

# **République Algérienne Démocratique et Populaire**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Electronique

## **THESE**

Présentée pour l'obtention du Diplôme de

**MAGISTER EN ELECTRONIQUE**

OPTION : Contrôle industriel

Par

**LITIM MOUSSA**

Ingénieur d'Etat en Electronique

**Thème**

**Commande à modèle interne :  
Synthèse et application**

Soutenue le :.....

Devant le jury composé de:

Dr. Djamel Benatia	Professeur	U. de Batna	Président
Dr. Mohammed Boulemden	Professeur	U. de Batna	Rapporteur
Dr. Lamir Saidi	Chargé de Cours	U. de Batna	Co-rapporteur
Dr. Kamel Srairi	Maître de Conférences	U. de Biskra	Examineur
Dr. Nabil Benoudjit	Maître de Conférences	U. de Batna	Examineur

# *Remerciements*

Je remercie Dieu tout puissant pour la santé, la volonté, la patience et l'aide qu'il nous a données.

Je remercie le Docteur Lamir Saïdi ainsi que le Professeur Mohammed Boulemden enseignants au département d'électronique de l'université de BATNA pour l'encadrement, la disponibilité et la confiance qu'ils m'ont accordé tout au long de la préparation de cette thèse.

Je remercie aussi le Professeur Djamel Benatia d'avoir accepté de présider le jury d'examen de ce travail. Je tiens aussi à remercier le Docteur Kamel Srairi ainsi que le Docteur Nabil Benoudjit d'avoir accepté d'évaluer le présent travail.

Je remercie le Docteur Mohamed Laïd Hadjili et le Professeur Youcef Bouterfa qui m'ont beaucoup aidés lors de mon passage en Belgique dans le cadre d'un stage de courte durée.

Je suis très reconnaissant à R. Benboudia, M. Bahaz, T. Benmokrane, A. Bouhidel, M. Mokhtari, S. Benacer, Z. Dibi, N. Athamena, D. Malaab, A. Louchene et A. Dahmani enseignants au département d'électronique de l'université de Batna pour leurs conseils ainsi que leur disponibilité qui m'ont permis de mener à bien mes travaux.

Enfin, je ne saurais terminer sans remercier toute ma famille, qui m'a accompagnée tout au long de mes études par son amour inconditionnel et son soutien constant. Je dédie ce travail à ma mère, mes frères, mes sœurs, ma femme et mes enfants.

# Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre 1 : Commande à modèle interne

1. Introduction .....	3
2. Structure de base de la CMI .....	3
3. Stabilité.....	5
4. Analyse du correcteur.....	5
5. Problème lié à la structure de base de la CMI.....	6
6. Structure de commande à modèle interne modifiée .....	6
7. Modèle de référence .....	7
8. Analogie avec la boucle fermée classique.....	9
9. Conclusion.....	10

## Chapitre 2 : Synthèse du correcteur dans le domaine fréquentiel

1. Introduction .....	11
2. Synthèse du Correcteur.....	11
3. Interprétation des résultats.....	23
4. Filtre de robustesse .....	25
5. Formes du filtre .....	25
6. Conclusion.....	34

## Chapitre 3 : Synthèse du correcteur en représentation d'état

1. Introduction .....	35
2. Inversion de modèle en représentation d'état.....	36
2.1 Réalisabilité de la commande.....	38
2.2 Stabilité du correcteur.....	43

---

3. Implantation du correcteur dans la CMI.....	45
4. Exemples .....	48
5. Conclusion.....	52

#### **Chapitre 4 : Applications**

1. Introduction .....	53
2. Modèle de la machine à induction.....	53
2.1. Linéarisation .....	54
2.2. CMI pour le modèle à induction.....	55
2.3. Résultats de simulation.....	57
3. Modèle du CD-ROM.....	59
Conclusion générale .....	64
Bibliographie .....	66

## **INTRODUCTION GENERALE**

Parmi les problèmes que pose la commande des systèmes physiques, celui de la synthèse des lois de commande performantes vis-à-vis de la précision mais aussi suffisamment robustes pour assurer la stabilité. La diversité des structures de commandes est liée aux objectifs fixés d'une part et aux contraintes sur la qualité du modèle du procédé. Dans l'espoir d'apporter une contribution à cet axe de recherche, les travaux de cette thèse portent sur une structure de commande réputée comme une structure de commande robuste en l'occurrence la Commande à Modèle Interne (CMI).

La CMI a la particularité de se présenter comme une généralisation de la boucle ouverte. A partir d'une commande de modèle on modifie la consigne en prenant en compte l'écart de comportement qu'il peut y avoir entre la sortie du procédé et celle du modèle. En revanche la désadaptation du modèle intervient dans la condition de stabilité du système. Pour pallier ce problème un filtre dit de robustesse est introduit au niveau du signal d'erreur. Pour assurer une erreur nulle entre la consigne et la sortie du procédé, le correcteur doit être égal à l'inverse du modèle. Malheureusement, cette propriété est souvent irréalisable notamment dans le cas d'un système à déphasage non minimal ou d'un système dont le degré relatif est non nul. Dans cette optique, le travail de cette thèse propose des solutions qui permettent de déterminer un correcteur qui s'approche au mieux de l'inverse du modèle.

Ce mémoire comprend quatre chapitres. L'objet du premier chapitre est de présenter la structure de commande à modèle interne ainsi que ses principales propriétés.

Le second chapitre est dédié à la synthèse du contrôleur dans le domaine fréquentiel. Un critère de précision asymptotique est introduit pour la synthèse du correcteur. Les conditions que doivent vérifier les différents blocs de la CMI pour annuler l'erreur asymptotique entre la sortie du procédé et la consigne, lorsque celle-ci est polynomiale, sont établies. Le correcteur synthétisé est alors un inverse approché du modèle.

Le chapitre suivant traite la synthèse du contrôleur en temps discret et en représentation d'état. Cette étude constitue une alternative à la démarche proposée au chapitre précédent. Le correcteur est décomposé en deux parties : l'une calcule la commande en fonction de l'état du modèle et de l'objectif visé, l'autre fournit une prédiction de la consigne, telle que la précision asymptotique est assurée pour des consignes polynomiales d'ordre donné.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de la CMI sur deux modèles. Le premier est celui d'une machine à induction et le second est celui d'un CD-ROM. Des simulations développées sous MATLAB montrent l'efficacité des solutions d'inversion proposées aussi bien, dans le cas continu que dans le cas discret.

## CHAPITRE 1

### COMMANDE A MODELE INTERNE

#### 1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude de la structure de commande à modèle interne. Le choix de cette structure vient du fait qu'elle est présentée dans la littérature comme une structure de commande robuste ce qui a permis son utilisation très répandue en milieu industriel. Le principal avantage de cette structure réside dans la simplicité de sa construction, et l'interprétation aisée des rôles de ses blocs constitutifs. La structure de commande à modèle interne est présentée comme une alternative à la boucle fermée classique [1-10].

#### 2. Structure de base de la CMI

Comme son nom l'indique, la commande à modèle interne (C.M.I) incorpore une simulation du processus par un modèle  $M$  interne dans sa structure de commande.

Le procédé  $G$  muni de la structure CMI peut se schématiser comme l'indique la figure 1.  $C$  et  $M$  sont respectivement les fonctions de transfert du correcteur et du modèle  $M$ . Le procédé est représenté par le transfert  $G$  reliant sa sortie à la commande.  $P$  est une perturbation non mesurée et additive sur la sortie du procédé.

Dans la structure de base de la CMI, la commande  $U$  issue du correcteur  $C$  est appliquée simultanément au procédé  $G$  et à son modèle  $M$ . La CMI exploite alors cet écart de comportement pour corriger l'erreur sur la consigne. Le signal d'erreur comprend l'influence des perturbations extérieures ainsi que les erreurs de modélisation.

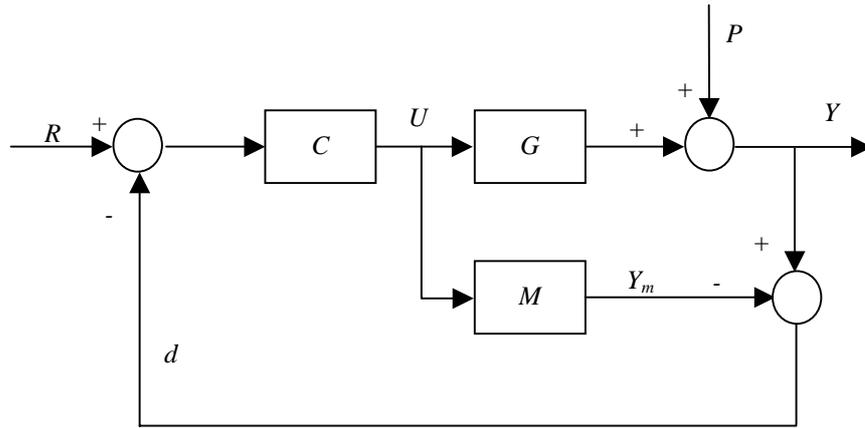


Fig. 1 : Structure de Base de la CMI

Les propriétés que nous allons décrire s'appliquent aussi bien en temps continu qu'en temps discret [1-8]. Dans le but d'alléger les notations on ne précisera pas dans quel cas, continu ou discret, on se place.

Selon la figure 1 on obtient :

$$u = C(R - d) \quad (1)$$

$$d = Y - Y_m \quad (2)$$

$$Y = Gu + P \quad (3)$$

$$Y_m = Mu \quad (4)$$

$$d = P + (G - M)u \quad (5)$$

$$u = C(R - P) - C(G - M)u \quad (6)$$

$$u(1 + C(G - M)) = C(R - P) \quad (7)$$

Donc il en résulte :

$$Y = \frac{CG}{1 + C(G - M)}R + \frac{1 - CM}{1 + C(G - M)}P \quad (8)$$

### 3. Stabilité

Si nous supposons pour l'instant que le modèle est une parfaite représentation du modèle, alors le signal de retour est égal à l'influence de la perturbation (équation 5). Il n'est donc pas affecté par l'action de la commande. Ainsi, la structure est équivalente à un schéma en boucle ouverte et le problème de stabilité associé au signal de retour disparaît. Le système global est stable si et seulement si chacun du procédé et du correcteur est stable.

$$Y = CGR + (1 - CG)P \quad (9)$$

Si le modèle n'imité pas parfaitement le comportement dynamique du procédé alors le signal de retour exprime chacune des influences de la perturbation d'une part et de l'erreur de modélisation d'autre part. Ainsi, cette différence produit un signal d'erreur qui peut déstabiliser la boucle, d'où l'intérêt de filtrer le signal de retour en vue d'avoir une réaction moins rapide aux perturbations pour conférer à l'ensemble une certaine robustesse vis-à-vis d'erreurs de modélisation.

### 4. Analyse du correcteur

A partir de l'équation 8, il apparaît que si  $C = M^{-1}$  alors on a  $Y = R$ , ceci quels que soient la perturbation  $P$  et l'écart entre  $G$  et  $M$ . Cette propriété sous entend que le procédé est stable. Ceci se révèle en fait inaccessible. Examinons, dans un premier temps, les principaux problèmes que l'on peut rencontrer pour construire l'inverse du modèle. Ce dernier se révèle irréalisable physiquement lorsque le modèle a un degré relatif non nul. Rappelons que dans le cas discret, l'utilisation d'un bloqueur d'ordre zéro pour échantillonner le modèle introduit d'ors et déjà un retard égal à une période d'échantillonnage. D'autre part, lorsque le modèle est à déphasage non minimal, la condition de stabilité du précompensateur défend de compenser les zéros instables du modèle.

Dans le cas où il n'est pas possible d'inverser le modèle pour une des raisons précédentes, nous avons proposé des méthodes pour la synthèse d'un correcteur stable et physiquement réalisable. Le correcteur obtenu sera un inverse du modèle selon un critère donné. Ce point sera développé en détails dans les deux chapitres suivants [9-10].

Un solution possible pour résoudre ce problème a été soulevée par divers auteurs [1-10]. Les auteurs ont choisit un modèle inversible (par exemple un modèle statique), sans se soucier

de l'écart qu'il fait avec le procédé. Malheureusement cette solution conduit à un système bouclé souvent instable surtout si le modèle est différent du procédé.

## 5. Problème lié à la structure de base de la CMI

A l'application du signal de commande  $U$  sur le procédé  $G$  et le modèle  $M$  en présence de la perturbation, le signal d'erreur ou l'écart  $d$  contient deux types de signaux :

$$d = P + (G - M)u \quad (10)$$

Cet état de fait peut engendrer des phénomènes d'instabilité si le signal d'écart  $d$  est en phase avec le signal de commande  $U$ . Ceci nécessite donc d'instaurer un filtre permettant de conférer la robustesse en stabilité au système bouclé.

Le degré de conformité du modèle sera en accord avec les performances que l'on peut espérer de la commande si on prend :

$$C = M^{-1} \quad (11)$$

On a alors un transfert sortie - consigne égal à l'unité :

$$\frac{Y}{R} = M^{-1}C = 1 \quad (12)$$

## 6. Structure de commande à modèle interne modifiée

La stabilité du système est fonction de celles du correcteur  $C$ , du modèle  $M$ , du procédé  $G$  et de la valeur des racines de l'équation caractéristique  $1 + C(G - M) = 0$ . Autrement dit, elle dépend de la synthèse du correcteur  $C$  vis-à-vis de l'écart  $G - M$ .

Des chercheurs [6-10] proposent de séparer le problème de la synthèse du correcteur, dont le but premier est d'être proche de l'inverse du modèle, du problème de stabiliser le système pour un correcteur  $C$  et un écart entre  $G$  et  $M$  donnés. Pour cela, ils introduisent un filtre  $F$ , dit de robustesse, qui sera placé dans la boucle de retour. Son rôle est d'assurer la stabilité du système. Avec un tel filtre, l'équation caractéristique est de la forme  $1 + CF(G - M) = 0$ .

La structure CMI munie du filtre de robustesse peut être schématisée suivant la forme suivante :

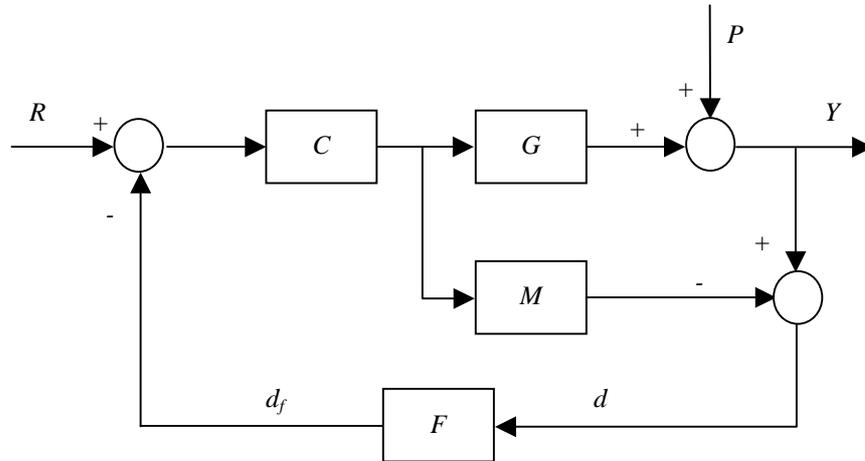


Fig.2 : Structure CMI avec filtre de robustesse

Le filtre de robustesse permet d'imposer la dynamique de rejet de la perturbation  $P$  indépendamment de la dynamique de poursuite de la consigne. Donc son rôle est d'introduire une certaine robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation. Ce filtre est généralement un filtre passe-bas d'ordre faible agissant sur le signal de retour.

La propriété d'annulation de l'erreur statique fait intervenir le filtre  $F$ . Dans le cas continu, on doit avoir [1-10] :

$$\begin{aligned}
 C(0)F(0)M(0) &= 1 \\
 F(0) &= 1
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Il est à noter que le fait de filtrer l'écart  $d$  en vue d'assurer la stabilité du système face à un éventuel écart entre  $G$  et  $M$ , a l'inconvénient de ralentir la dynamique de compensation de la perturbation  $P$  non mesurée en sortie, ce qui est inutile puisque ce signal est indépendant de la commande, et donc n'influence pas la condition de stabilité du système.

## 7. Modèle de référence

Le modèle de référence noté  $P_r$  est introduit au niveau de la consigne (figure 3). Il permet de spécifier le comportement dynamique que l'on désire obtenir à la sortie du procédé ceci en vue d'adoucir la commande et de l'adapter au mieux à la dynamique du procédé.

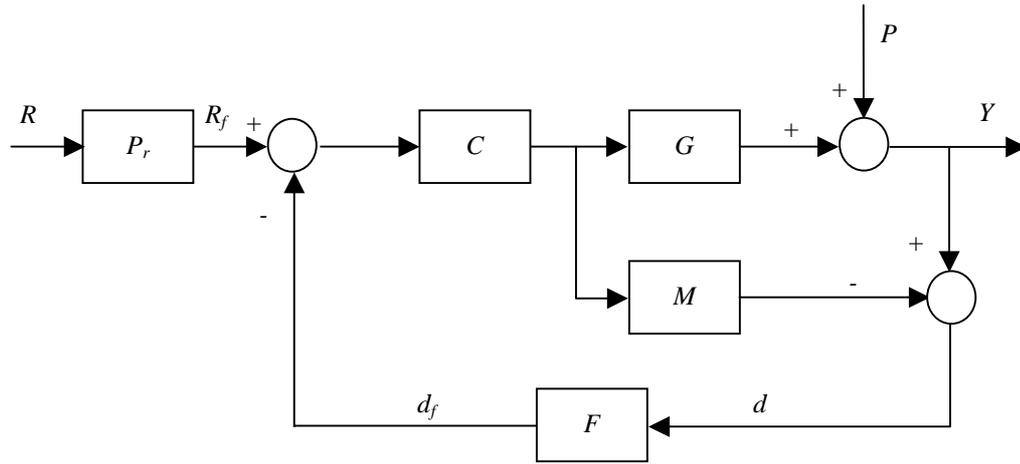


Fig. 3 : Structure CMI avec filtre de robustesse et modèle de référence

L'asservissement de la sortie du procédé se fera en considérant, non pas la consigne, mais la consigne filtrée  $R_f$ . Il est à noter que l'écart filtré  $d_f$  intervient aussi dans le calcul de la commande.

Le schéma de la structure CMI précédent conduit aux équations suivantes :

$$U = \frac{C P_r R}{1 + C F (G - M)} - \frac{C F P}{1 + C F (G - M)} \quad (14)$$

$$Y = \frac{C G P_r R}{1 + C F (G - M)} + \frac{(1 - C F M) P}{1 + C F (G - M)} \quad (15)$$

Pour avoir une erreur statique nulle le correcteur, le modèle, le modèle de référence et le filtre doivent satisfaire les relations suivantes [1-10] :

$$C(0)F(0)M(0) = 1 \quad (16)$$

$$F(0) = P_r(0) \quad (17)$$

Si la constante de temps du filtre est très grande, il est clair que lors d'une variation de la perturbation  $P$  son estimation sera très lente. Cette constante de temps sera donc un outil de réglage du compromis robustesse performances en régulation [9-10].

La CMI semble très appropriée pour commander des procédés du fait de sa simplicité pour synthétiser les différents blocs :



Dans la structure CMI la même commande  $U$  est appliquée simultanément au procédé et à son modèle  $M$  ; ce qui permet malgré la saturation de la commande de modifier la consigne à l'aide de l'écart toujours représentatif de l'évolution entre la sortie du procédé et celle du modèle.

