République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BATNA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

***Mémoire***

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN ELECTRONIQUE

Option **:** Robotique

# Thème

# *Planification de trajectoires pour les bras Manipulateurs*

***Etudié par :***

*BOUNOUARA NADIA*
*(Ingénieur d'état en électronique)*

***Jury*** :

| | | | |
|---|---|---|---|
| M. KHEIREDDINE | (M.C.A) | Université de Batna | Président |
| L. SAIDI | (M.C.A) | Université de Batna | Rapporteur |
| A. MESSAI | (M.C.A) | Université de Constantine | Examinateur |
| K. CHAFAA | (M.C.A) | Université de Batna | Examinateur |

***2010/2011***

# *Dédicaces*

*A ma mère, paix à son âme*

*A mon père*

*A toute ma famille*

# *Remerciements*

*Je me dois de remercier ALLAH le tout puissant pour toute la volonté et le courage qu'il m'a l'achèvement de ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements les plus distingués à Monsieur* ***L. SAIDI****, Maître de Conférences au département d'électronique de l'université de Batna, non seulement pour m'avoir proposé le sujet et accepté d'encadrer ce travail, mais surtout pour m'avoir insufflé le désir et la passion de la recherché, qu'il trouve dans ces mots l'expression de mes vifs remerciements.*

*Mes remerciements vont également au Président de Jury Monsieur* ***M. KHEIREDDINE****, Maître de Conférences au département d'électronique de l'université de Batna, de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur* ***K. CHAFAA****, Maître de Conférences au département d'électronique de l'université de Batna, d'avoir accepté d'examiner mon mémoire.*

*Je remercie très sincèrement Monsieur* ***A. MESSAI****, Maître de Conférences au département d'électronique de l'université de Constantine, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et les assure de ma profonde gratitude.*

*Enfin, aucune expression de remerciements ne peut traduise mes redevances envers mes amis pour leurs encouragement et leur soutien moral.*

# Sommaire

## Chapitre III : Commande par inversion de modèles



## Chapitre IV : Application à un robot flexible

# Introduction Générale

En robotique, il est important de toujours considérer le robot comme un dispositif réel avec une architecture et des contraintes mécaniques spécifiques, dans le but d'accomplir des tâches réelles dans un monde réel. Un robot peut effectuer de nombreuses tâches comme l'assemblage et la saisie d'objets, ou l'exploration. Indépendamment de la tâche, le robot doit effectuer une séquence d'actions, tel que: bouger un bras, fermer des pinces ou se propulser. Puis, chaque action conduit à un mouvement. Ainsi, afin d'accomplir avec succès une tâche, un robot doit être capable de planifier, c'est-à-dire trouver par lui même et à l'avance, la séquence d'action à exécuter. En robotique, le domaine qui aborde ce problème de déterminer à priori un mouvement, s'appelle la planification de mouvement et se trouve au cœur du travail présenté ici.

Le suivi de trajectoires des robots constitue actuellement un domaine scientifique en pleine expansion. Dans ce contexte, le développement de nouvelles structures ainsi que des lois de commandes robustes permettant de répondre à diverses contraintes est essentiel.

Le problème de base de la planification de la trajectoire consiste à déplacer un robot d'une position initiale à une position finale en spécifiant le mouvement du manipulateur par rapport au système de référence. De façon générale, il existe deux méthodes pour décrire une trajectoire : la description explicite et la description implicite. La description explicite consiste à donner une fonction analytique continue de la courbe cartésienne. Dans la seconde méthode, seulement un certain nombre de points est spécifié pour décrire la trajectoire.

Les manipulateurs flexibles présentent de nombreux avantages sur les liaisons rigides : ils sont plus légers, consomment moins d'énergie et répondent plus rapidement. En raison de la nature flexible du système, la dynamique est fortement non linéaire et complexe. La tâche la plus élémentaire consiste à commander l'effecteur d'un manipulateur pour qu'il suive une trajectoire désirée donnée.

Un grand intérêt a été porté durant ces dernières années à la modélisation et la commande des bras flexibles. Ceci étant en partie dû à leur légèreté impliquant une faible énergie de commande (comparativement aux bras rigides de mêmes dimensions), ainsi qu'à leur utilité dans diverses applications spatiales. Concernant la commande des bras flexibles, il y a lieu de distinguer trois objectifs :

1. Réalisation d'un mouvement point à point de l'effecteur.
2. Suivi des trajectoires articulaires.
3. Suivi des trajectoires opérationnelles.

Pour le problème de planification de trajectoire afin de réaliser un mouvement opérationnel d'un bras manipulateur flexible, nous étudions dans ce mémoire une technique simple permettant la détermination d'une trajectoire opérationnelle faisable, pouvant être exactement reproduite moyennant l'application d'une commande obtenue par inversion de modèle. Soulignons, le fait que le système étudié ; en l'occurrence un bras manipulateur flexible, soit à déphasage non minimal rend l'application directe de la méthode d'inversion de modèle impossible à réaliser.

L'objectif est d'inverser le modèle à déphasage non minimal constitué d'une seule entrée et d'une seule sortie (SISO). La solution transitoire contient des termes divergents (correspondant à l'effet des zéros instables du système). Par conséquent, une solution consiste à planifier la trajectoire de sortie afin d'annuler ces termes indésirables.

Outre l'introduction et la conclusion générales, ce mémoire est organisé en quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre est dédié la planification de trajectoire.
- Le deuxième chapitre présente les robots flexibles et les méthodes utilisées pour l'inversion de modèle à déphasage non minimal.
- Le troisième chapitre décrit la technique de la commande par inversion de modèles.
- Le quatrième chapitre est dédié à l'application de la méthode d'inversion à un robot flexible.

# Chapitre I

# Planification de trajectoire

## I.1. Introduction

Un système robotique, quel qu'il soit, se doit de pouvoir déterminer et réaliser les mouvements nécessaires pour accomplir une tâche donnée. En robotique, on appelle planification de mouvement ce problème particulier du calcul préalable du mouvement à accomplir. C'est un problème fondamental en robotique qui a fait et continue de faire l'objet de nombreux travaux de recherche depuis la fin des années 60.

Dans sa forme la plus générale, la planification de mouvement se définit de la façon suivante : étant donné un modèle du système robotique et de son environnement, planifier un mouvement consiste à calculer le mouvement que doit effectuer le système robotique pour atteindre un objectif fixé a priori [1].

## I.2. Mouvement du robot et génération de trajectoire

La planification de mouvement se réfère à l'étude de la génération de mouvement pour un robot afin d'accomplir une tâche donnée. Elle est composée de [1] :

1. **Chemin de la planification :** Consiste à générer un chemin praticable d'une position initiale à une position finale en décrivant la position géométrique et l'orientation du robot au cours de la transition.
2. **Génération de la trajectoire :** La trajectoire ne décrit pas seulement la position du robot pendant le mouvement, mais aussi la façon avec laquelle s'effectuent les changements de position avec le temps.

# I.3. Classifications de mouvement d'un robot

## I.3.1. Systèmes robotiques Point à Point (PAP)

Le robot se déplace vers un emplacement numériquement bien défini. Ensuite, l'effecteur exécute la tâche demandée ; la structure articulaire du robot est alors immobile. À la fin de la tâche, le robot se déplace vers le point suivant et le cycle se répète ; c'est le cas, par exemple, de l'opération de soudage par points.

Par conséquent, dans les robots PAP, le chemin et la vitesse tout au long du déplacement du robot d'un point à l'autre ne sont pas importants [1].

## I.3.2. Systèmes robotiques à Trajectoire Continue (TC)

Dans ce type de systèmes, l'outil du robot exécute la tâche alors que sa structure mécanique est en mouvement ; c'est-à-dire que le robot et l'outil se déplacent simultanément. La vitesse de chaque articulation peut être contrôlée de façon indépendante ; c'est le cas de l'opération de soudage à l'arc par exemple [1].

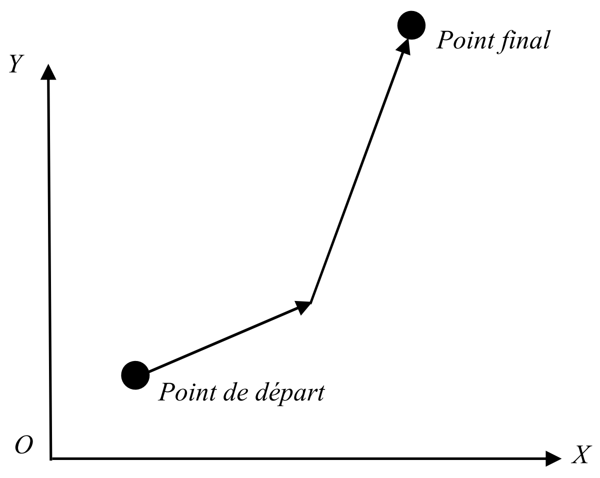


*Figure I.1. Trajectoire cartésienne d'un système robotique*

## I.4. Planification de trajectoire

On appelle **planification de trajectoire**, le calcul d'une trajectoire admissible et sans collision pour un robot entre une configuration de départ et une configuration d'arrivée données.

Il faut noter que la planification de trajectoire diffère selon que l'on ait à faire à un robot mobile ou à un bras manipulateur.

Pour les robots mobiles, une partie essentielle de l'autonomie des véhicules réside en la capacité à planifier des trajectoires admissibles assurant des déplacements **sans collision** dans un environnement particulier. Cet environnement contient généralement des zones dans lesquelles le robot ne peut pas se déplacer. Ces zones peuvent être détectées lorsque le robot se déplace. Un cas particulier **d'évitement d'obstacles** est l'évitement de collisions avec d'autres robots. Le robot doit ainsi avoir la capacité de calculer ou de mettre à jour sa trajectoire en temps réel tant que la mission n'est pas achevée [2].

Pour les bras manipulateurs, la planification consiste à générer des trajectoires que l'organe terminal (effecteur) doit effectuer tout en tenant compte de :

- l'admissibilité de la trajectoire,
- de l'espace d'atteignabilité,
- des contraintes sur la vitesse d'exécution,
- des contraintes sur les capacités "physiques" du bras manipulateur quant à la tâche à effectuer, …etc.

### I.4.1. Chemins et trajectoires

Au début des années 80, la plupart des travaux de planification de trajectoire sont basés sur le concept d'espace des configurations du robot. Une configuration désigne l'ensemble des paramètres caractérisant d'une manière unique le robot dans son environnement ou espace de travail. L'ensemble des configurations du robot est l'espace des configurations $Q$ qui a une structure de variété différentielle. On note $n$ la dimension de $Q$ [2].

Soit $x \in \Re^n$ la position d'un point dans l'espace à $n$ dimensions. **Un chemin** $\phi$ de $\Re^n$ ,($\phi \subset \Re^n$ est un ensemble de positions successives de $\Re^n$ ) relie une position initiale $x_0$ à une position finale $x_f$.

Certains chemins peuvent être représentés sous la forme d'une liste de $m$+1 positions successives, telles que $x_i \in \phi$ avec $0 \le i \le m$. Lorsque le chemin est défini par les seules positions initiale $x_0$ et finale $x_f$ on parle de mouvement point à point.

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on désire conduire un système dynamique d'un état initial $x_0$ à un état final $x_f$. C'est ce qu'on appelle un problème de planification de trajectoire. Pour résoudre un tel problème, il faut qu'il existe au moins une fonction d'entrée *u(t)* produisant une trajectoire du système passant par les états $x_0$ et $x_f$.

Définissons la trajectoire TR d'un point comme l'ensemble des positions successives de ce point quand le temps $t$ varie de $t_0$ à $t_f$ pour un déplacement de $x_0$ à $x_f$ [3]:

$$\begin{aligned} TR : \left[t_0, t_f\right] &\rightarrow \varphi \subset \Re^n \\ t &\rightarrow TR(t) \end{aligned}$$

Un chemin $\phi$ est un ensemble de positions de l'espace sans relation temporelle. Une trajectoire TR est une fonction du temps qui définit une loi d'évolution sur un chemin. La trajectoire définit les caractéristiques cinématiques du mouvement.

**Une trajectoire** est une fonction continue de $\lfloor t_{initial}, t_{final} \rfloor \subset \Re$ dans $Q$ qui à toute valeur $t \in \lfloor t_{initial}, t_{final} \rfloor$ associe une configuration [3]:

$$\begin{aligned} q : \left[t_{initial}, t_{final}\right] &\rightarrow Q \\ t &\rightarrow q(t) \end{aligned}$$

Une trajectoire est dite **admissible** si elle est solution du système d'équations différentielles correspondant au modèle cinématique du robot, incluant les contraintes sur les commandes et sur les conditions initiales et finales imposées. Un chemin est l'image d'une trajectoire dans $Q$. Un chemin **admissible** est l'image d'une trajectoire admissible.

**La planification** est également une sous-discipline de l'intelligence artificielle (IA) qui se propose [4] :

- Etant donnée une représentation de l'état initial de la situation (monde dans le jargon de l'IA).
- Etant donné un ensemble d'opérateurs de changement d'état de la situation (qui représentent les actions qu'il est possible d'effectuer).
- Etant donné un but à atteindre (problème à résoudre).

de donner les moyens à un système informatique de trouver une suite d'actions (c'est-à-dire une séquence d'opérateurs directement exécutables) à appliquer sur la situation pour le faire passer de l'état initial à un état qui satisfait le but à atteindre. Un plan est un ensemble structuré d'actions qui mène au but. La planification (ou génération de plan) est aussi le processus qui élabore cet ensemble d'actions. Par la réalisation d'un plan, un système informatique mémorise la suite d'actions qui permet la résolution d'un problème donné. Le plan est élaboré par une partie du système appelée générateur de plan (ou planificateur).

