République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Batna

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electrotechnique

Thèse de Doctorat d'État
en Electrotechnique
Option : Commande

Présentée par :
Mr. OUDDAI Ahmed

D.E.S. Physique de l'Université de Constantine
Titulaire d'un Master en Sciences, option Génie-Electrique
de l'Université de Drexel
Philadelphie.PA. U.S.A.

Thème

Commande en temps optimal d'un véhicule autonome

Soutenue le : 16 décembre 2008
Devant le Jury composé de :

Président	:	F. NACERI	Pr.	Université de Batna
Rapporteur	:	A. BENSALEM	M. C.	Université de Batna
Examinateur	:	R. ABDESSEMED	Pr.	Université de Batna
Examinateur	:	S. SELLAMI	M. C.	Université de Batna
Examinateur	:	R. BENZID	M. C.	Université de M'sila

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Batna

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electrotechnique

Thèse de Doctorat d'État
en Electrotechnique
Option : Commande

Présentée par :
Mr. OUDDAI Ahmed

D.E.S. Physique de l'Université de Constantine
Titulaire d'un Master en Sciences, option Génie-Electrique
de l'Université de Drexel
Philadelphie.PA. U.S.A.

Thème

Commande en temps optimal d'un véhicule autonome

Soutenue le : 16 décembre 2008
Devant le Jury composé de :

Président	:	F. NACERI	Pr.	Université de Batna
Rapporteur	:	A. BENSALEM	M. C.	Université de Batna
Examinateur	:	R. ABDESSEMED	Pr.	Université de Batna
Examinateur	:	S. SELLAMI	M. C.	Université de Batna
Examinateur	:	R. BENZID	M. C.	Université de M'sila

RESUME

Le problème de commande en temps optimal des véhicules autonomes est un sujet encore loin d'être résolu. Ceci est essentiellement dû au fait que lors de la mise en œuvre des approches de la théorie de commande optimale on aboutit à un problème aux limites dont la solution n'est pas du tout évidente.

Dans cette thèse on considère un type de robots mobiles holonomes qui est le robot omnidirectionnel. Lequel possède un modèle dynamique ayant l'avantage de découpler les mouvements de rotation et de translation. L'usage d'une transformation de découplage et de linéarisation permet d'avoir un système triple intégrateur équivalent. Le système ainsi obtenu est traité afin de générer des solutions en temps optimal dans les différentes situations possibles et selon la nature du problème (avec ou sans des contraintes).

Des simulations justifiant la validité d'une telle transformation sont présentées et discutées.

Le problème de poursuite de chemin avec minimisation du temps de processus est également étudié.

ملخص

مشكل التحكم بالعربات الذاتية الاشتغال في اقل وقت ممكن هو موضوع من دون حل لحد الآن. أساسا, هذا يكمن في انه حينما نطبق الوسائل النظرية المتوفرة في ميدان التحكم التفضيلي نحصل على مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات شروط حدودية غير بسيطة الحل.

في هذه الرسالة, نعتبر نوع من أنواع العربات الذاتية الاشتغال و هو مما يسمى بالعربات المتعددة الاتجاهات. هذا النوع من الأنظمة يتميز بمعادلات ديناميكية يمكن فصل بعضها عن بعض بحيث تصبح المعادلات الديناميكية الممثلة للحركة الانسحابية مستقلة عن تلك الممثلة للحركة الدورانية.

باستعمال عملية تحويل موافقة يمكن جعل المعادلات السابقة عبارة عن نظام خطي يتمثل في مجموعة معادلات بسيطة تتمثل في مكمل ثلاثي مكفئ. على هذا المستوى يمكن حل النظام المكافئ بحيث انه ينتج لدينا تحكم من شانه ضمان حركة العربة الآلية في أسرع وقت ممكن. هذا في كل الحالات الممكنة, سواء كانت المتغيرات محدودة القيم أم لا.

نقدم كذلك بعض الدراسات المبرمجة بالكمبيوتر من اجل تعليل النتائج المتحصل عليها من خلال التحويل المقدم سابقا.

كذلك في هذه الأطروحة سنتطرق لقضية تتبع العربة الأوتوماتيكية لمسلك معين و ذلك في اقل وقت ممكن و بأكبر دقة ممكنة.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon cher ami et collègue Abdelmalek Bouhentala de m'avoir soutenu dans de certains moments très critiques.

Pour sa disponibilité, son aide et sa générosité, je remercie chaleureusement mon promoteur Dr. Ahmed Bensalem.

Je remercie le professeur Farid Nasri pour avoir accepté de présider le jury de thèse. Je remercie également le professeur Rachid Abdessemed, et les docteurs Saïd Sellami et Réda Benzid de m'avoir accordé cette honorable opportunité en examinant la présente thèse.

A ma très chère fille

Ghada

Sommaire

Chapitre 1

Introduction :

1.1. Généralités :

Les véhicules guidés automatiquement en temps réel sont devenus indispensables, notamment dans les systèmes industriels, stations nucléaires, espaces d'exploration, environnements hostiles. Nombreuses conceptions de robots omnidirectionnels ont étés proposées, qu'on peut classer en deux catégories : conception avec roue traditionnelle, et conception avec roue spéciale ou universelle.

Généralement, la conception mécanique des roues est une simple opération, bien que les roues classiques possèdent une considérable capacité de charge et une grande endurance lorsqu'il s'agit de surfaces déformées. Cependant, à cause de leur nature non holonome leur agilité reste limitée. Certaines robots quasi-omnidirectionnels employant des roues conventionnelles ont étés développés [10], sauf que ces prototypes restent non holonomes car pour réaliser un mouvement rotationnel il va falloir s'arrêter puis réorienter le robot vers l'objectif, ces robots sont connus sous les noms: véhicules manœuvrables [54], et véhicules différentiels qui possèdent une roue libre et deux roues parallèles permettant un mouvement linéaire lorsqu'elles ont la même vitesse et un mouvement rotationnel lorsqu'elles ont des vitesses opposées [16].

La plus commune roue omnidirectionnelle est celle conçue en 1973 par l'ingénieur suédois Bengt Ilon, sur laquelle le couple exercé est dans la même direction que la roue, similairement à la roue conventionnelle, mais qui possède en plus, la capacité de bouger dans une autre direction. L'avantage principal des systèmes omnidirectionnels est que les mouvements de translation et de rotation sont découplés. Malheureusement, ceci n'est pas nécessairement vrai lorsqu'on considère des mouvements très rapides. Notamment dans les compétitions annuelles de football « RoboCup » [3], proposées au début par [34] en 1993, pratiquées à plusieurs occasions telles que Sydney Australie, Ohio Etats Unis. L'agilité des véhicules à omni conduite à montré une qualité importante, la possibilité de poursuivre une cible tout en gardant la bonne direction. Les cinématiques des systèmes à omni direction sont bien connues [13], plusieurs travaux ont étés réalisés dans ce sens, par exemple robots à trois roues [29], à quatre roues [25], et même à six roues [4]. Cependant, jusqu'à présent les études des performances de ces robots dans des chemins à plusieurs déviations sont insuffisantes. De telles études exigent l'optimisation de ces performances en particulier dans des domaines de compétition nécessitant une très grande vitesse, autrement dit des mouvements en temps minimal. Ce qui est surprenant dans les robots omni directionnels, c'est qu'ils peuvent se déplacer plus rapidement dans des trajectoires à déviations qu'en suivant des lignes droites, ceci est vérifié théoriquement [12].

Les méthodes de commande de robots mobiles les plus connues sont basées sur les modèles dynamiques des robots [51], ou bien les modèles cinématiques [50]. Le modèle dynamique décrit les relations entres les forces et/ou couples exercées sur les roues et le mouvement de déplacement du robot, où les tensions/courants appliquées sur chaque roue représentent les entrées, et le mouvement exprimé en fonction des accélérations linéaire et angulaire du robot comme sorties, malheureusement, les changements dus aux variations possibles du moment d'inertie du robot ainsi que les perturbations dans certains composants mécaniques rendent la conception de la commande plus complexe [44]. Dans le modèle cinématique [15], les dynamiques des actuateurs (moteurs) supposées très rapides et donc négligées, rend les vitesses angulaires des roues directement accessibles, en supposant un mouvement sans glissement, et à cause de la simple structure du modèle l'opération est relativement beaucoup plus facile. Les grandeurs d'entrée du modèle cinématique sont les vitesses angulaires des roues, et les grandeurs de sortie sont les vitesses linéaire et angulaire du robot. Néanmoins, dans les situations pratiques, les dynamiques des actuateurs affectent considérablement les performances du robot, ce qui rend l'approche cinématique incomplète.

En réalité, il existe un aspect important qui est les saturations au niveau des actuateurs. En effet, du moment que les vitesses de commande des moteurs liés au roues sont limitées, les actuateurs sont par la suite saturés, affectant ainsi les performances du robot, et rendant le mouvement instable [24].

Le processus de commande de trajectoires de robots mobiles omni directionnels peut être divisé en deux tâches principales, planification de trajectoires et poursuite de trajectoires. Dans la tâche de planification de trajectoire, l'objectif est de réaliser une trajectoire faisable (qui respecte les contraintes) et optimale [25]. Dans la tâche de poursuite de trajectoire, le but est d'employer une rétroaction appropriée afin de traquer une trajectoire donnée [56].

1.2. Roues universelles :

Les roues omni directionnelles les plus simples sont les roues décentrées (roues de chariots de supermarché). La technique générale de fabrication de roues spéciales ou universelles consiste à utiliser des roues sphériques [18] ou des associations de roues sphériques tronquées et montées orthogonalement les unes par rapport aux autres de telle sorte que lors du pivotement de l'axe motorisé, le contact sur le sol se fait en alternance avec l'une ou l'autre des roues formant l'essieu. Nombreux types de roues omnidirectionnelles sont conçus jusqu'à présent, elles sont fabriquées de matériaux spéciaux de façon à ce qu'elles soient légères, résistances contre les chocs et les vibrations, adhérentes avec le sol afin de réduire les effets des glissements, et sont choisies selon les types des moteurs disponibles. Parmi ces roues, il y'a la roue utilisée par [4], qui est constituée de douze petites roues cylindriques libres (fig. 1.), le diamètre de la roue principale est $132\ mm$ et son épaisseur est $30\ mm$.

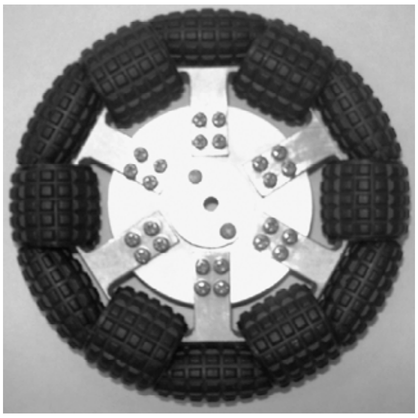


Figure 1. Roue universelle 1.

Un autre type de roues omni directionnelles est celui de la figure 2. Dont le matériau des roues secondaires est du polyuréthane très performant vis-à-vis des contacts avec le sol. Le diamètre le plus fréquent pour ce genre de roues est de $8\ cm$.

Figure 2. Roue universelle 2.

Un troisième type de roues spéciales (fig. 3.), qui à été utilisée en 2002 dans la compétition Robocup par [22].

Figure 3. Roue universelle 3.

Un autre genre de roues universelles, dites roues suédoises, qui ont étés conçues par le pionnier du domaine cité antérieurement. Contrairement aux trois dernières roues, celle-ci possède la particularité que l'axe de chaque roue secondaire n'est ni perpendiculaire ni parallèle à l'axe de la roue principale (fig. 4.).

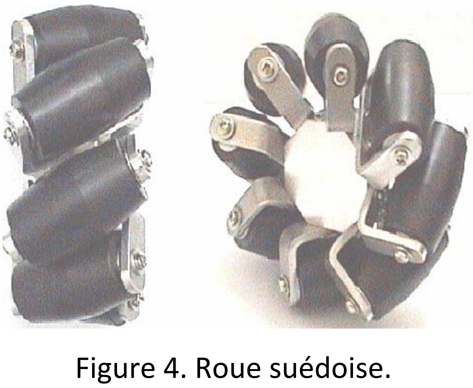


Figure 4. Roue suédoise.

Les dimensions les plus fréquemment employées dans ce dernier type de roues sont : $20\ mm$ de diamètre pour chaque roue secondaire et $110\ mm$ de diamètre pour la roue principale, le matériau utilisé est de l'aluminium pour garantir la légèreté.

1.3. Principaux types d'actuateurs :

Il existe une multitude de configurations d'actuateurs, les plus souvent utilisées sont les moteurs à courant continu (DC) qui offrent un excellent couple de démarrage et sont adéquats pour les prototypes fonctionnant avec des piles. Parmi ces derniers, on trouve les moteurs DC à balais, tel que les moteurs à aimants permanents qui offrent des relations vitesse-couple et courant-couple sur une très grande plage. Les moteurs DC sans balais ont une durée de vie plus longue et moins d'entretien nécessaire, mais exigent des circuits électroniques spécialisés pour les contrôler. Les moteurs DC pas-à-pas qui sont rotatifs et dont le mouvement est engendré grâce à des impulsions électriques, chaque impulsion fait tourner le moteur d'un pas prédéterminé et donc la possibilité de contrôler la position du moteur simplement en envoyant le nombre d'impulsions nécessaires (commande en boucle ouverte), il peuvent également offrir un bon couple de blocage, mais leur vitesse de rotation est, désormais, relativement faible. Les pistons pneumatiques représentent un autre type d'actuateurs, ils utilisent l'air comprimé pour produire une puissance considérable, donc peuvent être utilisés dans des systèmes de régulation de pression. La commutation de ces pistons demande très peu d'énergie électrique, ce qui rend leur usage dans la commande tout-ou-rien très pratique et simple, mieux encore, la possibilité de la commande de force, vitesse, et position.

