REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna

Faculté Des sciences de l'Ingénieur

Département d'Electronique

MEMOIRE

En Vue de l'Obtention du Diplôme de

MAGISTER EN ELECTRONIQUE

Option : Robotique

Présenté par :

Bechka Larbi
Ingénieur d'état en électronique
De l'Université de Batna

Thème

Commande Adaptative d'un Robot Manipulateur Flexible A Deux Degrés de Libertés

Soutenu le : ....../....../2007
Devant Le jury composé de :

Dr AMEDDAH Djamel-Eddine	MC	Université de Batna	Président
Dr SERAIRI Kamel	MC	Université de Biskra	Examinateur
Dr ABDESSEMED Yassine	CC	Université de Batna	Rapporteur
Dr KHIREDDINE Mohamed Salah	CC	Université de Batna	Examinateur

Remerciements

En premier lieu, je remercie dieu de m'avoir donné la force et la volonté pour achever ce travail ensuite mon professeur Dr ABDESSEMED Yassine pour son savoir, ses conseils et ses directives durant toutes les étapes de ce travail .

En second lieu Je remercie messieurs : Dr AMMEDAH Djamel-eddine, Dr SERAIRI Kamel et Dr KHIREDDINE Mohamed Salah d'avoir acceptés d'être membres du jury.

Enfin, je remercie toutes les personnes de prés ou de loin qui m'ont aidé à finir ce travail .

SOMMAIRE

VI Conclusion générale

INTRODUCTION GENERALE

I.1 Introduction

Les robots manipulateurs sont actuellement d'une très large utilisation dans les applications industrielles et spatiales. Ils sont d'une importance majeure, surtout dans les travaux dangereux, fastidieux et monotones [15].

En 1979 l'institut américain de robotique a donné une définition pour un robot manipulateur: ‘‘ Un manipulateur multi-fonctionnel reprogrammable conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou des appareils spécialisés et ceci à travers des mouvements programmables et variés pour la performance d'une variété de tâches ’’ [16].

Ces manipulateurs sont composés de liaisons rigides interconnectées par le moyen d'articulations, et un organe effecteur se trouvant à l'extrémité de la dernière liaison. Le mouvement de ces liaisons est assuré par des actionneurs et l'état du manipulateur est donné par des mesures issues des capteurs .

Le mouvement désiré du manipulateur est achevé en utilisant un système de contrôle qui fournit des commandes aux actionneurs des articulations dépendant sur la méthodologie de commande implémentée.

La plupart de ces robots manipulateurs ont été conçus d'une manière à maximiser leur raideurs ainsi donc augmenter leur rigidités, afin de minimiser les vibrations de l'organe effecteur pour achever son bon positionnement. Ceci est obtenu en choisissant un matériau lourd pour la conception de manipulateur [17].

Cependant leur capacité de port des charges est seulement cinq à dix pour cent de leur propre poids.

Vu leur dimensions relativement énormes, ces manipulateurs nécessitent des grands actionneurs et par conséquent une grande consommation d'énergie et une vitesse d'opération qui est généralement lente.

Le nombre des applications de ces manipulateurs a augmenté notamment lors de ces dernières années, par exemple les applications dans l'espace nécessitent les mêmes manipulateurs mais avec des poids légers les rendants ainsi des manipulateurs à liaisons flexibles.

Les avantages des manipulateurs à liaisons flexibles sont :

- Augmentation de la capacité de port des charges, le rapport acceptable du poids de la charge par rapport au poids du robot est augmenté.

- Diminution dans la consommation de l'énergie, puisque les manipulateurs à poids légers nécessitent seulement des petits actionneurs qui ont une faible consommation d'énergie.
- Un coût moindre, les robots flexibles ne demandent pas beaucoup de matériaux pour leur fabrication, en plus des petits actionneurs sont utilisés (donc le coût est moindre).
- Ils possèdent des mouvements rapides puisque les liaisons flexibles supportent bien les grandes accélérations.
- La sécurité des tâches est meilleure durant les opérations, à cause de la faible inertie que présentent les manipulateurs flexibles : les dommages pouvant avoir lieu lors d'une interaction physique entre le manipulateur et l'environnement sont réduits.

A coté de ces avantages on retrouve aussi des inconvénients en utilisant les robots flexibles tels que :

- Les effets non-linéaires très forts qui sont dus à la friction au niveau des articulations.
- Les interactions non-linéaires et les couplages, avec la flexibilité des liaisons .
- La diminution de la performance des manipulateurs en termes de précision, vibrations et/ou l'interaction avec l'environnement du travail .

Dans le but de minimiser les effets de la flexibilité des liaisons et d'exploiter les avantages maximums fournis par les manipulateurs flexibles, on a besoin d'un modèle dynamique complet, précis et réel afin de l'utiliser dans la commande .

En pratique un modèle convenable est très utilisé dans le développement des méthodologies de commande des manipulateurs et aussi bien pour des objectifs de simulations.

I.2 Problématique

Dans cette partie on cite les objectifs de ce travail qui s'intéresse à :

1) l'élaboration du modèle d'un bras flexible à deux degrés de libertés à travers la mise en forme des équations mathématiques régissant la mouvement de ce bras.

Pour ceci on est amené à prendre en considération les suppositions suivantes :

Supposition 1

Le bras est composé de lames minces avec des caractéristiques géométriques uniformes et une distribution de masse homogène .

Supposition 2

Le bras est élastique dans la direction latérale présentant une raideur par rapport aux forces axiales, le mouvement de torsion, les forces de flexion dues à la gravité, cependant seulement les déformations élastiques sont présentes .

Supposition 3

Les déformations non linéaires tels que les frottements internes et les perturbations internes sont négligeables .

2) implémentation des équations du modèle du bras manipulateur à travers le logiciel Matlab-Simulink .

3) recherche des commandes permettant le contrôle en position du bras manipulateur et leur implémentation à travers Matlab-Simulink .

I.3 Présentation du mémoire

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre donne un aperçu sur les bras manipulateurs rigides, leurs modélisations et quelques commandes employées dans le contrôle de ces robots.

Le deuxième chapitre consiste en une élaboration des modélisations cinématiques et dynamiques des robots à liaisons flexibles.

Le troisième chapitre donne une revue générale sur les réseaux de neurones ainsi que leur application dans la commande des processus industriels.

Enfin Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des méthodes de commandes implémentées pour le positionnement du bras flexible et ainsi que les résultats de simulations obtenues.

Finalement ce mémoire est clôturé par une conclusion générale sur le travail de recherche élaboré, ainsi que nous donnons quelques suggestions pour des études de recherches futures permettant l'amélioration de la commande en position des robots flexibles.

LES ROBOTS MANIPULATEURS

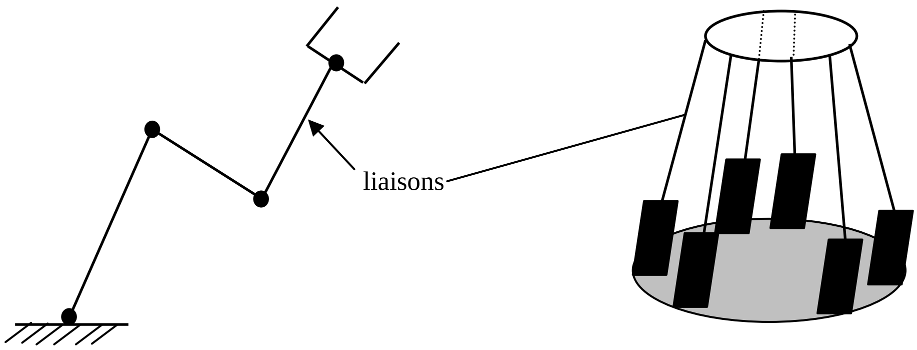
II.1 Introduction

Depuis quelques décennies, la recherche dans la robotique s'est concentrée presque entièrement sur la commande des robots manipulateurs.

Récemment le besoin pour des manipulations complexes et l'évolution des dispositifs tels que les effecteurs à plusieurs doigts et les plates-formes à plusieurs pieds a engendré un large domaine de recherche dans l'étude des systèmes robotiques. Cependant la pièce maîtresse de ces systèmes est le robot manipulateur.

Un robot manipulateur se compose de plusieurs liaisons connectées par des articulations pour former un bras.

On peut retrouver deux formes de manipulateurs en fonction de la manière dont les liaisons sont connectées : une forme sérielle et une autre parallèle [11].



un bras plan à trois liaisons
liaisons sérielles

plate forme Stewart à six pieds
liaisons parallèles

Figure 2.1 : Manipulateurs à liaisons sérielles et parallèles

La plupart des robots utilisés actuellement sont des robots ayant des liaisons connectées sériellement .

Les robots manipulateurs sériels, dans leur formes de base, sont des chaînes cinématiques ouvertes composées de liaisons rigides ou flexibles connectées par des articulations : ces robots peuvent se déplacer circulairement dans l'espace par des mouvements générés par des articulations commandées par les actionneurs.

Typiquement chaque articulation possède un degré de liberté et elle est de type rotoïde ou prismatique dépendant du mouvement permis entre les deux articulations et qui peut être un mouvement de rotation ou un mouvement de translation.

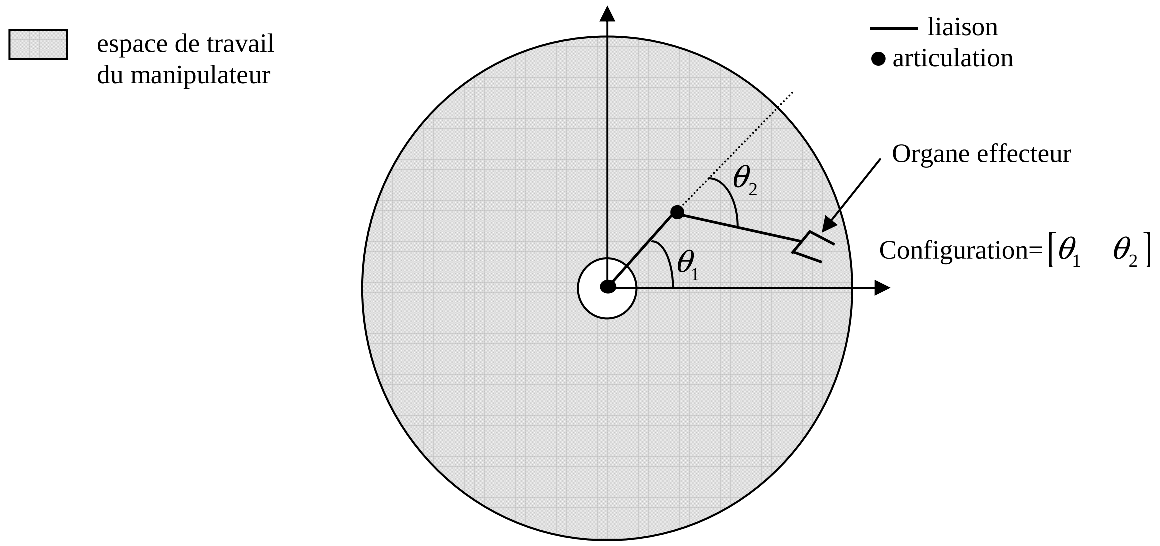


Figure 2.2 : Manipulateur plan à deux liaisons

Un organe effecteur ou une pince ayant la forme d'une main est reliée au bras au moyen du poignet. Les positions articulaires $\{\theta_i\}$ déterminent la configuration du bras à qui correspond une position et une orientation unique de l'organe effecteur.

L'espace de travail du manipulateur appelé aussi espace de la tache est composé de tout les points qui peuvent être atteints par l'extrémité du bras ou un point quelconque de son poignet (pas nécessairement l'organe effecteur puisque ce dernier peut être un outil changeable) [11].

Un paramètre important d'un manipulateur est le nombre de degrés de libertés (nombre d'articulations) qu'il possède pour déplacer et orienter un objet dans un espace à trois dimensions.

Un mécanisme doit avoir au moins six degrés de libertés dont trois pour positionner l'organe effecteur vers un point prescrit dans l'espace de la tache du manipulateur et les trois autres pour l'orienter proprement à cette position, ainsi un bras ayant six articulations (six degrés de libertés). La configuration articulaire correspondant à une position et une orientation données de l'organe effecteur peut être unique à quelques variations finies [11].

Le bras humain peut être considéré comme ayant six articulations principales permettant six mouvements dont deux se trouvent au niveau de l'épaule (un mouvement de rapprochement et d'éloignement du corps et l'autre en avant et en arrière) et deux autres existent au niveau du coude (un mouvement d'extension et de pliage du bras et l'autre un mouvement de rotation de la position frontale du bras autour de l'axe reliant le coude au poignet), les deux derniers mouvements résident au niveau du poignet (mouvement d'élévation/abaissement et un mouvement de balayage).

Les bras robotiques peuvent être cinématiquement conçus redondants en leur conférant des degrés de libertés supplémentaires dans l'espace articulaire, ainsi un manipulateur est redondant quand le nombre n de ses articulation est supérieur à la dimension de l'espace de la tâche m .

Un manipulateur redondant est caractérisé par le fait qu'il peut avoir un nombre infini de configurations au niveau articulaire correspondant à plus de positions de l'organe effecteur dans l'espace du travail.

Alors que ce surplus de degrés de libertés complique la programmation et les stratégies de contrôle par contre il augmente considérablement l'utilité du robot.

Mathématiquement, un bras robotique est décrit par ses équations cinématiques et dynamiques, la cinématique d'un bras introduit l'étude des relations entre les positions, vitesses et les accélérations de ses différentes parties; l'analyse cinématique est nécessaire pour la planification et l'exécution des mouvements désirés du manipulateur aussi bien que par des calculs dynamiques .

Les équations dynamiques d'un bras décrivent son évolution dans le temps en réponse à des forces externes, et des couples agissant sur ses actionneurs. Cependant un système robotique n'est pas seulement un bras manipulateur, en plus du bras, le système renferme aussi une source d'énergie externe, un outillage de l'extrémité du bras, des capteurs externes et internes, des servomécanismes, un ordinateur interface et le contrôleur (Fig. 2.3).

Le contrôleur d'un robot peut être pris comme le cerveau qui commande les mouvements mécaniques du bras : il est responsable, en se basant sur les modèles cinématiques et dynamiques du bras et les mesures captées, de la génération de directives contrôlant les actionneurs des articulations, nécessaire pour la génération du mouvement désiré [11].

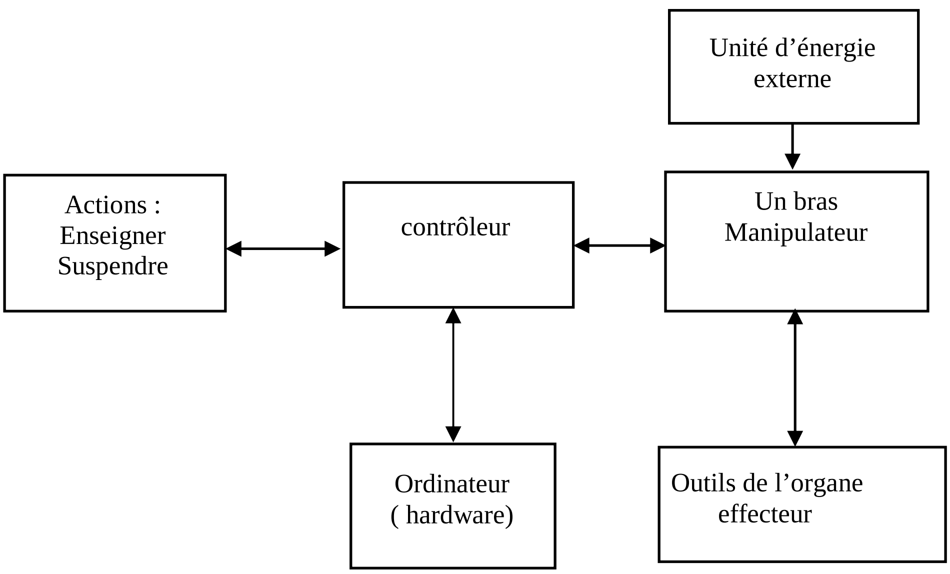


Figure 2.3 : composantes d'un système robotique à un seul bras

II.2 Modélisations des robots manipulateurs

II.2 1 Modèle cinématique

Considérons un manipulateur semblable à celui de la figure 2.2, ce manipulateur est composé de deux liaisons rigides de masses m_1 et m_2, de longueurs l_1 et l_2 ou les angles des articulations sont respectivement θ_1 et θ_2. Le problème cinématique direct est posé comme ce qui suit :

Etant donné deux angles articulaires θ_1 et θ_2, déterminer la position de l'organe effecteur (coordonnées) et son orientation par rapport au repère de base .

Soit le vecteur indiquant la position et l'orientation de l'organe effecteur dans le repère de base, représenté par $x \in \mathbb{R}^m$ et le vecteur des positions articulaires par $q \in \mathbb{R}^n$ ou $x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ et $q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}$ pour n=m=2 .

La fonction cinématique directe f d'un robot manipulateur liant q à x :

$$x = f(q) \tag{2.1}$$

L'expression de f est obtenue en fixant des repères à chaque liaison et en utilisant les matrices de transformations entre ces repères on peut obtenir les équations cinématiques directes .

Une méthode systématique pour définir les repères des liaisons et obtenir les matrices de transformations est celle proposée par Denavit et Hartenberg et qui est utilisée universellement dans l'analyse des bras manipulateurs [12] [13] .

On peut exprimer la position de l'organe effecteur en fonction des angles articulaires [14] :

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad . \tag{2.2}$$

Et l'orientation du repère outil est donnée :

$$\begin{aligned} i_2 i_0 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) & i_2 j_0 &= -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ j_2 i_0 &= \sin(\theta_1 + \theta_2) & j_2 j_0 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} i_2 i_0 & j_2 i_0 \\ i_2 j_0 & j_2 j_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

On remarque que f est une fonction non linéaire des positions articulaires q, pour tout robot manipulateur la fonction cinématique directe f existe toujours et peut être calculée sous une forme simple, notons que la solution cinématique est unique autrement dit pour tout vecteur q donné il existe une position de l'organe effecteur unique x.

La procédure inverse c'est à dire le calcul des positions articulaires pour un vecteur position donné de l'organe effecteur, appelée le modèle cinématique inverse qui s'énonce comme suit :

Etant donné une position et une orientation de l'organe effecteur d'un manipulateur, on détermine un ensemble d'angles articulaires qui permettent d'obtenir cette position et orientation désirées.
La solution au problème cinématique inverse est très importante dans le but de transformer les spécifications du mouvement de l'organe effecteur qui sont donnés dans l'espace opérationnel en leur spécifications correspondantes dans l'espace articulaire du mouvement.

Contrairement à la fonction cinématique directe f, la fonction cinématique inverse pour la plupart des manipulateurs n'est pas facile à avoir sous forme analytique précise : le plus important est que la solution cinématique inverse pour une position donnée de l'organe effecteur n'est pas unique .Du fait de la structure des équations précédentes on voit qu'on peut trouver deux solutions pour une position donnée qui sont appelées solutions pour coude haut et coude bas [14] .

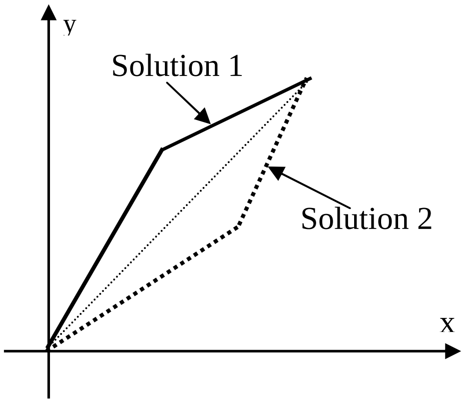


Figure 2.4 : Solutions multiples pour le modèle cinématique inverse d'un manipulateur

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} := D$$

Ceci implique $\theta_2 = \cos^{-1} D$

Par conséquent on retrouve $\theta_2 = tg^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{1-D^2}{D}}\right)$

Le signe ' $\pm$ ' signifie qu'on a deux solutions différentes, on obtient ensuite :

$$\theta_1 = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - tg^{-1}\left(\frac{l_2\sin\theta_2}{l_1 + l_2\sin\theta_2}\right)$$

Les deux solutions pour le modèle cinématique inverse sont :

$$\begin{cases} \theta_1 = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - tg^{-1}\left(\frac{l_2\sin\theta_2}{l_1 + l_2\sin\theta_2}\right) \\ \theta_2 = tg^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{1-D^2}{D}}\right) \end{cases}$$

Il peut exister plusieurs ou une infinité de vecteurs de positions articulaires correspondant à un vecteur x donné, cependant la résolution du problème cinématique inverse est fondamentale pour la commande des robots manipulateurs, depuis qu'une tache de manipulation est spécifiée sous la forme de positions, vitesses et accélérations de l'organe effecteur au moment ou on a besoin de spécifier les entrées de commandes au niveau articulaire.

La différentiation de l'équation (1.1) génère la relation de vitesse suivante :

$$\dot{x} = J\dot{q} \qquad J\left(q\right) \triangleq \frac{\partial f}{\partial q} \in R^{m\times n} \tag{2.2}$$

Où $J\left(q\right)$ est la matrice du Jacobien de la fonction cinématique directe $f\left(q\right)$.

Le calcul de la solution cinématique inverse au niveau de la vitesse requiert le calcul du vecteur vitesse articulaire $\dot{q}$ pour une vitesse donnée $\dot{x}$ de l'organe effecteur à une configuration articulaire q .

L'équation (2.2) donne une définition analytique de la matrice du Jacobien J , du point de vue calcul il est très efficace de construire cette matrice utilisant les vecteurs définis par la notation de Denavit-Hartenberg [12][13] .

Similairement les équations cinématiques du second ordre reliant les accélérations de l'organe effecteur et celles des articulations peuvent être obtenue en différentiant l'équation (2.2).

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \tag{2.3}$$

II.2.2 Modèle dynamique

Le modèle dynamique d'un manipulateur a un rôle important dans l'analyse du comportement d'un manipulateur, pour la conception des méthodologies de commandes et pour la simulation du mouvement, la simulation des mouvements des robots permet de développer des améliorations aux stratégies de contrôle sans avoir besoin d'un manipulateur expérimental; et ceci n'aura lieu que si on utilise des stratégies de commandes complexes .

Pour pouvoir développer ces stratégies on a besoin de modèles dynamiques précis, où le comportement dynamique d'un manipulateur est décrit par les variations temporelles de la configuration du bras en relation avec les couples articulaires, cette relation peut être exprimée, en fonction d'un ensemble d'équations différentielles appelées les équations du mouvement; qui commandent la réponse dynamique du manipulateur aux couples d'entrées.

Dans la littérature on retrouve deux méthodes pour l'obtention des équations de mouvement du manipulateur dans l'espace articulaire, la formulation de Newton–Euler et celle de Lagrange. Dans le présent travail, on s'intéresse au formalisme de Lagrange.

Dans un modèle dynamique le comportement du système est décrit en fonction du travail et de l'énergie et ceci en utilisant les coordonnées généralisées, les équations résultantes sont généralement compactes et fournissent une expression en fonction des couples et des déplacements articulaires .

Prenons le manipulateur montré dans la figure (2.2) avec le vecteur des coordonnées généralisées $q = [q_1 \quad q_2] = [\theta_1 \quad \theta_2]$, soient l_{c1} et l_{c2} les distances des centres de masses des deux liaisons aux axes des articulations respectives, m_1 et m_2 les masses des deux liaisons, I_1 et I_2 les moments d'inerties relatifs aux centres de masses des deux liaisons [14] .

A partir du modèle cinématique inverse on peut écrire :

$$\begin{cases} v_{c1} = J_{vc1}\dot{q} \\ v_{c2} = J_{vc2}\dot{q} \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $J_{vc1} = \begin{bmatrix} -l_{c1}\sin q_1 & 0 \\ l_{c1}\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

et $J_{vc2} = \begin{bmatrix} -l_1\sin q_1 - l_{c2}\sin(q_1+q_2) & -l_{c2}\sin(q_1+q_2) \\ -l_1\sin q_1 - l_{c2}\cos(q_1+q_2) & -l_{c2}\cos(q_1+q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

En supposant les conditions suivantes sont fournies, l'énergie cinétique est une fonction quadratique de $\dot{q}$ et l'énergie potentielle est une fonction de q .

L'énergie cinétique est donnée par :

$$K = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{2} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} \tag{2-5}$$

Où D est une matrice symétrique positive pour chaque $q \in R^2$.

On peut déduire les équations d'Euler-Lagrange en définissant le lagrangien comme ce qui suit :

$$L = K - V = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{2} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) \tag{2.6}$$

Où $V(q)$ est l'énergie potentielle.

On a :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{ij}(q)\dot{q}_j \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_j \frac{\partial d_{ij}(q)}{dq_i}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial d_{ij}}{dq_k}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{\partial V}{\partial qk} \tag{2.9}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{dq_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial qk} = \tau_k \quad \text{k=1....n} \tag{2.10}$$

Où τ_k est le couple appliqué à chaque articulation .

En inter-changeant l'ordre de sommation et en prenant en considération la symétrie on peut montrer que :

$$\sum \frac{\partial d_{kj}}{dq_i}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{dq_i} + \frac{\partial d_{ki}}{dq_i} \right\} \dot{q}_i\dot{q}_j \tag{2.11}$$

Et par suite :

$$\sum_{ij} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{dq_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{ij} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{dq_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i\dot{q}_j \tag{2.12}$$

Prenons : $c_{ijk} = \frac{\partial d_{kj}}{dq_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}$ les symboles de Christoffel , pour k fixe on a :

$$c_{ijk} = c_{jik}$$

Et on a aussi :

$$g_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{2.13}$$

On peut réécrire :

$$\sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{ij} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k \tag{2.14}$$

En utilisant une forme matricielle on aura :

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \tag{2.15}$$

L'obtention ici du modèle mathématique pour le manipulateur à deux liaisons rigides se fait en écrivant la partie de l'énergie cinétique de translation :

$$\frac{1}{2}m_1 v_{c1}{}^T v_{c1} + \frac{1}{2}m_2 v_{c2}{}^T v_{c2} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(m_1 J_{vc1}{}^T J_{vc1} + m_2 J_{vc2}{}^T J_{vc2} \right)\dot{q} \tag{2.16}$$

et l'énergie cinétique de rotation :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T \left\{ I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \dot{q} \tag{2.17}$$

A partir des équations (2.5) et (2.16), (2.17) ; la matrice d'inertie est donnée par :

$$D(q) = m_1 J_{vc1}{}^T J_{vc1} + m_2 J_{vc2}{}^T J_{vc2} + \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Où :

$$d_{11} = m_1 l_{c1}{}^2 + m_2\left(l_1^2 + l_{c2}{}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos(q_2)\right) + I_1 + I_2 \tag{2.19}$$

$$d_{21} = d_{12} = m_2\left(l_{c2}{}^2 + l_1 l_{c2}\cos(q_2)\right) + I_2 \tag{2.20}$$

$$d_{22} = m_2 I_{c2}{}^2 + I_2 \tag{2.21}$$

Les symboles de Christoffel sont alors donnés comme ce qui suit :

$$\begin{aligned}
c_{111} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0 \\
c_{121} = c_{211} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -m_1 l_1 l_{c2}\sin q_2 := h \\
c_{221} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = h \\
c_{112} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -h \\
c_{122} = c_{212} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = 0 \\
c_{222} &= \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

L'énergie potentielle du manipulateur est simplement la somme de celle de chacune des deux liaisons .

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 g l_{c1}\sin q_1 \\
V_2 &= m_2 g\left(l_1\sin q_1 + l_{c2}\sin(q_1+q_2)\right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ce qui implique que :

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g l_{c1}\sin q_1 + m_2 g\left(l_1\sin q_1 + l_{c2}\sin(q_1+q_2)\right) \tag{2.24}$$

$$g_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = \left(m_1 l_{c1} + m_2 l_1\right) g\cos q_1 + m_2 l_{c2} g\cos(q_1+q_2) \tag{2.25}$$

$$g_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 l_{c2} g\cos(q_1+q_2)$$

Explicitement les équations mathématiques gouvernant le mouvement peuvent écrites :

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Les équations dynamiques du mouvement du manipulateur sont communément écrites sous une forme matricielle :

$$\left[D(q)\right]\ddot{q} + C\left(q,\dot{q}\right)\dot{q} + g\left(q\right) = \tau \tag{2.27}$$

ou

$\left[D(q)\right]$: matrice d'inertie du manipulateur

$C(q,\dot{q})$: vecteur de Coriolis et des forces centrifuges

$g(q)$: vecteur de gravité .

τ : vecteur des couples appliqués aux actionneurs articulaires .

II.3 COMMANDE DES BRAS MANIPULTEURS

La résolution du problème de la commande des robots manipulateurs nécessite la détermination d'un ensembles d'entrées articulaires (les couples τ) qui résulte par le suivi de l'organe effecteur d'une trajectoire désirée, spécifiée typiquement par des séquences de positions et de vecteurs d'orientation de l'organe effecteur x ou par une trajectoire continue .

Plusieurs types de commandes ont été étudiées pour les robots manipulateurs, la méthode la plus simple et qui reste toujours employée pour les manipulateurs industriels est la commande articulaire indépendante ou chaque articulation du manipulateur est commandée comme un système à une seule entrée et une seule sortie (S.I.S.O) [11] .

La stratégie de cette commande est que chaque actionneur d'une articulation est contrôlé indépendamment : tous les effets de couplage entre les deux articulations sont ignorées ou traitées comme des perturbations. Cette commande à donné des résultats satisfaisants pour les simples déplacements, mais n'est pas convenable pour les déplacements rapides et ceux avec une large variation.

La méthode de la commande articulaire indépendante peut être considérée comme une forme simplifiée de la méthode du couple calculé qui est la technique commune la plus utilisée pour les robots manipulateurs, la plupart des méthodes de commandes des manipulateurs peuvent être considérés comme des cas spéciaux de cette technique .

La méthode du couple calculé en elle même est une application de la technique de linéarisation du 'Feed-Back' pour les systèmes non linéaires.

II.3.1 Méthode de la commande par couple calculé

La stratégie de la commande par couple calculé peut être considérée comme un contrôleur en deux parties, une section étant basée modèle alors que l'autre étant la portion de la loi de servocommande (Fig. 2.5) [11] .

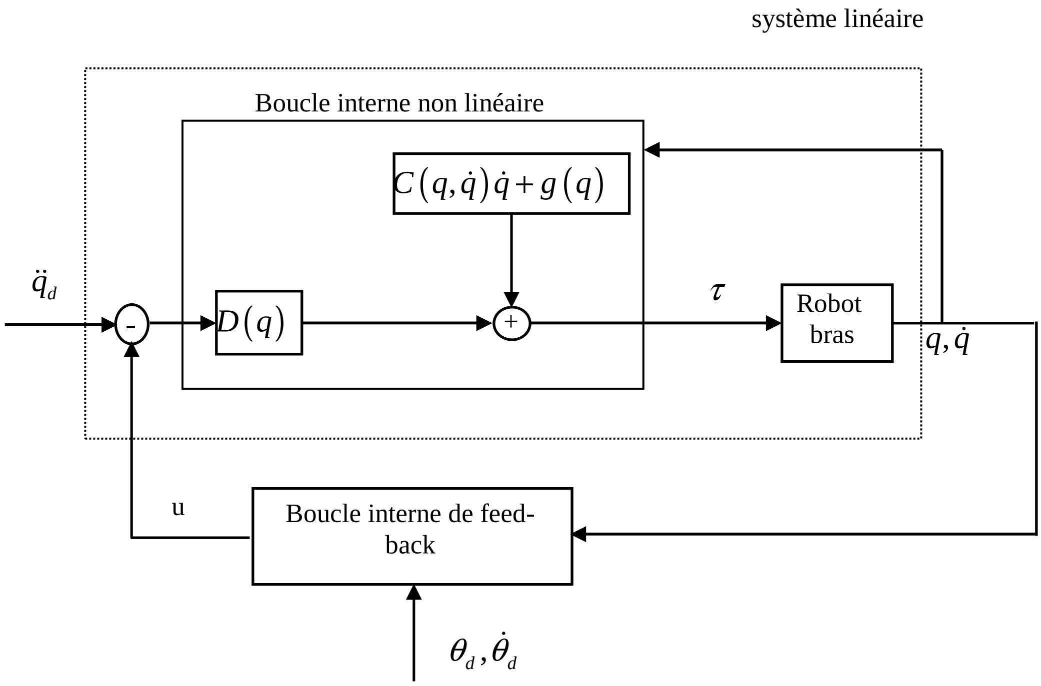


Figure 2.5 : Schéma de la commande par couple calculé

Considérons un manipulateur dont son organe effecteur est libre dans l'espace, et ayant comme modèle dynamique :

$$\tau=[D(q)]\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)$$

La portion basée modèle de la loi de commande est :

$$\tau=[D(q)](\ddot{q}_d-u)+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q) \qquad (2.28)$$

Où $\ddot{q}_d$ est le vecteur d'accélération articulaire désirée et u est le vecteur d'entrée de la commande qui est déterminé par une loi de servocommande. En général une loi de commande de type P.D est utilisée pour les robots manipulateurs.

Ainsi si q_d et $\dot{q}_d$ sont les vecteurs des positions et vitesses articulaires désirées avec q et $\dot{q}$ les vecteurs des positions et des vitesses articulaires actuelles (ou mesurées) .

Les erreurs dans l'espace articulaire sont calculées comme suit :

$e=q_d-q \qquad \dot{e}=\dot{q}_d-\dot{q}$

Ensuite la loi de commande peut être choisie comme suit :

$$u=-K_v\dot{e}-K_pe \qquad (2.29)$$

Faisant une substitution à partir de l'équation (2.29) dans l'équation (2.28), l'équation de l'erreur pour le système en boucle fermée est obtenue :

$$\ddot{e}+K_v\dot{e}+K_pe=0 \qquad (2.30)$$

En choisissant les matrices de gain K_v et K_p comme des matrices diagonales avec des valeurs positives le long de la diagonale, cette erreur du système peut être rendue asymptotiquement stable.
Il est important de noter que malgré la sélection des matrices diagonales de gain, il en résulte un découplage de la commande au niveau de la boucle externe mais ceci n'implique pas une stratégie de commande articulaire découplée.
Parce que la multiplication par la matrice d'inertie et l'addition de termes non linéaires dans la loi basée modèle laisse la loi de commande u affecter toutes les articulations.
Pour calculer l'entrée couple de n'importe quelle articulation, les positions et vitesses des autres articulations sont nécessaires.
Différents choix de la loi de servocommande résulte dans la technique de commande de base décrite précédemment, (on peut avoir la commande articulaire indépendante quand $\left[D(q)\right]$= I et $C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)= -\ddot{q}_d$).

L'idée de base est de supprimer les non-linéarités dans le modèle (utilisant la loi basée modèle) et ensuite traiter le système comme un système linéaire . Le grand inconvénient de ce schéma de commande est que les paramètres et la structure du système doivent être connus afin de calculer l'équation (2.28), toutefois quand les erreurs dans les paramètres ne sont pas aussi larges ; ce schéma de commande donne une grande performance satisfaisante [11].