### I.4.2. Les différents types de planification

Si la planification qui nous préoccupe est celle d'un caractère particulier que nous avons défini précédemment, il ne faut pas négliger pour autant les types de planifications plus spécifiques que sont la planification de chemin ou la planification de mouvements fins. Nous les définissons ici succinctement [2] :

1. *La planification de chemin* : Dans l'univers géométrique où évolue un robot, il est indispensable de pouvoir déterminer à l'avance le parcours du robot ou les trajectoires des bras manipulateurs afin d'éviter les collisions. Cette planification des mouvements de grande amplitude est appelée planification de chemin.
2. *La planification de mouvements fins* : La saisie délicate ou l'insertion précise de pièces mécaniques demande souvent une stratégie particulière constituée d'une série de petits mouvements représentant des essais, des erreurs et des corrections de faibles amplitudes. Cette stratégie est appelée planification de mouvements fins.

## I.5. Méthode de planification de trajectoire douce des robots manipulateurs

Dans la planification de trajectoire, un problème fondamental en robotique consiste à trouver une loi temporelle de mouvement le long d'un chemin géométrique donné, telles que certaines exigences sur les propriétés de trajectoire sont remplies. La planification de trajectoires est consacrée à générer les entrées de référence pour le système de contrôle du manipulateur, de manière à être capable d'exécuter la requête. Le tracé géométrique, les contraintes cinématiques et dynamiques sont les entrées de l'algorithme de planification de trajectoire, alors que la trajectoire des articulations ou celle de l'effecteur –exprimée en une séquence temporelle de la position, de la vitesse et des valeurs d'accélération– est la sortie.

Le tracé géométrique est généralement défini dans l'espace de manœuvre, c'est-à-dire en référence à la fin de l'effecteur.

De l'autre côté, la planification de trajectoire est normalement effectuée dans l'espace articulaire du robot, après une inversion cinématique de la trajectoire géométrique donnée. Les trajectoires communes sont alors obtenues par moyen de fonctions d'interpolation qui répondent aux contraintes cinématiques et dynamiques imposées. La planification d'une trajectoire dans l'espace commun plutôt que dans l'espace de manœuvre a un avantage majeur, à savoir que les actes de contrôle s'effectuent sur les articulations du manipulateur plutôt que sur l'effecteur, de sorte qu'il serait plus facile d'ajuster la trajectoire en fonction de la conception. En outre, la planification de trajectoire dans l'espace articulaire permettrait d'éviter les problèmes relatifs aux singularités cinématiques et la redondance du manipulateur.

Presque toutes les techniques dans la littérature scientifique sur le problème de planification de trajectoire sont basées sur l'optimisation de certains paramètres ou certaines fonctions objectives. Les critères d'optimalité les plus significatifs sont [5] :

1. Temps minimum d'exécution.
2. Energie minimale.
3. Jerk minimum.

### I.5.1. Planification de trajectoire à minimum de temps

Les algorithmes à minimum de temps ont été les premières techniques de planification de trajectoire proposées dans la littérature scientifique, car ils ont été étroitement liés à la nécessité d'accroître la productivité dans le secteur industriel. L'idée principale est d'utiliser l'abscisse curviligne de la voie en tant que paramètre, afin d'exprimer l'équation de la dynamique du manipulateur dans une forme paramétrique. Cependant, les techniques précitées génèrent des trajectoires avec des valeurs discontinues d'accélérations et de couples parce que les modèles dynamiques utilisés pour le calcul des trajectoires supposent que les bras du robot sont parfaitement rigides et négligent la dynamique de l'actionneur. Ceci conduit à deux effets indésirables : d'abord, l'actionneur réel du robot ne peut pas produire de couple discontinu, ce qui provoque une poursuite toujours en retard par rapport à la trajectoire de référence. La précision de la trajectoire est alors fortement réduite et le phénomène consistant à des vibrations à haute fréquence peuvent endommager la structure du manipulateur. Aussi, le contrôle de la durée optimale provoque la saturation d'au moins un actionneur du robot à tout instant, de sorte que le contrôleur ne peut pas corriger les erreurs de suivi résultant des éventuelles perturbations ou des erreurs de modélisation.

Afin de surmonter ces problèmes, d'autres approches imposent des limites sur les à-coups des actionneurs. De cette manière, la trajectoire générée ne suivra pas exactement le temps optimal, mais sera proche de la valeur d'optimalité ; mais les trajectoires générées peuvent être efficacement mises en œuvre et des stratégies plus avancées de contrôle peuvent être appliquées.

### I.5.2. Planification de trajectoires à minimum d'énergie

La planification de trajectoire d'un robot en utilisant des critères énergétiques offre plusieurs avantages. D'une part, elle génère des trajectoires douces, plus facile à suivre, et permet de réduire la sollicitation des actionneurs et de la structure du manipulateur. En outre, les économies d'énergie peuvent être souhaitables dans certaines applications, telles que celles ayant une capacité limitée de la source d'énergie (par exemple des robots pour l'exploration spatiale ou sous-marine).

Les trajectoires point à point avec un minimum d'énergie sont en général considérées avec des bornes supérieures sur l'amplitude des signaux de commande et les vitesses articulaires [5].

### I.5.3. Planification de trajectoires à jerk minimum

L'importance de la génération de trajectoires qui ne nécessitent pas de brusques variations de couple a déjà été remarquée. Les effets positifs induits par une minimisation du jerk sont [5] :

- Les erreurs pendant le suivi de trajectoires sont réduites.
- Les stress des actionneurs et de la structure du manipulateur sont réduits.
- Les excitations proches des fréquences de résonance du robot sont limitées.

## I.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé le planification de trajectoire en robotique. Divers aspects tels que les notions de chemin, de trajectoires admissibles, …etc ont été abordés. Aussi, nous avons rapelé les différents types de planification ainsi que les méthodes permettant l'obtention de trajectoires douces.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier le problème de planification de trajectoire pour un cas particulier de robots, en l'occurrence les robots manipulateurs flexibles.

# Chapitre II

# Robots flexibles et systèmes à déphasage non minimal

## II.1. Introduction

La robotique aura à l'avenir un rôle important dans notre vie. La technologie des robots manipulateurs est en constante amélioration. Aussi, l'interactivité homme-machine ne cesse de se développer.

Les robots manipulateurs flexibles, en raison de leurs légèretés et la souplesse mécanique de leurs structures, permettent de réaliser les mêmes performances en termes de vitesse, d'accélération et de charge opérationnelle avec moins de poids et davantage d'interactivité humaine.

Mais que sont ces robots manipulateurs flexibles ?, et pourquoi nous les appelons ainsi ? En règle générale, les robots manipulateurs flexibles sont des manipulateurs qui ont une flexibilité mécanique dans leurs liens et leurs articulations, ce qui entraîne la vibration ou l'oscillation de l'effecteur, soit pendant le mouvement du manipulateur ou immédiatement après son arrêt. Ce comportement réduit la précision de position, mais d'autre part, on peut atteindre des vitesses plus élevées en raison de la faible inertie et la masse.

Si le robot manipulateur fonctionne à une forte accélération, il peut devenir souple. Si le robot manipulateur fonctionne dans de petits espaces, comme les robots chirurgicaux, il peut être nécessaire de faire preuve de souplesse. Si le robot manipulateur doit être léger, en raison de transport par exemple, l'utilisation de petites quantités de matières dans les structures flexibles est alors nécessaire.

Les équations de la dynamique des robots manipulateurs flexibles sont beaucoup plus complexes que ceux des robots rigides grâce à la flexibilité du lien. La flexibilité donne un modèle de robot avec une infinité de degrés de liberté (qui doit être tronqué à un nombre fini).

Il y a trois principaux objectifs dans le contrôle des bras robotiques souples :

1. Mouvement point à point de l'effecteur.
2. Suivi de trajectoire dans l'espace articulaire (suivi d'une trajectoire angulaire désirée).
3. Suivi de trajectoire dans l'espace opérationnel (suivi d'une trajectoire désirée de l'effecteur).

Le contrôle de mouvement des robots manipulateurs flexibles est l'un des secteurs les plus discutés en robotique. Pour les robots manipulateurs rigides, la tâche de contrôle est moins compliquée, car la position est obtenue en contrôlant les angles communs. Pour robots flexibles, il est nécessaire d'utiliser un contrôleur pour amortir les oscillations à la pointe qui apparaissent pendant le mouvement.

### II.2. Flexibilité

Depuis l'actionneur jusqu'à l'organe terminal, différents éléments sont susceptibles d'introduire des flexibilités et de contribuer aux dynamiques de l'ensemble du robot manipulateur :

1. Le moteur est asservi en vitesse par son variateur. Les dynamiques de la boucle de vitesse peuvent être bien identifiées dès que la mesure de position par le biais d'un codeur est disponible. Notons $q_i$ la position mesurée de l'articulation $i$.
2. Les transmissions avec des réducteurs et des courroies ou câbles peuvent induire des flexibilités.
3. Les segments peuvent subir des flexions variables au cours du temps.

## II.3. Les systèmes à non minimum de phase

### II.3.1. Solutions de contrôle pour les systèmes à non minimum de phase

En raison de la déformation élastique d'une poutre flexible, son modèle linéaire possède un zéro réel par mode de vibration dans le demi-plan droit complexe. Comme on le sait, un zéro instable impose des limitations sur les performances réalisables et des capacités de suivi. Dacic [6] a présenté trois approches distinctes pour le suivi de trajectoires dans le cas de la présence de la dynamique des zéros instables : l'approche du modèle interne, l'approche de planéité et l'approche d'inversion. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la méthode d'inversion [7].

### II.3.2. Suivi de trajectoire

Le problème de suivi de trajectoire est largement étudié dans la littérature de la robotique. L'objectif est de contrôler un robot à l'aide de contraintes sur les couples et de se déplacer le long d'un pré-chemin arrangé en un temps minimal.

Hauser et Hindman [8] ont développé une nouvelle méthodologie de suivi de trajectoire, où le principal objectif est de déterminer en ligne un profil de vitesse souhaitable le long d'un chemin. Dans leur technique, le chemin est spécifié pour chaque variable d'état du système.

Encarnação et Pascoal [9] ont proposé un autre type de suivi de trajectoire, appelé de "suivi de trajectoire de sortie", où la trajectoire est définie seulement pour la sortie du système.

Dans Aguiar [10], [11], [12] et Dacic [6], le problème suivi de trajectoire est défini comme une combinaison de deux tâches : géométrique et dynamique. Ensuite, il est montré qu'il est possible de construire des lois de rétroaction qui peut atteindre une norme arbitrairement petite L2 de l'erreur de parcours qui suit. Cette propriété met en évidence la différence entre suivi de trajectoire et le suivi de référence, où une limitation fondamentale existe en termes d'une limite inférieure de la norme L2 de l'erreur de suivi imposée par le zéro instable dynamique.

L'un des problèmes majeurs avec les systèmes à phase non minimum est de concevoir des lois de commande pour piloter la sortie et de suivre une référence géométrique (trajectoire). Un autre problème est d'obliger le système à suivre la référence géométrique et répondre à certaines spécifications supplémentaires dynamiques (vitesse, accélération ...).

Il est à noter que les limitations introduites par les zéros instables ne peuvent pas être évitées sans changer la structure du système ou de reformuler le problème de suivi. Ces limitations sont de nature structurelle. Une des possibilités de reformulation est de sélectionner une nouvelle sortie dans laquelle la dynamique du zéro devient stable [7].

### II.3.3. Méthode d'inversion

L'idée principale de la méthode d'inversion est d'obtenir une référence stable dans le but d'acquérir un couple doux de pilotage ; ce qui implique une reproduction exacte de la trajectoire calculée. En utilisant une technique d'entrée simple d'inversion de la sortie, Benosman et Le Vey [13], [14], [15] et Saidi [16] ont présenté une méthodologie pour obtenir une inversion stable d'une seule entrée et une seule sortie (SISO) pour les systèmes à déphasage non minimal.

### II.3.4. Planification de mouvement de l'effecteur

Une technique pour réduire toutes les caractéristiques du comportement non désiré (comme les vibrations de l'effecteur) d'un robot flexible est de calculer le mouvement de l'effecteur de manière à ne pas perturber les zéros instables du système. Beaucoup de travail a été consacré au cours des deux dernières décennies pour le contrôle des modèles des bras flexibles, et beaucoup de ces travaux ont donné de bons résultats [7].

Benosman et Le Vey [13] ont fait une analyse profonde sur l'inversion d'un système linéaire stable (SISO) à non minimum de phase. Au lieu de chercher de bonnes conditions initiales associées à une production donnée souhaitée, cette approche consiste en la recherche d'une bonne sortie, associée aux conditions initiales souhaitées. Cette sortie est calculée d'une manière à ce qu'il sera possible d'annuler tous les effets des zéros instables.

Cette méthodologie aborde le problème de la planification d'une trajectoire conduisant à un contrôle harmonieux du couple ; ce qui implique une reproduction exacte de la trajectoire calculée en utilisant une technique simple d'inversion des entrées-sorties. Tout comme d'autres approches traitant ce sujet, le résultat de cette méthodologie est présenté en boucle ouverte dans le domaine temporel.

## II.4. Commande des bras manipulateurs flexibles

La plupart des robots utilisent des servomoteurs électriques comme actionneurs. Dans le cas de servomoteurs ayant de faibles rapports de réduction, ce sont les servomoteurs qui doivent compenser les effets des variations des forces d'inertie et de gravité. Dans le cas de servomoteurs avec de forts rapports de réduction, l'inertie vue par les moteurs varie beaucoup moins et il est alors possible de modéliser le robot par un système linéaire qui permet de découpler les articulations.

Nous considérons uniquement l'utilisation de servomoteurs avec de forts rapports de réduction comme actionneurs, ce qui produit des robots à articulations rigides. Le problème de la rigidité des articulations est évident lorsqu'on parle d'interaction avec l'environnement ou des collisions. Des imprécisions dans la modélisation de l'environnement peuvent se traduire par des efforts de contact importants qui peuvent endommager les mécanismes internes du robot ou son environnement [3].

