriels et relevant d'une modélisation non linéaire.

Nous constatons cependant, une certaine réticence à adopter des méthodes de commande non linéaire souvent jugées difficiles à comprendre, compliquées à mettre en œuvre et dont l'analyse systématique de performances se révèle complexe [1-2].

D'autre part, des techniques d'analyse et de commande des systèmes linéaires, dont le principe de fonctionnement est bien maîtrisé depuis plusieurs années, sont efficacement utilisées pour traiter des problèmes concrets de l'automatique. Ainsi, il est intéressant de prédire si les outils de commandes linéaires pourraient être utilisés pour traiter des problèmes non linéaires. Nous trouvons des méthodes locales basées sur des approximations du premier ordre mais dont la validité et les performances ne seront garanties que localement. D'autres méthodes sont basées sur une transformation globale du système initial vers un système linéaire. Ces transformations peuvent concerner l'état et/ou la commande, et peuvent être dynamiques ou statiques. Ces différentes transformations définissent des notions d'équivalence entre les systèmes. Plusieurs travaux de recherche visaient à définir des classes d'équivalence par bouclage afin d'établir des formes normales pour les systèmes non linéaires [3-6].

Une étude d'équivalence des systèmes est présentée dans ce mémoire. Elle a l'avantage d'établir d'une manière simple et efficace la transformation à partir du système initial en utilisant que ses variables. D'autre part, la génération de trajectoires pour cette classe de systèmes se fait d'une manière purement algébrique. Cette classe est celle des systèmes plats.

Cette nouvelle propriété introduit une notion d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire trivial. Cette équivalence porte le nom d'équivalence de Lie Bäcklund dans le cadre de la géométrie différentielle, et le nom d'équivalence par bouclage dynamique endogène dans le cadre de l'algèbre différentielle [4], [7-12].

La platitude trouve tout son intérêt dans le cadre de la génération et la poursuite de trajectoires. En effet, dans un système plat, l'état et la commande se déduisent directement à partir de la sortie plate. Ainsi, un choix judicieux de la forme temporelle de la sortie plate nous fournit sans intégration les trajectoires de référence.

En l'absence de contraintes sur l'état et de commande, les seules contraintes que doit vérifier la sortie plate sont les conditions initiales et finales.

Le calcul du bouclage garantissant la poursuite des trajectoires de référence se fait dans "l'espace plat" par un simple retour d'état stabilisant.

La commande est ainsi composée de deux parties : La première est la commande en boucle ouverte  $u_d(t) = \rho_1(y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y^{(r)}, y^{(r+1)})$  qui permet de suivre les trajectoires de référence  $u_d(t) = \rho_0(y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y^{(r)}, y^{(r+1)})$  en l'absence d'incertitudes de modèle et d'erreurs d'initialisation. Les seules contraintes à imposer à la trajectoire plate  $y_d(t)$  sont les conditions initiales et finales ainsi que les contraintes de saturation si elles existent. La deuxième partie contient le bouclage qui assure le suivi des trajectoires générées en présence des incertitudes du modèle d'initialisation ou de perturbations externes.

Pour illustrer l'apport de cette nouvelle théorie dans le cadre de la génération et la poursuite de trajectoires, nous allons l'appliquer au modèle d'un robot mobile.

Outre l'introduction et la conclusion générales, ce mémoire est organisé en cinq chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre donne un rapide tour d'horizon de la question de la planification et de la commande pour une classe de robots mobiles. Nous y proposons également une introduction à la robotique mobile, dont certains aspects méritent quelques précisions.

Dans le chapitre suivant, nous introduisons les outils de la commande des systèmes non linéaires plats.

Le troisième chapitre traite le cas très important des systèmes équivalents aux systèmes linéaires commandables par des bouclages dynamiques endogènes appelés systèmes plats.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de la commande par platitude et le test de platitude de deux classes de robots mobiles.

Le cinquième chapitre est basé sur l'étude de platitude d'une classe spéciale des robots qui sont les manipulateurs mobiles.

## **Chapitre 1**

### **Problématique et état de l'art**

#### **I.1 Introduction**

La recherche d'algorithmes de planification et de stratégies de commande pour des véhicules non holonomes constitue aujourd'hui l'un des principaux axes de recherche de la robotique moderne. Plusieurs raisons contribuent à cet engouement. La première est que les véhicules sur roues constituent de nos jours le moyen de transport individuel principal. Leur automatisation, précédemment limitée aux expérimentations en laboratoire, est maintenant envisagée pour des applications grand public (convois de véhicules sur autoroute, systèmes de transport urbain intelligent, ...etc.). Ces nouvelles applications, qui nécessitent de coordonner les mouvements de plusieurs véhicules, donnent lieu à de nouveaux problèmes d'automatique. Une autre raison plus technique tient au fait que les équations régissant le déplacement des véhicules non holonomes revêtent un intérêt théorique particulier dans le domaine de l'automatique non linéaire. L'objectif de ce chapitre est de présenter un certain nombre de caractéristiques spécifiques à la planification et à la commande de ces systèmes. Nous nous intéresserons dans un premier temps à la modélisation de tels systèmes. Puis nous rappellerons diverses méthodes de planification.

#### **I.2 Modélisation de la cinématique des véhicules à roues**

##### **I.2.1 Hypothèses de modélisation**

La problématique de la commande des robots mobiles étant trop vaste pour pouvoir être présentée de façon exhaustive. Dans ce qui suit nous introduisons un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui vont nous aider à cerner la question.

- les véhicules sont considérés comme rigides et évoluant sur un plan,
- les véhicules sont dotés de roues conventionnelles : le point de contact entre la roue et le sol est réduit à un point I et la roue est soumise à la contrainte de roulement sans glissement.

### I.2.2 Roulement sans glissement et non holonomie

Beaucoup de systèmes mécaniques sont sujets à des contraintes de position et/ou de vitesse, c'est-à-dire que plusieurs relations entre les positions et/ou les vitesses des différents points du système doivent être satisfaites pendant tout le mouvement. Ces contraintes sont dites holonomes s'il est possible de les intégrer et elles aboutissent à des relations algébriques liant les paramètres de configuration. Ces relations peuvent être éliminées par un changement de variables approprié et le système est dit holonome. Dans le cas de contraintes non intégrables, l'élimination n'est plus possible et le système est dit non holonome.

Dans le cas des véhicules sur roues, ces contraintes cinématiques résultent de l'hypothèse de roulement sans glissement. Considérons une roue verticale qui roule sans glisser sur un sol plan (voir figure I.1). Le roulement sans glissement se traduit par la vitesse nulle du point I de la roue en contact avec le sol.

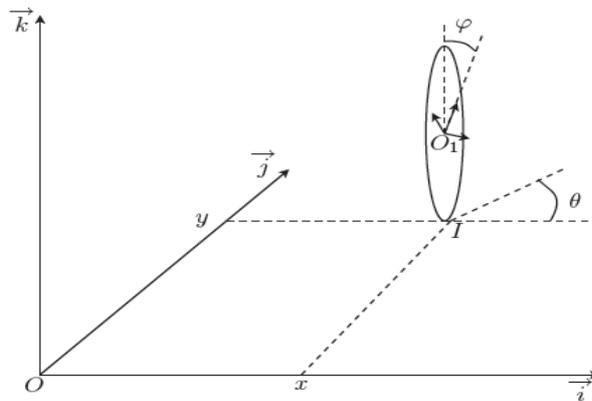


Figure I.1 Description d'une roue.

Avec les notations de la figure I.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 V(I / R_o) &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + (\dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})) \wedge (-r\vec{k}) \\
 &= (\dot{x} - r\dot{\phi}\cos\theta)\vec{i} + (\dot{y} - r\dot{\phi}\sin\theta)\vec{j} = 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $r$  est le rayon de la roue et  $(x, y)$  sont les coordonnées du point  $O_1$  dans le repère fixe  $R_0=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On en déduit deux contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} + r\dot{\phi} \sin \theta = 0 \\ \dot{y} - r\dot{\phi} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

qui peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = r\dot{\phi} \\ -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Il est intéressant de noter qu'en introduisant  $v = r\dot{\phi}$  la vitesse de roulement de la roue et  $w = \dot{\theta}$  sa vitesse de rotation autour de l'axe  $\vec{k}$ , on forme le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Ce modèle non linéaire, possède, du point de vue de la commande, deux propriétés fondamentales.

**Propriété 1.1 :**

Le modèle linéarisé du système non linéaire (1.4) autour d'un point d'équilibre n'est pas commandable.

**Démonstration :**

L'approximation linéaire du système (1.2) autour d'un état d'équilibre  $(x_0, y_0, \theta_0)$ , est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Le rang de la matrice de commandabilité étant inférieur à la dimension de l'état du système (1.2) ; le critère de commandabilité de Kalman n'est pas vérifié et le modèle linéarisé n'est donc pas commandable.

**Propriété 1.2 :**

Le système non linéaire (1.4) est commandable.

**Démonstration :**

Le système (1.4) peut se mettre sous la forme :

$$\dot{q} = g_1(q)v + g_2(q)w \quad (1.6)$$

avec  $q = [x, y, \theta]^T$ ,  $g_1(q) = [\cos \theta, \sin \theta, 0]^T$  et  $g_2(q) = [0, 0, 1]^T$ . Le résultat suivant donne alors une condition suffisante pour que le système (1.4) soit commandable (voir [13] par exemple).

**Théorème 1.3 :**

Considérons le système

$$\dot{q} = \sum_{j=1}^m q_j(q)u_j \quad (1.7)$$

où  $q \in R^n$ ,  $u_j (j=1, \dots, m)$  sont des variables de commande et  $u_j(q) (j=1, \dots, m)$  sont des champs de vecteurs différentiables sur  $R^n$ .

Soit l'algèbre d'accessibilité notée  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  définie comme la plus petite sous algèbre de champs de vecteurs analytiques définis sur  $R^n$  qui contient les champs de vecteurs engendrés par  $\{g_1, \dots, g_m\}$  :

$$\text{Lie}(g_1, \dots, g_m) = \{[h_k, [h_{k-1}, [\dots, [h_2, h_1]]]], h_j \in \{g_1, \dots, g_m\}, j = 1 \dots k, k = 0 \dots \infty\}$$

$$\text{où } [h_i, h_j] = \frac{\partial h_i}{\partial q} h_j - \frac{\partial h_j}{\partial q} h_i \text{ pour } q \in R^n,$$

La distribution d'accessibilité  $A_c$  est la distribution engendrée par  $\text{Lie}(g_1, \dots, g_m)$  :

$$A_c(q) = \text{vect} \{h(x), h \in \text{Lie}(g_1, \dots, g_m)\} \quad (1.8)$$

Le système (1.4) est commandable si :

$$\text{Dim } A_c(q) = n, \quad (q \in R^n) \quad (1.9)$$

La propriété 1.2 est un corollaire immédiat de ce théorème. En effet, il suffit de vérifier qu'en tout point  $q$ , les vecteurs  $g_1(q)$ ,  $g_2(q)$ , et  $[g_1, g_2](q)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### I.2.3 Modélisation des robots à roues

La modélisation précédente peut s'étendre à tous les véhicules sur roues. Etant donné un espace de dimension  $n$  correspondant à l'espace des configurations du système initial, et en éliminant l'ensemble des contraintes complètement intégrables du système, on réduit l'espace initial à une sous variété :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q) u_i \quad (1.10)$$

où  $q \in \mathcal{R}^n$ ,  $m < n$   $U_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont des variables de commande et  $g_i(q)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont des champs de vecteurs différentiables du système.  $(m-n)$  est le nombre de contraintes cinématiques non intégrables. Le système (1.5) est une généralisation du modèle cinématique (1.4) de la roue soumise aux contraintes de roulement sans glissement. Une des caractéristiques de ces systèmes non holonomes est que le modèle linéarisé n'est pas commandable alors que le système réel l'est [5].

Par la suite, nous allons nous focaliser sur deux types de robots mobiles non holonomes couvrant la majeure partie des robots mobiles existants.

- **Le robot de type uni cycle :**

On considère le robot mobile de type uni cycle schématisé sur la figure I.2. Ce robot est équipé de deux roues fixes motrices commandées indépendamment et de roues folles assurant sa stabilité.

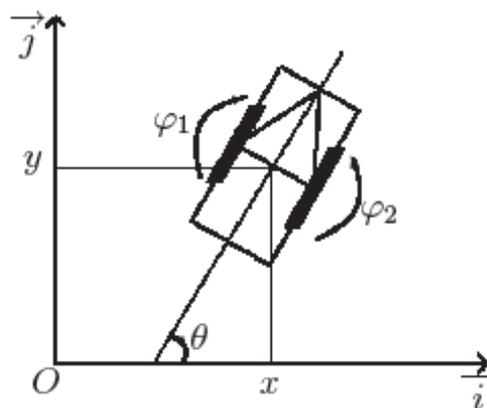


Figure 1.2 : Robot de type uni cycle.

Soient l'abscisse et l'ordonnée  $(x, y)$  du milieu de l'axe des deux roues motrices,  $\theta$  l'orientation du robot,  $r$  le rayon des roues et  $2R$  la distance entre les deux roues motrices. En reprenant les équations (I.1), on montre aisément que les contraintes de roulement sans glissement de chacune des roues commandées s'écrivent :

Pour la roue gauche, on a :

$$\dot{x} - R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\phi}_2 \cos \theta = 0 \quad (1.11)$$

$$\dot{y} - R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\phi}_2 \sin \theta = 0 \quad (1.12)$$

De manière similaire, on peut écrire pour la roue droite :

$$\dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\phi}_2 \cos \theta = 0 \quad (1.13)$$

$$\dot{y} + R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\phi}_2 \sin \theta = 0 \quad (1.14)$$

Ces quatre contraintes ne sont pas indépendantes puisque la différence des membres de gauche des égalités (1.6) et (1.8) est proportionnelle à celle associée à (1.7) et (1.9). On peut donc omettre, par exemple, la dernière contrainte. En outre, une contrainte est complètement intégrable. En effet, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - R\dot{\theta} = r\dot{\phi}_1 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - R\dot{\theta} = r\dot{\phi}_2 \end{cases} \quad (1.15)$$

Ainsi, on obtient :

$$2R\dot{\theta} = r(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \quad (1.16)$$

Ce qui implique :

$$2R\theta = r(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) + c \quad (1.17)$$

Par conséquent, il ne reste plus que deux contraintes indépendantes, (1.6)-(1.7), dont une écriture équivalente est :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.18)$$

où la vitesse linéaire du robot est :

$$v = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \quad (1.19)$$

Et sa vitesse angulaire est :

$$w = \frac{r}{2R}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \quad (1.20)$$

Le fait que ce système soit le même que le modèle (1.4) obtenu pour une roue unique, justifie le qualificatif uni cycle souvent employé dans la littérature.

- **Le robot de type voiture :**

Du point de vue du conducteur, un robot de type voiture possède deux commandes : l'accélération et la direction. Prenons comme point de référence  $(x, y)$  le milieu de l'axe des roues de l'essieu arrière où se trouve les deux roues motrices (voir figure I.3). Ici, on introduit la notion de roue directrice centrale. Cette roue, virtuelle dans le cas d'une voiture, correspond à la roue directrice d'un tricycle équivalent. Son introduction permet de simplifier les équations en faisant abstraction du mécanisme de couplage des roues directrices servant à respecter les contraintes de roulement sans glissement et en ne considérant qu'un seul angle de direction.

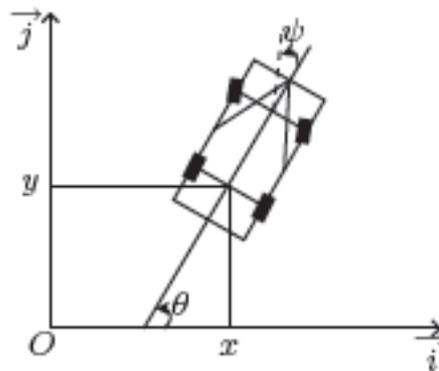


Figure 1.3 : Robot de type voiture.

Le modèle cinématique correspondant est :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = v \frac{\tan \psi}{L} \\ \dot{\psi} = \omega_{\psi} \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $L$  est la distance entre les axes des roues avant et arrière,  $\delta$  est l'angle de braquage formé par les roues avant et l'axe principal de la voiture,  $v$  est la vitesse linéaire et  $\omega_w$  est la vitesse angulaire selon l'axe vertical de la roue directrice par rapport au corps du véhicule.

Comme pour le robot de type uni cycle, on peut aisément vérifier que le système (1.13) est commandable puisqu'il vérifie les conditions du théorème 1.3.

## I.3 Planification de trajectoire

### I.3.1 Chemins et trajectoires

La plupart des travaux de planification de trajectoire sont basés sur le concept d'espace des configurations du robot introduit dans [14] au début des années 80. Une configuration désigne l'ensemble des paramètres caractérisant d'une manière unique le robot dans son environnement ou espace de travail. L'ensemble des configurations du robot est l'espace des configurations  $Q$ , qui a une structure de variété différentielle. On note  $n$  la dimension de  $Q$ .

Une trajectoire est une fonction continue de  $[t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}] \subset \mathbb{R}$  dans  $Q$  qui à toute valeur  $t \in [t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}]$  associe une configuration :

$$\begin{aligned} q : [t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}] &\rightarrow Q \\ t &\rightarrow q(t) \end{aligned}$$

Une trajectoire est dite admissible si elle est solution du système d'équations différentielles correspondant au modèle cinématique du robot, incluant les contraintes sur les commandes, pour des conditions initiales et finales données. Un chemin est l'image d'une trajectoire dans  $Q$ . Un chemin admissible est l'image d'une trajectoire admissible.

Une partie essentielle de l'autonomie des véhicules réside en la capacité à planifier des trajectoires admissibles assurant des déplacements sans collision dans un environnement particulier. Cet environnement contient généralement des zones dans lesquelles le robot ne peut pas se déplacer. Ces zones peuvent être détectées lorsque le robot se déplace. Un cas particulier d'évitement d'obstacles non stationnaires est l'évitement de collisions avec d'autres robots. Le robot doit ainsi avoir la capacité de calculer ou de mettre à jour sa trajectoire en temps réel tant que la mission n'est pas achevée. Ainsi, dans notre cas, le

problème de planification de trajectoire pour un robot mobile peut se définir de la manière suivante :

**Définition 1.1 :**

On appelle planification de trajectoire, le calcul d'une trajectoire admissible et sans collision pour un robot entre une configuration de départ et une configuration d'arrivée données.

### **I.3.2 Evitement réactif d'obstacles**

Dans cette partie, nous faisons un bref état de l'art des principales méthodes d'évitement réactif d'obstacles afin de mettre en lumière leurs avantages et leurs limites par rapport aux spécificités de notre problématique.

- **Méthodes analytiques**

Même en l'absence d'obstacles, commander un système non holonome pour l'amener d'une configuration de départ à une configuration d'arrivée n'est pas une chose aisée. En effet, il n'existe pas aujourd'hui d'algorithme général permettant de résoudre le problème pour n'importe quel système non holonome. Des méthodes analytiques sont connues seulement pour certaines classes de systèmes (voir [15] par exemple). Pour les autres, on ne dispose que de méthodes numériques.

En outre, la présence d'obstacles rend les méthodes analytiques inapplicables à des systèmes non holonomes [16].

- **Méthode par décomposition en cellules**

Une première méthode approchée permettant de déterminer un chemin sans collision est basée sur la décomposition cellulaire de l'environnement [17]. Elle consiste à partitionner l'espace des configurations libres du robot en un ensemble de régions connexes adjacentes. Différentes techniques de décomposition de l'espace existent ; on peut citer par exemple la partition de Voronoi [18] ou les graphes de visibilité [19]. La décomposition obtenue est alors capturée dans un graphe de connectivité dont les nœuds correspondent aux différentes régions et les arcs aux relations d'adjacence entre elles. Le problème consistant à trouver un chemin dans l'espace des configurations est alors remplacé par le problème de recherche d'un chemin

dans un graphe, problème qui peut être facilement résolu par des algorithmes classiques basés sur la programmation dynamique [20].

Cependant, ces méthodes se basent sur la structuration de l'espace des configurations et la modélisation a priori de sa connexité. En outre, les discrétisations en grille de l'espace de travail, proposées par ces méthodes, limitent l'espace des trajectoires admissibles.

- **Champs de potentiel**

Les méthodes de champs de potentiel pour la navigation en robotique, initialement proposées par [21] pour un bras manipulateur, consistent à assimiler le robot à une particule contrainte à se déplacer dans un champ de potentiel fictif obtenu par la composition d'un premier champ attractif (atteindre la configuration désirée) et d'un ensemble de champs répulsifs modélisant la présence d'obstacles dans l'espace du robot. A chaque position du robot, une force résultant de l'action conjuguée des obstacles et du but est calculée. Elle correspond à la direction à suivre.

De nombreuses adaptations de cette technique ont été proposées. On peut par exemple citer [22], qui calcule une direction de mouvement à partir d'informations proximétriques. Il faut cependant noter que ces méthodes purement réactives sont sujettes à des minima locaux. Par ailleurs, elles peuvent entraîner un mouvement oscillatoire du robot dans certaines situations (des passages étroits par exemple).

Ces problèmes peuvent être résolus de différentes façons. Il est par exemple possible de déclencher un comportement particulier lorsque l'on rencontre un tel minimum (déplacement aléatoire, suivi de murs . . .) [23], [24], [25]. Il est également possible d'imposer que la fonction représentant le champ de potentiel soit une fonction harmonique [26], [27], ce qui garantit qu'il n'y ait pas de minimum local, mais complexifie beaucoup son calcul, rendant son implémentation délicate.

- **Méthode de la fenêtre dynamique**

Cette technique proposée dans [28] travaille dans l'espace des commandes du robot. La taille du domaine de recherche des vitesses accessibles (c'est-à-dire n'entraînant pas de collisions) est réduite par la prise en compte explicite du modèle cinématique du système. Les commandes envoyées au robot sont le résultat de la maximisation sur ce domaine de

recherche d'une fonction coût liée à la configuration finale. L'utilisation de cette méthode est très intéressante pour un robot se déplaçant rapidement ou pour un robot ayant des capacités d'accélération et de décélération limitées. Elle permet alors de produire un déplacement du robot sûr et régulier. Son extension au cadre multi robots est cependant très délicate du fait de son manque de flexibilité.

- **Bande élastique**

Le concept de bande élastique a été proposé dans [29] pour les plates formes mobiles. Il a été étendu aux manipulateurs mobiles dans [30]. Le but est de déformer localement une trajectoire donnée pour prendre en compte d'éventuels obstacles en temps réel. Cette trajectoire initialement planifiée est représentée par une série de boules adjacentes dans l'espace des configurations. Le rayon d'une boule centrée en une configuration est la distance de cette configuration à l'obstacle le plus proche. Ainsi une trajectoire est sans collision lorsque les boules qui la composent se recouvrent. Pour des systèmes sans contrainte cinématique, cette technique considère la trajectoire comme une bande élastique se modifiant sous l'action de forces répulsives générées par les obstacles et de forces internes de contraction ou d'élasticité.

Cette technique a été étendue à un robot de type voiture par [21]. Le lissage de la courbe joignant les centres des boules est réalisé en utilisant une courbe de Bézier. Cependant, cette technique ne peut s'appliquer qu'au prix d'approximations sur la forme des trajectoires (combinaisons d'arcs de cercle et de lignes droites), ce qui rend impossible la navigation en environnement fortement contraint.

L'exposé de ces différentes méthodes, de leurs hypothèses et leurs limitations fait immédiatement apparaître leur inadéquation à une flottille de robots évoluant dans des environnements inconnus fortement contraints. Cela motive le développement d'une méthode d'évitement réactif d'obstacles pour des systèmes non holonomes.