II.3.2 La méthode de commande P.D

Soit un manipulateur ayant pour équation du mouvement :

$$[D(q)]\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=\tau \tag{2.31}$$

l'objectif de la commande est de déterminer les n composantes des couples agissant sur des articulations rotoïdes permettant de déplacer l'organe effecteur à une position finale donnée $q_d=[q_{d1} \quad q_{d2}]^T$.
Afin d'achever une position désirée, on peut utiliser un contrôleur à action proportionnelle et dérivée P.D .
La loi de commande est basée sur les mesures locales des erreurs de positions $\tilde{q}_j = q_j - q_{dj}$ et la vitesse articulaire $\dot{q}_i$.
Premièrement considérons le cas ou $g(q)=0$ (c'est-à-dire qu'il n y a pas de forces de gravitation), alors la loi de commande est donnée par :
$\tau_j=-K_{pj}\tilde{q}_j-K_{dj}\dot{q}$ où K_{pj} et K_{dj} sont des constantes strictement positives .

Pour montrer que cette loi de commande est stable et qu'elle assure une erreur nulle en régime permanent , considérons la fonction de Lyapounov candidate :

$$V = \frac{1}{2}\left[\dot{q}^T D(q)\dot{q} + \tilde{q}^T K_p \tilde{q}\right]$$

On peut réécrire la loi de conservation de l'énergie sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^T D(q)\dot{q}\right) = \dot{q}\tau$$

Le terme de droite représente la puissance d'entrée fournie par les actionneurs et le terme de gauche représente la dérivée de l'énergie cinétique .

on a $\tau_j = -K_{pj}\tilde{q}_j - K_{dj}\dot{q}$ où K_p et K_d sont des matrices symétriques définies positives constantes (usuellement c'est des matrices diagonales).

On peut écrire la dérivée temporelle de V comme ce qui suit :

$$\dot{V} = \dot{q}^T\left[\tau + K_p\tilde{q}\right]$$

Utilisant la relation :

$$\tau_j = -K_{pj}\tilde{q}_j - K_{dj}\dot{q}$$

On aura alors :

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} \le 0$$

En considérant V = 0 ceci va engendrer :

$$\dot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = D^{-1}K_p\tilde{q} \Rightarrow \tilde{q} = 0$$

Alors dans ce cas la trajectoire du système converge vers l'état désiré.

Supposons maintenant que g(q) n'est pas égal à zéro, alors la loi de commande peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tau_j = -K_{pi}\tilde{q}_i - K_{dj}\dot{q} + g(q)$$

Dans ce cas la loi de commande supprime les effets des termes de gravités, par conséquent cette loi de commande exige le calcul à chaque instant de g(q) à partir des équations du Lagrangien [14].

II.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre on a donné quelques notions sur les bras manipulateurs rigides, et sur les modélisations utilisées et ainsi que quelques lois de commandes employées dans le domaine de la robotique.

MODELISATION DU SYSTEME

III.1 Modélisation cinématique

Considérons un bras flexible plan à n liaisons avec des articulations rotoïdes, subissant une déformation dans le plan du mouvement (les effets de torsions sont négligés). La figure (3.1) montre un exemple à deux liaisons où les repères ont été établis à partir de [1] :

$\left(X_0, Y_0 \right)$: est appelé le repère inertiel .

$\left(X_i, Y_i \right)$: est le repère rigide mobile associé à la liaison i .

$\left(\hat{X}_i, \hat{Y}_i \right)$: est le repère flexible mobile associé à la liaison i .

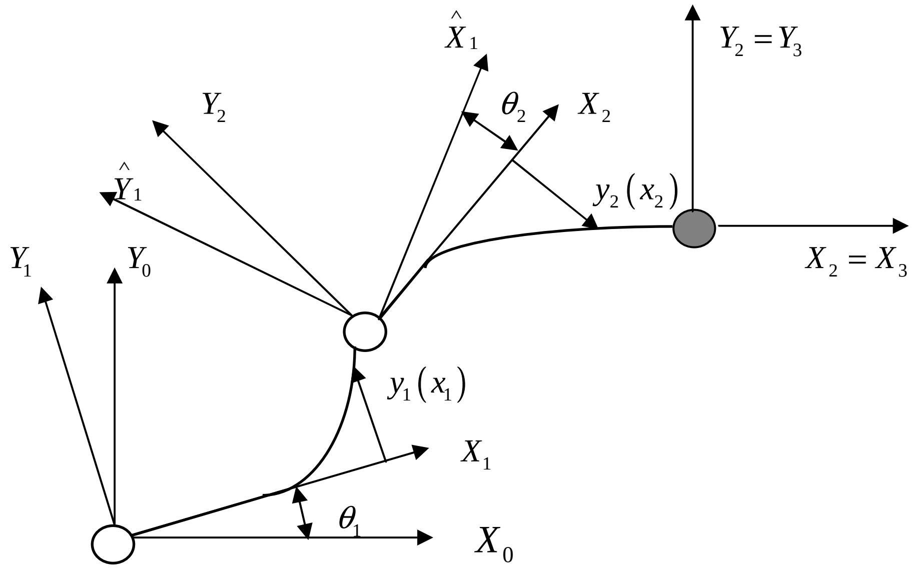


Figure 3.1 : Un bras flexible plan à deux liaisons

Le mouvement rigide est décrit par les angles θ_i des articulations qui sont supposées rotoïdes.

$y_i\left(x_i\right)$: représente la déflection transversale de la liaison i à l'abscisse x_i avec :

$0 \le x_i \le l_i$ et l_i étant la longueur de la liaison i .

Soit ${}^iP_i(x_i) = (x_i, y_i(x_i))^T$ la position d'un point le long de la liaison i par rapport au repère $\left(X_i, Y_i \right)$, et P_i étant la position absolue du même point dans le repère $\left(X_0, Y_0 \right)$.

Aussi ${}^{i}r_{i+1} = {}^{i}p_i\left(l_i\right)$ indique la position de l'origine du repère $\left(X_{i+1}, Y_{i+1}\right)$ par rapport au repère $\left(X_i, Y_i\right)$ et r_i sa position absolue par rapport au repère $\left(X_0, Y_0\right)$.

On distingue deux types de matrices de rotation :

A_i : matrice de rotation de la liaison rigide .

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

E_i : matrice de rotation de la liaison flexible .

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -y'_{ie} \\ y'_{ie} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

Où : $$y'_{ie} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)\bigg|_{x_i = l_i}$$

Ceci étant valable par l'approximation linéaire pour les petites déformations $arctg\left(y'_{ie}\right) \cong y'_{ie}$; ceci implique que tout les termes du second ordre incluant les produits des déformations sont négligés.

Alors les vecteurs de positions absolues peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} P_i &= r_i + W_i\, {}^{i}P_i \\ r_{i+1} &= r_i + W_i\, {}^{i}r_{i+1} \end{aligned} \qquad (3.3)$$

W_i : est la matrice de transformation globale du repère $\left(X_0, Y_0\right)$ au repère $\left(X_i, Y_i\right)$ qui obéit aux équations récursives suivantes :

$$\begin{aligned} W_i &= W_{i-1}E_{i-1}A_i = \hat{W}_{i-1}A_i \\ W_0 &= I \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Par l'utilisation des équations (3.1)-(3.4) les composantes cinématiques de tout point appartenant à la liaison i peuvent être entièrement caractérisées par rapport au repère de base ainsi la position de l'organe terminal dans l'espace opérationnel est donnée par :

$$P = W_1\begin{bmatrix} l_1 \\ y_1(l_1) \end{bmatrix} + W_1E_1A_2\begin{bmatrix} l_2 \\ y_2(l_2) \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

Où l_1 et l_2 sont les longueurs des deux liaisons et P étant un vecteur exprimant les coordonnées x et y de l'organe terminal du manipulateur :

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

En utilisant l'équation (3.5) on obtient les coordonnées x et y de l' organe terminal :

$$x = l_1 \cos\theta_1 - y_1 \sin\theta_1 + l_2 \cos(\theta_2 + \theta_1) - l_2 y'_{1e} \sin(\theta_2 + \theta_1)$$
$$- y_2 \sin(\theta_2 + \theta_1) - y_2 y'_{1e} \cos(\theta_2 + \theta_1) \qquad (3.7)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + y_1 \cos\theta_1 + l_2 \sin(\theta_2 + \theta_1) + l_2 y'_{1e} \cos(\theta_2 + \theta_1)$$
$$+ y_2 \cos(\theta_2 + \theta_1) - y_2 y'_{1e} \sin(\theta_2 + \theta_1) \qquad (3.8)$$

III.2 MODELISATION DYNAMIQUE (LAGRANGIEN)

Avant d'entamer cette partie il est nécessaire d'introduire certaines notions tels que :

La vitesse angulaire absolue (scalaire) d'un repère $\left(X_i, Y_i\right)$:

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{i} \dot{\theta}_j + \sum_{k=1}^{i-1} \dot{y}'_{ke} \qquad (3.9)$$

ou le « . » indique la dérivée temporelle et le « ' » dénote la dérivée spatiale .

la vitesse linéaire absolue d'un point du bras manipulateur est :

$$\dot{P}_i = \dot{r}_i + \dot{W}_i\, {}^iP_i + W_i\, {}^i\dot{P}_i \qquad (3.10)$$

On a : ${}^i\dot{r}_{i+1} = {}^i\dot{P}_i(l_i)$.

En supposant les liaisons inextensibles $(\dot{x}_i = 0)$ alors :

${}^i\dot{P}_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{y}(x_i) \end{bmatrix}^T$.

Le calcul de l'équation (3.10) prend l'avantage des équations récursives suivantes:

$$\dot{W}_i = \dot{\hat{W}}_{i-1} A_i + \hat{W}_{i-1} \dot{A}_i$$
$$\dot{\hat{W}}_i = \dot{W}_i E_i + W_i \dot{E}_i \qquad (3.11)$$

En prenant en considération que :

$$\dot{A}_i = S A_i \dot{\theta}_i\ \dot{E}_i = S\, \dot{y}'_{ie}$$
$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

L'équation dynamique du mouvement d'un robot plan à n liaisons flexibles est obtenue en utilisant l'approche standard de Lagrange c'est à dire en calculant l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U et ensuite former le Lagrangien L=T-U .

III.2.1 L' énergie cinétique

L'énergie cinétique du robot est donnée par la somme des contributions suivantes [2] :

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_{hi} + \sum_{i=1}^{n} T_{li} + T_P \tag{3.13}$$

où l'énergie cinétique du corps rigide au niveau du moyeu i de masse m_{hi} et de moment d'inertie J_{hi} est :

$$T_{hi} = \frac{1}{2} m_{hi} \dot{r}_i^{\,T} \dot{r}_i + \frac{1}{2} J_{hi} \dot{\alpha}_i^{\,2} \tag{3.14}$$

Avec $\dot{\alpha}_i$ définie comme dans l'équation (3.9).

L'énergie cinétique de la liaison i , de densité linéique ρ_i est :

$$T_{li} = \frac{1}{2} \int_0^{li} \rho_i(x_i) \dot{P}_i^{\,T}(x_i) \dot{P}_i(x_i) dx_i \tag{3.15}$$

L'énergie cinétique associée à la charge de masse m_p et de moment d'inertie J_p, située à l'extrémité de la liaison n est :

$$T_p = \frac{1}{2} mp \dot{r}_{n+1}^{\,T} \dot{r}_{n+1} + \frac{1}{2} J_p (\dot{\alpha}_n + \dot{y}'_{ne})^2 \tag{3.16}$$

Les expressions (3.14)-(3.16) exploitent les identités suivantes :

$$A_i^T A_i = E_i^T E_i = S_i^T S_i = I \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_i A_i^T &= S \dot{\theta}_i \\ E_i^T \dot{E}_i &= (I y'_{ie} + S) \dot{\theta}_i \end{aligned} \tag{3.18}$$

III.2.2 L'énergie potentielle

L'énergie potentielle du robot s'exprime aussi par la somme des contributions suivantes [2], [3] :

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_{ei} + \sum_{i=1}^{n} U_{ghi} + \sum_{i=1}^{n} U_{gli} + U_{gp} \tag{3.19}$$

U_{ei} est l'énergie élastique de la liaison i :

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \int_0^{li} (EI)_i (x_i) \left(\frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^{\,2}}\right)^2 dx_i \tag{3.20}$$

U_{ghi} et U_{gli} sont les énergies gravitationnelles respectives du moyeu i et de la liaison i :

$$\begin{aligned} U_{ghi} &= -m_{hi} g_0^{\,T} r_i \\ U_{gli} &= -g_0^{\,T} \int_0^{li} \rho_i(x_i) P_i(x_i) dx_i \end{aligned} \tag{3.21}$$

U_{gp} est l'énergie gravitationnelle de la charge :

$U_{gp} = -m_p g_0^{\,T} r_{n+1}$

ou g_0 est le vecteur d 'accélérations gravitationnelle .

III.3 Formes des modes assumés

Les liaisons sont assimilées à des lames d'Euler-Bernoulli de densité uniforme ρ_i et de rigidité constante à la flexion $(EI)_i$, avec la déformation $y_i(x_i,t)$ satisfaisant l'équation différentielle à dérivées partielles suivante [2] :

$$(EI)_i \frac{\partial^4 y_i(x_i,t)}{\partial x_i^{\,4}} + \rho_i \frac{\partial^2 y_i(x_i,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{i=1,…,n} \qquad (3.23)$$

Pour résoudre cette équation, des conditions aux limites propres doivent être imposées à la base et à l'extrémité de chaque liaison [2] .

Il est raisonnable de supposer que l'inertie d'une liaison de poids faible, est petite en la comparant à celle du moyeu [2].

En supposant q'une liaison en flexion est serrée à la base d'ou on a :

$$\begin{aligned} y_i(0,t) &= 0 \\ y_i^{'}(0,t) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{i=1,…,n} \qquad (3.24)$$

Pour le reste des conditions aux limites il est supposé que l'extrémité de la liaison est libre des contraintes dynamiques; ceci est du à la prise en compte des masses et des inerties qui peuvent varier avec le temps ou peuvent être inconnues [2].

Cependant il est plus correct de considérer les conditions aux limites des masses, représentant les équilibres des moments et des forces de cisaillement :

$$(EI)_i \left.\frac{\partial^2 y_i(x_i,t)}{\partial x_i^{\,2}}\right|_{x_i = l_i} = -J_{li}\frac{d^2}{dt^2}\left(\left.\frac{\partial y_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right|_{x_i = l_i}\right) - MD_i \frac{d^2}{dt^2}\left(y_i(x_i,t)\big|_{x_i = l_i}\right) \qquad (3.25)$$

$$(EI)_i \left.\frac{\partial^3 y_i(x_i,t)}{\partial x_i^{\,3}}\right|_{x_i = l_i} = M_{li}\frac{d^2}{dt^2}\left(y_i(x_i,t)\big|_{x_i = l_i}\right) + MD_i \frac{d^2}{dt^2}\left(\left.\frac{\partial y_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right|_{x_i = l_i}\right) \qquad (3.26)$$

i=1,…n

Où M_{li} et J_{li} sont les masses et les moments d'inertie actuels à l'extrémité de la liaison i ; MD_i est assimilée à la contribution des masses des liaisons distantes, non situées à l'extrémité de la liaison i; pondérés par les distances relatives à l'axe $\hat{Y}_i$ (axe de cisaillement à l'extrémité de la liaison i) [2].

Ces contributions ne sont pas souvent inclues dans l'analyse des formes des modes [2].

Employant la technique des modes assumés, on peut avoir un modèle de dimension finie (d'ordre m_i) pour la flexibilité d'une liaison .

Exploitant le principe de séparation entre le temps et l'espace pour les solutions de l'équation (3.23) la déflection d'une liaison peut être exprimée comme suit [2] :

$$y_i(x_i,t) = \sum_{j=1}^{mi} \Phi_{ij}(x_i)\delta_{ij}(t) \tag{3.27}$$

Où $\delta_{ij}(t)$ sont des variables temporelles associées à des modes de formes assumés $\Phi_{ij}(x_i)$ de la liaison i .

Alors chaque terme dans la solution générale de l'équation (3.23) peut être exprimé par le produit d'une harmonique temporelle de la forme :

$$\delta_{ij}(t) = \exp(j\omega_{ij}t) \tag{3.28}$$

Et d'une fonction propre spatiale de la forme :

$$\Phi_{ij}(x_i) = C_{1,ij}\sin(\beta_{ij}x_i) + C_{2,ij}\cos(\beta_{ij}x_i) + C_{3,ij}\sinh(\beta_{ij}x_i) + C_{4,ij}\cosh(\beta_{ij}x_i) \tag{3.29}$$

Dans l'équation (3.28), ω_{ij} représente la fréquence angulaire naturelle d'ordre j du problème de la valeur propre de la liaison i; et dans l'équation (3.29) :

$$\beta_{ij}^{\ 4} = \frac{\omega_{ij}\rho_i}{(EI)_i}$$

L'application des conditions aux limites permet la détermination des coefficients constants dans l'équation (3.29) [2].

Les conditions de serrage à la base permettent d'avoir les résultats suivants :

$$C_{3,ij} = -C_{1,ij} et C_{4,ij} = -C_{2,ij} \tag{3.30}$$

l'application des conditions des masses à l'extrémité de la liaison conduisent au système homogène ayant la forme suivante :

$$\left[F(\beta_{ij})\right]\begin{bmatrix} C_{1,ij} \\ C_{2,ij} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.31}$$

en égalisant à zéro le déterminant de la matrice $F(\beta_{ij})$ de dimension [2*2], on obtient l'équation des fréquences qui dépends explicitement des valeurs de M_{li}, J_{li} et MD_i.

Les premières racines m_i de cette équation donneront les valeurs positives β_{ij} (et ainsi ω_{ij}) qui seront injectées dans l'équation (3.29), utilisant ces valeurs, les coefficients $C_{1,ij}, C_{2,ij}$ seront déterminés à un facteur d'échelle prés, choisi suivant une normalisation convenable [2].

Les fonctions propres Φ_{ij} résultantes satisfont une condition d'orthogonalité modifiée faisant intervenir $M_{li}, J_{li} et MD_i$, cependant si le bras est composé seulement d'une liaison , $M_{l1} et J_{l1}$ sont directement la masse et le moment d'inertie de la charge; alors que le terme additionnel de l'équation (3.26) disparaît ($MD_1 = 0$) seulement quand la charge est à l'extrémité [2].

Dans une configuration en chaîne cinématique ouverte, pour une liaison i générique intermédiaire, M_{li} est la somme constante de toutes les masses au delà de la liaison i mais J_{li} et MD_i dépendent de la position des liaisons suivantes.

Ceci va alors compliquer l'obtention du modèle et va alourdir les taches de calcul lors d'une exécution en ligne.

Une approximation pratique menant à des conditions aux limites constantes non nulles pour l'extrémité de la liaison est mise au point.

Ainsi une position convenable est de prendre $MD_i = 0$ et de calculer J_{li} pour une configuration fixe du bras.

Dans ce cas il peut être montré que $\det(F(\beta_{ij})) = 0$ conduit à l'équation transcendante suivante[4] .

$$\begin{aligned}
&(1+\cos(\beta_{ij}l_i)\cosh(\beta_{ij}l_i)) \\
&-\frac{M_{li}\beta_{ij}}{\rho_i}(\sin(\beta_{ij}l_i)\cosh(\beta_{ij}l_i)-\cos(\beta_{ij}l_i)\sinh(\beta_{ij}l_i)) \\
&-\frac{J_{li}\beta_{ij}^{\ 3}}{\rho_i}(\sin(\beta_{ij}l_i)\cosh(\beta_{ij}l_i)+\cos(\beta_{ij}l_i)\sinh(\beta_{ij}l_i)) \\
&+\frac{M_{li}J_{li}\beta_{ij}^{\ 4}}{\rho_i^{\ 2}}(1-\cos(\beta_{ij}l_i)\cosh(\beta_{ij}l_i))=0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

III.4 Forme approchée des équations du mouvement

Sur la base de la discrétisation introduite dans la section précédente, le Lagrangien devient une fonction d'un ensemble de N coordonnées généralisées $\{q_i(t)\}$ et le modèle dynamique est obtenu à partir des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}= f_i \qquad \text{i=1 ,…,N} \tag{3.33}$$

Où $\{ f_i\}$ sont les forces généralisées exerçant un travail sur les coordonnées $\{q_i(t)\}$.

En supposant les formes des modes constants, il peut être montré que la dépendance spatiale présente dans le terme de l'énergie cinétique de l'équation (3.15) peut être résolue par l'introduction d'un nombre de paramètres standards caractérisant les propriétés mécaniques des liaisons à densité uniforme [5],[6].

$$m_i = \int_0^{l_i} \rho_i dx_i = \rho_i * l_i \qquad (3.34)$$

$$d_i = \frac{1}{m_i}\int_0^{l_i} \rho_i x_i dx_i = \frac{1}{2} l_i \qquad (3.35)$$

$$J_{oi} = \int_0^{l_i} \rho_i x_i^2 dx_i = \frac{1}{3} m_i l_i^2 \qquad (3.36)$$

$$v_{ij} = \int_0^{l_i} \rho_i \Phi_{ij}(x_i) dx_i \qquad (3.37)$$

$$w_{ij} = \int_0^{l_i} \rho_i \Phi_{ij}(x_i) x_i dx_i \qquad (3.38)$$

$$z_{ijk} = \int_0^{l_i} \rho_i \Phi_{ij}(x_i) \Phi_{ik}(x_i) dx_i \qquad (3.39)$$

$$K_{ijk} = \int_0^{l_i} (EI)_i \Phi_{ij}(x_i) \Phi_{ik}(x_i) dx_i \qquad (3.40)$$

m_i est la masse de la liaison i, d_i est la distance du centre de masse de la liaison i à l'axe de l'articulation i ; J_{oi} est le moment de la liaison i par rapport à l'axe de l'articulation i .

v_{ij} et w_{ij} sont les moments de déformation d'ordre zéro et un du mode j de la liaison i, z_{ijk} est le moment transversal des modes j et k de la liaison i ; K_{ijk} est le coefficient d'élasticité transversale des modes j et k de la liaison i .

les valeurs numériques actuelles de ces paramètres sont calculés hors ligne .

Comme résultat à cette procédure, l'équation du mouvement d'un bras à n liaisons flexibles planes peut être écrit sous une forme approchée .

$$B(q)\ddot{q} + h(q\dot{q}) + Kq = QU \qquad (3.41)$$

où $q = (\theta_1......\theta_n, \delta_{11}......\delta_{1m1}, ..., \delta_{n1}....\delta_{nmn})^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées de dimension N avec $N = n + \sum_{i=1}^{n} m_i$, U est le vecteur de dimension n des couples appliqués par les actionneurs des articulations .

B est la matrice d'inertie symétrique définie positive, h est la matrice de Coriolis et des forces centrifuges, K est la matrice d'élasticité et Q une matrice de pondération des entrées (les couples) ayant la forme $\left[I_{n*n} 0_{n*(n-m)} \right]^T$ du fait de la supposition que les articulations sont serrées.

Les frottements visqueux des joints et l'amortissement structurel des articulations peuvent être ajoutés comme un terme égal à $D\dot{q}$ ou D est une matrice diagonale .

Il est à noter que l'ortho-normalisation des formes des modes implique une simplification convenable dans les blocs diagonaux de la matrice d'inertie relative aux déflections de chaque liaison , grâce aux valeurs particulières atteintes par z_{ijk} dans l'équation (3.39).

La matrice d'élasticité devient diagonale , $(K_1 = K_2 = ... = K_n = 0, K_{n+1} ....K_N \succ 0)$

K_{ijk} étant égal à zéro pour $j \neq k$ dans l'équation (3.40).

L'évaluation des éléments de la matrice de Coriolis h se fait par la méthode des symboles de Christoffel[2].

$$h = \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \qquad (3.42)$$

III.5 Modèle dynamique explicite du bras flexible

On présente maintenant le modèle dynamique explicite de dimension finie d'un bras flexible à deux liaisons (n=2), avec deux formes de modes pour chaque liaison (m1=m2=2); ainsi le vecteur des variables du lagrangien est réduit aux coordonnées

$q = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \delta_{21} \quad \delta_{22}]^T$ donc N=6 .

Comme on l'a déjà cité dans les sections précédentes le processus d'ortho-normalisation des formes des modes est d'une grande importance pour la simplification du modèle.

Dans ce cas, il est montré que les contributions des variables de déflections apportées à l'énergie cinétique sont :

$$\left\{ facteurde\, \dot{\delta}_{i1}^{2} \right\} = z_{i11} \qquad (3.43a)$$

$$\left\{ facteurde 2\, \dot{\delta}_{i1} \dot{\delta}_{i2} \right\} = \left[\Phi_{i1e} \quad \Phi'_{i1e} \right] \begin{bmatrix} ML_i & \frac{1}{2}(MD)_i \\ \frac{1}{2}(MD)_i & Jl_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{i2e} \\ \Phi'_{i2e} \end{bmatrix} + z_{i12} \qquad (3.43b)$$

$$\left\{ facteurde\, \dot{\delta}_{i2}^{2} \right\} = z_{i22} \qquad (3.43c)$$

Où : $\Phi_{ije} = \Phi_{ij}(x_i) \big| x_i = l_i$ et $\Phi_{ije}' = \Phi_{ij}'(x_i) \big| x_i = l_i$ i , j=1,2.

Les équations précédentes sont obtenues par développement des équations (3.15) et (3.16) en utilisant les équations (3.9) et (3.10) prenant en compte le principe de la séparation issu de l'équation (3.27).

Ainsi menant aux expressions en facteurs des termes des dérivées des déflections quadratiques dans lesquels les paramètres définis dans l'équation (3.39) et les coefficients de masses dans la partie droite de l'équation (3.26) peuvent alors être identifiés .

Il a été trouvé pour la liaison 1 que :

$$ML_1 = m_2 + mh_2 + m_p$$

$$JL_1 = Jo_2 + Jh_2 + J_p + m_p l_2^{\,2} \tag{3.44}$$

$$(MD)_1 = (m_2 d_2 + m_p l_2)\cos\theta_2 - \left[(v_{21} + m_p \Phi_{21e)})\delta_{21} + (v_{22} + m_p \Phi_{22e)})\delta_{22}\right]\sin\theta_2$$

Notons dans le cas seulement de deux liaisons que JL_1 est constant, pour plusieurs liaisons JL_1 va devenir une fonction des coordonnées généralisées de la liaison 1 et celles des liaisons suivantes .

Pour la liaison 2 on a :

$$\begin{aligned} Ml_2 &= m_p \\ Jl_2 &= J_p \\ (MD)_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

une normalisation convenable des modes de formes est accomplie en prenant :

$$z_{ijj} = m_i \qquad \text{i , j=1,2} \tag{3.46}$$

ceci implique aussi que les coefficients non nuls, dans la matrice d'élasticité K dépendent des valeurs $\omega_{ij}^{\;2} m_i$, il faut souligner que si les valeurs exactes des conditions aux limites dans l'équation (3.26) autrement dit les expressions obtenues par les équations (3.44) et (3.45) sont utilisées. L'orthogonalité naturelle des modes de formes calculés va rendre nul l'expression $\left\{ facteurde 2\,\dot{\delta}_{i1}\,\dot{\delta}_{i2} \right\}$ pour les deux liaisons .

Concernant la liaison 2, l'utilisation de l'équation (3.45) assure automatiquement une orthogonalité des formes de modes, d'une autre part, l'issue est plus critique pour la liaison 1 parce que les termes non diagonaux $(MD)_1$ varient suivant la configuration du bras .

Ceci implique que les modes de formes qui sont des quantités spatiales vont devenir des fonctions temporelles implicites entrant en contradiction avec le principe de séparation .

En particulier, on peut distinguer que quand la liaison 2 est étendue $(\theta_2 = 0)$, $(MD)_1$ est réduit à $m_2 d_2 + m_2 l_2$.

Quand la liaison 2 fait un angle droit avec la première articulation $(\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2})$, $(MD)_1$ devient $\mp\left[\left(v_{21} + m_p\Phi_{21e}\right)\delta_{21} + \left(v_{22} + m_p\Phi_{22e}\right)\delta_{22}\right]$.

Par conséquent les formes des modes de la première liaison deviennent elles mêmes des fonctions à variables temporelles décrivant la déflection de la deuxième liaison.

Une approximation connue dans le calcul des éléments de la matrice d'inertie pour les structures flexibles est d'évaluer l'énergie cinétique correspondant à une configuration non déformable.

Dans ce cas, ceci est équivalent à négliger le second terme de $(MD)_1$ dans l'équation (3.44), qui est vraiment négligeable par rapport au premier terme ; par conséquent $(MD)_1$ est constant pour une configuration fixe du bras.

Prenant $\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ conduit à $(MD)_1$ =0 et les fréquences propres peuvent être calculées à partir de l'équation (3.32).

Ceci équivaut à l'annulation seulement de la portion du $\left\{ facteurde 2\,\dot{\delta}_{11}\,\dot{\delta}_{12} \right\}$ générée par les termes diagonaux constants autrement dit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11e} & \Phi'_{11e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ML_1 & 0 \\ 0 & Jl_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{12e} \\ \Phi'_{12e} \end{bmatrix} + z_{112} = 0 \qquad (3.47)$$

Qui Conduisent à des termes non diagonaux non nuls dans le bloc relatif de la matrice d'inertie .

Le modèle résultant est mis dans une forme calculable avantageuse, où un ensemble de coefficients apparaît dépendre des paramètres mécaniques du bras.

Une forme approchée des équations dynamiques du bras peut être écrite sous la forme de (n+m) équations différentielles non linéaires du second ordre [1],[2].

$$B(q)\ddot{q} + h\left(q, \dot{q}\right) + g(q) + \begin{bmatrix} F\dot{\theta} \\ K\delta + D\dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.48)$$

Où $B(q)$ est la matrice d'inertie symétrique définie et positive de dimension (n+m)*(n+m), dans notre cas (6*6), dont les coefficients sont [2] :

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{111} + b_{112}\cos\theta_2 + (b_{113}t_1 + b_{114}t_2)\sin\theta_2 \\ B_{12} &= b_{121} + b_{122}\cos\theta_2 + (b_{123}t_1 + b_{124}t_2)\sin\theta_2 \qquad (3.49a) \\ B_{13} &= b_{131} + b_{132}\cos\theta_2 + (b_{133}t_2 + b_{134}\delta_{12})\sin\theta_2 \\ B_{14} &= b_{141} + b_{142}\cos\theta_2 + (b_{143}t_2 + b_{144}\delta_{11})\sin\theta_2 \end{aligned}$$

$$B_{15} = b_{151} + b_{152} \cos\theta_2 + b_{153} t_1 \sin\theta_2$$

$$B_{16} = b_{161} + b_{162} \cos\theta_2 + b_{163} t_1 \sin\theta_2$$

$$B_{22} = b_{221} \quad (3.49b)$$

$$B_{23} = b_{231} + b_{232} \cos\theta_2 + (b_{233} t_2 + b_{234} t_3) \sin\theta_2$$

$$B_{24} = b_{241} + b_{242} \cos\theta_2 + (b_{243} t_2 + b_{244} t_3) \sin\theta_2$$

$$B_{25} = b_{251}$$

$$B_{26} = b_{261}$$

$$B_{33} = b_{331} + b_{332} \cos\theta_2 + b_{333} t_2 \sin\theta_2 \quad (3.49c)$$

$$B_{34} = b_{341} + b_{342} \cos\theta_2 + b_{343} t_2 \sin\theta_2$$

$$B_{35} = b_{351} + b_{352} \cos\theta_2 + b_{353} t_3 \sin\theta_2$$

$$B_{36} = b_{361} + b_{362} \cos\theta_2 + b_{363} t_3 \sin\theta_2$$

$$B_{44} = b_{441} + b_{442} \cos\theta_2 + b_{443} t_2 \sin\theta_2 \quad (3.49d)$$

$$B_{45} = b_{451} + b_{452} \cos\theta_2 + b_{453} t_3 \sin\theta_2$$

$$B_{46} = b_{461} + b_{462} \cos\theta_2 + b_{463} t_3 \sin\theta_2$$

$$B_{55} = b_{551} \quad (3.49e)$$

$$B_{56} = b_{561}$$

$$B_{66} = b_{661} \quad (3.49f)$$

$$t_1 = t_{11}\delta_{11} + t_{12}\delta_{12} \quad (3.50)$$

$$t_2 = t_{21}\delta_{21} + t_{22}\delta_{22}$$

$$t_3 = t_{31}\delta_{31} + t_{32}\delta_{32}$$

On retrouve les expressions des différents coefficients dans la partie annexes .

notons que les contributions des déflections à l'inertie du système autrement dit les termes contenant t_i et δ_{1j} apparaissent toujours multipliés par $\sin\theta_2$, ceci vient de la supposition initiale que la déformation est purement transversale à l'axe de la liaison [2].