De nombreuses références sont disponibles dans la littérature pour la modélisation et la commande des bras manipulateurs flexibles. Les différentes approches considèrent des flexibilités au niveau des articulations ou au niveau des segments. Dans le cas plus difficile des segments flexibles, la plupart des approches sont données dans le cadre le plus simple d'un bras à un seul degré de liberté (DDL). La plupart des approches s'intéressent au système commandé en couple. Son modèle est obtenu par les équations d'Euler-Lagrange en supposant que les paramètres sont parfaitement connus. Les approches proposées concernent la plupart du temps le problème de l'asservissement des positions articulaires et non le problème plus complexe du positionnement de l'organe terminal. Pour le problème le plus plausible en pratique de l'asservissement de la position de l'organe terminal pour un robot dont on ne connaît qu'imparfaitement les dynamiques, les approches de la littérature sont d'un intérêt limité [17].

Pour réaliser une tâche, il peut exister un grand nombre de solutions. Dans ce cas, il peut être souhaitable de choisir une solution qui satisfasse un certain critère.

La littérature présente différents types de critères pour une commande optimale : la commande en temps minimal, la minimisation du jerk pour maximiser la souplesse du mouvement et la minimisation du couple, entre autres.

La complexité du problème a motivé les chercheurs pour diviser la tâche en deux étapes : la première étape est la planification de trajectoire suivie d'une étape d'asservissement de la trajectoire [3].

## II.5. Modélisation des bras manipulateurs flexibles

Selon les différentes techniques de modélisation utilisées dans l'analyse des manipulateurs flexibles, il y a deux sortes d'erreurs introduites si l'effet de la flexibilité n'est pas considéré dans le modèle mathématique.

Le premier type d'erreur est introduit dans le couple nécessaire pour alimenter les moteurs. Le deuxième type concerne l'imprécision de positionnement de l'effecteur. Le positionnement de l'effecteur pour les emplois de précision devrait impliquer de très petites amplitudes de vibration. Par conséquent, pour atteindre une plus grande précision, on doit commencer avec des modèles mathématiques très précis pour le système.

Différentes méthodes pour la modélisation des manipulateurs sont étudiées par un certain nombre de chercheurs. Les modèles mathématiques des manipulateurs sont généralement issus des principes énergétiques [18].

Les bras manipulateurs rigides permettent de stocker de l'énergie cinétique en raison de leur inertie de déplacement et l'énergie potentielle en raison de leur position dans le champ gravitationnel.

Cependant, les bras flexibles emmagasinent de l'énergie potentielle en raison de la flexibilité de leurs liens. Les différentes articulations sont purement considérées comme une source de stockage de l'énergie potentielle.

Les liens soumis à la flexion permettent de stocker l'énergie potentielle en raison de leur déformation ; aussi ils permettent de stocker l'énergie cinétique suite à leur taux de déviation ; c'est pourquoi un bon modèle doit inclure cette nature particulière.

La dynamique globale d'un robot flexible est décrite par des équations (non linéaires couplées) aux dérivées partielles de dimensions infinies. Cet état ne permet pas une exploitation directe pour l'analyse et la conception du système de contrôle. Souvent, les équations dynamiques sont limitées et simplifiées à certains modèles de dimensions finies en utilisant la méthode des modes supposés (AMM, Assumed Modes Method) ou la méthode des éléments finis (FEM, Finite Element Method).

La solution exacte de ces systèmes n'est pratiquement pas réalisable car le modèle de dimension infinie impose de grandes contraintes sur la conception des contrôleurs. Par conséquent, la solution consiste à utiliser soit la méthode des modes supposés, soit la méthodes des éléments finis ou la méthode des paramètres locaux [18].

La méthode des modes supposés et celle des éléments finis sont basées sur la formulation de Lagrange ou sur celle de Newton-Euler récursive.

Dans la méthode des modes supposés, la flexibilité du lien est généralement représentée par une série modale tronquée en termes de fonctions propres.

## II.5.1. Modèle dynamique

Considérons un robot manipulateur composé d'une série de $N$ liens flexibles reliés par des articulations rotatives rigides. Chacune de ces articulations donne un degré de liberté au bras. Chaque lien est supposé subir des flexions dans le plan orthogonal à son axe de déplacement.

Par ailleurs, d'autres types de déviations des articulations peuvent être pris en considération tel que le couplage des torsion, mais la structure du modèle reste essentiellement la même en ce qui concerne les questions d'inversion de modèle [19].

La technique de Lagrange peut être utilisée pour calculer le modèle dynamique en déterminant les énergies cinétique et potentielle globales du système.

Une représentation schématique du manipulateur flexible est donnée dans la figure (II.1), où $I_b$, $I_h$, $\rho$, $l$, $M_\ell$ et $I_\ell$ désignent respectivement le moment d'inertie, l'inertie du moyeu, densité linéique de masse, la longueur du segment, la masse de la charge et l'inertie associée à la charge utile.

Un couple $T(t)$ est appliqué au moyeu du manipulateur par un moteur. Le déplacement angulaire du manipulateur dans le plan ($POQ$) est dénoté par $\theta(t)$. La hauteur de la liaison est supposée être beaucoup plus importante que sa largeur, ce qui permet donc au manipulateur de vibrer (être flexible) à dominance dans le sens horizontal. La déformation du cisaillement et l'effet d'inertie rotative sont ignorés [18].

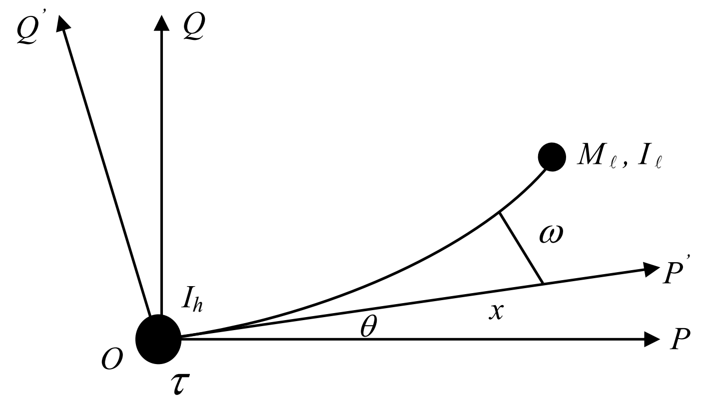


*Figure II.1. Représentation schématique d'un manipulateur flexible*

Pour un déplacement angulaire $\theta$ et une déformation élastique $\omega$, le déplacement total $y = (x,t)$ d'un point du manipulateur à une distance $x$ du moyeu peut être décrit comme une fonction à la fois du mouvement $\theta$ du corps rigide et de la déviation élastique $\omega = (x,t)$ mesurée de la ligne *OX*.

$$y\left(x,t\right) = x\,\theta(t) + \omega\left(x,t\right) \tag{II.1}$$

Pour obtenir les équations du mouvement du manipulateur, les énergies doivent être prises en compte. Il s'agit notamment des énergies cinétiques, potentielles et dissipées [17].

## II.5.2. Energies du manipulateur flexible

Les énergies associées au robot manipulateur flexible sont l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie dissipée [20].

En supposant la contribution du moment d'inertie de rotation négligeable, l'énergie cinétique du manipulateur flexible peut être écrite comme suit :

$$E_K = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + x\,\dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{1}{2} M_\ell \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + x\,\dot{\theta} \right)^2_{x=l} \tag{II.2}$$

Le premier terme du second membre de cette équation est dû à l'inertie du moyeu ; le second terme est dû à la rotation du manipulateur par rapport à l'origine ; et le troisième terme est dû à la masse de la charge. En outre, seules les petites déformations élastiques et les petites vitesses angulaires sont considérées.

L'énergie potentielle est liée à la flexion du manipulateur. La hauteur du manipulateur est supposée être beaucoup plus importante que son épaisseur, les effets de cisaillement peuvent alors être négligés. Par conséquent, l'énergie potentielle du manipulateur peut être écrite comme suit :

$$E_P = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 dx \tag{II.3}$$

où $E$ et $I$ sont respectivement le module de Young et le moment d'inertie de la section transversale (deuxième moment d'inertie) du bras manipulateur.

En général, en raison de la force gravitationnelle, le bras manipulateur bouge légèrement dans le sens vertical sous la forme de petites oscillations élastiques. Ce mouvement est souvent ignoré.

Pour examiner le mécanisme par lequel l'énergie est absorbée par la structure lors de son fonctionnement dynamique, la résistance à la vitesse transversale est représenté par $D(x)$, la résistance à la vitesse angulaire au niveau du moyeu par $D_0$ et la résistance à la souche par $D_s$. Par conséquent, l'énergie dissipée par le moment d'amortissement et de la force peuvent être décrite par l'équation suivante :

$$E_F = \frac{1}{2} \int_0^l D(x) \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l D_s I \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \omega \right)^2 dx + \frac{1}{2} D_0 \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial t} \right)^2_{x=0} \tag{II.4}$$

Il a été démontré que la matrice d'amortissement remplit les conditions d'orthogonalité et peut donc être découplée de la même manière que les matrices d'inertie et de rigidité. Pour satisfaire l'analyse du mode de superposition, on suppose que $D(x) = b_0 \rho A$, $D_s = b_1$ et $D_0 = b_0 I_h$, avec $b_0$ et $b_1$ représentent des constantes de proportionnalité et $A$ la section transversale du manipulateur.

## II.5.3. Les équations dynamiques du mouvement

Le travail du couple $T$ d'entrée peut être décrit comme suit :

$$W = T\,\theta \tag{II.5}$$

Pour obtenir les équations du mouvement du manipulateur, le principe de Hamilton [21] est appliqué :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W)\,dt = 0 \tag{II.6}$$

$L = E_K - E_P$ est le système de Lagrange. $\delta W$ représente le travail virtuel.

Dans le cas où $\delta\theta$ représente une rotation virtuelle et $\delta\omega$ un déplacement virtuel élastique, les équations dynamiques peuvent être utilisées sous réserve que $\delta\theta = \delta\omega = 0$ aux instants $t_1$ à $t_2$, où $t_1$ et $t_2$ sont deux instants arbitraires ($t_1 < t_2$).

En utilisant les équations (II.2), (II.3) et (II.5) l'intégrale de l'équation (II.6) peut être décrite comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_K - E_P + W)\,dt = 0 \tag{II.7}$$

L'inertie de rotation et la déformation dû au cisaillement sont plus importantes à des fréquences élevées et présentent plus d'influence sur les modes supérieurs.

Les recherches ont montré que les deux premiers modes sont suffisants dans la modélisation du manipulateur. L’inertie de rotation et les effets de déformation de cisaillement peuvent être ignorés.

L'équation du mouvement du manipulateur est donnée par [22-23] (voir annexe) :

$$EI\,\frac{\partial^4 \omega(x,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} = -\rho x\,\ddot{\theta} \tag{II.8}$$

avec les quatre conditions aux limites.

La substitution de $\omega(x,t)$ de l'équation (II.1) dans les équations (II.7) et (II.8) et la simplification donne l'équation gouvernant le mouvement du manipulateur en termes de $y(x,t)$ :

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{II.9}$$

avec les quatre conditions aux limites :

$$\begin{cases} y\left(x,t\right)=0 \\ I_h\dfrac{\partial^3 y(0,t)}{\partial t^2\partial x}-EI\dfrac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2}=T(t) \\ M_P\dfrac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}-EI\dfrac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3}=0 \\ I_P\dfrac{\partial^3 y(l,t)}{\partial t^2\partial x}+EI\dfrac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}=0 \\ y\left(x,0\right)=0,\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{II.10}$$

Cette équation décrit le mouvement dynamique du manipulateur flexible. C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

Cette équation peut aussi être obtenue directement en utilisant la loi de Newton. Le principe de Hamilton, cependant, est plus pratique à utiliser car il génère automatiquement des conditions aux limites appropriées.

## II.6. Les modes

En utilisant la méthode des modes supposés, une solution de l'équation de la dynamique du mouvement du manipulateur peut être obtenue comme une combinaison linéaire du produit des fonctions admissibles $\phi_i(x)$ et des coordonnées généralisées $q_i(t)$.

$$y(x,t)=\sum_{i=0}^{i=n}\phi_i(x)q_i(t) \qquad \text{for } i=0,1,..,n \tag{II.11}$$

où:

la fonction $\phi_i$, appelée forme de mode, est purement une fonction du déplacement, et $q_i$ est purement une fonction de temps. Le mode d'ordre zéro est le mode du corps rigide du manipulateur considéré comme sans déformation élastique.

En substituant $y(x,t)$ de l'équation (II.11) dans l'équation (II.9) nous obtenons :

$$\frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4} - \beta_i^4\phi_i(x) = 0, \qquad \frac{d^2 q_i(x)}{dt^2} - \omega_i^2 q_i(t) = 0 \tag{II.12}$$

où:

$$\omega_i^2 = \frac{EI}{\rho}\beta_i^4 \tag{II.13}$$

et $\beta_i$ est une constante. $\lambda$ et $\varepsilon$ sont égalemnt deux constantes définies par :

$$\lambda_i = \beta_i l\,, \qquad \varepsilon = \frac{I_h}{Ml^2} = \frac{3I_h}{I_b} \tag{II.14}$$

*M* est la masse du manipulateur. La première relation dans l'équation (II.12) est une équation différentielle du quatrième ordre ordinaire avec une solution de la forme :

$$\phi_i(x) = A_i \sin\beta_i x + B_i \sinh\beta_i x + C_i \cos\beta_i x + D_i \cosh\beta_i x \tag{II.15}$$

Pour trouver les fréquences et les modes propres du système, les valeurs de $\lambda_i$ satisfaisant aux conditions limites du manipulateur (non entraîné c'est-à-dire $\tau = 0$) sont déterminées ainsi que les valeurs correspondantes des coefficients $A_i$, $B_i$, $C_i$ et $D_i$ dans l'équation (II.15). Cela nécessite l'utilisation des propriétés d'orthogonalité et les formes des modes [21]. En utilisant l'équation (II.15) et les conditions aux limites dans l'équation (II.10) on trouve :

$$\int_0^l M\,\phi_i(x)\phi_j(x)dx + I_h\phi_i'(0)\phi_j'(0) + M_\ell\phi_i(l)\phi_j(l) + J_\ell\phi_i'(l)\phi_j'(l) = I_T\delta_{ij} \tag{II.16}$$

où:

$\delta_{ij}$ est le delta de Kronecker et la constante de normalisation.