## 9. Conclusion

La CMI s'interprète de façon naturelle comme une généralisation de la boucle ouverte classique. Elle permet de traiter des procédés stables ou préalablement stabilisés. Elle est caractérisée essentiellement par la construction d'une commande de modèle et une modification de la consigne en fonction de l'écart entre la sortie du procédé et de son modèle.

Le bouclage de la structure de commande fait que la stabilité du système dépend de l'écart entre le procédé et son modèle. De façon à la contrôler, il s'avère nécessaire d'utiliser un filtre dit de robustesse. La construction d'un tel filtre peut se révéler délicate si l'on tient à ce que la commande soit performante vis-à-vis de la précision entre la sortie du procédé et la consigne.

Pour avoir un transfert unitaire entre la sortie du procédé et la consigne, le correcteur doit être égal à l'inverse du modèle. Cette synthèse fera l'objet des deux chapitres suivants.

**CHAPITRE 2****SYNTHESE DU CORRECTEUR  
DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL****1. Introduction**

Pour assurer un suivi parfait de la consigne, le correcteur doit être égal à l'inverse du modèle. Cependant, l'inversion de manière directe est pratiquement irréalisable notamment pour les procédés à déphasage non minimum et pour les systèmes à degré relatif non nul. Ce chapitre propose de développer une méthode d'inversion progressive, inspirée des travaux de [9] et qui permet d'aborder l'inversion au sens d'un critère asymptotique.

**2. Synthèse du Correcteur**

On s'intéresse à déterminer un inverse du modèle en vue de réaliser le suivi de trajectoires. La synthèse repose sur la formulation d'un critère asymptotique dont l'avantage principal réside dans le fait que si on augmente l'ordre du critère on s'approchera alors de l'inverse exact du modèle. Un autre avantage de l'utilisation de ce critère est que ce dernier permet de traiter indifféremment le comportement asymptotique et dynamique de l'inversion et ceci aussi bien pour les systèmes à déphasage minimum et à déphasage non minimum.

Pour construire un correcteur à partir du critère asymptotique, l'ordre d'entrée du critère asymptotique est choisi a priori. En temps continu pour satisfaire le critère asymptotique à l'ordre  $n$ , le correcteur doit être tel que :

$${}_s \lim_{\omega \rightarrow 0} [1 - C(s)M(s)] \times \frac{1}{s^{n-1}} = 0 \quad (1)$$

La détermination de ce correcteur doit disposer au minimum de  $n$  paramètres "non redondants". D'autre part, pour avoir un correcteur physiquement réalisable linéaire et stable l'emplacement des  $n$  paramètres dans ce type de correcteur n'est pas imposé si l'on veut pouvoir le construire.

Dans un premier temps, il nous a paru intéressant de considérer un correcteur minimal vis-à-vis de l'ordre du critère asymptotique, ce qui correspond à prendre un correcteur ayant le nombre minimum de paramètres permettant d'annuler l'erreur asymptotique pour l'ordre considéré.

Pour un ordre  $n$  du critère asymptotique, l'ordre du correcteur minimal est égal à la partie entière de  $n/2$ . A titre d'exemple, pour un critère asymptotique pour une entrée égale à 5, le correcteur minimal est de la forme suivante :

$$C(s) = \frac{\beta_1 + \beta_2 s + \beta_3 s^2}{1 + \beta_4 s + \beta_5 s^2} \quad (2)$$

### **Exemple 1**

Soit le modèle continu suivant :

$$M(s) = \frac{1 + 4s}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

On désire déterminer un correcteur minimal pour une entrée d'ordre 3.

Donc le correcteur aura la forme suivante :

$$C(s) = \frac{\beta_1 + \beta_2 s}{1 + \beta_3 s} \quad (3)$$

Les valeurs  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , et  $\beta_3$  de ce correcteur sont déterminées en utilisant le critère asymptotique suivant :

$$\lim_{s \rightarrow 0} [1 - C(s)M(s)] \times \frac{1}{s^2} = 0 \quad (4)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$1 - C(s)M(s) = 1 - \frac{\beta_1 + \beta_2 s}{1 + \beta_3 s} \times \frac{1 + 4s}{(1+s)(1+2s)} \quad (5)$$

Par la suite on a :

$$\begin{cases} 1 - \beta_1 = 0 \\ 3 - 4\beta_1 + \beta_3 - \beta_2 = 0 \\ 2 + 3\beta_3 - 4 \cdot \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Ce système peut se résoudre par la méthode de substitution ou combinaison linéaire afin de déterminer les coefficients du correcteur. On aboutit donc à  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 5$  et  $\beta_3 = 6$ .

Il en résulte un transfert  $C(s)$  du correcteur égal à :

$$C(s) = \frac{1 + 5s}{1 + 6s} \quad (7)$$

Les figures suivantes montrent les réponses indicielle et pour une rampe pour le critère considéré.

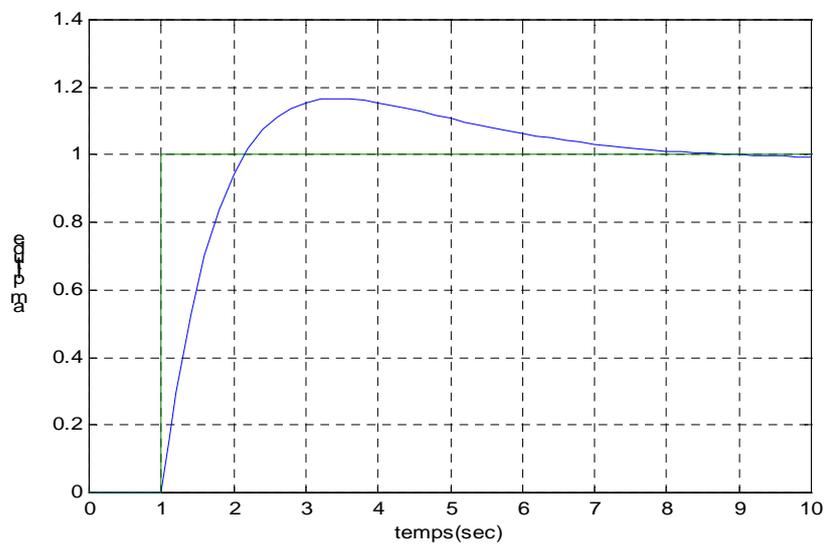


Fig.1 : Réponse indicielle

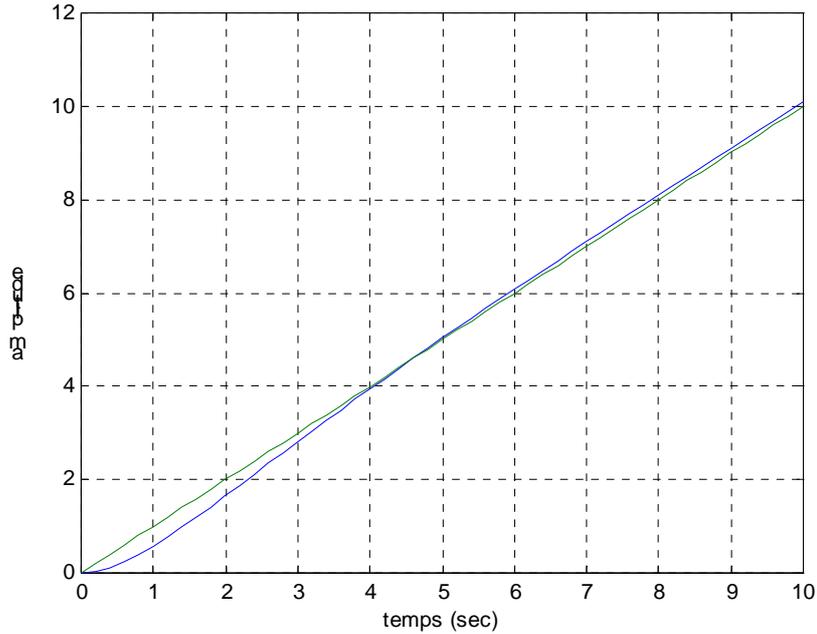


Fig. 2 : Réponse à une rampe

### Exemple 2

Dans cet exemple, le modèle du procédé est donné par :

$$M(s) = \frac{(6s + 1)(4s + 1)}{(s + 1)(2s + 1)(3s + 1)} \quad (8)$$

Le correcteur minimal, pour un ordre d'entrée égal à 5, est donné par :

$$C(s) = \frac{\beta_1 + \beta_2 s + \beta_3 s^2}{1 + \beta_4 s + \beta_5 s^2} \quad (9)$$

Pour le calcul des paramètres du contrôleur; on applique le critère asymptotique donné par l'équation (1). Après développements on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6\beta_4 + 11\beta_5 - 24\beta_3 = 0 \\ 6 + 11\beta_4 + 6\beta_5 - 24\beta_2 - 10\beta_3 = 0 \\ 11 + 6\beta_4 + \beta_5 - 24\beta_1 - 10\beta_2 - \beta_3 = 0 \\ 6 + \beta_4 - 10\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 1 - \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

C'est un système d'équations à cinq inconnues.

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 1 \\
 \beta_2 &= \beta_4 - 4 \\
 24\beta_3 &= 6\beta_4 + 11\beta_5
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Par substitution des paramètres  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  dans le système d'équations (10) on obtient :

$$\begin{cases}
 -372\beta_4 + 34\beta_5 = -2448 \\
 -102\beta_4 + 13\beta_5 = -648
 \end{cases}$$

Nous avons finalement :

$$\beta_4 = \frac{136}{19}; \beta_5 = \frac{120}{19}
 \tag{12}$$

Et de ceci nous obtenons que :

$$\beta_2 = \frac{60}{19}, \beta_3 = \frac{89}{19}
 \tag{13}$$

Le correcteur minimpal s'écrit alors :

$$C(s) = \frac{19 + 61s + 89s^2}{18 + 136s + 120s^2}
 \tag{14}$$

$$C(s) = \frac{1 + \frac{60}{19}s + \frac{89}{19}s^2}{1 + \frac{136}{19}s + \frac{120}{19}s^2} = \frac{1 + 3.16s + 4.68s^2}{1 + 7.16s + 6.32s^2}$$

L'utilisation du Toolbox Simulink de Matlab permet d'obtenir les réponses suivantes respectivement pour un échelon et une rampe.

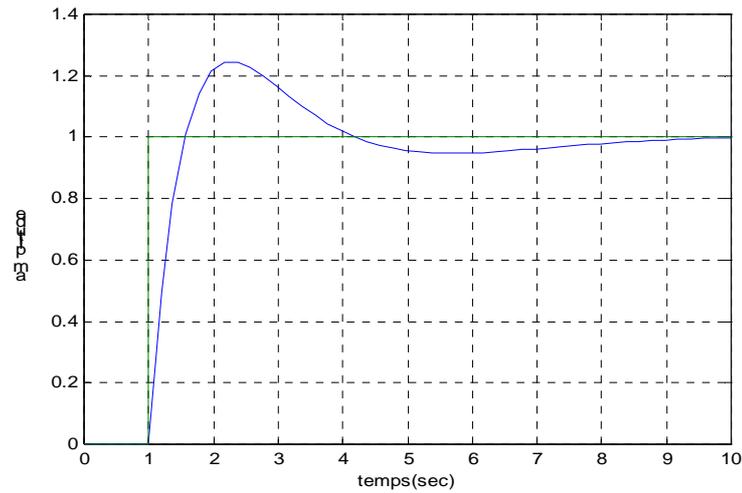


Fig.3 : Réponse indicielle

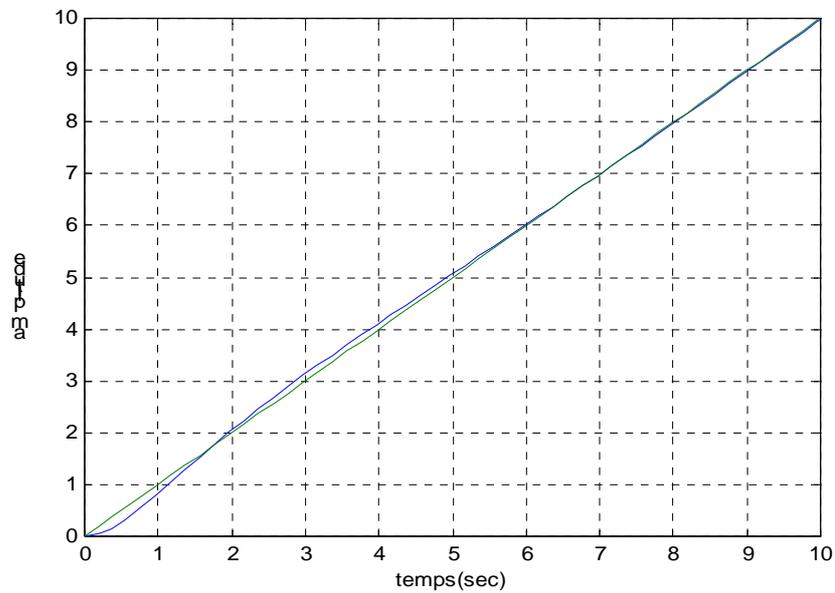


Fig. 4 : Réponse à une rampe

### Exemple 3

Soit un autre modèle continu stable du premier ordre, de gain  $k$  et de constante  $\tau$  :

$$M(s) = \frac{k}{1 + \tau s} \quad (15)$$

On désire satisfaire le critère asymptotique pour une rampe en considérant un correcteur minimal. Le correcteur est alors :

$$C(s) = \frac{\beta_1}{1 + \beta_2 s} \quad (16)$$

Déterminons maintenant  $\beta_1$  et  $\beta_2$  tels que :

$$\lim_{s \rightarrow 0} [I - C(s)M(s)] \times \frac{I}{s} = 0 \quad (17)$$

Ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1 - \beta_1 k + s(\beta_2 + \tau) + s^2 \beta_2 \tau]}{s(\beta_2 + \tau)(1 + \tau s)} = 0 \quad (18)$$

Ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} 1 - \beta_1 k &= 0 \\ \beta_2 + \tau &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Il en résulte que notre correcteur est instable du fait que la valeur de  $\tau$  est positive :

$$C(s) = \frac{I}{k} \times \frac{I}{I - \tau s} \quad (20)$$

Raisonnons cette fois-ci sur une inversion directe du modèle. Si on prend l'inverse du modèle  $C = M^{-1}$  on aboutit à :

$$C(s) = \frac{\tau s + I}{k} \quad (21)$$

Pour simplifier, on prendra par la suite  $k = 1$  et  $\tau = 1$ . Ce qui donne un correcteur physiquement irréalisable. Pour pallier ce problème soit le nouveau correcteur suivant :

$$C(s) = \frac{s + I}{I + \beta s} \quad (22)$$

Les simulations suivantes vont être portées sur le coefficient  $\beta$ . A défaut de prendre  $\beta$  nul, plusieurs valeurs seront explorées :  $\beta = 0.1$  ;  $\beta = 0.01$  ;  $\beta = 0.001$  ;  $\beta = 1$  ;  $\beta = 10$ . Il est clair que plus  $\beta$  tend vers zéro plus le correcteur  $C(s)$  s'approche au mieux de l'inverse du modèle  $M(s)$ .