Ayant obtenu l'expression de la matrice d'inertie les composantes de la matrice de Coriolis h sont évalués en utilisant la formule de l'équation (3.42) [2].

$$h_1 = \begin{bmatrix} \left(h_{101}\,\dot{\theta}_2 + h_{102}\,\dot{\delta}_{11} + h_{103}\,\dot{\delta}_{12} + h_{104}\,\dot{\delta}_{21} + h_{105}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\theta}_1 \\ + \left(h_{106}\,\dot{\theta}_2 + h_{107}\,\dot{\delta}_{11} + h_{108}\,\dot{\delta}_{12} + h_{109}\,\dot{\delta}_{21} + h_{110}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\theta}_2 \\ + \left(h_{111}\,\dot{\delta}_{21} + h_{112}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\delta}_{11} + \left(h_{113}\,\dot{\delta}_{21} + h_{114}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\delta}_{12} \end{bmatrix} \sin\theta_2 \tag{3.51a}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(h_{115}\,\dot{\theta}_1 + h_{116}\,\dot{\theta}_2 + h_{117}\,\dot{\delta}_{21} + h_{118}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_1 \\ + \left(h_{119}\,\dot{\theta}_1 + h_{120}\,\dot{\theta}_2 + h_{121}\,\dot{\delta}_{21} + h_{122}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_2 + h_{123}\delta_{12}\,\dot{\delta}_{11} + h_{122}\,\delta_{11}\dot{\delta}_{12} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

$$h_2 = \left(h_{201}\,\dot{\theta}_1 + h_{202}\,\dot{\delta}_{11} + h_{203}\,\dot{\delta}_{12} \right)\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \left(h_{204}\,\dot{\theta}_1 + h_{205}\,\dot{\delta}_{21} + h_{206}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_1 + \left(h_{207}\,\dot{\theta}_1 + h_{208}\,\dot{\delta}_{11} + h_{209}\,\dot{\delta}_{12} \right) t_2 \\ + h_{210}\delta_{12}\,\dot{\delta}_{11} + h_{211}\delta_{11}\,\dot{\delta}_{12} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ + \left[\left(h_{212}\,\dot{\delta}_{11} + h_{213}\,\dot{\delta}_{12} \right) t_2 + \left(h_{214}\,\dot{\delta}_{21} + h_{215}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_3 \right] \dot{\delta}_{11} \\ + \left[h_{216}\,\dot{\delta}_{12}\, t_2 + \left(h_{217}\,\dot{\delta}_{21} + h_{218}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_3 \right] \dot{\delta}_{12} \end{array} \right\} \cos\theta_2 \tag{3.51b}$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} \left(h_{301}\,\dot{\theta}_1 + h_{302}\,\dot{\theta}_2 + h_{303}\,\dot{\delta}_{12} + h_{304}\,\dot{\delta}_{21} + h_{305}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\theta}_1 \\ + \left(h_{306}\,\dot{\theta}_2 + h_{307}\,\dot{\delta}_{11} + h_{308}\,\dot{\delta}_{12} + h_{309}\,\dot{\delta}_{21} + h_{310}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\theta}_2 \\ + \left(h_{311}\,\dot{\delta}_{21} + h_{312}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\delta}_{11} + \left(h_{313}\,\dot{\delta}_{21} + h_{314}\,\dot{\delta}_{22} \right)\dot{\delta}_{12} \end{bmatrix} \sin\theta_2 \tag{3.51c}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(h_{315}\,\dot{\theta}_1 + h_{316}\,\dot{\theta}_2 + h_{317}\,\dot{\delta}_{11} + h_{318}\,\dot{\delta}_{12} \right) t_2 \\ + \left(h_{319}\,\dot{\theta}_2 + h_{320}\,\dot{\delta}_{21} + h_{321}\,\dot{\delta}_{22} \right) t_3 + h_{322}\delta_{12}\,\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

$$h_4=\begin{bmatrix}\left(h_{401}\,\dot{\theta}_1+h_{402}\,\dot{\theta}_2+h_{403}\,\dot{\delta}_{11}+h_{404}\,\dot{\delta}_{21}+h_{405}\,\dot{\delta}_{22}\right)\dot{\theta}_1\\+\left(h_{406}\,\dot{\theta}_2+h_{407}\,\dot{\delta}_{11}+h_{408}\,\dot{\delta}_{12}+h_{409}\,\dot{\delta}_{21}+h_{410}\,\dot{\delta}_{22}\right)\dot{\theta}_2\\+\left(h_{411}\,\dot{\delta}_{21}+h_{412}\,\dot{\delta}_{22}\right)\dot{\delta}_{12}+\left(h_{413}\,\dot{\delta}_{21}+h_{414}\,\dot{\delta}_{22}\right)\dot{\delta}_{12}\end{bmatrix}\sin\theta_2 \tag{3.51d}$$

$$+\begin{bmatrix}\left(h_{415}\,\dot{\theta}_1+h_{416}\,\dot{\theta}_2+h_{417}\,\dot{\delta}_{11}+h_{418}\,\dot{\delta}_{12}\right)t_2\\+\left(h_{419}\,\dot{\theta}_2+h_{420}\,\dot{\delta}_{21}+h_{421}\,\dot{\delta}_{22}\right)t_3+h_{422}\delta_{12}\,\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$h_5=\left(h_{501}\,\dot{\theta}_1+h_{502}\,\dot{\delta}_{11}+h_{503}\,\dot{\delta}_{12}\right)\dot{\theta}_1\sin\theta_2$$
$$+\left(h_{504}t_1\,\dot{\theta}_1+\left(h_{505}\,\dot{\delta}_{11}+h_{506}\,\dot{\delta}_{12}\right)t_3\right)\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \tag{3.51e}$$

$$h_6=\left(h_{601}\,\dot{\theta}_1+h_{602}\,\dot{\delta}_{11}+h_{603}\,\dot{\delta}_{12}\right)\dot{\theta}_1\sin\theta_2$$
$$+\left(h_{604}t_1\,\dot{\theta}_1+\left(h_{605}\,\dot{\delta}_{11}+h_{606}\,\dot{\delta}_{12}\right)t_3\right)\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \tag{3.51f}$$

Les expressions des coefficients se trouvent dans la partie annexes.

Concernant la contribution de la gravité, un vecteur de dimension (n+m)*1 issu des forces de gravité $g=\left(\frac{\partial U_g}{\partial q}\right)^T$ peut être décomposé comme suit [7] :

$$g(q)=\begin{bmatrix}g_\theta(\theta,\delta)\\g_\delta(\theta)\end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$g_\theta=[g_1 \quad g_2]^T$ et $g_\delta=[g_3 \quad g_4 \quad g_5 \quad g_6]^T$

$$g_1=g_{11}\cos\theta_1+(g_{12}\delta_{11}+g_{13}\delta_{12})\sin\theta_1+g_{14}\cos\theta_1\cos\theta_2$$
$$+(g_{15}\delta_{11}+g_{16}\delta_{12}+g_{17}\delta_{21}+g_{18}\delta_{22})\sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{3.53a}$$

$$g_2=g_{21}\cos\theta_1\cos\theta_2+(g_{22}\delta_{11}+g_{23}\delta_{12}+g_{24}\delta_{21}+g_{25}\delta_{22})\sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{3.53b}$$

$$g_3=g_{31}\cos\theta_1+g_{32}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.53c}$$

$$g_4=g_{41}\cos\theta_1+g_{42}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.53d}$$

$$g_5=g_{51}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.53e}$$

$$g_6=g_{61}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{3.53f}$$

Les expressions des coefficients se trouvent dans la partie annexes .

La matrice d'élasticité est diagonale ayant la forme suivante :

$$K=diag\left\{0 \quad 0 \quad \omega_{11}{}^2m_1 \quad \omega_{12}{}^2m_1 \quad \omega_{21}{}^2m_2 \quad \omega_{22}{}^2m_2\right\} \tag{3.54}$$

Où ω_{ij} est la pulsation angulaire naturelle j de la liaison i et m_i la masse de la liaison i .

La matrice de l'amortissement structurel et du frottement visqueux :

$$D = diag\{ f_1 \quad f_2 \quad d_{11} \quad d_{12} \quad d_{21} \quad d_{22} \} \tag{3.55}$$

f_i sont les valeurs du frottement visqueux supposés constant dans notre cas .

les coefficients de l'amortissement structurel sont liés à ceux de la matrice élastique par : $d_{ij} = 0.1\sqrt{k_{ij}}$ i,j=1,2

Qui correspondent à un amortissement interne relativement petit des modes des liaisons [7].

III.6 conclusion

Dans ce chapitre, on a essayé de donner un aperçu sur une des méthodes utilisées dans l'élaboration des modèles cinématiques et dynamiques des bras flexibles et ceci afin de pouvoir faire des études de simulations concernant quelques commandes appliquées à ces types de robots manipulateurs.

LES RESEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS (RNA)

IV.1 Introduction

IV.1.1 Les neurones naturels

Ce sont des cellules qui composent presque la totalité du système nerveux central et sont environ au nombre d'une centaine de milliards.

Chaque neurone reçoit des influx nerveux (signaux) à travers ses dendrites (récepteurs), les intègre pour former un nouvel influx nerveux qu'il transmet à un neurone voisin par le biais de son axone émetteur [18].

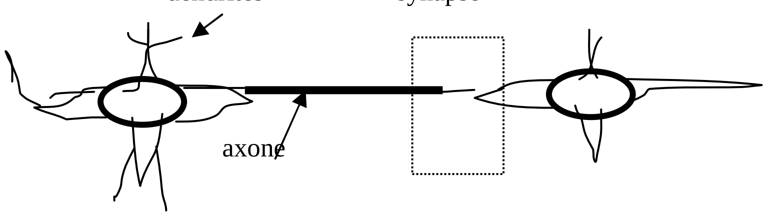


Figure 4.1 : Un corps cellulaire

IV.1.2 Les neurones artificiels

La modélisation des neurones biologiques par des neurones formels a été faite par Mac Culoch et Pitts dans les années quarante .

Le neurone formel reçoit et émet des signaux binaires (0,1), la somme pondérée de toute ses entrées est comparée à un seuil θ; si ce seuil est dépassé le neurone s'active si non il ne transmet aucun signal [18].

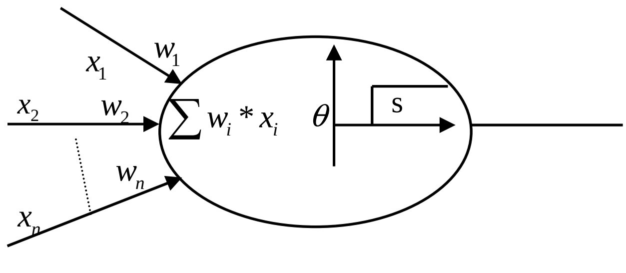


Figure 4.2 : Un neurone artificiel

La somme pondérée des signaux d'entrées appelées (stimuli) constituant l'activation du neurone, se transforme en sortie après son passage par une fonction de seuillage ou de transfert.

$$s = f(w_i x_i) = \begin{cases} 1 & si \quad w_i x_i \succ 0 \\ 0 & si \quad w_i x_i \leq 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Suivant le type de données traitées (réel ou binaire), la fonction réalisée (modélisation, reconnaissance de formes, classification, etc…), il existe plusieurs types de réseaux.

Le réseau dit perceptron est considéré comme le réseau de neurones spécialisé pour la classification [18].

IV.2 Architecture du perceptron multicouches

IV.2.1 Modèle d'un neurone

Le réseau perceptron multicouches est composé d'éléments simples. En premier lieu on va commencer avec un neurone à une entrée[19] :

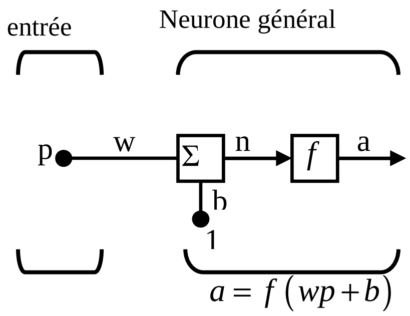


Figure 4.3 : Un neurone à une seule entrée

L'entrée scalaire p est multipliée par le poids w pour former $w * p$, qui est passé à une entrée du sommateur, l'autre entrée est multipliée par un biais b (pris égal à 1) ensuite le tout est passé au sommateur donnant $n = w * p + b$, n est souvent appelé entrée du réseau, n est transmis à une fonction de transfert f qui va produire une sortie scalaire a tel que $a = f\left(wp + b\right)$.

La fonction de transfert est choisie par le concepteur du réseau, w et p sont ajustés suivant certaines règles d'apprentissage, afin que l'appartenance des entrées-sorties du neurone atteignent un but spécifique .

La fonction de transfert peut être une fonction linéaire ou une fonction non linéaire de n, la fonction de transfert la plus utilisée est la fonction Log Sigmoïde, cette fonction prends comme entrée toute valeur appartenant à $\left]-\infty \quad +\infty\right[$, et la sortie appartient à l'intervalle $\left[0 \quad 1\right]$; cette fonction est très utilisée dans les réseaux multicouches [19].

En réalité un neurone a plus qu'une entrée, un neurone possède R entrées comme montré dans la figure suivante :

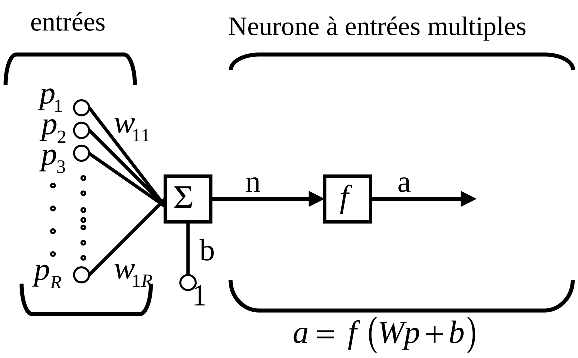


Figure 4.4 : Un neurone à plusieurs entrées

Les entrées p_1, p_2 …. p_R, sont pondérées par les éléments correspondants w_{11}, w_{12} ,…….. w_{1R} de la matrice des poids W .

Le neurone a une entrée biais b sommée aux entrées pondérées pour former l'entrée réseau n

$$n = w_{11} p_1 + w_{12} p_2 + w_{13} p_3 + ...+ w_{1R} p_R \ + b$$

Cette expression peut être écrite sous forme matricielle :

$$n = W * p + b$$

Où la matrice W pour un seul neurone à plusieurs entrées est formée par une seule ligne; la sortie du neurone peut s'écrire comme suit :

$$a = f(Wp + b)$$

W est de dimension $1 \times R$.

Un neurone avec plusieurs entrées n'est pas suffisant, alors on a besoin de plusieurs neurones opérant en parallèle : ce qui est appelé couche [19].

IV.2.2 Réseau à couche unique

Un réseau à couche unique est composé de S neurones en parallèle :

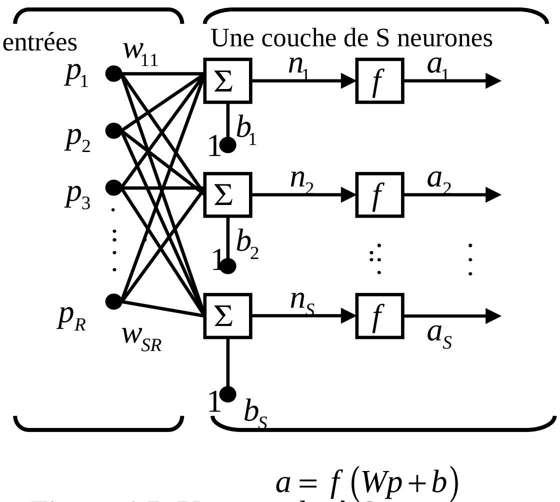


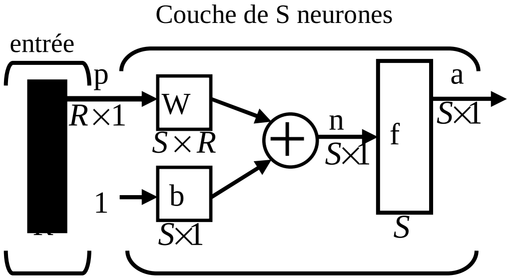
Figure 4.5 Une couche à S neurones

Ayant R entrées, chacune d'elle est connectée à chacun des neurones, alors la matrice des poids est formée de S lignes (R colonnes) .

La couche comporte : la matrice des poids W , les éléments de sommations, le vecteur des biais , les blocs de la fonction de transfert , et le vecteur sortie a .

Remarque : en général il est très communément utilisé $R \neq S$.

Dans la figure suivante est montré une notation matricielle d'un réseau à une seule couche [19] :



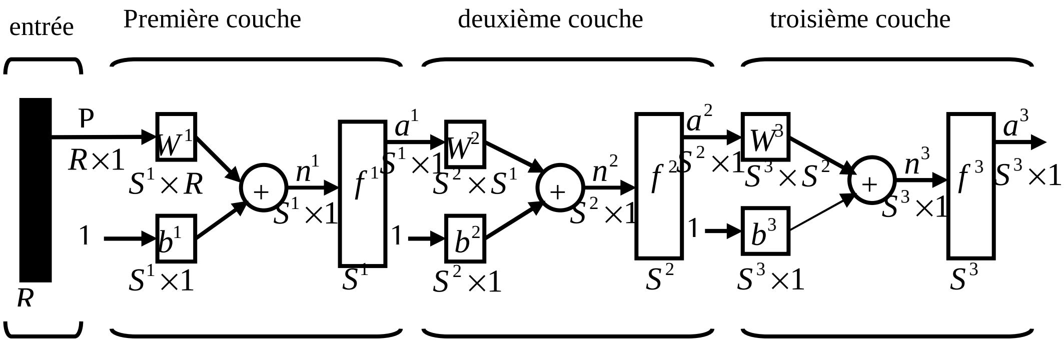
$$a = f\left(Wp + b\right)$$

Figure 4.6 : Notation matricielle d'une couche à S neurones

IV.2.3 Réseaux multicouches

Considérons un réseau de neurones avec plusieurs couches, chaque couche a sa propre matrice W, son propre vecteur biais b, un vecteur d'entrée n et un vecteur de sortie a, on a besoin d'introduire une notation additionnelle pour la distinction entre les couches [19].

La matrice des poids pour la première couche est notée W^1, et celle de la deuxième couche est notée W^2 ; utilisant cette notation pour le réseau à trois couches de le figure suivante :



$$a^1 = f^1\left(W^1 p + b^1\right) \qquad a^2 = f^2\left(W^2 a^1 + b^2\right) \qquad a^3 = f^3\left(W^3 a^2 + b^3\right)$$

$$a^3 = f^3\left(W^3 f^2\left(W^2 f^1\left(W^1 p + b^1\right) + b^2\right) + b^3\right)$$

Figure 4.7 : Notation matricielle d'un réseau à 3 couches

Ce réseau possède R entrées, S^1 neurones dans la première couche, S^2 neurones dans la deuxième couche …..etc. Les différentes couches peuvent avoir des nombres diffèrent de neurones.

Les sorties des couches 1et 2 sont les entrées aux couches 2 et 3 ainsi la couche 2 peut être vue comme un réseau à une couche avec R= S^1 entrée et S= S^2 neurones avec une matrice des poids $S^2 * S^1$, l'entrée à la couche est a^1 et la sortie est a^2, une couche dont la sortie est celle du réseau est appelée couche de sortie les autres couches sont appelées couches cachées [19].

IV.3 L'apprentissage des réseaux de neurones

IV.3.1 L' apprentissage supervisé

Ce type d'apprentissage est utilisé lorsque les entrées et les sorties désirées sont connues, l'ajustement des poids est fait à partir de l'erreur qui est la différence entre la sortie obtenue par le réseau et la sortie désirée, les poids sont ajustés de manière à minimiser un critère de coût, une fois l'apprentissage est effectué, le réseau est apte à accomplir la tache prévue .
La méthode de l'apprentissage supervisé est la rétro propagation (back propagation) .

IV.3.2 L' apprentissage non supervisé

Lorsque les entrées-sorties désirées ne sont pas accessibles ou disponibles, on utilise ce type d'apprentissage. En fait c'est le réseau lui même qui organise les entrées qui lui sont présentées de façon à optimiser un critère de coût donné : cette caractéristique s'appelle propriété d'auto-organisation [19].

IV.3.3 Normalisation des entrées et des sorties

Avant tout apprentissage, il est indispensable de normaliser et de centrer toutes les variables d'entrées, en effet si ces entrées ont des grandeurs très différentes, celles qui sont petites n'ont pas d'influence sur l'apprentissage.
Donc pour chaque vecteur d'entrée x_i on effectue le changement de variable x_{in} et les valeurs de ce dernier sont exprimées entre α *et* β par la relation :

$$x_{in} = a * x_i + b \tag{4.1}$$

$$a = \frac{\gamma - \alpha}{\max x_i - \min x_i}$$

$$b = \gamma - a * \max x_i$$

x_{in} : vecteur d'entrée normalisé .

$\max x_i$ $\min x_i$: représentent les limites physiques du paramètre x_i

VI.3.4 Entraînement des réseaux multicouches

La procédure de sélection des paramètres pour un problème donné est appelée entraînement du réseau, la rétro propagation est une procédure d'entraînement basée sur l'algorithme du gradient .

Comme on a vu pour un réseau multicouches la sortie d'une couche devient l'entrée pour la couche suivante et les équations décrivant cette opération sont :

$$a^{m+1} = f^{m+1}[(w^{m+1} * a^m + b^{m+1})] \text{ pour } m = 0.1.2.3......\&M\text{-}1 \quad (4.2)$$

ou M est le nombre des couches dans le réseau, les neurones de la première couche reçoivent les entrées externes : $a^0 = P$

qui est un point de départ pour l'équation (4.2), les sorties des neurones de la dernière couche sont les sorties du réseau : $a = a^M$ [19].

Indice de performance

L'algorithme de rétro-propagation des réseaux multicouches est une procédure d'optimisation de la descente du gradient, en minimisant un critère de performance qui est la moyenne des carrés de l'erreur.

L'algorithme est fourni avec un ensemble d'exemples du comportement propre du réseau :

$$\{p_1, t_1\}, \quad \{p_2, t_2\} \quad , \quad ......\{p_q, t_q\}$$

p_q est une entrée au réseau et t_q est la sortie cible correspondante, à chaque entrée appliquée au réseau, la sortie est comparée à la cible, l'algorithme doit ajuster les paramètres du réseau dans l'ordre de minimiser la somme des carrés de l'erreur :

$$F(x) = \sum_{q=1}^{Q} e_q^2 = \sum_{q=1}^{Q} (t_q - a_q)^2 \qquad (4.3)$$

Où x est un vecteur contenant tout les poids du réseau et le biais, si le réseau a plusieurs sorties, qui va mener à la généralisation suivante :

$$F(x) = \sum_{q=1}^{Q} e_q^T * e_q = \sum_{q=1}^{Q} (t_q - a_q)^T * (t_q - a_q) \qquad (4.4)$$

utilisant une approximation stochastique, on va remplacer la somme des carrés de l'erreur par l'erreur sur la dernière cible :

$$\hat{F}(x) = (t(k) - a(k))^T * (t(k) - a(k)) = e(k)^T * e(k)$$

où la somme des carrés de l'erreur est remplacée par le carré de l'erreur à l'itération k.

La rapidité de descente de l'algorithme par l'approximation de la moyenne des carrés de l'erreur :

$$W_{i,j}^m(k+1) = W_{i,j}^m(k) - \alpha * \frac{\partial \hat{F}}{\partial W_{i,j}^m} \qquad (4.5)$$

$$b_i^m(k+1) = b_i^m(k) - \alpha * \frac{\partial \hat{F}}{\partial b_i^m} \qquad (4.6)$$

ou α est la vitesse d'apprentissage [19].

Règle de Chain

les équations précédentes peuvent donner des résultats convenables pour un réseau linéaire à couche unique car l'erreur peut être écrite sous une forme de fonction linéaire explicite des poids du réseau mais pour un réseau multicouches, l'erreur n'est pas fonction explicite des poids dans les couches cachées [19].

Pour cela on va recourir à la règle de calcul de Chain pour calculer les expressions des équations (4.5) et (4.6) :

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial W_{i,j}^m} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m} * \frac{\partial n_i^m}{\partial W_{i,j}^m} \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial b_i^m} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m} * \frac{\partial n_i^m}{\partial b_i^m} \qquad (4.8)$$

le second terme dans chacune de ces équations peut être facilement calculé, depuis que l'entrée réseau à la couche m est une fonction explicite des poids et du biais dans cette couche :

$$n_i^m = \sum_{j=1}^{m-1} W_{ij}^m a_j^{m-1} + b_i^m \qquad (4.9)$$

d'où $$\frac{\partial n_i^m}{\partial W_{i,j}^m} = a_j^{m-1} \qquad \frac{\partial n_i^m}{\partial b_i^m} = 1 \qquad (4.10)$$

définissant $$S_i^m = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m} \qquad (4.11)$$

La sensibilité de $\hat{F}$ aux changements dans le ième élément à l'entrée réseau à la couche m les équations (4.7) et (4.8) peuvent être simplifiées :

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial W_{i,j}^m} = S_i^m * a_j^{m-1} \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial b_i^m} = S_i^m \qquad (4.13)$$

on peut maintenant exprimer la rapidité de la descente du gradient de l'algorithme :

$$\begin{aligned} W_{i,j}^m(k+1) &= W_{i,j}^m(k) - \alpha * S_i^m * a_j^{m-1} \\ b_i^m(k+1) &= b_i^m(k) - \alpha * S_i^m \end{aligned} \qquad (4.14)$$

sous forme matricielle on aura :

$$W^m(k+1) = W^m(k) - \alpha * S^m * a^{m-1}$$
$$b^m(k+1) = b^m(k) - \alpha * S^m \qquad (4.15)$$

où les éléments individuels de S^m sont donnés par l'équation (4.11) [19].

La retro propagation des sensibilités

Il nous reste maintenant de calculer les sensibilités S^m qui nécessitent une autre application de la règle de Chain, c'est ce processus qui donne la terme de rétro propagation parce qu'il décrit une relation de récurrence dans laquelle la sensibilité à la couche m est calculée à partir de la sensibilité à la couche m+1 [19] :

$$S^M = -2 * \dot{F}^M(n^M)(t-a)$$

$$S^m = \dot{F}^M * (n^m) * (W^{m+1}) * S^{m+1} \qquad m = M-1, \ldots, 2, 1$$

$$\dot{F}^M(n^m) = \begin{bmatrix} \dot{f}^m(n_1^m) & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \dot{f}^m(n_2^m) & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 \\ . & \ldots & . & . \\ . & \ldots & . & . \\ . & \ldots & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \dot{f}^m(n_{S^m}^m) \end{bmatrix}$$

VI.4 Application des réseaux de neurones dans les systèmes de contrôle

VI.4.1 Les approximateurs de fonctions

On a une certaine fonction qu'on veut approximer, la recherche consiste en l'ajustement des paramètres du réseau tel qu'il produit la même réponse que la fonction inconnue si la même entrée est appliquée aux deux systèmes [19].

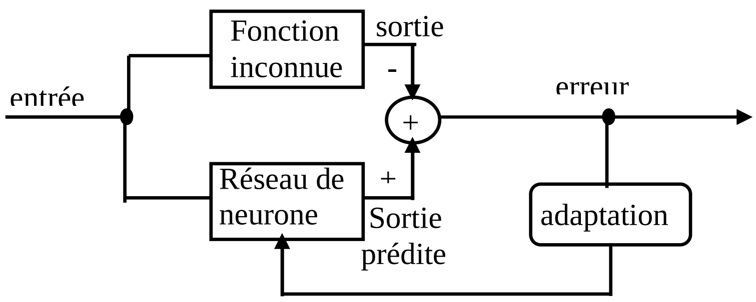


Figure 4.8 : approximation d'une fonction inconnue par les réseaux de neurones artificiels

Dans notre cas d'application la fonction inconnue peut correspondre à un système qu'on veut contrôler ou le réseau de neurone sera dans ce cas le modèle identifié du système.

La fonction inconnue peut aussi représenter l'inverse du système qu'on veut contrôler , dans ce cas le réseau de neurones peut être utilisé pour implémenter le contrôleur .

IV. 5 Conclusion

Ce chapitre donne une revue brève sur le principe de fonctionnement des réseaux de neurones , puisque ces derniers sont d'une grande importance notamment dans les travaux de recherches actuels et ceci dans les différents domaines scientifiques et techniques .

LA COMMANDE D'UN BRAS MANIPULATEUR FLEXIBLE

V.1 Introduction

Le domaine de la commande des manipulateurs peut être divisé en deux parties.

La première partie est la génération des trajectoires qui consiste en la génération d'un chemin dans l'espace articulaire produisant un chemin dans l'espace de la tâche qui est une piste géométrique à travers l'espace de la tâche. Ces trajectoires décrivent le mouvement désiré du manipulateur.

Comme dans la plupart des cas on est préoccupé par le mouvement de l'organe effecteur, les trajectoires sont définies typiquement dans l'espace de la tache et comme la commande agit sur les articulations ; alors on doit recourir à une méthode de planification entre les trajectoires de l'espace de la tâche avec celles de l'espace articulaire.

La deuxième méthode est la commande par couple : elle consiste dans le contrôle des couples articulaires nécessaires à la réalisation d'un mouvement désiré du manipulateur, mais ceci est très compliqué à cause de la haute non linéarité du modèle dynamique du bras manipulateur et des couplages existants entre les différentes liaisons.

A coté de ces commandes conventionnelles, on a introduit la commande intelligente, qui essaye de faire une émulation des capacités de connaissances humaines ainsi que la prise de décision.

La venue de la commande intelligente est inspirée d'une observation sur les humains qui peuvent apprendre et contrôler des systèmes complexes sans l'utilisation d'un modèle ou sans la connaissance des équations qui régissent ce système.

On retrouve au niveau le plus simple que la commande intelligente peut être considérée comme l'une des deux types : les réseaux de neurones et la logique floue.

Généralement les réseaux de neurones ont l'habilité d'apprendre et d'approximer n'importe quelle fonction inconnue, la logique floue permet une prise de décision semblable à celle des humains.

V.2 Commandes des bras flexibles

V.2.1 Commande articulaire

soit un bras manipulateur à deux liaisons flexibles ayant comme équation du modèle dynamique :

$$B(q)\ddot{q}+h\left(q,\dot{q}\right)+g(q)+\begin{bmatrix} F\dot{\theta} \\ K\delta+D\dot{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U \\ 0\end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

dans cette section on présente un contrôleur de type P.D avec une compensation pour la gravité , sans avoir recours à une réaction des coordonnées élastiques [7] .

cette loi de commande s'écrit comme suit :

$$u = K_p\left(\theta_{des} - \theta\right) - K_D\dot{\theta} + g_\theta\left(\theta_{des}, \delta_{des}\right) \qquad (5.2)$$

où K_p et K_D sont des matrices diagonales positives .

puisque la commande est du type point à point alors les dérivées premières et secondes des variables articulaires (angles des articulations et les déflections des liaisons) sont égales à zéro alors à partir de l'équation (5.1) on peut déduire que :

$$\delta = -K^{-1} g_\delta(\theta) \qquad (5.3)$$

alors on peut définir :

$$\delta_{des} = -K^{-1} g_\delta(\theta_{des}) \qquad (5.4)$$

la figure suivante montre comment on a implémenté cette commande :

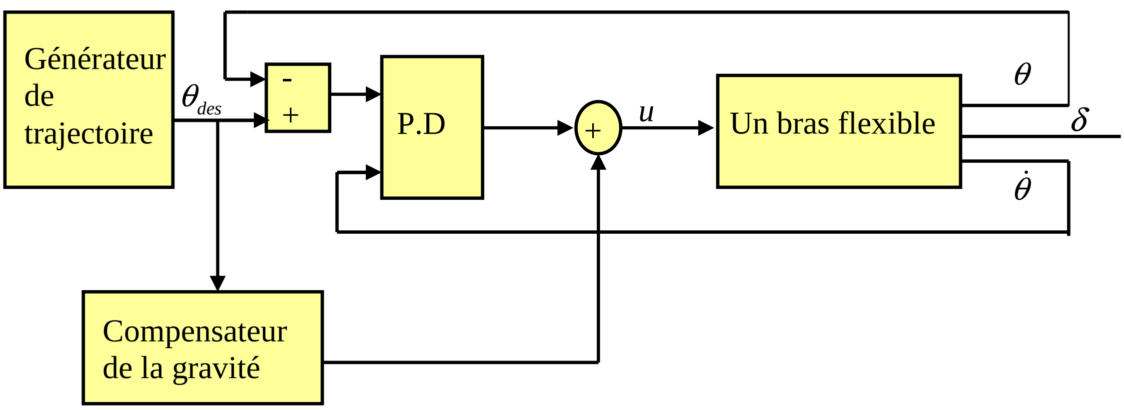


Figure 5.1 : Un régulateur P.D pour un bras flexible

Des essais de simulations ont été faites pour les différentes valeurs de la charge m_p .

Pour plus de détails sur les résultats obtenus il faut voir les figures (5.5) a (5.31) dans la partie des résultats de simulation .

Pour obtenir la position de l'organe effecteur, les sorties θ et δ du système de la figure (5.1) sont injectées dans le modèle cinématique direct du bras flexible voir la figure suivante :

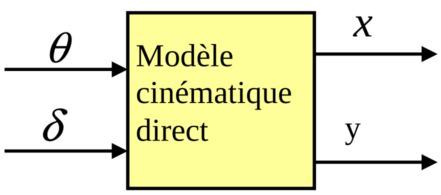


Figure 5.2 : Modèle cinématique direct du bras flexible

On remarque que ce type de commande achève une régulation articulaire mais ne permet pas un bon positionnement de l'organe effecteur, en fait ce système présente une configuration non localisée des actionneurs et des capteurs .

V.2.2. Commande par redéfinition de sortie

Dans le but d'achever une caractéristique à déphasage minimal du système, le concept de la redéfinition de la sortie est utilisée .

Son objectif est de définir une nouvelle sortie permettant au système d'être stable .

Une nouvelle sortie peut être définie en utilisant [8] :

$$y_{redi} = \theta_i + \alpha_i \frac{y_i(x_i, t)}{l_i} \qquad (5.5)$$

Où : $-1 \le \alpha_i \le 1$, en prenant $\alpha = -1$ la sortie devient la position opposée de l'organe effecteur , pour $\alpha = 0$ la sortie devient l'angle articulaire et pour $\alpha = 1$ la sortie est la position angulaire de l'organe effecteur .

D'après [8] , il existe une valeur $\alpha = \alpha_i^* < 1$ tels que les dynamiques internes du système soient stables , et que ces dynamiques deviennent instables pour $\alpha > \alpha_i^*$.

Donc dans ce cas la sortie contrôlée devient très proche de la position actuelle de l'organe effecteur.

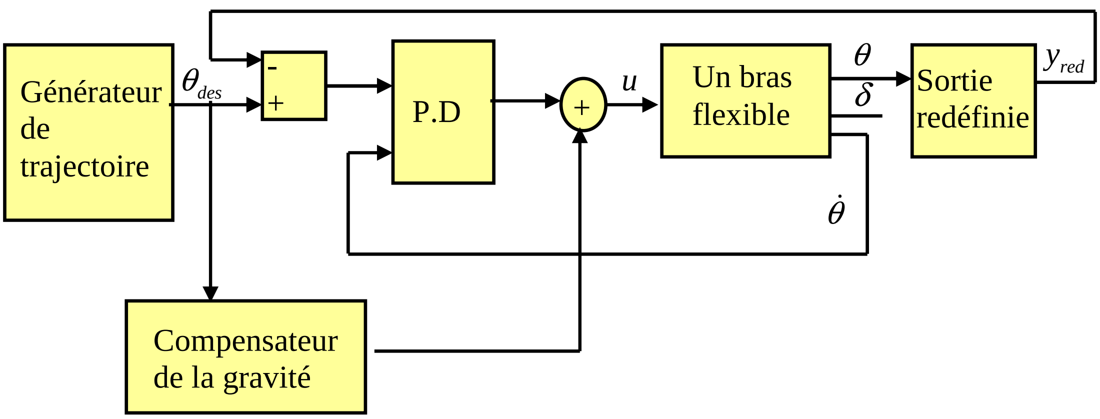


Figure 5.3 : Un contrôleur P.D avec redéfinition de la sortie pour un bras flexible

Des essais de simulations ont été faites pour les différentes valeurs de la charge m_p .

Pour obtenir la position de l'organe effecteur, les sorties θ et δ du système de la figure (5.3) sont injectées dans le modèle cinématique direct du bras flexible, voir la figure (5.2) .

Pour plus de détails sur les résultats obtenus il faut voir les figures (5.32) à(5.58) dans la partie des résultats de simulation .

V.2.3 Commande par planification de trajectoires

La plupart des travaux de recherches sur les manipulateurs à liaisons flexibles se concentrent sur la suppression des déflections des liaisons en contrôlant dans un même temps les angles articulaires pour atteindre leur valeurs désirées [9] .

Ceci peut causer une erreur dans la position de l'organe effecteur et aussi que la suppression des vibrations n'est pas parfaite du fait que les actionneurs sont localisés au niveau articulaire et les déflections ne peuvent pas être contrôlées directement, ce qui fait que la suppression des vibrations n'est pas parfaite .

Une approche possible et de laisser les déflections comme elles le sont , et de calculer des nouveaux angles articulaires de telle sorte que l'organe effecteur atteint la positon désirée dans l'espace opérationnel .

Pour cela un schéma basé sur les réseaux de neurones est appliqué afin de modifier les trajectoires articulaires de références du bras manipulateur à deux liaisons flexibles .

Ce type de commande prévoit un réseau de neurone qui opère en ligne pour calculer les changements incrémentaux dans les valeurs des commandes angulaires des articulations alors que dans la boucle de commande un contrôleur de type PD agit directement sur le manipulateur comme on le voit dans la figure suivante .