Les pistons hydrauliques sont très similaires aux pistons pneumatiques, ils ont la caractéristique de générer une énorme puissance, leur inconvénient est qu'ils sont mal adaptés aux systèmes embarqués fonctionnant à l'énergie électrique. Un autre type d'actuateurs, les pistons électriques ou techniquement connus sous le nom de solénoïdes, sont exclusivement utilisés dans des systèmes fonctionnant à l'énergie électrique.

1.4. Plates-formes :

Les plates-formes employées dans la conception de véhicules à guidage omnidirectionnel sont de différentes configurations, les formes les plus souvent utilisées sont la forme triangulaire (correspondant à trois roues, fig. 5.), et la forme rectangulaire (qui correspond à quatre roues omni directionnelles, fig. 6.).

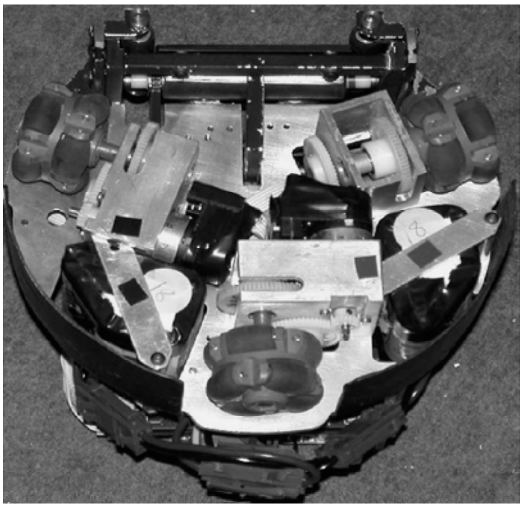


Figure 5. Vue de dessous d'une plate-forme à trois roues.

Comme il a été précisé avant, le choix des plates-formes se fait en fonction du type de moteurs utilisés. Evidemment, il y'à toujours le dilemme entre performance et coût. Cependant, il est impératif de concevoir les plates-formes de telle façon que chaque composant du robot soit accessible. Toute complexité de fabrication doit être évitée afin d'éliminer d'éventuels problèmes de commande du robot.

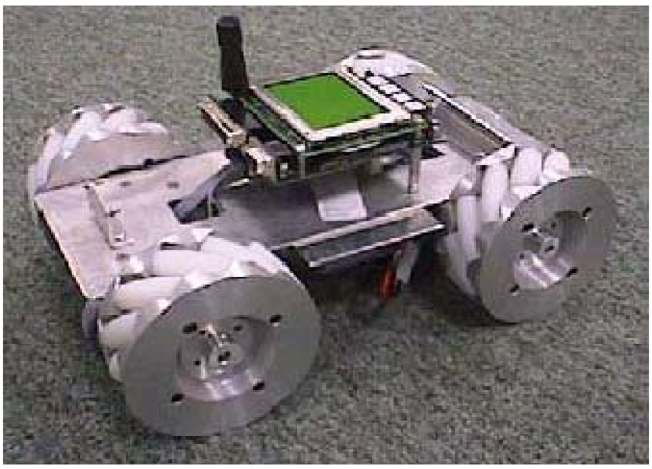


Figure 6. Plate-forme à quatre roues (Omni bot, Université d'Australie).

Notons, que le modèle à trois roues consomme moins d'énergie, plus léger, et possède des côtés plus larges. En contrepartie, le modèle à quatre roues est plus puissant, plus stable, et peut supporter des charges relativement grandes.

1.5. Définition du problème :

La conception des roues à mouvement omnidirectionnel à contribué énormément dans la commande des véhicules autonomes, plus spécifiquement, la commande optimale. Dans les systèmes non-holonomes classiques, comme on n'a pas la possibilité de réaliser tous les chemins à partir d'une configuration initiale donnée, la question d'optimisation globale reste sans réponse. Grace aux prototypes modernes de robots omnidirectionnels, il est possible de surmonter cette difficulté.

L'objectif principal de cette thèse est de développer des solutions en temps optimal pour un véhicule omnidirectionnel à trois roues selon les deux axes principaux suivants :

- Planification de chemin en temps minimal en respectant les contraintes imposées sur les dynamiques du véhicule.
- Poursuite de trajectoire, dans ce contexte, nous pouvons donc considérer ce cas comme étant un problème de navigation en environnement naturel avec pré-planification de trajectoire.

Le travail présenté dans cette dissertation est constitué des étapes suivantes :

Le chapitre 2 consiste à présenter les modèles cinématique et dynamique du robot omnidirectionnel à trois roues. Pour le modèle dynamique, les constantes de temps électrique et mécaniques sont prises en considération.

Dans le chapitre 3, certaines méthodes de linéarisation, en particulier, par rétroaction des variables d'états, sont traitées. Une transformation de linéarisation et de découplage est employée. Des simulations concernant la réponse indicielle du système équivalent sont réalisées afin de montrer la validité de la transformation.

Le chapitre 4 exploite les résultats obtenus précédemment dans le but de résoudre le problème de commande en temps optimal du système découplé et linéarisé équivalent en tenant compte des contraintes sur les variables d'état également.

Dans le chapitre 5 on s'intéresse à la stabilité permettant la réalisation de la transformation de découplage et de linéarisation appliquée dans le chapitre 3.

Le dernier chapitre (6), traite le cas où on désire minimiser le temps au sein d'une trajectoire planifiée. Sachant que cette trajectoire est statique, autrement dit, un chemin.

Enfin, une conclusion générale et les perspectives d'avenir pour d'éventuels thèmes de recherche.

Chapitre 2

Modélisation :

2.1. Introduction :

Lorsqu'on désire concevoir un contrôleur dont l'objectif est de réaliser une tâche bien précise que le robot doit effectuer, la première étape serait l'expression des équations du mouvement du système global. Dans le but de simplifier la procédure d'analyse, quelques suppositions sont prises en considération. Tout d'abord, on assume que le mouvement des trois roues est sans glissement, d'autre part, la friction est réduite à un simple coefficient de frottement. Toutefois, on est convaincu que le contrôleur correspondant au modèle simplifié serait capable de compenser les éléments négligés dans la modélisation.

Deux référentiels sont considérés dans le processus de modélisation : le repère cartésien (repère mobile ou relatif) et le repère absolu (repère fixe). Le référentiel mobile est lié au robot dont l'origine est le centre de gravité du véhicule, comme les moteurs sont supposés identiques le robot aurait une structure homogène qui signifie tout simplement que le centre de gravité serait exactement confondu avec le centre de la plateforme. Le référentiel fixe est généralement positionné au niveau de l'observateur.

Pour le robot omnidirectionnel à trois roues, les terminologies suivantes seront utilisées : roue 1 correspond à la roue arrière, roue 2 est la roue avant droite, et la roue 3 est la roue avant gauche.

2.1.1. Définition du degré de liberté :

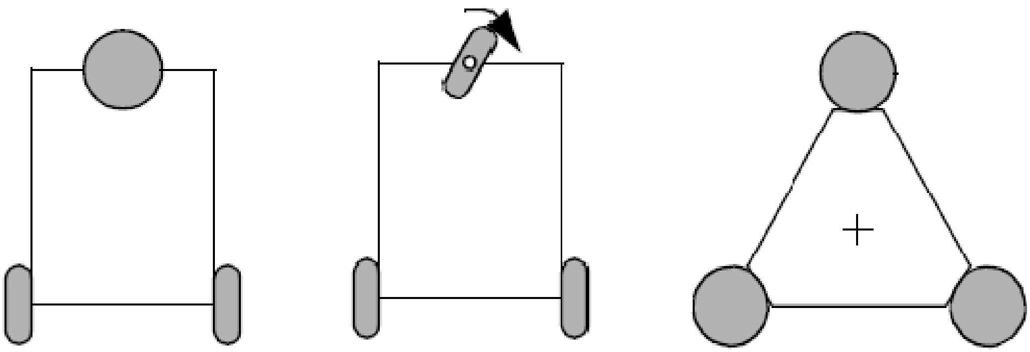
Lorsqu'on définit l'espace de travail du robot, il est nécessaire d'étudier l'espace des vitesses admissibles. Ayant obtenu les contraintes cinématiques du robot, l'espace des vitesses serait l'ensemble d'éléments indépendants que le robot peut contrôler.

La dimension de cet espace de vitesses serait donc, le nombre de vitesses accessibles et indépendantes. Ce nombre est appelé degré de liberté différentiable (DLD).

Pour le degré de liberté (DL), il y 'a deux définitions possibles. La première définition est mathématique, où le nombre du degré de liberté d'un robot est exactement le nombre d'équations indépendantes qui régissent son mouvement. La deuxième définition est triviale, le nombre de degrés de liberté est le nombre de postures que le robot peut atteindre.

2.1.2. Définition des degrés de mobilité et de braquage:

L'habilité de glissement dans n'importe quelle direction est appelée mobilité. Tandis que, le braquage signifie la possibilité de tourner directement. Quelques types de robots à roues sont montrés dans la figure 7.



Différentiel Tricycle Omni conduite

Figure 7. Quelques robots à roues.

Dans le cas du véhicule différentiel, la roue avant est une roue généralement sphérique de type omni directionnel, appelée (caster wheel), donc possède un degré de mobilité, mais pour les deux roues arrières, comme elles ont le même axe de rotation (la seule différence entre les deux roues c'est que l'une tourne dans un sens et l'autre dans un autre sens, en notant que les sens peuvent être opposés), alors toutes les deux roues possèdent une seule mobilité. Au total, on obtient deux degrés de mobilités. Pour le tricycle, la roue avant permet le glissement gouverné par l'essieu arrière, et permet aussi le braquage instantané. Donc ce véhicule possède un degré de braquage (correspondant à la roue avant), et un degré de mobilité qui correspond à l'ensemble de deux roues arrière.

Le dernier cas, qui est celui du robot omnidirectionnel, évidemment les trois roues permettent le glissement dans n'importe quel sens. Alors ce type de robot possède un degré de mobilité égale à trois, et un degré de braquage nul.

N'oublions pas de souligner les remarques suivantes :

1) Le nombre minimum que peut avoir le degré de mobilité pour un véhicule donné est un.
2) Le nombre maximum que peuvent avoir les degrés de mobilité et de braquage est trois.
3) Le DLD d'un robot est toujours égal à son degré de mobilité.

2.1.3. Définition de l'holonomie :

Le terme « holonomie » est souvent employé en mathématiques, notamment en équations différentielles et en optimisation. Quand on parle de holonomie, on signifie la contrainte holonome. Une contrainte holonome est une expression explicite de la posture (position et orientation). Une contrainte non holonome est une expression reliant des termes tels que les dérivées premières des éléments de la position/orientation, où il serait impossible de procéder à l'intégration dans le but d'établir une relation explicite entre les grandeurs position/orientation. C'est exactement pour cette raison là que le système non holonome est souvent appelé système non-intégrable.

2.2. Modèle cinématique :

Considérons les vitesses linéaires (de translation) v_1, v_2, et v_3 des roues de mêmes position et orientation que celles des forces f_1, f_2,et f_3 respectivement, montrées sur la figure 10.

Dans le repère mobile les composantes de la vitesse sont :

$$\dot{x}_m = -v_1 sin\, {}^{\pi}/_{6} - v_2 sin\, {}^{\pi}/_{6} + v_3 \qquad (2.2.1)$$

$$\dot{y}_m = v_1 cos\, {}^{\pi}/_{6} - v_2 cos\, {}^{\pi}/_{6} \qquad (2.2.2)$$

$$\dot{\psi} = {}^{(v_1 + v_2 + v_3)}/_{3d} \qquad (2.2.3)$$

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{1}/_{2} & -{}^{1}/_{2} & 1 \\ {}^{\sqrt{3}}/_{2} & -{}^{\sqrt{3}}/_{2} & 0 \\ {}^{1}/_{3d} & {}^{1}/_{3d} & {}^{1}/_{3d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad (2.2.4)$$

Autrement dit, les vitesses angulaires des roues sont:

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = {}^1/_r\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = {}^1/_r\begin{pmatrix}-{}^1/_2 & -{}^1/_2 & 1\\ {}^{\sqrt{3}}/_2 & -{}^{\sqrt{3}}/_2 & 0\\ {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{y}_m\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

r représente le rayon des roues (identiques).

Pour exprimer la vitesse dans la plan absolu, nous devons faire appel à la matrice de rotation :

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}cos\psi & -sin\psi\\ sin\psi & cos\psi\end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Où ψ est l'orientation du robot (figure 10).

Dans le but de tenir compte de toutes les composantes de la vitesse, on utilise la matrice de rotation généralisée :

$$\boldsymbol{R'} = \begin{pmatrix}cos\psi & -sin\psi & 0\\ sin\psi & cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

De telle façon que :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_a\\ \dot{y}_a\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} = \boldsymbol{R'}\begin{pmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{y}_m\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} = \boldsymbol{R'}\begin{pmatrix}-{}^1/_2 & -{}^1/_2 & 1\\ {}^{\sqrt{3}}/_2 & -{}^{\sqrt{3}}/_2 & 0\\ {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

On peut également exprimer les équations cinématique inverses comme suit:

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-{}^1/_3 & {}^1/_{\sqrt{3}} & d\\ -{}^1/_3 & -{}^1/_{\sqrt{3}} & d\\ {}^2/_3 & 0 & d\end{pmatrix}\boldsymbol{R'}^T\begin{pmatrix}\dot{x}_a\\ \dot{y}_a\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

Pour illustrer la présente étude, on peut traiter le simple exemple suivant :

Se déplacer suivant l'axe horizontal Ox durant 1 seconde avec une vitesse constante égale à 1m/s, ensuite changer d'orientation avec un angle égal à 90° pendant 1 seconde, enfin, se déplacer suivant l'axe vertical Oy durant 1 seconde avec une vitesse constante 1m/s. Ceci correspond au mouvement de la figure 8. Les variations des déplacements par rapport à Ox et Oy ainsi que le changement d'orientation sont indiquées dans la figure 9. La courbe bleue désigne la variation horizontale, la rouge celle de la variation verticale, et la jaune correspond à l'orientation du robot.