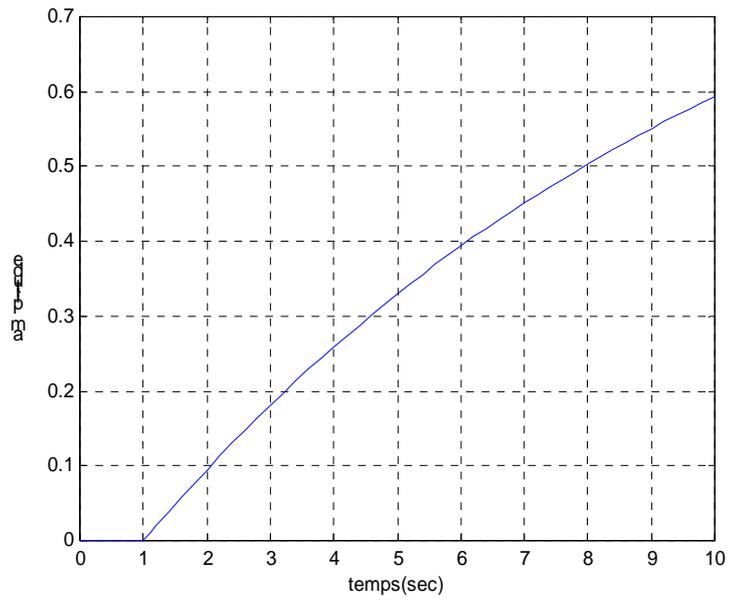


Fig. 5 : Réponse indicielle pour  $\beta=10$

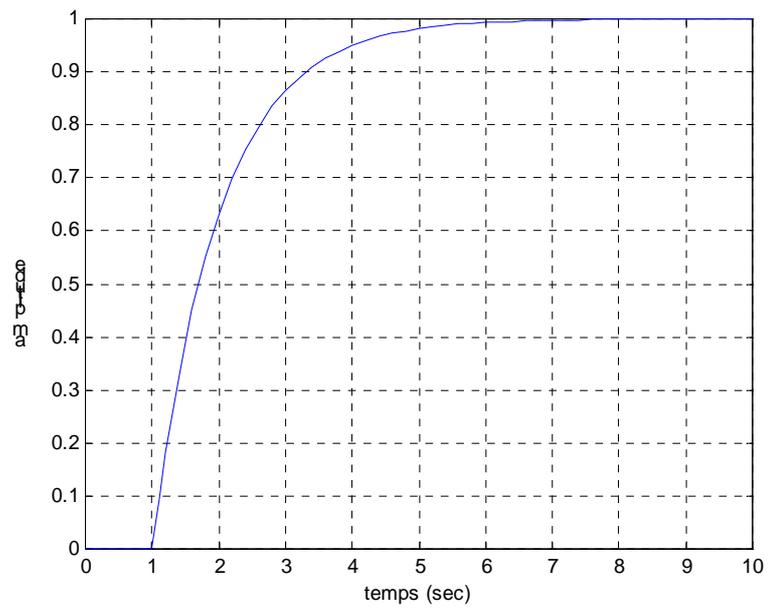


Fig. 6 : Réponse indicielle pour  $\beta=1$

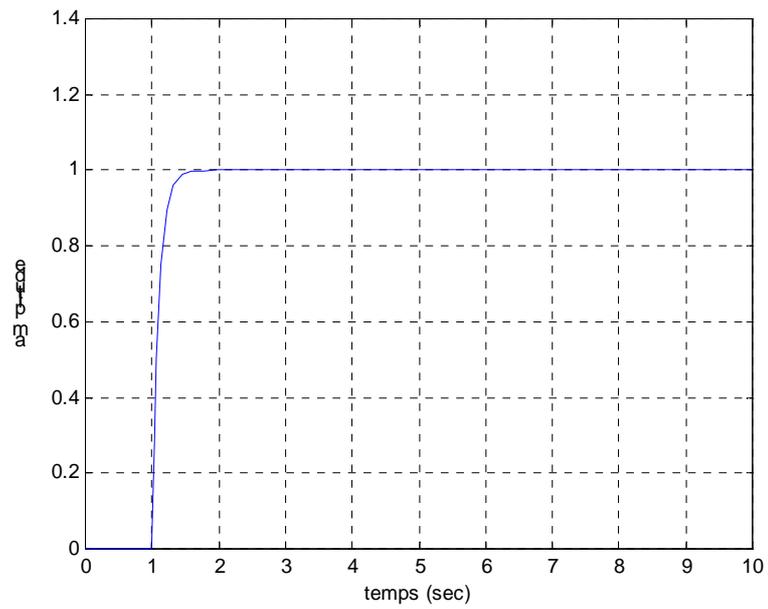


Fig. 7 : Réponse indicielle pour  $\beta=0.1$

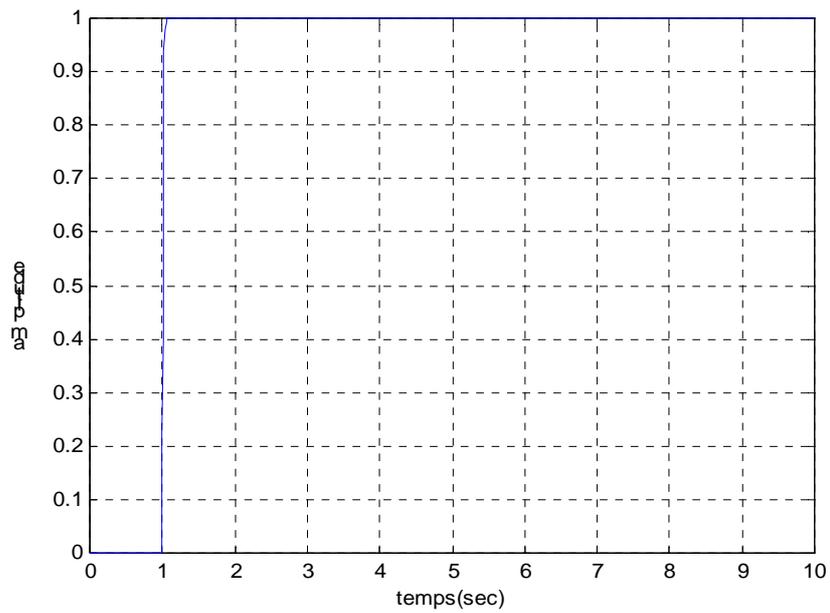


Fig. 8 : Réponse indicielle pour  $\beta=0.01$

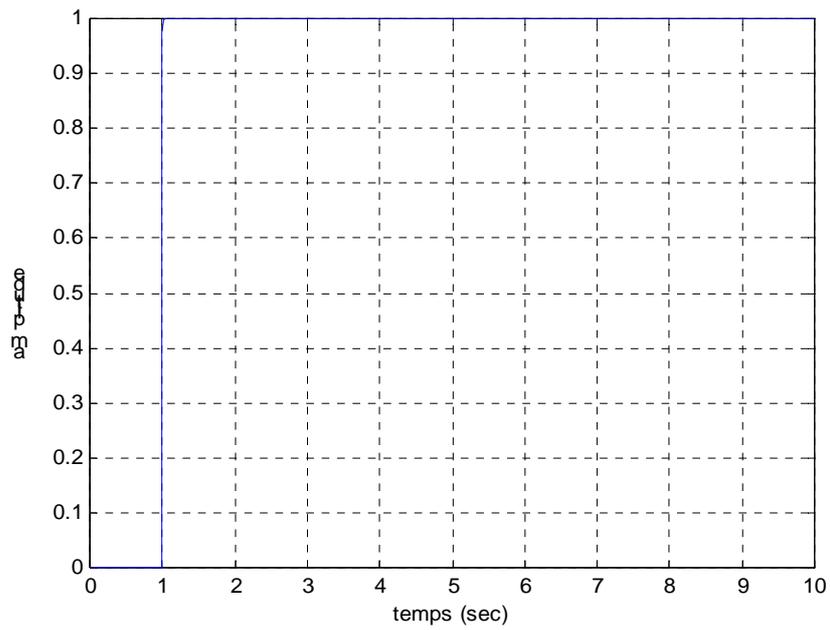


Fig. 9 : Réponse indicelle pour  $\beta=0.001$

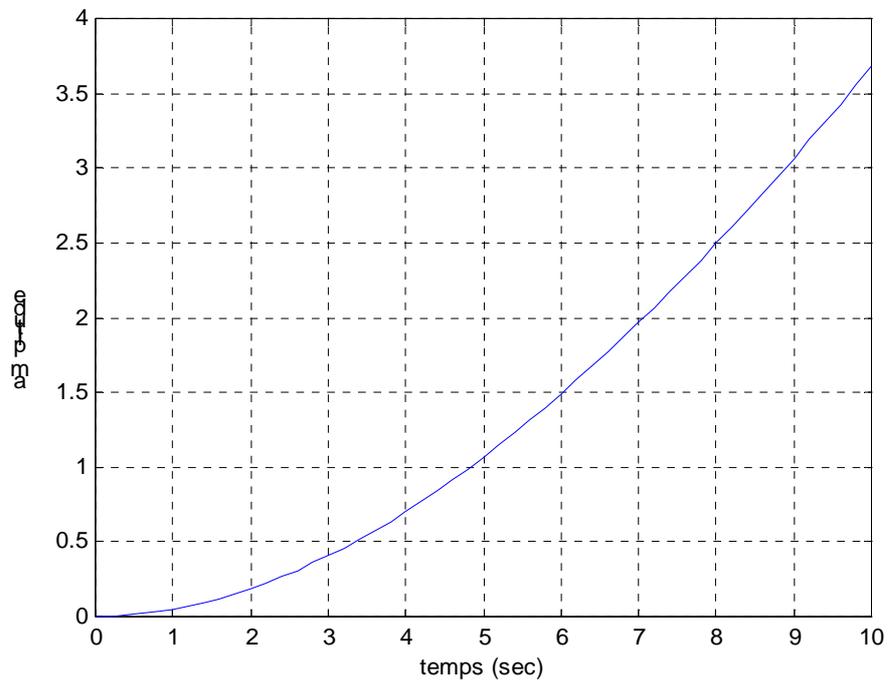


Fig. 10 : Réponse à une rampe pour  $\beta=10$

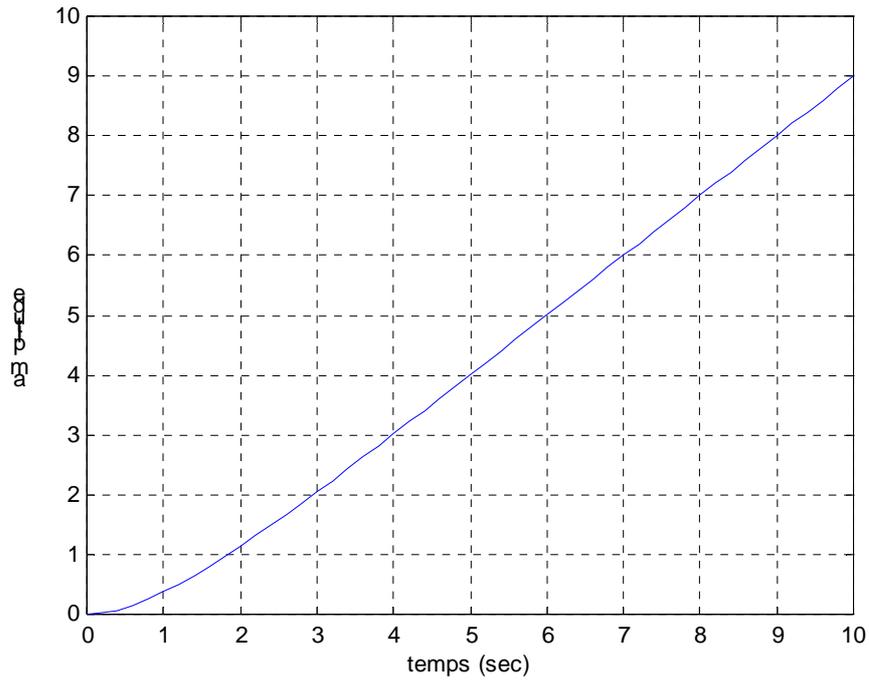


Fig. 11 : Réponse à une rampe pour  $\beta=1$

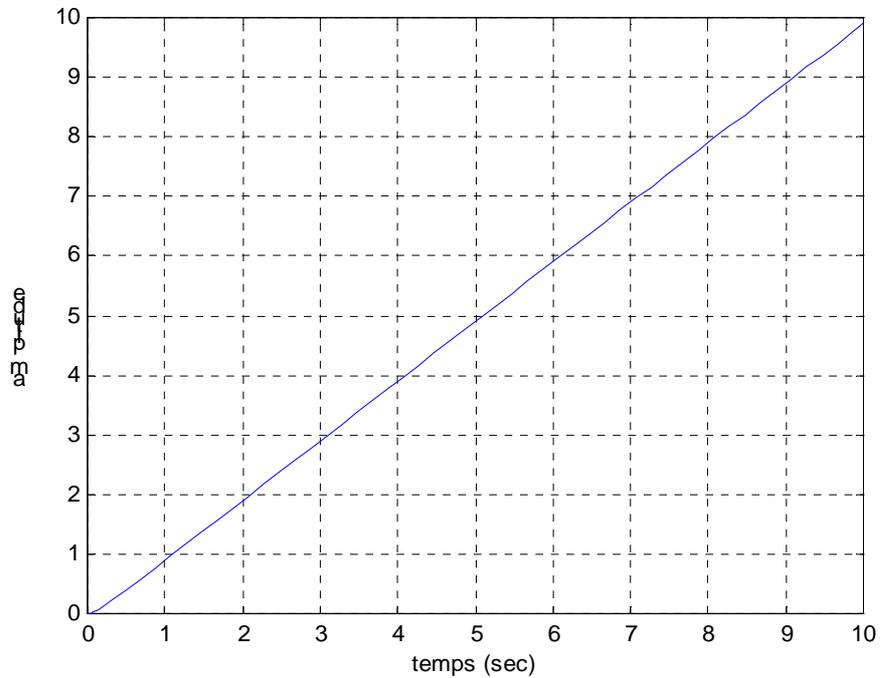


Fig. 12 : Réponse à une rampe pour  $\beta=0.1$

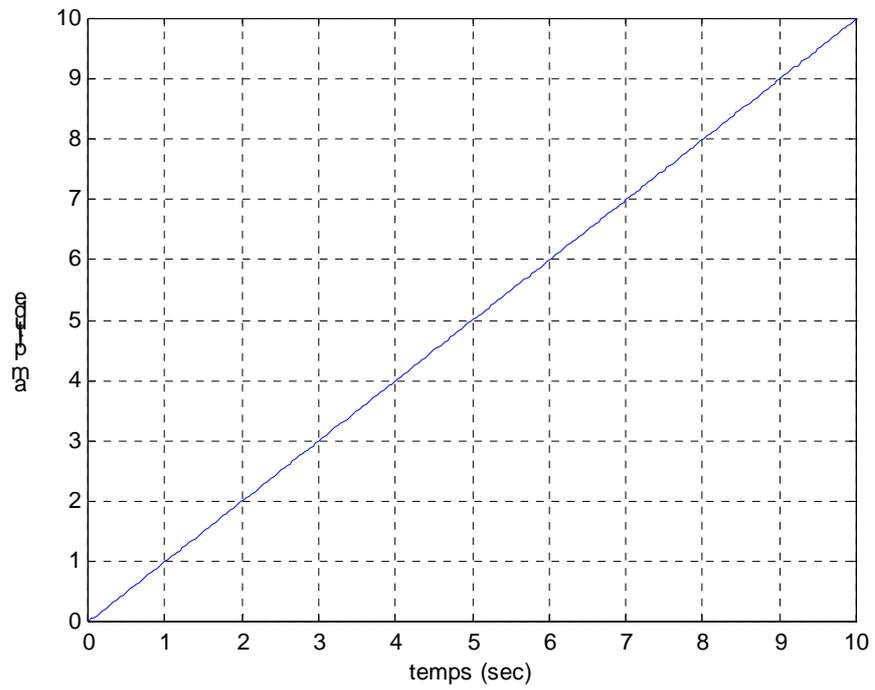


Fig. 13 : Réponse à une rampe pour  $\beta=0.01$

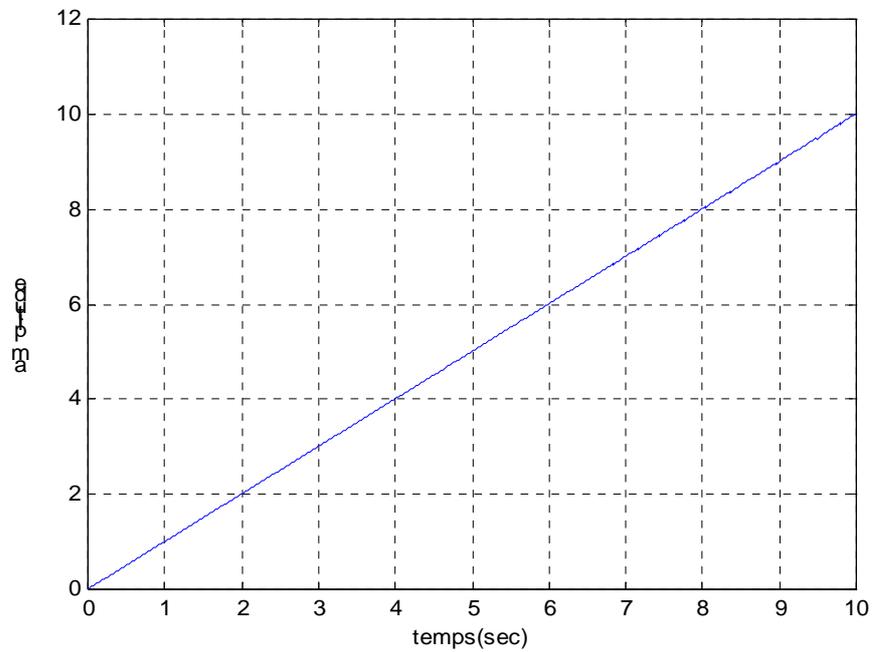


Fig. 14 : Réponse à une rampe pour  $\beta=0.001$

**Exemple 4**

Soit le modèle continu suivant :

$$M(s) = \frac{I + \lambda s}{(I + s)(I + 2s)} \quad (23)$$

On désire satisfaire le critère asymptotique à l'ordre trois en considérant le correcteur minimal suivant :

$$C(s) = \frac{\beta_1 + \beta_2 s}{1 + \beta_3 s} \quad (24)$$

Donc il s'agit de déterminer les paramètres de ce correcteur  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  tels que :

$$s \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2 s)(I + \lambda s)}{(1 + \beta_3 s)(1 + s)(1 + 2s)} \right] \times \frac{1}{s^2} = 0 \quad (25)$$

Ce qui nous amène à :

$$s \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1 - \beta_1 + s(3 - \beta_1 \lambda - \beta_2 + \beta_3) + s^2(3\beta_3 - \beta_2 \lambda + 2) + 2s^2 \beta_1]}{s^2(1 + s)(1 + 2s)(1 + \beta_3 s)} \quad (26)$$

La détermination des paramètres du correcteur passe par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 - \beta_1 = 0 \\ 3 - \beta_1 \lambda + \beta_3 - \beta_2 = 0 \\ 3\beta_3 - \beta_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Soit

$$\beta_1 = 1 ; \beta_2 = 3 + \frac{2}{\lambda - 3} ; \beta_3 = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{\lambda - 3} \quad (28)$$

Donc on obtient le correcteur suivant :

$$C(s) = \frac{\left[ 1 + \left( 3 + \frac{2}{\lambda - 3} \right) s \right]}{\left[ 1 + \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{\lambda - 3} s \right]} \quad (29)$$

Selon la valeur du paramètre  $\lambda$  on a les résultats suivants :

- Si  $1 < \lambda < 2$  ou  $\lambda \geq 3$ , le correcteur vérifie le critère asymptotique pour une consigne d'ordre trois 3.
- Si  $1 < \lambda < 2$  et  $\lambda < 3$ , le correcteur est instable.
- Le modèle est à déphasage non minimal lorsque  $\lambda$  est égal à 1 ou 2.

### 3. Interprétation des résultats

De ces résultats, il apparaît que le fait de considérer des correcteurs minimaux vis-à-vis de l'ordre du critère asymptotique ne permet pas de garantir la stabilité et la réalisabilité physique du contrôleur. Or cette propriété est une condition nécessaire pour satisfaire le critère asymptotique.

Soit à présent le correcteur:

$$C(s) = \frac{\beta_1 + \beta_2 s}{1 + \eta s} \quad (30)$$

Il s'agit de calculer les paramètres du correcteur  $\beta_1, \beta_2, \eta$  permettant d'avoir:

$$s \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{k(\beta_1 + \beta_2 s)}{(1 + \eta s) \cdot (1 + \tau s)} \right] \times \frac{1}{s^2} \quad (31)$$

Soit :

$$s \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - k\beta_1 + s(\tau + \eta - k\beta_2) + s^2 \eta \tau}{s^2 (1 + \eta s)(1 + \tau s)} = 0 \quad (32)$$

Ce qui revient à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 1 - k\beta_1 = 0 \\ \tau + \eta - k\beta_2 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

En exprimant  $\beta_1$  en fonction de  $\eta$ ; on obtient le correcteur:

$$C(s) = \frac{1}{k} \times \frac{1 + (\tau + \eta)s}{1 + \eta s} \quad (34)$$

Il en résulte que ce correcteur est stable et physiquement réalisable si la valeur du paramètre  $\eta$  est strictement positive. Le fait d'ajouter un paramètre  $\eta$  au correcteur minimal permet d'obtenir un correcteur stable et physiquement réalisable et vérifiant le critère asymptotique.

La solution finale pour laquelle on a optée pour le correcteur  $C(s)$  est de la forme suivante :

$$C(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots + \beta_n s^n}{1 + \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \dots + \eta_n s^n} \quad (35)$$

Ce type de correcteur n'est plus minimal vis-à-vis de l'ordre  $n$  du critère asymptotique. Pour cela il suffit de prendre des valeurs de  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  avec  $\eta_n$  non nul, telles que les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + \eta_1 \cdot s + \eta_2 s^2 + \dots + \eta_n s^n = 0 \quad (36)$$

soient à parties réelles négatives.

Une fois ce choix réalisé, on utilise les  $n$  paramètres  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  pour satisfaire le critère asymptotique à l'ordre  $n$ . Notons que leurs valeurs vont dépendre de celles de  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ .

#### 4. Filtre de robustesse

A partir du schéma de la figure 2 du chapitre 1, on peut extraire les expressions reliant la sortie  $y$  avec l'entrée  $r$  ainsi qu'avec la perturbation  $P$  afin d'analyser le comportement du système vis-à-vis de la stabilité et des performances :

$$Y = \frac{CGr}{1 + CF(G - M)} + \frac{(1 - CFM)P}{1 + CF(G - M)} \quad (37)$$

Pour obtenir une erreur statique nulle les éléments de cette structure doivent répondre aux condition suivantes [1-10] :

$$C(0)F(0)M(0) = 1 \quad (38)$$

$$F(0)=1 \quad (39)$$

L'introduction du filtre de robustesse dans la structure de base de la CMI permet de prendre en considération la désadaptation entre le procédé et son modèle. Il permet ainsi de ralentir les dynamiques trop rapides dans la commande [1-10].

## 5. Formes de filtre

En général, la fonction de sensibilité du système bouclé présente un comportement indésirable en haute fréquence [11]. Pour la robustesse, le correcteur  $C$  doit être augmenté en général par un filtre passe-bas. En principe la structure et les paramètres de ce filtre devraient être déterminés tels qu'un compromis optimal entre la stabilité et la robustesse est atteint. Pour simplifier la tâche de conception nous fixons la structure et la recherche de filtre au-dessus d'un nombre restreint de paramètres de filtre (habituellement juste 1) pour obtenir des caractéristiques désirées de robustesse [12-15].

Il est logique de choisir le filtre  $F$  tel que le système en boucle fermée conserve ses propriétés asymptotiques (type  $m$ ).