## I.4 Poursuite de trajectoire

### I.4.1 Rappel sur la commande en boucle ouverte et fermée

Supposons que l'on ait généré la trajectoire désirée pour un robot mobile ; la question qui se pose est de savoir comment le système physique réalise les mouvements planifiés, via la commande des actionneurs dont il est équipé. Une première approche consisterait à appliquer directement les commandes obtenues durant l'étape de planification. En pratique, si le système présente très peu d'imperfections (erreurs de modélisation, erreurs de mesure, . . .) et s'il est très peu perturbé, la commande en boucle ouverte produira des résultats satisfaisants. Par contre, si ces imperfections et ces perturbations ne peuvent pas être négligées, même si elles sont petites, l'application de la commande en boucle ouverte produira un écart important entre le résultat désiré et la réponse obtenue. Ainsi, un léger glissement des roues sur le sol entraîne une dérive du véhicule pratiquement inévitable (voir figure 1.4).

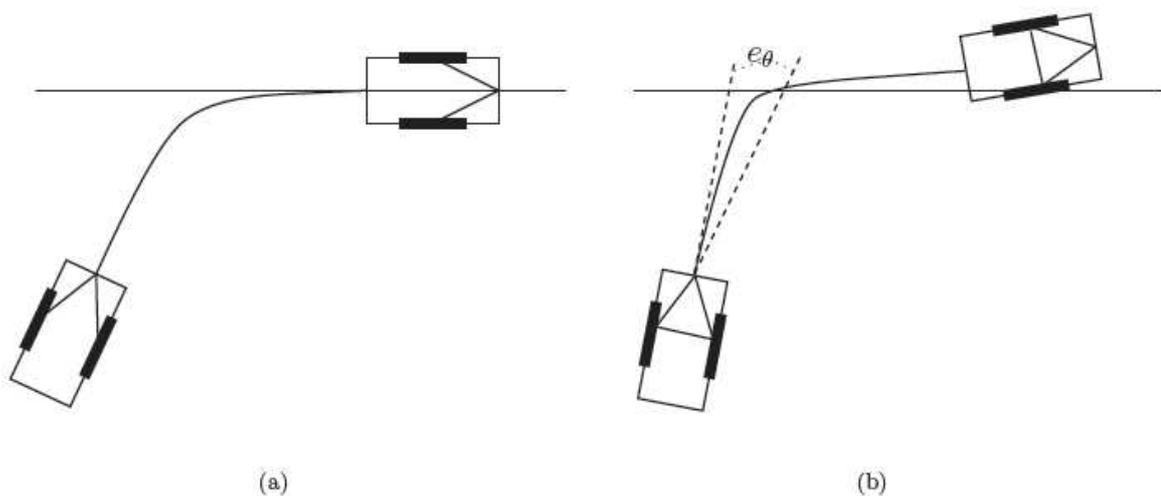


Figure 1.4 : (a) Trajectoire planifiée. (b) Trajectoire réellement effectuée par le robot.

Ce type de comportement peut être évité si la commande en boucle ouverte est corrigée en fonction de la position et de l'orientation du robot par rapport à la trajectoire planifiée. La commande résultante est appelée commande en boucle fermée. Elle permet de rendre le système moins sensible aux perturbations, aux simplifications et approximations dans la modélisation, aux variations des paramètres du modèle ainsi qu'aux incertitudes sur les variables physiques mesurées. Toutefois, si les perturbations sont trop fortes et si on ne les

prend pas en compte dans la conception de la commande, rien ne permet d'assurer que le système aura le comportement désiré.

D'une manière générale, l'objectif de la commande robuste est de déterminer les commandes appropriées de manière à :

- prendre explicitement en compte les incertitudes de modélisation du système ainsi que les perturbations afin de les compenser ou les atténuer,
- garantir le bon fonctionnement du système par rapport à un ensemble de critères donnés,
- réaliser une tâche désirée avec une précision donnée.

#### 1.4.2 Le problème de poursuite de trajectoire

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{q} = f(q, u) \quad (1.22)$$

où  $q \in Q \subset \mathfrak{R}^n$  représente l'état du système avec  $Q$  un ensemble ouvert de  $\mathfrak{R}^n$ ,  $u \in \mathfrak{R}^m$  est l'entrée de commande et  $f: Q \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  est une application suffisamment différentiable. Soit une trajectoire admissible  $q_{ref}$  du système (1.14), c'est à dire qu'il existe une commande de référence  $u_{ref}$  telle que :

$$\dot{q}_{ref} = f(q_{ref}, u_{ref}) \quad (1.23)$$

Le problème de poursuite de trajectoire consiste à déterminer une commande permettant de stabiliser asymptotiquement l'erreur de suivi  $e_q = q - q_{ref}$ . Par exemple, pour un robot de type uni cycle, le problème est de stabiliser à l'origine l'erreur

$$e_q = (x - x_{ref}, y - y_{ref}, \theta - \theta_{ref}) \quad (1.24)$$

comme l'illustre la figure 1.5.

- **Condition nécessaire de Brockett**

Un aspect essentiel du problème de stabilisation des systèmes non holonomes est lié à l'impossibilité d'obtenir une stabilisation asymptotique par le biais de retours d'état statiques, continus et stationnaires. Ceci découle d'un résultat important montré dans [31].

**Théorème 1.4 [16]**

Considérons le système non linéaire (1.14) où  $f$  est différentiable et  $f(0, 0) = 0$ . Une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état  $u(q)$  continu qui rende l'origine du système bouclé localement asymptotiquement stable est que l'image par  $f$  de tout voisinage de l'origine de  $R^{n \times m}$  soit un voisinage de 0 dans  $R^n$ . Cette condition implique que de nombreux systèmes non linéaires commandables ne sont pas asymptotiquement stabilisables par retour d'état continu. C'est en particulier le cas de tous les robots mobiles non holonomes. Ceci a conduit à développer d'autres stratégies de commande afin de résoudre ce problème de stabilisation asymptotique. Trois types de commandes ont principalement été considérés [32] :

- les bouclages dynamiques et, en particulier, quasi-statiques [33],
- les retours d'état non stationnaires continus, qui sont des retours d'état qui dépendent de la variable temporelle (c'est-à-dire  $u(q, t)$  au lieu de  $u(q)$  pour un retour d'état classique),
- les retours d'état discontinus, qui sont des retours d'état présentant au moins une discontinuité.

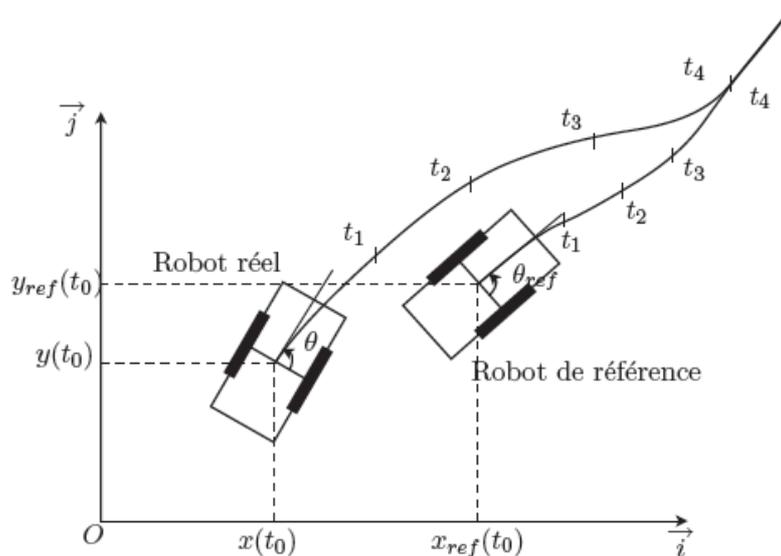


Fig. 1.5 – Suivi d'un véhicule de référence.

- **Retours d'état non stationnaires continus**

L'utilisation de retours d'état non stationnaires continus pour la stabilisation asymptotique d'un robot mobile trouve son origine dans les travaux de Samson au début des années 90 [34]. Un des premiers résultats d'existence de telles commandes stabilisantes est donné dans [35]. Par la suite, diverses approches basées sur la méthode directe de Lyapunov [36], [37], [38], [39], sur les commandes sinusoïdales et polynomiales [40], sur les techniques de backstepping [41] conduisent à la construction de retours d'état continus non stationnaires permettant de stabiliser asymptotiquement un robot mobile. Bien que connues pour avoir d'assez bonnes propriétés de robustesse, ces commandes présentent généralement des inconvénients d'ordre pratique concernant les taux de convergence, le réglage délicat des paramètres de commande ou les trajectoires générées. Le problème de la génération d'une loi de commande stabilisante prenant en compte les saturations des entrées est également traité dans [42]. La convergence de l'état du système vers l'origine est rapide. Cependant, cette commande ne présente pas de bonnes propriétés en termes de robustesse vis-à-vis des perturbations.

- **Retours d'état discontinus**

Quant à l'utilisation de commandes discontinues pour la robotique mobile, elle trouve son origine dans les travaux de Bloch à la fin des années 80 [43-44]. De nombreux travaux proposent des commandes continues par morceaux [45] ou des commandes discontinues [44], mais ne traitent pas explicitement le problème de robustesse. Des commandes permettant d'obtenir une convergence exponentielle sont proposées dans [46]. Cependant, elles sont sensibles aux erreurs initiales et aux perturbations. Inspirées par ces résultats, des stratégies robustes basées sur une transformation du système en coordonnées polaires [47] assurent une convergence exponentielle du système mais présentent une singularité à l'origine. D'autres types de commande notamment par modes glissants [26] permettent d'obtenir de bons résultats mais font apparaître le phénomène de réticence, qui conduit à l'usure rapide des actionneurs.

## I.5 Conclusion

Ce chapitre propose une vision d'ensemble des caractéristiques et techniques de planification et de poursuite de trajectoire associées aux systèmes non holonomes.

Le domaine est très riche et de multiples algorithmes sont proposés dans la littérature, parfois bien formalisés et éprouvés, mais parfois aussi à l'état de théorie ou au contraire construits sur des bases empiriques.

D'une part, il convient de noter que les différentes méthodes de planification, exposées pour un seul robot, font généralement apparaître leur inadéquation à une famille de robots évoluant dans des environnements inconnus fortement contraints. Cela motive le développement d'une méthode d'évitement réactif d'obstacles, pour un système non holonome, suffisamment flexible pour pouvoir être adaptée.

La simplicité apparente dans les équations régissant le mouvement des robots mobiles sur roues masque la complexité des problèmes de commande sous-jacents. En particulier, il semble qu'aucune solution au problème de poursuite asymptotique de trajectoires admissibles ne soit complètement satisfaisante au niveau de la gestion du compromis entre robustesse et performance. C'est pourquoi il est intéressant de développer une méthode générique permettant d'atteindre l'objectif de poursuite de trajectoire de manière robuste et efficace.

## Chapitre 2

### Outils pour la commande des systèmes plats

#### II.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils nécessaires pour l'analyse des systèmes non linéaires plats. Nous introduisons d'abord les concepts les plus courants de la géométrie différentielle, notamment les difféomorphismes, les variétés, les champs de vecteurs, les dérivées de Lie, les distributions, champs de vecteurs en dimension infinie et la notion de systèmes, dont le formalisme est nécessaire pour la définition de la platitude. Pour plus de détails se référer à [9], [48-49]. Nous traitons, ensuite, une nouvelle relation d'équivalence appelée équivalence par bouclage dynamique endogène dans le cadre de l'algèbre différentielle, et équivalence de Lie Bäcklund dans le cadre de la géométrie différentielle. Cette équivalence permet le passage d'un système non linéaire à un système linéaire trivial [4], [9-10], [13], [48-49], [50]. Nous terminons par des rappels liés à cette notion d'équivalence comme la commandabilité linéaire et non linéaire [13], [48].

#### II.2. Généralités

##### II.2.1. Variété

**Définition 1 :** Etant donnée une application différentiable  $\phi$  de  $R^n$  dans  $R^{n-p}$  ( $0 \leq p \leq n$ ), on suppose qu'il existe au moins un  $x_0$  solution de l'équation implicite  $\phi(x) = 0$  et que l'application linéaire tangente  $D\phi(x)$  est de rang plein ( $n - p$ ) dans un voisinage  $V$  de  $x_0$ . On appelle variété différentiable de dimension  $p$  l'ensemble  $X$  défini par l'équation implicite  $\phi(x) = 0$ . Autrement dit :

$$X = \{x \in V, \phi(x) = 0\} \quad (2.1)$$

Si en outre,  $F$  est  $k$  fois différentiable, on dit que  $X$  est une variété de classe  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, \infty$

### II.2.2. Difféomorphisme

**Définition 2 :** Etant donné une application  $\rho$  d'un ouvert  $u \subset \mathbb{R}^n$  dans un ouvert  $v \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C_k$ ,  $k \geq 1$ . On dit que  $\rho$  est un difféomorphisme local de classe  $C_k$  dans un voisinage  $U(x_0)$  d'un point  $x_0$  de  $U$  si  $\rho$  est inversible de  $U(x_0)$  dans un voisinage  $V(\rho(x_0))$  du point  $\rho(x_0)$  de  $V$  et si  $\rho^{-1}$  est aussi de classe  $C_k$ . [48-49]

### II.2.3. Champ de vecteurs

**Définition 3 :** Un champ de vecteurs  $f$  (de classe  $C_k$ , analytique) sur  $X$  est une application (de classe  $C_k$ , analytique) qui à tout  $x \in X$  fait correspondre le vecteur  $f(x) \in TxX$ . ( $TxX$  est l'espace tangent à  $X$  au point  $x \in X$ ).

### II.2.4. Courbe intégrale

**Définition 4 :** Une courbe intégrale du champ de vecteurs  $f$  est une solution locale de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ . [48-49]

### II.2.5. Dérivée de Lie

**Définition 5 :** Soit  $h$  une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle dérivée de Lie de  $h$  dans la direction  $f$ , notée  $L_f h$ , la dérivée de  $h$  le long de la courbe intégrale de  $f$  en  $t=0$ . Autrement dit :

$$L_f h(x) = \frac{d}{dt} h(X_t(x))_{t=0} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \quad (2.2)$$

Par cette formule, un champ de vecteurs  $f$  quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre. [48-49]

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

### II.2.6. Crochet de Lie

**Définition 6 :** Le crochet des champs de vecteurs  $f$  et  $g$  est le champ de vecteurs défini par :

$$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f \quad (2.4)$$

En coordonnées locales :

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Le crochet de Lie jouit en particulier des propriétés suivantes :

- Antisymétrie :  $[f, g] = -[g, f]$  ;
- $[\alpha f, \beta g] = \alpha\beta[f, g] + (\alpha L_f \beta)g - (\beta L_g \alpha)f$  , pour toute paire  $(\alpha, \beta)$  de fonctions  $C^\infty$ .
- Identité de Jacobi:  $[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$

Il vérifie aussi la propriété suivante :

$$[\rho^* f_1, \rho^* f_2] = \rho^* [f_1, f_2]$$

$\rho$  est un difféomorphisme de la variété  $X$  dans la variété  $Y$ .

$f_1, f_2$  sont des champs de vecteurs arbitraires de  $X$ .

$\rho^* f_1, \rho^* f_2$  sont leurs images dans  $Y$ . Pour plus de détails voir [48].

### II.2.7. Distributions de champs de vecteurs

**Définition 7 :** Une distribution de champs de vecteurs  $D$  est une application qui à tout point  $x \in X$  fait correspondre le sous-espace vectoriel  $D(x)$  de  $T_x X$ . [48-49]

Soit  $V$  un ouvert de  $X$ . La distribution  $D$  est régulière et de rang constant  $k$  dans  $V$  s'il existe des champs de vecteurs réguliers  $g_1, \dots, g_k$  tels que :

- $\text{rang}(g_1(x), \dots, g_k(x)) = k$  pour tout  $x \in V$ .
- $D(x) = \text{e.v.} \{g_1(x), \dots, g_k(x)\} = K$  pour tout  $x \in V$ .

**Définition 8 :** La distribution  $D$  est dite involutive si et seulement si pour tout couple de champs de vecteurs  $f$  et  $g$  de  $D$  on a :  $[f, g] \in D$ . Une distribution involutive est donc caractérisée par :  $[D, D] \subset D$

Si  $D$  n'est pas involutive, on peut définir sa clôture involutive. [48-49]

**Définition 9 :** La clôture involutive  $\bar{D}$  est une distribution qui est la plus petite distribution involutive contenant  $D$ . [48-49]

## II.3. Brève introduction à la géométrie des jets infinis

### II.3.1. Jets infinis, coordonnées

Considérons le système [48-49] :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.6)$$

où  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur un ouvert  $X \times U \subset \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ .

$f$  est, en fait, une suite infinie de champs de vecteurs paramétrés par  $u$ . Plus précisément, pour définir une courbe intégrale (solution de l'équation différentielle (2.6)), on ne doit pas seulement spécifier la condition initiale  $x_0$  à l'instant  $t=0$ , mais aussi la fonction infiniment dérivable (on dira lisse dans la suite)  $t \rightarrow u(t)$  sur un intervalle de temps donné. Cette dépendance de dimension infinie par rapport à l'entrée  $u$  est relativement mal commode si l'on veut utiliser des bouclages dynamiques par exemple. Donc, il apparaît nécessaire de développer un formalisme légèrement différent où les courbes intégrales de (2.6) sont décrites de façons plus compactes comme des fonctions lisses  $t \rightarrow (x(t), u(t))$ , paramétrées seulement par des conditions initiales. En d'autres termes, on est amené à considérer des conditions initiales ayant la forme d'une suite infinie  $\xi_0 = (x_0, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(\mu)}, \dots)$ , où les dérivées de différent ordre de  $u$  à l'instant  $t=0$  sont notées  $u_0^{(\mu)}$ , avec  $\mu \geq 0$ . Ceci nous conduit à compléter les coordonnées originales  $(x, u)$  par la suite infinie de coordonnées  $\xi_0 = (x_0, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(\mu)}, \dots) \in XxUx \mathfrak{R}_m^\infty$ , où l'on note  $\mathfrak{R}_m^\infty = \mathfrak{R}_m \times \mathfrak{R}_m \times \dots$  le produit d'un nombre dénombrable de copies de  $\mathfrak{R}_m$ .

### II.3.2. Champs de vecteurs

Dans ce contexte, une fonction lisse est une fonction qui dépend de façon infiniment dérivable d'un nombre fini (mais arbitraire) de coordonnées. Le champ de vecteurs  $f$  admet dans ces coordonnées un prolongement naturel [48-49].

$$F(\zeta) = (f(x, u), \dot{u}, \ddot{u}) \quad (2.7)$$

et l'équation (2.6) devient :

$$\dot{\zeta} = F(\zeta) \quad (2.8)$$

avec  $V(0)=V_0$ . Ainsi, (2.8) définit un champ de vecteurs au sens habituel sur une variété de dimension infinie  $M = X \times U \times \mathfrak{R}_m^\infty$  [48-49].

On arrive à la même conclusion par un autre raisonnement en calculant la formule de dérivée de Lie comme suit : Prenons une fonction lisse  $h$ , dépendant de façon infiniment dérivable de  $x, u$  et un nombre fini  $r$  de dérivées de  $u$ . On adopte les notations usuelles

$$\frac{\partial h}{\partial x} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (2.9)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial u^{(k)}} u^{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial u_i^{(k)}} u_i^{(k+1)} \quad (2.10)$$

La dérivée de  $h$  le long d'une trajectoire de (2.6) est donnée par

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial u} \dot{u} + \dots + \frac{\partial h}{\partial u^{(r)}} u^{(r+1)} \quad (2.11)$$

et ce en tout point  $(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(r)}(t), \dots)$ . Notons que, bien que  $h$  ne dépende que des dérivées de  $u$  jusqu'à l'ordre  $r$ , la coordonnée  $u^{(r+1)}$  apparaît, ce qui constitue une raison supplémentaire pour considérer des coordonnées formées par la suite infinie des dérivées de  $u$ .

Cette formule s'interprète comme la dérivée de Lie de  $h$  par rapport au champ de vecteurs de dimension infinie.

$$(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots) \rightarrow F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots) \quad (2.12)$$

ou encore avec des notations plus simples à partir de la formule de dérivée de Lie précédente (2.11) :

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots) = f(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(j)}} \quad (2.13)$$

Notons que chaque composante de  $F$  est une fonction lisse, (c'est-à-dire, dépend de façon infiniment dérivable d'un nombre fini de coordonnées).

### II.3.3. Systèmes

Ainsi, au système (2.6) où  $f$  est une famille infinie de champs de vecteurs paramétrée par  $u$ , on préfère substituer la définition suivante de système, constitué d'un champ de vecteurs sur une variété de dimension infinie : [48-49]

**Définition 10** : Un système est la donnée d'une paire  $(M, F)$  où  $F$  un champ de vecteurs lisses sur  $M = X \times U \times \mathfrak{R}_m^\infty$

**Remarque** : Une différence importante liée à la représentation en dimension infinie de (2.6) par rapport à la représentation usuelle est que la notion de dimension d'état est perdue. En fait, dans notre formalisme les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x, u), (x, u) \in X \times U \subset \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \quad (2.14)$$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.15)$$

$$\dot{u} = v \quad (2.16)$$

ont la même description  $(M, F)$ , avec  $M = X \times U \times \mathfrak{R}_m^\infty$  et

$$f(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots) = (f(x, u), u^{(1)}, u^{(2)}, \dots) \quad (2.17)$$

En effet, l'application  $t \rightarrow (x(t), u(t))$  est une trajectoire de (2.14) si, et seulement si, l'application  $t \rightarrow (x(t), u(t), \dot{u}(t))$  est une trajectoire de (2.15). Une telle situation n'est pas surprenante puisque la dimension d'état n'est pas préservée par bouclage dynamique.

**Exemple** :

Le système trivial  $(\mathfrak{R}_m^\infty, T_m)$ , de coordonnées  $y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)})$ ,  $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, \dots, y_m^{(m)})$  et dont le champ de vecteurs, dit champ de vecteurs trivial noté  $T_m$  est donné par :

$$T_m(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) \quad (2.18)$$

ou, en termes d'opérateur différentiel, l'équation :

$$T_m(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \geq 0} y^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial y_i^{(j)}} \quad (2.19)$$

représente n'importe quel système constitué de  $m$  chaînes d'intégrateurs de longueurs arbitraires, et en particulier le transfert direct  $y_i = u_i, i = 1, \dots, m$ .

## II.4. Equivalence au sens de Lie-Bäcklund et bouclages dynamiques

### II.4.1. Equivalence

Nous nous intéressons maintenant à définir une relation d'équivalence, dite de Lie Bäcklund, permettant de formaliser le fait que deux systèmes sont "équivalents" s'il existe une transformation inversible qui échange leurs trajectoires. Elle s'appuie sur la notion d'isomorphisme de Lie-Bäcklund utilisée en physique mathématique. Comme nous le verrons dans la suite, cette équivalence est beaucoup moins restrictive que la notion classique, par difféomorphisme et bouclage statique d'état, et s'interprète en termes de bouclages dynamiques [48-49]

Considérons deux systèmes  $(M, F)$  et  $(N, G)$  et une application lisse  $\phi: M \rightarrow N$ . Par définition, chaque composante d'une telle application ne dépend que d'un nombre fini de variables. Soit  $p \in M$  et notons  $q = \phi(p)$ .

Si  $t \rightarrow \zeta(t)$  est une trajectoire de  $(M, F)$  dans un voisinage de  $p$ , c'est-à-dire,

$$\forall t \xi(t) = F(\zeta(t)). \quad (2.20)$$

Alors l'application composée  $t \rightarrow \zeta(t) = \phi(\xi(t))$  reste dans un voisinage de  $q$  et satisfait la règle des dérivées composées :

$$\xi(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta(t), \xi(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta(t), F(\zeta(t))) \quad (2.21)$$

Insistons encore une fois sur le fait que ces expressions ne contiennent que des sommes finies, même si les vecteurs et les matrices ont des tailles infinies.