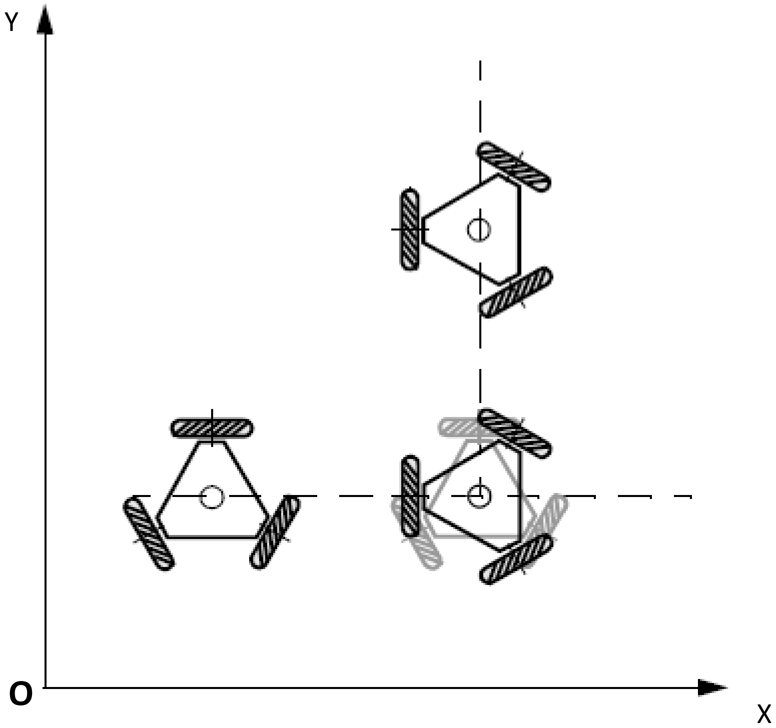


Figure 8. Exemple d'une simple trajectoire.

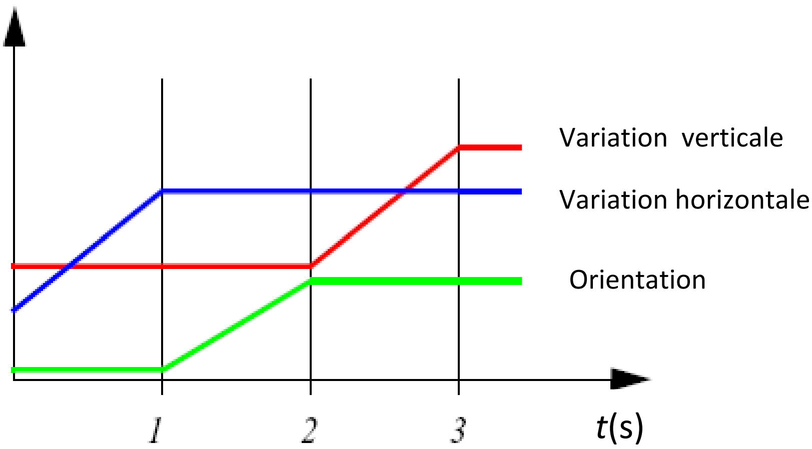


Figure 9. Positions en fonction du temps.

Les différentes solutions en temps optimal dans le cas cinématique ont été générées dans [6], et sont résumées dans l'annexe A.

2.3. Modèle dynamique :

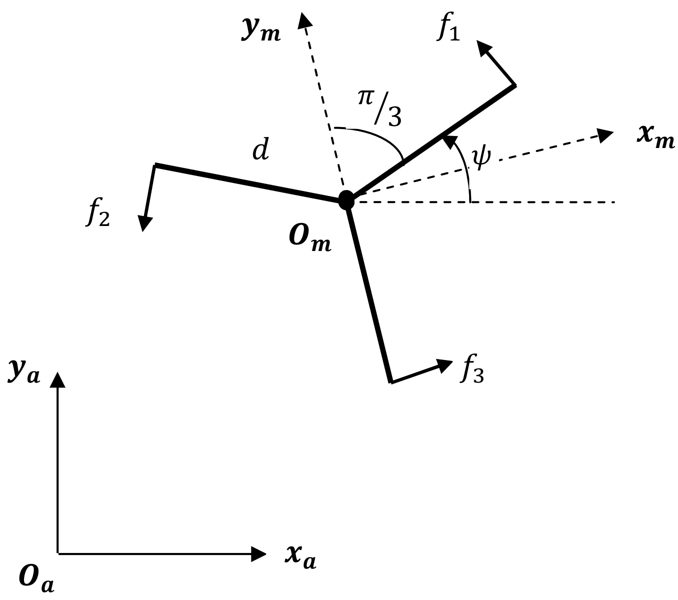


Figure 10. Représentation
du robot omnidirectionnel

Soient $\boldsymbol{F} = (f_1 \ f_2 \ f_3)^T$ le vecteur de forces motrices, $\boldsymbol{U} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ le vecteur des tensions d'entrées appliquées sur les roues, J_z le moment d'inertie du robot autour de l'axe $\boldsymbol{O}_m\boldsymbol{z}_m$.

Les trois barres représentatives du robot étant séparées les unes des autres par un angle de 120°, et la longueur de chacune est d. En considérant m la masse du robot, et J le moment cinétique de chaque roue, alors d'après les lois de la mécanique classique nous avons :

$$m\ddot{\boldsymbol{S}}_a = \boldsymbol{F}_a \qquad (2.3.1)$$

Où $\ddot{\boldsymbol{S}}_a$représente le vecteur accélération du centre de gravité du robot (supposé au point$\boldsymbol{O_m}$), et $\boldsymbol{F}_a$ le vecteur force appliqué sur le robot dans le repère absolu (fixe) $\boldsymbol{O_a x_a y_a}$.

La matrice de rotation donnée dans la formule (2.2.6), nous permet d'exprimer la relation entre les vecteurs de vitesses dans les deux repères :

$$\dot{\boldsymbol{S}}_a = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{S}}_m \tag{2.3.2}$$

$\dot{\boldsymbol{S}}_m = \begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{pmatrix}$ est le vecteur des vitesses dans le repère mobile $\boldsymbol{O_m x_m y_m}$.

On a également :

$$J_z\ddot{\psi} = M_0 = d(1 \quad 1 \quad 1)\boldsymbol{F} \tag{2.3.3}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f_{\boldsymbol{1}} \\ f_{\boldsymbol{2}} \\ f_3 \end{pmatrix}$$

En dérivant l'équation (2.3.2) on obtient :

$$\ddot{\boldsymbol{S}}_a = \dot{\boldsymbol{R}}\dot{\boldsymbol{S}}_m + \boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{S}}_m \tag{2.3.4}$$

On a aussi : $$\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{F} \tag{2.3.5}$$

Toutes ces relations nous permettent d'aboutir au système d'équations suivant :

$$m(\ddot{x}_m - \dot{y}_m\dot{\psi}) = f_x = \left(-1/2 \quad -1/2 \quad 1\right)\boldsymbol{F} \tag{2.3.6-1}$$

$$m(\ddot{y}_m + \dot{x}_m\dot{\psi}) = f_y = \left(1 \quad -1/2 \quad -1/2\right)\boldsymbol{F} \tag{2.3.6-2}$$

$$J_z\ddot{\psi} = d(1 \quad 1 \quad 1)\boldsymbol{F} \tag{2.3.6-3}$$

Autrement dit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \dot{\psi}\begin{pmatrix} \dot{y}_m \\ -\dot{x}_m \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{PF} \tag{2.3.7}$$

Avec : $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1/2m & -1/2m & 1/m \\ \sqrt{3}/2m & -\sqrt{3}/2m & 0 \\ d/J_z & d/J_z & d/J_z \end{pmatrix}$$

La relation entre les vitesses angulaires des roues et les coordonnées dans le repère mobile s'exprime comme suit :

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{y}_m\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} \qquad (2.3.8)$$

Avec : $$\boldsymbol{Q} = {}^{\rho}/_{r}\begin{pmatrix} -{}^{1}/_{2} & {}^{\sqrt{3}}/_{2} & d \\ -{}^{1}/_{2} & -{}^{\sqrt{3}}/_{2} & d \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix}$$

ρ est par définition le rapport de réduction du moteur >1.

A présent pour chacun des trois moteurs actionnant les roues on a :

$$J\dot{\omega}_j + \tau_j + F_v\omega_j = \rho K_T I_j \qquad (2.3.9\text{-}1)$$

$$L\dot{I}_j + r_a I_j + \rho K_V \omega_j = V_j \qquad (2.3.9\text{-}2)$$

Et ceci pour $j = 1,2,3$.

V_j la tension d'entrée du moteur j,

$\tau_j = rf_j$ est la charge appliquée sur le moteur j,

I_j le courant d'armature du moteur j,

r_a La résistance d'armature,

L L'inductance d'armature,

K_T La constante de couple,

K_V La force contre électromotrice,

F_v Le coefficient de frottement.

ω_j La vitesse angulaire de la roue j.

En combinant les équations (2.3.6) jusqu'à (2.3.9-1) on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_m\\ \ddot{y}_m\\ \ddot{\psi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2'\dot{\psi} & 0 \\ -a_2'\dot{\psi} & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{y}_m\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} + \rho K_T \begin{pmatrix} -b_1 & -b_1 & 2b_1 \\ \sqrt{3}b_1 & -\sqrt{3}b_1 & 0 \\ b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{pmatrix} \qquad (2.3.10)$$

Tel que :

$$a_1 = -{}^{3\rho F_v}\big/_{(3\rho J + 2mr^2)}$$

$$a_2' = {}^{2mr^2}\big/_{(3\rho J + 2mr^2)}$$

$$a_{3=} - {}^{3\rho F_v d^2}\!\Big/_{(3\rho J d^2 + J_z r^2)}$$

$$b_1 = {}^{r}\!/_{(3\rho J + 2mr^2)}$$

$$b_2 = {}^{rd}\!/_{(3\rho J d^2 + J_z r^2)}$$

On peut réciproquement, en employant les équations (2.3.10-1), (2.3.10-2) et l'expression de la matrice de rotation, déduire les équations dynamiques dans le repère absolu suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{y}_a \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2\dot{\psi} & 0 \\ a_2\dot{\psi} & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \rho K_T \begin{pmatrix} b_1\alpha_1 & b_1\alpha_2 & 2b_1 cos\psi \\ b_1\alpha_3 & b_1\alpha_4 & 2b_1 sin\psi \\ b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

Telles que :

$$a_2 = 1 - a_2' = {}^{3\rho J}\!\Big/_{(3\rho J + 2mr^2)}$$

$$\alpha_1 = -\left(\sqrt{3} sin\psi + cos\psi\right); \quad \alpha_2 = \sqrt{3} sin\psi - cos\psi;$$

$$\alpha_3 = -sin\psi + \sqrt{3} cos\psi; \quad \alpha_4 = -\left(sin\psi + \sqrt{3} cos\psi\right).$$

Notons que l'équation (2.3.9-2) peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = {}^{1}\!/_{L} \left\{ -\rho K_V \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}'^T \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} - r_a \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \right\} \qquad (2.3.12)$$

A présent on introduit les vecteurs de variables d'état suivants :

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ \psi \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \Omega \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \qquad (2.3.13)$$

Avec : $\dot{\psi} = \Omega$;

En tenant compte des trois dernières équations on obtient le système suivant :

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{X}_2 \quad (2.3.14\text{-}1)$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{A}(\Omega)\boldsymbol{X}_2 + \rho K_T \boldsymbol{B}(\psi)\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{\phi} \quad (2.3.14\text{-}2)$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_3 = (-\rho^2 K_V \boldsymbol{C}(\psi)\boldsymbol{X}_2 - r r_a \boldsymbol{X}_3 + r\boldsymbol{V})/(rL) \quad (2.3.14\text{-}3)$$

Où : $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur des tensions d'entrées de chaque moteur,

$$\boldsymbol{A}(\Omega) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2\Omega & 0 \\ a_2\Omega & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B}(\psi) = \begin{pmatrix} b_1\alpha_1 & b_1\alpha_2 & 2b_1 cos\psi \\ b_1\alpha_3 & b_1\alpha_4 & 2b_1 sin\psi \\ b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}(\psi) = \begin{pmatrix} {}^{\alpha_1}/_2 & {}^{\alpha_3}/_2 & d \\ {}^{\alpha_2}/_2 & {}^{\alpha_4}/_2 & d \\ cos\psi & sin\psi & d \end{pmatrix}$$

Remarquons que si on néglige l'inductance de l'armature et la force contrélectromotrice du moteur on retrouve le résultat obtenu par [53].

Maintenant on définit le vecteur d'états augmenté suivant :

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 \end{pmatrix}$$

Dans le but de découpler le système précédent on introduit la transformation suivante :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

Notons que $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{R}^{3\times 3}$.

Telle que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_1 &= \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 &= \boldsymbol{X}_2 = \dot{\boldsymbol{X}}_1 \\ \boldsymbol{Y}_3 &= \boldsymbol{\phi} = \dot{\boldsymbol{X}}_2 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Par conséquent, le système d'équations (2.3.14) est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{Y}}_1 &= \dot{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{Y}_2 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_2 &= \dot{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{Y}_3 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_3 &= \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

L'équation (2.3.17-3) est la seule équation qui contient le vecteur d'entrée V à travers $\dot{\boldsymbol{X}}_3$. Donc, la transformation de linéarisation peut être effectuée par rétroaction des états et un choix approprié du vecteur d'entrée.