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} (1 - C(s)M(s)F(s)) = 0 \quad 0 \leq k < m \quad (40)$$

Si le correcteur est conçu pour satisfaire (1) pour  $F=1$ , le filtre doit alors remplir la condition suivante :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} (1 - F) = 0 \quad 0 \leq k < m \quad (41)$$

Ainsi

$$\text{Type 1 : } F(0)=1 \quad (42)$$

$$\text{Type 2 : } F(0)=1 ; \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dF}{ds} = 0 \quad (43)$$

Typiquement nous utiliserons un filtre de la forme suivante :

$$F(s) = (\beta_{m-1}s^{m-1} + \dots + \beta_1s + 1) \frac{1}{(\lambda s + 1)^n} \quad (44)$$

ayant un gain unitaire. Le paramètre  $\lambda$  de filtre est réglable en fonction de la dynamique de robustesse désirée. Les filtres les plus simples sont de la forme suivante :

**Type 1**

$$F(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^n} \quad (45)$$

**Type 2**

$$F(s) = \frac{n\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^n} \quad (46)$$

**Exemple 1**

Dans cet exemple, on va utiliser le lieu de Bode comme outil d'analyse de la robustesse. En particulier on calculera la bande passante de la structure CMI.

Soit un modèle  $M$  représenté par la fonction de transfert suivante :

$$M(s) = \frac{1 + ks}{(1 + s)(1 + 2s)} \text{ avec } k=3.5 \quad (47)$$

Le correcteur est déterminé en utilisant le critère asymptotique :

$$C(s) = \frac{\left[ 1 + \left( 3 + \frac{2}{k-3} \right) s \right]}{\left[ 1 + \frac{(k-1)(k-2)s}{k-3} \right]} \quad (48)$$

Le filtre  $F(s)$  retenu est :

$$F(s) = \frac{1}{1 + \lambda s} \quad (49)$$

On suppose l'existence d'une légère désadaptation entre le procédé et son modèle. Le correcteur reste bien entendu le même. Le procédé est donné par :

$$G(s) = \frac{2s+1}{(0.99s+1)(1.99s+1)} \quad (50)$$

Les simulations suivantes explicitent le lieu de Bode de la structure CMI avec  $\lambda=\tau$  comme paramètre de réglage.

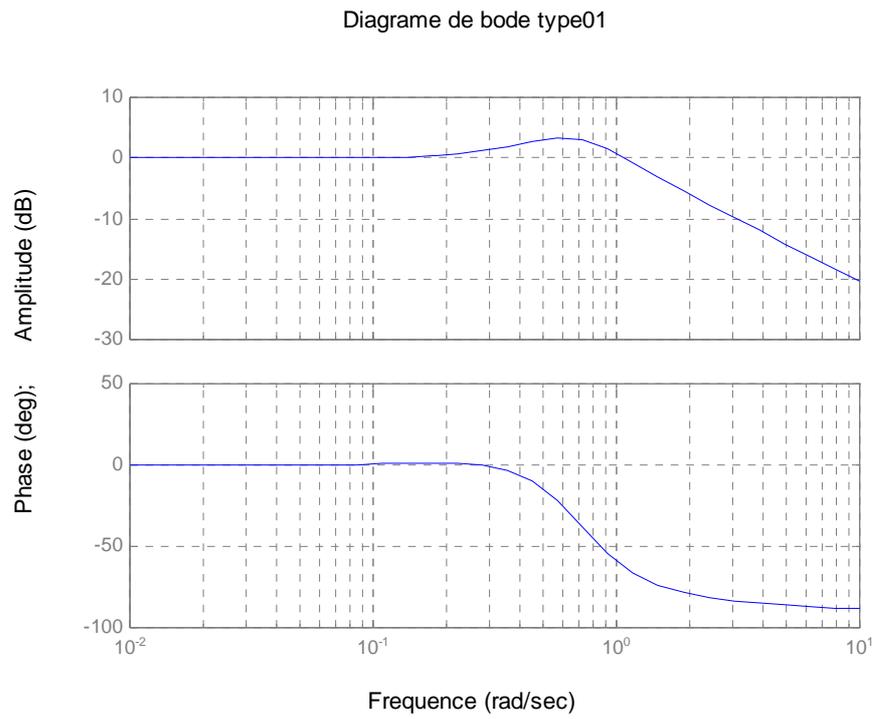


Fig. 15 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase sans filtre

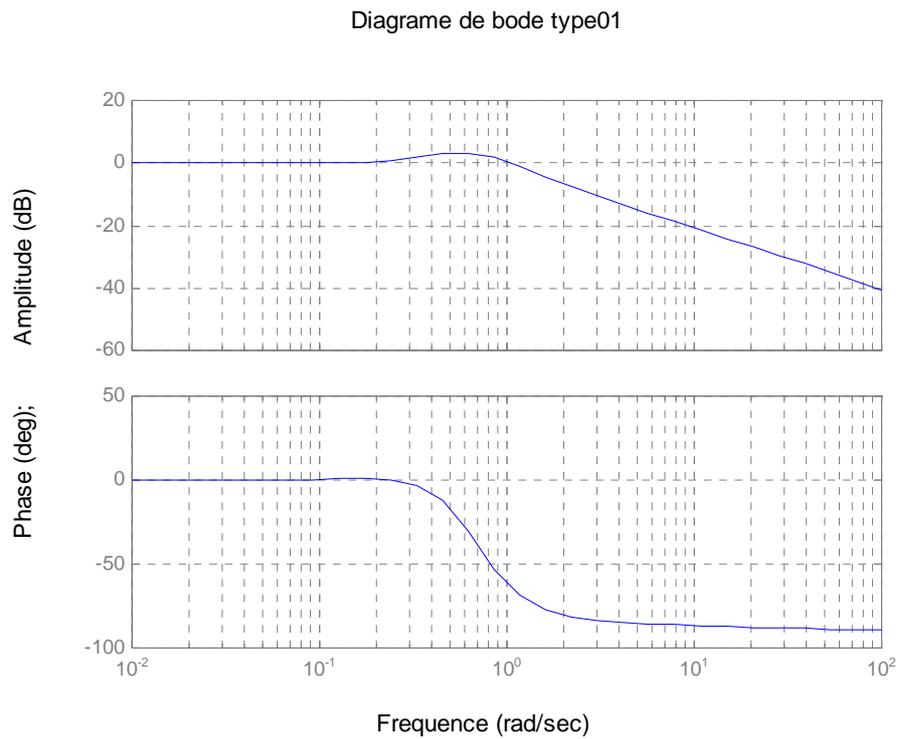
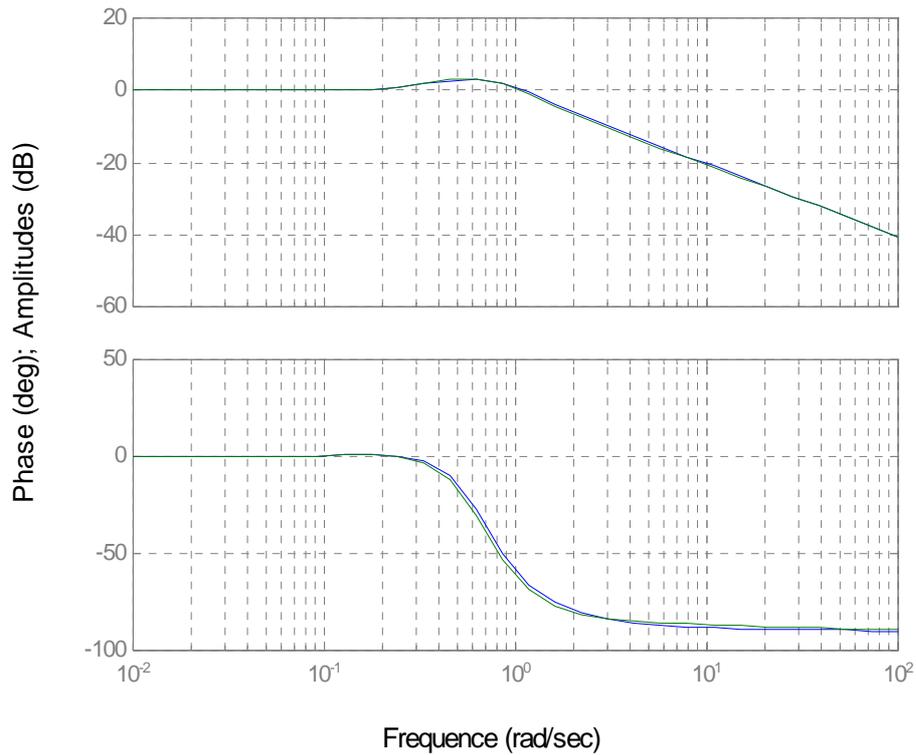


Fig. 16 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase avec filtre  $\tau=0.1s$

Diagramme de bode type01

Fig. 17 : Diagramme d'amplitude et de phase pour  $\tau=0.1s$ , filtre de type01

### Exemple 2

On donne un autre exemple pour lequel on considère le cas où le modèle est différent du procédé avec une marge différente de celle du premier cas. Le procédé est :

$$G(s) = \frac{16s+1}{(0.99s+1)(1.99s+1)}$$

Par contre la constante de temps est toujours la même  $\tau = 0.1s$

Diagramme de bode type02

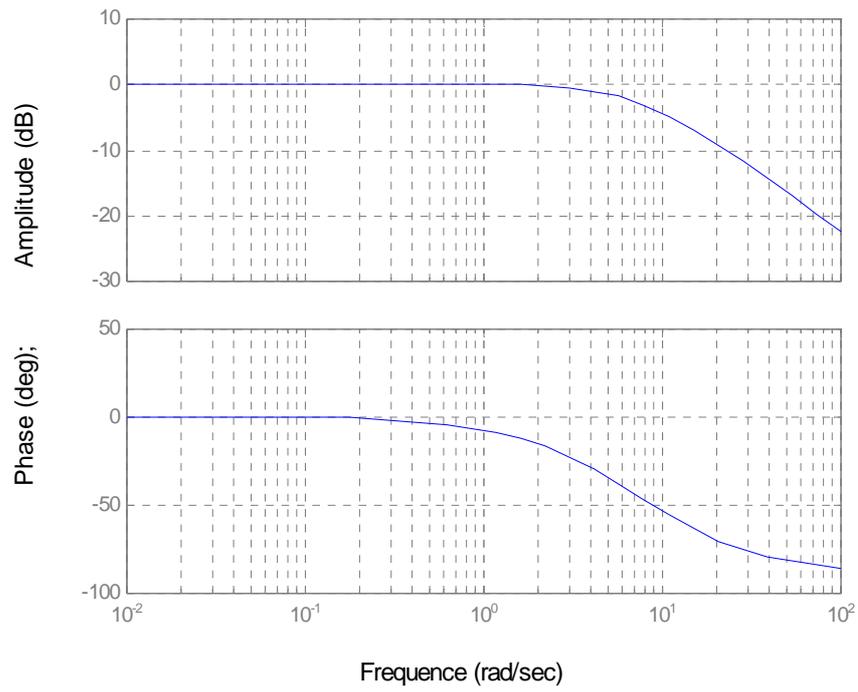


Fig. 18 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase sans filtre

Diagramme de bode type02

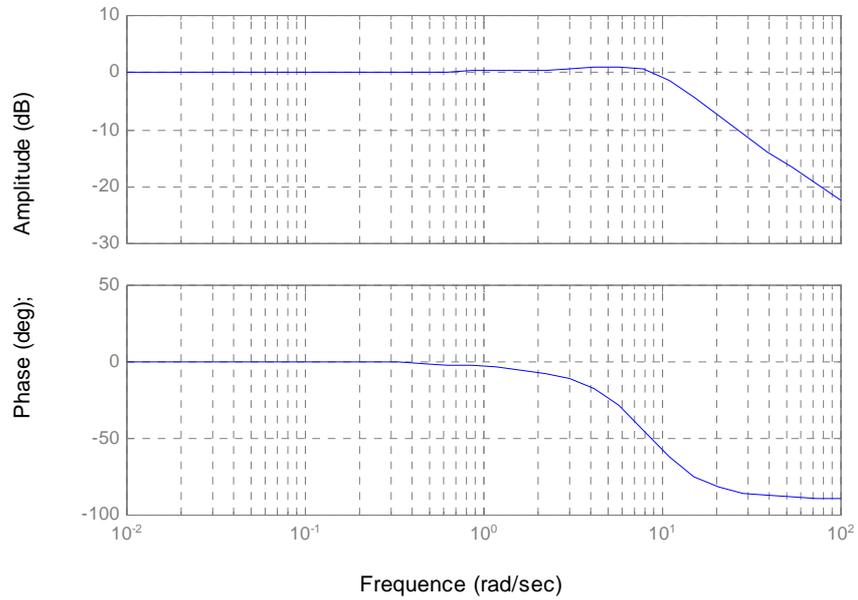


Fig. 19 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase pour  $\tau = 0.1s$ , filtre type 01

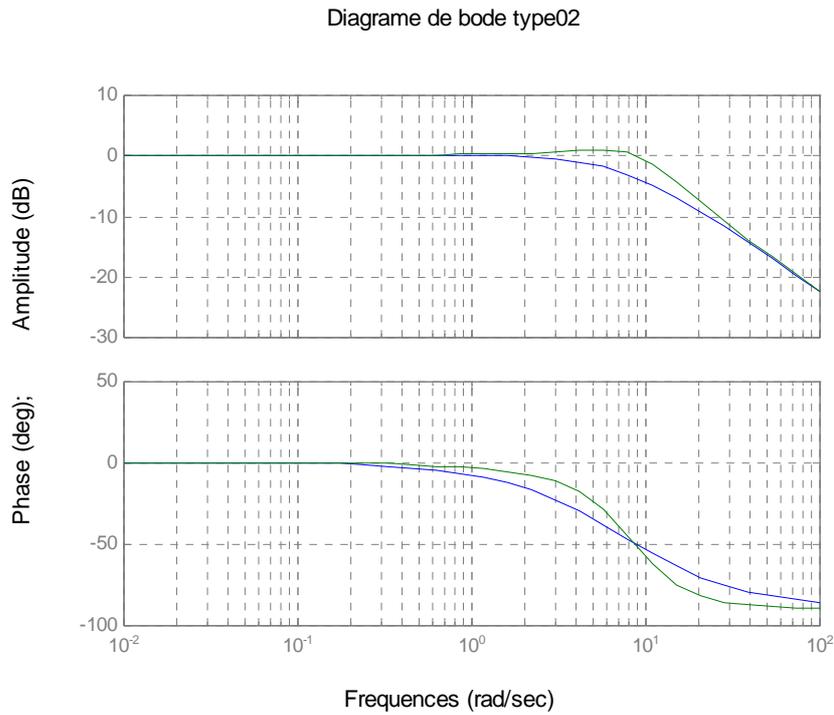


Fig. 20 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase, filtre  $\tau = 0.1s$ , type 02

Comme dernier exemple ou on va changer la valeur de la constante de temps et on examine son influence vis-à-vis de la robustesse de la structure de la commande utilisée. Le procédé prend la forme de l'exemple précédent. Par contre la constante de temps est telle que  $\tau = 0.05s$

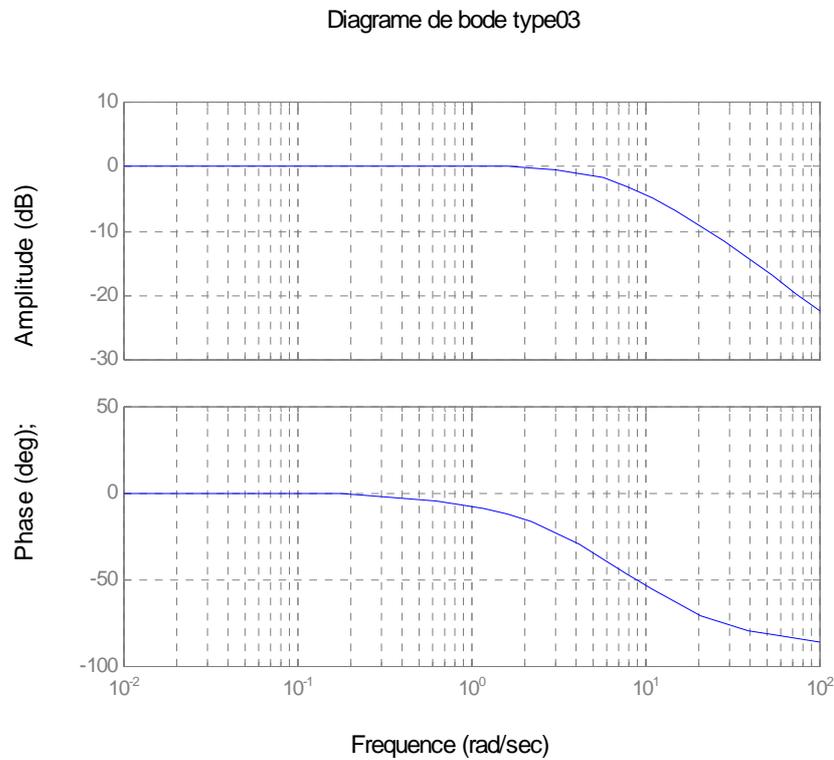


Fig. 21 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase sans filtre

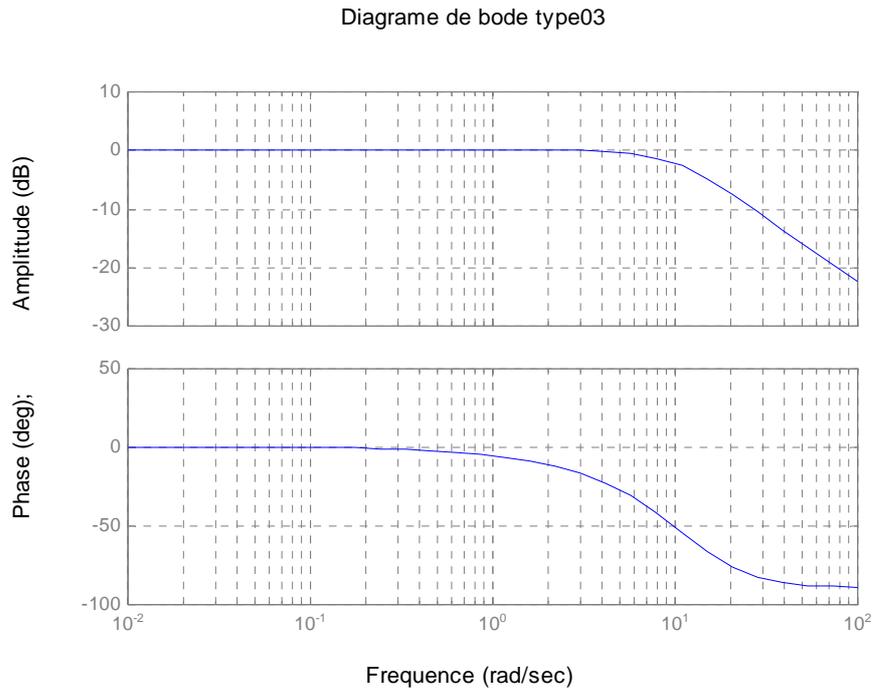


Fig. 22 : Diagramme de Bode d'amplitude et de phase avec filtre  $\tau=0.05s$ , type 1

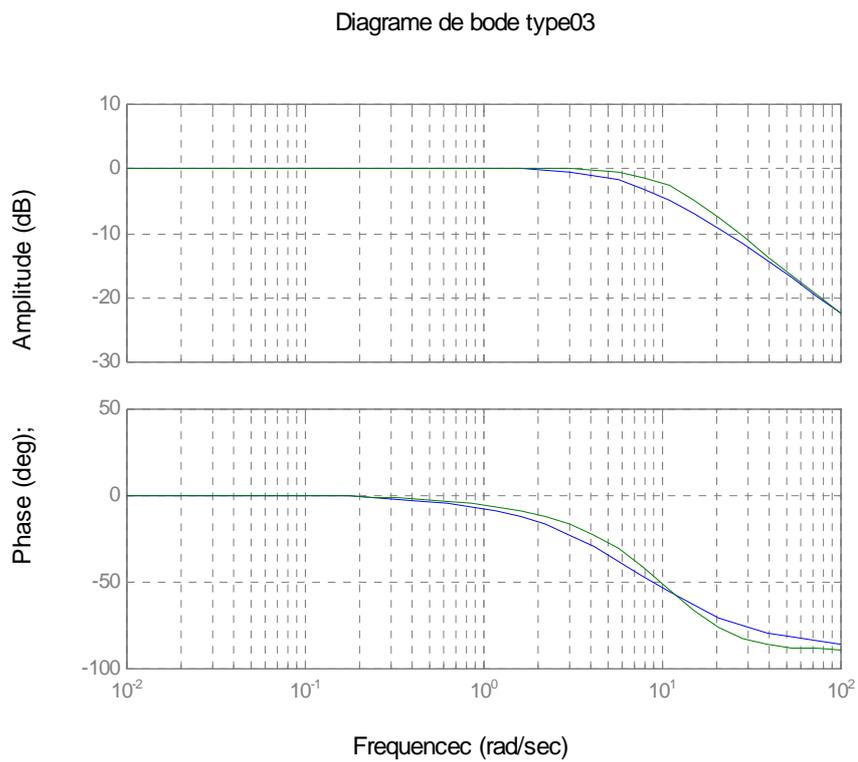


Fig. 23 : Diagramme de Bode pour amplitude et phase, filtre  $\tau = 0.05s$ , type 02

### ***Interprétation des Résultats***

Les graphes des exemples précédents nous permettent de constater que le fait d'insérer un filtre passe-bas dans la structure de commande à modèle interne permet d'une part de perfectionner le comportement de la structure en la présence des erreurs de modélisation (variations paramétriques) et des bruits externes, et d'autre part d'augmenter la bande passante du système. La constante de temps du filtre permet d'améliorer les performances du système vis-à-vis de la rapidité.