Alors, si les champs de vecteurs  $F$  et  $G$  sont  $\phi$ -reliés en  $(p, q)$ , c'est-à-dire :

$$\forall \zeta, G(\xi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta, F(\zeta)) \quad (2.22)$$

Alors pour tout  $\zeta$  dans un voisinage de  $p$ , on a :

$$\xi(t) = G(\Phi(\zeta(t))) = G(\xi(t)) \quad (2.23)$$

Ce qui signifie que  $t \rightarrow \zeta(t) = \phi(\zeta(t))$  est une trajectoire de  $(N, G)$ . Si de plus  $\phi$  admet une application inverse régulière  $\psi$  alors  $F$  et  $G$  sont également  $\psi$  reliés en  $(q, p)$ , et il existe une correspondance locale entre les trajectoires des deux systèmes.

Une telle application  $\psi$  qui échange  $F$  et  $G$  est appelée **transformation endogène**.

Nous sommes donc conduits à introduire la définition suivante [48-49] :

**Définition 10 :** Soit  $\Phi$  une application lisse bijective de  $(M, F)$  dans  $(N, G)$  au voisinage du couple de points  $(p, q)$  avec  $p \in M$  et  $q = \Phi(p) \in N$  dont l'inverse aussi est supposée lisse, et est notée  $\Psi$ . On dit que  $\Phi$  est un isomorphisme de Lie-Bäcklund en  $(p, q)$  si, et seulement si, les champs de vecteurs  $F$  et  $G$  sont  $\Phi$ -reliés en  $(p, q)$  et les champs  $G$  et  $F$  sont aussi  $\Psi$ -reliés en  $(q, p)$ .

Les isomorphismes de Lie-Bäcklund conduisent naturellement au concept d'équivalence de Lie-Bäcklund suivant [48-49] :

**Définition 11 :** Deux systèmes  $(M, F)$  et  $(N, G)$ , sont dits Lie-Bäcklund équivalents en  $(p, q) \in M \times N$  si et seulement si, il existe une application lisse  $\phi$  d'un voisinage de  $p$  sur un voisinage de  $q = \phi(p)$  qui soit un isomorphisme de Lie-Bäcklund en  $(p, q)$ .  $(M, F)$  et  $(N, G)$  sont Lie-Bäcklund équivalents s'il existe une application lisse  $\phi$  d'un ouvert dense  $D \subset M$  dans  $N$  qui soit un isomorphisme de Lie-Bäcklund de  $(M, F)$  dans  $(N, G)$  au voisinage de toutes paires de points  $(p, \phi(p))$ , avec  $p$  dans  $D$ .

**Théorème 1 :** Si les deux systèmes  $(M, F)$  et  $(N, G)$  sont Lie-Bäcklund équivalents, ils admettent le même nombre d'entrées indépendantes.

**Théorème 2 :** Deux systèmes linéaires commandables sont Lie-Bäcklund équivalents si, et seulement si, ils ont le même nombre d'entrées indépendantes.

## II.4.2. Bouclages dynamiques

### II.4.2.1. Transformations dynamiques endogènes

**Définition 12 :** La notion d'équivalence endogène est généralement définie en utilisant des transformations dynamiques endogènes. Pour ces transformations particulières, l'état  $\kappa$  et la commande  $u$  du bouclage dynamique s'expriment en fonction de l'état et d'un nombre fini de dérivées de la commande  $u$  [48-49].

$$\begin{aligned} k &= C(x, u, \dots, u^{(q)}) \\ v &= D(x, u, \dots, u^{(q)}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

### II.4.2.2. Bouclages dynamiques endogènes

On considère le système  $(M, F)$  dont la représentation en dimension finie est [48-49] :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.25)$$

Un bouclage dynamique est la donnée d'une équation différentielle de la forme :

$$\dot{z} = \beta(x, z, v) \quad (2.26)$$

et un bouclage :

$$u = \alpha(x, z, v) \quad (2.27)$$

Le système bouclé est alors donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= \beta(x, z, v) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Un tel système peut avoir la propriété de non accessibilité, c'est-à-dire ne pas pouvoir revenir du système bouclé au système d'origine par un autre bouclage dynamique [48-49].

**Définition 13 :** Soit le système  $(M, F)$ . On appelle bouclage dynamique endogène un bouclage dynamique de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \beta(x, z, v) \\ u &= \alpha(x, z, v) \end{aligned} \quad (2.29)$$

tel que le système bouclé soit Lie-Bäcklund (L-B) équivalent au système  $(M, F)$ .

**Théorème 3 :** Supposons que les deux systèmes  $(M, F)$  et  $(N, G)$  définis par  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$  sont L-B équivalents, alors il existe un bouclage dynamique endogène :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \beta(x, z, v) \\ u &= \alpha(x, z, v) \end{aligned} \quad (2.30)$$

tel que le système bouclé :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= \beta(x, z, v) \end{aligned} \quad (2.31)$$

soit difféomorphe au système prolongé :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(y, w) \\ w^{(r+1)} &= v \end{aligned} \quad (2.32)$$

pour un entier  $r$  assez grand. [48-49]

## II.5. Systèmes commandés, commandabilité

### II.5.1. Commandabilité des systèmes linéaires

La commandabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes et permettent éventuellement de les classer par leurs propriétés géométriques et algébriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé mais ne permet pas, cependant, de construire des lois de commande de façon effective, sauf éventuellement dans le cas des systèmes linéaires. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires [48-49].

#### II.5.1.1. Critère de Kalman

Soit le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.33)$$

où  $x \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathcal{R}^m$  est le vecteur des entrées. La matrice  $A$  est de taille  $n \times n$  et  $B$  de taille  $n \times m$ . [48-49]

**Définition 14 :** On dit que la paire  $(A, B)$  ou encore le système (2.33) est commandable si, étant donné un instant  $T > 0$  et deux points quelconques  $x_0$  et  $x_T$  de  $\mathcal{R}^n$ , il existe une fonction du temps  $t \rightarrow \bar{u}(t)$  de  $[0, T]$  dans  $\mathcal{R}^m$  continue par morceaux, telle que la solution  $\bar{x}(t)$  de (2.33) engendrée par  $\bar{u}$  et ayant pour condition initiale  $\bar{x}(0) = x_0$  vérifie  $\bar{x}(T) = x_T$ .

Autrement dit :

$$e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-t)} B \bar{u}(t) dt = x_T \quad (2.34)$$

Cette propriété ne dépend en fait que des matrices  $A$  et  $B$  comme le montre le théorème suivant dû au critère de Kalman.

**Théorème 4 :** Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (2.33) soit commandable est que le rang de la matrice :

$$\rho = (B : AB : \dots : A^{n-1}B) \quad (2.35)$$

soit égal à  $n$ .

La matrice  $\rho$  est appelée matrice de commandabilité de Kalman. Elle est de taille  $n \times nm$ .

### II.5.1.2. Forme canonique de commandabilité

La notion de la forme canonique fait référence à une classification qui elle-même fait référence à une relation d'équivalence : On commence par décrire les systèmes qui sont équivalents entre eux, puis on détermine les représentants (donnés par leurs forme canonique) de toutes les classes disjointes.

**Définition 15:** On dit que deux systèmes  $\dot{x} = Ax + Bu$  et  $\dot{Z} = Fz + Gv$  sont équivalents par changement de base et bouclage s'il existe deux matrices  $M$  et  $L$  inversibles et une matrice  $K$ , tel que si  $x$  et  $u$  satisfont :  $\dot{x} = Ax + Bu$ , et si  $z = Mx$  et  $v = Kx + Lu$ , alors  $z$  et  $v$  satisfont  $\dot{Z} = Fz + Gv$ , et inversement.

$M$  est la matrice de changement de base, inversible de taille  $n \times n$ , et  $K$  et  $L$  sont les matrices de bouclage, avec  $L$  de taille  $m \times m$  inversible et  $K$  de taille  $m \times n$ .

De l'inversibilité des deux matrices  $M$  et  $L$ , on déduit immédiatement que les deux systèmes équivalents ont mêmes dimensions d'état et d'entrées. Pour exprimer que cette

équivalence ne dépend que des matrices des deux systèmes, on dit aussi que les paires (A,B) et (F,G) sont équivalentes [48].

**Théorème 5 (Brunovsky) :** *Tout système linéaire commandable à  $n$  états et  $m$  entrées correspondant à une paire (A, B) est équivalent à sa forme canonique  $F = \text{diag}\{F_1, \dots, F_m\}, G = \text{diag}\{g_1, \dots, g_m\}$  où chacune des paires  $F_i, g_i$  est de la forme :*

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} ; \quad g_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$i=1, \dots, m$

avec  $F_i$  de taille  $n_i \times n_i$  et  $g_i$  de taille  $n_i \times 1$  ; les entiers  $n_1, \dots, n_m$  étant les indices de commandabilité de (A, B), et vérifiant  $1 \leq n_i \leq n$  et  $\sum_{i=1}^m n_i = n$

Les conséquences de ce résultat sont très importantes puisqu'à l'aide de la forme canonique on peut facilement planifier les trajectoires et concevoir des bouclages. Pour simplifier nous donnons un exemple pour le cas mono-entrée.

### II.5.1.3. Détermination des trajectoires de référence par la méthode polynomiale

Soit le système commandable  $\dot{x} = Ax + bu$  à  $n$  états et 1 entrée. Ce système étant équivalent à  $\dot{z} = Fz + gv$  avec  $z = Mx$ ,  $v = Kx + Lu$ . Si l'on veut aller d'un point  $x(0) = x_0$  à un point  $x(T) = x_T$ , partant à l'instant 0 avec la commande  $u(0) = u_0$  et  $z(0) = Mx_0$  arrivant à l'instant  $T$  avec la commande  $x(T) = x_T$ , il suffit de traduire ces conditions sur  $z$  et  $v$  :

$$z(0) = Mx_0, \quad v(0) = Kx_0 + Lu_0, \quad v(T) = Kx_T + Lu_T \quad (2.37)$$

puis de remarquer, qu'à partir de (2.36), que la première composante de  $z$ , que l'on rebaptise  $y$  pour plus de clarté, vérifie [14]:

$$\begin{aligned}
y^{(i)} &= z^{(i)} = z_{i+1} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= z^{(n)} = v \\
i &= 0, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec  $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$ .

Ainsi, les conditions (2.37) s'interprètent comme des conditions sur les dérivées successives de  $y$  jusqu'à l'ordre  $n$  aux instants 0 et  $T$ . Par conséquent, si on considère une courbe  $n$  fois différentiable  $t \in [0, T] \rightarrow y_{ref} \in \mathfrak{R}$ , vérifiant les conditions initiales et finales (2.37), l'ensemble des autres variables du système s'en déduiront par simple dérivation, et sans intégrer les équations du système. En particulier, l'entrée  $v$  sera obtenue en dérivant  $n$  fois  $y_{ref}$  par rapport au temps et la commande  $u_{ref}$  se déduira par  $u_{ref} = -LKM^{-1}z_{ref} + L^{-1}v_{ref}$ , avec  $z_{ref} = (y_{ref}, \dot{y}_{ref}, \dots, y_{ref}^{(n-1)})$

De même, la trajectoire de  $x_{ref}$  s'obtient par  $x_{ref} = M^{-1}z_{ref}$  et l'entrée  $u_{ref}$  ainsi obtenue réalise exactement  $\dot{x}_{ref} = Ax_{ref} + bu_{ref}$

Reste à trouver la courbe  $y_{ref}$ . Or, en utilisant la théorie de l'interpolation, on peut trouver un polynôme du temps de degré au moins égal  $2n+1$  tel que les  $n+1$  conditions initiales et les  $n+1$  finales soient vérifiées, et qui, en tant que polynôme de degré  $2n+1$ , sera automatiquement  $n$  fois différentiable :

$$y_{ref}(t) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \left( \frac{t}{T} \right)^i \tag{2.39}$$

Les coefficients  $a_0, \dots, a_{2n+1}$  se calculent en égalant les dérivées successives de  $y_{ref}$  prises aux instants 0 et  $T$  aux conditions initiales et finales respectivement :

$$y_{ref}^{(k)} = \frac{1}{T^k} \sum_{i=k}^{2n+1} i(i-1)\dots(i-k+1) a_i \left( \frac{t}{T} \right)^{i-k} \tag{2.40}$$

Soit, à  $t = 0$  :

$$y_{ref}(0) = a_0, y_{ref}^{(k)}(0) = \frac{k!}{T^n} a_n, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$v_{ref}(0) = \frac{n!}{T^n} a_n \quad (2.41)$$

et à  $t=T$  :

$$y_{ref}(T) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i, y_{ref}^{(k)}(T) = \frac{k!}{T^k} \sum_{i=k}^{2n+1} \frac{i!}{(i-k)!} a_i \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (2.42)$$

$$v_{ref}(T) = \frac{n!}{T^n} \sum_{i=n}^{2n+1} \frac{i!}{(i-1)!} a_i \quad (2.43)$$

Ce qui fait au total  $2n+2$  équations linéaires en les  $2n+2$  coefficients  $a_0, \dots, a_{2n+1}$ , qui peuvent, en fait, se ramener à  $n+1$  équations linéaires en les  $n+1$  coefficients inconnus  $a_{n+1}, \dots, a_{2n+1}$ , puisque les  $n+1$  premières équations (2.41) sont résolues en  $a_0, \dots, a_n$  :

$$a_0 = y_{ref}(0), a_k = \frac{T^k}{k!} y_{ref}^{(k)}(0), k = 1, \dots, n-1, a_n = \frac{T^n}{n!} v_{ref}(0) \quad (2.44)$$

Notons que le système linéaire (2.42) a toujours une solution unique car on peut l'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n+1 & n+2 & & & 2n+1 \\ (n+1)n & (n+2)(n+1) & & & (2n+1)2n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (n+1)! & \frac{(n+2)!}{2} & \dots & & \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{ref}(T) - \sum_{i=0}^n a_i \\ \vdots \\ T^k y_{ref}^{(k)} - \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} a_i \\ \vdots \\ T^n v_{ref}(T) - n! a_n \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

et la matrice de gauche à toutes ses colonnes indépendantes, ce qui achève la construction de la trajectoire de référence.

#### II.5.1.4. Suivi de trajectoire, placement de pôles

Il est possible aussi d'utiliser la forme canonique pour concevoir des bouclages : soit le système canonique sous la forme :

$$y^n = v \quad (2.46)$$

On suppose que l'état complet  $x$  est mesuré à tout instant. Si on désire suivre la trajectoire  $y_{ref}$ , telle que  $y_{ref}^{(n)} = v_{ref}$ , qu'on vient de construire, et que le système est soumis à des perturbations non modélisées, l'écart entre la trajectoire réelle et sa référence est donnée par :

$$e = y - y_{ref} \quad (2.47)$$

et vérifie :

$$e^{(n)} = v - v_{ref} \quad (2.48)$$

Notons que si l'on mesure l'état  $x$ , on est en mesure de calculer à chaque instant cet écart et de s'en servir pour ramener cet écart à 0.

En posant :

$$v - v_{ref} = \sum_{i=0}^{n-1} K_i e^{(i)} \quad (2.49)$$

ou matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & & -k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

On vérifie facilement que les gains  $k_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice ainsi construite, si bien qu'on peut placer les valeurs propres où l'on veut dans le plan complexe en choisissant convenablement les gains. Si les gains sont choisis de sorte que toutes les racines du polynôme caractéristique soient à partie réelle négative, la dynamique de l'écart est exponentiellement stable [14].

## II.5.2 Commandabilité des systèmes non linéaires

Considérons maintenant un système non linéaire [8]:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.51)$$

où l'état  $x$  appartient à un ouvert de  $\mathfrak{R}^n$ , et l'entrée  $u$  est de dimension  $m$ .

On peut définir plusieurs notions de commandabilité. La notion la plus proche de ce qui précède, mais la plus restrictive, concerne la commandabilité locale autour d'un point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$ , c'est-à-dire tel que  $f(\bar{x}, \bar{u})$ .

### II.5.2.1. Commandabilité au premier ordre

Définissons alors le système linéarisé tangent au point d'équilibre par [8]:

$$\dot{x} = Ax + Bu, A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}), B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \quad (2.52)$$

**Définition 16 :** On dit que le système (2.51) est commandable au premier ordre au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$  si le rang de  $\rho$ , défini par (2.33) est égal à  $n$ .

Une autre définition possible est la suivante [8]:

**Définition 17 :** Le système (2.51) est localement commandable au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute paire de points  $(x_0, x_1) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$  vérifiant  $\|x_0 - \bar{x}\| < \eta$  et  $\|x_1 - \bar{x}\| < \eta$ , il existe une commande  $\tilde{u}$  continue par morceau sur  $[0, \varepsilon]$  telle que  $\|\tilde{u}(t)\| < \varepsilon$ ,  $\forall t \in [0, \varepsilon]$  et  $X_\varepsilon(x_0, \tilde{u}) = x_1$ , où l'on a noté  $X_\varepsilon(x_0, \tilde{u})$  la solution de (2.51) à l'instant  $\varepsilon$ , générée à partir de  $x_0$  à l'instant 0 et par la commande  $\tilde{u}$ .

Autrement dit, le système est localement commandable au point d'équilibre  $(x, u)$  si l'on peut aller d'un point à un autre, situés tous deux suffisamment près du point d'équilibre, en une durée arbitrairement courte et avec une commande suffisamment petite.

**Théorème 6 :** Si le système (2.51) est commandable au premier ordre au point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$ , il est localement commandable en  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

### II.5.2.2. Commandabilité locale et crochets de Lie

Pour simplifier, on considère que le champ  $f$  de (2.51) est affine en la commande. Autrement dit, que le système (2.51) est donné par [8]:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \quad (2.53)$$

avec  $f_0(0) = 0$ , de sorte que  $x = 0$  et  $u = 0$  est un point d'équilibre.

À partir des champs de vecteurs  $f_0, \dots, f_m$ , on construit la suite de distributions suivante :

$$D_0 = \text{ev}\{f_1, \dots, f_m\}, D_{i+1} = [f_0, \bar{D}_i] + \bar{D}_i, i \geq 1 \quad (2.54)$$

où  $\bar{D}_i$  est la clôture involutive de la distribution  $D_i$ .

Dans la suite, nous supposons qu'il existe un ouvert  $x = \mathfrak{R}^n$  dans lequel toutes les distributions considérées sont de rang constant.

**Théorème 7 :** Une condition nécessaire pour que le système (2.53), avec  $f_0(0) = 0$ , soit localement commandable à l'origine est que la distribution  $D^*$  construite par la récurrence (2.54) vérifie :  $\text{rang}(D^*(x)) = n, \forall x \in U$  ; où  $U$  est un voisinage de l'origine.

**Remarque :** La suite de distributions  $\bar{D}_i$  est non décroissante, c'est-à-dire  $\bar{D}_i \subset \bar{D}_{i+1}$  pour tout  $i$ , et il existe un entier  $k^*$  et une distribution involutive  $D^*$  tels que  $\bar{D}_{k^*} = \bar{D}_{k^*+r} = D^*$  pour tout  $r \geq 0$ . En outre,  $D^*$  jouit des deux propriétés suivantes :

- $\text{ev}\{f_1, \dots, f_m\} \subset D^*$
- $[f_0, D^*] \subset D^*$

**Théorème 8 :** Supposons les  $m+1$  champs de vecteurs  $f_0, \dots, f_m$  analytiques. Si le Système (2.53) est localement commandable en  $x = 0$  et  $u = 0$ , alors  $\text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}(x) = T_x \mathfrak{R}^n, \forall x \in X$

Pour plus de détails et de démonstrations voir [8], [48].

## II.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les notions les plus courantes de la géométrie différentielle : variétés, difféomorphismes, dérivées de Lie et les distributions. Ensuite, nous avons donné une brève introduction sur la géométrie des jets infinis ; cette introduction est nécessaire pour la définition des systèmes plats ainsi que pour l'étude de l'équivalence et des bouclages dynamiques endogènes. Par la suite, nous avons traité, une relation d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire trivial, appelée équivalence de Lie-Backlund, dont la dimension des états n'est pas nécessairement identique. Cette différence de

dimension se traduit par l'élaboration d'un bouclage dynamique qui nous permet de transformer le système initial vers un système trivial. Les états de ce type de bouclage sont engendrés par l'état et un nombre fini de dérivées de la commande du système initial. Aussi, nous avons introduit certains rappels liés à l'équivalence comme la commandabilité linéaire et non linéaire.

## Chapitre 3

### Les systèmes plats

#### III.1. Introduction

La platitude est une propriété caractérisant une classe de systèmes non linéaires. Elle a été définie dans le cadre de l'algèbre différentielle, puis dans le cadre de la géométrie différentielle [4], [9], [11], [48-49].

Le concept de la platitude introduit une notion d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire commandable. Cette équivalence porte le nom d'équivalence par bouclage dynamique endogène dans le cadre de l'algèbre différentielle et d'équivalence de Lie-Bäcklund dans le cadre de la géométrie différentielle. Pour plus de détails se référer à [4], [9], [11], [13], [48], [49],

Le concept de la platitude a été mis en œuvre dans plusieurs domaines d'application, comme par exemple la commande des réacteurs chimiques, la commande des processus thermiques, la commande des moteurs, la commande de suspension active ou semi active, le pilotage automatique des avions ou encore le pilotage de grues [4], [11], [48], [50], [51], [52].

Il est important de noter que les systèmes plats sont une généralisation des systèmes linéaires commandables dans le sens où tout système linéaire commandable est plat.

Dans ce qui suit, nous rappelons la définition algébrique de la notion de platitude. La définition de la platitude dans le cadre du formalisme géométrique est rappelée en annexe.

#### III.2. Définition de la platitude dans le cadre de l'algèbre différentielle

Dans le contexte de l'algèbre différentielle, un système est vu comme un champ de vecteurs généré par un ensemble de variables (états et commandes). La caractéristique essentielle des systèmes plats est qu'il existe un vecteur de sorties plates de dimension égale à la dimension du vecteur de commande, tel que ses composantes soient des fonctions

différentielles des variables du système, et telle que toute variable du système (on ne fait pas de distinction entre les variables d'état et les entrées du processus) puisse s'exprimer à partir de ces sorties et d'un nombre fini de leurs dérivées, sans intégration d'équations différentielles [4], [10-11], [12], [48].

Pour définir les systèmes plats, considérons le système non linéaire régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathfrak{R}^m$  est l'entrée de commande et  $f$  est une fonction régulière de classe  $C^\infty$  de  $x$  et de  $u$ , dont le rang de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est égal à  $m$  (c'est-à-dire, le système admet effectivement  $m$  commandes indépendantes). [48-49]

**Définition 18 :** Un système non linéaire modélisé par (3.1) est dit différentiellement plat si, et seulement si, il existe un vecteur de sorties plates  $y \in \mathfrak{R}^m$  différentiellement indépendantes, de dimension égale à celle du vecteur de commande  $u$ , dépendant de  $x$  et de  $u$  et d'un nombre fini  $r$  de ses dérivées :

$$y = \Psi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)}) \quad (3.2)$$

tel que :

$$\begin{aligned} x &= \rho_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u &= \rho_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}, y^{(r+1)}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\Psi : \mathfrak{R}^n \times (\mathfrak{R}^m)^{s+1} \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ,  $\rho_0 : (\mathfrak{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $\rho_1 : (\mathfrak{R}^m)^{r+2} \rightarrow \mathfrak{R}^m$  fonctions régulières.  $r$  : est le degré relatif.

Cela revient à dire que tout le comportement dynamique du système (3.1) peut être décrit par le comportement dynamique de la sortie plate  $y$ .

A  $y(t)$  définie pour  $t \in [0, T]$ , les trajectoires sont de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u(t) &= \rho_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}, y^{(r+1)}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $r$  est un entier.

Par la suite, nous utiliserons la terminologie «systèmes plats » pour nommer la classe particulière des modèles non linéaires respectant la définition 18.