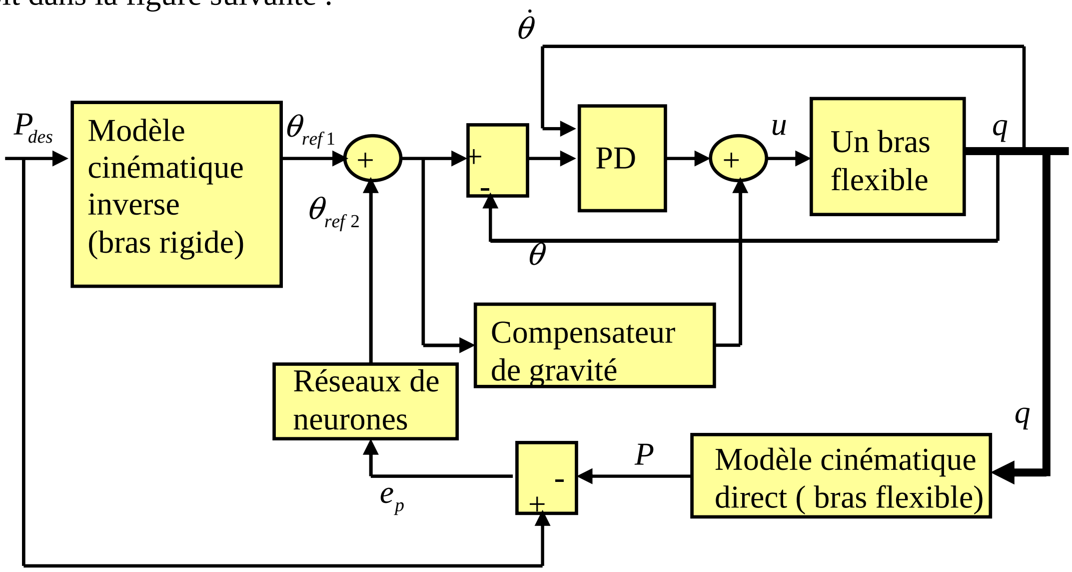


Figure 5.4 : Un contrôleur P.D avec planification de trajectoire pour un bras flexible

V.3 Résultats de simulations

les paramètres physiques du robot utilisé sont ceux décrit dans l'annexe A ils ont été tiré à partir des travaux de [7], la génération des trajectoires articulaire est prise de [10] .

V.3.1 Résultats de simulations pour la commande articulaire

le générateur de trajectoire génère les angles suivants :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \dfrac{-\pi}{1.9} \\ \theta_2(0) = 0.05 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} \theta_1(f) = \dfrac{-\pi}{4} \\ \theta_2(f) = \dfrac{\pi}{18} \end{cases}$$

les matrices de gain du contrôleur P.D sont :

$$K_p = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 350 \end{bmatrix} \text{ et } K_D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$$

les angles initiaux du robot sont

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \dfrac{-\pi}{2} \\ \theta_2(0) = 0 \end{cases}$$

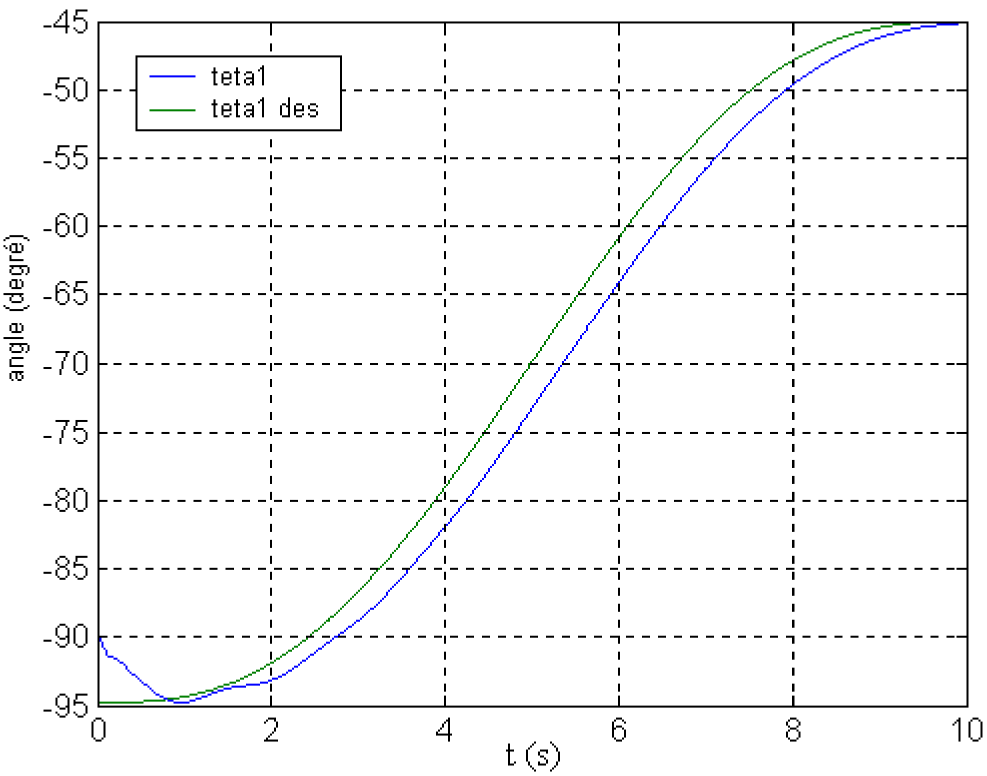


Figure 5.5: position de l'articualtion 1 (mp=0)

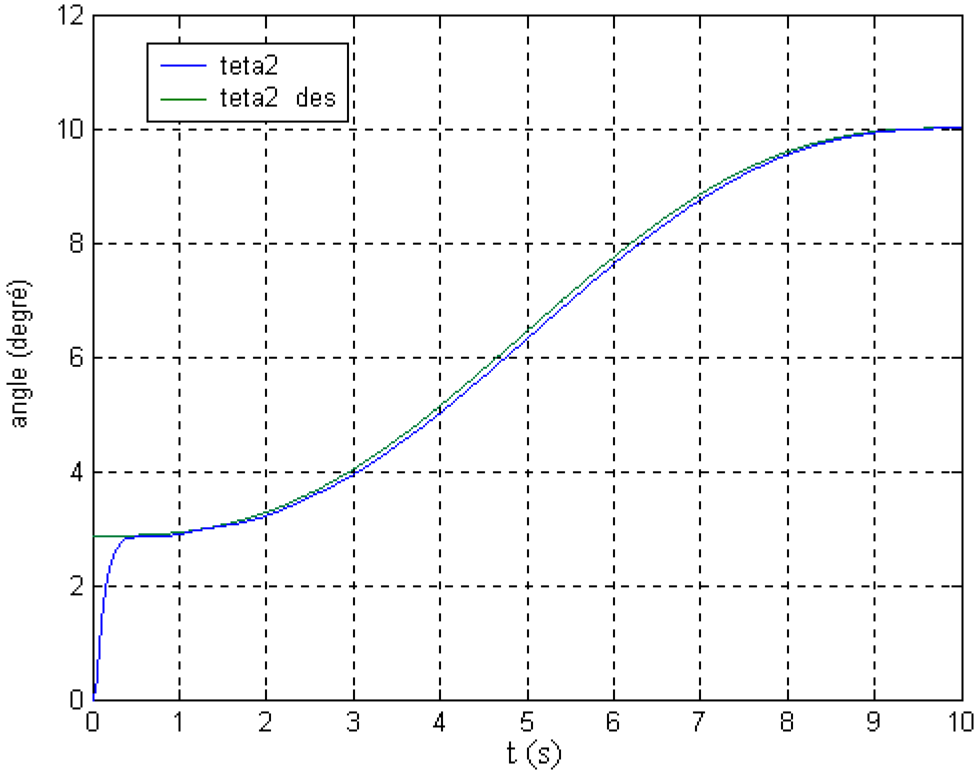


Figure 5.6 : position de l'articulation 2 (mp=0)

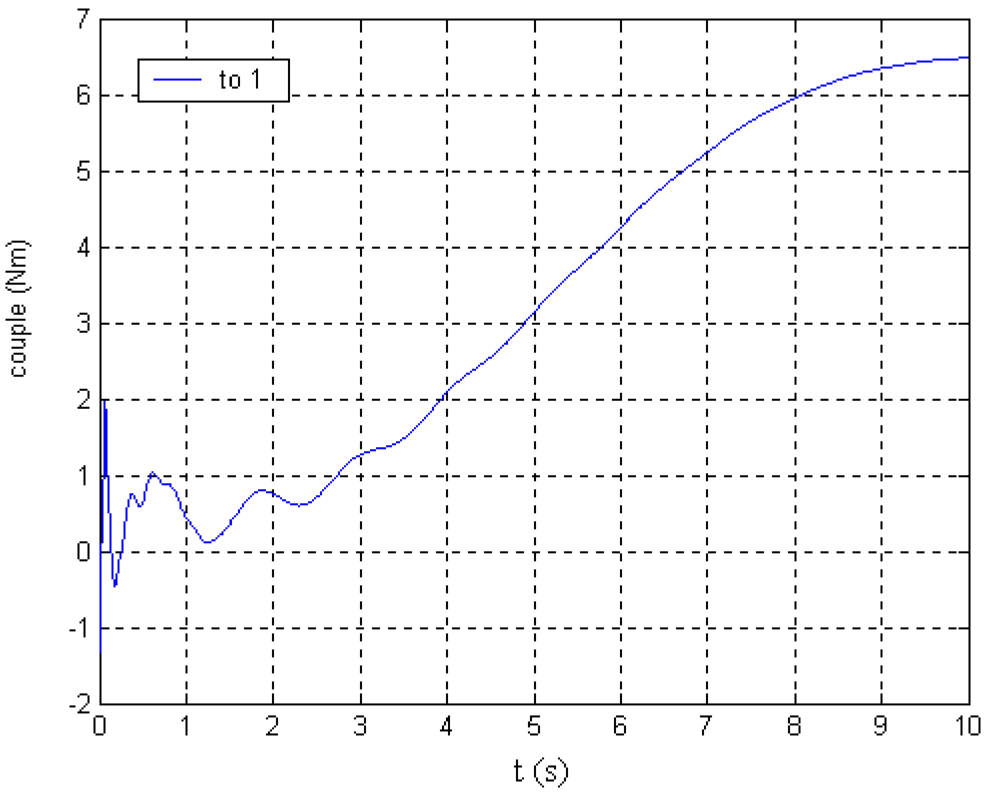


Figure 5.7 : le couple de l'articulation 1 (mp=0)

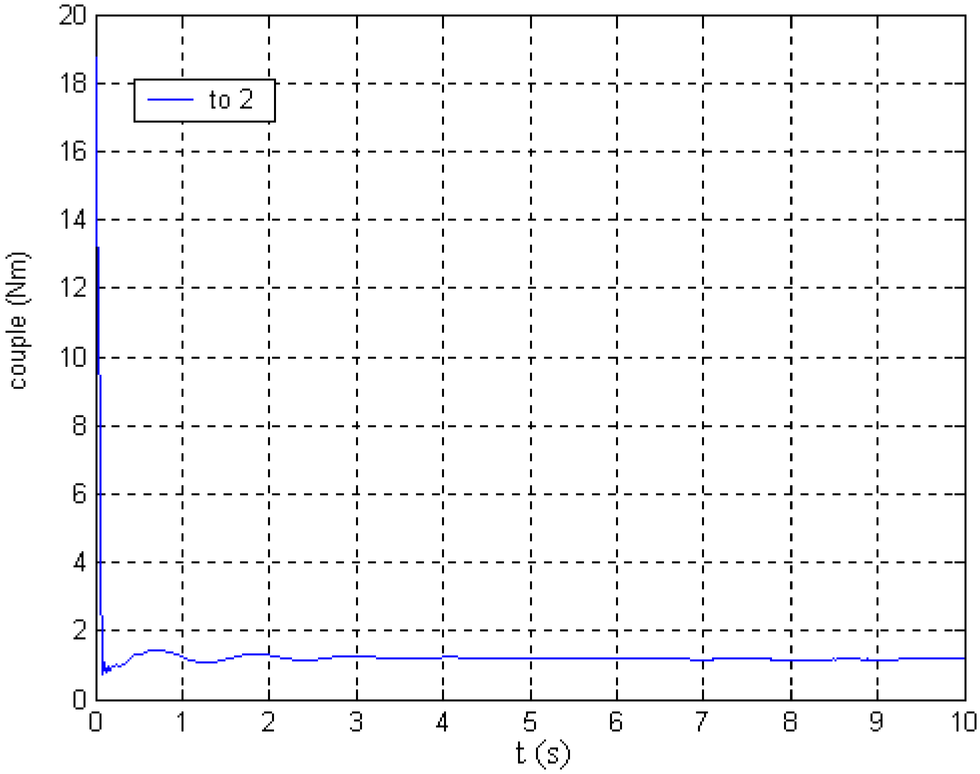


Figure 5.8 : le couple de l'articulation 2 (mp=0)

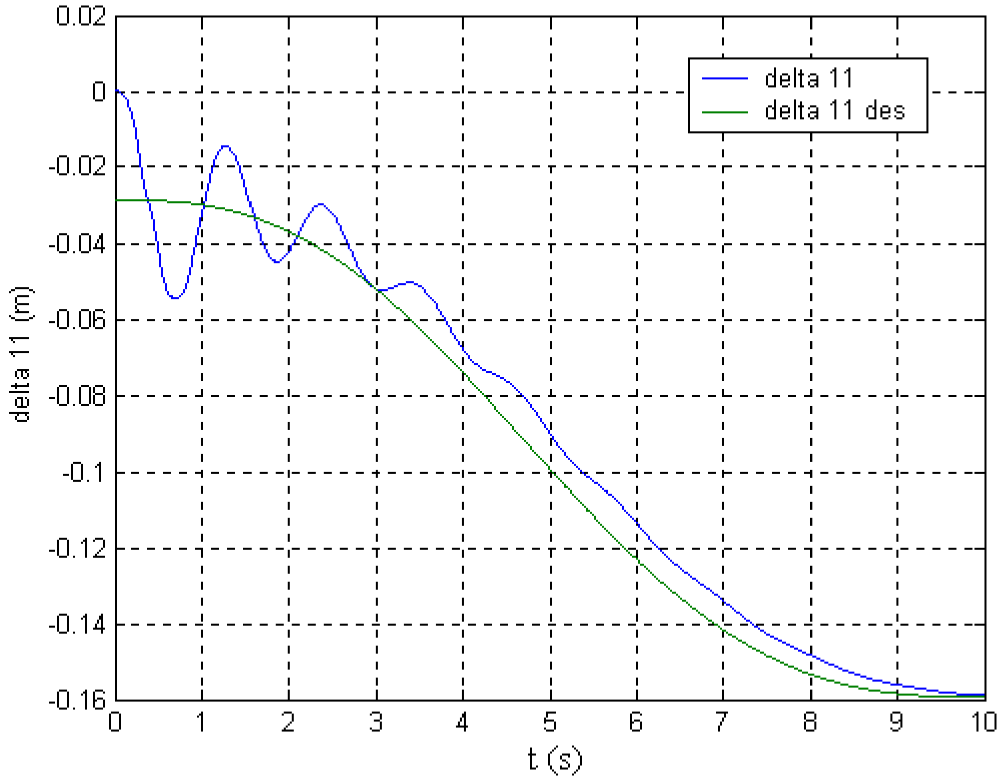


Figure 5.9 : les premiers modes de la première liaison (mp=0)

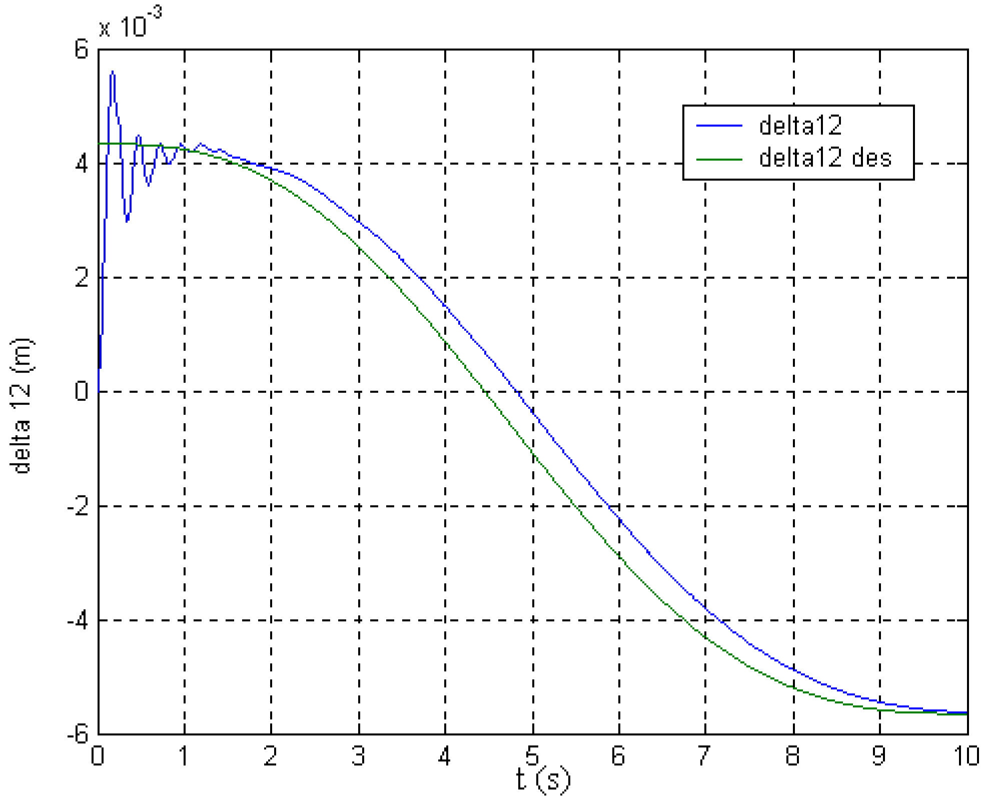


Figure 5.10 : les deuxièmes modes de la première liaison (mp=0)

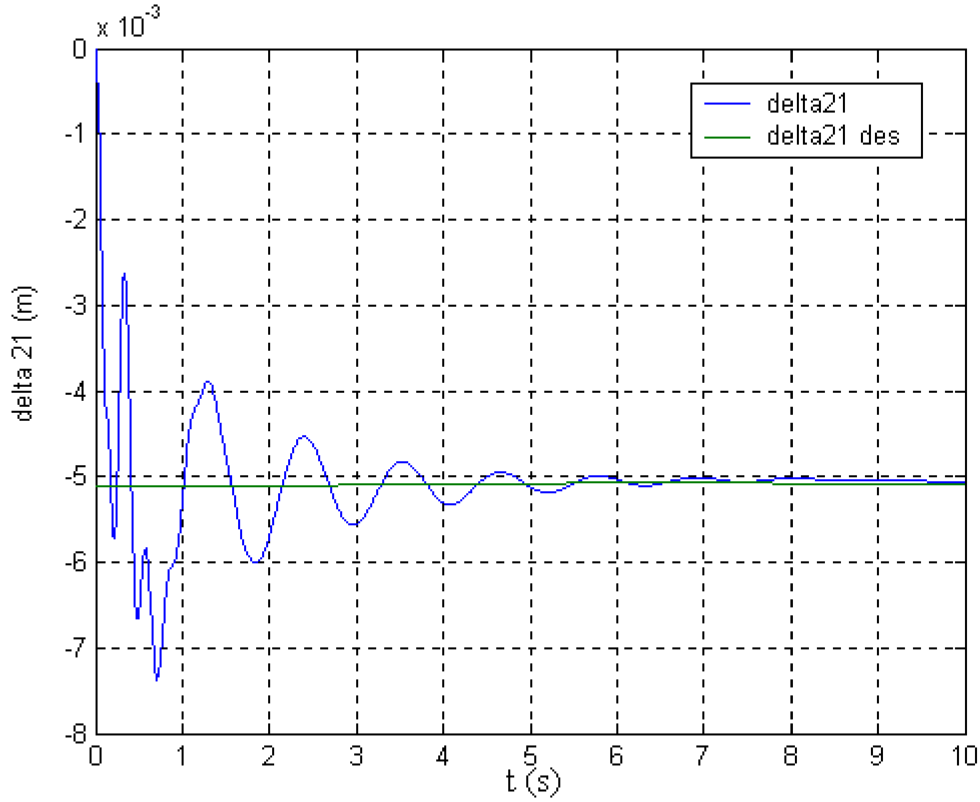


Figure 5.11 : les premiers modes de la deuxieme liaison (mp=0)

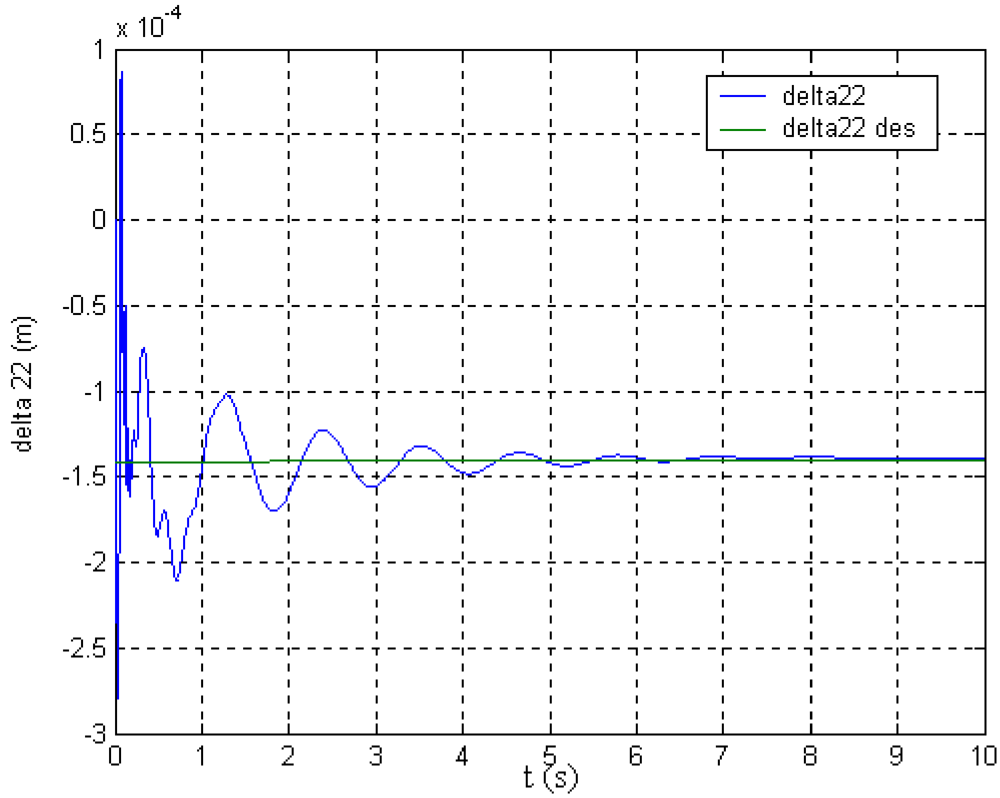


Figure 5.12 : les deuxiemes modes de deuxieme liaison (mp=0)

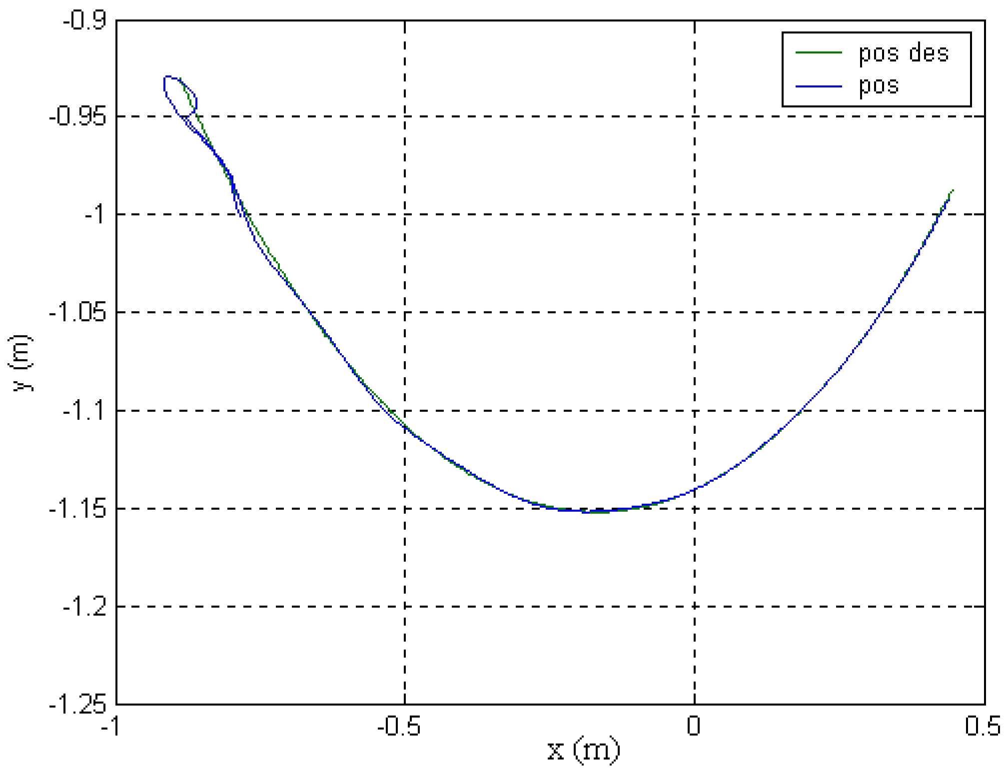


Figure 5.13 : trajectoires de l'organe effecteur (mp=0)

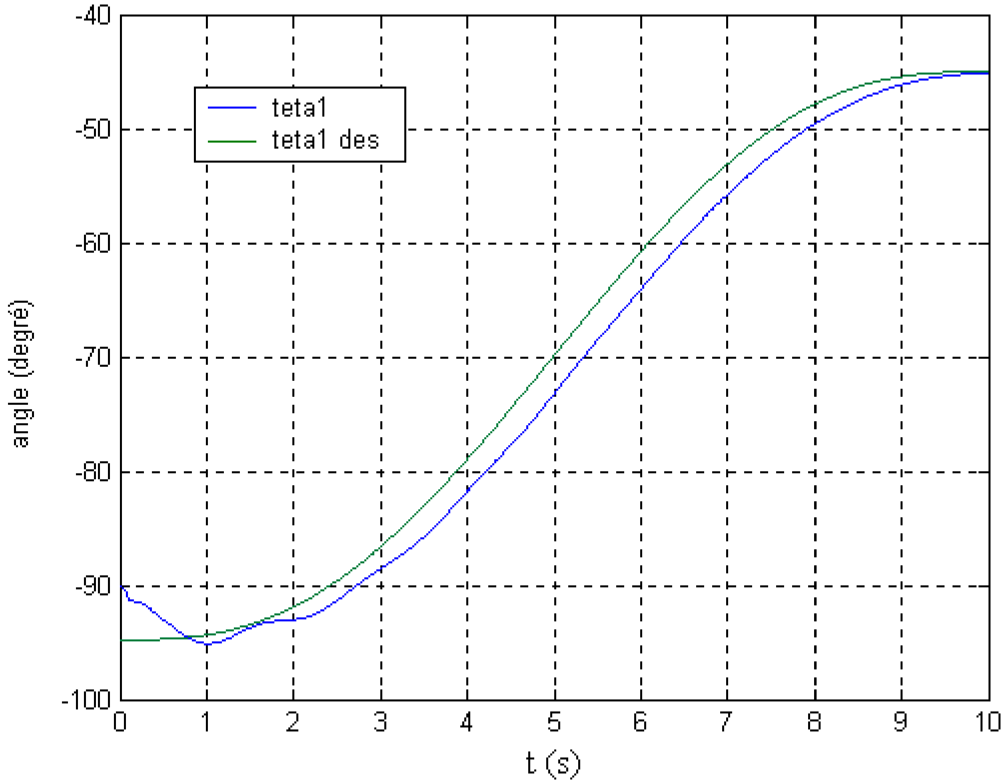


Figure 5.14 : position de l'articulation 1 (mp=0.1)

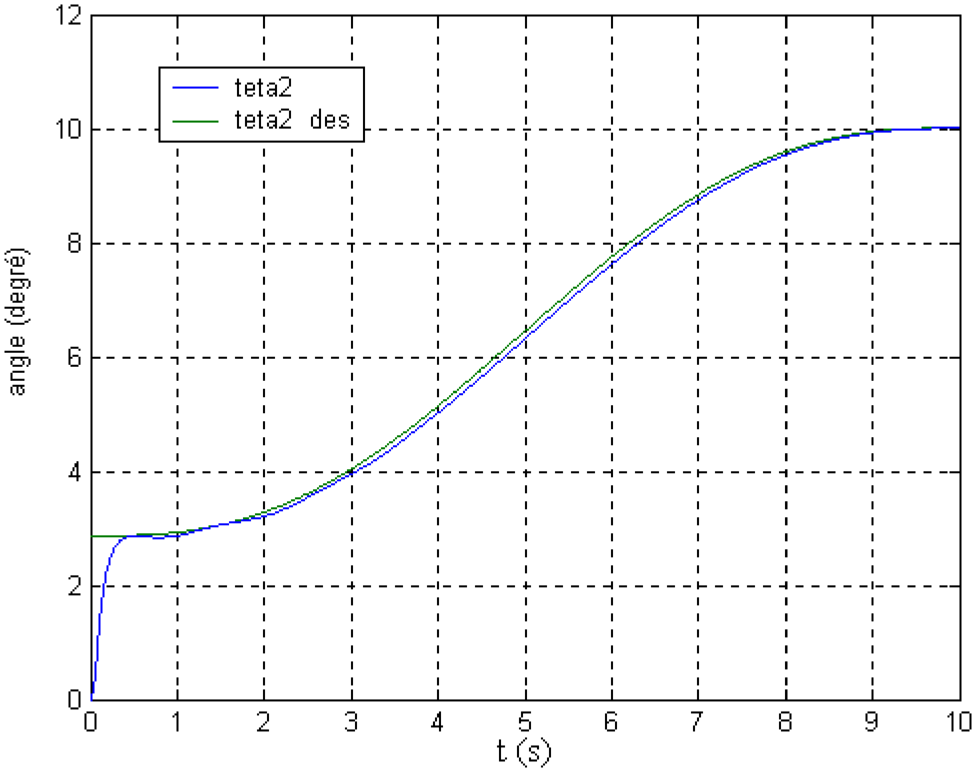


Figure 5.15 : position de l'articulation 2 (mp=0.1)

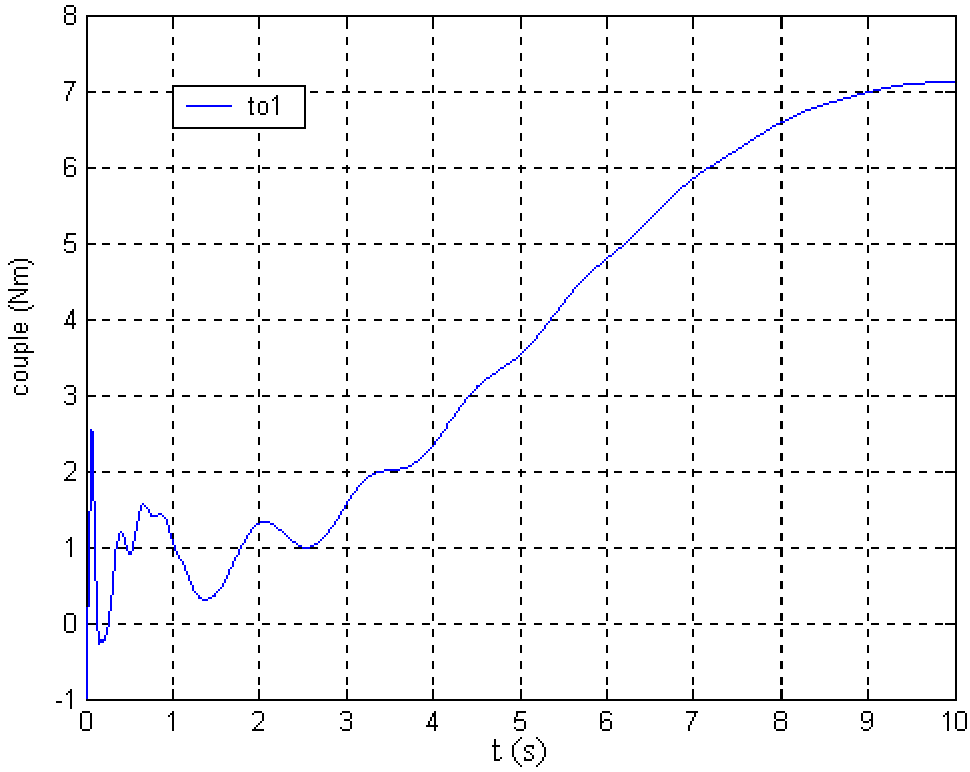


Figure 5.16 : le couple de l'articulation 1 (mp=0.1)

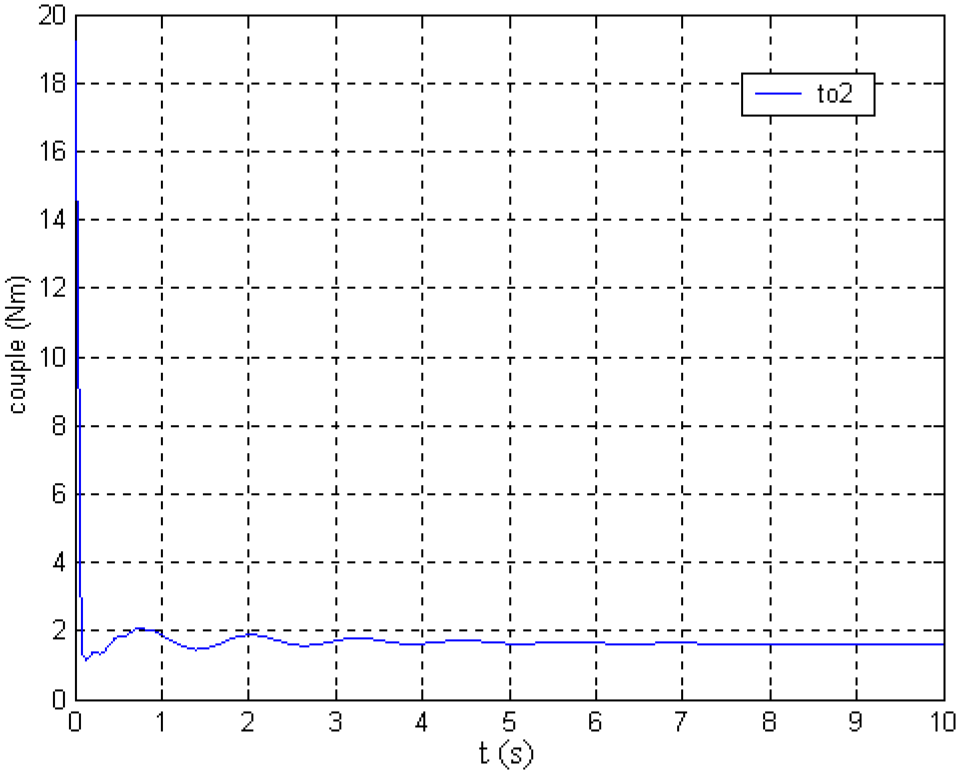


Figure 5.17 : couple de l''articulation 2 (mp=0.1)