$I_T = I_h + I_b + J_\ell$ est l'inertie totale sur l'armature du moteur.

L'équation (II.15) définit de manière unique $A_i$ et, par conséquent, l'ampleur du mode $\phi_i(x)$. A partir des propriétés des systèmes, les formes des modes doivent également satisfaire à la condition d'orthogonalité :

$$\int_0^l EI\,\phi_i''(x)\,\phi_j''(0)\,dx = I_T\,\omega_i^2\,\delta_{ij} \tag{II.17}$$

où $\phi_i''(0) = d^2\phi_i / dx^2$

Les valeurs analytiques des fréquences naturelles $\omega_i$ peuvent alors être obtenues en utilisant l'équation (II.13). $\varepsilon$ détermine les fréquences de vibration du manipulateur, un petit $\varepsilon$ correspond au manipulateur avec des fréquences de vibrations plus faibles. L'effet d'une masse de charge, d'autre part, est significatif sur les fréquences de vibration. En considérant les conditions aux limites, la fonction de mode $\phi_i(x)$ d'un robot manipulateur dans l'équation (II.15) peut ainsi être obtenue.

## II.7. Modèle dans l'espace d'état

En l'absence d'un couple externe, l'équation (II.9) décrit le comportement du manipulateur en vibration transversale libre avec une solution $\omega(x,t)$ de la forme [20] **:**

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\phi_i(x) \qquad \text{for} \qquad i = 1,2..,n \tag{II.18}$$

En utilisant les équations (II.2), (II.3) et (II.17), et en utilisant les propriétés d'orthogonalité dans les équations (II.16) et (II.17), l'énergie cinétique $E_K$ et l'énergie potentielle $E_P$ du système, en termes de modes naturels, peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{cases} E_K = \dfrac{1}{2}\delta_{ij} I_b \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2(t) \\ E_P = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i q_j \int_0^l EI\,\phi_i''\phi_j''\,dx = \dfrac{1}{2}\delta_{ij} I_T \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 q_i^2(t) \end{cases} \tag{II.19}$$

De même, en utilisant les équations (II.5) et (II.6) l'énergie dissipée $E_F$ et le travail $W$ peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{cases} E_F = \frac{1}{2}\left(I_h + I_b\right) 2\xi_i \omega_i^2 q_i^2 \\ W = T\,\theta = T\sum_{i=0}^{n} \phi'(0) q_i \end{cases} \tag{II.20}$$

Où :

$\xi_i = \frac{b_0}{2\omega_i} + \frac{b_1\omega_i}{2}$ est le facteur d'amortissement.

L'équation dynamique du système peut être maintenant formée en utilisant l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie dissipée dans le lagrangien dont l'expression est donnée par [28]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_F}{\partial \dot{q}_i} = W_i \tag{II.21}$$

où :

$L = E_K - E_P$

et $q_i$ représente les coordonnées généralisées dépendantes du temps, $W_i$ représente le travail effectué par le couple d'entrée à l'articulation de chaque coordonnée.

La substitution de $E_K, E_P$, $E_F$ et $W$ à partir des équations (II.19) et (II.20) dans l'équation (II.21), et en utilisant les relations d'orthogonalité dans les équations (II.15) et (II.16), un ensemble infini de découplage des équations différentielles ordinaires est obtenu comme suit **:**

$$\begin{cases} \ddot{q}_0 = \frac{T}{I_T} \\ \ddot{q}_1 + 2\xi_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{d\,\phi_1(0)}{dx}\frac{T}{I_T} \\ \ddot{q}_1 + 2\xi_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{d\,\phi_2(0)}{dx}\frac{T}{I_T} \\ . \\ . \\ . \end{cases} \tag{II.22}$$

où : $I_T$ est l'inertie totale du système $\left(I_T = I_b + I_h + I_m\right)$.

De cette manière, en raison de la nature distribuée du système, il y aura un nombre infini de modes de vibration du manipulateur flexible. Toutefois, en pratique, on constate que la contribution des modes supérieurs au mouvement global est négligeable. Par conséquent, un modèle d'ordre réduit intégrant les modes d'ordre inférieur (dominants) peut être pris en charge. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la dynamique du système est pour la majorité régie par un nombre fini de modes inférieurs [22-23]. En conservant les *n+1* premiers modes d'intérêt, l'équation (II.22) peut être écrite dans la représentation d'état suivante :

$$\dot{X} = AX + BT \tag{II.23}$$

où:

$$\dot{X} = {dX}/{dt}$$

$$X^T = \{q_0 \quad \dot{q}_0 \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_n\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^2 & -2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}$$

$$B^T = \frac{1}{I_T}\left\{0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{d\phi_1(0)}{dx} \quad \dots \quad 0 \quad \frac{d\phi_n(0)}{dx}\right\}$$

Le manipulateur est assisté par trois capteurs : capteur d'accélération du point final, capteur de vitesse moyeu et capteur d'angle de pivot. Le vecteur de sortie $Y$ de ces capteurs est lié au vecteur d'état par :

$$Y = CX \tag{II.24}$$

où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d\phi_1^2(l)}{dx^2} & 0 & \dots & \frac{d\phi_n^2(l)}{dx^2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & 0 & \dots & \frac{d\phi_n(0)}{dx} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & \dots & 0 & \frac{d\phi_n(0)}{dx} \end{bmatrix}$$

$\phi_i''(l)$ est le gain modal du capteur d'accélération du point final et $\phi_i'(0)$ est le gain modal de l'actionneur (moteur).

## II.8. Modèle de la fonction de transfert

Pour le domaine fréquentiel la modélisation des relations entées/sorties est généralement exprimée sous forme de fonction de transfert. Ceci permet l'utilisation des méthodes de conception classiques tels le diagramme de Bode, diagramme de Nyquist et lieu des racines. La fonction de transfert en boucle ouverte du système $G(s)$ est donnée comme étant le rapport $YT^{-1}$. En utilisant les équations d'état (II.23) et (II.24) on obtient [20] :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \tag{II.25}$$

où $I$ est la matrice identité de mêmes dimensions que $A$, et $s$ est la variable de transformée de Laplace. Sinon, en utilisant une méthode développée par Breakwell [00], la fonction de transfert peut être obtenue directement en utilisant l'équation (II.17). Prendre la transformée de Laplace de cette équation donne l'équation différentielle ordinaire :

$$EI \frac{\partial^4 \bar{y}(x,s)}{\partial x^4} + \rho s^2 \bar{y}(x,s) = 0 \tag{II.26}$$

avec les conditions aux limites transformées en :

$$\begin{cases} \bar{y}(0,s)=0 \\ I_h s^2 \bar{y}(0,s) - EI\bar{y}''(0,s) = T(s) \\ M_P \bar{y}''(l,s) - EI\bar{y}'''(l,s) = 0 \\ I_P s^2 \bar{y}(l,s) + EI\bar{y}''(l,s) = 0 \end{cases} \tag{II.27}$$

où $\bar{y}$ désigne la transformée de Laplace de $y$ et $\bar{y}''' = {d^3\bar{y}}/{dx^3}$ ; $\bar{y}'' = {d^2\bar{y}}/{dx^2}$

L'équation (II.26) a une solution générale telle que :

$$\bar{y}(x,s) = A_1 \sin \beta x + B_1 \cos \beta x + C_1 \sinh \beta x + D_1 \cosh \beta x$$

où:

$$\beta^4 = {-\rho s^2}/{EI}$$

Une fois les constantes $A_1, B_1, C_1$ et $D_1$, et donc $\bar{y}(x,s)$ sont connues, il est possible de dériver la fonction de transfert du couple d'entrée pour une sortie particulière lorsque celle-ci est exprimée en fonction de *y*. Toutes les fonctions de transfert qui peuvent être tirées possèdent un dénominateur commun.

Dans la pratique, les expressions qui en résultent sont complexes et fonction décroissantes de $\beta$. Pour un robot manipulateur à un seul bras ayant une masse au point final le numérateur $N(\lambda)$ et le dénominateur $D(\lambda)$ peuvent être représentés par Maclaurin ; et leurs expressions sont telles que :

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n d^n D(0)}{n! d\lambda^n}, \qquad N(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n d^n N(0)}{n! d\lambda^n} \tag{II.29}$$

En conséquence de la distribution des racines les suites de Maclaurin peuvent être exprimées comme un produit de facteurs:

$$D(\lambda) = P_d(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_i^4}{\lambda_{di}^4}\right), \qquad N(\lambda) = P_n(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_i^4}{\lambda_{ni}^4}\right) \tag{II.29}$$

où $P$ est un polynôme en λ de degré 3 ou moins.

En utilisant la relation $\lambda^4 = {-\rho s^2 l^4}/{EI}$, la fonction de transfert peut être exprimée en termes de variable s de la transformée de Laplace. Les fonctions de transfert définitives à partir du couple d'entrée à l'angle de pivot $\theta$, du couple d'entrée à la vitesse de moyeu $\dot{\theta}$ et du couple d'entrée à l'accélération de point final $\alpha$ peuvent être respectivement décrites par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\theta(s)}{\lambda(s)} = \dfrac{1}{I_T s^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1 + {s^2}/{\omega_{\theta i}^2}\right)}{\left(1 + {s^2}/{\omega_i^2}\right)} \\ \dfrac{\dot{\theta}(s)}{\lambda(s)} = \dfrac{1}{I_T s^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1 + {s^2}/{\omega_{vi}^2}\right)}{\left(1 + {s^2}/{\omega_i^2}\right)} \\ \dfrac{\alpha(s)}{\lambda(s)} = \dfrac{1}{I_T s^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1 + {s^2}/{\omega_{\alpha i}^2}\right)}{\left(1 + {s^2}/{\omega_i^2}\right)} \end{cases} \tag{II.30}$$

où : $\omega_{ci}, \omega_{\alpha i}$ et $\alpha_{ti}$ sont des constantes réelles correspondant aux zéros du système.

## II.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de suivi de trajectoire pour les systèmes à non minimum de phase.

La méthode d'inversion appliquée aux robots flexibles permet de réduire tous les comportements non désirés (comme les vibrations de l'effecteur).

L'objectif est de contrôler la position de l'effecteur d'un robot manipulateur flexible avec un suivi de trajectoire dans l'espace opérationnel avec une bonne précision en limitant le couple.

Les différentes techniques de modélisation utilisées dans l'analyse des manipulateurs flexibles et l'étude des modèles dynamiques de ce type de robots sont également présentées.

# Chapitre III

# Commande par inversion de modèles

## III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une technique relativement récente qui permet une inversion stable d'un modèle donné. Cette méthode est valable aussi bien pour les systèmes à déphasage minimal que pour les systèmes à déphasage non minimal. Cette approche est appliquée à un robot manipulateur flexible.

En contraste avec les techniques disponibles, cette méthode permet de trouver un ensemble particulier de trajectoires en utilisant des conditions initiales et finales sur la dynamique du système. Cette recherche s'effectue sur des trajectoires polynômiales.

Ces trajectoires de sortie sont calculées de telle sorte que l'effet des zéros instables est complètement annulé. L'inverse stable est ensuite incorporé dans une structure bouclée avec un correcteur en utilisant, par exemple, un retour d'état statique classique. Ce contrôleur à base d'une inversion nominale permet un suivi exact de la sortie désirée [13].

## III.2. Inversion stable grâce à la planification de sortie

L'objectif est d'inverser un système à une seule entrée et une seule sortie (SISO) à non minimum de phase au moins stable ayant une entrée $u$ et une sortie $y$. Ce type de système est donné par la relation entrée-sortie suivante [13] :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) \tag{III.1}$$

Ce système peut être associé à un ensemble donné de valeurs initiales et finales, où $P$ et $Q$ sont des polynômes premiers entre eux dans l'opérateur différentiel $\left({}^{d}\!/_{dt}\right)$, avec des degrés $m$ et $n$, respectivement ($m<n$).

Une approche simple pour calculer la commande d'entrée correspondante à un signal de sortie $y_{td}(t)$ désiré est d'inverser le modèle dynamique. Malheureusement, cela n'est pas possible pour un système à déphasage non minimum car une inversion directe de la dynamique implique une divergence de la commande recherchée.

L'idée présentée ici, établie initialement par [22-23] et reprise par [13], est la suivante : en raison de la nature linéaire de (III.1), la solution est composée de deux termes : la solution transitoire et l'état d'équilibre de l'équation. Pour les systèmes à déphasage non minimum, la solution transitoire de (III.1) contient des termes divergents (correspondant à l'effet des zéros instables du système). Par conséquent, une solution consiste à planifier la trajectoire de sortie afin d'annuler ces termes indésirables.