Dans le but d'avoir la forme du triple intégrateur, on doit supposer le suivant :

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_3 = \boldsymbol{U} \tag{2.3.18}$$

Où $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R^3}$ est le nouveau vecteur d'entrées.

Autrement dit, les équations (2.3.17-3) et (2.3.18) définissent la rétroaction des états de la façon suivante :

$$\boldsymbol{U} = \dot{\boldsymbol{Y}}_3 = \dot{\boldsymbol{A}}(\Omega)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{A}(\Omega)\dot{\boldsymbol{X}}_2 + \rho K_T\left[\dot{\boldsymbol{B}}(\psi)\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{B}(\psi)\dot{\boldsymbol{X}}_3\right] \tag{2.3.19}$$

En utilisant l'équation (2.3.14-3) on obtient :

$$\boldsymbol{U} = \dot{\boldsymbol{A}}(\Omega)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{A}(\Omega)\boldsymbol{\phi} + \rho K_T\left[\dot{\boldsymbol{B}}(\psi)\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{B}(\psi)\{-\rho^2 K_V \boldsymbol{C}(\psi)\boldsymbol{X}_2 - r r_a \boldsymbol{X}_3 + r\boldsymbol{V}\}/(rL)\right]$$

Cette dernière formule peut être écrite sous une forme plus compacte :

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}_1(\Omega, \dot{\Omega})\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{F}_2(\psi, \Omega)\boldsymbol{X}_3 + {}^{\rho K_T \boldsymbol{B}(\psi)\boldsymbol{V}}\!/_{L} \tag{2.3.20}$$

De telle sorte que :

$$\boldsymbol{F}_1(\Omega, \dot{\Omega}) = \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{A}^2 - {}^{\rho^3 K_T K_V \boldsymbol{BC}}\!/_{rL} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_2(\psi, \Omega) = \rho K_T \left\{\dot{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{AB} - {}^{r_a \boldsymbol{B}}\!/_{L}\right\} = \rho K_T \begin{pmatrix} d_1 & d_3 & d_5 \\ d_2 & d_4 & d_6 \\ d_7 & d_7 & d_7 \end{pmatrix}$$

Avec :

$c_1 = (a_1^2 - a_2^2\Omega^2) - 3\rho^3 K_V K_T b_1/(rL);$

$c_2 = a_2\dot{\Omega} + 2a_1 a_2 \Omega;$

$c_3 = a_3^2 - 3\rho^3 K_V K_T b_2 d/(rL);$

$d_1 = b_1[(a_1 - {}^{r_a}\!/_{L})\alpha_1 - (1 + a_2)\Omega\alpha_3];$

$d_2 = b_1\left[(a_1 - {}^{r_a}\!/_{L})\alpha_3 + (1 + a_2)\Omega\alpha_1\right];$

$d_3 = b_1\left[(a_1 - {}^{r_a}\!/_{L})\alpha_2 - (1 + a_2)\Omega\alpha_4\right];$

$d_4 = b_1\left[(a_1 - {}^{r_a}\!/_{L})\alpha_4 + (1 + a_2)\Omega\alpha_2\right];$

$d_5 = 2b_1\left[(a_1 - {}^{r_a}\!/_{L})cos\psi - (1 + a_2)\Omega sin\psi\right]$;

$d_6 = 2b_1\left[\left(a_1 - {}^{r_a}/_{L}\right)sin\psi + (1 + a_2)\Omega cos\psi\right]$;

$d_7 = b_2\left(a_3 - {}^{r_a}/_{L}\right)$.

Réciproquement, on peut écrire l'ancienne commande en fonction de la nouvelle commande comme suit :

$$\boldsymbol{V} = {}^{L}/_{\rho K_T}\,\boldsymbol{B}^{-1}(\psi)\left[\boldsymbol{U} - \boldsymbol{F}_1\left(\Omega, \dot{\Omega}\right)\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{F}_2(\psi, \Omega)\boldsymbol{X}_3\right] \qquad (2.3.21)$$

L'équation (2.3.21) montre nettement la dépendance de la commande de rétroaction avec l'état $\boldsymbol{X}_3$ qui est par définition le vecteur des courants d'armatures. Or, nous souhaitons avoir une rétroaction fonction de$\boldsymbol{U}$, et de $\boldsymbol{Y}$ seulement, sachant que ce dernier représente les positions, vitesses, et accélérations de x, y , ψ respectivement, et que ces entités sont mesurables.

Chapitre 3

Linéarisation et découplage :

3.1. Introduction :

Le système (2.2.14) est un cas particulier de la forme :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \qquad (3.1.1)$$

Où :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_{11}(\boldsymbol{x}) & \dots & g_{1m}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(\boldsymbol{x}) & \dots & g_{nm}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ h_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Ceci est un système non-linéaire à m entrées et m sorties (MIMO) dont le degré propre (le nombre de variables d'état) est n. Où $\boldsymbol{u}$ est le vecteur d'entrée, $\boldsymbol{y}$ est le vecteur de sortie, et $\boldsymbol{x}$ est le vecteur d'état du système. Notons que tous ces vecteurs sont des fonctions de la variable indépendante le temps.

3.1.1. Définition du degré relatif :

La notion de degré relatif est indispensable dans le processus de linéarisation des systèmes, au fait elle permet de définir la condition nécessaire et suffisante permettant la confirmation de ce processus.

Le degré relatif noté $\boldsymbol{r} = \{r_1, \ \dots \ , r_m\}$ d'un système non-linéaire MIMO est un vecteur dont chaque composante r_i représente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver par rapport au temps l'expression de la sortie correspondante pour voir apparaitre explicitement au moins une composante du vecteur d'entrée $u_j \ \ 1 \leq j \leq m$.

$$y_i(\boldsymbol{x}) = h_i(\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i(\boldsymbol{x}) = h_{i1}(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad \vdots \\ &y_i^{(r_i-1)}(\boldsymbol{x}) = h_{ir-1}(\boldsymbol{x}) \\ &y_i^{(r_i)}(\boldsymbol{x}) = b_i(\boldsymbol{x}) + a_{ij}(\boldsymbol{x})u_j\{\cdots + a_{ik}(\boldsymbol{x})u_k + \cdots\} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

On peut ainsi définir la matrice suivante :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\boldsymbol{x}) & \dots & a_{1m}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\boldsymbol{x}) & \dots & a_{mm}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Qui est visiblement une matrice carrée $m \times m$ dont l'élément a_{ij} correspond à la fonction qui multiplie la composante u_j du vecteur d'entrée.

On définit également le vecteur :

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = (b_1(\boldsymbol{x}) \quad \dots \quad b_m(\boldsymbol{x}))^T$$

Dont l'élément $b_i(\boldsymbol{x})$ désigne le terme ne multipliant aucune composante du vecteur d'entrée.

A ce moment là nous pouvons définir le vecteur degré relatif $\boldsymbol{r}$ ayant pour éléments les différents degrés relatifs $r_i \quad 1 \leq i \leq m$, et r représente la somme des composantes du vecteur $\boldsymbol{r}$. Notons que le degré relatif n'est défini que lorsque la matrice $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ est non-singulière.

L'opération de linéarisation par les sorties est décrite dans l'Annexe B avec un exemple du cas cinématique du robot omnidirectionnel. Dans le prochain paragraphe la linéarisation par les états est prise en considération.

3.1.2. Linéarisation par les états :

Dans cette étape on désire employer les remarques précédemment soulignées afin de linéariser le système par réinjection des états de la sortie vers l'entrée, pour cela nous aurons besoin d'une entrée fictive, dite entrée de référence $\boldsymbol{v}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \tag{3.1.3}$$

Le schéma suivant illustre cette procédure.

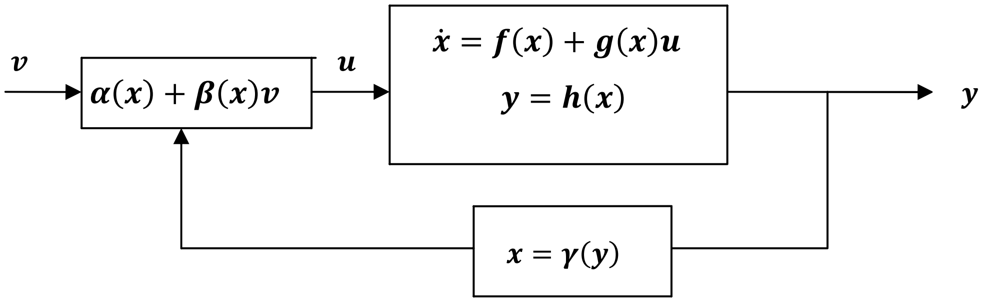


Figure 11. Linéarisation par retour des états.

Notons que cette opération exige l'existence des fonctions qui sont composantes du vecteur $\boldsymbol{x}$ et ceci nécessite la mesurabilité des états correspondants à la sortie. Dans le cas contraire, nous pouvons utiliser l'une des méthodes d'estimations connues.

3.1.3. Théorème :

Soit un système MIMO non-linéaire. Si celui-ci possède un degré relatif tel que la somme de ses composantes soit égale à son degré propre (i.e.; $r = n$), alors ce système est linéarisable de manière exacte par la transformation suivante :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})]. \tag{3.1.4}$$

Dans le cas où la matrice $\boldsymbol{A}$ est singulière, ou bien lorsque la condition $r = n$ n'est pas vérifiée, il suffirait de faire retarder une entrée par le biais d'un état supplémentaire dans le système, comme c'est représenté dans le bloc diagramme de la figure 12.

Cette opération a pour effet d'une part d'augmenter d'une unité le nombre de fois qu'il faut dériver une sortie pour voir apparaître l'expression de cette nouvelle entrée. D'autre part, le degré propre du système est augmenté d'une unité étant donné qu'il compte un état de plus.

Il existe donc un intérêt à retarder une entrée lorsque l'expression de celle-ci apparaît dans la dérivée d'ordre égal au degré relatif correspondant de plusieurs sorties. En effet, le degré relatif total sera augmenté de plusieurs unités tandis que le degré propre ne sera augmenté que d'une unité. Cette opération tendra donc à approcher le système de la condition $r = n$.

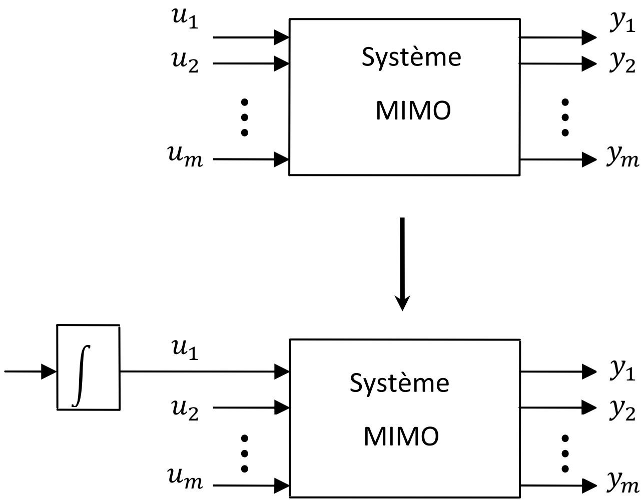


Figure 12. Système en boucle ouverte

3.2. Transformation de linéarisation et de découplage :

Dans cette partie on va montrer la validité de la transformation décrite par l'équation (2.2.20) par le biais de la formule de l'équation (2.2.21). Pour cela, on utilise les résultats et remarques du paragraphe précédent.

D'après la formule (2.2.14-2) on a:

$$\boldsymbol{X}_3 = {}^1\!/_{\rho K_T}\, \boldsymbol{B}(\psi)^{-1}[\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{A}(\Omega)\boldsymbol{X}_2] \qquad (3.2.1)$$

En utilisant (2.2.17) on obtient :

$$\boldsymbol{X}_3 = {}^1\!/_{\rho K_T}\, \boldsymbol{B}(\psi)^{-1}[\boldsymbol{Y}_3 - \boldsymbol{A}(\Omega)\boldsymbol{Y}_2] \qquad (3.2.2)$$

Et l'équation (2.2.21) devient :

$$\boldsymbol{V} = L\boldsymbol{B}(\psi)^{-1}\{\boldsymbol{U} + \boldsymbol{G}_1(\psi,\Omega)\boldsymbol{Y}_3 + \boldsymbol{G}_2(\psi,\Omega,\dot{\Omega})\boldsymbol{Y}_2\}/(\rho K_T) \qquad (3.2.3)$$

Avec :

$$\boldsymbol{G}_1(\psi,\Omega) = -\boldsymbol{F}_2(\psi,\Omega)\boldsymbol{B}(\psi)^{-1}/(\rho K_T)$$

$$\boldsymbol{G}_2(\psi,\Omega,\dot{\Omega}) = {}^{\boldsymbol{F}_2(\psi,\Omega)\boldsymbol{B}(\psi)^{-1}\boldsymbol{A}(\Omega)}\!\Big/_{(\rho K_T)} - \boldsymbol{F}_1(\Omega,\dot{\Omega})$$

Notons que : ψ correspond à la deuxième composante de $\boldsymbol{Y}_1$,

Ω correspond à la deuxième composante de $\boldsymbol{Y}_2$,

$\dot{\Omega}$ correspond à la deuxième composante de $\boldsymbol{Y}_3$.

Cette dernière équation définit la rétroaction en fonction des nouvelles variables $\boldsymbol{Y}_i,\ i = 1,2,3$ du système triple intégrateur.

En résumé, lorsque l'équation (3.2.3) est appliquée au système (2.2.14) on obtient, comme il a été mentionné auparavant, le système triple intégrateur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{Y}}_1 &= \boldsymbol{Y}_2 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_2 &= \boldsymbol{Y}_3 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_3 &= \boldsymbol{U} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Si on préfère la forme matricielle, on a :

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{Y} + \begin{pmatrix} \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} \\ \mathbf{I_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{U} \tag{3.2.5}$$

Ce dernier, représente un processus découplé et linéaire mais en boucle ouverte (voir schéma de la figure 13).