Il faut se rappeler que la dynamique d'un système du premier ordre est entièrement décrite par sa constante de temps  $\tau$  laquelle s'exprime aussi dans le domaine fréquentiel (relation temps - fréquence). En règle générale, un système bouclé doit répondre rapidement aux modifications de sa consigne (poursuite) et éliminer les perturbations (régulation).

Toutes ces propriétés confirment les résultats de simulations obtenus. La fréquence de coupure du filtre est d'autant plus grande que sa constante de temps est plus faible ce qui rend le filtrage des composantes parasites plus efficaces, et par conséquent obtenir un signal d'écart plus doux.

Toutefois la constante  $\tau$  ne peut pas être aussi petite que l'on veut. Nous constatons ainsi l'importance de la compréhension des effets que les différentes limitations ont sur les performances de la commande. Ces effets aideront d'avantage le concepteur à prédire les performances réalisables sans pour autant recourir à la désignation de correcteurs spécifiques. Il admettra donc d'établir un compromis entre une performance et le prix à payer pour l'obtenir.

La décomposition de ces résultats débouche sur un triple raisonnement :

- Se rendre compte que l'utilisation d'un filtre permet d'améliorer les performances de la structure.
- Un filtre dont la constante de temps est petite sera le mieux adapté.
- Un filtre de qualité et une fonction de transfert de module élevé sur une plage de fréquences sont indispensables à l'obtention de performances optimales tant en

poursuite qu'en régulation. Dans ce dernier cas il faut bien comprendre que les réactions de la sortie se font toujours par rapport à la référence.

## **6. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de détermination du correcteur minimal pour l'obtention d'une fonction de transfert unitaire entre le signal d'entrée et celui de la sortie suivant un critère asymptotique dans l'espace fréquentiel.

Nous avons présenté des exemples de simulations à travers lesquels nous avons pu mettre en évidence le calcul des correcteurs pour satisfaire un critère asymptotique pour une entrée d'ordre donné. L'avantage de l'insertion du filtre de robustesse dans la structure CMI a également été mis en relief.

## CHAPITRE 3

# SYNTHESE DU CORRECTEUR EN REPRESENTATION D'ÉTAT

### 1. Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons vu que pour assurer un bon suivi de la consigne, le correcteur synthétisé doit s'approcher au mieux de l'inverse du modèle. L'utilisation de plus en plus répandue des calculateurs numériques dans la commande des systèmes nous a amené à traiter le problème de l'inversion dans l'espace d'état et en temps discret. L'avantage d'une telle démarche est d'étendre l'inversion à d'autres classes de systèmes tels que les systèmes à paramètres variables [9-10].

La méthode que nous proposons est basée sur une inversion de modèle en représentation d'état. Elle permet également de traiter indifféremment le comportement dynamique et asymptotique de l'erreur entre la consigne et la sortie du procédé.

Cependant, le développement d'un inverse pour les systèmes à non minimum de phase est un problème assez particulier puisque il conduit à des entrées non bornées. Ce présent travail traite du problème de l'inversion de modèles pour ce genre de systèmes. Nous proposons une nouvelle méthode d'inversion de modèles dans l'espace d'état pour la synthèse de correcteur pour la Commande à Modèle Interne (CMI) [9-10]. La démarche peut s'appliquer aux systèmes à déphasage minimal et non minimal. Le problème de la stabilité et de la réalisabilité physique ont été clairement soulevées et résolues grâce respectivement à l'introduction d'un filtre approprié à réponse impulsionnelle finie et l'inversion partielle du modèle avec prise en compte de l'instabilité des zéros dans la relation de prédiction.

## 2. Inversion de modèle en représentation d'état

La structure de base de la commande à modèle interne est reprise sur la figure 1. Elle incorpore une simulation du processus par un modèle  $M$ . la commande issue du correcteur est appliquée simultanément au procédé  $G$  et à son modèle. La sortie du procédé et la consigne sont respectivement notées  $y_G$  et  $r$ .  $d$  est une perturbation additive en sortie du procédé.

Le comportement reliant les entrées à la sortie est explicité par la relation suivante :

$$y = \frac{CG}{1+C(G-M)} r + \frac{1-CM}{1+C(G-M)} d \quad (1)$$

Dans le but de réaliser un suivi parfait de la trajectoire, le correcteur doit être égal à l'inverse du modèle. Pour synthétiser l'inverse du modèle, il s'avère nécessaire de disposer de la relation liant la sortie du modèle  $y_M$  à son entrée, autrement dit, à la commande  $u$ .

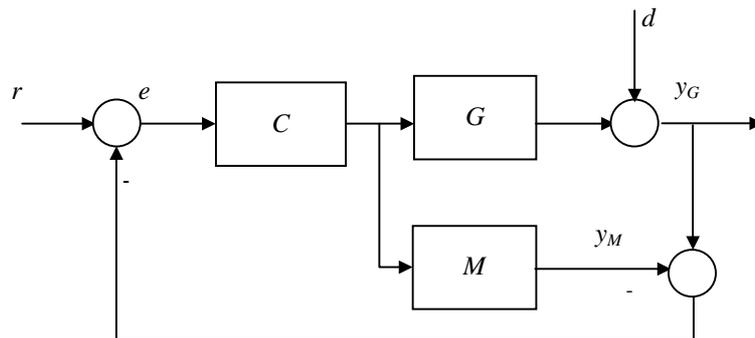


Fig. 1 : Structure de la CMI

On est assuré d'obtenir cette relation si l'on suppose que le modèle est commandable vis-à-vis de sa sortie. Soit alors le modèle linéaire d'ordre  $n$  stable décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y_M(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2)$$

Soit  $\delta$  le nombre caractéristique de ce modèle. Rappelons que  $\delta$  est un entier naturel inférieur ou égal à  $n - 1$ , présent entre la commande et la sortie du modèle [9-10]. Ce qui revient à écrire la relation suivante :

$$y_M(k + \delta + 1) = CA^{\delta+1}x(k) + CA^{\delta}Bu(k) \quad (3)$$

Il est à noter que la valeur de la commande à l'instant 0 n'agit sur la sortie du modèle qu'à partir de l'instant  $\delta+1$ . De ce fait les valeurs de la sortie du modèle aux instants 0, 1, ...,  $\delta$  sont indépendantes de la commande [9-10].

**Théorème 1:**

Si le correcteur  $C$  est un inverse exact du modèle  $M$  alors la sortie du modèle est égale à la consigne modifiée  $e$ .

En utilisant ce théorème, on dispose alors de la relation donnant l'entrée  $e(k + \delta + 1)$  à l'instant  $k + \delta + 1$  en fonction de la commande  $u$  à l'instant  $k$  :

$$e(k + \delta + 1) = CA^{\delta+1}x(k) + CA^{\delta}Bu(k) \quad (4)$$

Cette relation exprime alors la loi de commande par retour d'état suivante :

$$u(k) = [CA^{\delta}B]^{-1} [e(k + \delta + 1) - CA^{\delta+1}x(k)] \quad (5)$$

Cette loi exprime l'égalité entre la sortie du modèle et la consigne modifiée à l'instant  $k + \delta + 1$  et permet d'inverser le modèle de manière exacte à partir de l'instant  $\delta + 1$ . La figure 2 décrit le modèle muni avec cette loi de commande.

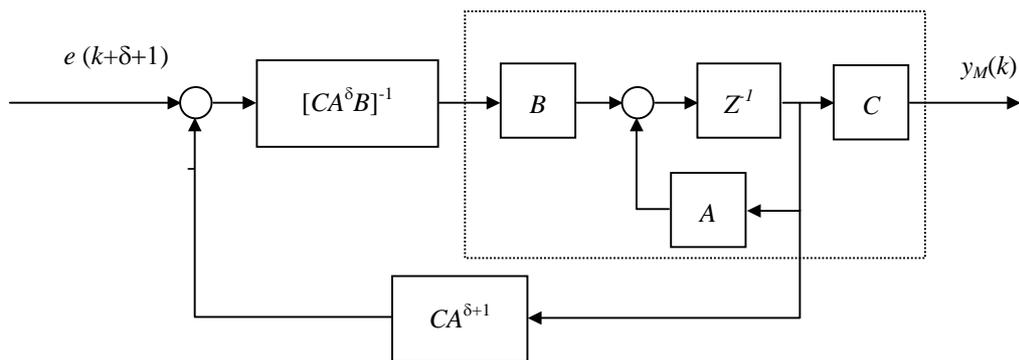


Fig. 2 : Retour d'état sur le modèle

Cette loi de commande pose a priori deux problèmes, l'un relatif à sa réalisabilité physique et l'autre est relatif à la stabilité du correcteur. Ces deux problèmes étant indépendants, on les traitera séparément.

## 2.1 Réalisabilité de la commande

La valeur de la commande à l'instant  $k$  nécessite de connaître la valeur, à l'instant  $k + \delta + 1$  de la consigne modifiée  $e$ . Cette valeur correspond à la valeur de la consigne  $r$  et de l'écart  $y_G - y_M$ . Or à l'instant  $k$  la valeur de la sortie du procédé requiert celle à l'instant  $k + \delta + 1$ . Pour contourner ce problème, on propose d'utiliser une prédiction sur l'entrée  $e$ . Pour obtenir, à tout instant  $k$  :

$$y_M(k + \delta + 1) = e(k + \delta + 1) \quad (6)$$

il faut prédire de manière exacte la valeur qu'aura l'entrée  $e$  à l'instant  $k + \delta + 1$ . On procédant ainsi, on ramène le problème de l'inversion du modèle à un problème de prédiction de l'entrée  $e$  (fig. 3). La précision entre la sortie du modèle et l'entrée va dépendre de la justesse de la prédiction de l'entrée  $e$ . Si on note par  $e_p(k)$  la valeur qu'aura l'entrée  $e$  à l'instant  $k + \delta + 1$ , on peut alors écrire :

$$y_M(k + \delta + 1) = e_p(k); \quad k \geq 0 \quad (7)$$

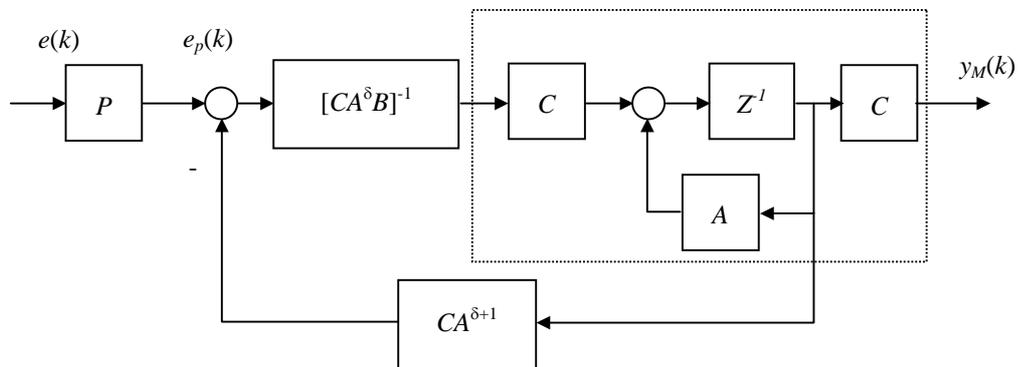


Fig. 3 : Prédiction de l'entrée

Le correcteur peut se construire en deux étapes relativement indépendantes. Dans un premier temps, on prédit, à défaut de connaître, à l'instant courant  $k$  la valeur qu'aura l'entrée à l'instant  $k + \delta + 1$ . Puis, on calcule la commande  $u(k)$  permettant à la sortie du modèle d'être égale à l'instant  $k + \delta + 1$  à l'entrée prédite.

Pour considérer le problème d'inversion d'une manière générale, considérons une entrée d'ordre  $m$ , c'est-à-dire :

$$e(z) = \frac{1}{(z-1)^m} \quad (8)$$

Pour prédire à l'instant  $k$ , la valeur qu'aura l'entrée à l'instant  $k + \delta + 1$ , on propose d'utiliser le critère suivant :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - z^{-(\delta+1)} P(z)] e(z) = 0 \quad (9)$$

Le retard  $z^{-(\delta+1)}$  présent dans le critère est imposé puisque la prédiction, effectuée à l'instant courant  $k$  de la valeur de l'entrée à l'instant  $k + \delta + 1$ , s'effectue à partir des valeurs de l'entrée aux instants  $k, k - 1, \dots$

On choisi comme prédicteur  $P(z)$  un filtre de type RIF. L'avantage d'une telle démarche est d'assurer une erreur nulle entre la sortie du modèle et l'entrée non pas asymptotiquement mais au bout d'un nombre fini et connu de périodes d'échantillonnage. L'ordre  $p$  du filtre RIF doit être supérieur ou égal à  $m-1$  pour assurer une prédiction de manière exacte à partir du  $p^{\text{ième}}$  échantillon.

Le filtre d'ordre  $m-1$  :

$$P(z) = \frac{a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}}{z^{m-1}} \quad (10)$$

est minimal vis-à-vis de l'ordre du critère puisqu'il le satisfait avec un nombre minimum de paramètres. En utilisant un tel filtre RIF, pour vérifier le critère asymptotique pour une entrée d'ordre  $m$ , la loi de commande est telle que le système correcteur-modèle est à temps de réponse minimal pour cet ordre d'entrée, ce qui signifie que la sortie du modèle rejoint l'entrée à partir de l'échantillon  $m+\delta$ . La prédiction sera alors exacte à partir de l'échantillon  $m-1$ .

Or les valeurs de la sortie du modèle sont égales à celles de l'entrée prédite à partir de l'échantillon  $\delta+1$ . Pour ce type de filtre d'ordre minimal, les valeurs de la sortie du modèle sont égales à celles de l'entrée à partir de l'échantillon  $m+\delta$ .

**Exemple 1 :**

Considérons une entrée d'ordre  $n$  égal à 1. On désire prédire, à l'instant courant  $k$ , la valeur qu'aura l'entrée à l'instant  $k + 1$ , ce qui sous-entend que le modèle un nombre caractéristique est nul.

Prenons le prédicteur minimal d'ordre  $n - 1$ , Soit

$$P(z) = a_0 \quad (11)$$

Cherchons la valeur de  $a_0$  permettant d'avoir :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - z^{-1}P(z)]e(z) = 0 \text{ avec } e(z) = \frac{1}{z-1} \quad (12)$$

On a :

$$1 - z^{-1}P(z) = 1 - \frac{a_0}{z} = \frac{1 - a_0 + (z-1)}{z} \quad (13)$$

Ce qui signifie que l'on cherche  $a_0$  tel que :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - a_0 + (z-1)}{z} = 0 \quad (14)$$

Soit alors  $a_0 = 1$ .

On obtient :

$$P(z) = 1 \quad (15)$$

soit :

$$e_p(k) = e(k) \quad (16)$$

Lorsque l'entrée  $e$  est un échelon, la prédiction est exacte à partir de l'échantillon  $n - 1 = 0$ .

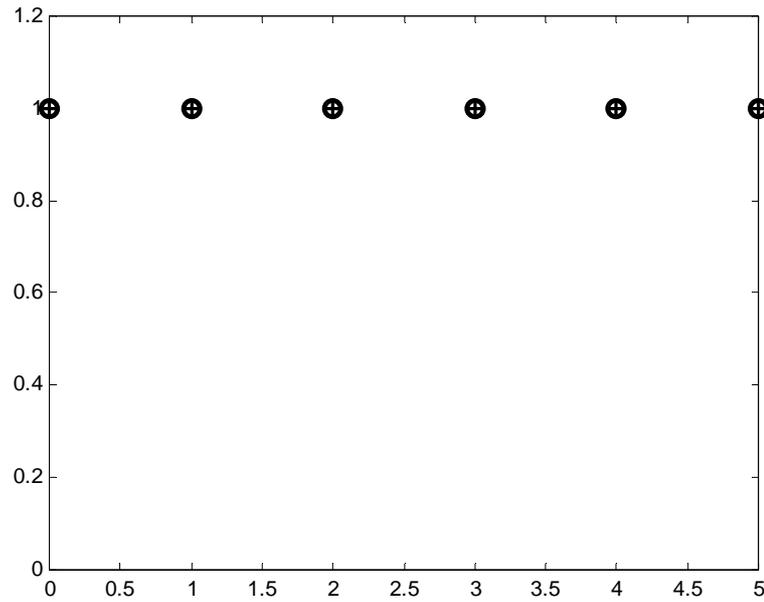


Fig. 4 : Comportement de l'entrée et de l'entrée prédite

o : entrée de type échelon

x : entrée prédite

**Exemple 2 :**

Considérons à présent une entrée d'ordre  $n$  égal à 2. On désire prédire, à l'instant courant  $k$ , la valeur qu'aura l'entrée à l'instant  $k + 1$ .