**Exemple :** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) \end{cases} \quad (3.5)$$

En posant :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{x_2^2}{2} \\ y_2 = \dot{y}_1 &= (x_3 - x_2 u) + x_2(u - x_2) \\ &= x_3 - x_2^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$y_3 = \dot{y}_2 = \ddot{y}_1 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) - 2x_2(u - x_2)$$

$$\begin{aligned} v = \dot{y}_3 = y_1^{(3)} &= -x_3 + x_2 u - x_2 + u \\ &= -x_2 - x_3 + u(1 + x_2) \end{aligned}$$

où la commande  $u$  apparaît à la 3<sup>ème</sup> dérivation. Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (3.7)$$

$y_1$  joue le rôle de la sortie de Brunovsky, mais dans le cadre non linéaire on dit que c'est une sortie plate. C'est encore un changement de variable que nous avons effectué et  $y_1$  permet de paramétrer toutes les trajectoires du système : autrement dit  $x_1, x_2, x_3, u$  s'écrivent au moyen de  $y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_1^{(3)}$ .

- pour calculer  $x_1$  on résout  $(x_1)^2 + 2x_1(1 + \ddot{y}_1) + \ddot{y}_1^2 - 2y_1 = 0$ . Le discriminant est positif si, et seulement si  $1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1) > 0$ . Les deux solutions sont :

$$x_{11} = -(1 + \ddot{y}_1) - \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)}$$

$$x_{12} = -(1 + \ddot{y}_1) + \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)}$$

Nous choisissons la bonne solution grâce aux différents arguments : continuité de la grandeur  $x_1$ , sens physique, ... etc.

Dans ce cas, nous ne retenons que la plus grande valeur des deux solutions :

$$x_1 = -(1 + \ddot{y}) - \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)} \quad (3.8)$$

- ensuite  $x_2 = \ddot{y}_1 + x_1$
- puis  $x_3 = \dot{y}_1 + \dot{y}_1^2 + 2x_1\ddot{y}_1 + x_1^2$
- enfin  $u = \frac{y_1^{(3)} + \ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_1 + x_1 + 2x_1\ddot{y}_1 + x_1^2}{1 + x_1 + \ddot{y}_1}$

Ce qui montre que  $x_2$  et  $u$  s'expriment en fonction de  $x_1$  et d'un nombre fini de ses dérivées.

Donc, le système (3.5) est plat avec  $x_1$  comme sortie plate.

*Remarque :* La transformation obtenue à partir de la sortie plate  $y_1 = x$  revient à mettre le système sous forme canonique commandable (forme de Brunovsky) qui s'écrit ici  $y^{(4)} = v$ .

### III.3. Platitude et linéarisation

Les systèmes non linéaires plats ont la propriété d'être équivalents à des systèmes linéarisables par bouclage dynamique endogène [11], [49]. Avant d'introduire ce type de bouclage, rappelons d'abord la linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique.

#### III.3.1. Linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique

Pour le système dynamique donné par (3.1), le problème de linéarisation par difféomorphisme et bouclage statique consiste à trouver un changement de coordonnées (un difféomorphisme  $\Phi$  de classe  $C^\infty$ ) donné par :

$$\xi = \Phi(x) \quad \Phi(0) = 0 \quad (3.9)$$

et un bouclage statique d'état de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.9)$$

avec  $\alpha(0) = 0$ , et  $\beta(x)$  inversible.  $\alpha, \beta$  sont de classe  $C^\infty$ . Après bouclage et changement de coordonnées, nous obtenons un système linéaire commandable de la forme :

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (3.10)$$

$\xi \in \mathfrak{R}^n$  est l'état associé à la nouvelle entrée de commande  $v$  du système linéaire équivalent donné par (3.10). Il est représenté sur la figure 3.2.

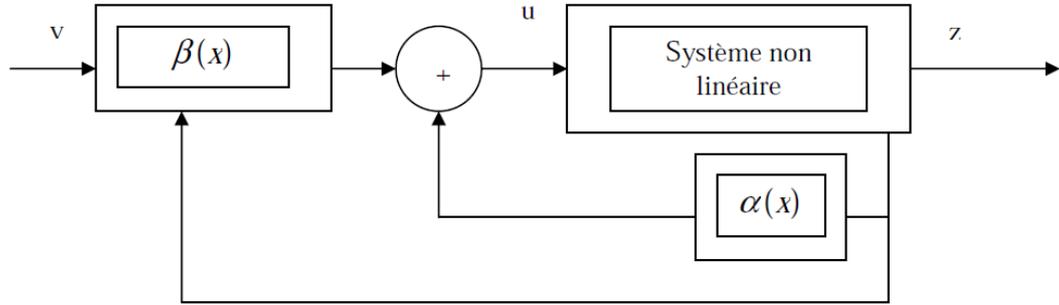


Figure 3.2 : Système non linéaire bouclé équivalent à un système linéaire.

Ce bouclage est dit statique car on peut passer de l'entrée  $v$  à l'entrée  $u$  et réciproquement sans intégrer des équations différentielles grâce aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ v &= -\beta^{-1}(x)\alpha(x) + \beta^{-1}(x)u \end{aligned} \quad (3.11)$$

Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un bouclage statique linéarisant, en termes de crochets de Lie pour un système affine en la commande, ont été proposées par Isidori [8].

Pour les systèmes non linéaires ayant la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad (3.12)$$

où  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  vérifiant :

$$f(0) = 0, \quad \text{rang}\{g_1(0), g_2(0), \dots, g_m(0)\} = m \quad (3.13)$$

les expressions de  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  de la formule (3.11) sont données par :

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^n y}{L_g L_f y} \quad (3.14)$$

$$\beta(x) = (L_g L_f^{(n-1)} y)^{-1}$$

$L_f^{(n)}y$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de Lie de la sortie mesurée  $y$  suivant le champ de vecteur  $f$ .

$L_g y$  est la dérivée de Lie de la sortie mesurée  $y$  suivant le champ de vecteur  $g$

$L_f L_g y$  est la dérivée de Lie de la sortie  $y$  suivant les champs de vecteurs  $f$  et  $g$ .

A partir de (3.12) on définit les distributions suivantes :

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \\ G_i &= G_{i-1} + \text{ad}_f^i G_{i-1} \end{aligned} \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (3.15)$$

où  $\text{span}$  correspond à l'espace engendré par les vecteurs  $g_1, g_2, \dots, g_m$ , et  $\text{ad}_f^i G_0$  itéré  $i$  fois avec  $\text{ad}_f^i = [f, \text{ad}_f^{i-1}]$  pour  $i \geq 1$ .

**Théorème 9 :** Pour qu'un système non linéaire admette une linéarisation par bouclage statique, il faut et il suffit que dans un voisinage  $V$  du point d'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$ :

1. La famille  $G_i$  soit une famille involutive et de rang constant pour tout  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  où  $n$  est la dimension du vecteur d'état.
2.  $G_{n-1}$  soit de rang  $n$ .

Notons que la seconde condition du théorème est l'extension naturelle du critère de commandabilité dans le cas linéaire :  $\text{rang}(A, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ .

### III.3.2. Linéarisation par bouclage dynamique endogène

Un système dynamique donné par (3.1) est linéarisable par bouclage dynamique s'il existe un bouclage dynamique endogène défini par :

$$\begin{aligned} \dot{w} &= a(x, w, v) \\ u &= b(x, w, v) \end{aligned} \quad w \in \mathfrak{R}^{(q)}, v \in \mathfrak{R}^m \quad (3.16)$$

où  $w$  est l'état du compensateur et  $v$  est la commande du système augmenté, et un changement de coordonnées défini par un difféomorphisme  $\Xi$  sur l'espace d'état étendu sur  $\mathfrak{R}^{(n+q)}$ .

$$\xi = \Xi(x, w), \quad \xi \in \mathfrak{R}^{n+q} \quad (3.17)$$

de telle sorte que le système augmenté est donné sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, b(x, w, v)) \\ a(x, w, v) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

puisse être linéarisable par bouclage statique, c'est-à-dire qu'il puisse être représenté sous la forme canonique de Brunovsky suivante :

$$\begin{aligned} y_1^{k_1} &= v_1 \\ y_2^{k_2} &= v_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_m^{k_m} &= v_m \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $k_i$  est l'indice de commandabilité associé à  $y_i$ .

**Corollaire 1 :** Tout système plat est linéarisable par bouclage dynamique endogène. Inversement, tout système linéarisable par bouclage dynamique endogène est plat.

En outre, si le système admet une représentation d'état de dimension  $n$  à  $m$  entrées, il existe

des entiers  $r_1, \dots, r_m$  avec  $\sum_{i=1}^m r_i \geq n$  tel que  $x$  et  $u$  soient donnés par :

$$\begin{aligned} x &= \rho_0(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m)}) \\ x &= \rho_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1+1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(r_m+1)}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

et tel que le système bouclé est difféomorphe au système linéaire commandable sous forme canonique :

$$\begin{aligned} y_2^{(r_1+1)} &= v_1 \\ &\vdots \\ y_m^{(r_m+1)} &= v_m \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Remarque :** L'ensemble des difféomorphismes et bouclages statiques d'états étant de façon évidente, un sous ensemble strict des bouclages dynamique endogènes. Les systèmes

*linéarisables par difféomorphisme et bouclage statique d'état (souvent appelés plus simplement linéarisables par bouclage statique) forment donc un sous ensemble strict de l'ensemble des systèmes plats.*

Dans le cas des systèmes mono-entrée ( $m=1$ ), il a été montré que la platitude est équivalente à la propriété de la linéarisation par bouclage statique d'état. La propriété de la platitude nous révèle donc toute sa richesse, et que dans le cas multi-entrées ou la linéarisation par bouclage statique et par bouclage dynamique ne sont plus équivalentes.

### **III.3.3. Quelques propriétés liées à la platitude**

#### **III.3.3.1. Systèmes linéarisables par bouclage statique**

Il est connu que, tout système linéarisable par bouclage statique admet une forme normale de Brunovsky. Il est donc plat. On note qu'un système plat n'est pas, en général, linéarisable par bouclage statique sauf pour les systèmes avec une seule commande.

#### **III.3.3.2. Système à une seule commande**

Avec une seule commande, la linéarisation par bouclage dynamique implique la linéarisation par bouclage statique.

#### **III.3.3.3. Systèmes affines en la commande**

Un système de la forme :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i g_i(x) \quad ; \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (3.22)$$

c'est-à-dire avec une commande de moins que l'état est plat dès qu'il est commandable. La situation se complique très sensiblement lorsque la dépendance en  $u$  n'est plus affine.

#### **III.3.3.4. Algorithme d'extension dynamique**

Pour simplifier nous présentons 2 sorties plates, c'est-à-dire 2 commandes. La méthode est parfaitement générale.

Nous voulons savoir si un couple  $(y_1, y_2)$  de sorties est un couple de sorties plates d'un système possédant un état de dimension  $n$ . Au cours du test, nous obtenons les bouclages linéarisants correspondants :

1. Dériver  $y_1$  jusqu'à faire apparaître une combinaison des commandes.
2. Nous notons  $n_1$  le nombre de dérivations nécessaires.
3. Dériver  $y_2$  jusqu'à faire apparaître une autre combinaison des commandes.
4. Nous notons  $n_2$  le nombre de dérivations nécessaires,  $y_1^{(n_2)} = w_1$

puis :

- si  $n_1 + n_2 = n$ , le système admet  $(y_1, y_2)$  pour sorties plates. Le bouclage linéarisant nous est donné alors, par  $(w_1, w_2)$ .
- sinon,  $(y_1, y_2)$  n'est pas un couple de sorties plates pour le système.

Nous pouvons également commencer par  $y_2$  puis dériver  $y_1$ , nous obtenons généralement un autre bouclage, mais le test  $n_1 + n_2 = n$  est le même dans les deux cas.

### III.4. Génération des trajectoires pour les systèmes plats

Avant d'aborder le problème de génération de trajectoires, nous rappelons la définition de base d'un système commandable. Soit le système [48-49]:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.23}$$

**Définition 19** : Le système (3.23) est commandable en boucle ouverte, si pour tout couple  $(x_0, x_f)$ , il existe une fonction  $t \rightarrow u(t)$  mesurable, tel que le problème de Cauchy.

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

possède une solution sur  $[t_0, t_f]$  vérifiant  $x(t_f) = x_f$ . Le temps  $t_f$  est fixé ou arbitraire suivant les conditions considérées, mais fini.

En général, il est très difficile de déterminer une trajectoire  $(x(t), u(t))$  résolvant l'équation (3.28). Lorsque le système est commandable et linéaire, le calcul de ces trajectoires est plus aisé [49].

D'autre part, dans le cas des systèmes plats, les trajectoires  $(x(t), u(t))$  de (3.28) s'expriment en fonction de la sortie plate  $y$  et d'un nombre fini de ses dérivées c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho_0(y(t), \dots, y^{(r)}(t)) \\ u(t) &= \rho_1(y(t), \dots, y^{(r+1)}(t)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec

$$y(t) = h(x(t), u(t), \dots, u^{(k)}(t)) \quad (3.25)$$

Ainsi, la génération de trajectoires d'un système plat est résolue en translatant le problème sur l'espace réduit des sorties plates, comme il est montré sur la figure suivante :

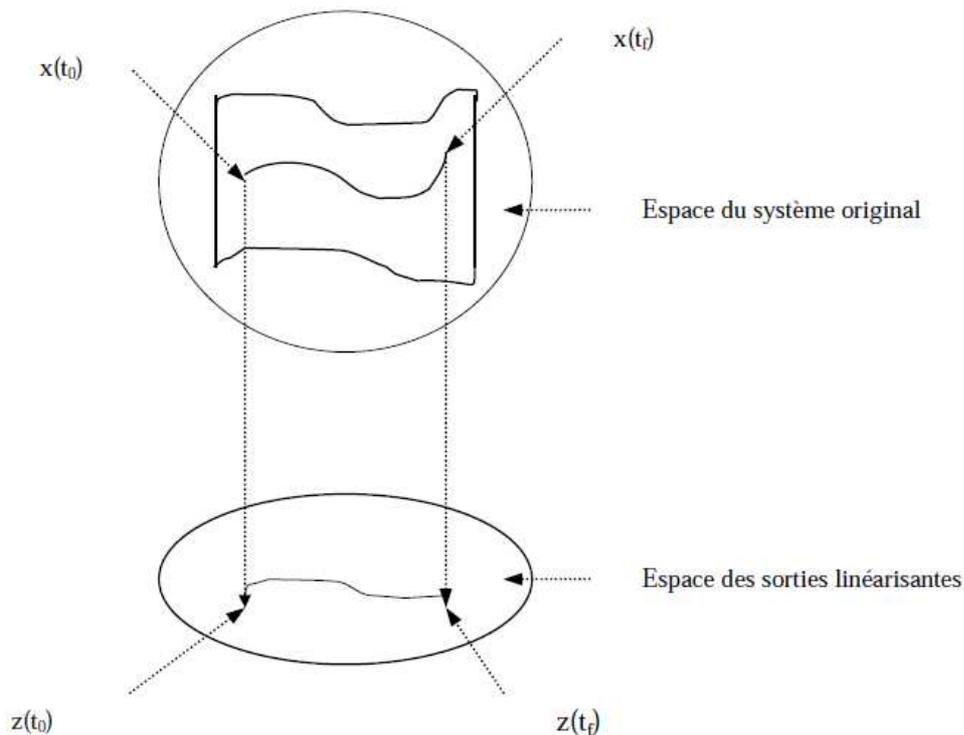


Figure 3.3 – Génération de trajectoires

**Définition 20 :** La procédure de génération de trajectoires se ramène au calcul de la valeur de la sortie plate  $y$  et un nombre fini de ses dérivées aux instants initial  $t_i$  et final  $t_f$ .

Dans ce qui suit nous allons traiter le cas de génération de trajectoires sans contraintes. Pour le cas dual, c'est-à-dire une génération avec contraintes se référer à [48-49]

Les conditions de platitude sont équivalentes à l'existence d'une sortie plate telle que toutes les variables du système,  $y$  compris la commande, puissent s'exprimer en fonction de la sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées. Dans ce cas, les équations différentielles du système sont vérifiées.

Il en résulte que, si l'on veut construire des trajectoires dont les conditions initiales et finales sont spécifiées, il suffit de calculer la trajectoire de la sortie plate correspondante à ces instants. Plus précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho_0(y(t), \dots, y^{(r)}(t)) \\ u(t) &= \rho_1(y(t), \dots, y^{(r+1)}(t)) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Comme les valeurs initiales et finales de  $x$  et  $u$  sont données, la surjectivité de  $(\rho_0, \rho_1)$  permet de déterminer les valeurs initiales et finales de  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)})$ . Il suffit ensuite de trouver une trajectoire  $t \rightarrow y(t)$  au moins  $(r+1)$  fois dérivable qui satisfait ces conditions initiales et finales. Ensuite, les trajectoires  $x(t)$  et  $u(t)$  se déduisent directement de  $y(t)$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r+1)$  à partir de (3.4).

Comme la trajectoire  $t \rightarrow y(t)$  ne doit vérifier aucune équation différentielle grâce à la propriété de l'indépendance différentielle, nous pouvons simplement la construire par l'interpolation polynomiale, de façon analogue à la synthèse proposée dans le cadre des systèmes linéaires.

### III.5. Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre, le problème de génération de trajectoires pour les systèmes non linéaires plats.

En premier lieu, nous avons abordé le problème de génération de trajectoires sans contraintes. Nous avons commencé par introduire la méthode générale qui nous permet la génération. Ensuite, nous avons traité le cas particulier des trajectoires dites arrêt-arrêt. Pour cette méthode, la génération de trajectoires se réalise à partir des formes temporelles polynomiales pour les sorties plates choisies. Le calcul des coefficients de ces polynômes

s'effectue de manière à satisfaire les conditions initiales et finales de la dynamique du système initial.

En deuxième lieu, nous nous sommes intéressés à un problème pratique qui concerne la majorité des systèmes physiques. Ce problème est la génération de trajectoires sous contraintes, car dans la majorité des situations pratiques les actionneurs sont sujets à de multiples contraintes. Ce qui limite et restreint l'ensemble des trajectoires de référence que le système peut suivre. La génération proposée pour ce problème se base sur une reparamétrisation du temps des trajectoires de référence des sorties plates.

## Chapitre 4

### Platitude des robots mobiles

#### IV.1. Introduction

Pour la planification de trajectoires, la seule connaissance requise est le modèle dynamique et le temps. Cette conception est dite "en boucle ouverte" car elle n'utilise pas d'informations obtenues au fur et à mesure du fonctionnement du système.

La trajectoire de référence est calculée à partir de l'instant présent jusqu'à l'instant futur en fonction de ce que l'on connaît sur la façon de réagir du système. Il s'agit donc d'une anticipation. Clairement, si la dynamique du système est précisément connue et si les perturbations venant de l'environnement extérieur n'ont pas un effet important dans le domaine d'utilisation du système, l'anticipation à elle seule, va nous permettre de nous rapprocher de l'objectif fixé. Par contre, si la modélisation n'est pas assez précise ou trop perturbée, l'anticipation va devoir être complétée par une loi de commande pour "fermer la boucle".

Si l'on mesure, par l'intermédiaire de capteurs, l'état du système à chaque instant, on peut évaluer l'écart entre la trajectoire réellement parcourue et la trajectoire de référence et en déduire une loi de commande "en boucle fermée" permettant de réduire cet écart.

Le problème de suivi de trajectoires consiste donc à trouver une loi de commande en boucle fermée permettant de garantir que, pour une classe de perturbations données, l'état du système tend asymptotiquement vers la trajectoire de référence.

Pour un système plat, dans un domaine ouvert ne contenant pas de points singuliers, le suivi de trajectoires peut être résolu grâce au corollaire 1 sur l'équivalence par bouclage dynamique endogène [48-49].

## IV.2. Convergence des trajectoires

En effet, si  $y$  est une sortie plate correspondant à l'état  $x$  et à l'entrée  $u$ , supposée mesurée, et si  $y^*$  est la trajectoire de référence de la sortie plate [48-49]. En posant :

$$e_i = y_i - y_i^* \quad i=1, \dots, m \quad (4.1)$$

Par le corollaire 1, on sait construire un bouclage dynamique endogène tel que le système s'écrive, à un difféomorphisme près :

$$y^{(r+1)} = v \quad (4.2)$$

Si l'on pose :

$$v^* = (y^*)^{(r+1)} \quad (4.3)$$

La dynamique de l'erreur s'écrit :

$$e^{(r+1)} = v - v^* \quad (4.4)$$

Il suffit alors de poser, composante par composante :

$$v_i = v_i^* + \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)} \quad i=1, \dots, m \quad (4.5)$$

avec les gains  $k_{i,j}$ , tel que les  $m$  polynômes :

$$s^{(r+1)} - \sum_{j=0}^r k_{i,j} s^{(j)} = 0 \quad (4.6)$$

aient toutes leurs racines à partie réelle strictement négative,  $i = 1, \dots, m$ . Alors  $e$  converge exponentiellement vers 0. D'où,  $y$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r + 1$  convergent vers leurs références,  $y^*, \dots, y^{*(r+1)}$

En utilisant la différentiabilité de l'isomorphisme de Lie-Backlund :

$$x = \rho_0(y, \dots, y^{(r)}) \quad (4.7)$$

$$u = \rho_1(y, \dots, y^{(r+1)})$$

nous concluons que l'ensemble des variables  $x$  et  $u$  du système d'origine convergent localement exponentiellement vers leurs références.

### IV.3. Architecture de la commande

L'architecture de la commande que nous avons utilisée dans ce travail peut être représentée par le schéma synoptique donné par la figure suivante :

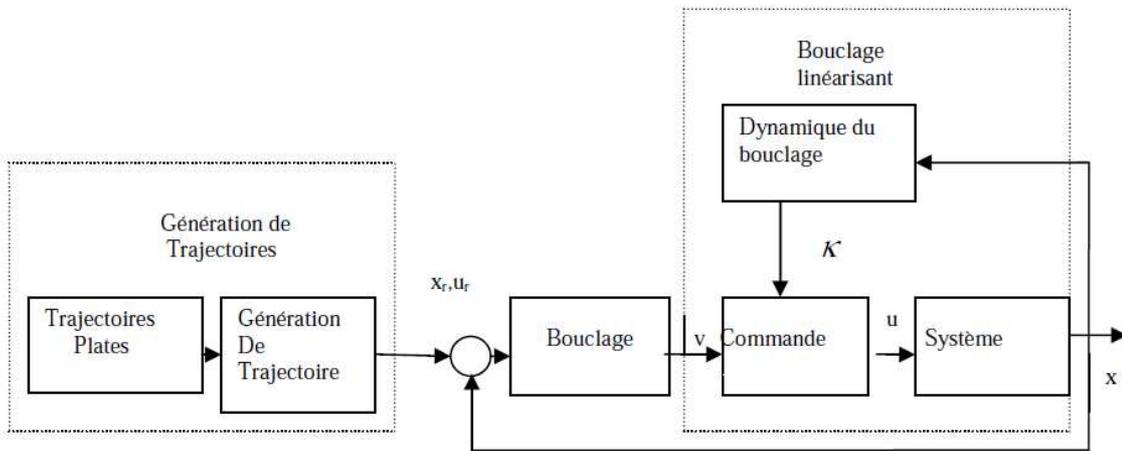


Figure 4.1 : Architecture de la commande.

Nous remarquons facilement que la commande est composée de deux parties : la première est la commande en boucle ouverte et la deuxième est la commande assurant la poursuite des trajectoires en présence des perturbations.

- Le bloc génération de trajectoires génère les trajectoires de référence  $(x(t)_d, u(t)_d)$  à partir des sorties plates satisfaisant la dynamique du système, des conditions initiales et finales et les contraintes de saturation sur les commandes.
- Le bouclage assure le suivi des trajectoires générées en présence des incertitudes de modélisation ou de perturbations externes.