Considérons maintenant une trajectoire de sortie polynômiale sous la forme temporelle suivante :

$$y_{td}(t)=\sum_{i=1}^{i=p} a_i t^i \tag{III.2}$$

où:

l'ordre du polynôme est fonction de $p$, du nombre de contraintes initiales et finales sur la sortie, ainsi que du nombre de zéros instables associés à (III.1). La résolution de (III.1), associée aux conditions initiales sur $u(t)$, permet d'obtenir l'expression suivante :

$$u(t)=u_t(t)+u_p(t) \tag{III.3}$$

où:

$$u_t(t)=\sum_{i=1}^{i=m} A_i\left(a_i,t_0,u_0,u_0^{(1)},\ldots,u_0^{(n-1)}\right)e^{(r_i,t)} \tag{III.4}$$

est la solution transitoire de l'équation différentielle homogène associée à (III.1). Avec $r_i$ étant les racines distinctes de l'équation caractéristique (*y* compris celles qui sont négatives, positives, et aussi bien que les racines à parties réelles nulles, c'est-à-dire purement imaginaires). $t_0,u_0,u_0^{(1)},\ldots,u_0^{(n-1)}$ sont respectivement, le temps initial de la trajectoire, la valeur initiale d'entrée correspondante et les dérivés initiales d'entrée. Notez que cette valeur initiale n'est pas limitée et dépend seulement du système, ce qui constitue une différence essentielle entre ce régime et les techniques disponibles. En raison de la linéarité de l'équation différentielle, les $A_i$ sont des fonctions linéaires des coefficients $a_i$ et :

$$u_p(t) = \sum_{i=1}^{i=p} B_i(a_i)\ t^i \qquad \text{(III.5)}$$

est une fonction purement polynomiale, ce qui représente une solution particulière du système inverse avec second membre, où $B_i(a_i)$ sont obtenus comme des fonctions linéaires des coefficients de sortie grâce à la substitution de (III.5) dans (III.1) et l'identification terme à terme. Pour annuler l'effet des zéros "instables" (par instables on entend soit des zéros dans le demi-plan droit menant à des réponses divergentes ou imaginaires -sans limite des valeurs- conduisant à des oscillations en régime stable), on doit mettre les contraintes suivantes :

$$A_i\left(a_i, t_0, u_0, u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n-1)}\right) = 0, \forall t \qquad \text{(III.6)}$$

où les $A_{is}$ sont les coefficients associés aux termes instables.

Les coefficients de la trajectoire désirée de sortie sont obtenus en résolvant un système linéaire formé par les équations ci-dessous incluant des contraintes sur les conditions initiales et finales fixées sur la position de sortie et ses dérivés. Ceci mène à la forme finale du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} A_i\left(a_i, t_0, u_0, u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n-1)}\right) = 0, \forall t \\ y_{td}^{(i)}(t_0) = ic_i \\ y_{td}^{(i)}(t_f) = fc_i, i \in \{0 \ldots k\} \end{cases} \qquad \text{(III.7)}$$

où :

*ic*, *fc* dépendent des conditions initiales et finales, respectivement, fixées aux instants initiaux et finaux souhaités $t_0$, $t_f$,

et $k$ constitue une valeur très importance pour les dérivés de sortie spécifiée. Les solutions ($a_{1d}, \ldots, a_{pd}$) du système (III.7) peuvent être aisément obtenues, aboutissant à une expression de la sortie désirée $y_{td}$ ainsi qu'à la forme de la commande nominale en boucle ouverte qui va forcer la sortie du système à suivre exactement la trajectoire désirée.

Cette commande nominale s'écrit :

$$u_{ol}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{i=p} B_i\left(a_{id}\right)\ t^i+\sum A_{is}\left(a_{id},t_0,u_0,u_0^{(1)},\ldots,u_0^{(n-1)}\right)\ e^{\left(r_{is},t\right)} \tag{III.8}$$

où $r_{is}$, $A_{is}$ tiennent compte des zéros stables et les termes correspondants à $A_i$ dans (III.4).

***Remarque :***

*Cette loi de commande élaborée en boucle ouverte (noté par un indice 'ol') est obtenue par l'annulation des termes instables de l'équation (III.4), évitant ainsi tout problème de dérive numérique.*

Pour apporter un peu de robustesse à ce contrôle en boucle ouverte, il faut ajouter des termes de réaction. Cela peut être fait au niveau de la sortie (si les capteurs sont disponibles sur le système de contrôle). Le contrôle final (notées avec un indice '*cl*') est alors :

$$u_{cl}(t)=u_{ol}(t)+k\begin{pmatrix} e_y \\ e_y^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ e_y^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{III.9}$$

où :

$e_y(t)=y_{td}(t)+y(t)$ est l'erreur de suivi de la sortie, et $k^T\in\Re^n$ est un vecteur gain.

Il est facile de vérifier que ce contrôle en boucle fermée permettra le suivi avec la dynamique d'erreur :

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)e_y(t)+k\begin{pmatrix} e_y \\ e_y^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ e_y^{(n-1)} \end{pmatrix}=0 \qquad \text{(III.10)}$$

$k$ est un vecteur de gain choisi de telle sorte que le polynôme associé à (III.10) soit de Hurwitz.

Lorsque les sorties ne sont pas disponibles, il est toujours possible de procéder par retour d'état (états mesurables ou observables). Dans ce cas, les trajectoires désirées correspondant aux états contrôlables peuvent être calculées hors ligne, grâce à l'intégration de la dynamique directe de l'état du système, excité par le contrôle nominal en boucle ouverte (équation III.8).

Le problème d'inversion d'un système à non minimum de phase est équivalent au problème de trouver de bonnes conditions initiales pour la dynamique inverse. Ces conditions sont telles qu'elles permettent d'annuler l'effet de la réponse transitoire instable. Il y a différentes façons d'obtenir ces conditions initiales souhaitées.

Nous rappelons ici deux approches largement utilisées pour le contrôle d'un manipulateur à un seul bras flexible. Tout d'abord, une approche fréquentielle basée sur la transformée de Fourier bilatérale peut être appliquée :

$$TF(x(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{(-2\pi ft)}dt \qquad \text{(III.11)}$$

Ce système permet d'obtenir une dynamique non causale inverse stable. La non causalité est nécessaire pour porter la dynamique inverse d'une des conditions données à celle souhaitée, menant à une réponse stable. Cependant, cette méthode est gourmande en temps de calcul puisqu'une équivalence entre les domaines temporels et fréquentiels est nécessaire. Pour cette raison, une approche équivalente a été proposée dans le domaine temporel ; les chercheurs ont utilisé la réponse impulsionnelle non causale du système. Cette dernière peut être exprimée par :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad \text{(III.12)}$$

où $u$, $y$ et $h$ représentent l'entrée, la sortie du système, et la réponse impulsionnelle non causale, respectivement. Cependant, bien que les calculs dans le domaine temporel soient beaucoup moins exigeants, les deux méthodes ci-dessus sont basées sur la fonction de transfert du système. Ainsi, leur application au problème de commande avec conditions initiales non nulles reste difficile.

Par conséquent, une approche dans le domaine temporel, entièrement fondée sur la représentation d'état du système est beaucoup plus souple. Ce système utilise essentiellement l'idée suivante : la dynamique élastique du manipulateur flexible est alors décrite dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{X} = AX + By_{td}(t) \tag{III.13}$$

où $X = \begin{bmatrix} q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix}$ le vecteur d'état inclut la position correspondante élastique et la vitesse et $y_{td}(t)$ est la trajectoire désirée de l'effecteur.

Puis, en utilisant une matrice de transformation $T$, le système (III.13) peut être transformé en l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{ss} \\ \dot{\tilde{x}}_{us} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_{us} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_{us} \end{pmatrix} + T^{-1} B y_{td}(t) \tag{III.14}$$

où : $\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_s \\ \dot{\tilde{x}}_{us} \end{pmatrix} = T^{-1} X$

et $A_s$, $A_{us}$ correspondent respectivement aux valeurs propres (négatives et positives) du système.

Il est intéressant de noter ici que le bon comportement de cette approche est lié à l'hypothèse de non existence de valeurs propres purement imaginaires. Il s'agit, en fait, d'une limitation bien connue de ce type de méthode.

Finalement, à partir de (III.14), la dynamique inverse peut être obtenue par l'intégration en aval de la partie stable et l'intégration en amont de la partie instable.

L'équivalence entre l'intégration en amont de la partie instable de la dynamique et le calcul des valeurs propres a été clairement établi [13].

En fait, une solution bornée de la partie instable peut être obtenue, comme mentionné plus haut, en utilisant une intégration par l'arrière. Toutefois, la solution générale peut s'écrire comme suit :

$$\tilde{x}_{us}(t) = \tilde{x}(0).e^{(A_{us})t} + \int_0^t e^{A_{us}(t-\tau)} B_{us} y_{td}(\tau) d\tau \tag{III.15}$$

ou de manière équivalente :

$$\tilde{x}_{us}(t) = e^{(A_{us})t}.\left(\tilde{x}(0) + \int_0^t e^{-A_{us}\tau} B_{us} y_{td}(\tau) d\tau\right) \tag{III.16}$$

Une solution bornée peut être obtenue en choisissant la première condition comme suit :

$$\tilde{x}_{us}(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-A_{us}\tau} B_{us} y_{td}(t-\tau) d\tau \tag{III.17}$$

En supposant l'existence de cette intégrale, en raison de la majoration (bornes) de $y_{td}$ , puis en substituant (III.17) dans (III.16) nous obtenons :

$$\tilde{x}_{us}(t) = -\int_{-\infty}^0 e^{A_{us}\tau} B_{us} y_{td}(t-\tau) d\tau \tag{III.18}$$

qui finalement peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{us}(t) &= \int_{+\infty}^t e^{A_{us}(t-\tau)} B_{us} y_{td}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{-\infty} e^{A_{us}(t)} B_{us} y_{td}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{III.19}$$

Cette équation représente effectivement une intégration en amont du système correspondant à la partie instable.

Après avoir présenté deux méthodes existantes dans la littérature et très utilisées dans le domaine de l'inversion, on se propose d'étudier maintenant l'influence des valeurs initiales sur l'inversion de la dynamique d'un système à travers l'exemple suivant :

Considérons l'équation entrée-sortie suivante :

$$u(t)^{(1)} - \alpha u(t) = y_{td}(t) \tag{III.20}$$

où $\alpha \in \Re^+$ est le zéro instable.

et la sortie désirée est donnée par :

$$y_{td}(t) = y_0 + vy_0(t) \tag{III.21}$$

Il peut être vérifié que l'inversion stable, fondée sur la mise en place de condition initiale appropriée, ainsi que la réponse impulsionnelle non causale (III.12), conduisent toutes les deux à un inverse borné (convergence).

On peut voir également qu'à partir de cette première condition, nous obtenons la sortie correspondante (III.21).

***1) Solution à base de calcul direct avec de bonnes conditions initiales***

Via la solution générale de (III.15), la commande nominale s'écrit :

$$u(t) = \left(u_0 + \frac{y_0}{\alpha} + \frac{vy_0}{\alpha^2}\right)e^{(\alpha t)} - \left(\frac{y_0}{\alpha} + \frac{vy_0}{\alpha^2}\right) - \frac{vy_0}{\alpha^2}t \tag{III.22}$$

Il est donc clair que le bon état initial, conduisant à un inverse borné est :

$$u_0 = -\frac{y_0}{\alpha} + \frac{vy_0}{\alpha^2} \tag{III.23}$$

La solution correspondante est alors :

$$u(t) = -\left(\frac{y_0}{\alpha} + \frac{vy_0}{\alpha^2}\right) - \frac{vy_0}{\alpha^2}t \tag{III.24}$$

***2) Opérateur de convolution bilatérale***

En utilisant (III.12), la solution de (III.20) est donnée par :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{III.25}$$

où la réponse impulsionnelle non causale est :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \succ 0 \\ -e^{(\alpha t)}, & t \prec 0 \end{cases} \tag{III.26}$$

En utilisant cette approche, les calculs directs conduisent à la même inversion (III.24).

Considérons maintenant le problème inverse : pour une condition initiale $u_0$ donnée, la solution consiste à trouver une trajectoire de sortie $y_{td}(t)$ conduisant à une inversion appropriée stable $u(t)$.

La solution est obtenue comme suit : tout d'abord une forme générale doit être choisie pour la sortie désirée. Considérons ensuite une sortie décrite par (III.2). Cette sortie doit répondre à deux contraintes : la valeur de la sortie initiale $y(t_0 = 0) = y_0$ et les contraintes de stabilité (III.6). Par conséquent, $p = 2$ dans (III.2), et la sortie désirée s'écrit alors :

$$y_{td}(t) = a_1 + a_2 t \tag{III.27}$$

Le remplacement de (III.27) dans (III.20) et la résolution de *u* conduit à :

$$u(t) = \left(u_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2}\right)e^{(\alpha t)} - \left(\frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2}\right) - \frac{a_2}{\alpha}t \tag{III.28}$$

$a_1$, $a_2$ sont obtenus en résolvant le système linéaire (III.7) :

$$\begin{cases} A(a_1, a_2, u_0) = u_0 + \dfrac{a_1}{\alpha} + \dfrac{a_2}{\alpha^2} \\ a_1 = y_0 \end{cases} \tag{III.29}$$

Finalement, la trajectoire de sortie désirée associée à un système donné ayant pour condition initiale $u_0$ s'écrit :

$$y_{td}(t) = y_0 - \left(\alpha^2 u_0 + y_0 \alpha\right)\ t \tag{III.30}$$

Maintenant, il convient de remplacer cette expression dans (III.30) pour trouver un bonne inversion convergente associée à la condition initiale (III.23).

La sortie résultante est donnée par :

$$y_{td}(t) = y_0 + v y_0(t) \tag{III.31}$$

Cette dernière relation n'est rien d'autre que l'équation (III.21).

## III.3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une technique d'inversion très intéressante qui permet d'inverser un système stable ayant une seule entrée et une seule sortie (SISO) à non minimum de phase.

La commande nominale est obtenue en boucle ouverte ; et elle permet l'annulation des termes qui sont reliés aux zéros instables du système.

Cette méthode sera appliquée à un système -bien connu- à déphasage non minimum, à savoir un robot manipulateur flexible à un seul bras. La procédure de planification de sortie sera utilisée pour inverser la position du système effecteur.

# *Chapitre IV*

# *Application à un robot flexible*

## IV.1. Modèle d'un manipulateur à un seul bras flexible

Considérons un bras flexible de longueur $L$, qui se déplace dans un plan horizontal avec un moment d'inertie $I_b$ par la racine, et une inertie localisée à l'extrémité de l'actionneur $I_h$. Le bras est chargé par une masse pointe $M_l$ correspondant à un moment d'inertie $J_l$. Le déplacement d'un point quelconque le long de la poutre à une distance du moyeu est classiquement donnée par l'angle $\theta = (t)$ et caractérisé également par une petite déformation $\omega = (x,t)$ mesurée à partir de la ligne $OX$ comme le montre la figure IV.1 [13].