Prenons le prédicteur minimal d'ordre 1, soit

$$P(z) = \frac{a_0 z + a_1}{z} \tag{17}$$

On cherche les valeurs de  $a_0, a_1$  permettant d'avoir :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[ 1 - z^{-1} P(z) \right] \frac{1}{(z-1)^2} = 0 \tag{18}$$

On a :

$$1 - z^{-1} P(z) = 1 - \frac{a_0 z + a_1}{z^2} = \frac{1 - a_0 - a_1 + (2 - a_0)(z-1) + (z-1)^2}{z^2} \tag{19}$$

Soit à calculer  $a_0, a_1$  tel que :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - a_0 - a_1 + (2 - a_0)(z - 1) + (z - 1)^2}{z^2(z - 1)} = 0 \quad (20)$$

Ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} 1 - a_0 - a_1 = 0 \\ 2 - a_0 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

On obtient alors :

$$P(z) = \frac{2z - 1}{z} \quad (22)$$

Soit :

$$e_p(k) = 2e(k) - e(k - 1) \quad (23)$$

Lorsque l'entrée est de type échelon ou rampe, sa prédiction est exacte à partir du deuxième instant d'échantillonnage.

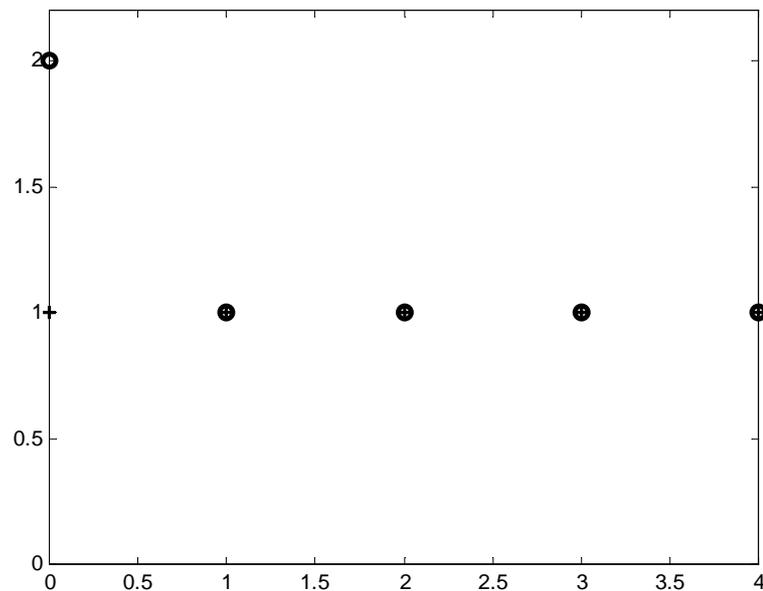


Fig. 5 : Comportement de l'entrée et de l'entrée prédite

o : entrée de type échelon

+ : entrée prédite

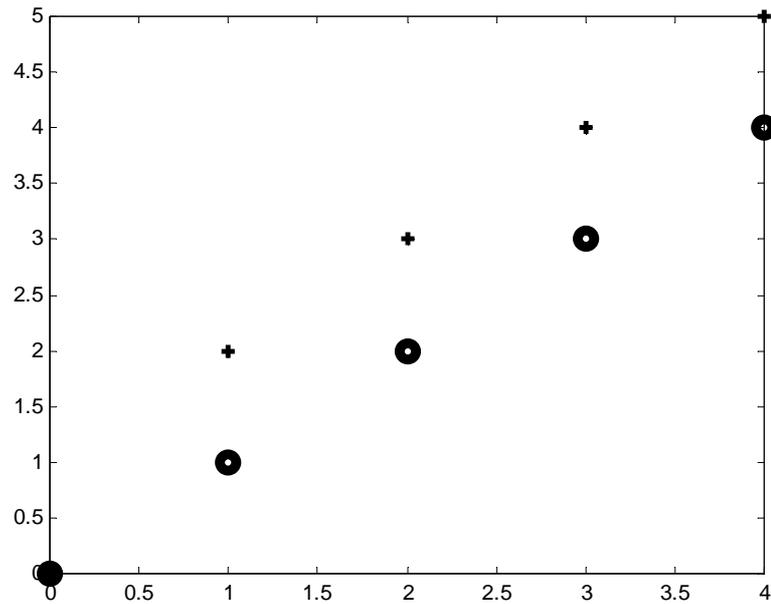


Fig. 6 : Comportement de l'entrée et de l'entrée prédite

o : entrée de type rampe

+ : entrée prédite

## 2.2 Stabilité du correcteur

De façon à séparer ce problème de celui que l'on vient de voir concernant la causalité de la commande, nous supposons prédire de manière exacte, à l'instant courant  $k$ , la valeur de l'entrée  $e$  à l'instant  $k + \delta + 1$ .

La commande d'inversion par retour d'état établie précédemment peut s'écrire :

$$u(k) = [CA^\delta B]^{-1} (e_p(k) - CA^{\delta+1} x(k)) \quad (24)$$

Le correcteur synthétisé avec cette loi de commande est stable si et seulement si le modèle est à déphasage minimal. Pour contourner ce problème, on propose de s'affranchir des zéros instables du modèle pour élaborer la loi de commande.

Cependant, les zéros instables influent le transfert entre la sortie du modèle  $y_M$  et l'entrée  $e$ , ce qui n'assure plus une erreur asymptotique nulle entre la sortie du procédé  $y_G$  et la consigne  $r$ . Pour résoudre ce problème, on propose de tenir compte de la présence de ces zéros dans la construction du filtre RIF.

Supposons que le modèle  $M$  est à déphasage non minimal. Soient  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_\ell$  les zéros instables de ce modèle. Soit  $M_0$  la fonction de transfert sans les zéros instables. La représentation d'état du modèle  $M_0$  est donnée par les équations suivantes [10] :

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= A_0 x_0(k) + B_0 u(k) \\ y_{M_0}(k) &= C_0 x(k) \end{aligned} \quad (25)$$

Afin d'assurer la stabilité du correcteur, on élabore la commande à partir de ce modèle  $M_0$ . Dès lors la commande d'inversion peut s'écrire :

$$u(k) = \left[ C_0 A_0^\delta B_0 \right]^{-1} \left( e_p(k) - C_0 A_0^{\delta+1} x_0(k) \right) \quad (26)$$

où  $\delta$  est le nombre caractéristique du modèle  $M_0$ . Il est à noter que  $M$  et  $M_0$  possèdent tous les deux le même nombre caractéristique étant donné qu'ils possèdent le même retard.

Avec cette loi de commande, l'inversion est exacte à partir de l'échantillon  $\delta + 1$  si la prédiction est établie de manière correcte. Le filtre RIF à synthétiser doit tenir compte des zéros instables de  $M$  afin d'assurer que la sortie du modèle suive asymptotiquement l'entrée prédite. En effet on a :

$$\begin{aligned} y_M(z^{-1}) &= (1 - \tilde{z}_1 z^{-1}) \dots (1 - \tilde{z}_\ell z^{-1}) y_{M_0}(z^{-1}) \\ &= (1 - \tilde{z}_1 z^{-1}) \dots (1 - \tilde{z}_\ell z^{-1}) z^{-(\delta+1)} P(z^{-1}) e(z^{-1}) \end{aligned} \quad (27)$$

Le filtre RIF doit alors vérifier la relation suivante :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[ 1 - z^{-1} (1 - \tilde{z}_1 z^{-1}) \dots (1 - \tilde{z}_\ell z^{-1}) P(z) \right] e(z) = 0 \quad (28)$$

Si l'entrée  $e(z)$  est correctement prédite, on a alors :

$$(1 - \tilde{z}_1 z^{-1}) \dots (1 - \tilde{z}_\ell z^{-1}) z^{-(\delta+1)} P(z^{-1}) = e(z) \quad (29)$$

La conséquence de la présence des zéros instables est que la prédiction de l'entrée s'en trouve retardée de  $m + \ell$  échantillons.

### 3. Implantation du correcteur dans la CMI

Lorsque le modèle est différent du procédé, la condition de stabilité dépend de l'écart modèle-procédé (équation 1). Pour résoudre ce problème, on introduit un filtre de robustesse au niveau du signal d'écart entre la sortie du procédé et celle du modèle. Le fait de filtrer le signal d'écart ralentit sa prise en compte dans la commande. Un compromis apparaît alors entre la robustesse et la capacité qu'à la sortie du procédé de se comporter comme la consigne.

Dans l'approche que l'on propose pour réagir au problème de stabilité du système, on se préoccupe de prédire le signal d'écart, en veillant à préserver la stabilité du système en dépit de la désadaptation du modèle. Cette démarche nous amène à estimer séparément l'évolution future de la consigne de celle de l'écart (voir figure 7).

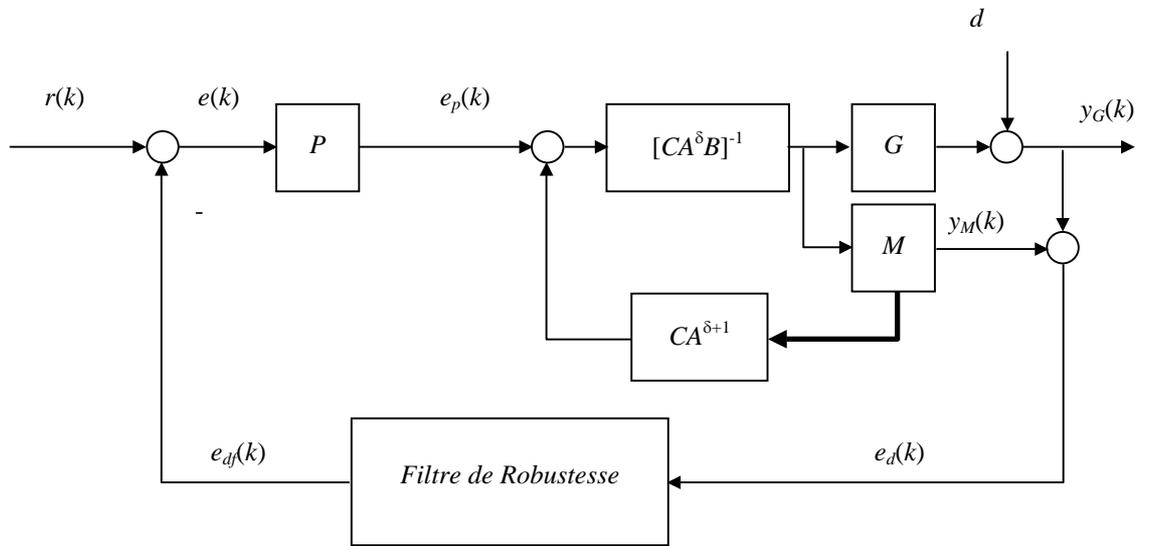


Fig. 7 : Implantation du correcteur dans la CMI

Dans le cas où le modèle est exact ( $G=M$ ), on peut démontrer l'égalité suivante [9-10] :

$$y_G(k) - r(k) = [e_p(k - (\delta + 1)) - r(k)] - [e_{df}(k - (\delta + 1)) - e_d(k)] \quad k \geq \delta + 1 \quad (30)$$

Notons que la perturbation est filtrée avant d'être prédite. Pour réduire l'influence de cette perturbation, le filtre de robustesse ne doit pas altérer les propriétés qu'à le prédicteur  $P$  à estimer le signal d'écart. Le fait de filtrer l'écart ralentit la dynamique de compensation de la

perturbation  $d$ , ce qui est inutile puisque cette perturbation n'intervient pas dans la condition de stabilité du système.

Dans le cas général ( $G \neq M$ ), afin d'isoler les problèmes dûs à la prédiction de l'écart de ceux relatifs à la consigne, nous supposons qu'à tout instant  $k$  la prédiction de la consigne est exacte, c'est-à-dire  $r_p(k) = r(k + \delta + 1)$

### **Théorème 2**

L'erreur à l'instant  $k$  entre la sortie du procédé et la consigne est égale (au signe près) à la différence entre la prédiction, effectuée à l'instant  $k - (\delta + 1)$ , de la valeur qu'aura l'écart filtré  $e_{df}$  à l'instant  $k$  et la valeur de l'écart  $e_d$  à l'instant  $k$  [10].

En effet, le correcteur est tel que :

$$y_M(k) = e_p(k - (\delta + 1)) \text{ pour tout } k \geq \delta + 1 \quad (31)$$

On a également :

$$e_p(k - (\delta + 1)) = r(k) - e_{df}(k - (\delta + 1)) \quad (32)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} e_d(k) &= y_G(k) - y_M(k) \\ &= y_G(k) - e_p(k - (\delta + 1)) \end{aligned} \quad (33)$$

Soit encore :

$$e_d(k) = y_G(k) - (r(k) - e_{df}(k - (\delta + 1))) \quad (34)$$

Finalement, on a :

$$y_G(k) - r(k) = -(e_{df}(k - (\delta + 1)) - e_d(k)) \quad (35)$$

La prédiction de l'écart  $e_d$  s'avère problématique, le prédicteur  $P$  doit être à même capable d'estimer convenablement l'écart, malgré la présence du filtre de robustesse. S'il s'avère nécessaire de ralentir la dynamique du prédicteur  $P$  pour assurer la stabilité du

système, on risque de dégrader inutilement l'erreur de prédiction de la consigne. Pour résoudre ce problème, on ne va pas utiliser le même prédicteur pour estimer la consigne et l'écart  $e_d$ . Ceci revient à distinguer le problème de la prédiction de la consigne de celui se rapportant à l'écart. Ceci nous amène à séparer le prédicteur en deux parties, l'un est rattaché à la consigne, l'autre à l'écart.

Pour des entrées de consigne et de l'écart polynomiales respectivement d'ordre  $m$  et  $q$ , on sera à même de prédire correctement l'écart si l'ordre du prédicteur d'écart est au moins égal à  $\sup(m, q) + 1$  [10]. La figure 8 représente la nouvelle forme de la structure CMI.

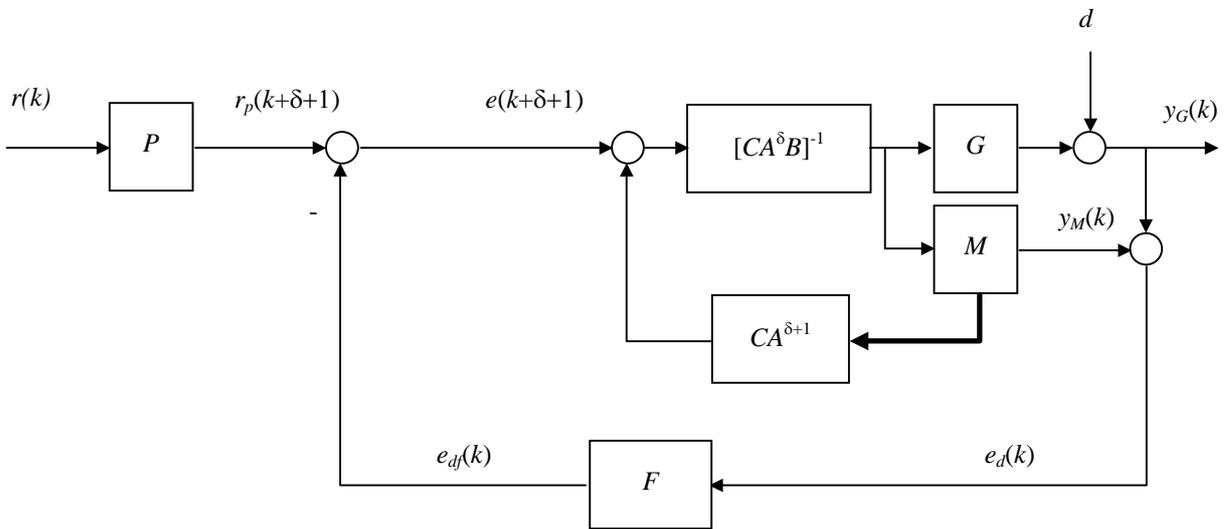


Fig. 8 : Prédiction de l'écart et de la consigne

Le filtre RIF  $F$  permet de prédire le signal d'écart  $e_d$  de façon à obtenir une erreur nulle entre la sortie du procédé et une consigne d'ordre donné, ceci en veillant à ne pas déstabiliser le système en dépit d'une désadaptation du modèle. On supposera que la consigne est correctement prédite.

On propose d'utiliser un filtre d'ordre non minimal afin de disposer de paramètres supplémentaires pour augmenter la robustesse du système. Le filtre doit satisfaire le critère asymptotique suivant :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - z^{-(\delta+1)} F(z)] e_d(z) = 0 \quad (36)$$

## 4. Exemples

Soit le modèle décrit par la fonction de transfert suivante :

$$M(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{(1-0.2z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \quad (37)$$

On suppose que le procédé est quelque peu différent du modèle. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{(1-0.25z^{-1})(1-0.55z^{-1})} \quad (38)$$

Le nombre caractéristique de ce modèle est égal à 1, ce qui signifie que la commande appliquée à l'instant  $k$  n'agira sur la sortie qu'à partir de l'instant  $k+2$ . On désire prédire une entrée d'ordre  $m=2$ . Le prédicteur de consigne doit alors satisfaire le critère suivant :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - z^{-2} P(z)] \frac{1}{(z-1)^2} = 0 \quad (39)$$

avec le prédicteur minimal d'ordre 1, soit  $P(z) = \frac{p_0 z + p_1}{z}$ . La résolution du critère asymptotique permet de calculer les paramètres  $p_0$  et  $p_1$ . On trouve :

$$P(z) = \frac{3z-2}{z} \quad (40)$$

Lorsque l'entrée est de type échelon ou rampe, la prédiction est exacte à partir du premier échantillon.

Pour le signal d'écart  $d(k)$ , on utilise le filtre prédicteur :

$$R(z) = \frac{h_0(\alpha) - h_1(\alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (41)$$

Ce dernier est non minimal. Le paramètre  $\alpha$  est utilisé de façon à commander la dynamique du filtrage. En vue d'assurer la stabilité de ce filtre et de lui conserver un sens physique  $\alpha$  doit satisfaire  $0 < \alpha < 1$ . La résolution du critère asymptotique donne :

$$h_0 = 3 - 2\alpha; \quad h_1 = 2 - \alpha \quad (42)$$

On obtient finalement :

$$R(z) = \frac{3 - 2\alpha - (2 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (43)$$

Les figures 9 et 10 donnent respectivement la réponse indicielle et la réponse en rampe de la structure CMI. La valeur de  $\alpha$  a été fixée à 0.1.