En plus l'ensemble d'équations du système équivalent est instable car l'équation caractéristique est $s^{3\times3} = 0$. Cependant, ce système est contrôlable car la matrice suivante :

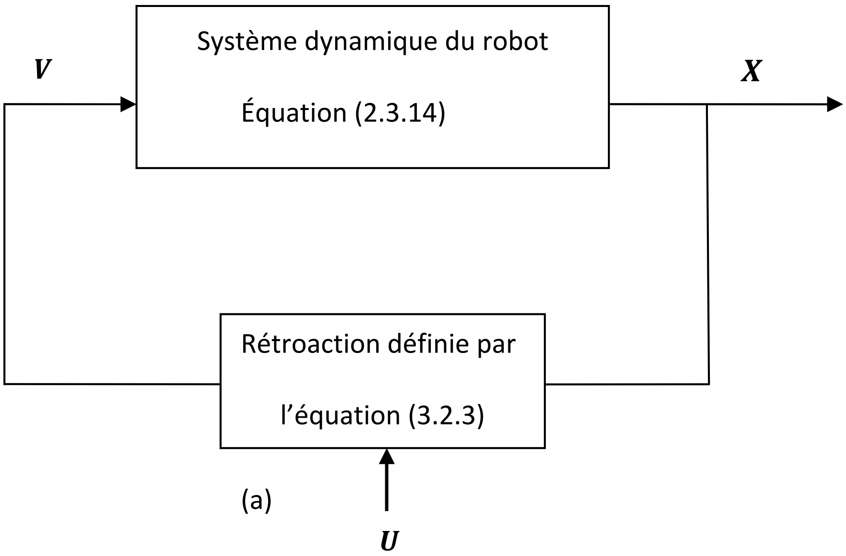
$$\boldsymbol{C} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} \\ \mathbf{I_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} \\ \mathbf{I_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} & \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{I_3} \\ \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} & \mathbf{0_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0_3} \\ \mathbf{0_3} \\ \mathbf{I_3} \end{bmatrix} \right)$$

est de rang 3X3, et d'après le théorème d'emplacement des pôles, il est possible de déplacer les pôles du système équivalent vers le demi plan complexe gauche par l'intermédiaire d'un choix approprié d'une fonction de retour linéaire et invariante par rapport au temps. Notons que :

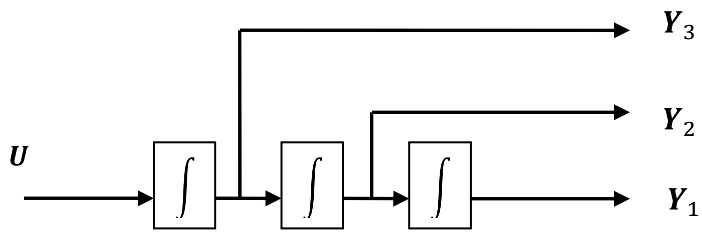
$$\mathbf{0_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc le système équivalent est stabilisable.

En effet la commande exprimée par la fonction de retour dans (3.2.3) ne dépend que de la consigne $\boldsymbol{U}$ et du nouveau vecteur augmenté $\boldsymbol{Y}$, donc évitant toute opération d'estimation ou de mesure auparavant nécessaire.



(a)



(b)

Figure. 13

(a) Bloc-diagramme en boucle fermée du robot.

(b) Bloc-diagramme en boucle ouverte du système équivalent.

3.3. Simulation :

Les actuateurs utilisés sont des moteurs Pittman Express DC, nous optons pour des moteurs identiques type GM9234S017 dont les caractéristiques sont :

- Tension de référence 12 *V*.
- Vitesse à vide 24.7 *rd/s.*
- Couple maximal 6.1 *N.m.*
- Masse 0.661 *Kg*.
- $K_T = 0.0229\, {}^{Nm}/_{A}$.
- $K_V = 0.0229\, {}^{Vs}/_{rad}$.
- $R = 0.71\, \Omega$.
- $L = 0.00066\, H$.
- Courant à vide 0.33 *A.*
- Courant maximal 16.9 *A.*
- Couple de frottement 0.0056 *N.m.*
- Coefficient de réduction $\rho = 19.7$.
- Inertie du rotor $J_m = 7.1\ 10^{-6}\ kgm^2$, $J = J_m \rho^2$.
- Couple maximal permis 3.53 *N.m.*

Pour la plateforme nous supposons :

- $d = 0.178\, m$.
- $m = 9.4\, kg$. (masse totale du robot).
- $r = 0.0245\, m$.
- $J_z = 11.25\, kgm^2$.

En prenant $U_1 = 1m/s^3$ comme première entrée (par rapport à X), et $U_2 = 1m/s^3$comme deuxième entrée (par rapport à Y), $U_3 = 0.1\, rd/s^3$ comme étant la troisième et dernière entrée (celle de ψ). Autrement dit on désire voir les réponses indicielles des deux variables d'états x , y et ψ.

Toutes les conditions initiales sont supposées nulles.

La figure 14 montre les réponses par rapport à x, figure 15 représente celles de y , et la figure 16 est celle de ψ.

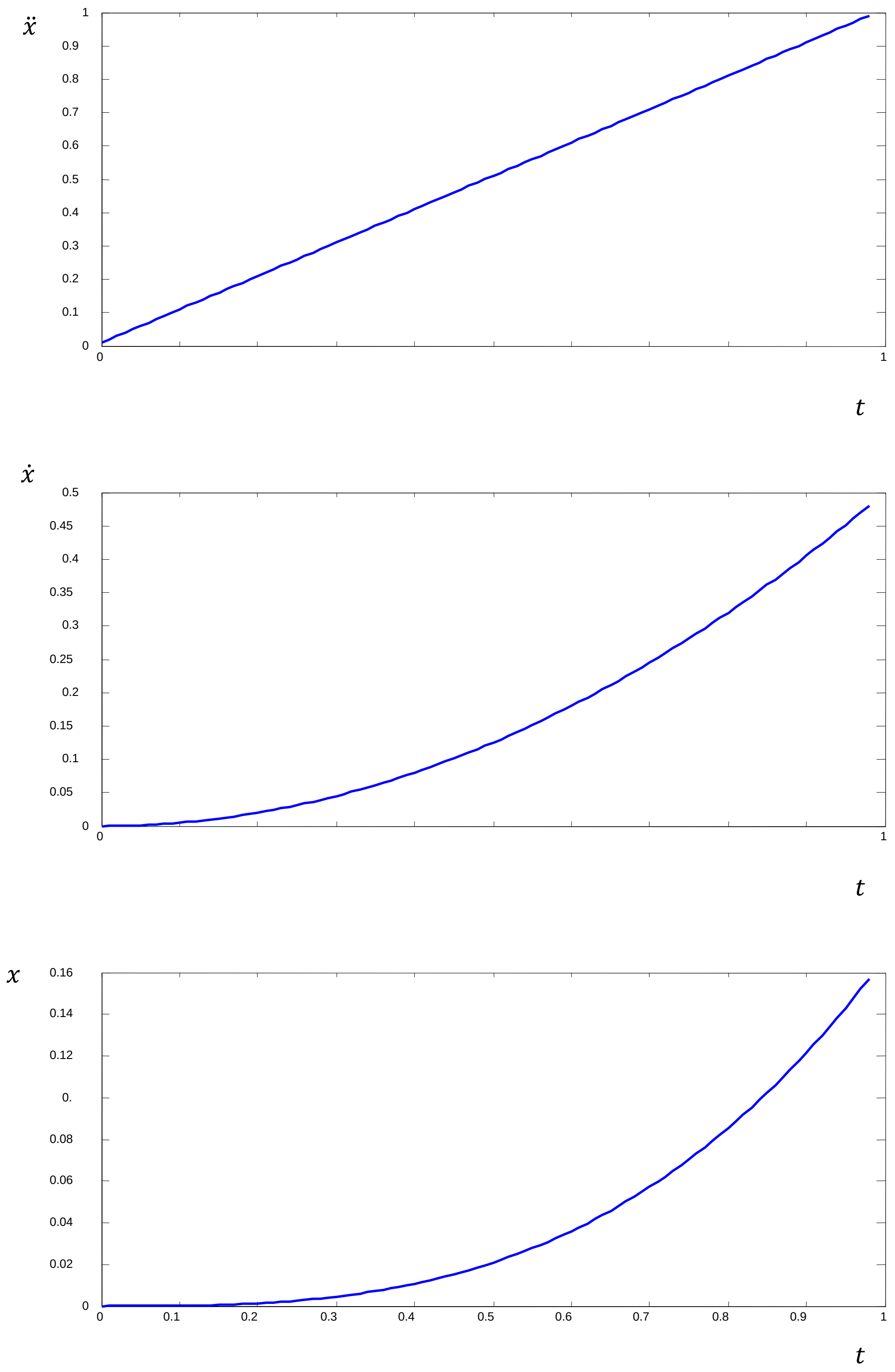


Figure 14. Réponses indicielles de x.

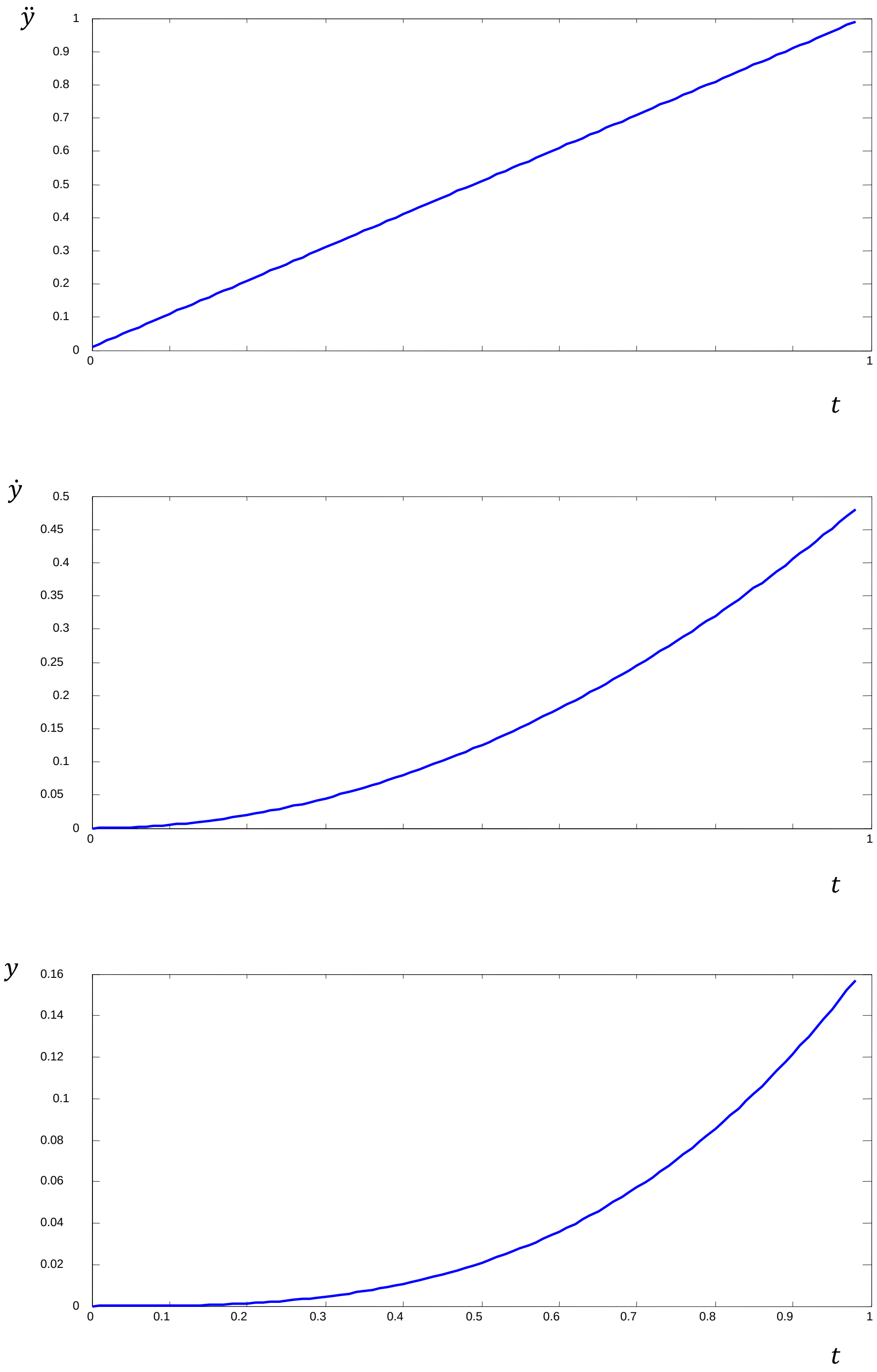


Figure 15. Réponses indicielles de y.