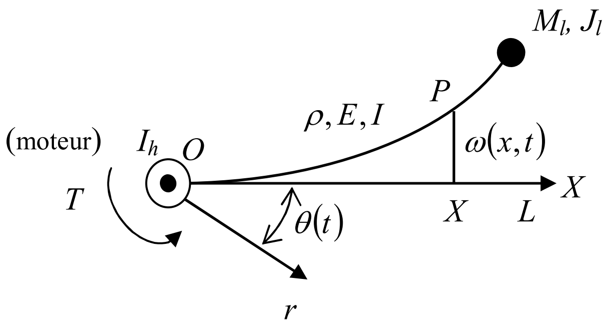


*Figure IV.1. Manipulateur à un seul bras flexible ayant une masse à l'extrémité*

En se plaçant dans le cadre des hypothèses de la théorie linéaires d'Euler-Bernoulli, le bras est modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante [24]:

$$EI\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\rho x\ddot{\theta} \qquad \text{(IV.1)}$$

associée aux conditions aux limites telles que :

$$\begin{cases} EI \left.\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right|_{x=0} + T - I_h \ddot{\theta} = 0 \\ \omega(0,t) = 0 \\ EI \left.\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right|_{x=L} = -J_l \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \theta\right]_{x=L} \\ EI \left.\dfrac{\partial^3 \omega}{\partial x^3}\right|_{x=L} = M_l \left.\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + x\ddot{\theta}\right)\right|_{x=L} \end{cases} \tag{IV.2}$$

où :

*E:* module de Young de la poutre.

*I:* moment d'inertie axial.

$\rho$ : densité linéaire de masse.

*T:* le couple moteur.

Les déplacements élastiques sont décomposés dans la base modale selon :

$$\omega(x,t) = \sum_{i=0}^{i=n} \phi_i(x) q_i(t) \tag{IV.3}$$

où:

*n*: le nombre des termes modaux.

$q_i$: i ième coordonnée modale.

$\phi_i(x)$: fonction de forme avec contrainte ('clamped').

En utilisant les équations de Lagrange, il est alors possible d'obtenir le modèle suivant (pour plus de détails se référer à [25]).

$$M\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Kq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV.4}$$

avec :

$\theta$ : angle articulaire.

$q = [q_1 ... q_n]^T$ vecteur des coordonnées modales.

Les éléments de la matrice d'inertie *M* définie symétrique et positive sont donnés par :

$$M_{11} = M_l L^2 + J_L + I_h + I_b$$

$$M_{1j} = \omega_j + LM_l \phi_j(L) + J_l \phi_j^{(1)}(L) \quad j = 2,...,n+1$$

$$M_{ii} = V_i + I_h \phi_i^{(1)^2}(0) + J_l \phi_i^{(1)^2}(L) + M_l \phi_i^2(L) \quad i = 2,...,n+1$$

$$M_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad i = 2,...,n \quad j = 2,...,n+1$$

avec :

$$\omega_j = \rho \int_0^L x \phi_j(x) dx,$$

$$V_i = \rho \int_0^L \phi_i^2(x) dx$$

$$\phi^{(1)}(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$$

et la matrice de raideur *K* est telle que :

$$K = diag\{K_1 ... K_n\}$$

$$K_i = EI \int_0^L \left(\phi_i^2(x)\right)^2 dx$$

avec :

$$\phi^{(2)}(x) = \frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$

Le modèle (IV.4) peut être mis dans une forme de représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{aligned} \qquad \text{(IV.5)}$$

où :

$$X = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & q_1 & \dot{q}_1 & \ldots & q_n & \dot{q}_n \end{bmatrix}^T$$

$$Y = y_t = \theta L + \omega(L,t) = \begin{bmatrix} L & 0 & \phi_1(L) & 0 & \ldots & \phi_n(L) & 0 \end{bmatrix} q$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

avec $y_t$ est la position opérationnelle de l'effecteur.

On peut alors obtenir directement la fonction de transfert, selon :

$$\frac{y_t}{T} = C(sI - A)^{-1} B$$

Nous appliquons ici le principe de la planification de trajectoire au modèle d'un robot manipulateur flexible. Ce bras est caractérisé par [22-23]:

$L = 1.005m,$ $I_h = 1.8 \cdot 10^{-3} kg.m^2,$ $J_l = 4.742 \cdot 10^{-2} kg.m^2,$ $I_b = 0.6828 kg.m^2,$ $EI = 47.25 N.m^2,$ $M_l = 6.79 kg,$ $\rho = 2.0316 kg/m.$

La première fréquence propre est :

$$f_1 = 0.693 Kg/m$$

Le transfert calculé à partir d'une seule fréquence modale est donné par :

$$F_1 = \frac{y_t}{T} = \frac{-0.1117 s^2 + 353.5}{s^2\left(s^2 + 2671\right)}$$

Les zéros de cette fonction de transfert sont :

$$z_{1,2} = \mp 56.25$$

Nous soulignons l'existence d'un zéros positif $z_1 = 56.25$ (système à non minimum de phase).

## IV.2. Planification de trajectoire et calcul de la commande

Une méthode directe pour l'obtention de la commande permettant le suivi d'une trajectoire opérationnelle consiste à inverser le modèle dynamique du robot. Malheu–reusement la nature du système, en l'occurrence il s'agit d'un système à déphasage non minimal, implique la divergence de la commande calculée par une procédure directe, rendant ainsi cette approche inutilisable.

Dans le cas linéaire, la fonction de transfert $F_1$ peut être utilisée pour obtenir l'équation différentielle correspondante. Cette fonction de transfert lie directement la dynamique entre le couple du moyeu à la position de l'effecteur.

$$y_t^{(4)}(t)+2671y_t^{(2)}(t)=-0.1117u^{(2)}(t)+353.5u(t) \tag{IV.6}$$

associées aux conditions initiales :

$$u(0)=u^{(1)}(0)$$

$$y_t(0)=y_t^{(1)}(0)=y_t^{(2)}(0)=y_t^{(3)}(0)=0$$

Fixons $y_t(t)$ à $y_{td}(t)$ et calculons le couple de commande nécessaire, par inversion du modèle, la commande obtenue et de la forme:

$$u_{BO}(t)=Ae^{56.25t}+Be^{-56.25}+v(t)$$

où : $v(t)$ correspond à la solution particulière de l'équation avec second membre (ce terme dépend de $y_{td}^{(2)}(t)$ et $y_{td}^{(4)}(t)$). L'effet déstabilisant du zéros positif est clairement pris dans l'expression de $u_{BO}$.

Nous étudions une idée simple, permettant de planifier des trajectoires opérationnelles annulant l'effet du terme $e^{z_1 t}$ dans $u_{BO}$.

Soit la trajectoire polynomiale :

$$y_{td}(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5+a_6t^6+a_7t^7+a_8t^8$$

Neuf contraintes peuvent être fixées sur cette trajectoire :

- $y_{td}(0) = y_0 = 0$ (valeur initiale).
- $y_{td}^{(1)}(0) = y_{td}^{(2)}(0) = y_{td}^{(3)}(0) = 0$ (conditions initiales sur la vitesse, l'accélération et la sur accélération).
- $y_{td}(tf) = y_{tf}$ (valeur finale).
- $y_{td}^{(1)}(tf) = y_{td}^{(2)}(tf) = y_{td}^{(3)}(tf) = 0$ (conditions finale sur la vitesse, l'accélération et sur accélération).

Moyennant ces contraintes $y_{td}(t)$ est réduite à :

$$y_{td}(t) = a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 + a_8 t^8 \qquad \text{(IV.7)}$$

Une solution symbolique de (IV.6) est donnée par :

$$u_{BO}(t) = u_1(t) + f_1 \exp(z_1 t) + f_2 \exp(z_2 t) \qquad \text{(IV.8)}$$

où $u_1$*:* polynôme de degré six,

$f_1, f_2$ sont des combinaisons linéaire des coefficients $a_4, \ldots, a_8$.

Cette dernière expression, nous permet de fixer une contrainte supplémentaire sur $y_{td}(t)$ (assurer un couple de commande borné, en annulant le terme $f_1$).

***Remarque :***

*Pour obtenir l'équation différentielle entrée-sortie, l'approche fonction de transfert a été utilisée. Par conséquent, les conditions initiales sont forcées à zéro.*

## IV.3. Résultats et simulations

Nous présentons ici les résultats des simulations effectuées sur le modèle du bras flexible décrit précédemment, et nous nous contentons ici de traiter un cas particulier :

$t_f$=7.3s, $y_f$=1.75m.