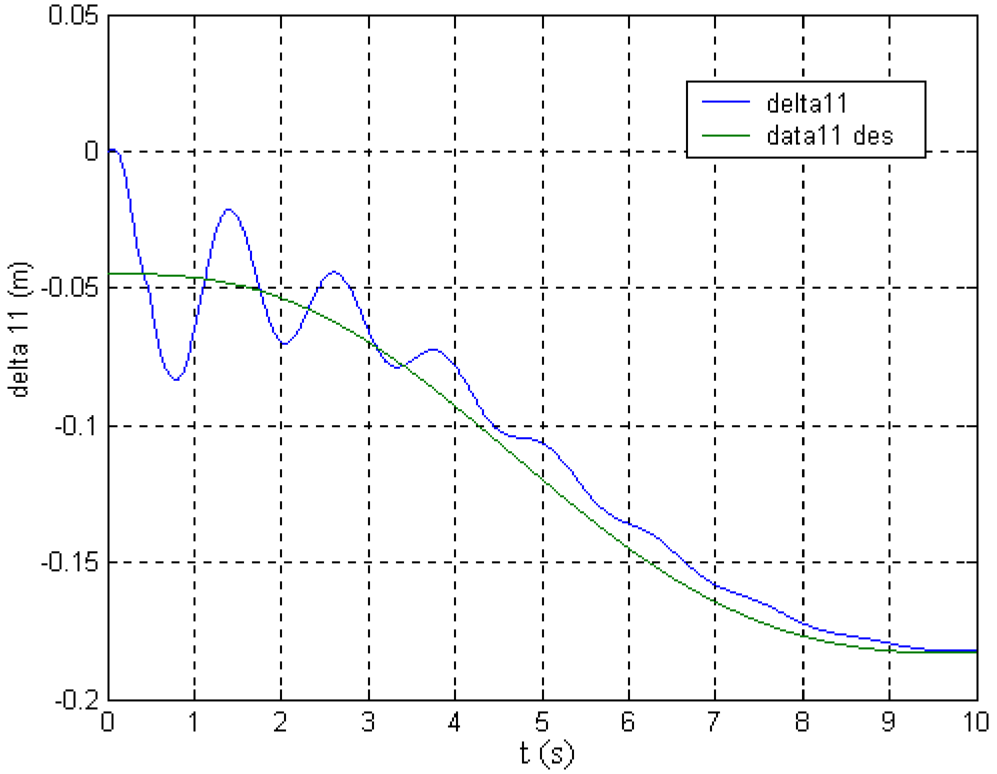


Figure 5.18 : les premiers modes de la premiere liaison (mp=0.1)

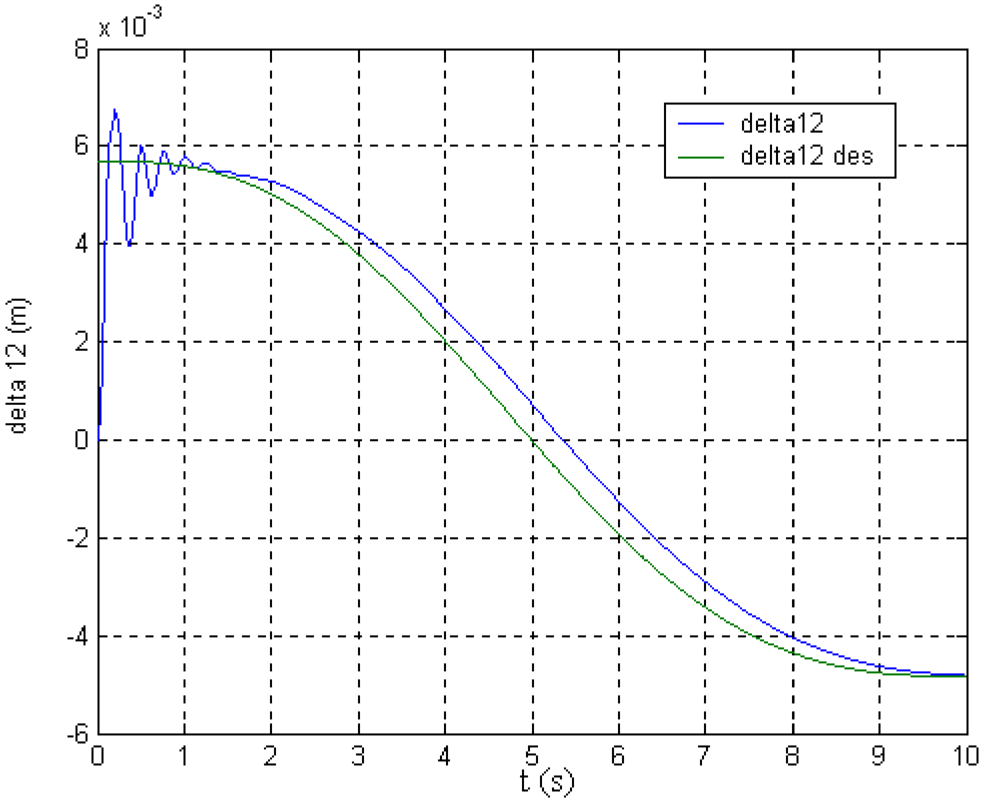


Figure 5.19 : les deuxiemes modes de la premiere liaison (mp=0.1)

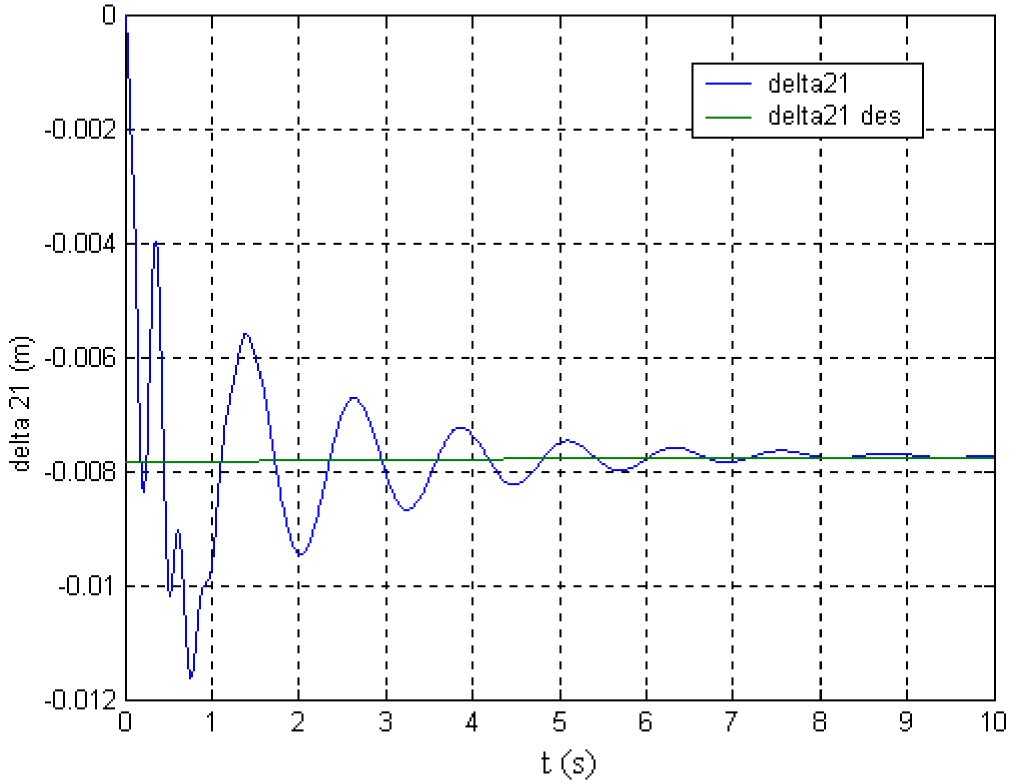


Figure 5.20 : les premiers modes de la deuxieme liiason (mp=0.1)

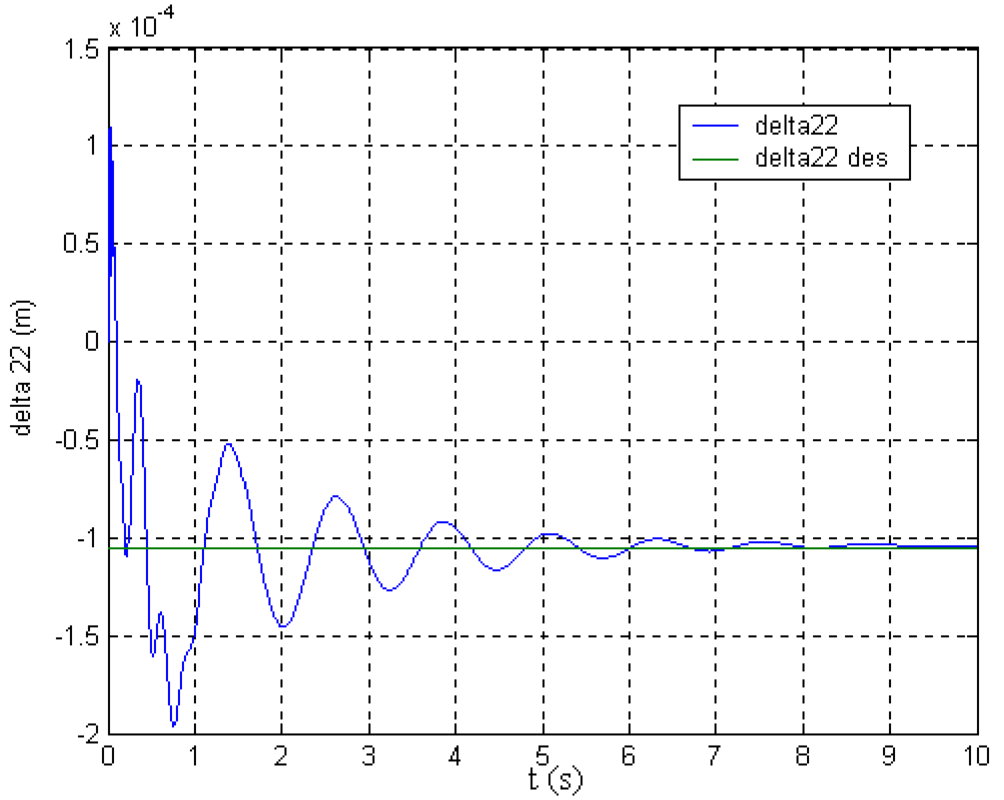


Figure 5.21 : les deuxièmes modes de la deuxième liaison (mp=0.1)

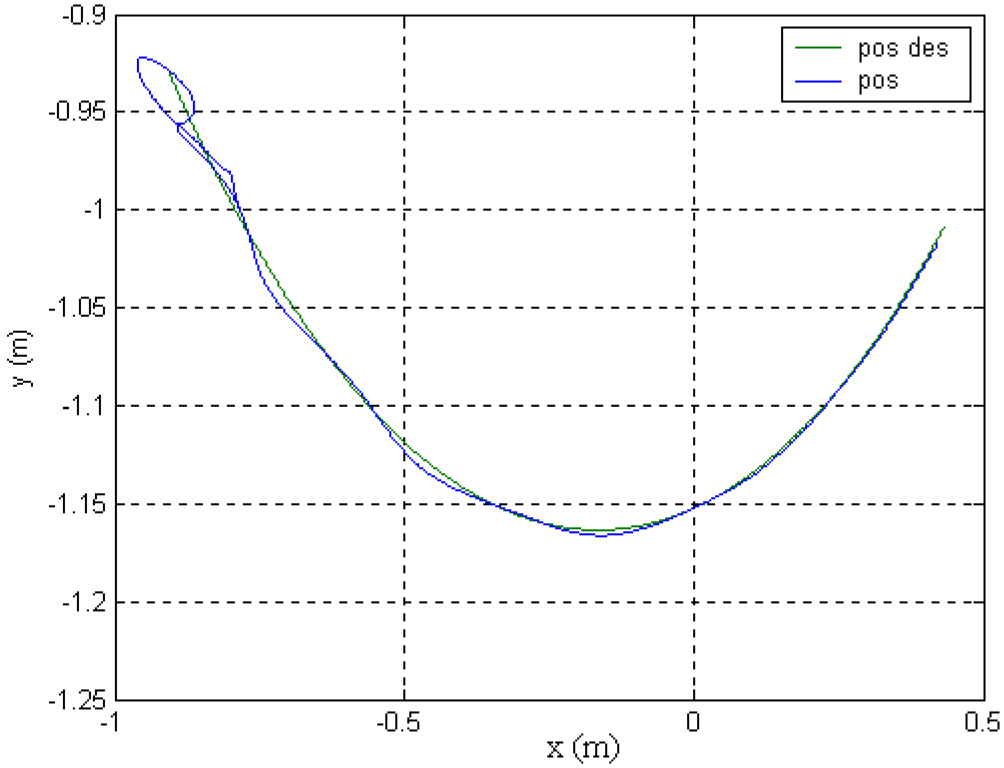


Figure 5.22 : trajactoires de l'organe effecteur (mp=0.1)

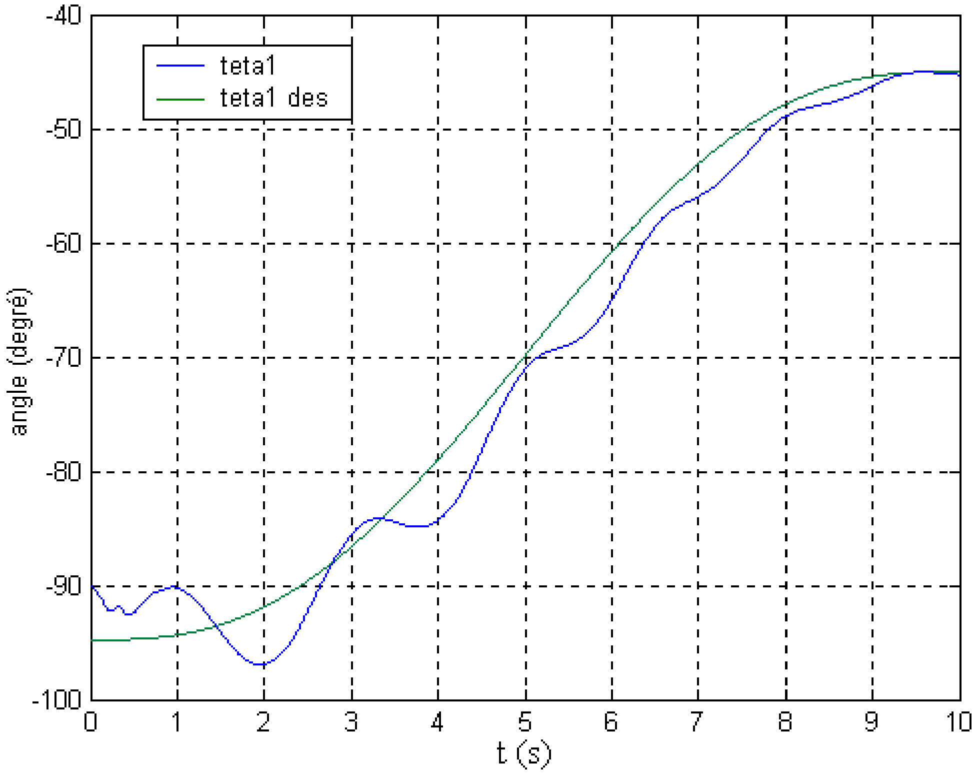


Figure 5.23 : position de l'articulation 1 (mp=0.3)

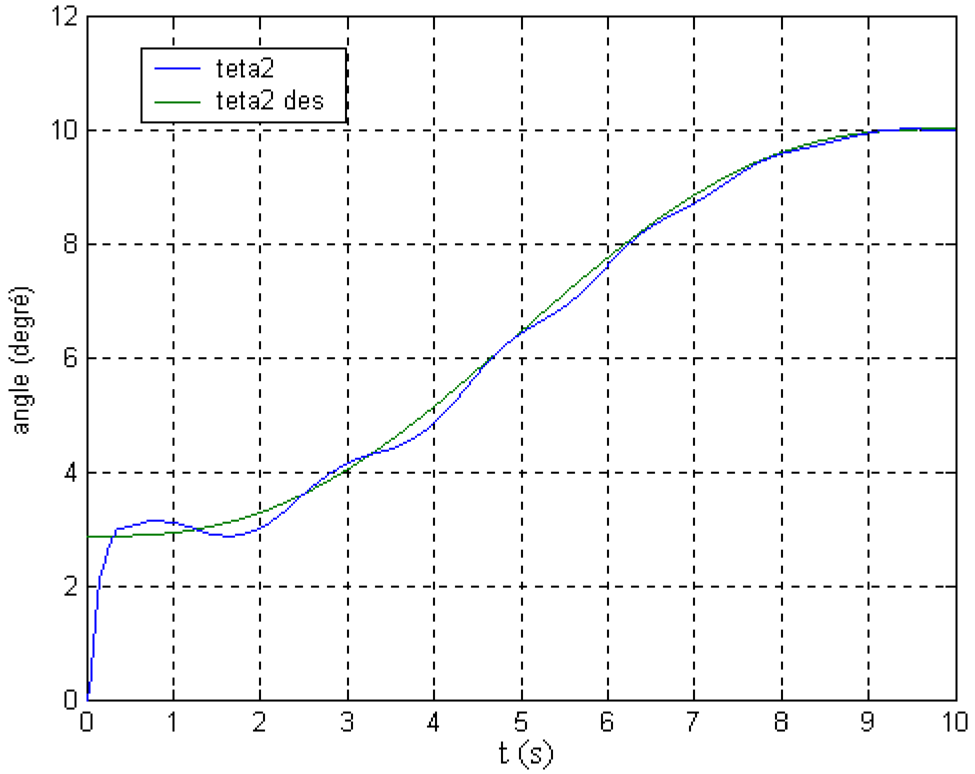


Figure 5.24 : position de l'articulation 2 (mp=0.3)

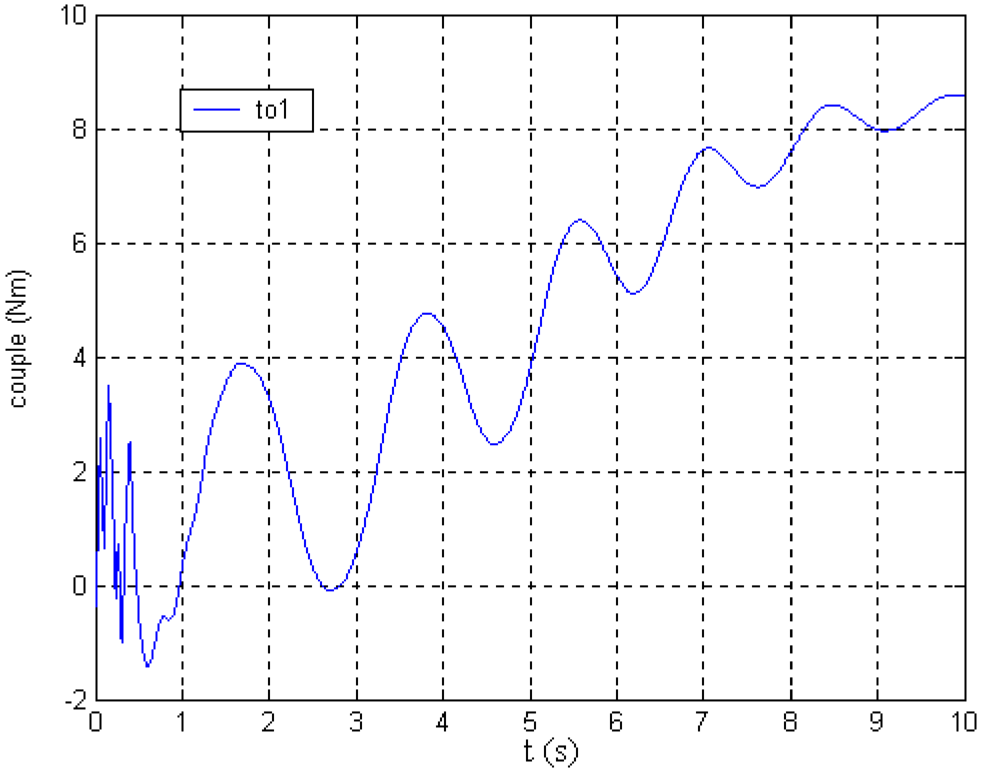


Figure 5.25 : le couple de l'articulation 1 (mp=0.3)

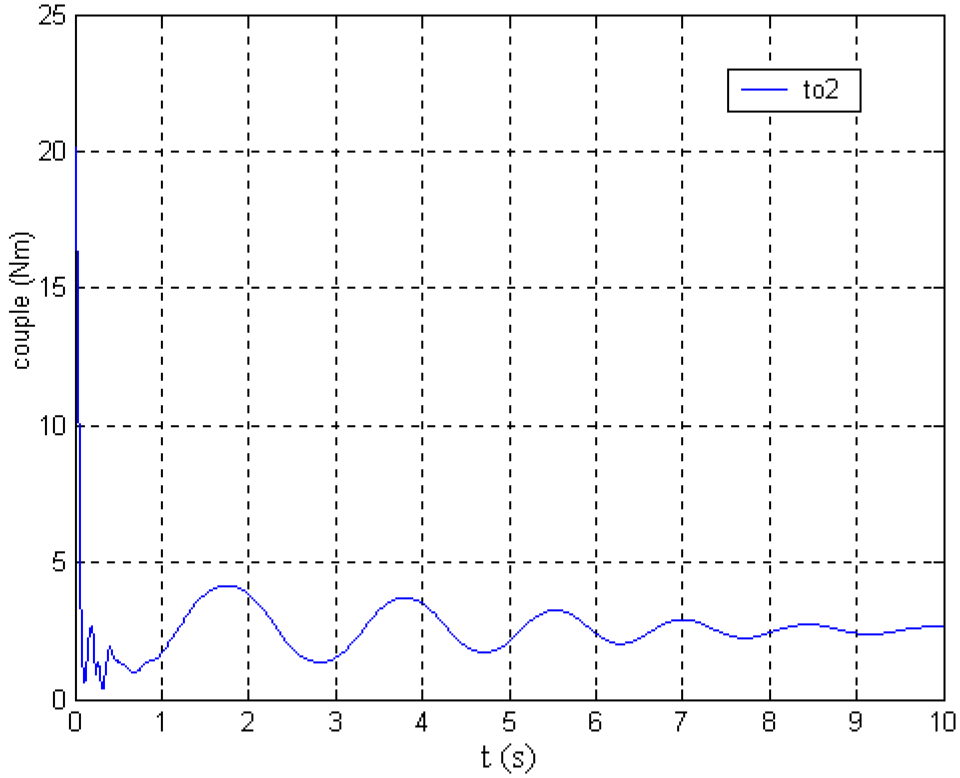


Figure 5.26 : couple de l"articulation 2 (mp=0.3)

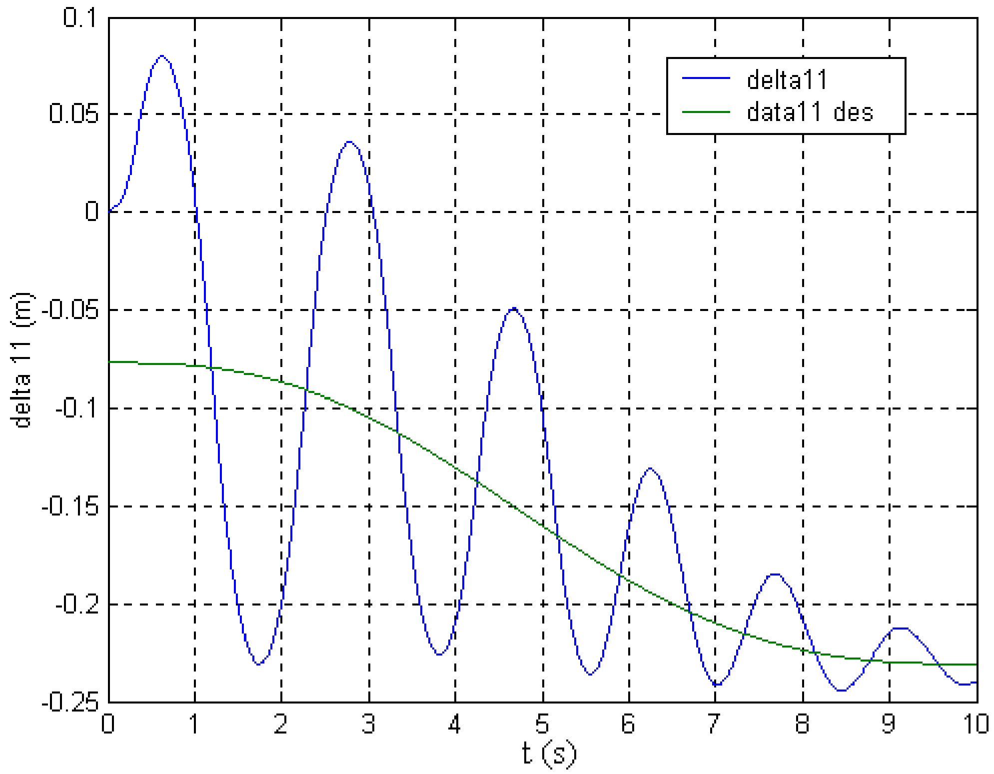


Figure 5.27 : les premier modes de la premiere liaison (mp=0.3)

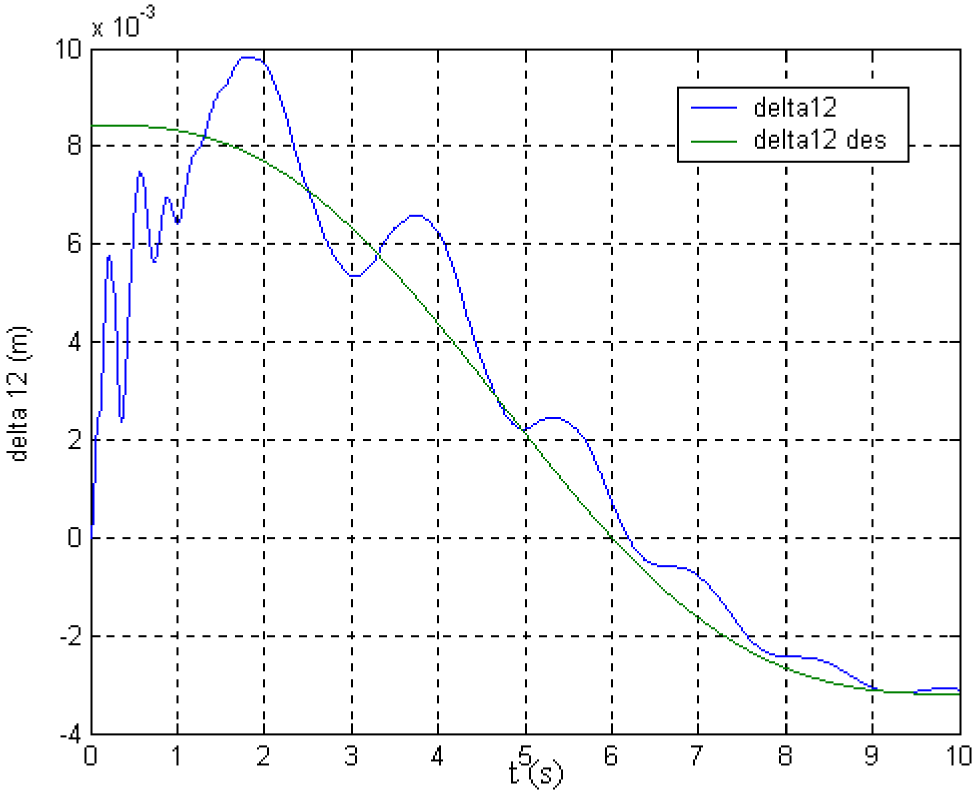


Figure 5.28 : les deuxieme modes de la premiere liaison (mp=0.3)

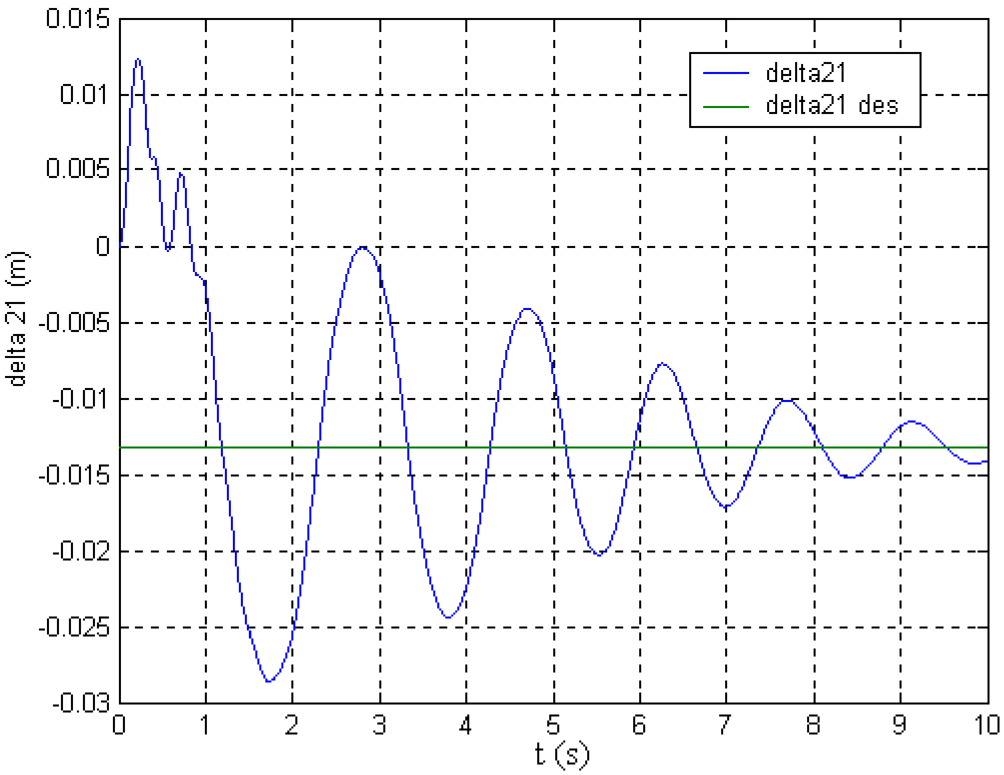


Figure 5.29 : les premiers modes de la deuxieme liiason (mp=0.3)

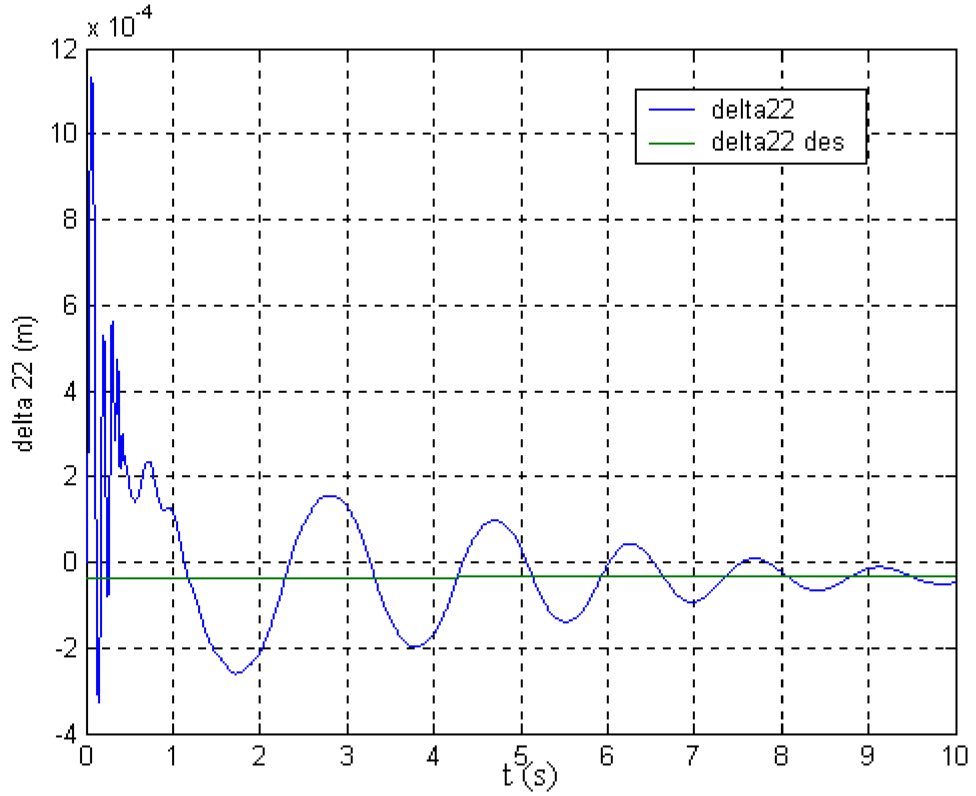


Figure 5.30 : les deuxièmes modes de la deuxième liaison (mp=0.3)

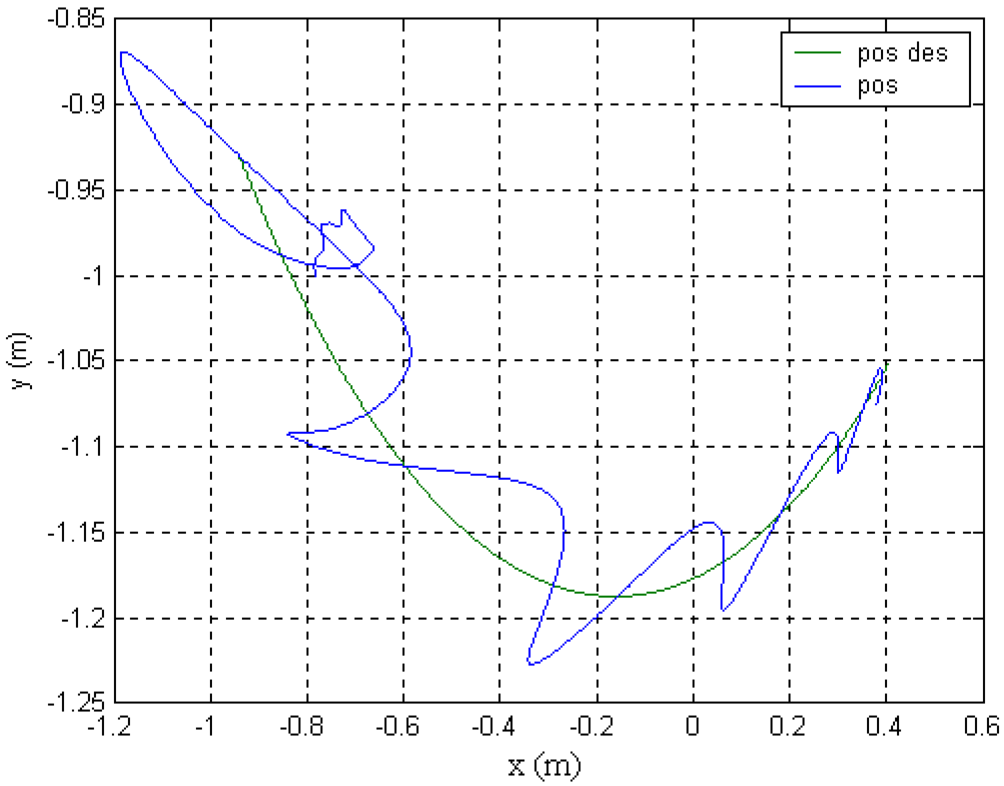


Figure 3.31 : trajactoires de l'organe effecteur (mp=0.3)