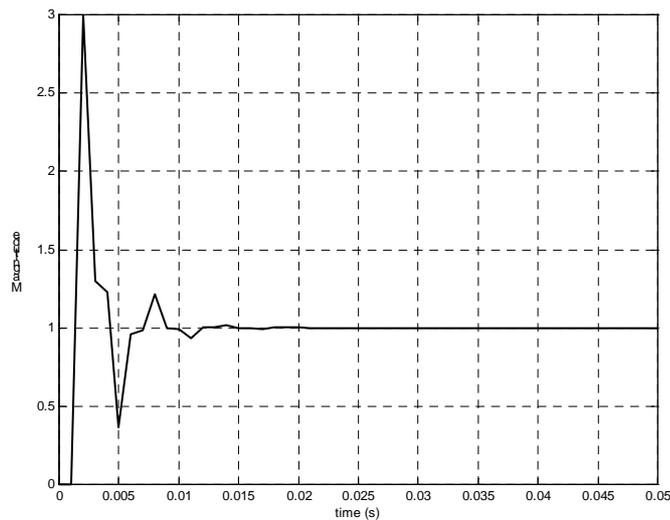


Fig.9 : Réponse indicielle

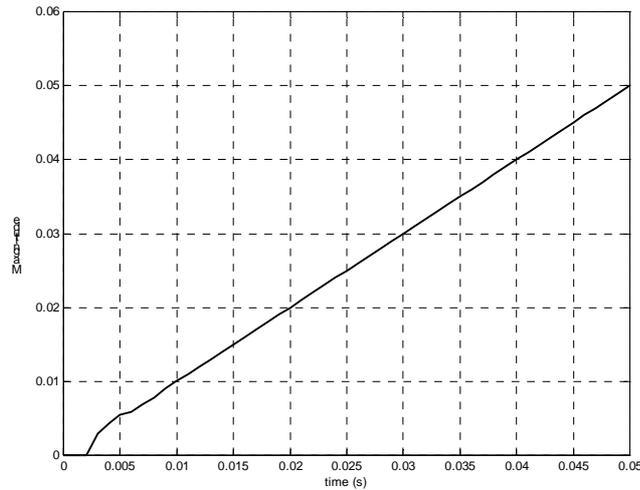


Fig.10 : Réponse à une rampe

Considérons maintenant le modèle à déphasage non minimum suivant :

$$M(z^{-1}) = \frac{z^{-1}(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})} \quad (44)$$

Ce modèle possède un zéro instable égal à -2. Il faut construire alors le modèle  $M_0$ . Ce dernier est donné par la fonction de transfert suivante :

$$M_0(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})} \quad (45)$$

Pour une entrée d'ordre 2, le prédicteur retenu est de la forme suivante :

$$P(z) = \frac{P_0 z + P_1}{z} \quad (46)$$

Sachant que le nombre caractéristique de ce modèle est nul, la résolution du critère asymptotique donné par l'équation (15) donne :

$$P(z^{-1}) = \frac{8 - 5z^{-1}}{9} \quad (47)$$

Pour le signal d'écart  $d(k)$ , on utilise le filtre prédicteur :

$$R(z) = \frac{h_0(\alpha) - h_1(\alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (48)$$

Le paramètre  $\alpha$  est tel que  $0 < \alpha < 1$ . La résolution du critère asymptotique donne :  $h_0 = 3 - 2\alpha$ ;  $h_1 = 2 - \alpha$ . Les figures 11 et 12 donnent respectivement la réponse indicielle et la réponse en rampe de la structure CMI dans le cas d'un déphasage non minimal avec  $\alpha = 0.2$ .

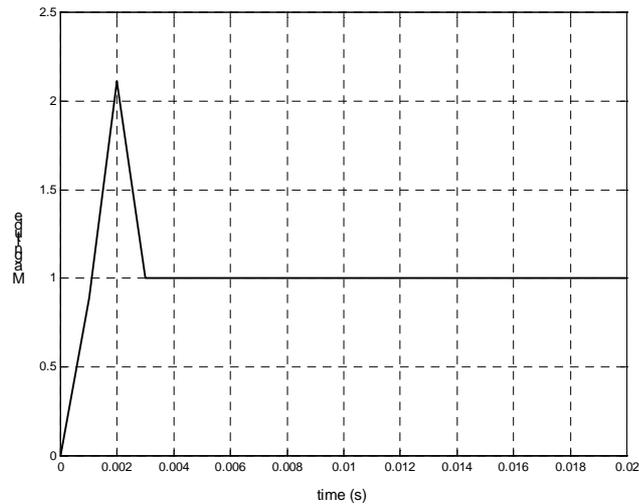


Fig. 11 : Réponse indicielle

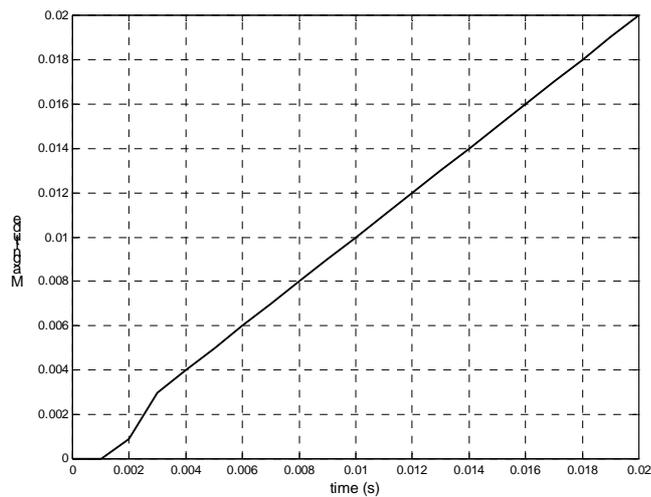


Fig.12 : Réponse à une rampe

## **5. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode d'inversion de modèles dans l'espace d'état pour la commande à modèle interne. Elle s'adresse aux systèmes discrets. La technique employée permet de séparer la réalisabilité et la stabilité de l'inversion en deux problèmes relativement indépendants. L'un a la tâche d'inverser le modèle sans prendre en compte son retard, ceci afin d'obtenir un transfert physiquement réalisable. L'autre fournit une prédiction de l'entrée, ceci pour tenter de compenser le fait de ne pas pouvoir inverser le retard du modèle.

Dans le cas d'un système à déphasage non minimal, on a proposé une méthode pour tenir compte des zéros instables. Cette procédure permet d'incorporer ces zéros instables dans la synthèse du filtre RIF prédictif d'écart.

## **CHAPITRE 4**

### **APPLICATIONS**

#### **1. Introduction**

Afin de valider les développements établis dans les chapitres précédents, on propose d'examiner deux procédés. Le premier est un modèle non linéaire, en l'occurrence il s'agit de la machine à induction. Le second est un modèle linéaire d'un CD-ROM LG-52X.

La procédure de conception pour le moteur d'induction est basée sur la linéarisation du modèle. Le correcteur obtenu est augmenté par un filtre passe-bas ayant une fréquence suffisante pour assurer la stabilité et les performances robustes. Ce modèle est traité dans le cas continu.

Pour le modèle du CD-ROM, il s'agit de commander une boucle locale de positionnement d'un actionneur. Le modèle est alors fortement simplifié.

#### **2. Modèle de la machine à induction**

Le contrôle des systèmes non linéaires est un domaine d'actualité pour la recherche. Cet état de fait est accentué d'autant plus qu'il n'existe pas de méthodes génériques pour la synthèse de contrôleurs pour ce genre de systèmes [13-20]. Des solutions diverses liées à de nouvelles techniques comme celles du flou ou des réseaux de neurones ont été explorées dans la littérature [21]. Une direction de recherche principale est l'utilisation des fonctions de Lyapunov [22]. Un autre axe traite la linéarisation des systèmes où les non-linéarités du système sont d'abord contrées en employant des réactions d'état non-linéaires et une transformation non-linéaire d'état. Le contrôleur conçu est alors linéaire.

C'est dans cette dernière optique que s'inscrit la démarche qu'on a utilisée pour traiter le modèle de la machine à induction.

## 2.1 Linéarisation

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

Où  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_i \in \mathfrak{R}$ ,  $y_i \in \mathfrak{R}$  et  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont supposées douces.

Le modèle inverse peut être construit par la méthode d'Hirschorn [20]. Cependant, dans ce travail on se propose de linéariser d'abord le modèle par des techniques de linéarisation de réactions standard, ensuite de concevoir un correcteur CMI pour le modèle linéarisé.

Le degré relatif  $r_j$  est défini comme l'entier le plus petit pour qu'au moins sur des entrées apparaissent dans  $y_j^{r_j}$  (le  $r_j$ -th la dérivée de temps de  $y_j$ ), soit :

$$y_j^{r_j} = L_f^{r_j} h_j(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j u_i \quad (2)$$

où  $L_f^\alpha h$  est la dérivée de Lie de la fonction  $f$  par rapport à  $g$ .

Soit  $A(\cdot)$  la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

Alors, quand  $A(\cdot)$  est non singulière, la loi de réaction d'état :

$$u(x) = -A^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix} + A^{-1}(x)v \quad (4)$$

permet de linéariser le système par retour d'état. Les sorties sont alors définies par :

$$y_i^{r_i} = v_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5)$$

où  $v_i$  est l'ensemble des nouvelles entrées.

## 2.2 CMI pour le moteur à induction

Le modèle présenté ici est basé sur la représentation de moteur d'induction dans le système biphasé :

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{n_p L_{sr}}{J L_r} (\psi_{ra} i_b - \psi_{rb} i_a) - \frac{\tau_r}{J} \\ \dot{\psi}_{ra} &= \frac{-R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p \omega \psi_{rb} + \frac{R_r L_{sr}}{L_r} i_a \\ \dot{\psi}_{rb} &= \frac{-R_r}{L_r} \psi_{rb} + n_p \omega \psi_{ra} + \frac{R_r L_{sr}}{L_r} i_b \\ \dot{i}_a &= \frac{R_r L_{sr}}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rb} - \gamma i_a + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa} \\ \dot{i}_b &= \frac{R_r L_{sr}}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{ra} - \gamma i_b + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sb} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire.  $i$ ,  $\psi$  et  $u$  dénotent respectivement le courant, le flux et la tension du stator.

Les indices  $s$  et  $r$  dénotent le stator et le rotor; (a, b) dénotent les composantes d'un vecteur en ce qui concerne un encadrement de référence de stator fixé. Il est assumé que les inductances mutuelles sont les mêmes.  $R_r$ ,  $L_r$ ,  $M$ ,  $J$  et  $n_p$  sont les paramètres électriques et mécaniques de la machine;  $\tau_r$  est le moment de torsion de charge.

On pose :

$$\sigma = 1 - \frac{L_{sr}^2}{L_s L_r}, \quad \gamma = \frac{L_{sr}^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} \quad (7)$$

$$x = [\omega \quad \psi_a \quad \psi_b \quad i_a \quad i_b]^T \quad (8)$$

Les variables à contrôler sont la vitesse du rotor et une quantité liée au flux:

$$\begin{aligned} y_1 &= \omega \\ y_2 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Le degré relatif du modèle est égal à  $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$  si  $x_2$  ou  $x_3$  ne sont pas égaux à zéro. Puisque  $r_1 + r_2 < n$ , un sous système linéaire d'ordre quatre peut être obtenu quand les réactions données par l'équation (4) sont appliquées. En imposant une réaction complémentaire au sous système linéaire est possible d'arriver à la matrice de fonction de transfert suivante :

$$\tilde{P}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^2 + c_1 s + c_0}, \frac{1}{s^2 + d_1 s + d_0} \right\} \quad (10)$$

Analysons maintenant la dynamique des zéros. La loi de transformation précédente permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \bar{h}_1(x) \\ \xi_2 &= L_f \bar{h}_1(x) \\ \xi_3 &= \bar{h}_2(x) \\ \xi_4 &= L_f \bar{h}_2(x) \\ \eta &= \tan^{-1} \frac{x_3}{x_2} [2\pi] \end{aligned} \quad (11)$$

En appliquant la loi de contrôle par difféomorphisme et bouclage, la dynamique du zéro du modèle de la machine à induction est :

$$\dot{\eta} = n_p y_1^* + \frac{R_r T_L}{n_p y_2^*} \quad (12)$$

qui est un intégrateur pur. Cependant,  $\eta$  est limité entre le zéro et  $2\pi$ . De plus, les états  $x_2$  et  $x_3$ , qui définissent  $\eta$ , évoluent de telle façon que  $x_2^2 + x_3^2$  est égale à une constante. Donc ils sont bornés. La dynamique du zéro est alors stable.

Un contrôleur causal pour la CMI peut alors être obtenu :

$$C(s) = \tilde{C}(s)F(s) \\ = \text{diag} \left\{ \frac{s^2 + c_1s + c_0}{(\lambda_1s + 1)^2}, \frac{s^2 + d_1s + d_0}{(\lambda_2s + 1)^2} \right\} \quad (13)$$

Ce contrôleur est augmenté d'un filtre pour satisfaire les exigences de robustesse. Quant à la structure de ce filtre, on recommande d'avoir une structure diagonale dont chaque élément est de la forme :

$$f_l(s) = \frac{a_{v_l-1}s^{v_l-1} + \dots + a_{1,l}s + a_{0,l}}{(\lambda s + 1)^{v+v_l-1}}; \quad 1 \leq l \leq n \quad (14)$$

où  $v_l = m_{0l} + k$ ,  $m_{0l}$  est la plus grande multiplicité du modèle nominal.  $l$  est le paramètre de réglage du filtre, et  $v$  est le degré relatif du modèle.

### 2.3 Résultats de simulation

Les paramètres de la machine à induction sont explicités ci-dessous :

$$R_s = 1.150 \, \Omega$$

$$R_r = 1.440 \, \Omega$$

$$L_r = 0.156 \, \text{H}$$

$$L_s = L_r$$

$$M = 0.143$$

$$J = 0.024 \, \text{Kg.m}^2$$

$$n_p = 2$$

$$L_{sr} = M$$

$$T_r = 50 \, \text{Nm}$$

Les figures 1 et 2 montrent les résultats de simulation en boucle ouverte du modèle linéarisé de la machine à induction.

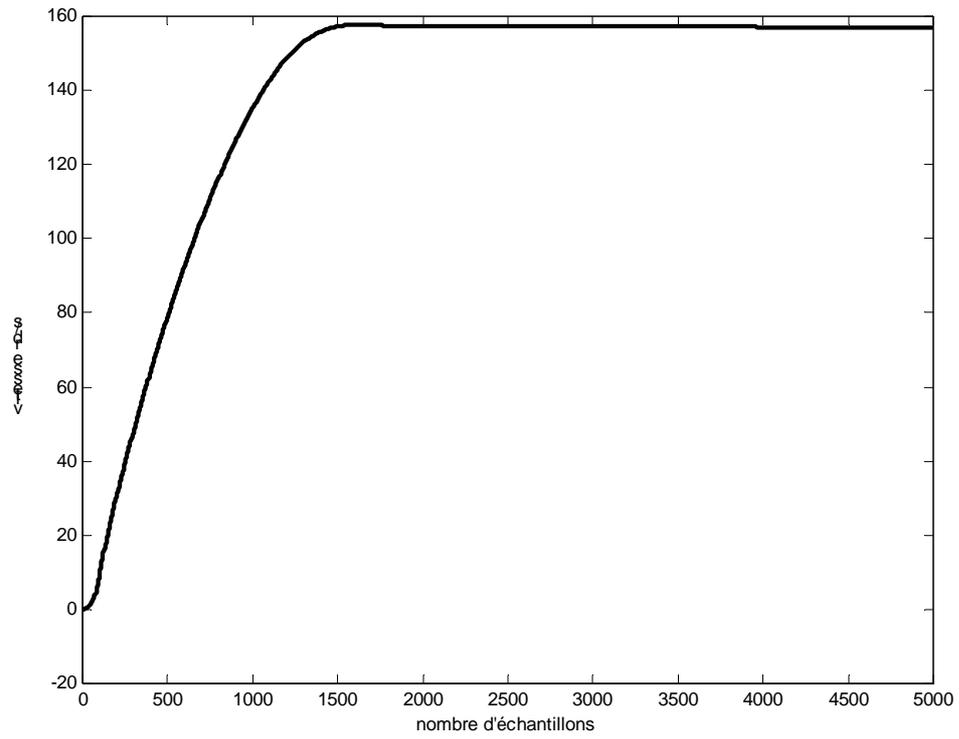


Fig. 1 : Réponse indicielle en vitesse (en BO)

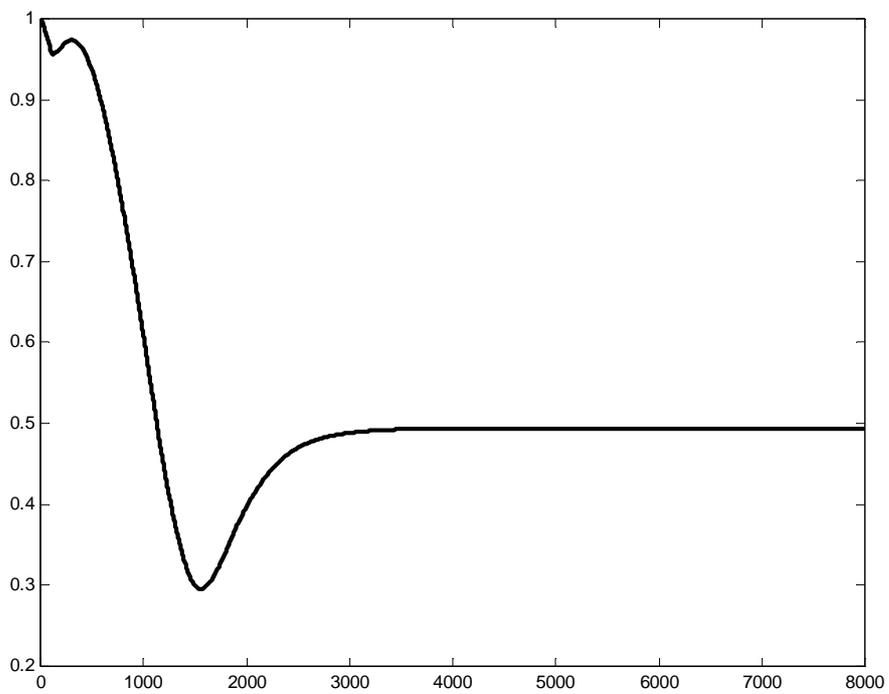


Fig. 2 : Réponse indicielle pour le couple (en BO)

La figure suivante montre les résultats de simulation obtenus pour la CMI. La consigne de référence est choisie telle que :

$$y_{1d} = 310(1 - e^{-10t}(1 + 10t)) \quad \text{rad/s}$$

Des perturbations de 10 % et de 15 % ont été introduites respectivement autour de la valeur nominale du couple et de la résistance rotorique. Les coefficients dans la linéarisation sont choisis tels que chacun des sous systèmes linéaires ait des pôles à -120. Les paramètres du filtre de robustesse sont tels que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,01$ .

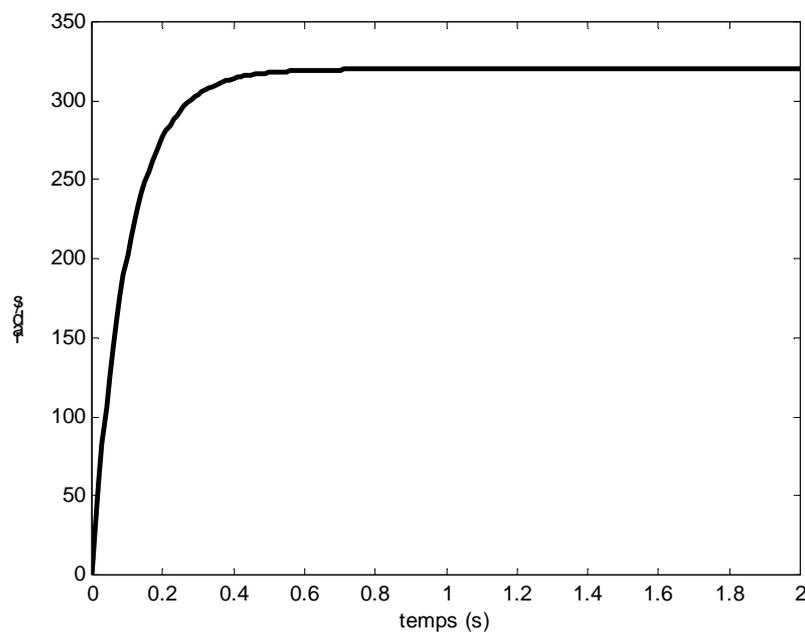


Fig. 3 : Réponse à la première consigne

### 3. Modèle du CD-ROM

Dans beaucoup d'applications multimédia, on désire atteindre de très grandes vitesses dans le but d'augmenter le taux de transfert ou de traitement des données et réduire ainsi le temps d'accès. Le problème pour le lecteur des disques optiques tel que le CD-ROM est de contrôler la position du spot optique pour qu'il suive une piste désirable (de l'ordre de  $0,1 \mu\text{m}$ ) du disque optique. Malheureusement la lecture est souvent déviée des cercles concentriques en raison de l'excentricité de disque. L'erreur de déplacement causée par cette dernière s'élève à plus de  $28 \mu\text{m}$  dans le cas le plus défavorable. Le lecteur de disques optiques mesure la

position de du spot par une erreur de position relative entre la trace désirable et la position réelle du spot. Donc, l'excentricité du disque affecte cette mesure comme une perturbation sinusoïdale dont la fréquence est celle du moteur [23-32].