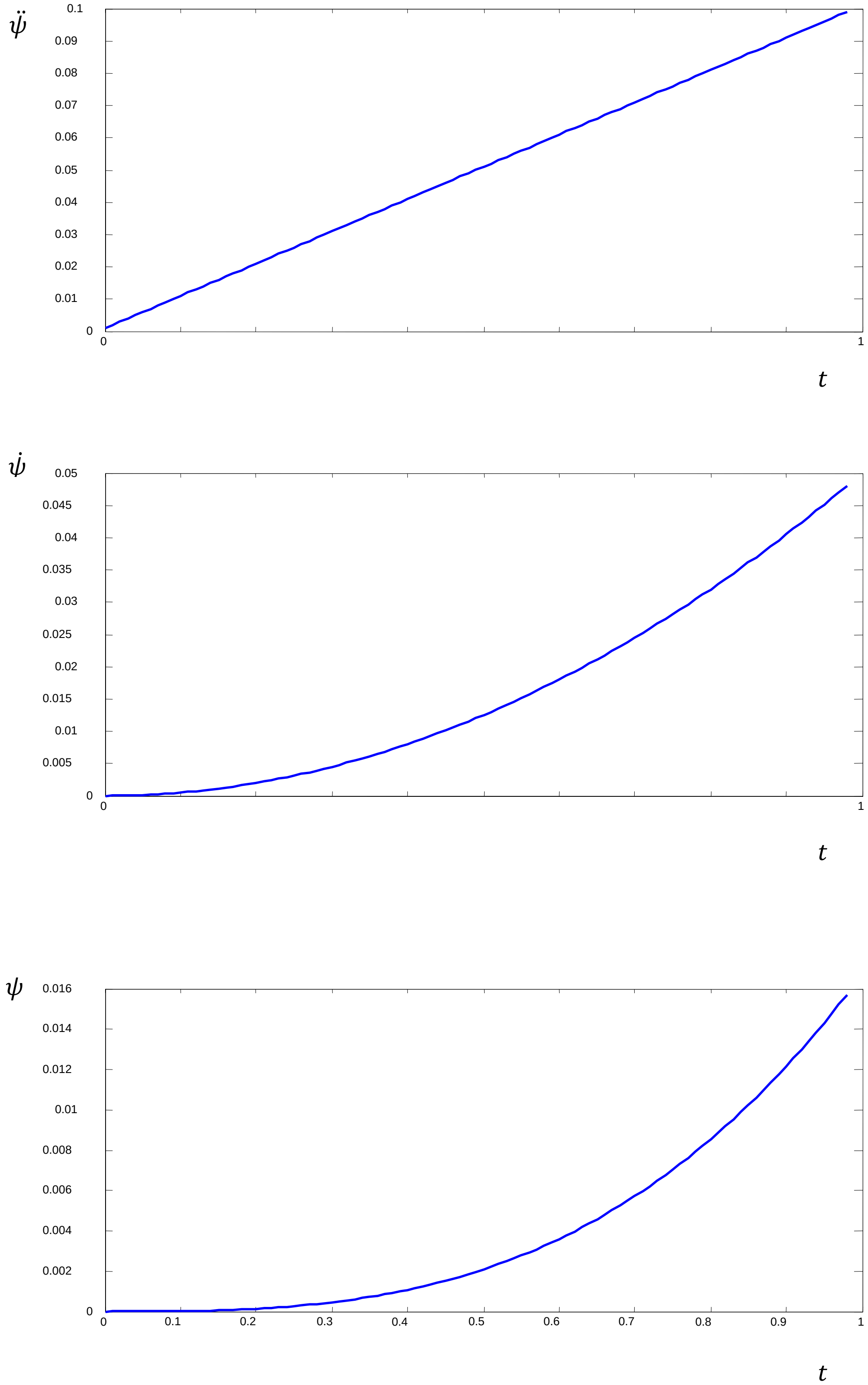


Figure 16. Réponses indicielles de ψ.

Chapitre 4

Commande et positionnement en temps optimal (CPTO) :

Ayant obtenu l'expression de la fonction de retour permettant la linéarisation et découplage du modèle dynamique du robot, à présent on peut procéder à la solution du problème de commande en temps optimal.

D'abord, on présente la formulation mathématique du problème de CPTO pour le robot mobile à trois degrés de liberté avec contraintes sur les états, tout en soulignant les différentes difficultés rencontrées dans la solution directe. Ensuite, la rétroaction du paragraphe précédent est appliquée et le problème de CPTO est reformulé. Finalement, la solution pour chaque degré de liberté est présentée. La solution pour le système global sera déduite directement en signalant quelques remarques importantes.

4-1. Formulation mathématique de la CPTO :

Soit l'ensemble d'équations (2.3.14) du chapitre 2 avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1(t_0) &= \boldsymbol{X}_{10} \\ \boldsymbol{X}_2(t_0) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_3(t_0) &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Déterminer le temps minimum t_f et le vecteur de tensions d'entrée $\boldsymbol{U}(t)$ où $t \in [t_0, t_f]$ appliqués au système (2.3.14) tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1(t_f) &= \boldsymbol{X}_{1f} \\ \boldsymbol{X}_2(t_f) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_3(t_f) &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Et que $\forall t \in [t_0, t_f]$ on a :

$$|X_{2i}| \leq v_{Mi}$$
$$\left| {}^{d}/_{dt}\,(X_{2i}) \right| \leq a_{Mi} \qquad (4.1.3)$$
$$\left| {}^{d^2}/_{dt^2}\,(X_{2i}) \right| \leq \Delta_i.$$
$$\forall i = 1{,}2{,}3.$$

Notons que le robot est au repos au début et à la fin du processus, il s'agit donc d'une commande de positionnement d'un point à un autre tout en respectant les contraintes sur la vitesse, accélération et variation d'accélération du robot mobile.

A présent, on présente les différentes difficultés rencontrées lors de la solution directe de la CPTO. Pour cela, on fait appel au principe du maximum de Pontryaguine à travers l'hamiltonien [43] :

$$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}_1^T \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\lambda}_3^T \left[-{}^{\rho^2 K_V}/_{rL}\, \boldsymbol{C}(\psi) \boldsymbol{X}_2 - {}^{r_a}/_{L}\, \boldsymbol{X}_3 + {}^{1}/_{L}\, \boldsymbol{V} \right] \qquad (4.1.4)$$

Tel que les vecteurs de variables adjointes $\boldsymbol{\lambda}_1(t), \boldsymbol{\lambda}_2(t), \boldsymbol{\lambda}_3(t) \in \boldsymbol{R}^3$ doivent vérifier :

$${}^{d}/_{dt}\,(\boldsymbol{\lambda}_j) = -{}^{\boldsymbol{\partial}}/_{\boldsymbol{\partial X}_j}\,(H); \qquad \forall j = 1{,}2{,}3. \qquad (4.1.5)$$

D'après le principe du maximum, la commande optimale $\boldsymbol{U}^\star(t)$, le vecteur d'états optimaux $\boldsymbol{X}^\star(t)$, et le vecteur de variables adjointes optimales $\boldsymbol{\lambda}^\star(t) = (\boldsymbol{\lambda}_1(t) \quad \boldsymbol{\lambda}_2(t) \quad \boldsymbol{\lambda}_3(t))^T$ Doivent tous satisfaire les conditions nécessaires (2.3.14), et la relation :

$$H(\boldsymbol{X}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star, \boldsymbol{U}^\star, t) \leq H(\boldsymbol{X}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star, \boldsymbol{U}, t) \qquad \forall \boldsymbol{U}(t) \in \boldsymbol{R}^3 \text{ et } t \in [t_0, t_f] \qquad (4.1.6)$$

Cependant, sur un arc contraint (autrement dit, quand une inégalité, au moins, devient égalité) il est important de noter les constatations suivantes :

- Le nombre d'arcs contraints et les instants dans lesquels on entre ou bien on sort d'un arc contraint n'est pas exactement connu.
- L'ensemble de conditions nécessaires devant être vérifié par une trajectoire extrémale dans un arc contraint n'est pas connu.
- Le problème aux limites résultant, dans le cas général, est d'ordre de 18 (6 pour chaque degré de liberté) et non-linéaire, hautement couplé.
- Il se peut qu'il existe plus d'une solution en temps optimal, c'est-à-dire que l'unicité n'est pas toujours vérifiée.

Pour les raisons citées précédemment, on réalise que la solution directe de ce problème est une tâche très difficile, pour cela dans le paragraphe qui suit, on introduit une nouvelle formulation de la CPTO, employant la fonction de retour permettant la linéarisation et découplage du système (réalisée dans le chapitre précédent), qui permet d'assure l'existence et l'unicité de la solution du problème restreint de la CPTO.

4-2. Problème restreint de la CPTO :

Le système définit par les équations (2.3.17) étant linéarisé et découplé aboutissant à un système triple intégrateur à trois degrés de liberté, et ceci toujours en utilisant la rétroaction de découplage et de linéarisation définie par l'équation (2.3.21), serait équivalent à un système linéaire et découplé en boucle ouverte, pour chaque degré de liberté on a le problème d'optimisation suivant :

Etant données les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} &Y_{1j}(0) = X_{10j} \\ &Y_{2j}(0) = 0 \\ &Y_{3j}(0) = 0 \end{aligned} \qquad (4.2.1)$$

Déterminer le temps minimum t_{fj} , et l'entrée optimale $Z_j^\star(t)$ appliquée comme entrée au système équivalent dans l'intervalle de temps $t \in [0, t_{fj}]$ de telle façon que :

$$\begin{aligned} &Y_{1j}(t_{fj}) = X_{1fj} \\ &Y_{2j}(t_{fj}) = 0 \\ &Y_{3j}(t_{fj}) = 0 \end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

Et que $\forall t \in [0, t_{fj}]$ on doit avoir :

$$\begin{aligned} &|Y_{2j}| \leq v_{Mj} \\ &|Y_{3j}| \leq a_{Mj} \\ &|Z_j| \leq \Delta_j \\ &\forall j = 1,2,3. \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

Les équations indiquées ci-dessus représentent un cas d'optimisation avec contraintes sur les états, on doit aussi remarquer la similarité entre ce système qui est linéaire et le système original (équations (2.3.14)) ; autrement dit ; $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{X}_1$ qui représente le vecteur position du robot (position dans la plan et angle d'orientation), et que $\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{X}_2$ représente le vecteur vitesse (vitesses linéaire et angulaire) du robot, pareil pour $\boldsymbol{Y}_3 = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3)$ qui représente le vecteur accélération du robot. Les deux systèmes étant similaires, donc les conditions initiales (4.1.1) et (4.2.1) sont identiques, les conditions finales (4.1.2) et (4.2.2) sont identiques aussi, et les inégalités sont identiques.

Dû à la similarité toujours, la conséquence suivante est directe ; si la solution du problème restreint de la CPTO est $\boldsymbol{Z}^{\star}(t) = (\bar{Z}_1^{\star} \quad \bar{Z}_2^{\star} \quad \bar{Z}_3^{\star})^T$ où :

$$\bar{Z}_j^{\star} = \begin{cases} Z_j^{\star} & 0 \leq t \leq t_{fj} \\ 0 & t_{fj} < t \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Remplaçant les éléments du vecteur $\boldsymbol{Z}^{\star}(t)$ dans l'équation (2.3.21), on obtient la commande optimale $\boldsymbol{U}^{\star}(t)$ désirée pour le problème de la CPTO, où le temps optimal t_f du processus serait :

$$t_f = \max(t_{fj}) \quad \text{pour } j = 1,2,3. \tag{4.2.5}$$

Notons qu'une solution optimale au problème restreint de la CPTO est (à travers la rétroaction de linéarisation et de découplage) une solution au problème de la CPTO. Par contre, l'assertion inverse n'est pas toujours vraie, car la solution optimale au problème de la CPTO ne signifie par nécessairement que le temps de processus de chaque degré de liberté doit être optimal. Evidemment, cette optimisation multi-objective est plus désirable car elle nous permet d'assurer l'unicité de la solution qu'on ne pouvait pas avoir garantir auparavant.

4-3. Problème restreint de la CPTO avec contraintes sur les états :

Dans cette partie nous allons résoudre le problème de CPTO restreint pour chaque degré de liberté ensuite déduire le temps minimal au système global, ceci en tenant compte de certaines réalités physiques parmi lesquelles les contraintes sur les vitesses et les accélérations et même sur les positions.

On commence par considérer un cas général d'un système triple intégrateur pour lequel on détermine la solution du problème de la CPTO permettant une régulation vers l'origine sans aucune contrainte sur les états.

Soit :

$$\eta = X_{1fj} - X_{10j} \tag{4.3.1}$$

Avec : $\eta > 0$; remarquant que ce choix n'affecte pas l'analyse en cours.

Alors le problème restreint de la CPTO sans contraintes sur les états peut être statué de la façon suivante :

<u>Position du problème (P):</u>

Soit le système suivant ;

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= -\eta \\ x_2(0) &= x_3(0) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$

Déterminer le temps minimum t_f et l'entrée optimale $z^\star(t)$ pour tout $t \in [0, t_f]$ tel que :

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = x_3(t_f) = 0 \qquad (4.3.4)$$

Et : $$|u(t)| \leq u_M \qquad \forall t \in [0, t_f] \qquad (4.3.5)$$

Ce problème est un cas spécial du fameux système triple intégrateur vers l'origine auquel la solution est donnée en fonction de la surface de changement de signe suivante :

$$S = x_1 + {x_3^3}/{3} + \epsilon\left(x_2^T x_3 + \left[{x_3^T x_3}/{2} + \epsilon^T x_2 \right]^{3/2} \right) \qquad (4.3.6)$$

$$\epsilon = sgn(x_2 + {x_3}/{2})$$

Pour lequel la commande optimale est :

$$u = -u_M sgn(S) \qquad (4.3.7)$$

Rappelons que :

$$sgn(S) = \begin{cases} 1 & S > 0 \\ -1 & S < 0 \end{cases}$$

<u>Théorème :</u>

En posant : $t_1 = {t_f}/{4}$; $t_2 = {t_f}/{2} = 2t_1$; et $t_3 = {3t_f}/{4} = 3t_1$.

La commande optimale solution du problème (P) est :

$$u^\star(t) = \begin{cases} u_M & 0 \leq t \leq t_1 \\ -u_M & t_1 < t \leq t_3 \\ u_M & t_3 < t \leq t_f \end{cases} \qquad (4.3.8)$$

Où :

$$t_f = 2\left({}^{4\eta}/_{u_M}\right)^{1/3} \tag{4.3.9}$$

<u>Démonstration :</u>

Le système Σ est complètement contrôlable car le rang de la matrice contrôlabilité $\mathcal{C}$ suivante est égal à 3 :

$$\mathcal{C}=\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

D'autre part la commande est un signal scalaire u donc le système Σ est normal (i.e. ; la solution existe et est unique).