## IV.4. Application

### IV.4.1. Robots mobiles différentiels à deux-roues

Dans cette section, le modèle dynamique du robot mobile différentiel à deux-roues sera exploité en utilisant la formulation de Lagrange avec la propriété de platitude différentielle du système. Les couples appliqués aux roues gauche et droite  $\tau_r$  et  $\tau_l$ , respectivement, sont les deux entrées pour le modèle dynamique.

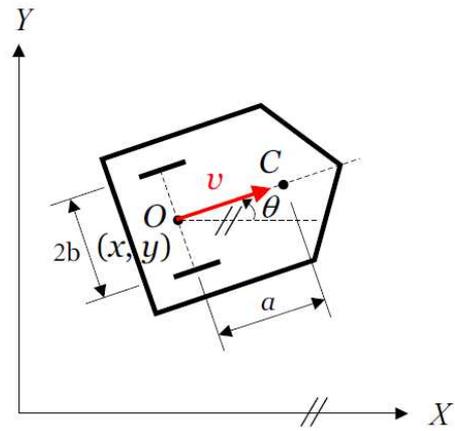


Figure 4.2 : Un robot mobile à deux-roues.  $b$  est la moitié distance entre les deux roues du robot.  $a$  est la distance entre le point milieu  $O$  et le centre de gravité  $C$  le long de la direction longitudinale positive du robot mobile.

### Modèle dynamique

On considère le robot explicité au premier chapitre et dont les équations dynamique sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + C^T \lambda = Q \quad (4.8)$$

où  $L$  représente le lagrangien défini comme  $L = K - V$  et  $K$ ,  $V$  sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système,  $Q$  est le vecteur force généralisée,  $C$  est la matrice des coefficients des contraintes dans l'équation, et  $\lambda$  est le vecteur multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes. A Noter que nous pouvons poser  $V=0$  sans perte de généralités car le modèle est plat. Les équations de mouvement peuvent alors s'exprimer par :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = E(q)\tau - C^T(q)\lambda \quad (4.9)$$

où :

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & -am_0 \sin \theta \\ 0 & m_0 & am_0 \cos \theta \\ -am_0 \sin \theta & am_0 \cos \theta & a^2 m_0 + I_0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -am_0 \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -am_0 \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, E(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta / r & \cos \theta / r \\ \sin \theta / r & \sin \theta / r \\ b / r & -b / r \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où,  $m_0$  et  $I_0$  sont la masse et le moment d'inertie du robot mobile, respectivement,  $r$  est le rayon de la roue,  $b$  est la distance entre la moitié du robot et les deux roues,  $a$  est la distance du point milieu  $O$  du centre de masse  $C$  le long de la direction positive longitudinale du robot, et  $\tau_r$  et  $\tau_l$  sont les couples moteur appliqués sur les roues droite et gauche du robot, respectivement.

Afin d'éliminer le terme de contrainte dans les équations du mouvement (équation 4.9), on utilise l'équation  $\dot{q} = \dot{S}v + Sv$  et on substitue  $\dot{q}$  dans l'équation (4.9). En Multipliant  $\dot{q} = \dot{S}v + Sv$  à gauche par  $S^T$  et en utilisant la propriété  $C(q)S(q) = 0$ , on obtient finalement :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} S(q)v \\ f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \tau \quad (4.12)$$

où :

$$X = [q^T \quad v^T]^T$$

$$f_1 = (S^T MS)^{-1} (-S^T M \dot{S}v - S^T v) \quad (4.13)$$

$$f_2 = (S^T MS)^{-1} S^T E$$

Ces équations représentent le modèle dynamique complet du robot mobile à deux roues dans l'espace d'état.

#### IV.4.2. Robot mobiles à trois roues

Dans cette section, le modèle dynamique du robot mobile sera étudié en utilisant la formulation de Lagrange. Avec la propriété de platitude différentielle du système, les couples appliqués à la roue avant pour la marche avant et pour la direction  $\tau_u$  et  $\tau_\phi$  respectivement, sont les deux entrées du modèle dynamique.

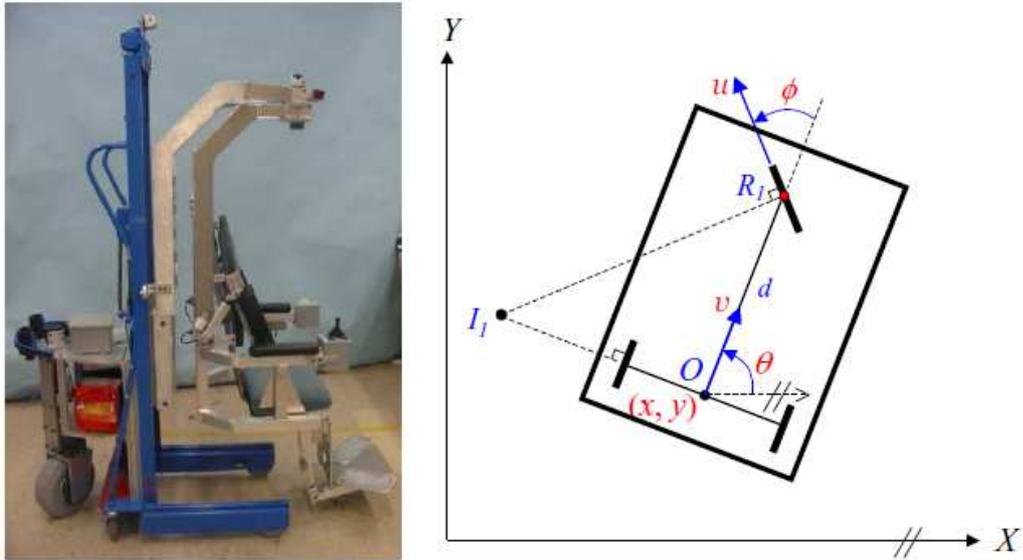


Figure 4.3 : Une voiture de type robot mobile.  $a$  est la distance entre le point milieu de l'essieu arrière vers le centre de masse  $C$  du robot.  $L$  est la distance entre le point milieu  $O$  et le centre de roue avant.

### Modèle dynamique :

On considère le robot explicité au premier chapitre et dont les équations dynamiques sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + C^T \lambda = Q \quad (4.14)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique du système,  $Q$  est le vecteur force généralisée,  $C$  est la matrice des coefficients des contraintes, et  $\lambda$  est un vecteur multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes. De ces derniers, on peut obtenir les équations du mouvement :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = E(q)\tau - C^T(q)\lambda \quad (4.15)$$

où :

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_b + m_w & 0 & -(m_b a + m_w L) \sin \theta & 0 \\ 0 & m_b + m_w & (m_b a + m_w L) \cos \theta & 0 \\ (m_b a + m_w L) \sin \theta & (m_b a + m_w L) \cos \theta & m_b a^2 + m_w L + I_b + I_w & I_w \\ 0 & 0 & I_w & I_w \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} -(m_b a + m_w L) \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -(m_b a + m_w L) \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E(q) = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) / r & 0 \\ \sin(\phi + \theta) / r & 0 \\ L \sin \phi / r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_\phi \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$m_w$  et  $m_b$  sont les masses, et  $I_w$  et  $I_b$  sont les moments d'inertie de la roue avant et les autres parties du robot mobile, respectivement.  $r$  est le rayon de la roue avant,  $\tau_u$  est le couple moteur appliqué sur la roue avant et  $\tau_\phi$  est le couple moteur pour la direction de la roue avant.  $a$  est la distance à partir du point milieu O de l'essieu arrière vers le centre de masse C du robot.  $L$  est la distance entre le point milieu O du centre et la roue avant. Afin d'éliminer le terme de contrainte dans les équations du mouvement, on utilise la propriété  $C(q)S(q) = 0$  ; et on obtient finalement :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} S(q)v \\ f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \tau \quad (4.18)$$

où :

$$\begin{aligned} x &= [q^T v^T]^T \\ f_1 &= (S^T M S)^{-1} (-S^T M \dot{S} v - S^T v) \\ f_2 &= (S^T M S)^{-1} S^T E \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ces dernières équations représentent le modèle dynamique du robot mobile dans l'espace d'état.

### IV.4.3. Platitudo des modèles dynamiques

#### a) robot à deux roues

En introduisant une transformation d'entrée de telle sorte que :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = f_1 + f_2 \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Le modèle dynamique du système décrit par l'équation (4,18) pourra être transformé en :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \theta \\
\dot{y} &= v \sin \theta \\
\dot{\theta} &= \omega \\
\dot{v} &= \tau_1 \\
\dot{\omega} &= \tau_2
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Par l'application de l'entrée étendue  $\tau_1$ , c'est-à-dire, compte tenu de l'entrée  $\tau_1$  et l'état additionnel  $Z_1$ , le système étendu pour le modèle dynamique est donné par :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \theta \\
\dot{y} &= v \sin \theta \\
\dot{\theta} &= \omega \\
\dot{v} &= z_1 \\
\dot{z}_1 &= \bar{\tau}_1 \\
\dot{\omega} &= \bar{\tau}_2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

où  $\bar{\tau}_1$  et  $\bar{\tau}_2$  sont des nouvelles entrées du système constitué de ses six états et :

$$\bar{\tau}_1 = \dot{\tau}_1, \quad \bar{\tau}_2 = \tau_2 \tag{4.23}$$

Puis, en utilisant les sorties plates, c'est-à-dire

$$F = (F_1, F_2) = (x, y), \tag{4.24}$$

Les dérivées des variables d'état sont :

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (f_1, f_2) \\
v &= \sqrt{\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2} \\
\theta &= \tan^{-1} \left( \frac{\dot{f}_2}{\dot{f}_1} \right) \\
z_1 = \dot{v} &= \frac{\dot{f}_1 \ddot{f}_1 + \dot{f}_2 \ddot{f}_2}{\sqrt{\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2}} \\
w = \dot{\theta} &= \frac{\dot{f}_1 \ddot{f}_2 - \dot{f}_2 \ddot{f}_1}{\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Par ailleurs, le paramétrage différentiel pour les entrées  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{\tau}_2$  peut être obtenu en dérivant  $z_1$  et  $w$ , respectivement.

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_1 &= \dot{z}_2 = \delta_1 f_1^{(3)} + \delta_2 f_2^{(3)} + \delta_3 \\ \bar{\tau}_2 &= \dot{w}_2 = k_1 f_1^{(3)} + k_2 f_2^{(3)} + k_3\end{aligned}\quad (4.26)$$

où  $\delta_i$  et  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) sont des fonctions de  $F, \dot{F}, \ddot{F}$ . Ensuite, il est permis de nous construire la relation inversible écrite comme :

$$\begin{pmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_3 \\ k_3 \end{pmatrix} \right]\quad (4.27)$$

De cette relation, il est révélé que le degré relatif du système est 6.

Le difféomorphisme qui transforme les variables d'état de l'espace original à l'espace de sortie plate peut être construit en dérivant les sorties plates :

$$\begin{aligned}f_1 &= x \\ f_2 &= y \\ \dot{f}_1 &= v \cos \theta \\ \dot{f}_2 &= v \sin \theta \\ \ddot{f}_1 &= \dot{z}_1 \cos \theta - v w \sin \theta \\ \ddot{f}_2 &= \dot{z}_1 \sin \theta + v w \cos \theta\end{aligned}\quad (4.28)$$

## b) Robot à trois roues

On va utiliser les mêmes transformations que pour le robot à deux roues :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = f_1 + f_2 \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_\phi \end{pmatrix},\quad (4.29)$$

Donc le model dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{L} \tan \phi, \\ \dot{\phi} &= w, \\ \dot{v} &= \tau_1, \\ \dot{w} &= \tau_2,\end{aligned}\quad (4.30)$$

En introduisant l'entrée étendue  $\tau_1$ , et en considérant que l'état additionnel  $z_1 = \tau_1$  on aura :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \theta, \\
\dot{y} &= v \sin \theta, \\
\dot{\theta} &= \frac{v}{L} \tan \phi, \\
\dot{\phi} &= w, \\
\dot{v} &= z_1, \\
\dot{z}_1 &= z_2, \\
\dot{z}_2 &= \bar{\tau}_1, \\
\dot{w} &= \bar{\tau}_2,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Le paramétrage différentiel est donné par :

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_1 &= \dot{z}_2 = \delta_1 f_1^{(4)} + \delta_2 f_2^{(4)} + \delta_3 \\
\bar{\tau}_2 &= \dot{w}_2 = k_1 f_1^{(4)} + k_2 f_2^{(4)} + k_3
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ceci nous permet de construire la relation inversible :

$$\begin{pmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_3 \\ k_3 \end{pmatrix} \right] \tag{4.33}$$

Le degré relatif du système est 8.

#### IV.4.4. Planification d'une trajectoire désirée

Pour une période donnée  $[t_0 \ t_f]$ , les conditions aux limites du système sont données par :

$$\begin{aligned}
&x(t_0), y(t_0), \theta(t_0), v(t_0), z_1(t_0), w(t_0) \\
&x(t_f), y(t_f), \theta(t_f), v(t_f), z_1(t_f), w(t_f)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

et sont transformées en :

$$\begin{aligned}
&F_1(t_0), \dot{F}_1(t_0), \ddot{F}_1(t_0), F_2(t_0), \dot{F}_2(t_0), \ddot{F}_2(t_0) \\
&F_1(t_f), \dot{F}_1(t_f), \ddot{F}_1(t_f), F_2(t_f), \dot{F}_2(t_f), \ddot{F}_2(t_f)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

avec les trajectoires polynomiales suivantes :

**a) Robot à deux roues**

$$F_{1d}(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.36)$$

$$F_{2d}(t) = b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

**b) Robot à trois roues**

$$F_{1d}(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.37)$$

$$F_{2d}(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

Les coefficients de ces polynômes peuvent être uniquement déterminés par la transformation des conditions aux limites données par l'équation (4.35).

**IV.4.5. Conception de loi de commande**

Une relation inversible entre les entrées et les dérivées supérieures des sorties plates peut être construite en dérivant les sorties plates jusqu'à ce qu'une entrée apparaisse. La relation est donnée par :

**a) Robot à deux roues**

$$\begin{pmatrix} \ddot{F}_1 \\ \ddot{F}_2 \end{pmatrix} = A + B \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} -vw^2 \cos \theta - 2wz_1 \sin \theta \\ -vw^2 \cos \theta + 2wz_1 \sin \theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -v \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

L'équation (4.38) peut être réécrite sous une forme d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} \ddot{F}_1 &= v_1 \\ \ddot{F}_2 &= v_2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

En choisissant les entrées  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$  comme :

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \left[ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - A \right] \quad (4.41)$$

Donc, les lois d'asservissement  $v_1, v_2$  peuvent être proposées comme suit :

$$\begin{aligned} v_1 &= \ddot{F}_{1d} + k_2(\ddot{F}_{1d} - \ddot{F}_1) + k_1(\dot{F}_{1d} - \dot{F}_1) + k_0(F_{1d} - F_1) \\ v_2 &= \ddot{F}_{2d} + r_2(\ddot{F}_{2d} - \ddot{F}_2) + r_1(\dot{F}_{2d} - \dot{F}_2) + r_0(F_{2d} - F_2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

où  $F_{1d}, F_{2d}$  sont les trajectoires désirées pour les sorties plates  $F_1, F_2$ , respectivement, et  $k_i, r_i$  sont des gains de contrôle. En substituant ces lois de commande données par l'équation (4.42) dans l'équation (4.40) on détermine l'erreur dynamique du système en boucle fermée comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + k_2\dot{e}_1 + k_1e_1 + k_0e_1 &= 0 \\ \ddot{e}_2 + r_2\dot{e}_2 + r_1e_2 + r_0e_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

## b) Robot à trois roues

$$\begin{pmatrix} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \end{pmatrix} = A + B \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{v^2 \sin \theta}{L \cos^2 \phi} \\ \sin \theta & \frac{v^2 \cos \theta}{L \cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -3z_2\dot{\theta} \sin \theta - 3z_1\ddot{\theta} \sin \theta - 3z_1\dot{\theta}^2 \cos \theta - 3v\dot{\theta}\ddot{\theta} \cos \theta + v\dot{\theta}^3 \sin \theta \\ &\quad - \frac{v \sin \theta}{L} (2vw^2 \sec^2 \phi \tan \phi + 2z_1w \sec^2 \phi + z_2 \tan \phi) \\ A_2 &= 3z_2\dot{\theta} \cos \theta + 3z_1\ddot{\theta} \cos \theta - 3z_1\dot{\theta}^2 \sin \theta - 3v\dot{\theta}\ddot{\theta} \sin \theta - v\dot{\theta}^3 \cos \theta \\ &\quad + \frac{v \sin \theta}{L} (2vw^2 \sec^2 \phi \tan \phi + 2z_1w \sec^2 \phi + z_2 \tan \phi) \end{aligned} \quad (4.46)$$

L'équation linéaire est :

$$\begin{aligned} F_1^{(4)} &= v_1 \\ F_2^{(4)} &= v_2 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Les entrées  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$  sont :

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - A \tag{4.48}$$

La loi de commande est :

$$\begin{aligned} v_1 &= F_{1d}^{(4)} + k_3(\ddot{F}_{1d} - \ddot{F}_1) + k_2(\dot{F}_{1d} - \dot{F}_1) + k_1(F_{1d} - F_1) + k_0(F_{1d} - F_1) \\ v_2 &= F_{2d}^{(4)} + r_3(\ddot{F}_{2d} - \ddot{F}_2) + r_2(\dot{F}_{2d} - \dot{F}_2) + r_1(F_{2d} - F_2) + r_0(F_{2d} - F_2) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Les boucles de régulation peuvent être représentées par les schémas suivants :

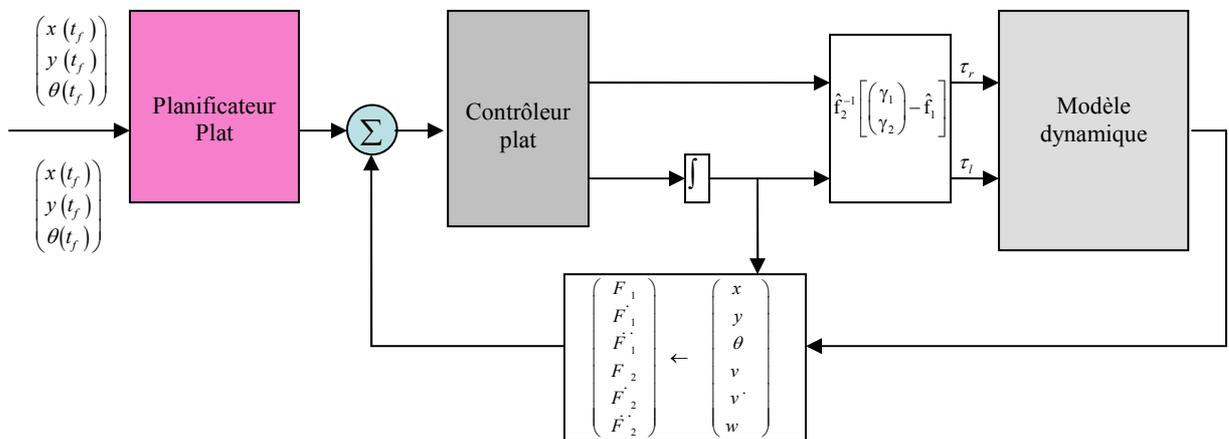


Figure 4.4 : boucle de régulation pour le robot à deux roues

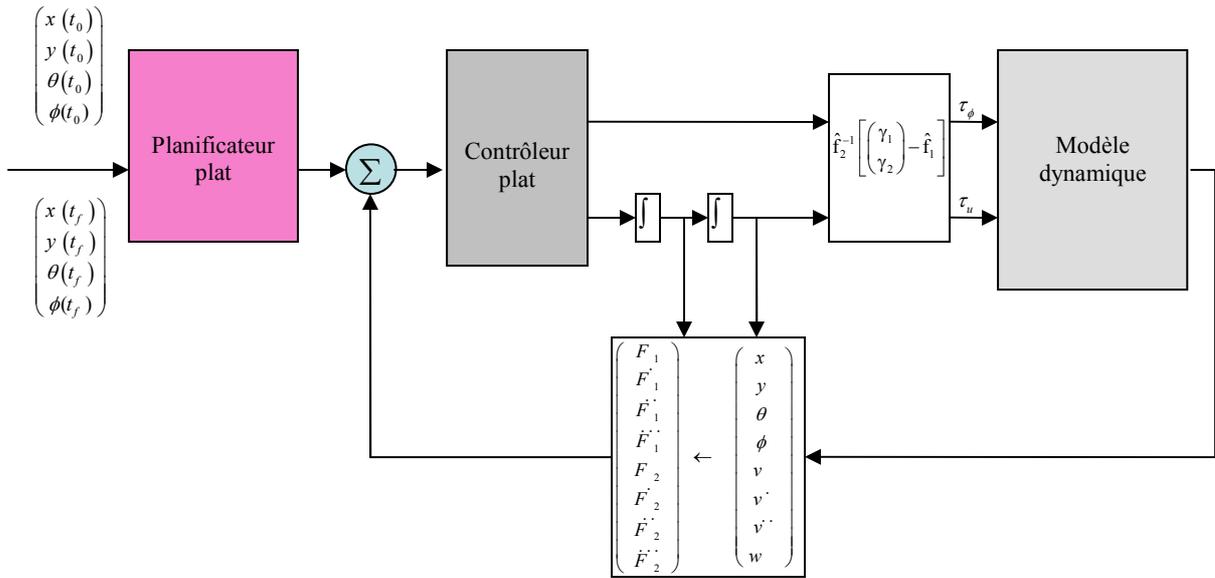


Figure 4.5 : boucle de régulation pour le robot à deux roues

où  $e_i = F_{id} - F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Les gains de commande peuvent être choisis de telle sorte que toutes les racines de l'équation caractéristique de l'erreur dynamique en boucle fermée se situent strictement dans le demi-plan gauche pour assurer la stabilité. En substituant l'équation (2.57) dans l'équation (2.56), on peut obtenir les entrées de commande  $\bar{\tau}_1$  et  $\bar{\tau}_2$  pour le système étendu. Ensuite, les entrées de commandes d'origines  $\tau_1, \tau_2$  peuvent être calculées en utilisant l'équation (2.40).

### IV.6 Résultats de simulations

Des polynômes de cinquième et de septième degré des trajectoires désirées au cours de l'horizon  $[0 \ 10s]$  sont générés pour les sorties plates  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$  avec les conditions aux limites suivantes :

$$x(0) = 0, y(0) = 0, \theta(0) = \frac{\pi}{2}, v(0) = 1, w(0) = 0, z_1(0) = 0 \tag{4.50}$$

$$x(10) = 0, y(10) = 0, \theta(10) = \frac{\pi}{2}, v(10) = 1, w(10) = 0, z_1(10) = 0$$

Par conséquent, les conditions aux limites correspondantes dans l'espace des sorties plates peuvent être obtenues par le difféomorphisme construit à partir de l'équation (4.28) comme suit :

$$\begin{aligned}
 F_1(0) = 0, \dot{F}_1(0) = 0, \ddot{F}_1(0) = 0, F_2(0) = 0, \dot{F}_2(0) = 1, \ddot{F}_2(0) = 0 \\
 F_1(10) = 10, \dot{F}_1(10) = 0, \ddot{F}_1(10) = 0, F_2(10) = 10, \dot{F}_2(10) = 1, \ddot{F}_2(10) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.51}$$

Grâce à ces conditions aux limites, les coefficients des polynômes du cinquième et de septième degré donnés dans les équations (4.36) et (4.37) peuvent être déterminés de manière unique. La trajectoire désirée d'orientation  $\theta$  du robot est automatiquement obtenue à partir des trajectoires conçues pour les sorties plates  $F_1$  et  $F_2$  en utilisant l'équation (4.25). Les gains de commande dans les équations (4.42), (4.49) ont été choisis de sorte que toutes les racines de l'équation caractéristique de l'erreur dynamique sont à  $-2$ . Les valeurs  $(K_0, K_1, K_2)$  sont fixées à  $(8, 12, 6)$  et  $(r_0, r_1, r_2)$  à  $(8, 12, 6)$  pour le robot à deux roues et  $(K_0, K_1, K_2, K_3)$  sont fixées à  $(16, 32, 24, 8)$  et  $(r_0, r_1, r_2, r_3)$  à  $(16, 32, 24, 8)$ . La structure du planificateur intégré et le contrôleur qui est appliqué au modèle dynamique du robot sont montrés respectivement dans les figures 4.4 et 4.5.