Les solutions à ce problème ont été activement étudiées ces années dernières dans la littérature [23-32] et beaucoup d'approches ont été proposées. Par exemple, on a montré la structure répétitive peut être très efficace pour le rejet de perturbations répétitives.

Le problème de base pour le contrôle du mécanisme du disque compact est la variété énorme des sources des perturbations et les erreurs de modélisation qui posent des contraintes sévères sur le système de commande en termes de largeur de bande, la précision, des vibrations mécaniques et des chocs etc.

Le mécanisme du lecteur CD a beaucoup de boucles de contrôle. La position du chargement est contrôlée par deux contrôleurs coopératifs. Par souci de simplicité, nous considérerons seulement le contrôleur du moteur.

Le lecteur CD-ROM (LG 52X) peut être représenté par le modèle suivant :

$$G(s) = \frac{818.22}{s^2 + 64.73s + 166800} \quad (m/V) \quad (15)$$

Cette fonction de transfert décrit le déplacement du chargement à la tension d'entrée. La commande de disque optique mesure la position du chargement par une erreur de position relative entre la piste désirable et la position réelle du spot optique.

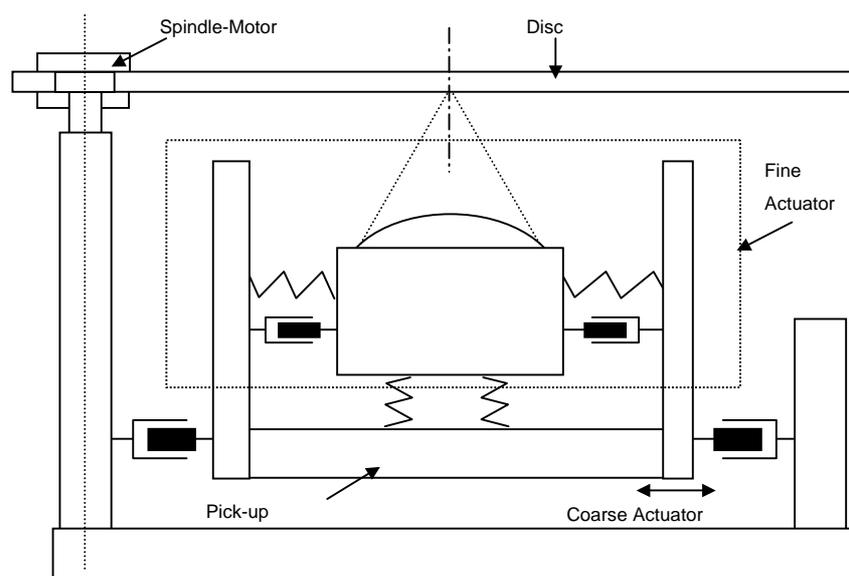


Fig 4: Schéma du système de lecture du CD-ROM

On désire satisfaire le critère asymptotique pour un échelon. Le correcteur minimal retenu est :

$$C(s) = \frac{203,8572 (1 + 5s)}{(1 + 9s)} \quad (16)$$

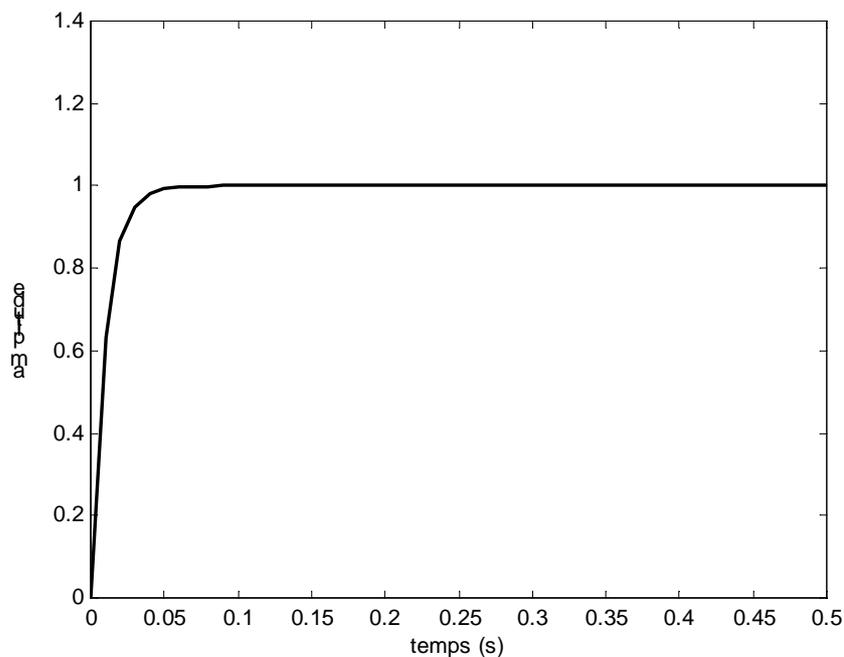


Fig 5: Réponse indicielle

Pour appliquer la démarche utilisant les filtres RIF décrite dans le chapitre 3, le procédé doit être discrétisé avec une période d'échantillonnage.

Le modèle discrétisé avec une période d'échantillonnage de 1 ms est donné par :

$$M(z) = \frac{1.0853}{0.0001z^2 \quad 0.0067z \quad 17.3814} \quad (17)$$

Le nombre caractéristique du modèle obtenu est égal à 1. On désire prédire une entrée d'ordre  $m=2$ . Le prédicteur de consigne doit alors satisfaire le critère suivant :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - z^{-2} P(z)] \frac{1}{(z-1)^2} = 0 \quad (18)$$

avec le prédicteur minimal d'ordre 1, soit  $P(z) = \frac{p_0 z + p_1}{z}$

La résolution du critère asymptotique donne :

$$P(z) = \frac{3.45z - 2.45}{z} \quad (19)$$

Pour le signal d'écart, le filtre prédicteur calculé est :

$$R(z) = \frac{4.89 - 4.39z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (20)$$

La figure suivante montre la réponse à une rampe unitaire.

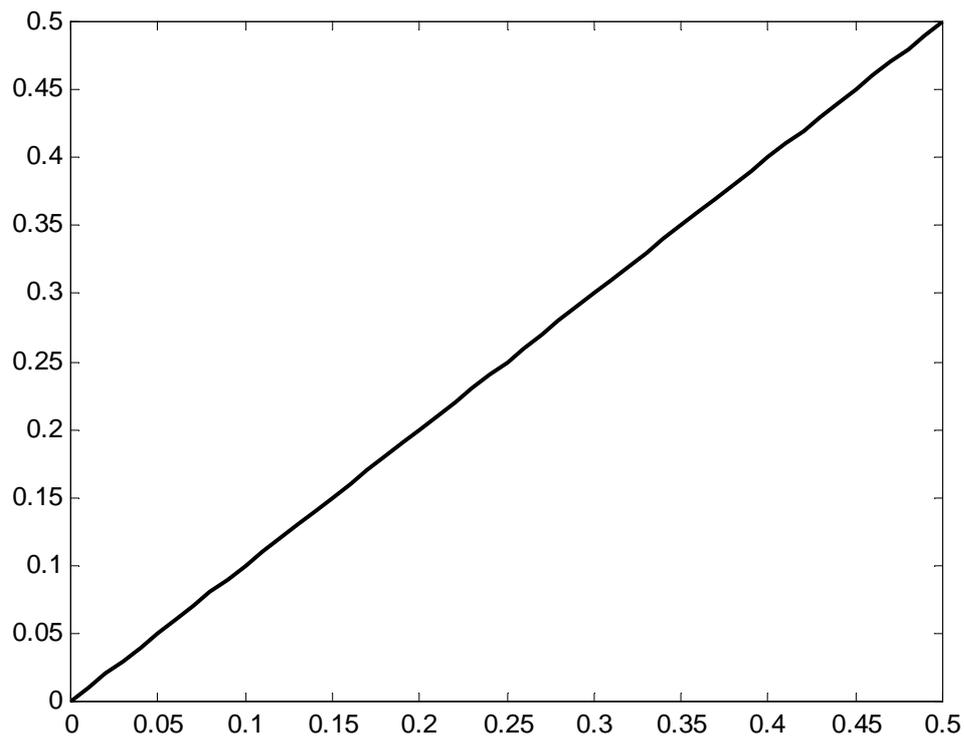


Fig 6: Réponse à une rampe avec prédicteurs

## **4. Conclusion**

Les simulations ont été menées sur deux procédés relativement différents du point de vue de leur nature. Le premier est non linéaire et le second est linéaire. Pour le modèle non linéaire, l'approche qu'on a utilisée est basée sur la linéarisation du modèle. Les deux sous systèmes obtenus sont linéaires et découplés. La synthèse du correcteur est alors facile et repose sur une matrice diagonale permettant d'inverser facilement les dynamiques des systèmes obtenus.

Le second modèle traité est relativement plus direct à manipuler. Il faut noter que le modèle considéré, en l'occurrence celui d'un CD-ROM, n'a pas été étudié dans sa globalité en vue d'une commande opérationnelle, mais il a été question d'étudier une seule boucle reliant le chargement à la tension d'entrée.

## *Conclusion générale*

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur l'étude de la structure de commande à modèle interne (CMI). Le problème d'inversion du modèle est primordial pour appréhender cette structure. En effet, la précision entre la sortie du procédé et la consigne est liée à la qualité de l'inversion. Cette propriété se conserve en présence d'une perturbation additive en sortie.

Dans le premier chapitre nous avons présenté les principales propriétés de la CMI. Une rapide comparaison avec la boucle fermée a également été établie.

Le second chapitre traite de l'annulation de l'erreur asymptotique dans le cas de la représentation par fonction de transfert. Nous avons établi les conditions que doivent vérifier les blocs correcteur, modèle, modèle de référence et filtre de robustesse. Un critère d'inversion a été adopté pour réaliser la fonction d'inversion.

En vue de considérer une classe plus étendue de modèles, le chapitre suivant reprend le problème de l'inversion du modèle dans l'espace d'état. Ceci nous a permis d'interpréter différemment le problème d'inversion du modèle : compte tenu de l'état du modèle, on calcule la commande permettant à la sortie future de se comporter comme l'entrée prédite. Un tel correcteur sera d'autant plus proche de l'inverse du modèle que la prédiction de l'entrée sera satisfaisante. Le correcteur est constitué de deux parties. La première a la tâche d'inverser le modèle sans tenir compte de son retard. La seconde permet de fournir une prédiction de l'entrée.

Le dernier chapitre a été consacré à l'application de la CMI sur deux procédés. Les résultats à cet égard sont satisfaisants. Nous avons choisis délibérément deux modèles différents. Bien que l'on n'a pas abordé les systèmes multivariables, les techniques employées pour le procédé de la machine à induction font appel à ces principes.

Sur le plan des perspectives, il serait souhaitable d'améliorer la technique de l'inversion développée, notamment l'influence du critère sur les performances de robustesse et d'asservissement.

Il serait bénéfique également de développer le comportement en régime transitoire en fonction du critère utilisé.

L'extension de ce travail à d'autres classes de systèmes est envisageable. D'ailleurs une thèse de doctorat est en finalisation traitant le problème de l'inversion pour les systèmes affines en la commande et aux systèmes à paramètres variables.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] M. Morari, E. Zafiriou, "Robust Process Control", Ed. Prentice Hall, Engelwood cliffs, N. J, 1989.
- [2] C. E. Garcia, M. Morari, "Internal Model Control. 1. A Unifying Review and Some Results", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Vol. 21, pp. 308-323, 1982.
- [3] C. E. Garcia, Morari M., "Internal Model Control. 2. Design Procedure for Multivariable Systems", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., No. 24, pp. 472-484, 1985.
- [4] L. Saidi, "Commande à modèle interne : Inversion et équivalence structurelle", Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1996.
- [5] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Commandes et optimisation des processus", Méthodes et techniques de l'ingénieur, collection dirigée par P. Borne, Série Automatique, Editions Technip, 2000.
- [6] P. M. Francis, W. M. Wonham, "The internal model principle of control theory". Automatica, Vol°12. pp. 457-468, 1976.
- [7] K. Watanabe, E. Muramatsu, "Error-Independent Stabilization of Internal Model Control", SICE Annual Conference in Fukui University, Japan, August 4-6, 2003
- [8] K. Yamada, "Modified Internal Model Control for unstable systems", Proceedings of the 7<sup>th</sup> Mediterranean conference and automation (MED99) Haifa, Israel-june 28-30-1999.
- [9] L. Saidi, Z. Dibi, M. Mokhtari, "Elaboration d'une méthode d'inversion de modèles dans l'espace d'état", Proc. of la première conférence internationale sur les systèmes électroniques, pp.1-4, Batna, Algérie, 2005.
- [10] L. Saidi, M. Litim, "New inversion method for IMC controller design", article soumis à Automatica.
- [11] H. K. Sung and S. Hara, "Properties of Sensitivity Function in SISO Digital Systems", International Journal of Control, Vol. 48, pp. 2429-2439, 1988.
- [12] L. Harnefors, H. Nee, "Robust Current Control of AC Machines Using The Internal Model Control Method", Automatica, Vol.38, no. 12, p.2103-2109, 2005.
- [13] L. Wang and R. D. Lorenz, "Rotor Position Estimation for Permanent Magnet Synchronous Motor using saliency-tracking self-sensing Method", Proc. Of Int. Conf. On Control, Automation and Systems, pp. 1407-1412, 2002.

- 
- [14] A. Gui, "A New Approach to Model-Based Control Structures", Proceedings of IFAC Conference, Naples, Italy, pp. 123-129, 2004.
- [15] G. C. Goodwin, S. F. Grabe, W. S. Levine, "Internal model control of linear systems with saturating actuators". Proceedings of the European control conference, Groningen, Pays-Bas, pp. 1072-1077, 1993.
- [16] D. Y. Ohm, "Dynamic Model of PM Synchronous Motors", International Journal of Control, Vol. 48, pp. 2429-2439, 1988.
- [17] O. Wallmark, "Modelling of Permanent - Magnet Synchronous Machines with Non-Sinusoidal Flux Linkage", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 30, pp. 555-565, 2002.
- [18] R. Gorez, D. Galardin, M. Neyer, "A Unifying Approach to Some Model-Based Control Structures", Proceedings of IFAC Conference, Nantes, France, pp. 237-242, July 1995.
- [19] K. E. Haggblom, "Combined internal model and inferential control of a pilot-scale distillation column". Proceedings of the European Control Conference ECC, Groningen, Pays-Bas, pp. 643-648, 1993.
- [20] R. M. Hirschorn, "Invertibility of multivariable non linear control systems". IEEE Trans. On autom. Control, Vol. AC-24, No 6, pp. 855-865, 1979.
- [21] C. R. Edgar; B. E. Postlethwaite, B. A. Gormandy, "Control of MIMO Dead time Process using fuzzy relational models", Proc. Cybernetics Group, Aachen, Germany. pp.112-116; 2000.
- [22] J. J. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall Inc., 1991.
- [23] J. H. Moon, M.N. Lee and M.J. Chung, "Repetitive control for track-following servo system of an optical disk drive", IEEE Trans. On Control Systems Technology, Vol. 6, no. 5, pp. 663-670, 1998.
- [24] K. C. Pohlmann, The Compact Disc Handbook: A-R Editions., 1992.
- [25] S. G. Stan and J. L. Bakx, "Adaptive-speed algorithms for CD-ROM systems," IEEE Trans. Consumer Electron, vol. 42, no. 1, pp. 43-51, 1996.
- [26] J. Watkinson, The Art of Data Recording. Focal Tress, 1994.
- [27] M. Steinbuch, "Repetitive control for systems with uncertain period-time", Automatica, Col.38, no. 12, p.2103-2109, 2002.
- [28] H. Shim, H. Kim and C.C. Chung "Design and experiment of add-on track following controller for optical disc drives based on robust output regulations", in Proc. Of Int. Conf. On Control, Automation and Systems, pp. 1407-1412, 2002.
- [29] W. Draijer, M. Steinbuch, and O.H. Bosgra. Adaptive control of the radial servo system of a compact disc player. Automatica, 28(3):455-462, May 1992.

- 
- [30] M. Steinbuch, G. Schootstra, and O.H. Bosgra, Robust Control of a Compact Disc Mechanism, chapter Applications of control. CRC Press, Ed: W.S. Levine, 1996.
- [31] E. Yokoyama, M. Nagasawa, and T. Katayama. A disturbance suppression control system for car-mounted and portable optical disk drives. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1994.
- [32] S. Bittanti, F. Dell'orto, A. Di Carlo and S.M.. Savaresi, "Notch filtering and multirate control for radial tracking in high-speed DVD-Players", IEEE Trans. On Consumer Electronics, Vol.48, no. 1, pp.56-62, 2002.
- [33] J. M. Maciejowski, "Robustness of Multivariable Smith Predictors", Proc. Of the 5<sup>th</sup> International Conference on Circuits and Systems, pp. 789-798, London, 1993.
- [34] K. Watanabe, E. Muramatsu, "Adaptive Internal Model Control of SISO systems", SICE Annual Conference in Fukui University, pp. 14-20, Japan, 2003
- [35] M. T. Than, "Internal model control", Proceedings of the 15<sup>st</sup> European Conference On Control, pp. 123-129, Paris, 2005.
- [36] I. Rivals, L. Personnaz, "Internal Model Control Using Neural Networks", Proceeding of the IEEE international symposium on industrial electronics, Warsaw, pp. 456-466, 2005.
- [37] C. Foulard, S. Gentil, J. P. Sandraz, "Commande et régulation par ordinateur numérique", Ed. Eyrolles, 1982.
- [38] J. Dong, C. Brosilow, "Design of robust multivariable PID controllers via IMC", IEEE Trans. Consumer Electron, Vol. 42, no. 1, pp. 43-51, 2005.
- [39] P. M. Frank, "Entwurf von regelkreisen mit vorgeschriebenem verhalten", Braun Verlag, pp. 234-245, Allemagne, 1974.
- [40] A. Eluheshi, "Modification of results obtained by modified internal model control for designing digital height control measuring system above rough sea level", Proc. of Int. Conf. on control, Automation, and systems, pp. 1407-1412, 2002.
- [41] I. D. Landau, F. Rolland, C. Cyrot, and A. Voda, "Régulation Numérique Robuste: Le Placement de Pôles avec Calibrage de la Fonction de Sensibilité", In A. Oustaloup, editor, Hermes, 1994.
- [42] G. C. Goodwin, S. Graebe, M. E. Salgado, "Control System Design", Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 2001.
- [43] J. C. Doyle, B. Francis, A. R. Tannenbaum, "Feedback Control Theory", Mac Millan, NY, 1992.
- [44] K. J. Aström, B. Wittenmark, "Computer Controlled Systems, Theory and Design", Prentice-Hall International Editions, NJ, 1990.

- [45] B. K. Kim, H. T. Choi, W; K. Chung, "Analysis and design of robust motion controllers in the unified framework", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 124, pp. 313-321, 2002.
- [46] B. K. Kim, H. T. Choi, W; K. Chung, "Unified analysis and design of robust disturbance attenuation algorithms using inherent structural equivalence", *Proc. American Control Conf.*, Arlington, VA, USA, pp. 4046-4051, 2001.
- [47] T. Kailath, "Linear Systems", Prentice Hall International Editions, NJ, 1980.