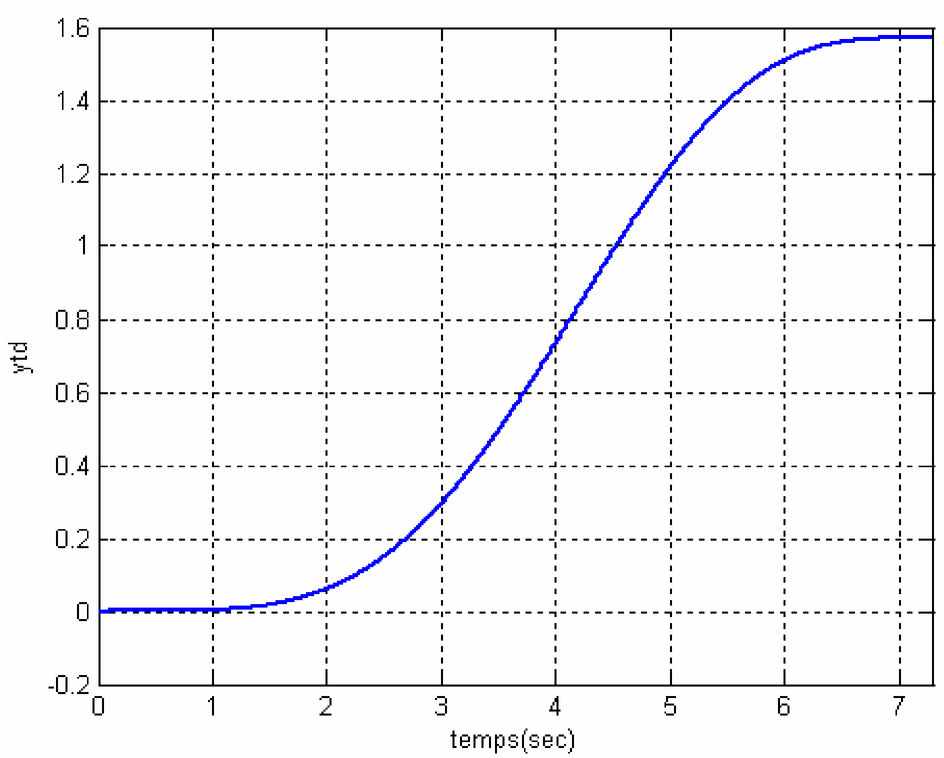


*Figure IV.3. Trajectoire planifiée*

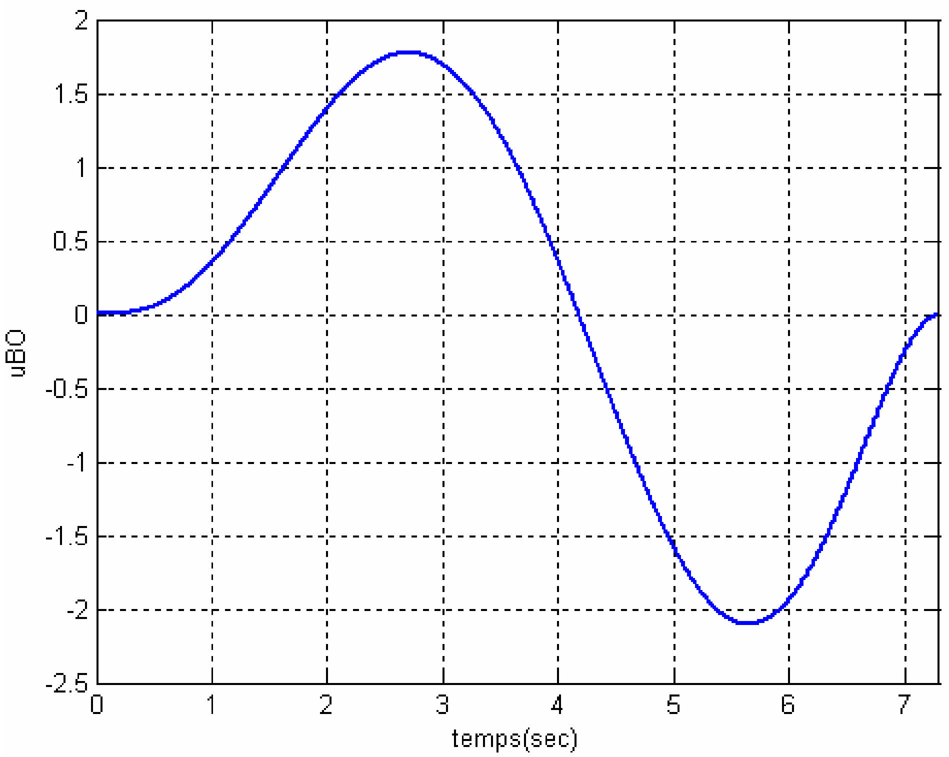


*Figure IV.4. Couple de commande obtenu*

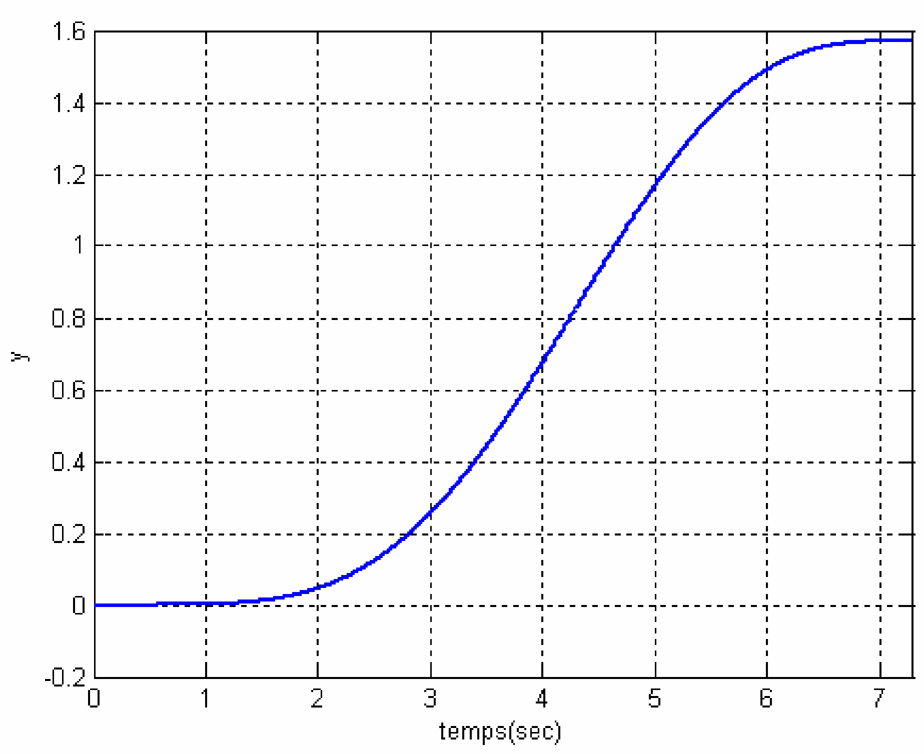


*Figure IV.5. Trajectoire opérationnelle actuelle*

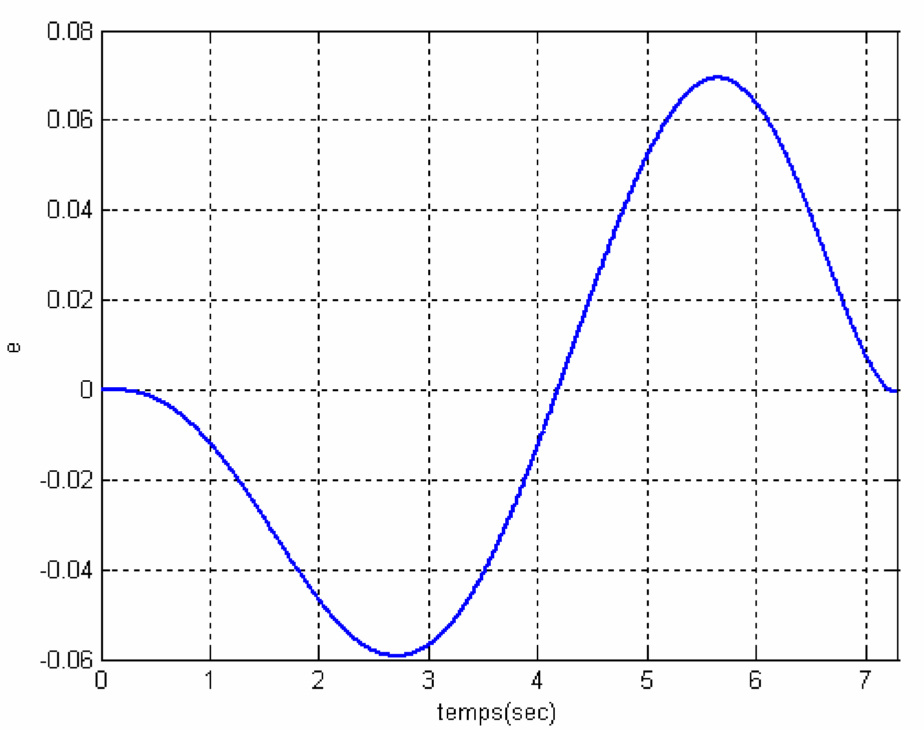


*Figure IV.6. Erreur de suivi opérationnel*

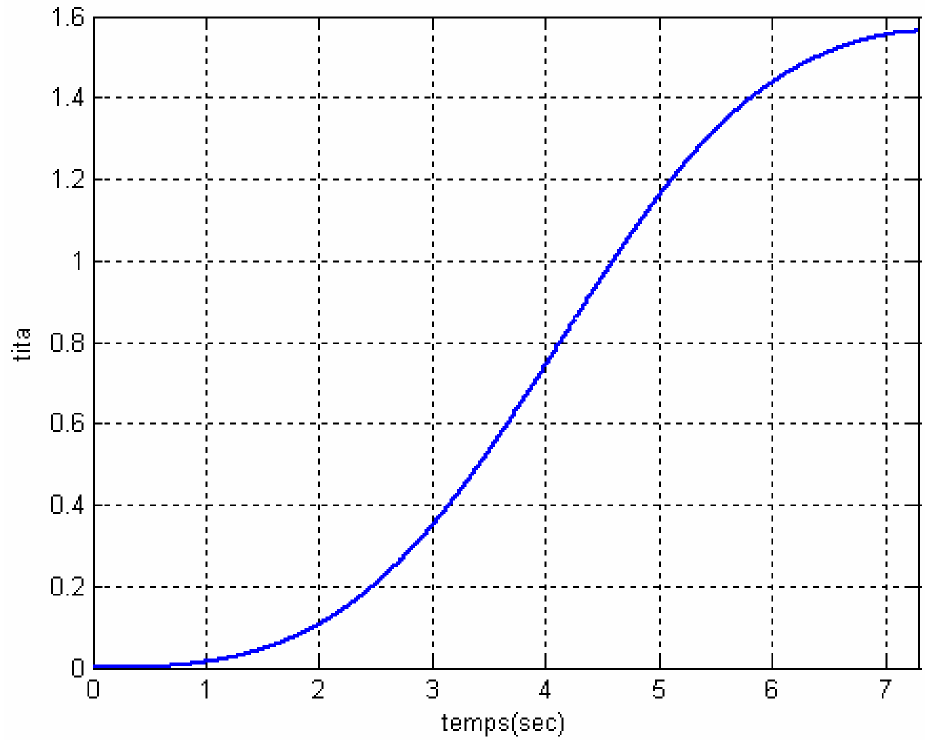


*Figure IV.7. Trajectoire articulaire actuelle*

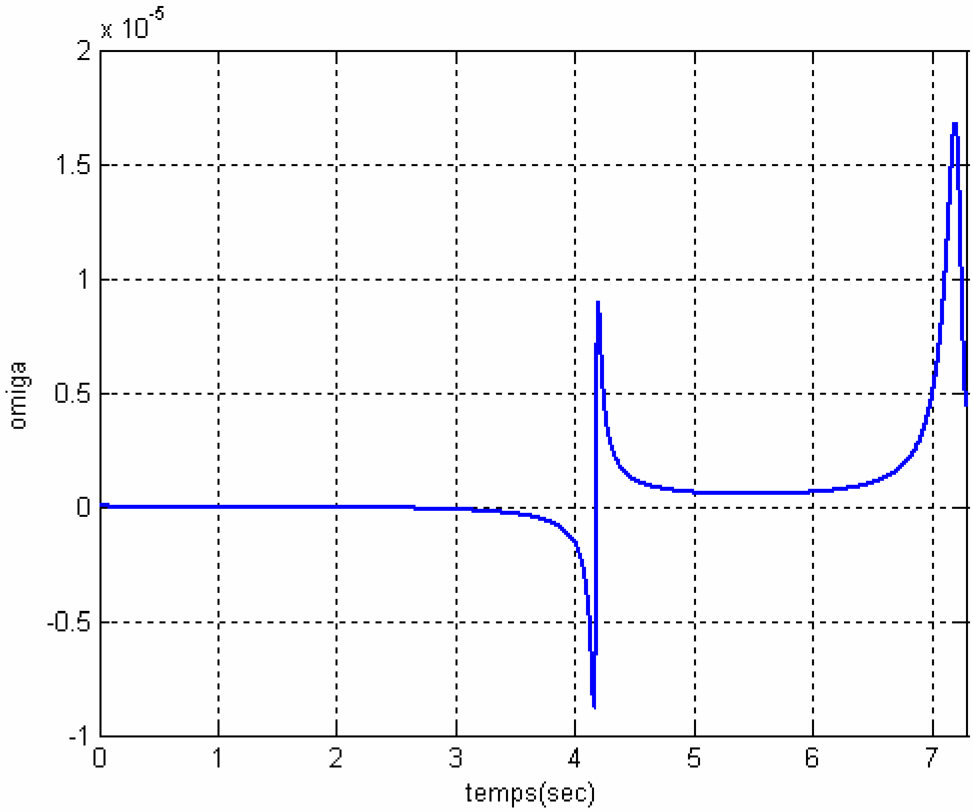


*Figure IV.8. Déplacement élastique en bout*

Sur la figure IV.5 est représentée la trajectoire de l'effecteur obtenue par l'application de la commande nominale $u_{BO}$ donnée par l'équation (IV.8)-valeur maximale 1.774 m-. Le suivi de la trajectoire est réalisé avec une erreur faible (valeur maximale 0.069 m) comme le montre la figure IV.6. Nous avons également représenté respectivement dans les figures IV.7 et IV.8 la trajectoire articulaire obtenue et le déplacement élastique de l'effecteur. Le déplacement s'annule presque avec la fin du mouvement articulaire.

### *Trajectoire arbitraire*

Pour montrer l’intérêt de la planification de trajectoire proposée, nous avons appliqué la méthode d’inversion de modèle sur une trajectoire quelconque (pour des coefficients $a_i$ différents de ceux obtenus précédemment).

Sur la figure suivante est présenté le couple moteur obtenu pour une trajectoire perturbée ($a_i = a_{40} + 0.0001$ *ou* $a_{40}$ correspond au coefficient optimal calculé précédemment).

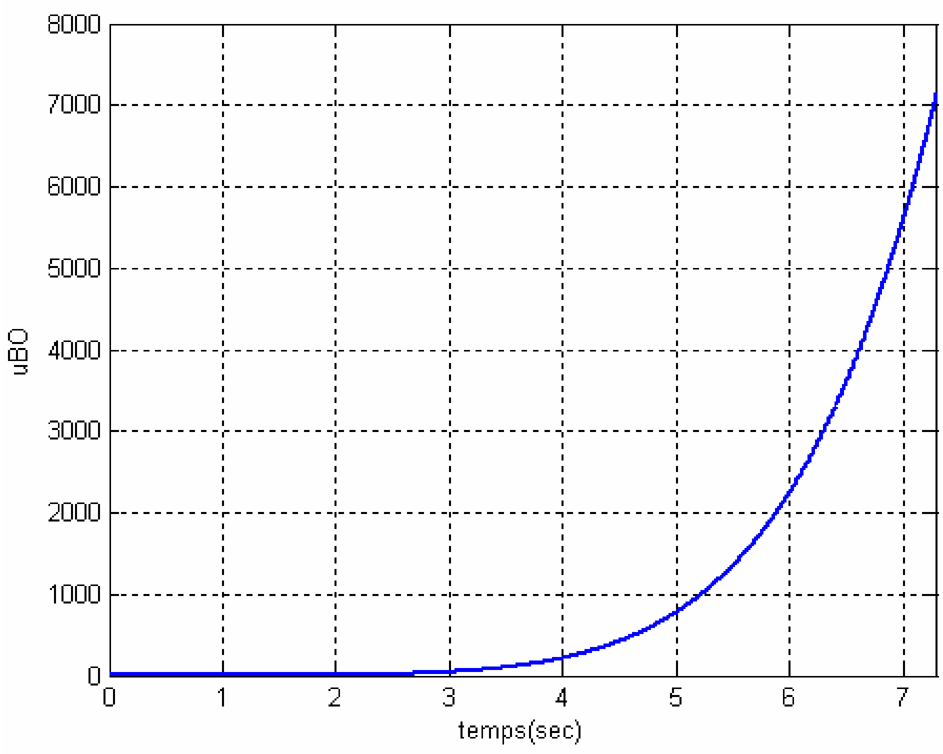


*Figure IV.9. Couple de commande pour une trajectoire arbitraire*

***Remarque :***

*Il est clair que cette commande diverge complètement et est donc inutilisable pratiquement, ceci est dû au fait que la trajectoire utilisée n'annule pas l'effet des zéros positifs.*

## IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la technique de planification de trajectoire et nous l'avons appliquée à un bras manipulateur flexible. Cette technique conduit à une trajectoire pouvant être exactement reproduite par l'utilisation d'une simple inversion de modèle, et ceci, en dépit du déphasage non minimum du système.

Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la de loi commande obtenue par inversion.

# Conclusion Générale

Ce mémoire est orienté vers le problème de planification de trajectoire en robotique. Nous nous sommes attachés plus particulièrement à un type spécifique de robots, en l'occurrence, nous avons traité le cas de robots flexibles. Ce type constitue un cas particulier de modèle puisqu'il s'agit d'un modèle à déphasage non minimal.

Nous avons réalisé le problème de suivi de trajectoire pour un tel robot en utilisant l'approche de l'inversion de modèles. Comme, le modèle est à déphasage non minimal, l'inversion directe n'est pas possible, et il faut s'orienter alors vers des techniques permettant de s'affranchir des zéros "instables" du système considéré.

L'approche étudiée dans ce mémoire est une approche polynomiale permettant de prendre en considération ces zéros "instables" dans la dynamique de la trajectoire de telle sorte que leurs effets soit réduit à zéro, sans pour autant faire diverger la commande obtenue ou induire des dérives de calculs.