V.3.2 Résultats de simulations pour la commande par redéfinition de sortie

le générateur de trajectoire génère les angles suivants :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \frac{-\pi}{2} \\ \theta_2(0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \begin{cases} \theta_1(f) = 0 \\ \theta_2(f) = \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

les matrices de gain du contrôleur P.D sont :

$$K_p = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ et } K_D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

les angles initiales du robot sont

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \frac{-\pi}{2} \\ \theta_2(0) = 0 \end{cases}$$

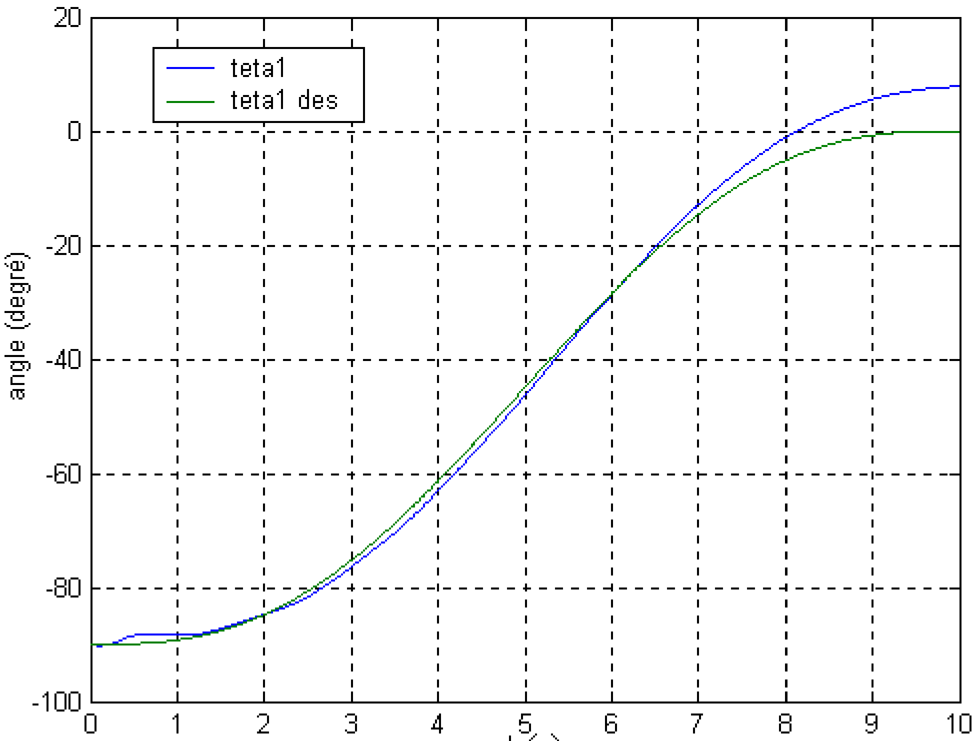


Figure 5.32: position de l'articulation 1 (mp=0)

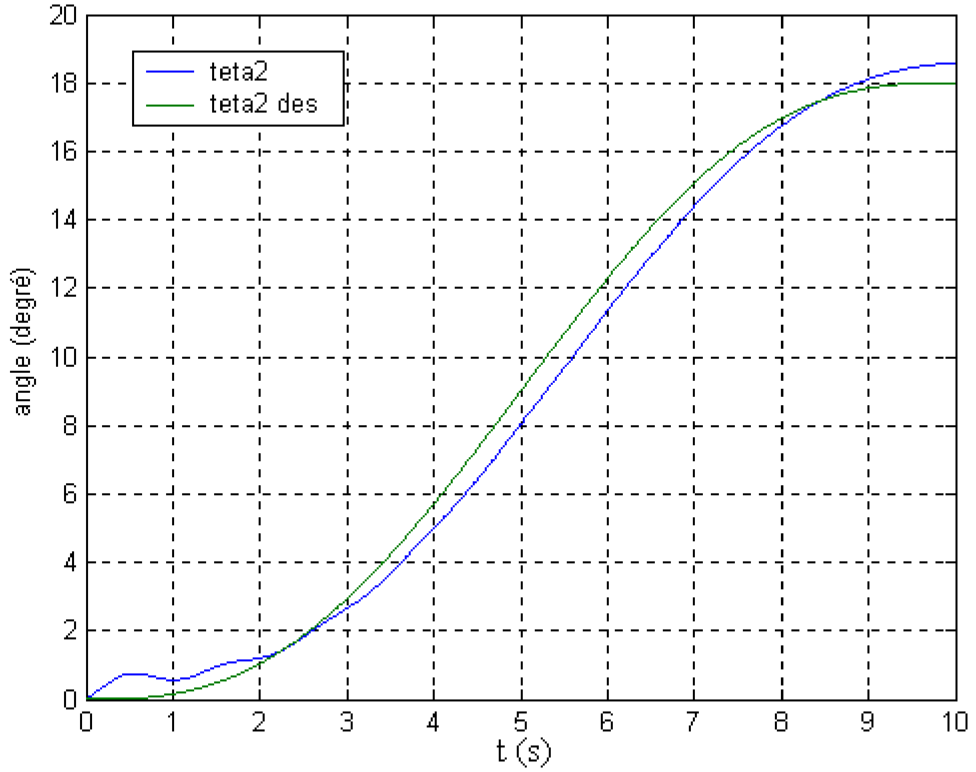


Figure 5.33 : position de l'articulation 2 (mp=0)

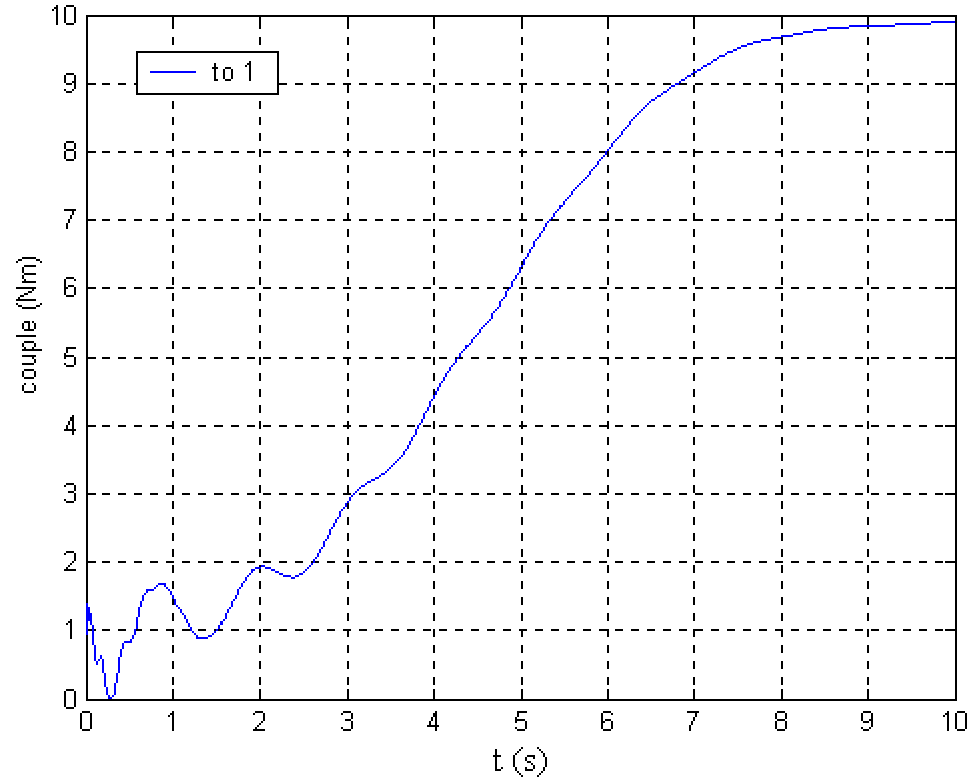


Figure 5.34 : le couple de l'articulation 1 (mp=0)

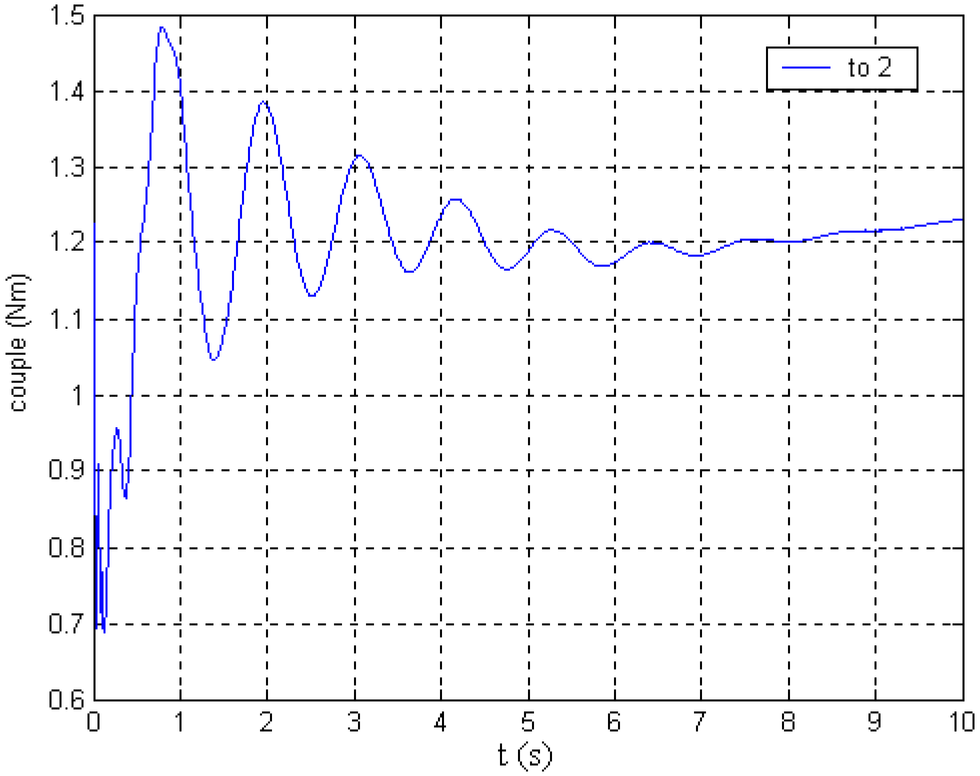


Figure 5.35 : le couple de l'articulation 2 (mp=0)

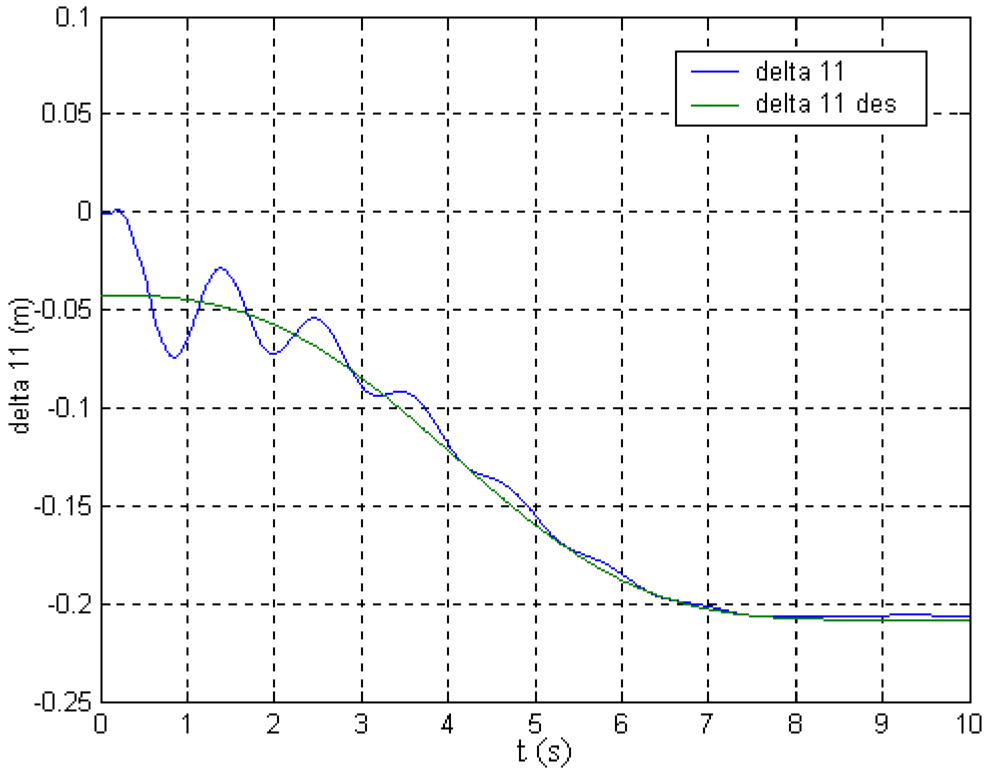


Figure 5.36 : les premiers modes de la prmière liaison (mp=0)

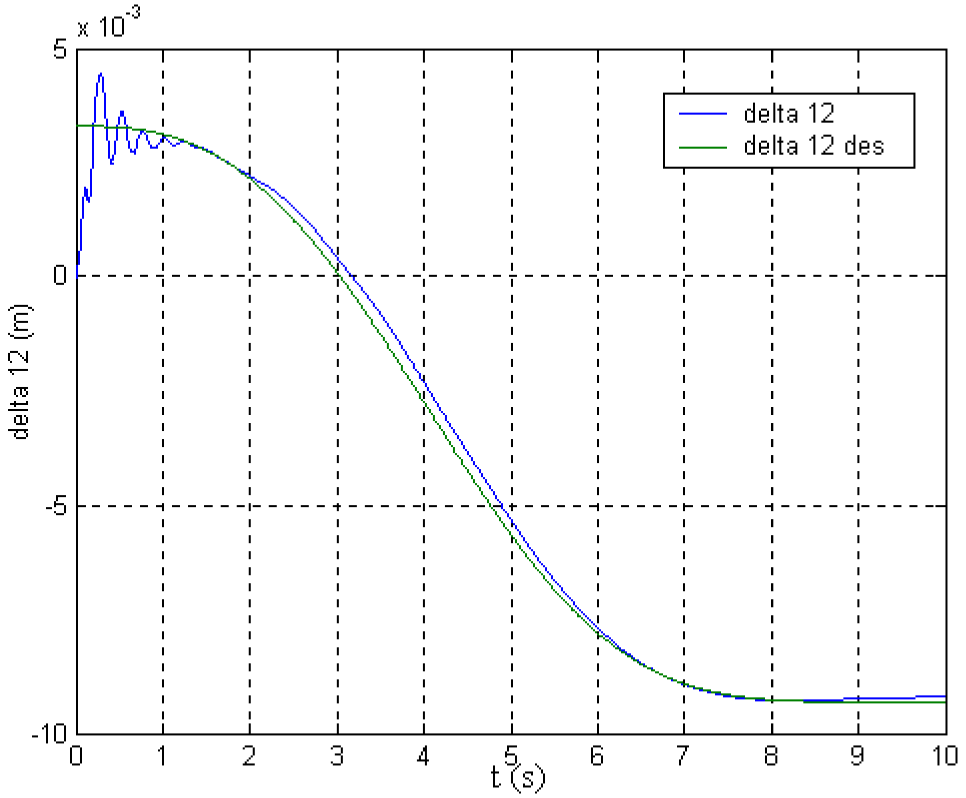


Figure 5.37 : les deuxiemes modes de la première liaison (mp=0)

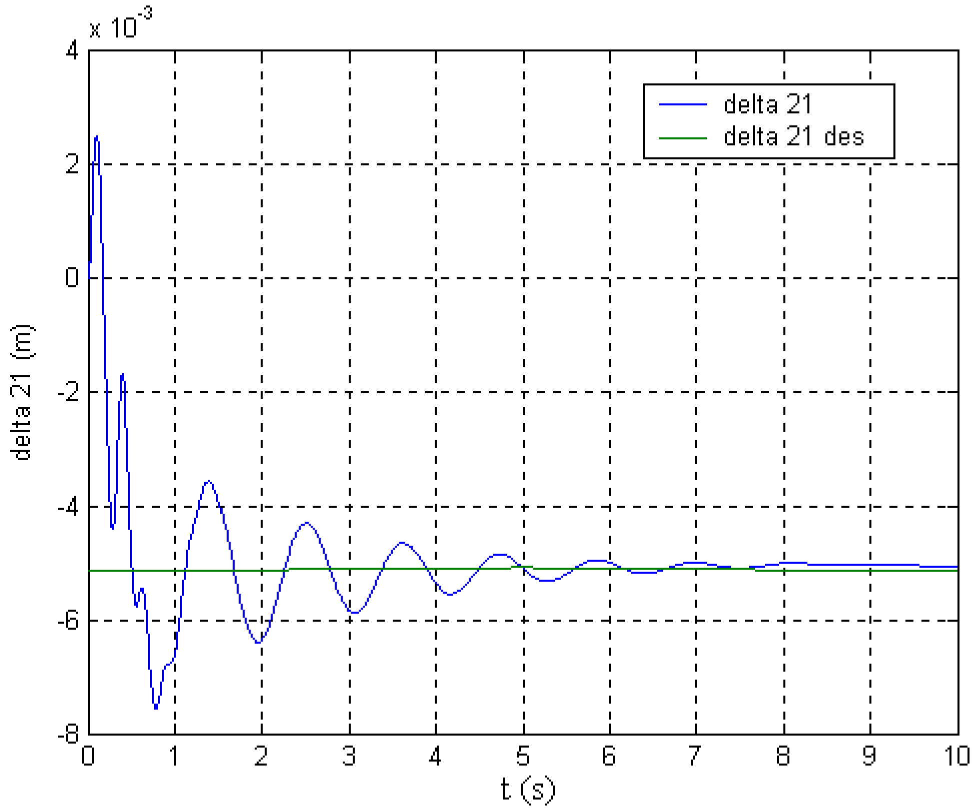


Figure 5.38 : les premiers modes de la deuxième liaison (mp=0)

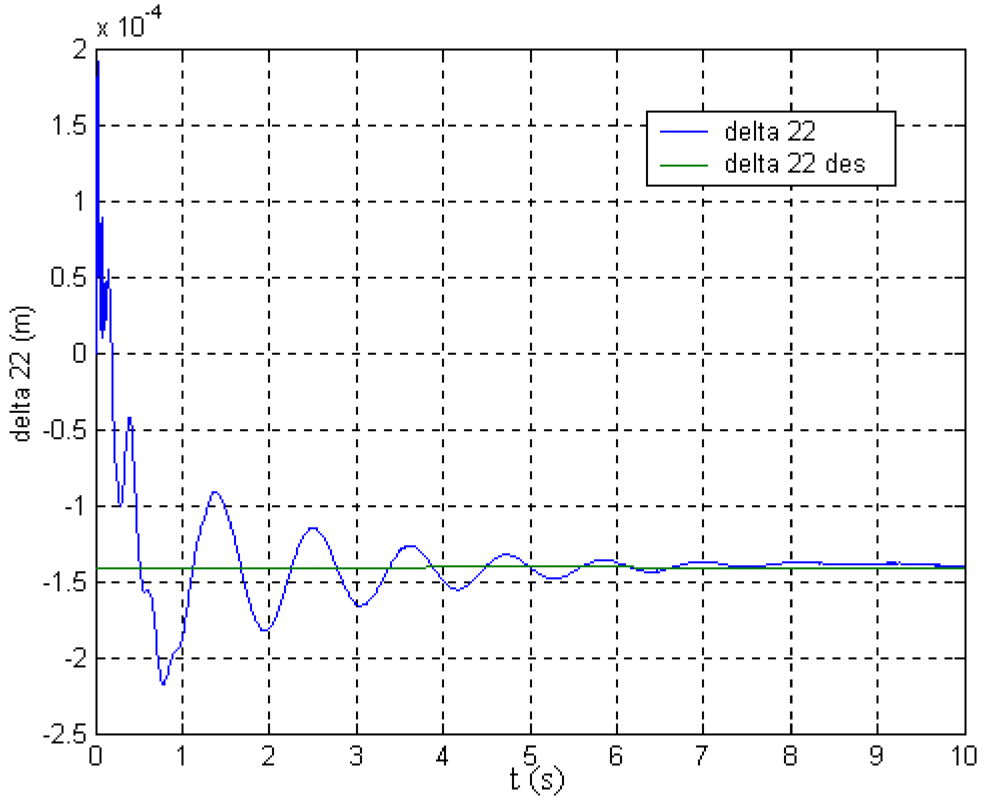


Figure 5.39 : les deuxiemex modes de la deuxième liaison (mp=0)

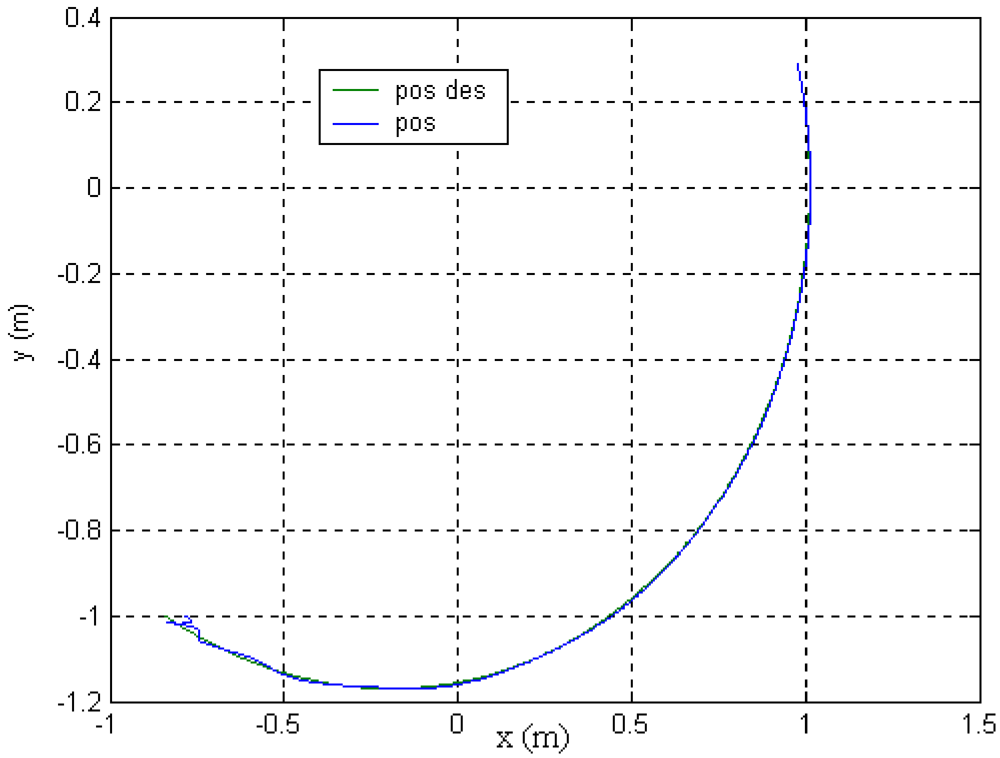


Figure 5.40 : trajectoires de l'organe effecteur (mp=0)

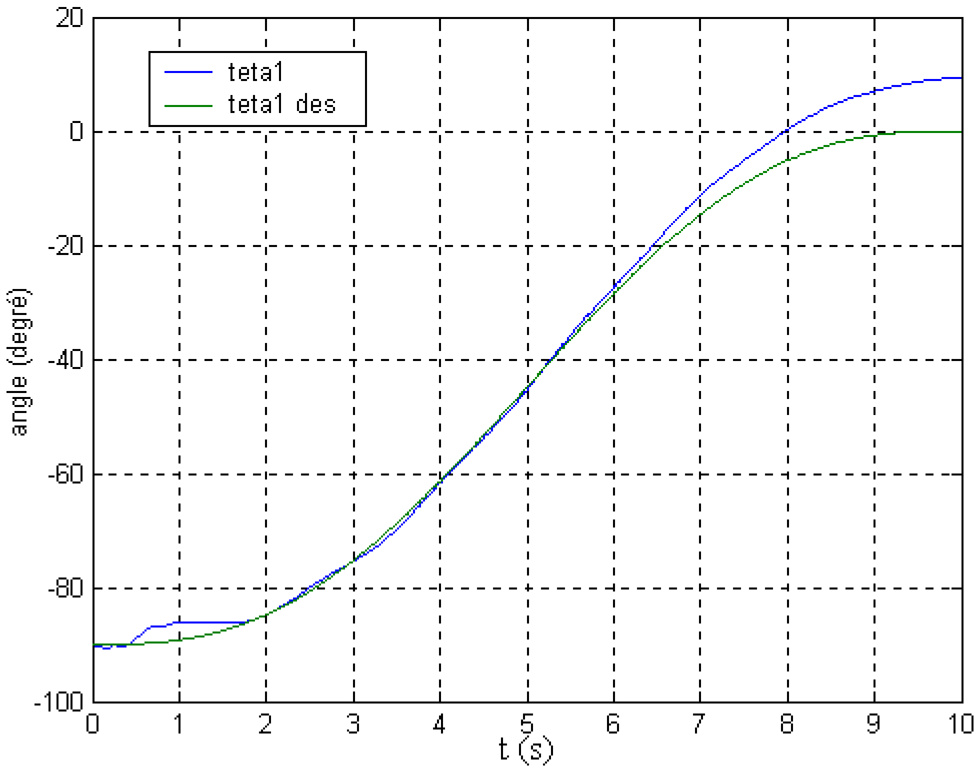


Figure 5.41 : position de l'articulation 1 (mp=0.3)

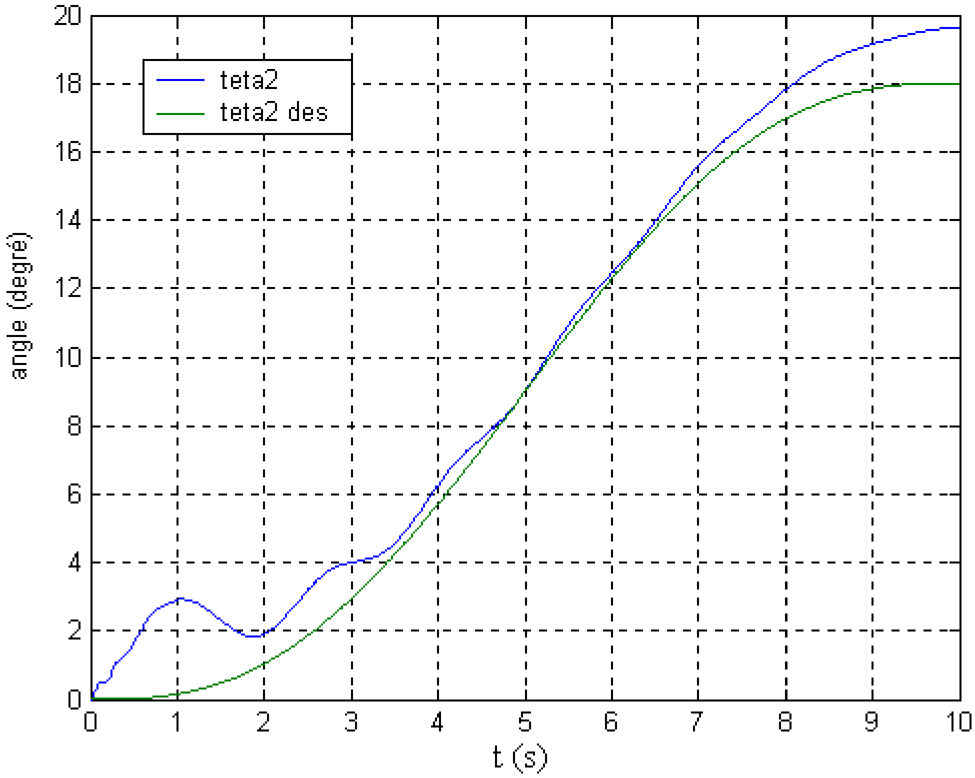


Figure 5.42 : position de l'articulation 2 (mp=0.3)

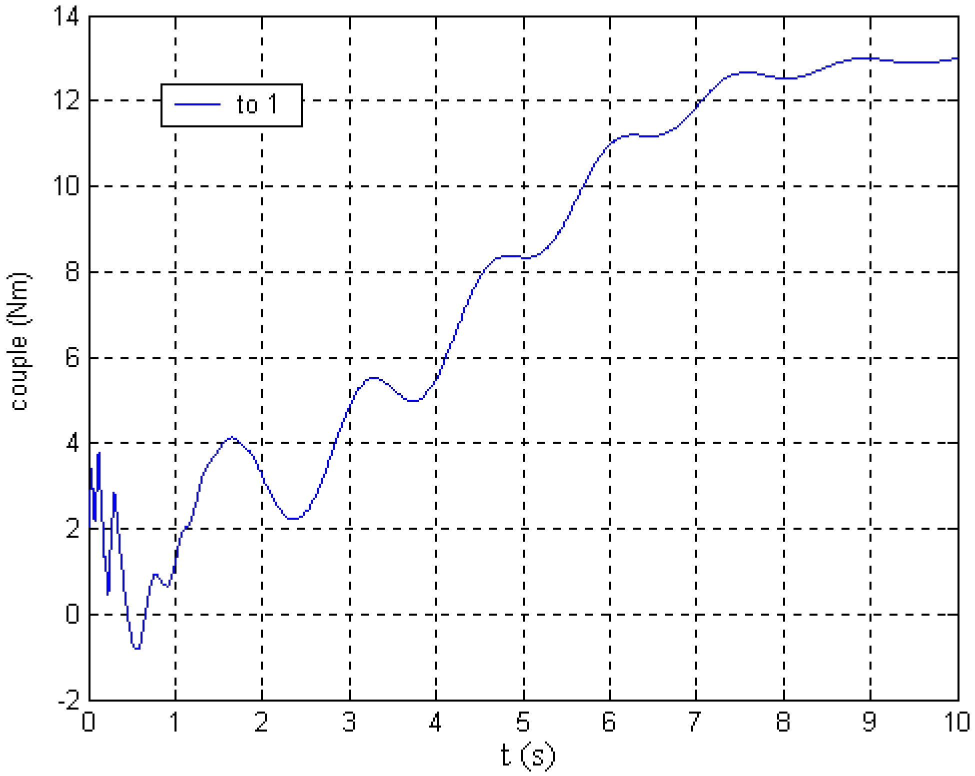


Figure 5.43 : le couple de l'articulation 1 (mp=0.3)

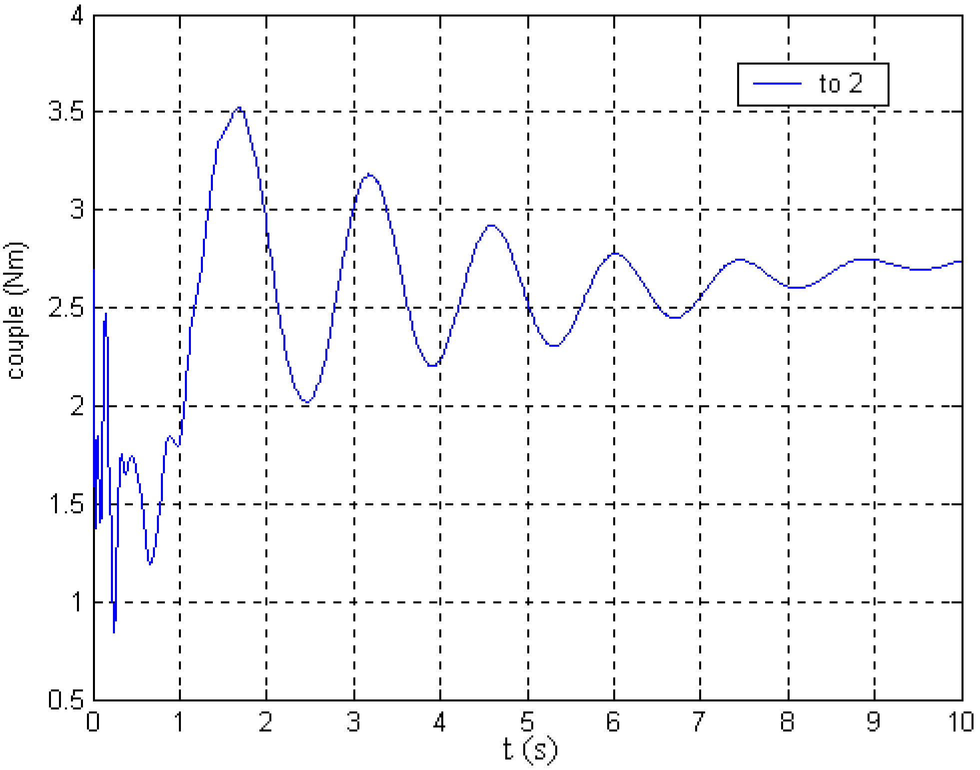


Figure 5.44 : le couple de l'articulation 2 (mp=0.3)

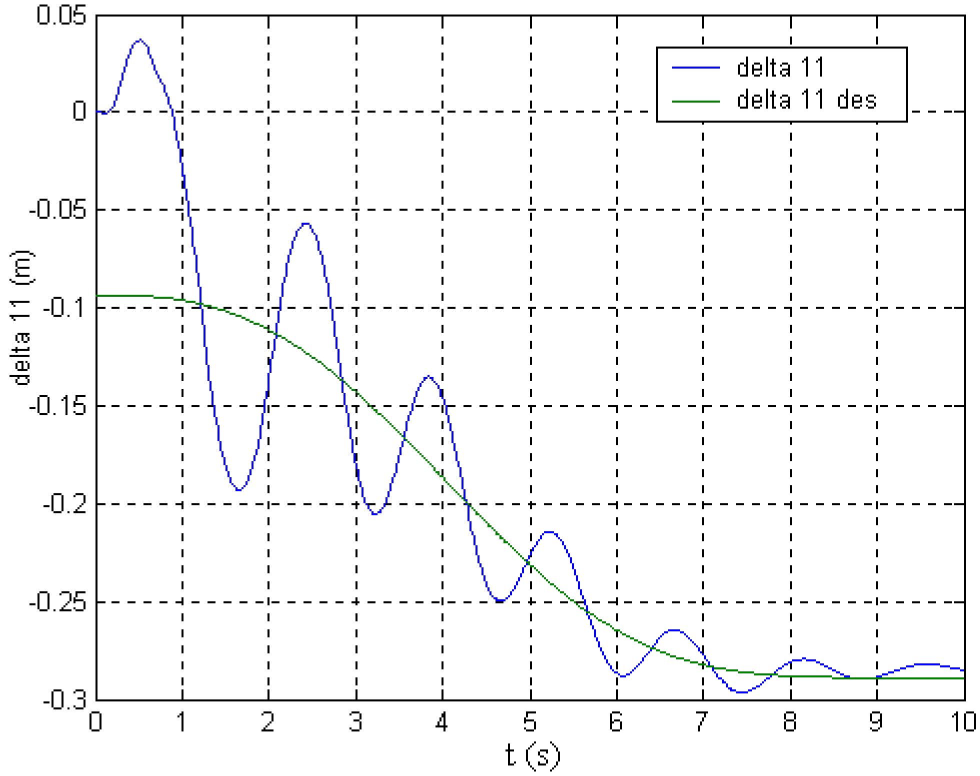


Figure 5.45 : les premiers modes de la prmière liaison (mp=0.3)