Par conséquent, il serait suffisant de trouver une et une seule commande qui, ensemble avec les variables d'états et adjointes résultantes, vérifient les conditions nécessaires d'optimalité.

La commande optimale statuée dans l'équation (4.3.8) ainsi que le temps optimal dans (4.3.9) appliqués au système Σ donnent :

$$x_3^\star = \begin{cases} u_M t & 0 \le t < t_1 \\ u_M(t_2 - t) & t_1 \le t < t_3 \\ u_M(t - t_f) & t_3 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.10}$$

$$x_2^\star = \begin{cases} {}^{u_M t^2}/_2 & 0 \le t < t_1 \\ -{}^{u_M t^2}/_2 + u_M t_2\left(t - {}^{t_1}/_2\right) & t_1 \le t < t_3 \\ u_M\, {}^{t^2}/_2 + u_M t_f (t_2 - t) & t_3 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.11}$$

$$x_1^\star = \begin{cases} {u_M t^3}/{6} - \xi & 0 \le t < t_1 \\ -{u_M t^3}/{6} + u_M t_1 \left(t^2 - t t_1 + {t_1^2}/{3}\right) - \xi & t_1 \le t < t_3 \\ {u_M t^3}/{6} - u_M t_2 \left(t^2 - t t_f + {t_f}/{3}\right) - \xi & t_3 \le t \le t_f \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Où la commande optimale est exprimée sous la forme suivante :

$$u^\star = \begin{cases} u_M & 0 \le t < t_1 \\ -u_M & t_1 \le t < t_3 \\ u_M & t_3 \le t \le t_f \end{cases} \quad (4.3.13)$$

Et le temps optimal est :

$$t_f = 2\left({4|\xi|}/{u_M}\right)^{1/3} \quad (4.3.14)$$

Et la condition initiale : $x_1(0) = -\xi$

L'hamiltonien est : $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u$ (4.3.15)

Et donc les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -{\partial H}/{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -{\partial H}/{\partial x_2} = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 &= -{\partial H}/{\partial x_3} = -\lambda_2 \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

La résolution de ces équations donne :

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \lambda_{10} \\ \lambda_2(t) &= -\lambda_{10} t + \lambda_{20} \\ \lambda_3(t) &= .5\lambda_{10} t^2 - \lambda_{20} t + \lambda_{30} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Où $\lambda_{j0} = \lambda_j(0) \quad \forall j = 1,2,3.$

Rappelons que les λ_j sont les variables adjointes, parfois appelés multiplicateurs de Lagrange du système dual défini par le système adjoint (4.3.16).

En utilisant le principe du maximum de Pontryaguine on trouve que la commande optimale doit satisfaire l'équation suivante :

$$u^\star(t) = -u_M sgn\big(\lambda_3(t)\big) \quad (4.3.18)$$

Mais d'après (4.3.13) cette commande optimale possède deux changements de signe aux instants t_1 et t_3 ce qui signifie que :

$$\lambda_3(t) = k(t - t_1)(t - t_3) \tag{4.3.19}$$

Egalisant les équations (4.3.19) et (4.3.17) on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_{10} &= 2k \\ \lambda_{20} &= kt_f \\ \lambda_{30} &= 3kt_1^2 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

L'hamiltonien doit aussi vérifier l'égalité suivante :

$$H(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, t_f] \tag{4.3.21}$$

En particulier à l'instant initial $t = 0^+$ on doit avoir :

$$H(0^+) = 1 + \lambda_{10}0 + \lambda_{20}0 + \lambda_{30}u_M = 0$$

Ce qui implique que :

$$\lambda_{30} = -{}^{1}\!/_{u_M} \tag{4.3.22}$$

En remplaçant dans (4.3.20) on a :

$$1 + {}^{3ku_Mt_f^2}\!/_{16} = 0$$

C'est-à-dire :

$$k = -{}^{16}\!/_{3u_Mt_f^2} \tag{4.3.23}$$

En résumé, les variables canoniques (variables d'états et variables adjointes) qui correspondent à la commande optimale $u^\star(t)$ (voir équation (4.3.13)) sont exprimées dans (4.3.10), (4.3.11), et (4.3.12). Et comme elles vérifient les équations d'Euler-Lagrange (équations (4.1.5) et (4.3.16)), la condition (4.3.21) et le principe du maximum (4.3.18), alors $u^\star(t)$ doit être une commande optimale. Notons que le temps optimal t_f à été obtenu en posant $x_1(t_f) = 0$ et en remplaçant dans (4.3.12) pour avoir :

$$t_f = 2\left({}^{4|\xi|}\!/_{u_M}\right)^{1/3}$$

Figure 17 illustre les variations de la commande optimale, la position, vitesse et accélération optimaux en fonction du temps.

Jusqu'à maintenant nôtre étude s'est consacré sur le cas où aucune contrainte sur les variables d'états n'est appliquée, dans le prochain paragraphe on va progressivement ajouter des contraintes, en notant que le principe du maximum (4.3.18) n'est plus valable dans ce cas.
Les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération peuvent être facilement calculées pour avoir respectivement :

$$x_{2max} = x_2(t_2) = u_M t_1^2$$
$$x_{3max} = x_3(t_1) = u_M t_1$$

Figure 18 représente les variations des multiplicateurs de Lagrange (variables adjointes) par rapport au temps.
Du au fait qu'en réalité physique il existe certaines contraintes notamment sur les vitesses et accélérations il se peut que l'analyse précédente manque de praticabilité.
Remarque :

Initialement au repos, à chaque accélération (ou décélération), un servomoteur électromagnétique est employé, sachant que l'accélération extrémale est atteinte avec la vitesse extrémale. Cette constatation est basée sur la réalité physique où la constante de temps électrique de l'actuateur (moteur agissant sur la roue) est toujours petite devant la constante de temps mécanique, par conséquent, l'actuateur atteint son courant maximal bien avant sa vitesse maximale et ceci lorsque on applique la tension maximale.

En tenant compte des observations précédentes nous pouvons classer les différents cas possibles selon la tâche souhaitée et en fonction de la valeur de la condition initiale $\boldsymbol{\xi}$ sur la position.

1er cas : Aucune contrainte sur les états n'est appliquée, donc le problème restreint de la CPTO est identique au problème P étudié précédemment.
Ceci ait lieu lorsque:

$$\xi > {2x_{3max}^3}\big/{u_M^2}.$$

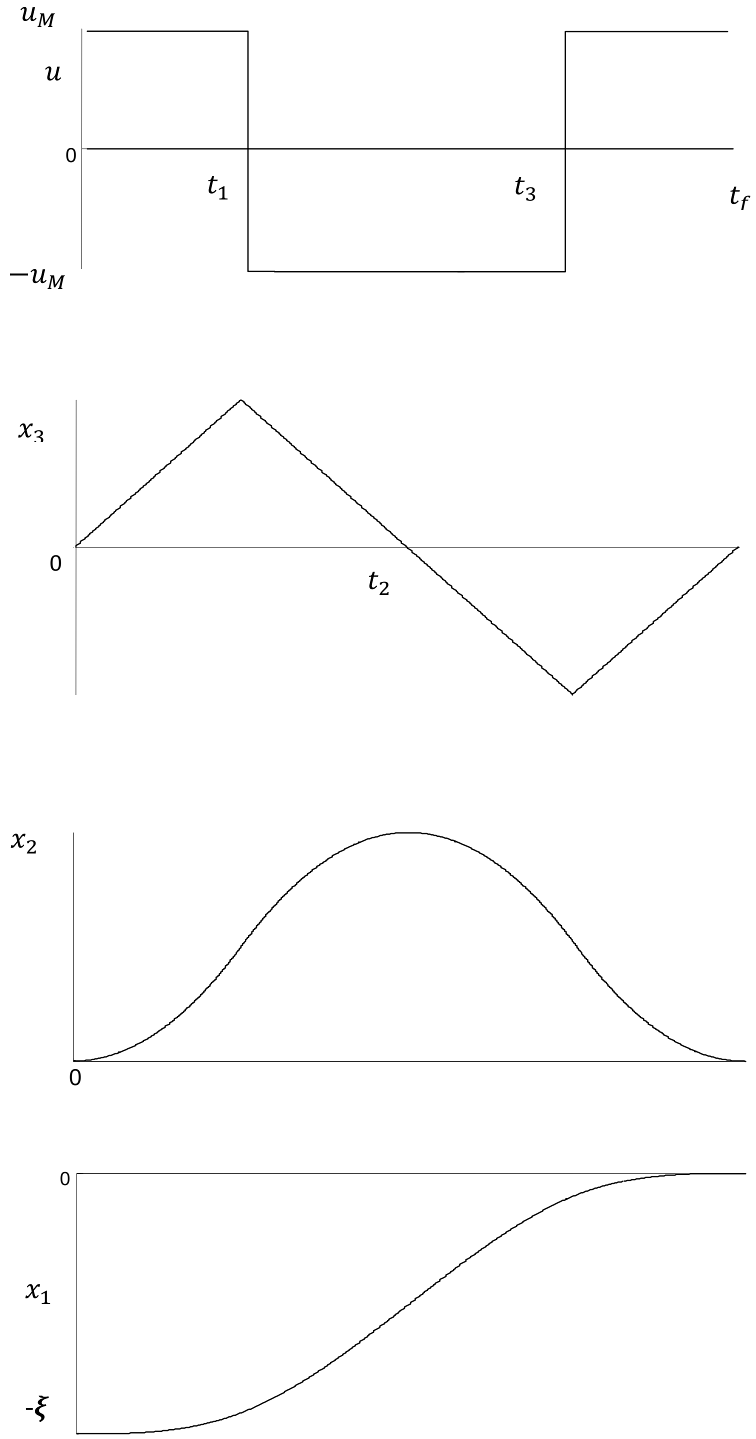


Figure 17. Réponses du système triple

intégrateur sans contraintes.

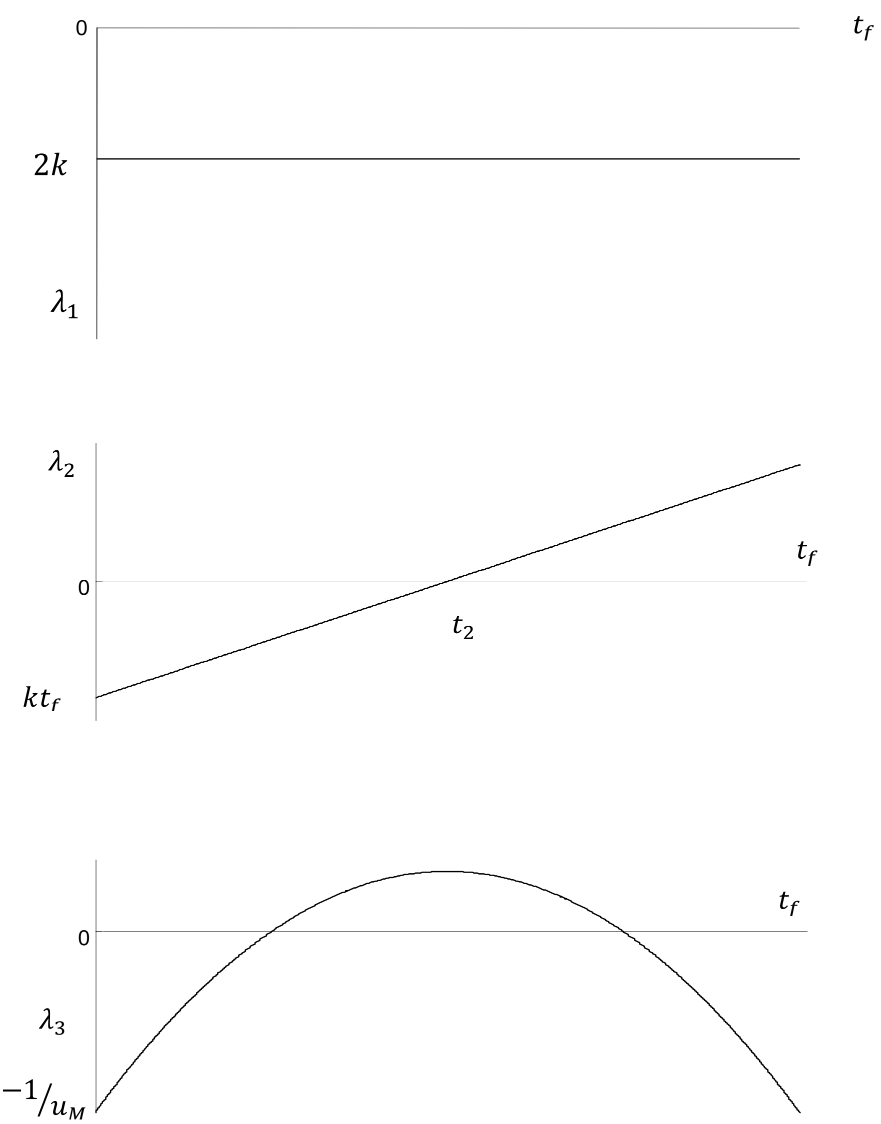


Figure 18. Multiplicateurs de Lagrange correspondants.

<u>$2^{ème}$ cas :</u>

Contrainte sur l'accélération seulement, et ceci correspond à la situation suivante :

$$\xi > {}^{2x_{3max}^3}\!/_{u_M^2} \tag{4.3.24}$$

Et :

$$x_{2max} > \sqrt{\left({}^{x_{3max}^2}\!/_{2u_M}\right)^2 + \xi x_{3max}} - \left({}^{x_{3max}^2}\!/_{2u_M}\right) \tag{4.3.25}$$

Où :

$$|x_3(t)| \leq x_{3max} = a_M \tag{4.3.26}$$

Est ajoutée comme condition supplémentaire au problème P, en tenant compte des observations faites au niveau de la remarque précédente, et du au fait que la commande optimale pour le système linéarisé doit être toujours de type bang-bang [11], la commande, l'accélération, la vitesse, et la position optimales sont exprimées par les formules suivantes, et sont représentées dans la figure 20.