La commande élaborée est une commande nominale puisqu'elle ne prend en compte que le modèle en boucle ouverte sans prendre en considération les erreurs de modélisation ou les éventuelles perturbations qui peuvent affecter le système. Il faut noter que dans ce mémoire, l'aspect de prendre en compte ces effets n'a pas été étudié, et on s'est limité à la commande nominale. La commande nominale doit être injectée –par anticipation- dans une structure en boucle fermée pour pallier ces problèmes. Ce point fait l'objet d'une autre thèse de magister dont l'objectif est de rechercher le type de correcteur approprié permettant de répondre à tous les objectifs et le cahier des charges que doit satisfaire une structure de commande réelle : marges de robustesse, marge de stabilité, temps de réponse, bande passante, …etc.

La démarche étudiée est une méthodologie permettant de comprendre l'influence des zéros instables dans l'élaboration d'une commande hors ligne, et de palper les limitations de ce type de systèmes.

Beaucoup de travail reste à faire… et nous proposons comme perspective à ce travail de comparer la technique de l'inversion à d'autres techniques de planification et de rechercher le correcteur permettant de répondre à un cahier des charges données. Aussi, nous proposons également d'étoffer cette méthode aux systèmes multivariables ; et d'examiner les systèmes discrets.

# Références bibliographiques


[1] T. FRAICHARD, *“Contributions à la planification de mouvement"*, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches, Inria Rhône-Alpes & Laboratoire Gravir-CNRS, 2006.

[2] M. DEFOORT, *“Contributions a la planification et a la commande pour les robots mobiles coopératifs"*, thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lille, 2007.

[3] I. H. AGUILAR, *“Commande des bras manipulateurs et retour visuel pour des applications à la robotique de service"*, thèse de Doctorat, Ecole doctorale systèmes, 2007.

[4] P. REGNIER, *“Planification: historique, principes, problèmes et méthodes (de GPS à ABTWEAK)"*, Equipe IA et Robotique, IRIT, Université Paul Sabatier.

[5] A. GASPARETTO, V. ZANOTTO, *“A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators"*, ScienceDirect Mechanism and Machine Theory 42, 2007, Pages 455-471.

[6] B. B. DACIC, “*Path-Following: an Alternative to Reference Tracking”,* PhD thesis, University of California, Santa Barbara, June 2005.

[7] P. M. S. PIRES, *“Trajectory Control of a Single Link Rigid-Flexible Manipulator"*, Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Setembro-2007.

[8] J. HAUSER, R. HINDMAN, “*Maneuver regulation from trajectory tracking: feedback linearizable systems”*. In Proc, of third IFAC Symp, of Nonlinear Control System Design, 1995.

[9] P. ENCARNAÇÃO, A. PASCOAL, “*3d path following for autonomous underwater vehicle”*. 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000.

[10] A. P. AGUIAR. “*Performance limitations in reference-tracking and path-following”*. In 44th IEEE Conference on Decision, Control, and European Control Conference Workshop, editors, New Developments in Control Performance Limitation Research: A tale in Network Age, Seville, Spain, December 2005.

[11] A. P. AGUIAR, J. P. HESPANHA, and P. V. KOKOTOVIC. “*Path-following for non minimum phase systems removes performance limitation”*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(2): 234–239, February 2005.

[12] A. P. AGUIAR, D. B. DACIC, J. P. HESPANHA, and P. KOKOTOVIC. “*Path-following or reference-tracking: An answer relaxing the limits to performance”*. In 5th IFAC/EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, Lisbon, Portugal, July 2004.

[13] M. BENOSMAN, G. LE VEY, *“Stable Inversion of SISO Non-minimum Phase Linear Systems Through Output Planning: An Experimental Application to the One-Link Flexible Manipulator"*, Proc. Of IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 4, July 2003, pp 588-597.

[14] M. BENOSMAN, G. LE VEY. “*End-effector motion planning for one-link flexible robot”.* Symposium on Robot Control, pages 561–566, September 2000.

[15] M. BENOSMAN, G. LE VEY. “*Accurate trajectory tracking of flexible arm end-point”*. Symposium on Robot Control, pages 567–572, September 2000.

[16] M. BENOSMAN, F. BOYER, G. LE VEY, and D. PRIMAULT. “*Flexible links manipulators: From modelling to control”*. International Journal of Intelligent and Robotics Systems, 34(4):381–414, 2002.

[17] E. LAROCHE, *“Identification et Commande Robuste de Systèmes Electromécaniques"*, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Louis Pasteur de Strasbourg, décembre *2007*.

[18] S. K. DWIVEDY, P. EBERHARD, *“Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review"*, ScienceDirect Review article. Mechanism and Machine Theory, Volume *41*, Issue 7, July *2006*, Pages *749-777*.

[19] A. DE LUCA, B. SICILIANO, *“Inversion-Based nonlinear Control of Robot Arms with Flexible Links"*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, No. 6, November-December 1993.

[20] M. O. T TOKHI, A. K. M. AZAD, *“Flexible Robot Manipulators Modelling, simulation and control"*, Control Engineering Series 68.

[21] L, MEIROVITCH, *“Methods of Analytical Dynamics"*, McGraw-Hill, New York, USA, 1970.

[22] L. SAIDI, J. LOTTIN, *“Inversion de modèles* à *zéros stables et/ou instables"*, Proc. AGI, Pages *113-116*

[23] L. SAIDI J. LOTTIN, *“Inversion de modèles pour les systèmes multivariables"*, APII, Vol.8, N°:5, Pages *19-27, 1995.*

[24] M. BENOSMAN, *“Planification de trajectoire opérationnelle pour d’un bras manipulateur Flexible"*, Journées des Jeunes en Robotique, 12ème édition, 3-4 Février 2000, Bourges, pp 82-88.

[25] G. G. HASTINGS, W. J. BOOK, *“Verification of a Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators"*, Proc. of IEEE, 1986, Department of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology Atlanta, Georgia, pp 1024-1029.

[26] E. LAROCHE, *“Commande Robuste"*, Master IRIV, Université de Strasbourg, 2010-2011.

# Vibration latérale d'une poutre

## 1. Equation du mouvement

Considérons le diagramme de corps libre d'un élément de poutre comme le montre la figure (A.2) où $M(x,t)$ est le moment de flexion, $V(x,t)$ est la force de cisaillement, et $f(x,t)$ est la force extérieure par unité de longueur de la poutre.

La force d'inertie agissant sur un élément de la poutre est **:**

$$\rho A(x)\, dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{A.1}$$

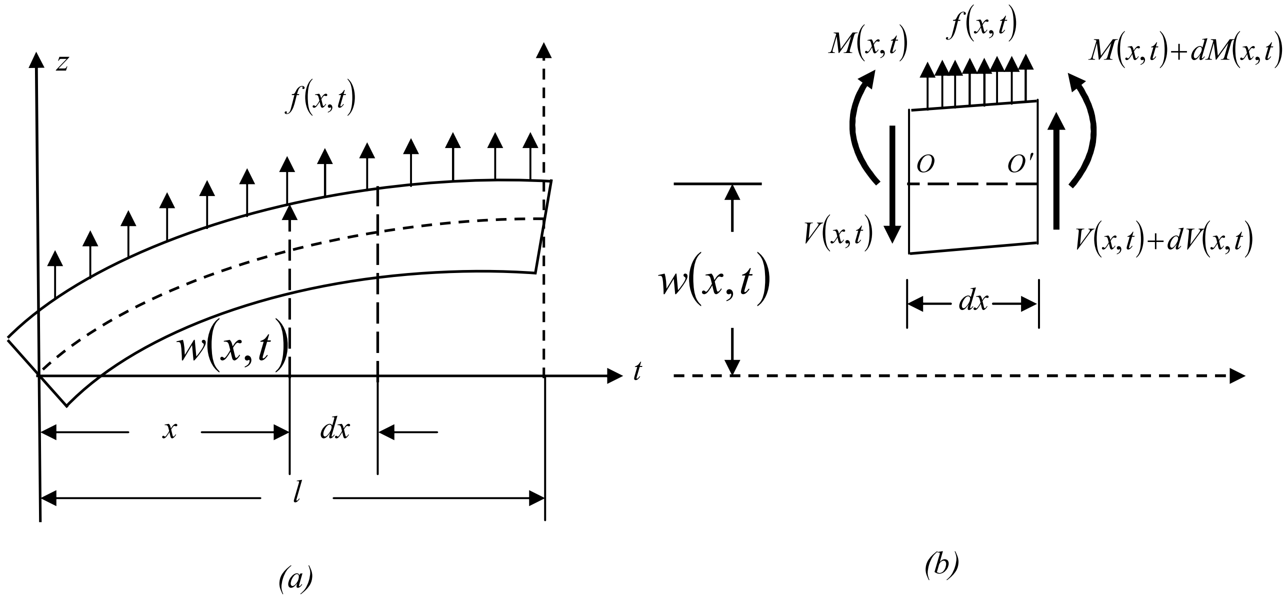


*Figure II.2. Poutre en flexion*

L'équation de la force du mouvement dans la direction $z$ donne **:**

$$-(V+dV)+f(x,t)\,dx+V=\rho A(x)\,dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{A.2}$$

où:

$\rho$ est la masse volumique et $A(x)$ est la section transversale de la poutre.

L'équation de moment du mouvement est:

$$(M + dM) - (V + dV)\,dx + f(x,t)\,dx\frac{dx}{2} - M = 0 \tag{A.3}$$

En écrivant :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x}dx$$

et sans tenir compte des conditions impliquant les deuxièmes puissances $dx$, les équations (A.2) et (A.3) peuvent être écrites comme suit :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x,t) - V(x,t) = 0 \tag{A.5}$$

En utilisant la relation $V = \frac{\partial M}{\partial x}$, l'équation (A.4) donne :

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{A.6}$$

De la théorie élémentaire de flexion des poutres (également connu sous le nom d'Euler-Bernoulli ou la théorie des poutres minces), la relation entre moment de flexion et déflexion peut être exprimée comme :

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \tag{A.7}$$

où:

$E$ est le module de Young et $I(x)$ est le moment d'inertie de la section transversale de la poutre autour de l'axe $y$. L'insertion de l'équation (A.7) dans l'équation (A.6), nous permet d'obtenir l'équation de mouvement pour la vibration latérale forcée d'une poutre non uniforme :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)\right]+\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)=f(x,t) \tag{A.8}$$

Pour une poutre uniforme l'équation (A.7) se réduit à **:**

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t)+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)=f(x,t) \tag{A.9}$$

Pour les vibrations libres $f(x,t)=0$ l'équation du mouvement devient **:**

$$c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)=0 \tag{A.10}$$

où:

$$c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{A.11}$$

## 2. Conditions initiales

L'équation du mouvement implique une dérivée de deuxième ordre par rapport au temps et une dérivée du quatrième ordre par rapport à $x$ du déplacement latéral, deux conditions initiales et quatre conditions aux limites sont nécessaires pour trouver une solution unique pour $w(x,t)$. Habituellement, les valeurs du déplacement latéral et de la vitesse sont spécifiées comme $w_0(x,t)$ et $\dot{w}_0(x,t)$ à $t=0$.

Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} &w(x,t=0)=w_0(x,t)\\ &\frac{\partial w}{\partial t}(x,t=0)=\dot{w}_0(x,t) \end{aligned} \tag{A.12}$$

## 3. Vibration libre

Les solutions sans vibrations peuvent être trouvées en utilisant la méthode de séparation des variables comme suit :

$$w(x,t) = \phi(x)q(t) \tag{A.13}$$

En substituant l'équation (A.13) dans l'équation (A.10) on obtient l'équation suivante:

$$\frac{c^2}{\phi(x)}\frac{\partial^4\phi(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{q(t)}\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = a = \omega^2 \tag{A.14}$$

où:

$a=\omega^2$ est une constante positive.

L'équation (A.14) peut être écrite en les deux équations suivantes :

$$\frac{d^4\phi(x)}{dx^4} - \beta^4\phi(x) = 0 \tag{A.15}$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{A.16}$$

où:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \tag{A.17}$$

La solution de l'équation (A.15) peut être exprimée comme :

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{A.18}$$

où :

$A$ et $B$ sont des constantes qu'on peut trouver à partir des conditions initiales. Nous supposons :

$$\phi(x) = Ce^{sx} \tag{A.19}$$

où :

$C$ et $s$ sont des constantes, et la dérivée de l'équation auxiliaire est comme suit :

$$s^4 - \beta^4 = 0 \tag{A.20}$$

Les racines de cette équation sont :

$$s_{1,2} = \pm\beta \qquad ; \qquad s_{3,4} = \pm i\beta \tag{A.21}$$

D'où la solution de l'équation (A.15) est :

$$\phi(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \tag{A.22}$$

où:

$C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ sont des constantes.

L'équation (A.22) peut aussi être exprimée en :

$$\phi(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + C_3 \cosh\beta x + C_4 \sinh\beta x \tag{A.23}$$

où :

$$\begin{aligned} \phi(x) = {} & C_1\left(\cos\beta x + \cosh\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - \cosh\beta x\right) + \\ & C_3\left(\sin\beta x + \sinh\beta x\right) + C_4\left(\sin\beta x - \sinh\beta x\right) \end{aligned} \tag{A.24}$$

avec $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ dans chaque cas, sont des constantes différentes.

Les constantes $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$ sont à déterminer à partir des conditions initiales.

Les fréquences naturelles de la poutre sont calculées à partir de l'équation (A.17) ; On pose :

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \tag{A.25}$$

## 4. Conditions aux limites

Les conditions aux limites courantes sont les suivantes :

- **Extrémité libre**

$$\text{Moment de flexion} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{La force de cisaillement} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{A.26}$$

- **Prise en charge (favoris)**

$$\text{Deflection} = w = 0\,,\;\; \text{Moment de flexion} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{A.27}$$

- **Fixe (serré) fin**

$$\text{Deflection} = 0\,,\qquad \text{Pente} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{A.28}$$

Les équations des fréquences, les formes des modes et les fréquences naturelles pour des poutres –avec des conditions aux limites communes– sont données par (A.13) et (A.14).