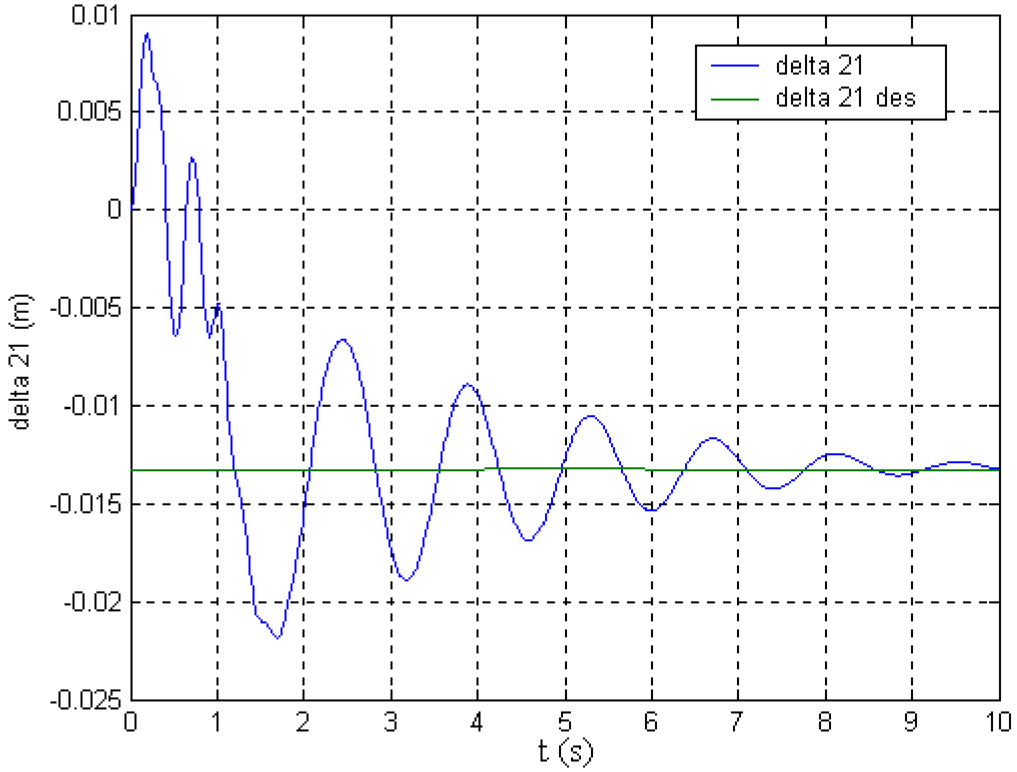


Figure 5.47 : les premiers modes de la deuxième liaison (mp=0.3)

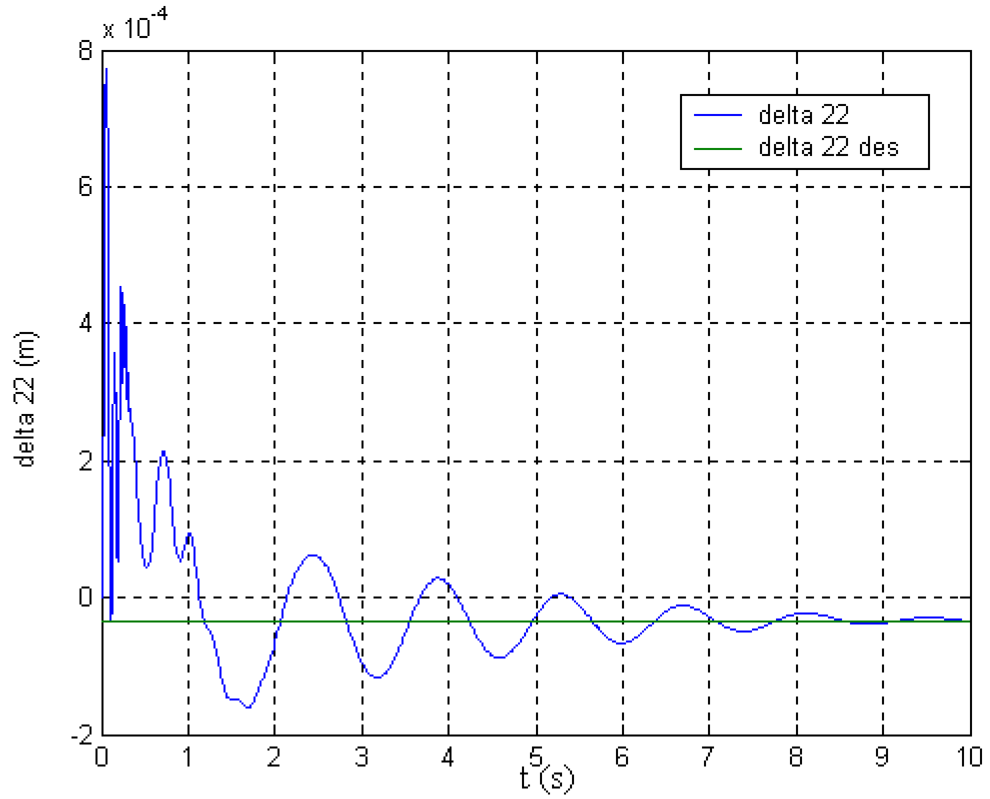


Figure 5.48 : les deuxiemex modes de la deuxième liaison (mp=0.3)

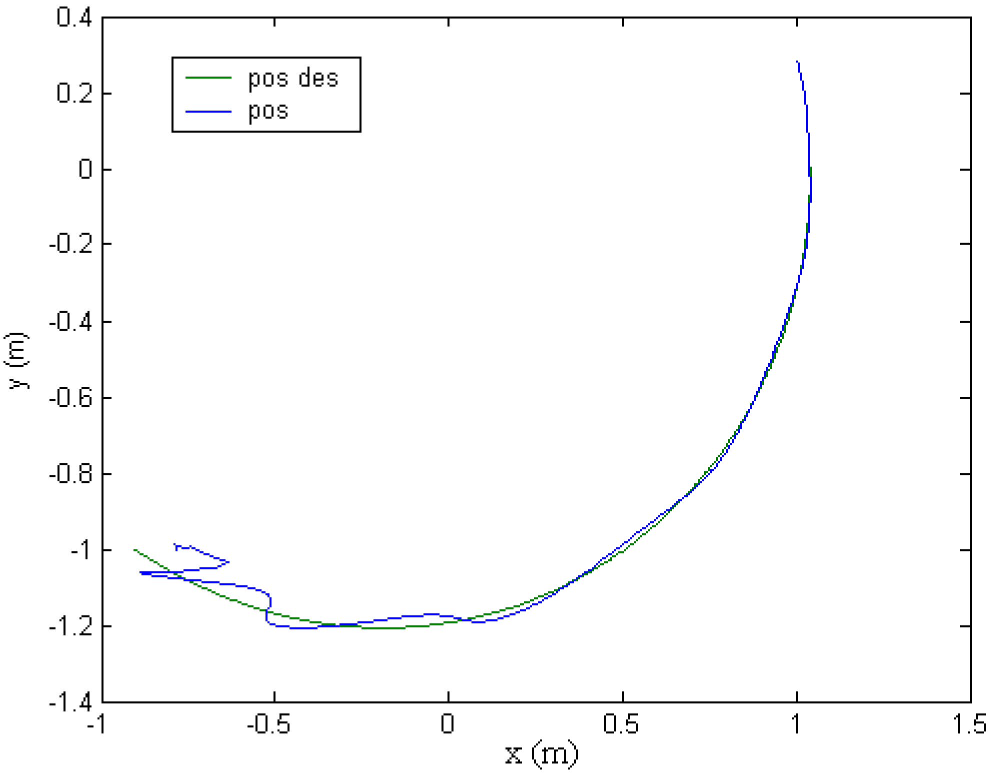


Figure 5.49 : trajectoires de l'organe effecteur (mp=0.3)

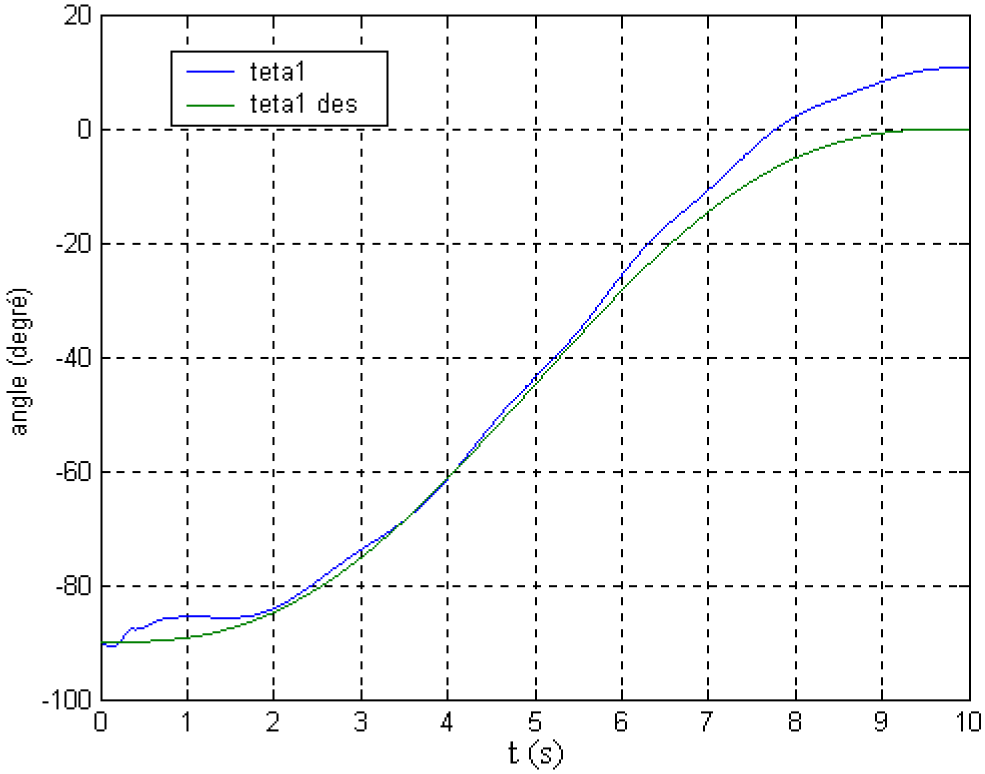


Figure 5.50: position de l'articulation 1 (mp=0.5)

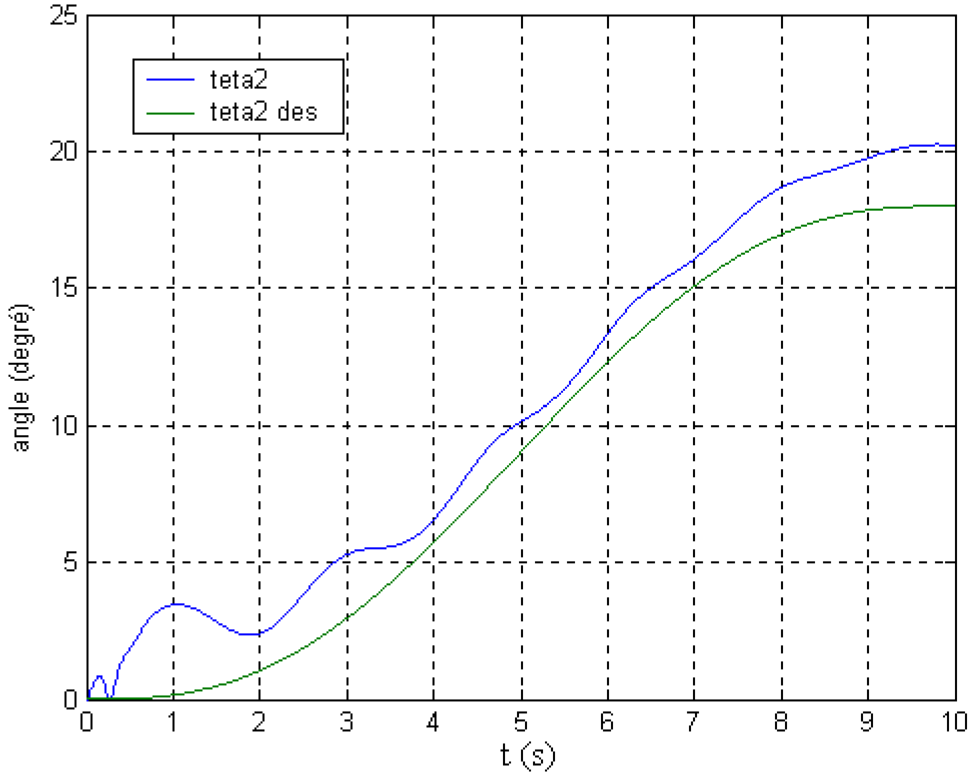


Figure 5.51 : position de l'articulation 2 (mp=0.5)

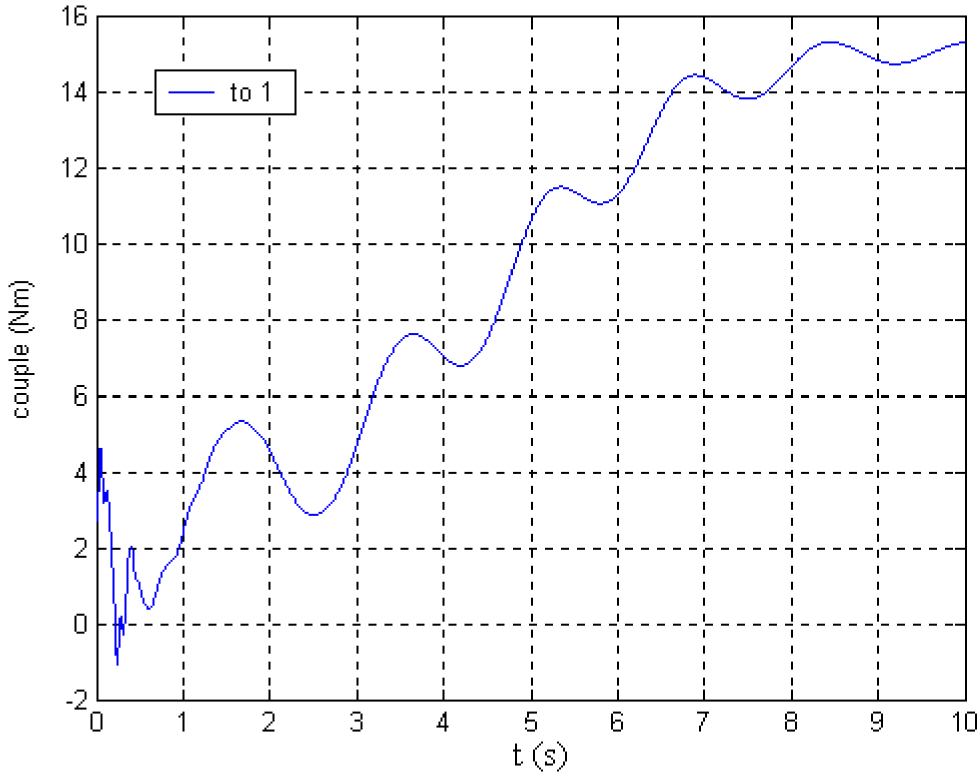


Figure 5.52 : le couple de l'articulation 1 (mp=0.5)

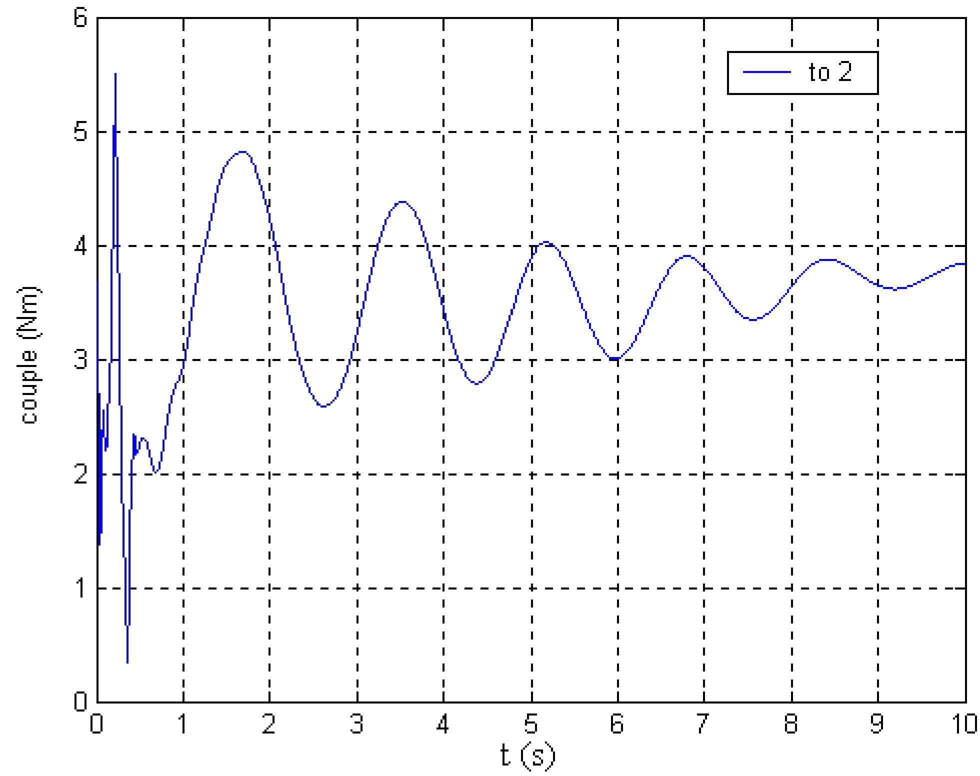


Figure 5.53 : le couple de l'articulation 2 (mp=0.5)

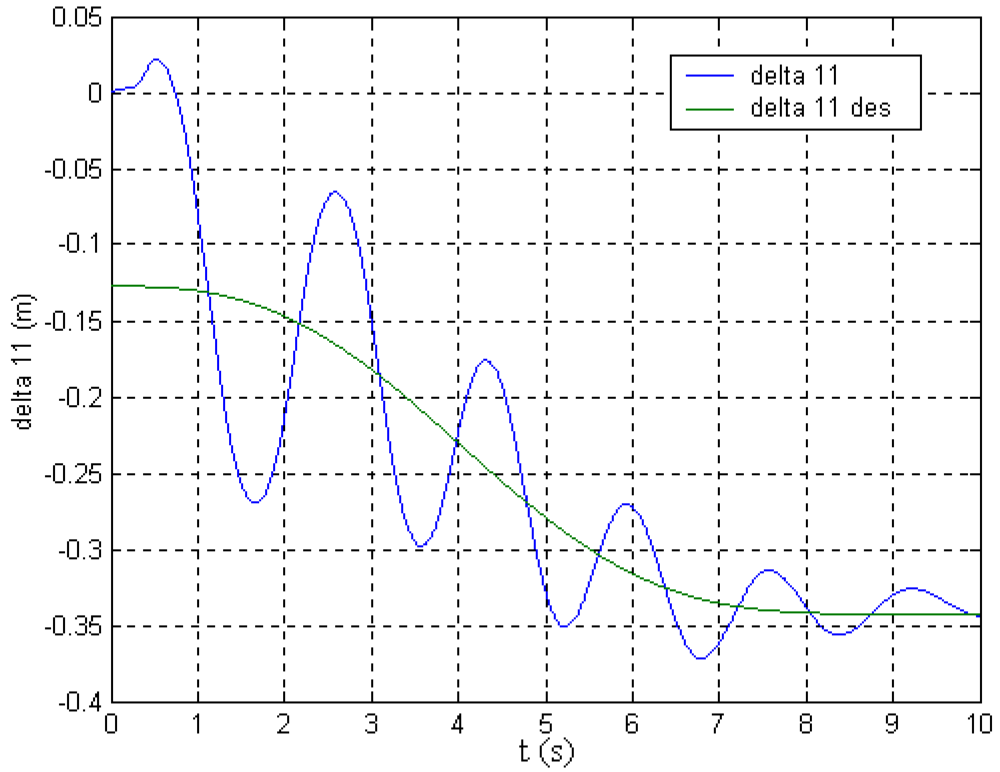


Figure 5.54 : les premiers modes de la première liaison (mp=0.5)

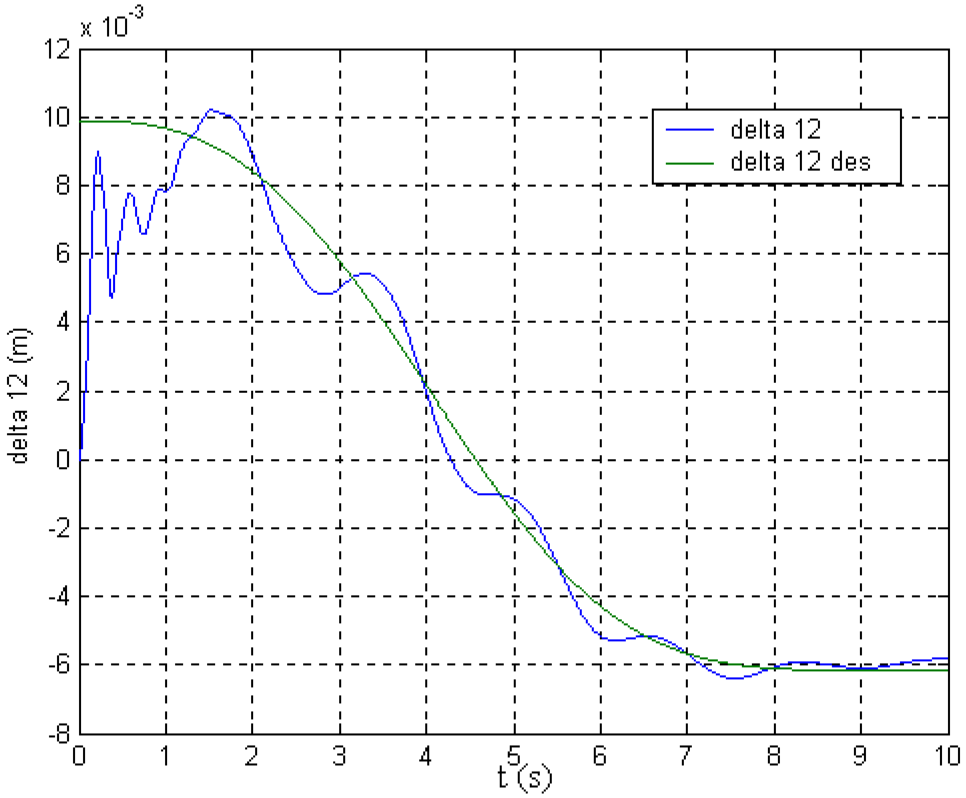


Figure 5.55 : les deuxiemes modes de la première liaison (mp=0.5)

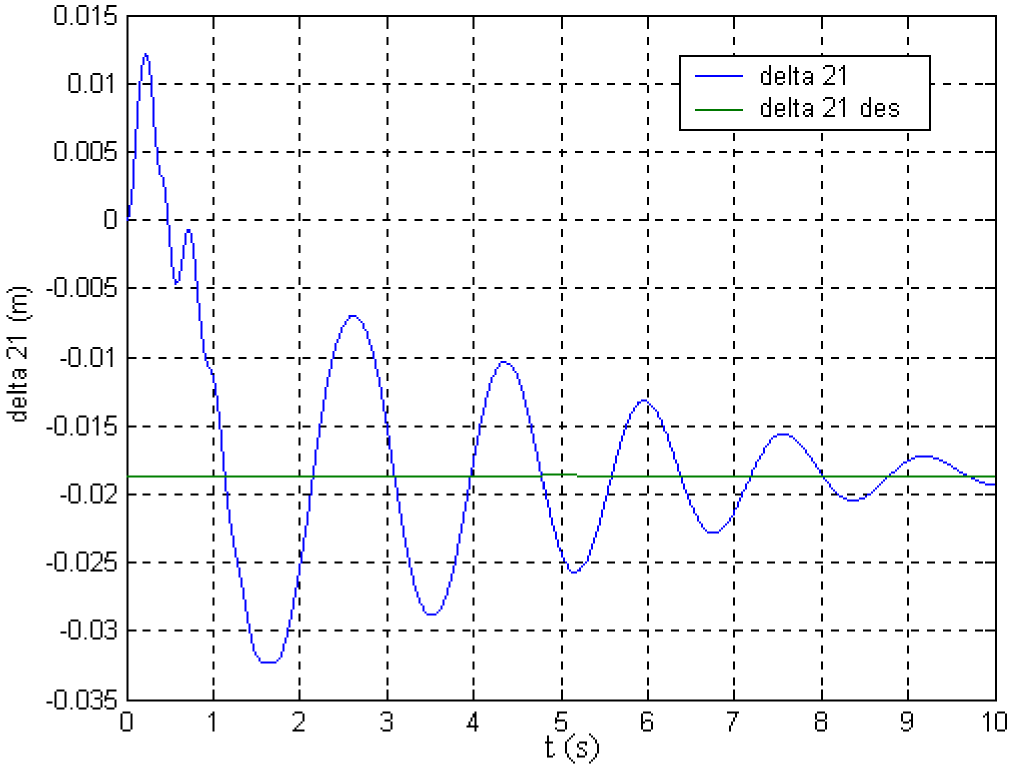


Figure 5.56 : les premiers modes de la deuxième liaison (mp=0.5)

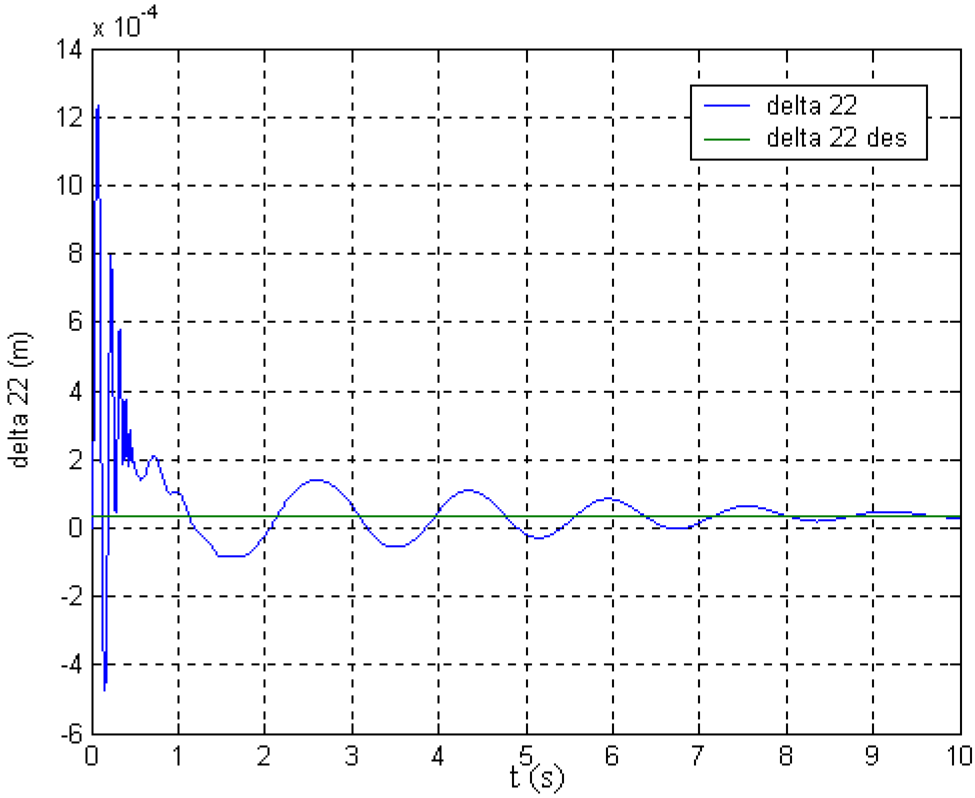


Figure 5.57 : les deuxiemex modes de la deuxième liaison (mp=0.5)

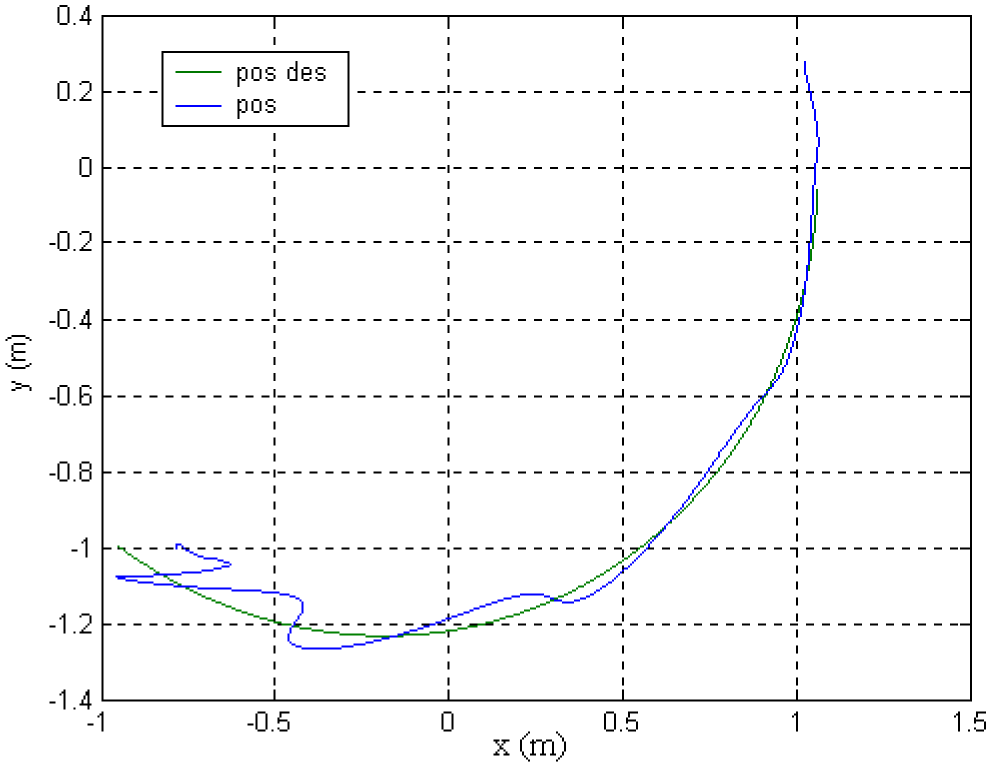


Figure 5.58 : trajectoires de l'organe effecteur (mp=0.5)

V.3.3 Résultats de simulation pour la commande par planification de trajectoire

A cause de la difficulté de l'implémentation des réseaux de neurones opérant en ligne, on a essayé de développer des réseaux en utilisant l'interface graphique utilisateur de la boite à outils pour les réseaux de neurones (neural network tool-box) , le développement des réseaux de neurones à plusieurs couches cachées est assuré par les commandes Matlab spécifiques permettant le développement des réseaux de neurones tels que, la commande Newff qui permet de développer des réseaux de neurones ayant plusieurs couches cachées .

Dans cette section on essaye de mettre en œuvre une application modeste et simple des réseaux de neurones dans la commande du bras flexible à deux degrés de libertés .

Les deux réseaux de neurones développés sont du type (Feed-Forward Backpropagation) ayant chacun un neurone dans l'entrée et sept neurones dans la couche cachée avec une fonction d'activation log-sigmoïde et une sortie avec une fonction d'activation purelin .

Les fonctions d'entraînement et d'apprentissage sont respectivement du type (TRAINLM et LEARNGDM).

La fonction de performance est du type (MSE) .

Dans cette application les réseaux de neurones apprennent hors ligne une planification inverse reliant les erreurs des positions angulaires aux erreurs en positions de l’organe effecteur, où ces données d’apprentissage ont été prélevés d’une commande articulaire avec redéfinition de la sortie du bras flexible .

Après apprentissage et adaptation des poids, ces réseaux sont insérés dans la commande en position par planification de trajectoire de l’organe effecteur du robot .
La position initiale de l’organe effecteur est (1,0), et il doit alors se mouvoir à la position finale (0.8,0.6) .

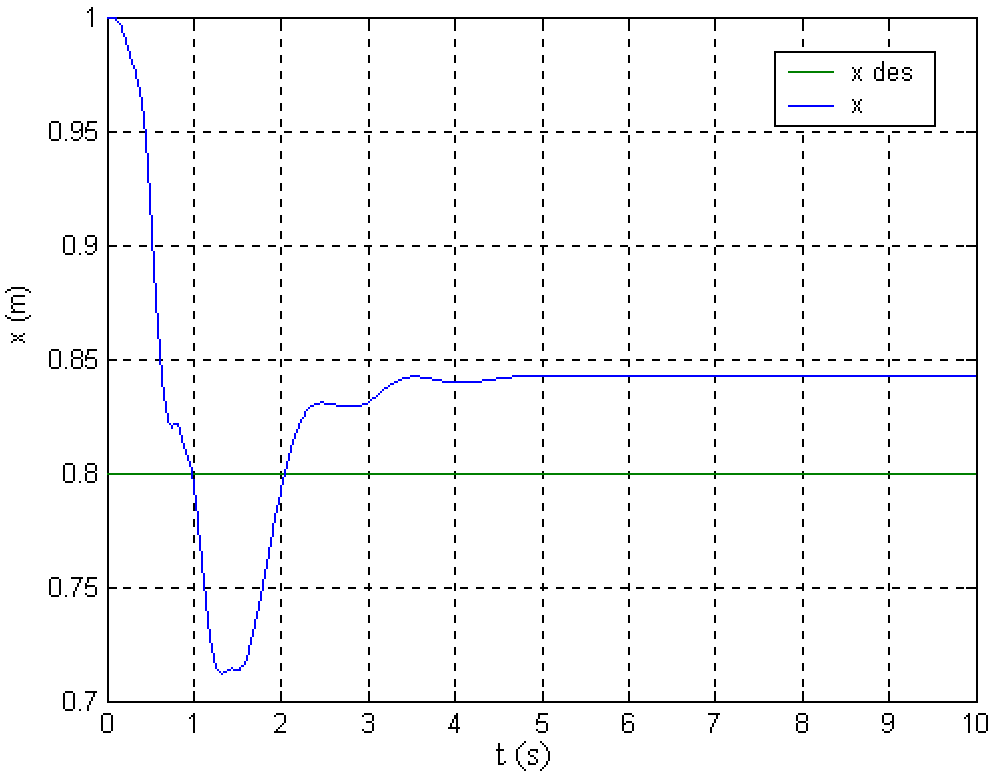


Figure 5.59 : position de l'organe effecteur (abscisse)

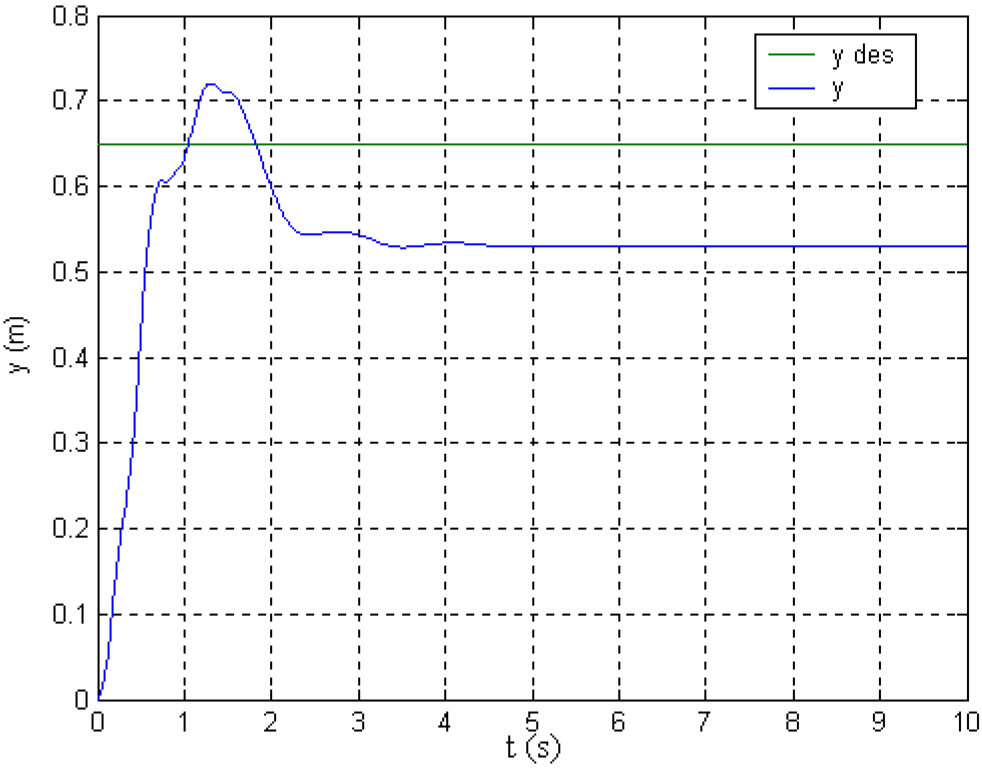


Figure 5.60 : position de l'organe effecteur (ordonnée)

V.4 Commentaires

D'après les résultats de simulations obtenus par différentes méthodes :

La première commande articulaire est issue des commandes appliquées sur les bras manipulateurs rigides elle nécessite un régulateur du type P.D ayant des gains assez élevé et elle dépends de la trajectoire articulaire choisie, elle n'implémente pas une des caractéristique des robots flexibles qui est le faible rapport poids-charge, le maximum de la charge supportée est $m_p = 0,3$. Cette commande est sensible aux variations de la charge parce que les oscillations dans les positions articulaires et les postions de l'organe effecteur augmentent avec l'augmentation de la charge, alors elle est moins robuste .