Les figures (4.6) et (4.9) présentent les trajectoires désirées et réelles pour les deux types de robot. Dans cette simulation, l'erreur initiale a été fixée à  $1,0$  m pour  $y$  à  $t=0$  ceci dans le but de montrer la convergence exponentielle de la trajectoire désirée.

Les trajectoires désirée et réelle de  $\theta$  sont présentées respectivement sur les figures (4.8) et (4.11). Les entrées de couple  $\tau_r, \tau_l$  pour le système d'origine ont été calculées. Les résultats de simulation permettent la vérification et la validité de la commande pour le modèle dynamique.

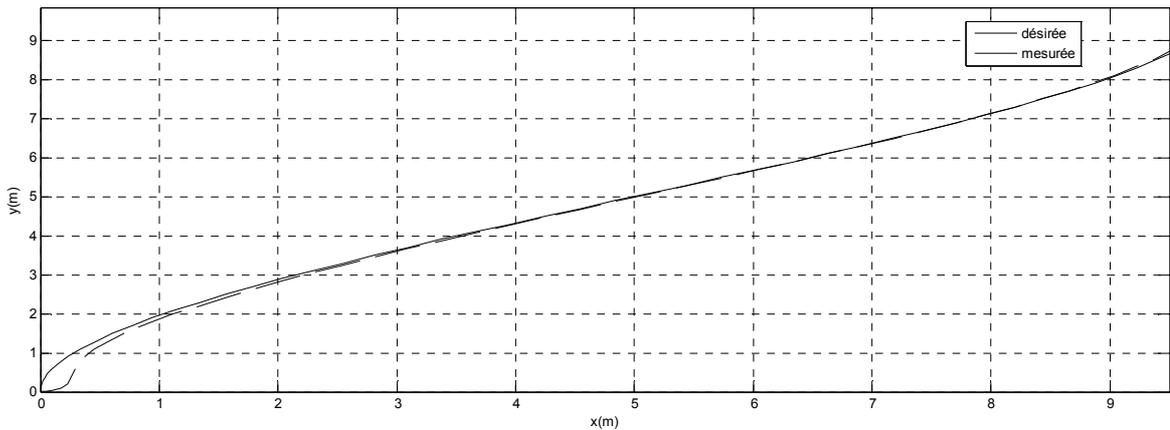
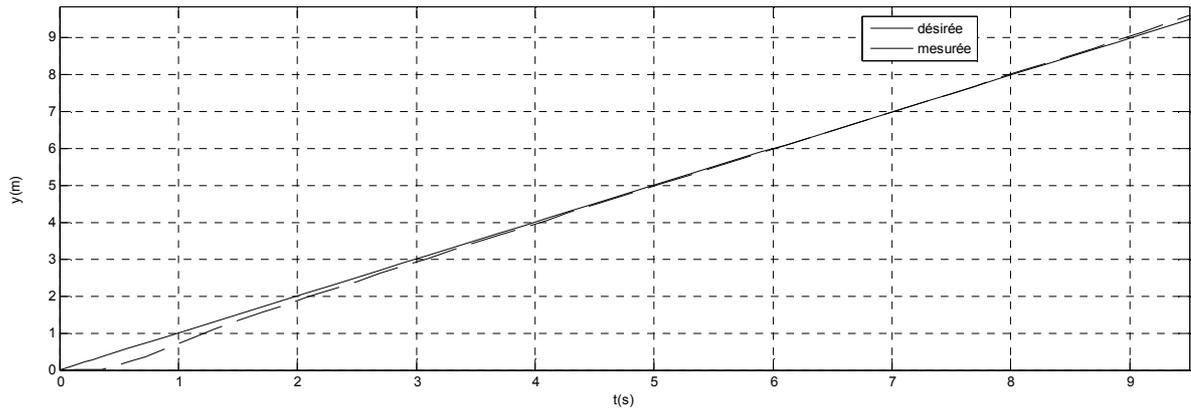
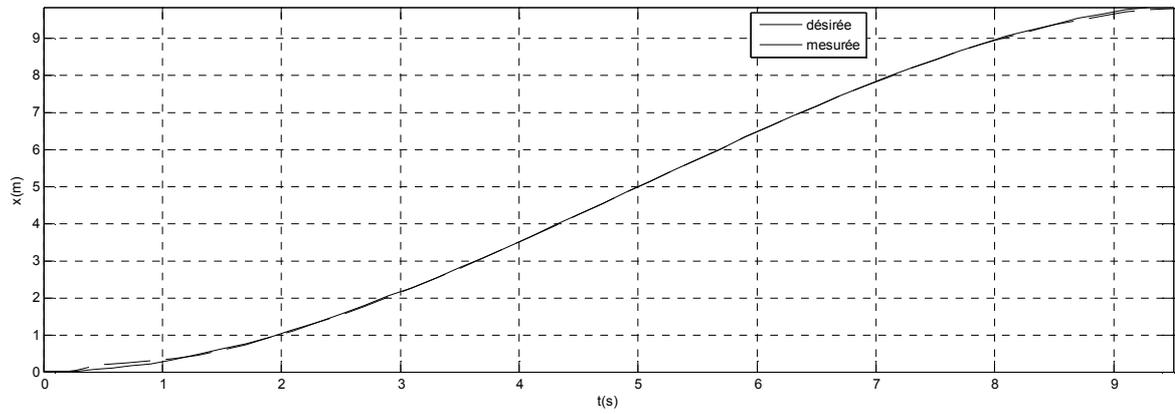


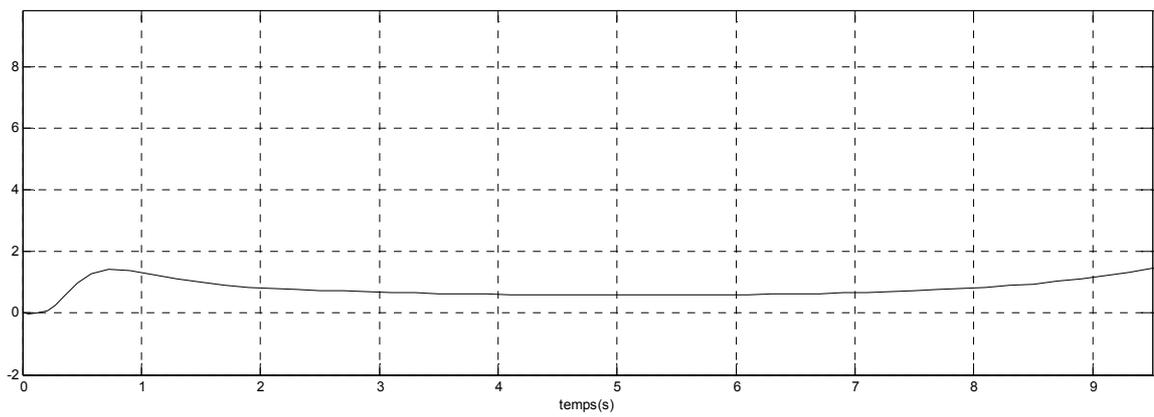
Figure 4.6 : trajectoires désirée et mesurée du robot à deux roues



(a)



(b)



(c)

Figures 4.7: les trajectoires désirées et mesurées de  $x$  (fig. a),  $y$  (fig. b),  $\theta$  (fig. c) pour le robot à deux roues

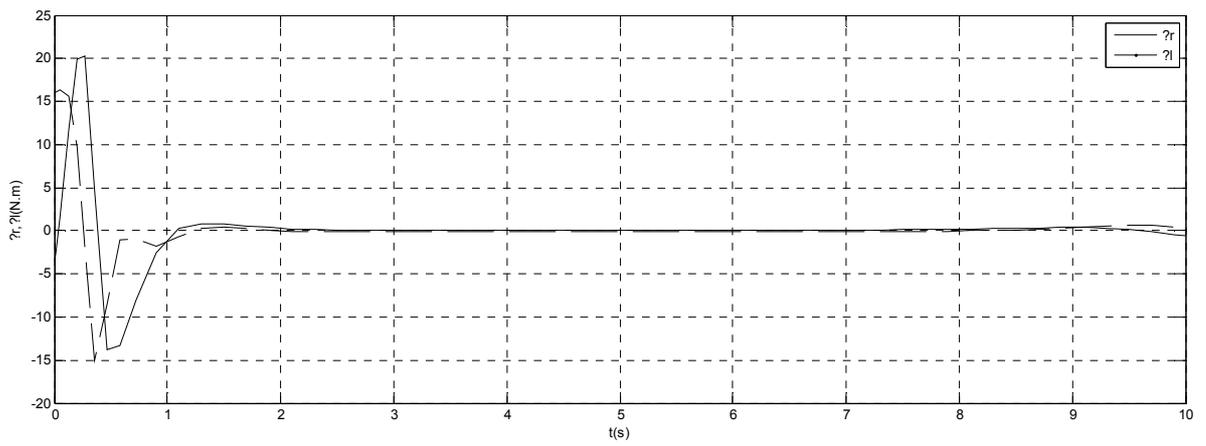


Figure 4.8: Les entrées de couples  $\tau_r, \tau_l$  pour le système d'origine

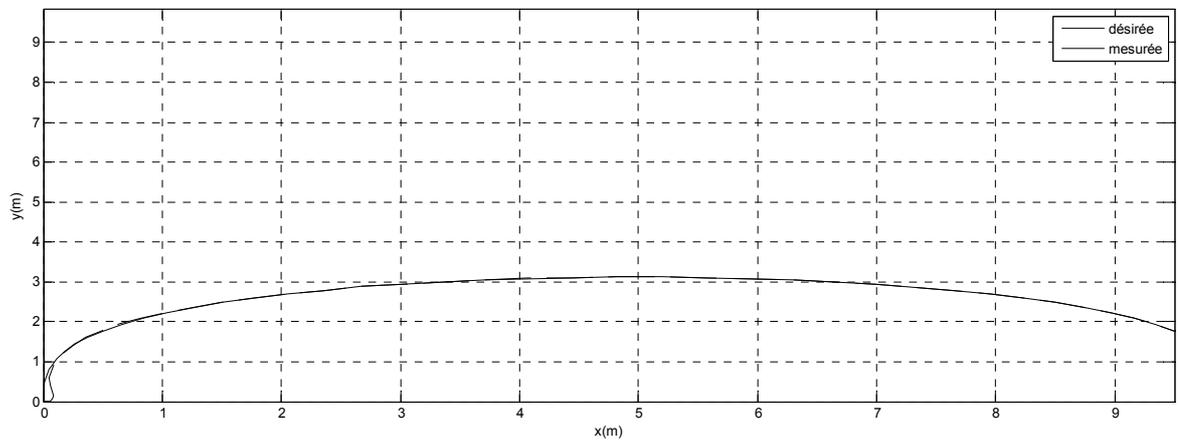
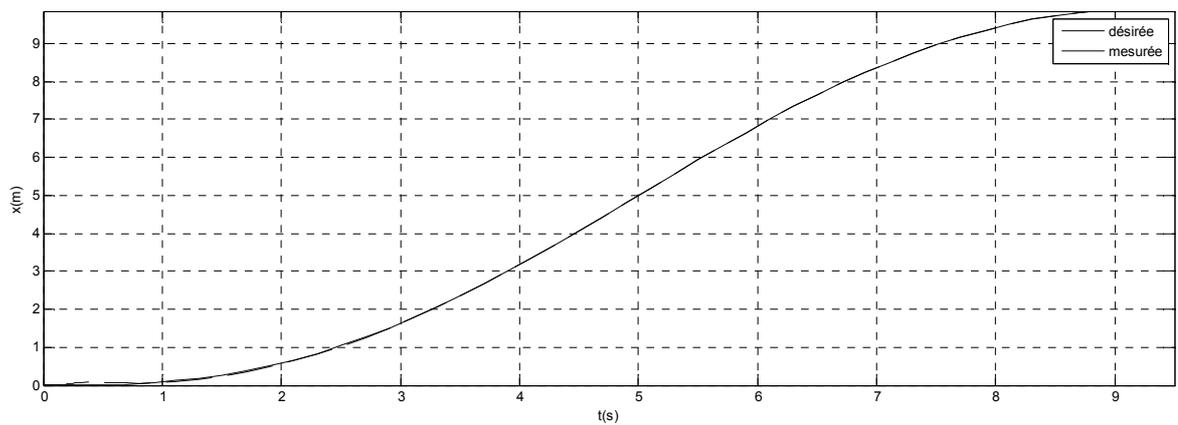
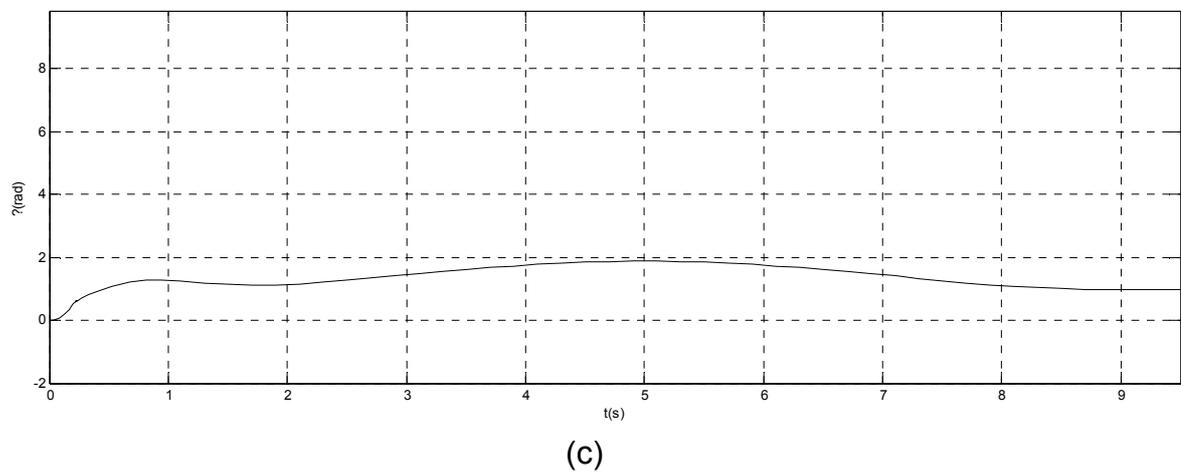
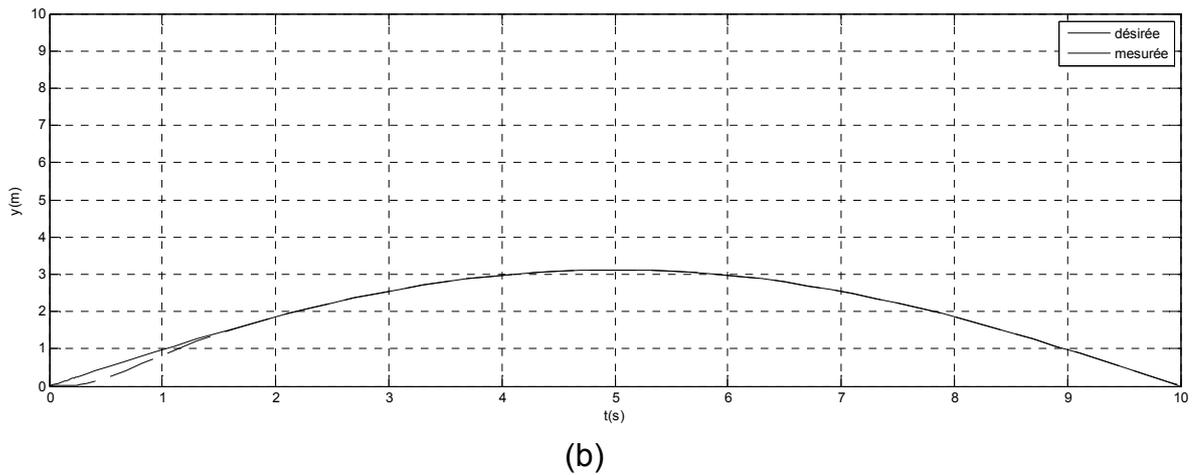


Figure 4.9: les trajectoires désirée et mesurées du robot à trois roues



(a)



Figures 4.10 : trajectoires désirée et réelle de  $x$  (fig. a),  $y$  (fig. b), et  $\Phi$  (fig. c) pour le robot à trois roues

## IV.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté un cadre intégré basé sur la théorie de la platitude différentielle de planification et le contrôle de robots mobiles. Le cadre proposé fournit une stratégie efficace pour la planification des trajectoires désirées et la conception du contrôleur exponentiellement stable de manière intégrée. Cette méthodologie a été illustrée avec succès sur deux types de robots mobiles non holonomes : robots mobiles à deux-roues et robots mobile de type voiture trois roues. Les résultats de simulation montrent que les trajectoires sont parfaitement suivies.

Il a été également montré l'intérêt des systèmes plats pour un problème concret de l'automatique qui est la poursuite de trajectoires. Nous avons commencé par le calcul des bouclages dynamiques endogènes assurant la poursuite en présence des perturbations. Ces bouclages permettent la linéarisation du système initial et par la suite le calcul d'un retour d'état stabilisant dans l'espace des sorties plates.

## Chapitre 5

### Platitude des manipulateurs mobiles

#### V.1. Introduction

Les manipulateurs mobiles sont des systèmes intrinsèquement non holonomes où la base mobile est soumise à des contraintes non holonomes qui résultent du non glissement sur les roues. Le couplage dynamique fortement non linéaire entre la base mobile et le bras manipulateur, en plus des contraintes non holonomes sur la base, rend ces systèmes difficiles à planifier et à contrôler. Alors que la plupart des armatures de manipulateurs mobiles sont conçues aujourd'hui avec actionnement complet, c'est-à-dire, que les actionneurs sont placés à toutes les articulations du bras, le sous actionnement peut également être une solution viable pour réduire les coûts de fabrication et d'exploitation. Les robots à deux roues différentielles et de type voiture sont les plus largement utilisés comme des bases mobiles dans la robotique.

Les principales contributions de ce chapitre montrent que : (i) des manipulateurs mobiles avec un bras sous actionnés peuvent être conçus pour être différentiellement plat, avec une gamme large de sous actionnement possible pour la redistribution d'inertie appliquée sur le bras manipulateur, (ii) un robot mobile différentiel peut être utilisé comme une base mobile du manipulateur sous actionnée conservant la platitude différentiel. Grâce à des applications illustratifs on va démontrer que la planification de trajectoire et le problème de conception de la loi de commande du système manipulateur mobile peut être résolu de manière efficace et manière simplifiée avec la propriété platitude différentielle.

#### V.2.1. Recherche d'un modèle dynamique

On considère un manipulateur mobile avec un bras de  $n$ -liens qui fonctionne dans un plan horizontal et une base mobile de deux-roues qui roule de façon différentielle. Dans la figure 5.1, le bras manipulateur est monté sur la base mobile à  $P_1$ . Le centre de masse  $C$  de la base mobile est à une distance  $a$  du point milieu. La configuration du système est donnée par :

$$q = [q_A^T, q_B^T]^T \quad (5.1)$$

où :

$$q_A = [x, y, \theta]^T \quad (5.2)$$

$$q_B = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \quad (5.3)$$

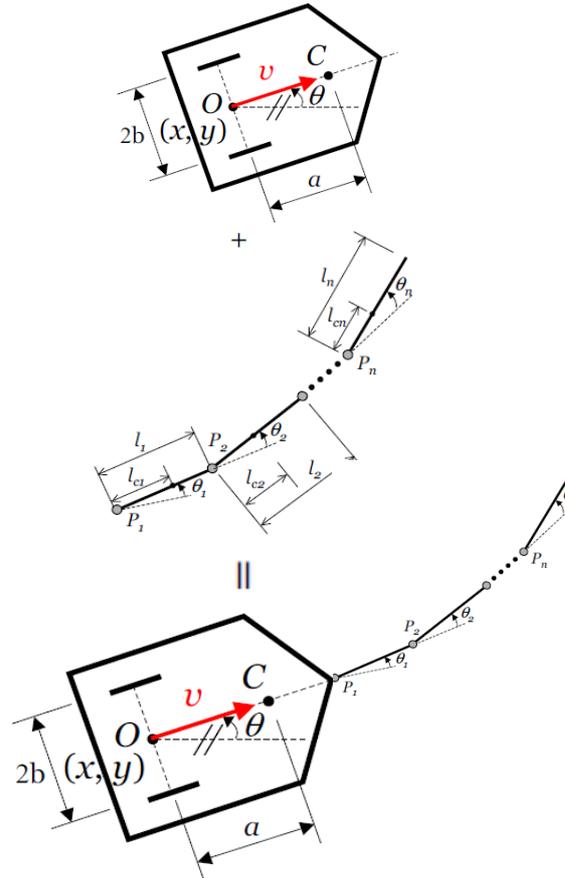


Figure 5.1 : Manipulateur mobile considéré

$q_A$  sont les coordonnées décrivant la position de la base mobile et  $q_B$  sont les coordonnées des angles conjoints pour le bras manipulateur.  $(x, y)$  est la position du point milieu de la base mobile et  $\theta$  est l'orientation de la base mobile par rapport à l'axe des abscisses.  $\theta_i$  désigne l'angle relatif conjoint du lien  $i$  du bras manipulateur par rapport au lien  $i-1$ .  $l_i$  et  $l_{ci}$  représentent la longueur du lien  $i$  et les distances du centre de masse de lien  $i$  par rapport au point  $P_i$ , respectivement. Pour décrire les équations du mouvement du manipulateur mobile, nous expliciterons d'abord les équations du mouvement pour la base mobile et le bras,

séparément, avec les forces d'interaction et des couples dans les deux sous modèles. Ces sous modèles sont ensuite combinés et les forces d'interaction et les couples sont éliminés pour trouver les équations du mouvement de l'ensemble du système.

### VI.2.1. Modèle dynamique de la base mobile

Nous considérons le même modèle du robot mobile à deux roues. Les expressions détaillées sont données en annexe.

Sous l'hypothèse de non glissement des roues, les contraintes non holonomes du système sont données par :

$$C_A(q_A)\dot{q}_A = 0 \quad (5.4)$$

Avec une matrice de  $S_A(q_A)$  qui s'étend sur l'espace nul de  $C_A(q_A)$ , il est possible de définir un vecteur vitesse  $v_A$  tel que

$$\dot{q}_A = S_A(q_A)v_A \quad (5.5)$$

où :

$$v_A = [v, \dot{\theta}]^T \quad (5.6)$$

Ici,  $v$  est la vitesse du point milieu de la base mobile. En utilisant la formulation de Lagrange avec le vecteur multiplicateur  $\lambda$  associé aux contraintes de l'équation. (5.4), les équations du mouvement pour la base mobile sont données par :

$$M_A\ddot{q}_A + V_A = E_A\tau_A - C_A^T\lambda - R \quad (5.7)$$

où  $R$  désigne le vecteur force généralisée le long  $q_A$  résultant de l'interaction forces et couples appliqués par le bras manipulateur sur la base mobile à  $P_1$ . Les expressions des autres matrices et les vecteurs de cette équation sont présentés en annexe.

### V.2.2. Modèle dynamique du bras manipulateur

Les équations de la dynamique du bras manipulateur peuvent être dérivées à l'aide de la formulation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (5.8)$$

où  $L$  représente le lagrangien défini par  $L = K - V$  et  $K$ ,  $V$  sont l'énergie cinétiques et l'énergie potentielle du bras manipulateur, respectivement. L'énergie cinétique du lien  $i$  du bras est donnée par :

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} = \frac{1}{2} I_i w_i^T w_i \quad (5.9)$$

où  $m_i$  est la masse du lien  $i$ ,  $v_{ci}$  est la vitesse du centre de masse de lien  $i$  et  $I_i$  est le moment d'inertie de lien  $i$ .  $w_i$  est la vitesse inertielle angulaire du lien  $i$ , exprimé par :

$$w_i = (\dot{\theta} + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dots + \dot{\theta}_i) \hat{z} \quad (5.10)$$

où  $\hat{z}$  est le vecteur unitaire le long d'un axe normal au plan horizontal des mouvements. Les équations du mouvement du manipulateur peuvent être écrites comme suit :

$$M_B(q) \ddot{q} + B_B(q, \dot{q}) \dot{q} + G_B(q) = Q_B \quad (5.11)$$

où  $M_B$  désigne la matrice d'inertie et  $B_B \dot{q}$  le vecteur de la force de Coriolis centripète.  $G_B$

Liée à l'énergie potentielle  $V$  est donnée par :

$$G_B = \frac{\partial V}{\partial q} \quad (5.12)$$

$Q_B$  (équation (5.11)) désigne le vecteur des forces généralisées sur le bras manipulateur, et qui peut être exprimé par :

$$Q_B = \begin{pmatrix} R \\ \tau_B \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

où  $\tau_B = [\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_n]^T$  et  $\tau_i (i=1, \dots, n)$  désigne le couple d'entrée à l'articulation  $i$ . L'équation (5.11) peut encore être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{B11} & M_{B12} \\ M_{B21} & M_{B22} \end{pmatrix}}_{M_B} \begin{pmatrix} \ddot{q}_A \\ \ddot{q}_B \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} V_{B1} \\ V_{B2} \end{pmatrix}}_{B_{B\dot{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} G_{B1} \\ G_{B2} \end{pmatrix}}_{G_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}}_{Q_B} \tau_B + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

où  $I_n$  représente la matrice identité de taille  $n$ .  $G_{B1}$  est un vecteur nul puisque l'énergie potentielle  $V$  est indépendante de  $q_A$  et peut être calculée à partir de l'équation (5.13).

### V.2.3. Modèle dynamique du manipulateur mobile

De l'équation (5.5), l'ensemble du système satisfait la relation suivante :

$$\dot{q} = S(q)v \quad (5.15)$$

où :

$$S(q) = \begin{pmatrix} S_A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad v = [v_A^T, \dot{q}_B^T]^T \quad (5.16)$$

En combinant les équations (5.11) et (5.14), on obtient :

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G_B(q) = E(q)\tau - \begin{pmatrix} C_A^T \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

où :

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_A + M_{B11} & M_{B12} \\ M_{B21}^T & M_{B22} \end{pmatrix}, \quad V(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} V_A + V_{B1} \\ V_{B2} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$E(q) = \begin{pmatrix} E_A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Afin d'éliminer le terme de contrainte dans les équations du mouvement de l'équation (5.17), par dérivation de l'équation (5.15), on obtient  $\ddot{q} = \dot{S}v + Sv$ . En substituant  $\ddot{q}$  dans l'équation (5.17), et en utilisant la propriété  $C_A S_A = 0$ , on obtient finalement :

$$A(q)\dot{v} + D(q, v) + G(q) = S^T E_\tau \quad (5.20)$$

où :

$A(q) = S^T MS$ ,  $D(q, v) = S^T M \dot{S} v + S^T V$  et  $G(q) = S^T G_B$ . Et le fait que,  $G_{B1} = 0$  le terme  $G(q)$  a la forme suivante :

$$G(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{B2} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

En général, le modèle dynamique d'un manipulateur mobile est fortement non linéaire. Par conséquent, il est assez difficile de caractériser la platitude différentielle d'un tel système, surtout quand il est sous actionné.

### V.3. Structure d'équations de mouvement

Il peut être démontré que les équations du mouvement du manipulateur mobile avec la distribution d'inertie ont la forme suivante [21] :

$$A_j(q) \dot{v} + D_j(q, v) + G_j(q) = \begin{pmatrix} S_A^T E_A \tau_A \\ \tau_B \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

où l'indice  $j$  indique que la distribution d'inertie est appliquée sur le dernier lien  $j$  où  $j$  peut varier de 2 à  $n$ . Pour chacun des choix de  $j$  :

$A_j (n+2) \times (n+2)$  est la matrice d'inertie,

$D_j$  de dimension  $(n+2)$  est le vecteur non linéaire, et

$G_j$  est un vecteur de dimension  $(n+2)$ , ayant la forme suivante :

$$A_j = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{A}_j(q) & a_{n-j+3} & a_{n-j+4} & \cdots & a_{n+2} \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-j+3} & \cdots & a_{n-j+3} & a_{n-j+4} & \cdots & a_{n+2} \\ 0 & a_{n-j+4} & \cdots & a_{n-j+4} & a_{n-j+4} & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n+2} & \cdots & a_{n+2} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+2} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} d_1(q, v) \\ d_2(q, v) \\ \vdots \\ d_{n-j+2}(q, v) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, G_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{n-j+2}\theta_{n-j+2} \\ \vdots \\ k_n\theta_n \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

où  $\bar{A}_j(q)$   $(n+2-j) \times (n+2-j)$  est une sous matrice de  $A_j$ . Grâce au choix de la distribution de l'inertie, tous les termes de  $A_j$ , à l'exception de ses sous matrices  $\bar{A}_j(q)$ , sont des constantes. En outre, la matrice  $A_j$  a la structure d'un modèle "L". Par exemple, les mêmes constantes  $a_{n+2}$  apparaissent dans la ligne  $(n+2)$  et la colonne  $(n+2)$  formant une forme de "L". Les dernières entrées dans le vecteur  $Dj$  sont des zéros. A noter aussi que le vecteur  $Gj$  a des zéros dans ses premières  $(n-j+3)$  entrées.

#### V.4. Platitude différentielle

Selon la répartition d'inertie spéciale et le sous actionnement, les équations de mouvement du système se composent de  $n+2$  équations dynamiques différentielles de premier ordre (équation 5.22) et  $n+3$  équations cinématiques différentielles du premier ordre (équation 5.15). Les variables d'état dans les équations du mouvement sont :

$$(q, v) = (x, y, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n, v, \dot{\theta}, \dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n) \quad (5.25)$$

Le système est piloté par  $n-j+3$  actionneurs : deux pour la base mobile,  $n-j+1$  pour le bras manipulateur. Selon la théorie de la platitude différentielle [7], nous avons besoin de  $n-j+3$  sorties plates pour sélectionner les trois entrées de commande. Nous choisissons  $n-j+2$  sorties plates comme étant  $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-j+2}) = (x, y, \theta_1, \dots, \theta_{n-j})$  et  $F_{n-j+3}$  comme suit:

$$F_{n-j+3} = \theta + \sum_{i=1}^n \theta_i \quad (5.26)$$

La propriété de platitude différentielle du système avec ces sorties plates peut être démontrée en exprimant toutes les variables d'état et d'entrée en fonction des sorties plates et leurs dérivés :

$$(x, y) = (F_1, F_2) \quad (5.27)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1}\right) \quad (5.28)$$

$$v = \sqrt{\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2} \quad (5.29)$$

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = (F_3, F_4, \dots, F_{n-j+2}) \quad (5.30)$$

<b>• deux liens manipulateurs (n=2)</b>				
de liens avec conception spéciale	actionneur (s)	source (s)	actionnement	sorties plates
J=2	$\tau_1, \tau_2$	$K_2$	1	$F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2$ .
<b>• trois liens manipulateurs (n=2)</b>				
de liens avec conception spéciale	actionneur (s)	source (s)	actionnement	sorties plates
J=2	$\tau_1, \tau_2, \tau_3$	$K_3$	1	$F_3 = \theta_1, F_4 = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ .
J=3	$\tau_1$	$K_2, K_3$	2	$F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ .
<b>• quatre liens manipulateurs (n=4)</b>				
de liens avec conception spéciale	actionneur (s)	source (s)	actionnement	sorties plates
J=2	$\tau_1, \tau_2, \tau_3$	$K_4$	1	$F_3 = \theta_1, F_4 = \theta_2, F_5 = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ .
J=3	$\tau_1, \tau_2$	$K_3, K_4$	2	$F_3 = \theta_1, F_4 = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ .
J=4	$\tau_1$	$K_2, K_3, K_4$	3	$F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ .

$\tau_i$  désigne l'actionneur à l'articulation  $i$ .

$k_i$  désigne le ressort de torsion à l'articulation  $i$ .

Tableau 5.1 Les sorties plates pour les bras manipulateur

Dans le tableau 5.1, un ensemble de conditions de conception est répertorié avec les sorties plates pour des manipulateurs mobiles avec deux, trois et quatre liens. Dans ce tableau,  $\tau_i$  et  $k_i$  désignent respectivement l'actionneur et le ressort de torsion à l'articulation  $i$ . Notez que les deux premières sorties plates  $(F_1, F_2) = (x, y)$  sont communes à tous les cas et les données de ce tableau s'appliquent aux manipulateurs avec des liens supplémentaires.

### V.5. Application

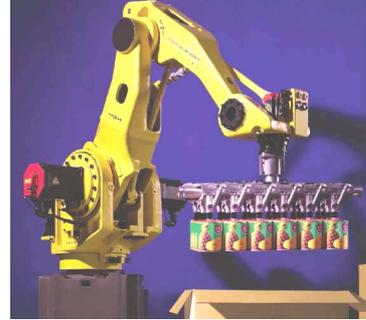
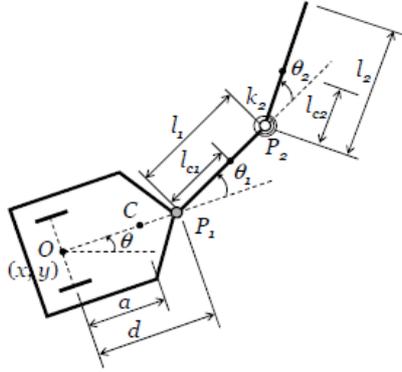


Figure 5.2 : manipulateur mobile avec base à deux roues et un bras de deux liens

Dans cet exemple d'illustration,  $n=2$  et  $j=2$ , c'est-à-dire, le bras manipulateur est conçu avec les conditions suivantes :

- $l_{c2} = 0$ , c'est-à-dire le centre de masse du deuxième lien est à la deuxième articulation  $P_2$ .
- $m_1 l_{c1} + m_2 l_1 = 0$ , c'est-à-dire, le centre de masse du premier et de second lien est à la première articulation  $P_1$ . Ici,  $m_i$  et  $l_i$  désignent la masse et la longueur du lien  $i$ , respectivement.  $l_{ci}$  est la distance du centre de masse du lien  $i$ .

L'équation du mouvement est donnée par:

$$A_2(q)\dot{v} + D_2(q, v) + G_2(q) = J_2\tau \tag{5.31}$$

Les expressions des matrices et des vecteurs dans l'équation (5.31) sont :

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_3 & a_4 \\ 0 & a_3 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_4 & a_4 & a_4 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2\theta_2 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & 0 & 0 \\ j_{12} & j_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \\ \tau_l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

où  $\tau_r$  et  $\tau_l$  sont les couples moteur appliqués sur les deux roues droite et gauche, respectivement. Les expressions détaillées de  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $j_{11}$ ,  $j_{12}$ ,  $j_{21}$ ,  $j_{22}$  et  $j_{23}$  sont présentées en annexe.

Par ailleurs, le modèle dynamique de ce système peut être exprimé dans une forme dans l'espace d'état comme suit :

$$\dot{q} = Sv \quad (5.34)$$

$$\dot{v} = f_1 + f_2\tau, \quad (5.35)$$

où :

$$f_1 = A_2^{-1}D_2 \quad \text{et} \quad f_2 = A_2^{-1}J_2 \quad (5.36)$$

### V.5.1. Construction du difféomorphisme

Dans ce système à trois actionneurs, deux pour la base mobile et un pour le bras, trois sorties plates peuvent être sélectionnées  $(F_1, F_2) = (x, y)$  sont deux sorties plates. La troisième sortie plate est telle que :

$$F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2 \quad (5.37)$$

Le système sous forme de représentation d'état est donné par :

$$(q, v) = (x, y, \theta, \theta_1, \theta_2, v, \dot{\theta}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \quad (5.38)$$

Les expressions de sorties plates sont :

$$(x, y) = (F_1, F_2) \quad (5.39)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1}\right) \quad (5.40)$$

$$v = \sqrt{\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2} \quad (5.41)$$

La dernière ligne de l'équation du mouvement (5.31) est donnée par :

$$a_4(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + k_2\theta_2 = 0 \quad (5.42)$$

Puis, en utilisant le choix de  $F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2$ , on obtient :

$$\theta_2 = -\frac{a_4}{k_2} \ddot{F}_3 \quad (5.43)$$

L'expression de la sortie plate  $\theta_1$  est déterminée à partir de  $F_3 = \theta + \theta_1 + \theta_2$ , à l'aide des équations (5.40) et (5.43).

### V.5.2. Planification des trajectoires désirées pour le mouvement point à point

En vertu de la platitude, les états initiaux et finaux du système peuvent être déterminés par des conditions aux limites pour les trois sorties plates et leurs dérivés dans l'espace de sorties plates du difféomorphisme.

En général, la planification d'une trajectoire désirée dans l'espace original pour le mouvement point à point est très difficile, surtout lorsque le système est contraint à des conditions non-holonomes, parce que toutes les trajectoires sont réalisables. Cependant, l'un des principaux avantages de la propriété de platitude différentielle est de choisir une trajectoire libre sur une période du temps dans l'espace de sorties plates. La relation inverse est ensuite utilisée pour calculer toutes les trajectoires dans l'espace d'état d'origine à partir des trajectoires prévues des sorties plates dans l'espace de sorties plates. Il peut y avoir alors différentes façons de générer les trajectoires désirées, telles qu'en utilisant une série de Fourier [30], à titre illustratif. Nous avons sélectionné de simples trajectoires polynomiales :

	$X$ (m)	$Y$ (m)	$\theta$ (rad)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	$V$ (m/s)
$t_0 = 0$ s	0	0	0	0	0	1
$t_f = 10$ s	10	10	0	$\pi / 4$	$\pi / 4$	1

Tableau 5.2 : conditions aux limites des trajectoires

Les trajectoires  $F_1$ ,  $F_2$  sont des polynômes de degré 5. Quant à la trajectoire  $F_3$ , elle est de degré 7. Les coefficients des polynômes sont déterminés par les conditions aux limites.

### V.5.3 Conception du contrôleur

En raison de la platitude, un contrôleur de stabilisation exponentielle peut être développé dans l'espace des sorties plates puisque le système est représenté par une boucle :

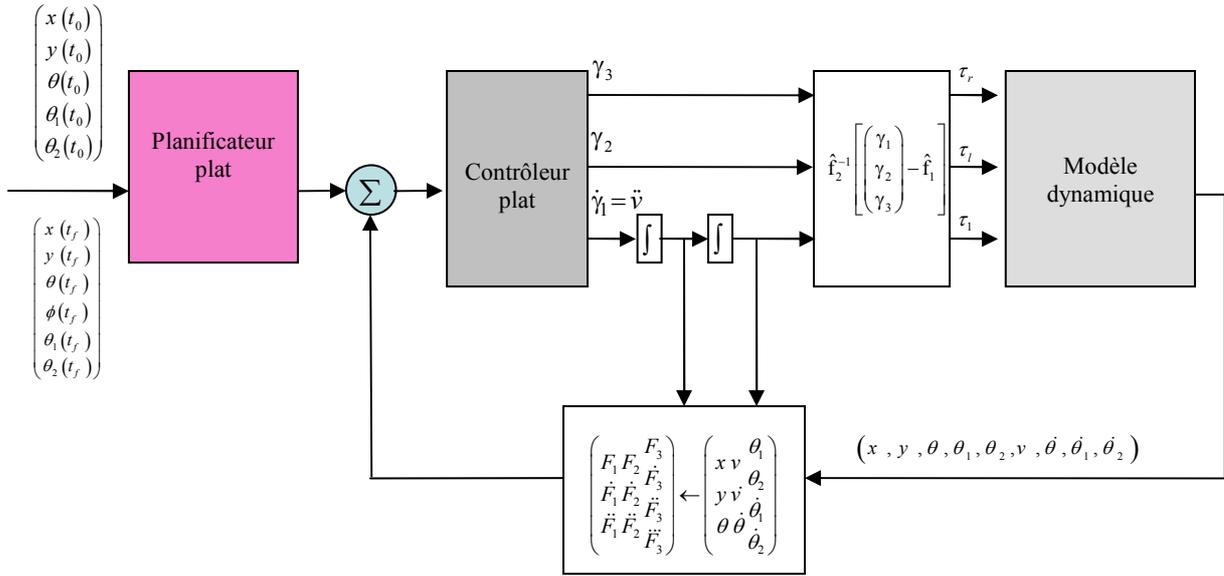


Figure 5.3 : La boucle de régulation

Le système possède trois entrées. Un sous-ensemble de l'équation (5.34) peut être écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \\ \tau_1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

où  $\hat{f}_1$  est un sous-vecteur  $(3 \times 1)$  de  $f_1$  et  $\hat{f}_2$  est une sous-matrice  $(3 \times 3)$  de  $f_2$ . L'équation (5.55) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{v} = \gamma_1 \quad (5.45)$$

$$\ddot{\theta} = \gamma_2 \quad (5.46)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \gamma_3 \quad (5.47)$$

La transformation suivante est utilisée :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \\ \tau_1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Afin de trouver une relation inversible entre les entrées et les dérivées supérieures des sorties plates, ces dernières ont été dérivées jusqu'à ce que une entrée apparaisse dans leur expression.

$$\begin{pmatrix} \ddot{F}_1 \\ \ddot{F}_2 \\ F_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -v \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & v \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_2}{a_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

Les entrées  $C_i$  sont présentées dans l'annexe. De cette relation, et dans l'espace de sorties plates, le système est régi par des équations linéaires avec les nouvelles entrées indépendantes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  :

$$\ddot{F}_1 = u_1 \quad (5.50)$$

$$\ddot{F}_2 = u_2 \quad (5.51)$$

$$F_3^{(4)} = u_3 \quad (5.52)$$

Dans l'ordre d'achever la stabilité exponentielle les commandes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont :

$$\begin{aligned} u_1 &= \ddot{F}_{1d} + p_2 \ddot{\tilde{F}}_1 + p_1 \dot{\tilde{F}}_1 + p_0 \tilde{F}_1 \\ u_2 &= \ddot{F}_{2d} + q_2 \ddot{\tilde{F}}_1 + q_1 \dot{\tilde{F}}_1 + q_0 \tilde{F}_1 \\ u_3 &= F_{3d}^{(4)} + r_3 \ddot{\tilde{F}}_3 + r_2 \dot{\tilde{F}}_3 + r_1 \tilde{F}_3 + r_0 \tilde{F}_3 \end{aligned} \quad (5.53)$$

où  $\tilde{F}_i$  sont définis par  $F_{id} - F_i$  et les  $F_{id}$  sont les trajectoires désirées des sorties plates  $F_i$ .  $p_i$ ,  $q_i$  et  $r_i$  sont les gains de commande.

#### V.5.4. Résultats de simulations

Afin de montrer la convergence exponentielle de la trajectoire désirée dans la simulation, les erreurs initiales ont été données par les conditions aux limites pour  $x(0)$ ,  $\theta_1(0)$ ,  $\theta_2(0)$  à 1m,  $\pi/6$  rad et  $\pi/6$  rad, respectivement. Les gains de contrôle dans l'équation (4.53) ont été choisis de sorte que toutes les racines de l'équation caractéristique de l'erreur dynamique sont à -2. Leurs valeurs sont  $(p_0, p_1, p_2) = (8, 12, 6)$ ,

$(q_0, q_1, q_2)=(8, 12, 6)$  et  $(r_0, r_1, r_2, r_3)=(16, 32, 24, 8)$  respectivement. La figure 5.4 montre les trajectoires désirée et mesurées de la base mobile  $(x, y)$ . Les trajectoires  $x, y, \theta, \theta_1$  et  $\theta_2$  sont présentées sur la figure 5.5. Enfin, les couples calculés sont représentés dans la figure 5.6.

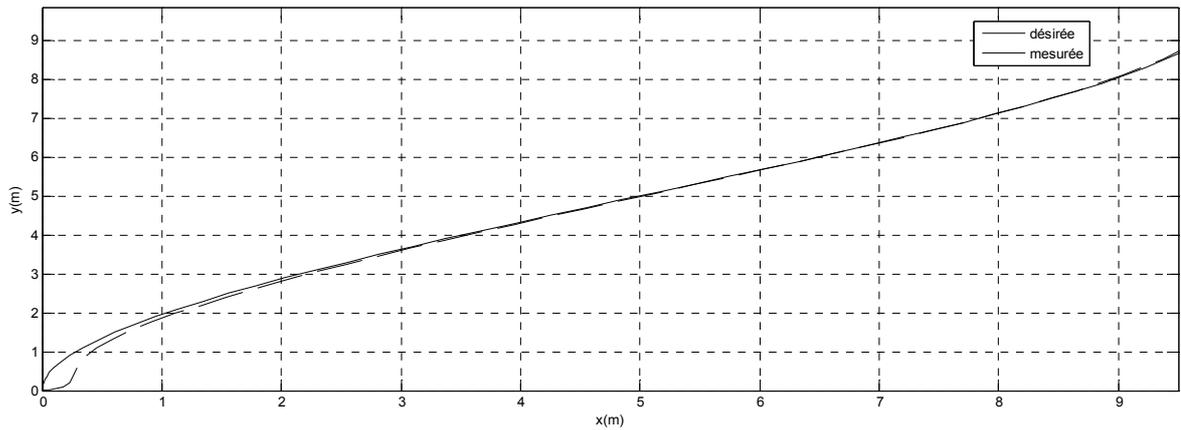
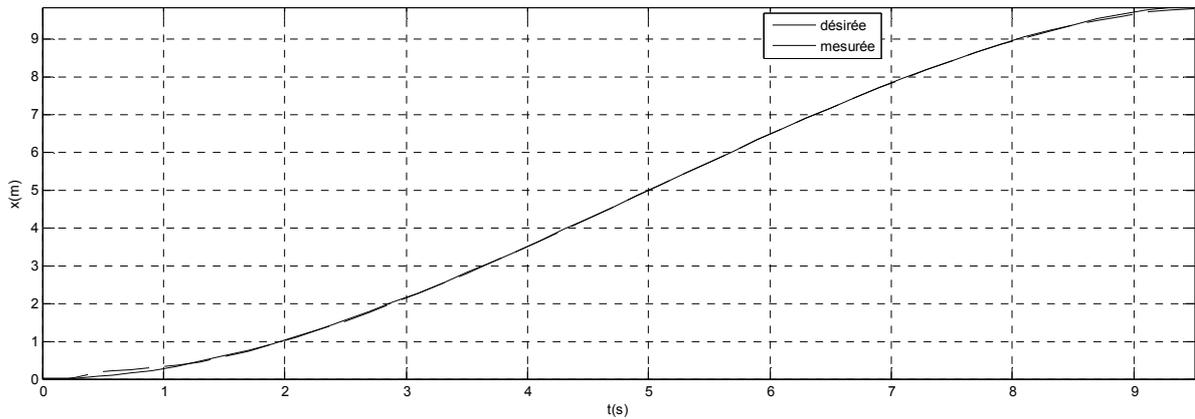
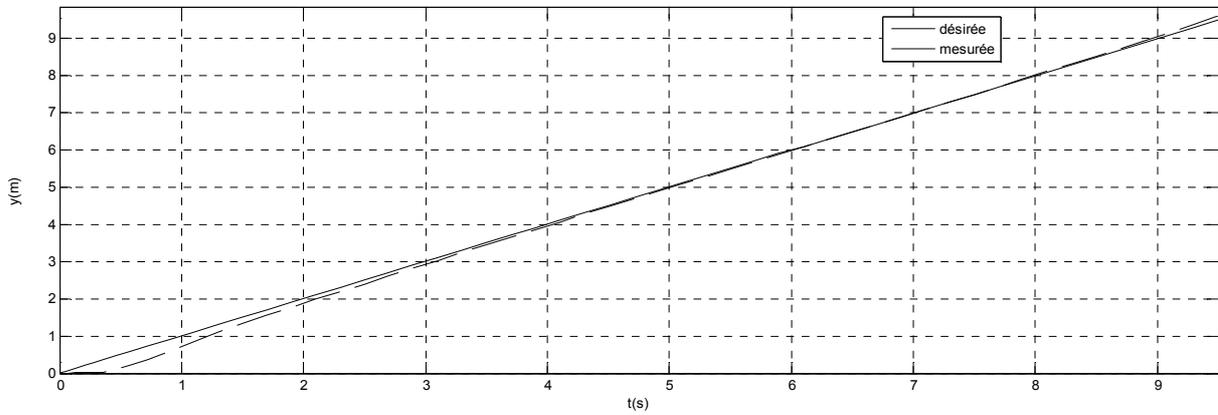