La deuxième commande est aussi une régulation articulaire, mais la sortie commandée est proche de l'extrémité de chaque liaison lui conférant ainsi un bon positionnement de l'organe effecteur et un régulateur P.D ayant des gains moins élevés, avec un meilleur rapport poids-charge, le maximum de la charge supportée est $m_p = 0.5$ et une assez bonne robustesse par rapport aux variations de la charge, du fait que les positions articulaires et les positions de l'organe effecteur sont moins sensibles à l'augmentation de la charge, il y a présence d'oscillations de faibles amplitudes.

La troisième méthode est une commande point à point de l’organe effecteur qui n’a pas donné de bons résultats du fait qu’une commande adaptative avec les réseaux de neurones ne peut avoir lieu que si ces réseaux travaillent en ligne, autrement dit un apprentissage en ligne . Malheureusement qu’ on a pas pu mettre en œuvre et elle pourra faire le sujet d’une investigation future .

V.5 Conclusion

Dans ce chapitre le problème de la commande des manipulateurs à liaisons flexibles est discuté, des méthodes ont été mises en œuvre tels que la commande P.D, mais ce système présente un déphasage non minimal à cause de la structure non localisée du dispositif capteur-actionneur .

Alors une deuxième commande basée sur la redéfinition de la sortie est introduite afin de rendre le système stable en lui conférant une structure à déphasage minimal . Enfin l’emploi simple des réseaux de neurones dans la commande par planification de la trajectoire n’a pas donné de bon résultats à cause du système contrôlé qui est un système très complexe par conséquent il nécessite des réseaux de neurones opérant en ligne .

CONCLUSION GENERALE

VI.1 Conclusions

Le bras manipulateur flexible étudié dans le présent mémoire est un système hautement non-linéaire, du fait que sa modélisation cinématique et dynamique abouti à des équations différentielles obtenues sous forme d'équations d'état en utilisant la théorie d'Euler-Lagrange, dont les coefficients sont variables suivant les paramètres mécaniques du bras et les configurations des mouvements désirés. Malgré ces complexités, on a pu élaborer un modèle et on a pu l'implémenter pour une simulation de commande classique et intelligente sous l'environnement Matlab-Simulink.

L'utilisation des robots à liaisons flexibles complique le problème de la commande en position du fait que ces liaisons sont assujetties à des déflections et /ou des vibrations. On a pu mettre en œuvre quelques techniques utilisées dans le domaine de la commande des robots flexibles.

Trois différentes techniques de commande ont été appliquées pour la commande de ce bras manipulateur : une technique de régulation classique, à savoir un contrôleur de type P.D. dont l'implémentation est relativement simple, mais cette commande n'est pas robuste puisqu'elle est sensible aux variations de la charge. Une deuxième stratégie de commande utilise le principe de la redéfinition de la sortie qui est un point proche de l'extrémité du bras : Elle permet de générer des trajectoires articulaires assez longues et présente aussi une assez bonne robustesse par rapport aux variations de la charge. Une troisième commande intelligente basée sur les réseaux de neurones pour la commande de ce système dynamique nécessite un entraînement en ligne permet une adaptation des poids des neurones des différentes couches pour une position donnée de l'organe effecteur du bras.

Une Bibliographie assez riche concernant notre recherche est incluse afin d'aider et orienter les futurs chercheurs dans ce domaine.

VI.2 Propositions pour travail future

La première proposition pour la continuité de notre travail de recherche afin d'appliquer quelques approches de commandes dynamiques au manipulateur à deux liaisons flexibles, concerne la troisième méthode élaborée : on suggère l'emploi d'une commande neuronale très développée permettant aux réseaux de neurones employés afin de pouvoir apprendre en ligne, en ajustant les poids des différentes neurones des couches du réseau pour n'importe quelle configuration de l'organe effecteur du bras manipulateur.

Une autre voie consiste à étendre les résultats issus de ce travail à des manipulateurs à plusieurs articulations flexibles. Concernant la modélisation des manipulateurs à liaisons flexibles, un nombre fini de modes a été considéré pour les déflections du modèle approché. Spécifiquement deux modes ont été utilisés , alors on peut étudier et déduire un modèle analytique des déflections utilisant un grand nombre de modes .

Les déformations élastiques ont été supposées petites dans le but d'avoir une relation linéaire entre la déformation élastique et la contrainte correspondante. Dans certaines applications cette supposition ne peut être appliquée, alors une analyse doit être faite sur les effets des relations non linéaires entre la déformation élastique et la contrainte. Les effets d'une charge variable avec le temps et une inertie incertaine peuvent faire le sujet d'un travail de recherche futur intéressant.

La modélisation et les méthodes de commande utilisées dans ce mémoire ont été mises en œuvre par des simulations utilisant le logiciel MATLAB-SIMULINK, pour faire une démonstration réelle et actuelle dans le but de prouver la validation de ces méthodes un travail expérimental peut être envisagé. .

Finalement d'autres applications de la commande des bras flexibles présentée dans ce mémoire peuvent faire l'objet de recherche telles que constructions anti-sismiques et la commande optimale des systèmes à plusieurs degrés de liberté telles que les antennes des satellites et les structures spatiales.

[1] W.J.BOOK, “Récursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms.”

int.J.robotics res 1984.

[2] Alessandro De Luca et Bruno Siciliano IEEE Transactions ,Man ,and cybernetics 1991.

[3] Alessandro De Luca, “Robots with Flexible Links : Modeling and control.”

Bertinoro(FC) 2003.

[4] Alessandro De Luca et Bruno Siciliano. “trajectory control of a non linear one-link flexible arm.” 1989.

[5] A.De Luca , P.Lucibello, et F.Nicola, “automatic symbolic modeling and non linear control of robots with flexible links” in proc. IEE Work on robot control oxford

1988.

[6] S.cetinkunt , B.siciliano , et W.J.Book, “symbolic modeling and dynamic analysis of flexible manipulators” in Proc.1986 IEEE Int.Conf.syst.Man,cyber.Atlanta

1986.

[7] Alessandro De Luca et Bruno.Siciliano. “regulation of flexible arms under gravity ”IEEE Transactions On Robotics And Automation 1993.

[8] H.A.Talebi , K.Khorasani et R.V.Patel . “ Tip-position Tracking for flexible-Link Manipulators Using Artificial Neural Networks: Experimental results ” IEEE 1998.

[9] G .Oke, Y.Istefanopoulos “Gradient-Descent Based Trajectory Planning

for Regulation of a Two-Link Flexible Robotic Arm” IEEE/ASME 2001.

[10] P.I.Corke “Robotic Toolbox For Matlab ” 2002 .

[11] Arato.S.Deo thèse de PhD “Inverse Kinematics and Dynamic Control Methods for Robotic Systems ” Houston .Texas.1995

[12] Philippe Coiffet “La Robotique : Principes et Applications ” Editions Hermes Paris 1992.

[13] Wissama Khalil , Etienne Dombre “Modélisation identification et commande des robots ” Editions Hermes science publications Paris 1999.

[14] Victor Gavriloiu Thèse de Master “Design of Dynamic Non-Linear Control Techniques for Flexible-Link Manipulators ” Université de Concordia Canada 2005.

[15] S.K.Dwivedy, P.Eberhard, Mechanism and Machine Theory 41 ELSEVIER Science Direct 2006.

[16] L.Sciavico, B.Siciliano, modelling and control of robot manipulators : The McGraw-Hill Companies Inc, 1996.

[17] E.A.Miranda Thèse de Master “Direct Adaptive control Of a Two-Link Flexible Manipulator” Texas A &M University-Kingsville 2004 .

[18] M.Marie, M.Mokhtari “Application de MATLAB 5 et SIMULINK 2” Edition Springer 1998.

[19] M.T.Hogan, H.B.Demuth, O.De Jesus “An Introducton to The Use Of Neural Networks In Control Systems” .

[20] V.R.Vemuri, ed., “artificial neural networks: concepts and control applications. IEEE Computer Society Press, 1992 .

Paramètres physiques du robot

m1=0.5 Kg m2=0.5 Kg mh1=1 Kg mh2=1 Kg, mp=0.1 Kg .

l1=0.5 m, l2=0.5 m, d2=0.25 m, d1=0.25 m .

ro1=1 Kg/m ro2= 1 Kg/m

jo1=0.0415 Kg m^2 jo2=0.0415 Kg m^2 jh1=0.1 Kg m^2 jh2=0.1 Kg m^2 jp=0.0005 Kg m^2

EI1=10 N m^2 EI2=10 N m^2 g0=9.81 m/s^2

Fichier script d'initialisation des paramètres du modèle de robot

```
m1=0.5;m2=0.5;mh1=1;mh2=1;mp=0.1;
l1=0.5;l2=0.5;d2=0.25;d1=0.25;
ro1=1;ro2=1;
jo1=0.0415;jo2=0.0415;jh1=0.1;jh2=0.1;jp=0.0005;
EI1=10;EI2=10;g0=9.81;
ml1=m2+mh2+mp ;
jl1=jo2+jh2+jp+mp*l2^2;
ml2=mp;jl2=jp;
f11=1.40;f12=5.10;f21=5.21;f22=32.46;
fi11_e=0.39;fi12_e=0.36;fi21_e=1.49;fi22_e=-0.75;
fi11d_e=1.34;fi12d_e=-1.38;fi21d_e=4.30;fi22d_e=-15.49;
v11=0.069;v12=0.12;v21=0.28;v22=0.30;
w11=0.0900;w12=0.18;w21=0.48;w22=0.64;
b111=jh1+jo1+jh2+mh2*l1^2+jo2+m2*l1^2+jp+mp*(l1^2+l2^2);
b112=2*(m2*d2+mp*l2)*l1;
b113=2*(m2*d2+mp*l2);
b114=-2*l1;
b121=jh2+jo2+jp+mp*l2^2;
b122=(m2*d2+mp*l2)*l1;
b123=m2*d2+mp*l2;
b124=-l1;
b131=w11+(jh2+jo2+jp+mp*l2^2)*fi11d_e+(mh2+m2+mp)*l1*fi11_e;
b132=(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e+l1*fi11d_e);
b133=-(fi11_e+l1*fi11d_e);
b134=-(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);
b141=w12+(jh2+jo2+jp+mp*l2^2)*fi12d_e+(mh2+m2+mp)*l1*fi12_e;
b142=(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e+l1*fi12d_e);
```

b143=-(fi12_e+l1*fi12d_e);

b144=-(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e*fi11d_e-fi11_e*fi12d_e);

b151=w21+jp*fi21d_e+mp*l2*fi21_e;

b152=(v21+mp*fi21_e)*l1;

b153=v21+mp*fi21_e;

b161=w22+jp*fi22d_e+mp*l2*fi22_e;

b162=(v22+mp*fi22_e)*l1;

b163=v22+mp*fi22_e;

b221=jh2+jo2+jp+mp*l2^2;

b231=(jh2+jo2+jp+mp*l2^2)*fi11d_e;

b232=(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;

b233=-fi11_e;

b234=-(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;

b241=(jh2+jo2+jp+mp*l2^2)*fi12d_e;

b242=(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;

b243=-fi12_e;

b244=-(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;

b251=w21+jp*fi21d_e+mp*l2*fi21_e;

b261=w22+jp*fi22d_e+mp*l2*fi22_e;

b331=m1;

b332=2*(m2*d2+mp*l2)*fi11_e*fi11d_e;;

b333=-2*fi11_e*fi11d_e;

b341=0;

b342=(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);

b343=-(fi11_e*fi12d_e+fi12_e*fi11d_e);

b351=(w21+jp*fi21d_e+mp*l2*fi21_e)*fi11d_e;

b352=(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;

b353=-(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;

b361=(w22+jp*fi22d_e+mp*l2*fi22_e)*fi11d_e;

b362=(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;

b363=-(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;

b441=m1;

b442=2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e*fi12d_e;

b443=-2*fi12_e*fi12d_e;

b451=(w21+jp*fi21d_e+mp*l2*fi21_e)*fi12d_e;

b452=(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

b453=-(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

b461=(w22+jp*fi22d_e+mp*l2*fi22_e)*fi12d_e;

b462=(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;

b463=-(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;

b551=m2;

b561=0;

b661=m2;

t11=fi11_e-l1*fi11d_e;

t12=fi12_e-l1*fi12d_e;

t21=v21+mp*fi21_e;

t22=v22+mp*fi22_e;

t31=fi11d_e;

t32=fi12d_e;

h101=-2*(m2*d2+mp*l2)*l1;

h102=2*(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e-l1*fi11d_e);

h103=2*(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e-l1*fi12d_e);

h104=-2*(v21+mp*fi21_e)*l1;

h105=-2*(v22+mp*fi22_e)*l1;

h106=-(m2*d2+mp*l2)*l1;

h107=-(m2*d2+mp*l2)*l1*fi12d_e;

h108=-2*(m2*d2+mp*l2)*l1*fi12d_e;

h109=-2*(v21+mp*fi21_e)*l1;

h110=-2*(v22+mp*fi22_e)*l1;

h111=-2*(v21+mp*fi21_e)*l1*fi11d_e;

h112=-2*(v22+mp*fi22_e)*l1*fi11d_e;

h113=-2*(v21+mp*fi21_e)*l1*fi12d_e;

h114=-2*(v22+mp*fi22_e)*l1*fi12d_e;

h115=2*(m2*d2+mp*l2);

h116=m2*d2+mp*l2;

h117=-(v21+mp*fi21_e);

h118=-(v22+mp*fi22_e);

h119=-2*l1;

h120=-l1;

h121=-(fi11_e+l1*fi11d_e);

```
h122=-(fi12_e+l1*fi12d_e);
h123=-(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);
h124=-(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e*fi11d_e-fi11_e*fi12d_e);
h201=(m2*d2+mp*l2)*l1;
h202=2*(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;
h203=2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;
h204=-(m2*d2+mp*l2);
h205=-(v21+mp*fi21_e);
h206=-(v22+mp*fi22_e);
h207=l1;
h208=fi11_e+l1*fi11d_e;
h209=fi12_e+l1*fi12d_e;
h210=(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);
h211=(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e*fi11d_e-fi11_e*fi12d_e);
h212=fi11_e*fi11d_e;
h213=fi11_e*fi12d_e+fi12_e*fi11d_e;
h214=(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;
h215=(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;
h216=fi12_e*fi12d_e;
h217=(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;
h218=(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;
h301=-(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e-l1*fi11d_e);
h302=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;
h303=2*(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e*fi11d_e-fi11_e*fi12d_e);
h304=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;
h305=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;
h306=-(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;
h307=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi11_e*fi11d_e;
h308=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi11_e*fi12d_e;
h309=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;
h310=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;
h311=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi11_e*fi11d_e;
h312=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi11_e*fi11d_e;
h313=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi11_e*fi12d_e;
h314=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi11_e*fi12d_e;
```

h315=-(fi11_e+l1*fi11d_e);

h316=-fi11_e;

h317=-2*fi11_e*fi11d_e;

h318=-(fi11_e*fi12d_e+fi12_e*fi11d_e);

h319=-(m2*d2+mp*l2)*fi11_e;

h320=-(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;

h321=-(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;

h322=-(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);

h401=-(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e-l1*fi12d_e);

h402=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;

h403=2*(m2*d2+mp*l2)*(fi11_e*fi12d_e-fi12_e*fi11d_e);

h404=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

h405=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;

h406=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;

h407=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e*fi11d_e;

h408=-2*(m2*d2+mp*l2)*fi12_e*fi12d_e;

h409=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

h410=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;

h411=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi12_e*fi11d_e;

h412=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi12_e*fi12d_e;

h413=-2*(v21+mp*fi21_e)*fi12_e*fi11d_e;

h414=-2*(v22+mp*fi22_e)*fi12_e*fi12d_e;

h415=-(fi12_e+l1*fi12d_e);

h416=-fi12_e;

h417=-(fi11_e*fi12d_e+fi12_e*fi11d_e);

h418=-2*fi12_e*fi12d_e;

h419=-(m2*d2+mp*l2)*fi12_e;

h420=-(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

h421=-(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;

h422=-(m2*d2+mp*l2)*(fi12_e*fi11d_e-fi11_e*fi12d_e);

h501=(v21+mp*fi21_e)*l1;

h502=2*(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;

h503=2*(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;

h504=v21+mp*fi21_e;

h505=-(v21+mp*fi21_e)*fi11_e;

```
h506=-(v21+mp*fi21_e)*fi12_e;
h601=(v22+mp*fi22_e)*l1;
h602=2*(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;
h603=2*(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;
h604=v22+mp*fi22_e;
h605=-(v22+mp*fi22_e)*fi11_e;
h606=-(v22+mp*fi22_e)*fi12_e;
K=[0;0;m1*4*(pi^2)*f11^2;m1*4*(pi^2)*f12^2;m2*4*(pi^2)*f21^2;m2*4*(pi^2)*f22^2];
D=[0;0;0.1*sqrt(K(3,1));0.1*sqrt(K(4,1));0.1*sqrt(K(5,1));0.1*sqrt(K(6,1))];
g11=g0*(m1*d1+(m2+mh2+mp)*l1);
g12=-g0*((m2+mh2+mp)*fi11_e+v11);
g13=-g0*((m2+mh2+mp)*fi12_e+v12);
g14=g0*(m2*d2+mp*l2);
g15=-g0*(m2*d2+mp*l2)*fi11d_e;
g16=-g0*(m2*d2+mp*l2)*fi12d_e;
g17=-g0*(mp*fi21_e+v21);
g18=-g0*(mp*fi22_e+v22);
g21=g0*(m2*d2+mp*l2);
g22=-g0*(m2*d2+mp*l2)*fi11d_e;
g23=-g0*(m2*d2+mp*l2)*fi12d_e;
g24=-g0*(mp*fi21_e+v21);
g25=-g0*(mp*fi22_e+v22);
g31=g0*((m2+mh2+mp)*fi11_e+v11);
g32=g0*(m2*d2+mp*l2)*fi11d_e;
g41=g0*((m2+mh2+mp)*fi12_e+v12);
g42=g0*(m2*d2+mp*l2)*fi12d_e;
g51=g0*(mp*fi21_e+v21);
g61=g0*(mp*fi22_e+v22);
K1=K(3,1);K2=K(4,1);K3=K(5,1);
K4=K(6,1);F1=0.02;F2=0.02;D1=D(3,1);D2=D(4,1);D3=D(5,1);D4=D(6,1);
```

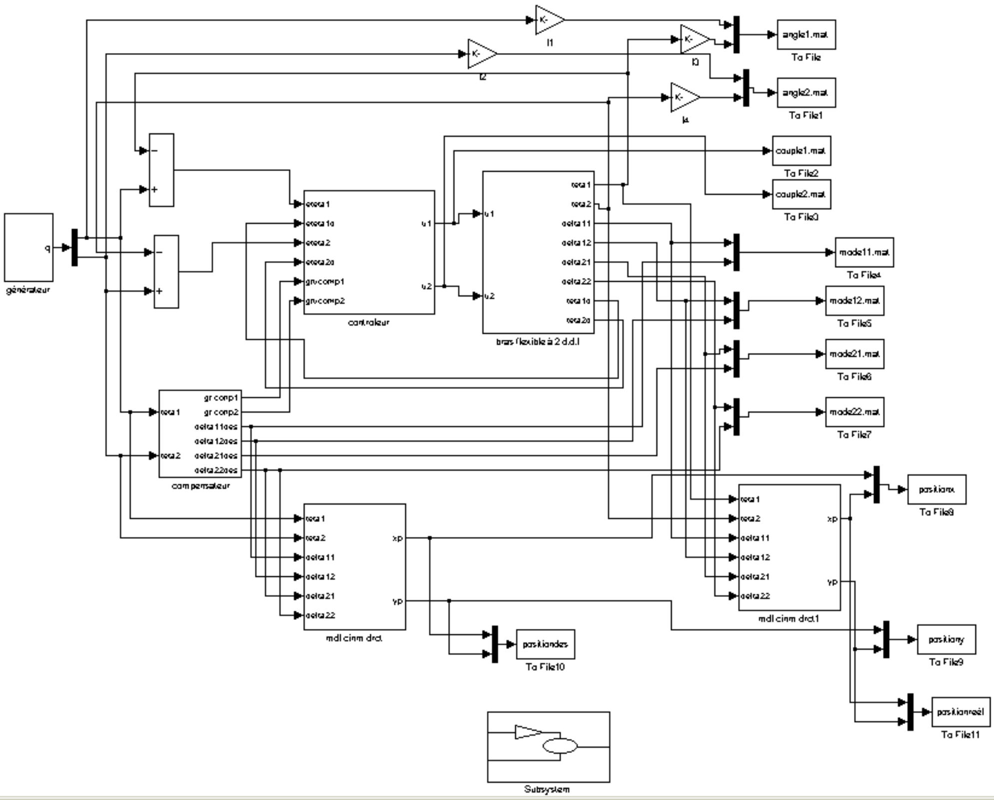


Figure b.1 : schéma simulink de la commande en PD du bras flexible

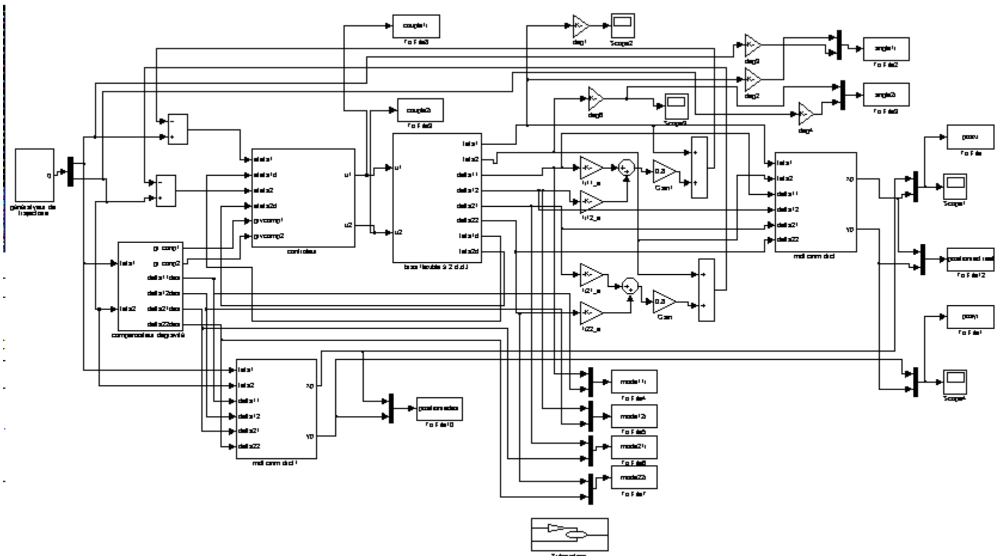


Figure b.2 : schéma simulink de la commande avec redéfinition de la sortie

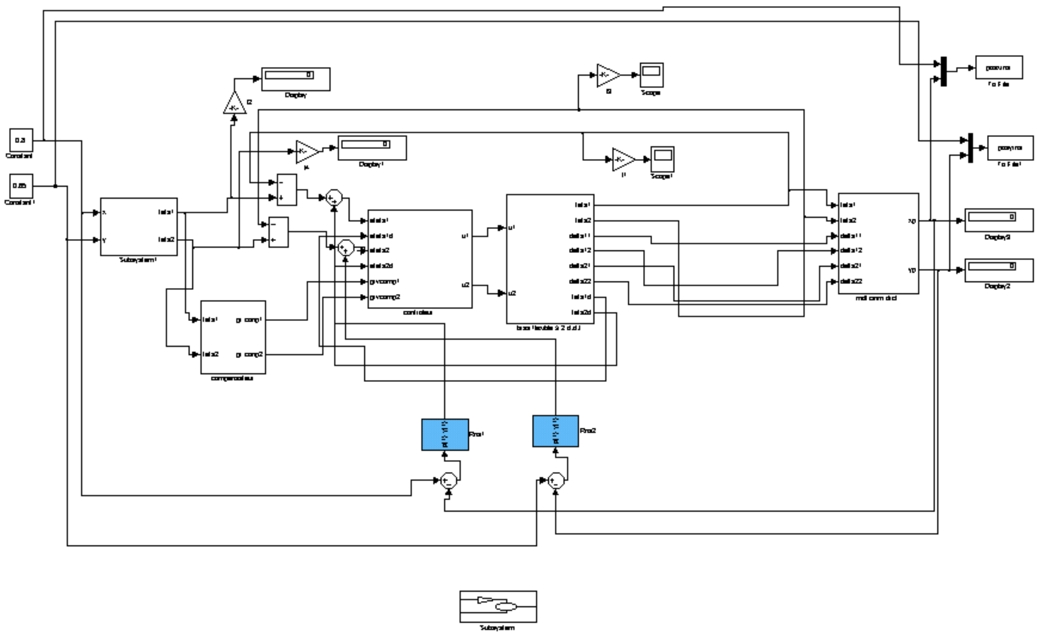


Figure b.3 : schéma simulink de la commande par planification de trajectoire

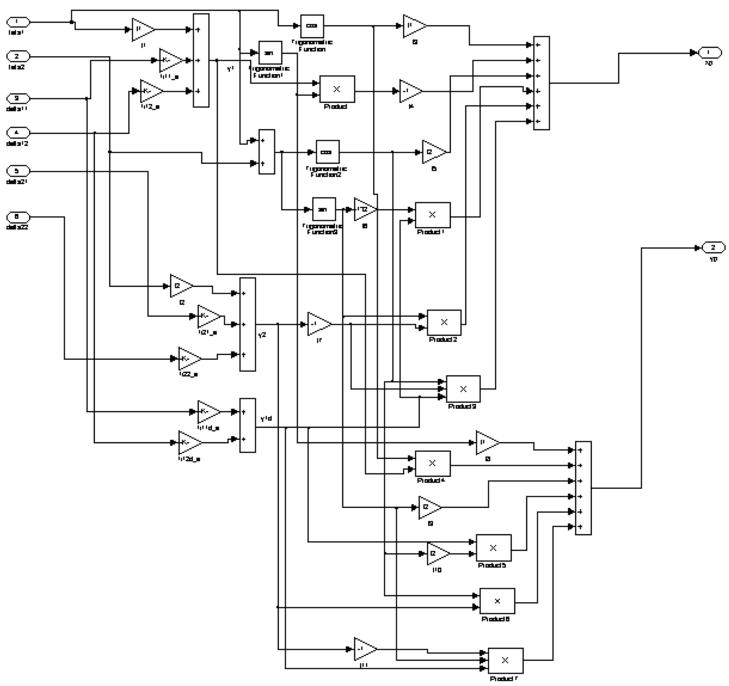


Figure b.4 : schéma simulink du modèle cinématique direct du bras flexible

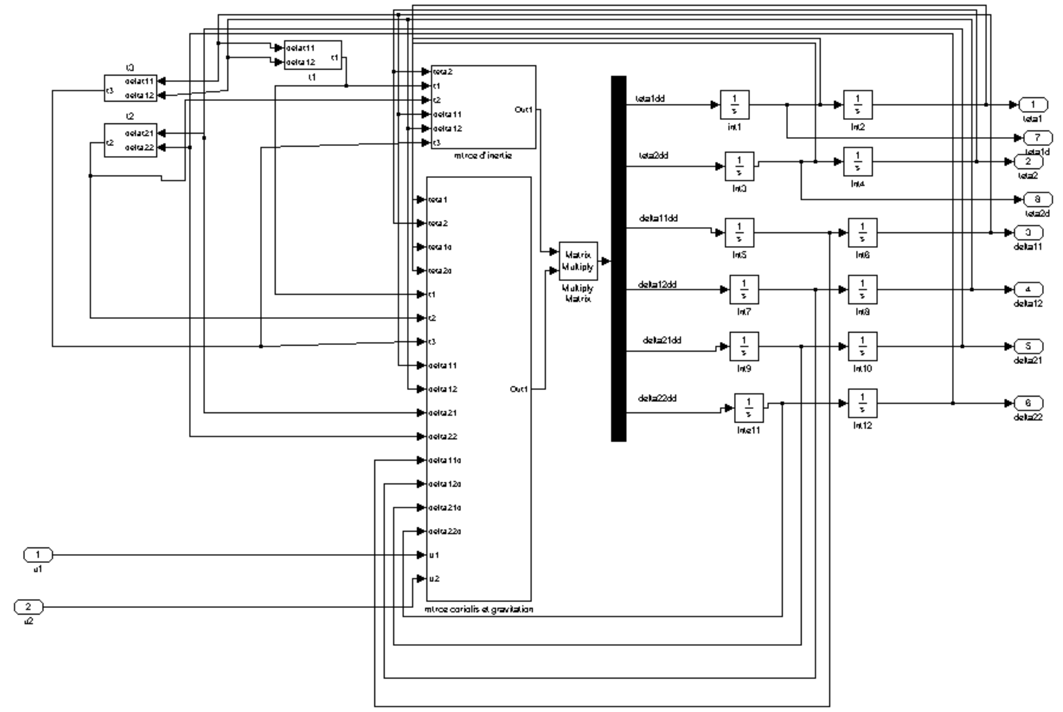


Figure b.5 : schéma simulink du modèle dynamique du bras flexible

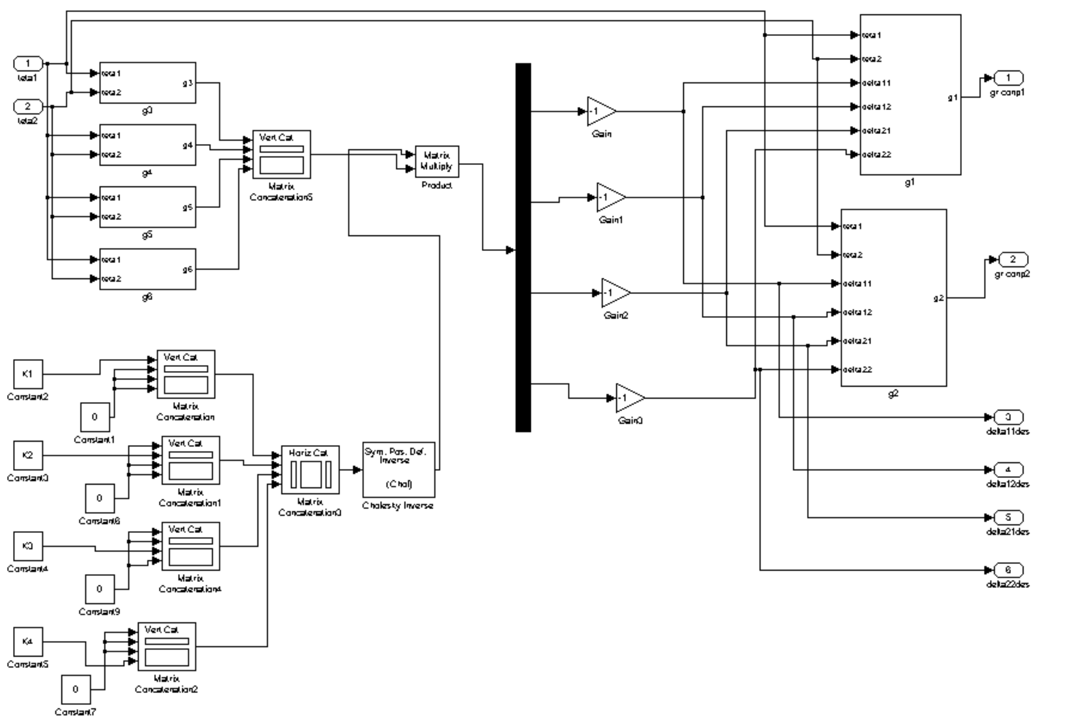


Figure b.6 : schéma simulink du compensateur de gravité du bras flexible

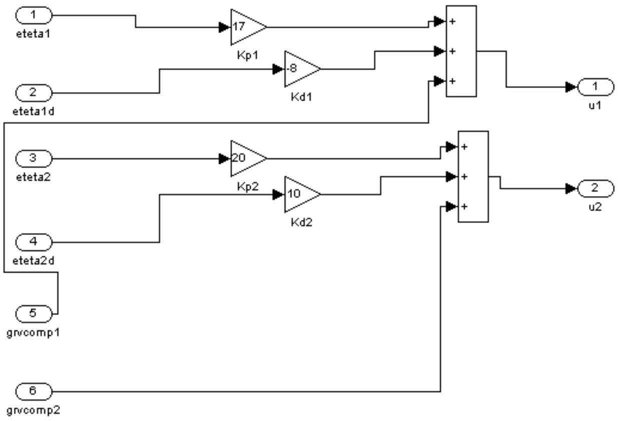


Figure b.7 : schéma simulink du contrôleur P.D du bras flexible