Figure 5.4: la trajectoire désirée et mesurées



(a)



(b)

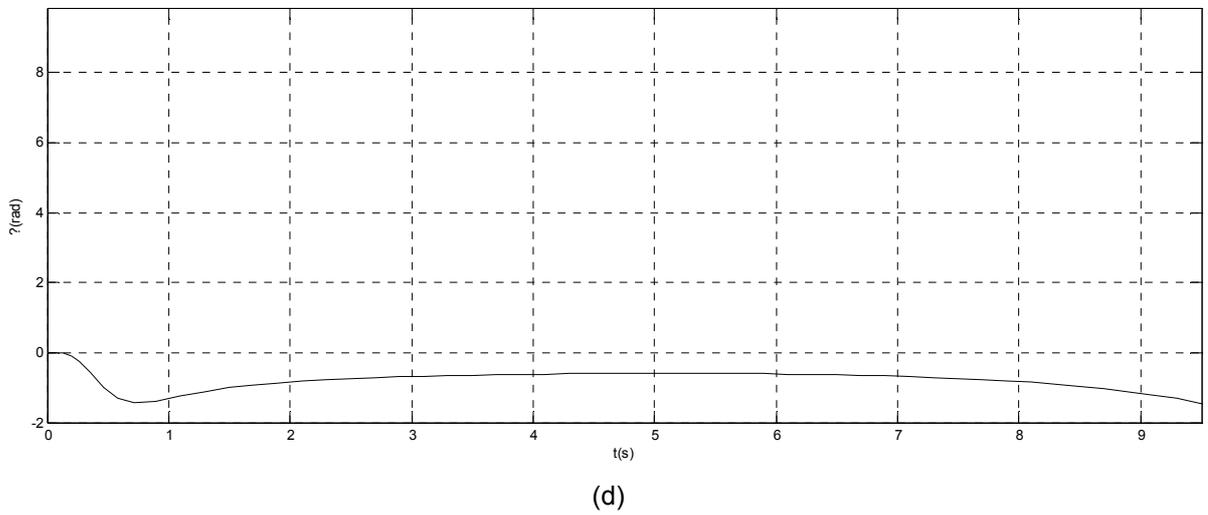
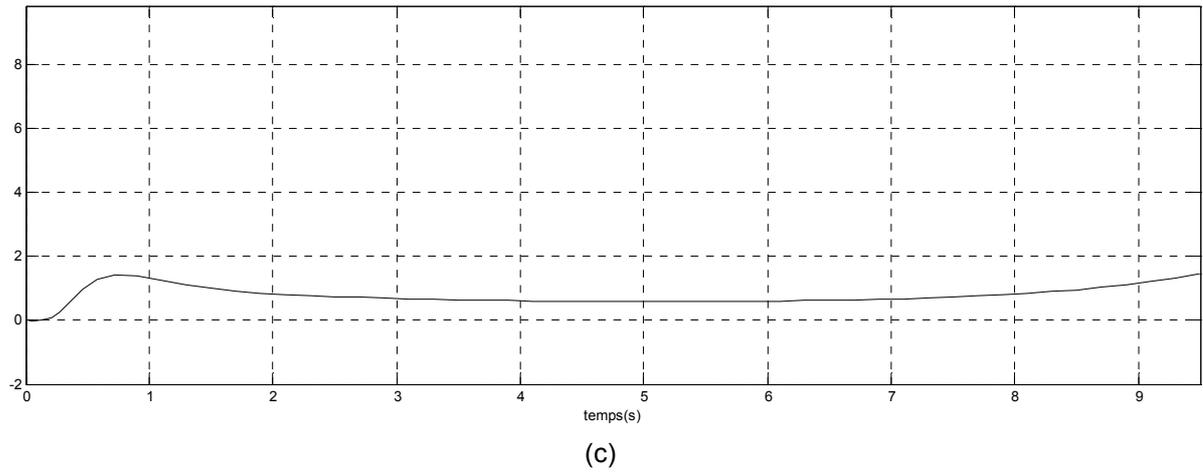


Figure 5.5 : trajectoires désirées et mesurées de  $x$  (fig. a),  $y$  (fig. b),  $\theta$  (fig. c),  $\theta_2$  (fig. d) pour le robot à deux roues

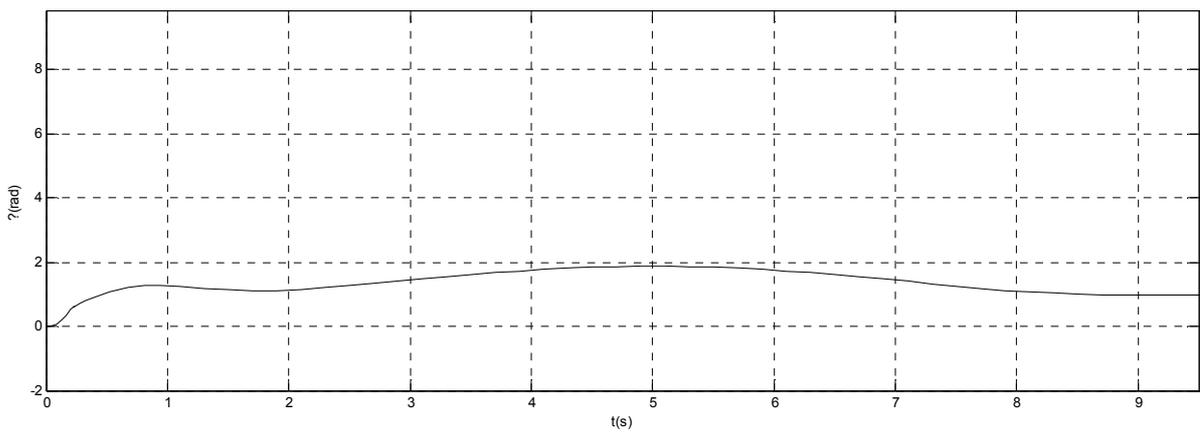


Figure 5.6 : trajectoire mesurée de l'angle d'orientation  $\theta_2$

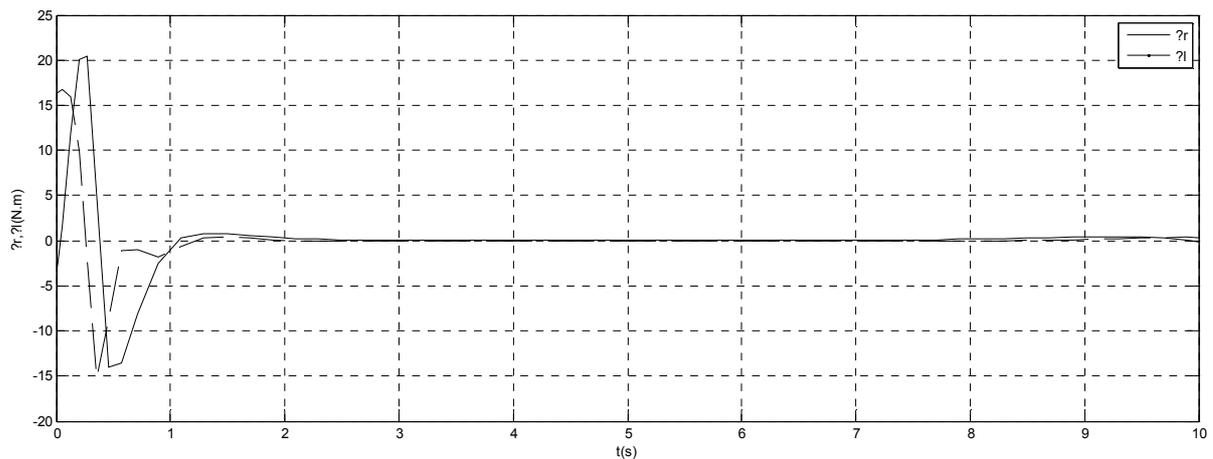


Figure 5.7 : Les entrées de couples  $\tau_r$ ,  $\tau_l$  pour le système d'origine

## V.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la conception d'un manipulateur avec une base mobile à deux roues. Le système considéré est plat différentiel et sous actionné. Dans cette étude, la base mobile est soumise à des contraintes non holonomes en raison de l'état de non glissement des roues et le bras manipulateur est globalement sous actionné. En utilisant une distribution spéciale d'inertie et un placement des ressorts de torsion au niveau des joints non actionnés du bras manipulateur, il a été démontré que ce type de manipulateur mobile peut être conçu de manière à ce qu'il soit plat. En outre, une large gamme de modèles est possible tout en conservant la platitude différentielle.

La stabilité exponentielle du système est garantie par le contrôleur à base de platitude différentielle. Le système manipulateur mobile sous actionné abordé a  $n$  liens, dans lequel une large gamme de sous actionnement de 1 à  $n-1$  est possible, en plus des contraintes non holonomes sur sa base mobile. Le contrôleur présenté dans ce chapitre est très particulier puisque, aucun autre contrôleur n'a été rapporté pour une telle classe de système afin d'effectuer le mouvement point à point. Par conséquent, il n'est pas possible de comparer les performances de ce contrôleur avec les autres ; la comparaison des contrôleurs pourrait encore être difficile car aucune méthode standard pour la comparaison structurelle n'est disponible.

De plus pour la même stratégie de commande adoptée, les performances seraient différentes avec un choix différent des gains de contrôle.

Les résultats de simulation montrent que la planification et le contrôle des manipulateurs sous actionnés peuvent être efficacement résolus en exploitant l'avantage de la propriété de la platitudo différentielle.

## **Conclusion générale**

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthodologie qui s'applique aux problèmes de génération et de poursuite de trajectoires des systèmes linéaires ainsi qu'à une classe de systèmes non linéaires, appelée systèmes plats. Cette classe nous a permis de paramétriser toutes les trajectoires du système en fonction d'une sortie plate et un nombre fini de ses dérivées.

Le concept établit une relation d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire trivial, appelée équivalence de Lie-Bäcklund, dont la dimension des états n'est pas nécessairement identique. Cette différence de dimension se traduit par l'élaboration d'un bouclage dynamique endogène nous permettant de transformer le système initial en un système trivial.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les bases théoriques relatives aux systèmes non holonomes. Nous avons notamment donné un rapide tour d'horizon sur les algorithmes répondant aux questions de la planification de trajectoire et de la poursuite de trajectoire. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous avons défini la notion de platitude dans le cadre de l'algèbre différentielle et de la géométrie différentielle. Dans le troisième chapitre, nous avons exposé le problème de génération pour les systèmes plats pour deux cas:

- Le premier concerne la génération de trajectoires sans contraintes : La génération dans ce cas est réalisée à partir de formes temporelles polynomiales pour les sorties plates. Les coefficients de ces polynômes sont choisis de manière à satisfaire les conditions initiales et finales de la dynamique du système initial.

- Le deuxième concerne la génération de trajectoires sous contraintes : Les systèmes physiques, y compris la dynamique des actionneurs, sont souvent soumis à de multitude de contraintes. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte ces contraintes pendant la phase de génération afin de planifier des trajectoires réalistes. La génération proposée pour ce problème repose sur une reparamétrisation du temps des trajectoires de référence des sorties plates.

Dans le quatrième chapitre, on a testé la propriété de platitude différentielle de deux différents types de robot mobiles non-holonomes en l'occurrence un robot différentiel à deux roues et un robot à trois roues. Il ressort que la platitude différentielle peut être utilisée pour la planification et le contrôle des robots mobiles comme un cadre intégré.

Dans le dernier chapitre nous avons étudié la conception de manipulateurs mobiles sous actionné différentiellement avec une base mobile à deux roues. Le manipulateur mobile s'est montré être différentiellement plat et la propriété a été atteinte par une conception de distribution d'inertie spéciale sur le bras manipulateur. En outre, il a été démontré que la conception de manipulateurs mobiles avec un sous-actionnement est possible.

En ce qui concerne les perspectives envisagées de notre étude, on peut citer :

- L'introduction d'un critère d'optimisation pendant la phase de génération de trajectoires.
- L'utilisation des méthodes d'optimisation pour la génération de trajectoires sous contraintes.
- La génération de trajectoires des systèmes hybrides ou commutés.
- L'application du concept de platitude à d'autres problèmes d'automatique : commande par retour de sortie, identification, observation, diagnostic...

Ces perspectives constituent des orientations possibles pour des travaux futurs qui trouverons leurs application à la fois dans le cadre théorique de formalisation, et dans les cadres industriels demandeurs de telles investigations.

## REFERENCES

- [1]. A. Benalia, "Génération de trajectoires des systèmes non linéaires en présence de contraintes". Conférence GDA 2003 , Valenciennes, France.
- [2]. A. Benalia, "Contribution à la modélisation et la commande robuste du confort au sein d'un habitacle automobile".Thèse de Doctorat, université d'Orsay 2004.
- [3]. Jean Pierre Carriou, "Commande des procédés", Génie des procédés de l'Ecole de Nancy, Paris 1996.
- [4]. M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon," a Lie – "Backlund approach to Equivalence and flatness of nonlinear" systems, IEEE transactions on automatic control, vol.44, no, 5,may 1999.
- [5]. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot, "Non linear systems", Tome1-Stability and stabilization. Edition Masson 1995.
- [6]. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot, "Systèmes non linéaires",Tome, Commande.
- [7]. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot "Energy shaping stabilization of dynamical systems", Laboratoire des signaux et systèmes SUPELEC, France, Octobre 2003.
- [8]. Alberto Isidori, "Nonlinear Systems",Second edition,1989.
- [9]. Philippe Martin, Pierre Rouchon, "Systèmes plats : Planification et suivi de Trajectoires", Ecole des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes Journées X-UPS, Mai 1999.
- [10]. Philippe Martin, R. M. Murray, Pierre Rouchon, "Flat systems, equivalence and trajectory generation", Technical report, Avril 2003.
- [11]. Philippe Martin, "Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats", Thèse, Ecole des Mines de Paris, Décembre 1992.
- [12]. Muruhan Rathinam, "Differentially Flat Nonlinear Control Systems", thèse, California Institute of Technology, Pasadena, California, April1997.
- [13]. Henk Nijmeijer, Arjan Van der Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", 3rd Edition 1996.
- [14]. H. Nijmeijer, et A. V. D. Schaft, (1991). "Nonlinear Dynamical Control Systems". Springer-Verlag.
- [15]. G. Lafferiere, et H. Sussmann, (1992). "A differential geometric approach to motion planning". Edition, J. Dans adnd, Z. Canny, Nonholonomic motion planning, International series in engineering and computer science. Kluwer.
- [16]. J. T. Schwartz, et M. Sharir, (1988). "A survey of motion planning and related geometric algorithms". Artificial Intelligence, 37 :157–169.

- [17]. J.-C. Latombe, (1991). "Robot Motion Planning" Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- [18]. H. Choset, (1996). "Sensor Based Motion Planning : the Hierarchical Generalized Voronoi Graph". Thèse de Doctorat, California Institute of Technology.
- [19]. B. Chazelle, et L. J. Guibas, (1989). "Visibility and intersection problems in plane geometry". *Discrete and Computational Geometry*, 4 :551–581.
- [20]. K. Shin, et N. McKay, (1986). "A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:491–500.
- [21]. M. Khatib, H. Jaouni, R. Chatila, et J.-P. Laumond, (1997). "Dynamic path modification for car-like nonholonomic mobile robots" . Dans *IEEE Conference on Robotics and Automation*.
- [22]. J. Borenstein, et Y. Koren, (1991). "The vector field histogram-fast obstacle avoidance for mobile robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(3):278–288.
- [23]. J. Barraquand, B.Langlois, et J. C. Latombe, (1992). "Numerical potential field techniques for robot path planning". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 22(2) :224–241.
- [24]. L.Kavraki, F.Lamiroux, , et C. Holleman, (1996). "Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(4):566–580.
- [25]. T. Statheros, M. Defoort, S. Khola, , K. McDonald-Maier,W. Howells, A. Kokosy, J. Palos, W. Perruquetti, et T. Floquet, (2006). "Automated control and guidance system" (acos) : An overview. Dans *International Conference on Recent Advances in Soft Computing (RASC)*, Canterbury, UK.
- [26]. J. O. Kim, et P. K. Khosla, (1992). "Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(3):338–349.
- [27]. E. Rimon, et D. Koditschek, (1992). "Exact robot navigation using artificial potential functions". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5):501–518.
- [28]. D. Fox, W. Burgard, et S. Thrun, (1997). "The dynamic window approach to collision avoidance". *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 4(1) :23–33.
- [29]. S. Quinlan, (1994). "Real-Time Path Modification of Collision-Free Paths". Thèse de Doctorat, Université de Stanford, Etats-Unis.
- [30]. O. Brock, et O. Khatib, (1998). "Mobile manipulation : collision free path modification and motion coordination". Dans *International Conference on Computational Engineering in Systems Applications*.
- [31]. R. Brockett, (1983). "Asymptotic stability and feedback stabilization". Dans R.Brockett, R.Millman, et H.Sussmann, , Edition, *Differential geometric control theory*, pp. 181–195. Boston,MA : Birkhauser.
- [32]. I. Kolmanovsky, et N. H. McClamroch, (1995). "Developments in nonholonomic control problems". *IEEE Control Systems Magazine*, 15:20–36.

- [33]. E. Delaleau, et P. da Silva, (1998). "Filtrations in feedback systems :Part i - systems and feedbacks, part ii - input-output decoupling and disturbance decoupling". *Forum Math.*, 10:259–276.
- [34]. C. Samson, (1990). "Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart". Dans *International Workshop Nonlinear Adaptive Control : Issues in Robotics*, France.
- [35]. J. Coron, (1992). "Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift". *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 5 :295–312.
- [36]. J. B. Pomet, (1992). "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift". *Systems and Control Letters*, 18 :147–158.
- [37]. C. Samson, (1995). "Control of chained systems: Application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :64–77.
- [38]. J. Godhavn, et O. Egeland, (1997). "A lyapunov approach to exponential stabilization of nonholonomic systems in power form". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :1028–1032.
- [39]. W. E. Dixon, Z. P. Jiang, et D. M. Dawson, (2000b). "Global exponential setpoint control of wheeled mobile robots: a lyapunov approach". *Automatica*, 36 :1741–1746.
- [40]. R. Murray, et S. Sastry, (1993). "Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :700–716.
- [41]. Z. P. Jiang, et H. Nijmeijer, (1999). "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :265–279.
- [42]. Z. P. Jiang, E. Lefeber, et H. Nijmeijer. "Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot". *System and Control Letters*, 42 :327–332.
- [43]. A. Bloch, et N. McClamroch, (1989). "Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints ». Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, USA.
- [44]. A. Bloch, M. Reyhanoglu, et N. McClamroch, (1992). "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1746–1757.
- [45]. J. Hespanha, , D. Liberzon, , et A. Morse, (1999). "Logic-based switching control of a nonholonomic system with parametric modeling uncertainty". *Systems and Control Letters*, 38 :167–177.
- [46]. C. Canudas-De-Wit, et O. Sordalen, (1992). "Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1791–1797.
- [47]. A. Astolfi, (1996). "Discontinuous control of nonholonomic systems". *System and Control Letters*, 27 :37–45.
- [48]. B. Laroche, Ph. Martin, N. Petit, "Commande par platitude : Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles", Cours B7-4 du module

Automatique Avancée, Ecole Nationale Supérieure De Techniques Avancées. 2005-2006 .

- [49]. J. Levine , "Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires", Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris, Mars 2004.
- [50]. Manfredi Maggiore, Kevin Passino, "Practical Internal Models for Output Feedback tracking in Nonlinear Systems", Department of Electrical Engineering, The Ohio State, University 2015 Neil Avenue, Columbus, OH 43210-1272
- [51]. Philippe Martin, Santosh Devasia, Brad Paden, "A different Look at Output Tracking of VTOL Aircraft", Center for Control Engineering and computation. ECE Department, University of California Santa Barbara.
- [52]. Sépanta Sékhavat, Thierry Fraichard, "Planification de trajectoires sous Contraintes cinématiques".

## 1.Nomenclature:

$m_0$  : la masse du robot.

$I_0$  : moment d'inertie de la base.

$r$  : rayon de la roue.

$b$  : la moitié de la distance entre les roues.

$I_1$  : moment d'inertie de la première liaison du bras.

$I_2$  : moment d'inertie de la seconde liaison du bras.

## 2 .Expressions détaillées de la section 3.2.1:

$$C_A = [\sin \theta, -\cos \theta, 0], S_A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (A.1)$$

$$M_A = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & -am_0 \sin \theta \\ 0 & m_0 & am_0 \cos \theta \\ -am_0 \sin \theta & am_0 \cos \theta & a^2 m_0 + I_0 \end{pmatrix}, \tau_A = \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{pmatrix}, (A.2)$$

$$VA = \begin{pmatrix} -am_0 \phi^2 \cos \theta \\ -am_0 \phi^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} \cos \theta / r & \cos \theta / r \\ \sin \theta / r & \sin \theta / r \\ b / r & -b / r \end{pmatrix}. (A.3)$$

## 2. Les éléments des matrices $A_2$ , $D_2$ et $G_2$ :

$$a_{11} = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{22} = \alpha_0 + \alpha_1 + I_0 + I_1 + I_2,$$

$$a_3 = \alpha_1 + I_1 + I_2,$$

$$a_4 = I_2,$$

$$d_1 = -\zeta_0 \dot{\theta}^2,$$

$$d_2 = \zeta_0 \dot{\theta} v,$$

$$j_{11} = 1/r,$$

$$j_{12} = 1/r,$$

$$j_{21} = b/r,$$

$$j_{22} = -b/r,$$

Où:

$$\zeta_0 = m_0 a + (m_1 + m_2) d,$$

$$\alpha_0 = m_0 a^2 = (m_1 + m_2) d^2,$$

$$\alpha_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2,$$

$$\bar{\zeta}_0 = (m_b a + m_w L) + (m_1 + m_2) d,$$

$$\bar{\alpha}_0 = (m_b a^2 + m_w L^2) + (m_1 + m_2) d^2,$$

$$\hat{\alpha}_0 = m_b a^2 - (m_b + m_1 + m_2) l^2 + (m_1 + m_2) d^2.$$

## 4. Les éléments des matrices $C_1$ , $C_2$ et $C_3$ :

$$C_1 = -2v \dot{\theta} \sin \theta - v \dot{\theta}^2 \cos \theta,$$

$$C_2 = 2v \dot{\theta} \cos \theta - v \dot{\theta}^2 \sin \theta,$$

$$C_3 = 0.$$

## 5. Les paramètres du système:

Paramètre	valeur	unité
d	0.4	m
a	0.2	m
r	0.1	m
b	0.2	m
$m_0$	10	Kg
$I_0$	0.5	Kg. m <sup>2</sup>
$(m_1, m_2)$	(1,1)	Kg
$(I_1, I_2)$	(0.1,0.1)	Kg. m <sup>2</sup>
$(l_1, l_2)$	(0.3,0.3)	m
$K_2$	1	kg.N/rad