Soient les intervalles de temps :

$$D_1 = 0 \leq t \leq {}^{a_M}/_{u_M} \ ;$$

$$D_2 = {}^{a_M}/_{u_M} < t \leq \left({}^{t_f}/_2\right) - \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) ;$$

$$D_3 = \left({}^{t_f}/_2\right) - \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) < t \ \leq \left({}^{t_f}/_2\right) + \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) ;$$

$$D_4 = \left({}^{t_f}/_2\right) + \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) < t \leq t_f - \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) ;$$

$$D_5 = \ \ t_f - \left({}^{a_M}/_{u_M}\right) < t \leq t_f \ ;$$

$$u^\star = \begin{cases} u_M & D_1 \\ 0 & D_2 \\ -u_M & D_3 \\ 0 & D_4 \\ u_M & D_5 \end{cases} \tag{4.3.27}$$

$$x_3^\star = \begin{cases} u_M t & D_1 \\ a_M & D_2 \\ u_M(t_2 - t) & D_3 \\ -a_M & D_4 \\ u_M(t - t_f) & D_5 \end{cases} \tag{4.3.28}$$

$$x_2^\star = \begin{cases} {u_M t^2}/{2} & D_1 \\ -{a_M^2}/{2u_M} + a_M t & D_2 \\ u_M \left\{ -{t^2}/{2} + t t_2 - t_1 t_2 - {a_M^2}/{u_M^2} + {a_M t_2}/{u_M} \right\} & D_3 \\ a_M (t_f - t) - {a_M^2}/{2u_M} & D_4 \\ u_M \left\{ {t^2}/{2} - t t_f + t_2 t_f \right\} & D_5 \end{cases} \quad (4.3.29)$$

$$x_1^\star = \begin{cases} -\xi + {u_M t^3}/{6} & D_1 \\ -\xi + {a_M^3}/{6u_M^2} + {t a_M^2}/{2u_M} + {t^2 a_M}/{2} & D_2 \\ -\xi - {t^3 u_M}/{6} + t^2 t_1 u_M + tT + {u_M t_1^3}/{3} - a_M t_1 t_2 + {a_M^2 t_1}/{u_M} & D_3 \\ -\xi - {a_M (t - t_f)^2}/{2} - {t a_M^2}/{2u_M} + t_2^2 a_M - {a_M^3}/{6u_M^2} & D_4 \\ -\xi + {u_M (t - t_f)^3}/{6} + t_2^2 a_M - {t_2 a_M^2}/{u_M} & D_5 \end{cases} \quad (4.3.30)$$

Où le temps optimal est :

$$t_f = \left({a_M}/{u_M}\right) + \sqrt{\left({a_M}/{u_M}\right)^2 + \left({4\xi}/{a_M}\right)} \quad (4.3.31)$$

Comme il est montré dans la figure 17, la vitesse maximale est atteinte à l'instant $t = {t_f}/{2}$ et

est égale à :

$$x_{2max} = v_M = x_2(t_2) = \sqrt{\left({a_M^2}/{2u_M}\right)^2 + \xi a_M} - \left({a_M^2}/{2u_M}\right) \quad (4.3.32)$$

Pour que la vitesse dépasse son maximum il va falloir que :

$$v_M > x_{2max}$$

Qui est exactement la condition (4.3.25), et qui est au fait la condition nécessaire pour avoir le cas actuel (2ème cas).

<u>3ème cas :</u>

Toutes les contraintes sont actives, ceci a lieu lorsque $\boldsymbol{\xi}$ est choisi de telle sorte que la condition (4.3.25) n'est pas vérifiée, autrement dit :

$$v_M < \sqrt{\left({a_M^2}/{2u_M}\right)^2 + \xi a_M} - \left({a_M^2}/{2u_M}\right)$$

La méthode utilisée pour déterminer la solution optimale est similaire à celle utilisée dans le cas précédent.

Soient les nouveaux instants :

$$\tau_1 = {a_M}/{u_M}\,; \quad \tau_2 = {v_M}/{a_M}\,;$$

$$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2; \qquad \tau_4 = {\xi}/{v_M}\,;$$

$$\tau_5 = \tau_1 + \tau_4; \qquad \tau_6 = \tau_2 + \tau_4;$$

$$t_f = \tau_4 + \tau_3.$$

Il est possible d'étudier la vitesse optimale en fonction de la condition initiale ξ, la figure 19 montre les différentes trajectoires.

Les solutions optimales sont exprimées par les formules suivantes et sont indiquées sur la figure 21.

$$u^\star = \begin{cases} u_M & 0 \le t < \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \le t < \tau_2 \\ -u_M & \tau_2 \le t < \tau_3 \\ 0 & \tau_3 \le t < \tau_4 \\ -u_M & \tau_4 \le t < \tau_5 \\ 0 & \tau_5 \le t < \tau_6 \\ u_M & \tau_6 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.33}$$

$$x_3^\star = \begin{cases} u_M t & 0 \le t < \tau_1 \\ a_M & \tau_1 \le t < \tau_2 \\ u_M(\tau_3 - t) & \tau_2 \le t < \tau_3 \\ 0 & \tau_3 \le t < \tau_4 \\ u_M(\tau_4 - t) & \tau_4 \le t < \tau_5 \\ -a_M & \tau_5 \le t < \tau_6 \\ u_M\left(t - t_f\right) & \tau_6 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.34}$$

$$x_2^\star = \begin{cases} {u_M t^2}/{2} & 0 \le t < \tau_1 \\ \left({u_M \tau_1^2}/{2}\right) + a_M(t - \tau_1) & \tau_1 \le t < \tau_2 \\ v_M - {u_M (t - \tau_3)^2}/{2} & \tau_2 \le t < \tau_3 \\ v_M & \tau_3 \le t < \tau_4 \\ v_M - {u_M (t - \tau_4)^2}/{2} & \tau_4 \le t < \tau_5 \\ v_M - {u_M \tau_1^2}/{2} - a_M(t - \tau_5) & \tau_5 \le t < \tau_6 \\ {u_M \left(t - t_f\right)^2}/{2} & \tau_6 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.35}$$

$$x_1^\star = \begin{cases} -\xi + {u_M t^3}/{6} & 0 \le t < \tau_1 \\ -\xi + {a_M (t-\tau_1)^2}/{2} + {u_M t \tau_1^2}/{2} - {u_M \tau_1^3}/{3} & \tau_1 \le t < \tau_2 \\ -\xi - {u_M (t-\tau_3)^3}/{6} + v_M t^2 - {v_M \tau_3}/{2} & \tau_2 \le t < \tau_3 \\ -\xi + v_M (t-\tau_3) + {v_M \tau_3}/{2} & \tau_3 \le t < \tau_4 \\ -\xi - {u_M (t-\tau_4)^3}/{6} + v_M \left(t - {\tau_3}/{2}\right) & \tau_4 \le t < \tau_5 \\ -\xi - .5 u_M (t-\tau_5)^2 + v_M (t - .5\tau_3) + & \tau_5 \le t < \tau_6 \\ \quad +.5 u_M (\tau_5 - t)\tau_1^2 - {u_M (\tau_5 - \tau_4)^3}/{6} & \\ u_M \left(t - t_f\right)^3 / 6 & \tau_6 \le t \le t_f \end{cases} \tag{4.3.36}$$

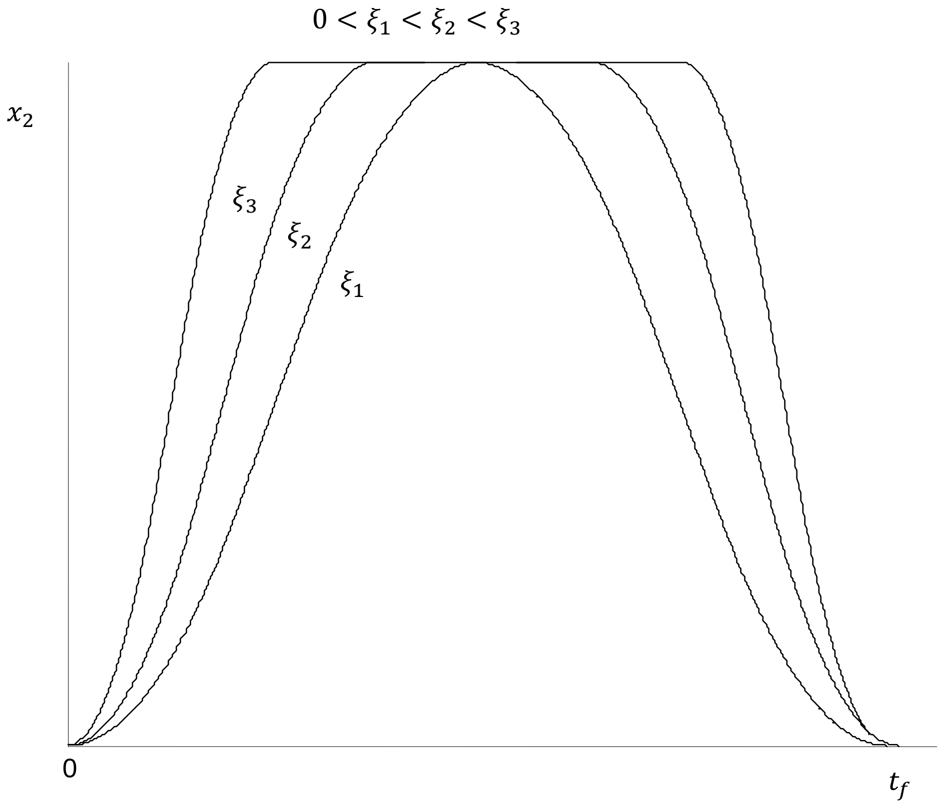


Figure 19. Variations de la vitesse par rapport à

la position initiale.

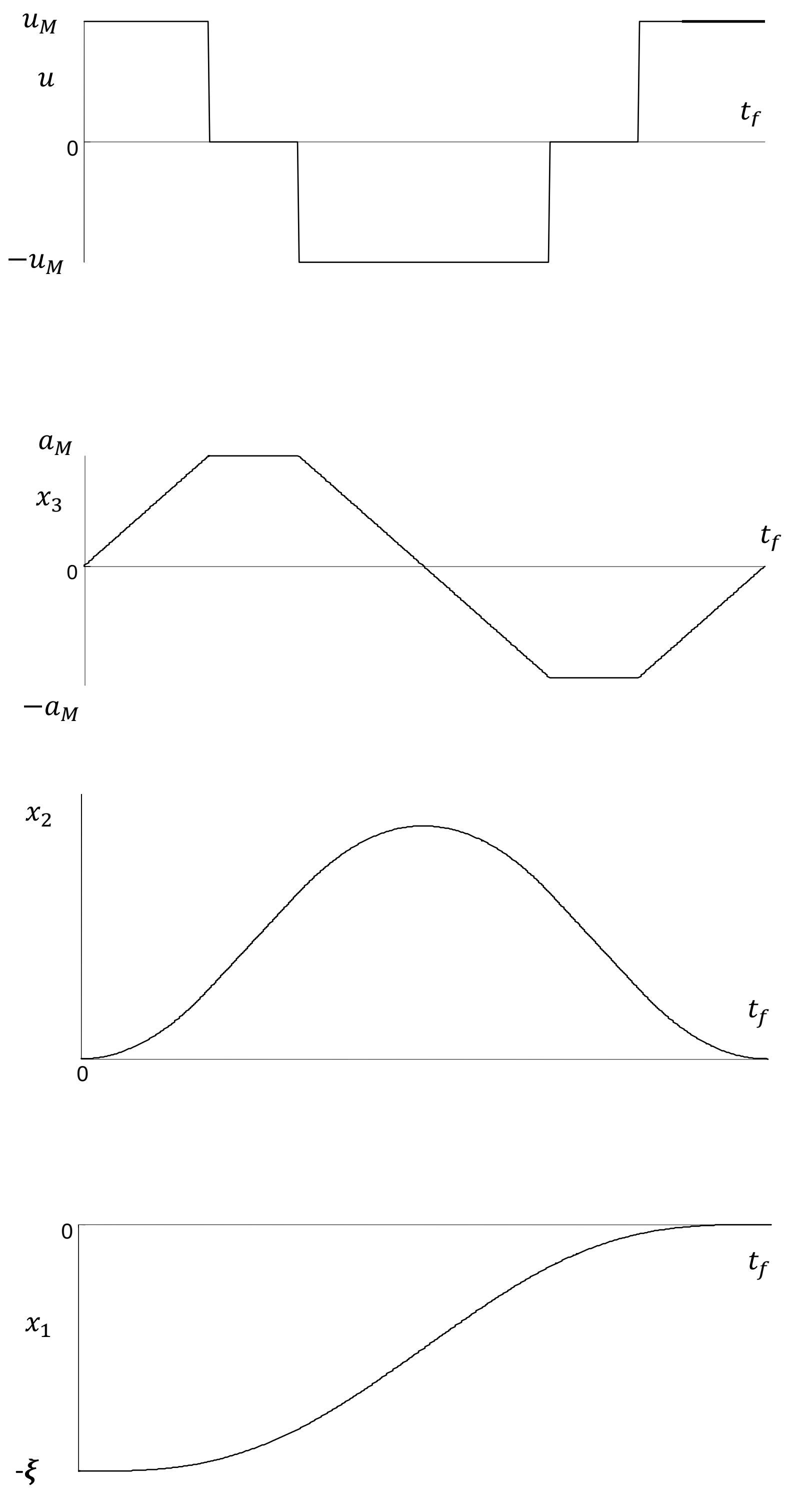


Figure 20. Réponses du système triple intégrateur

avec contrainte sur l’accélération.

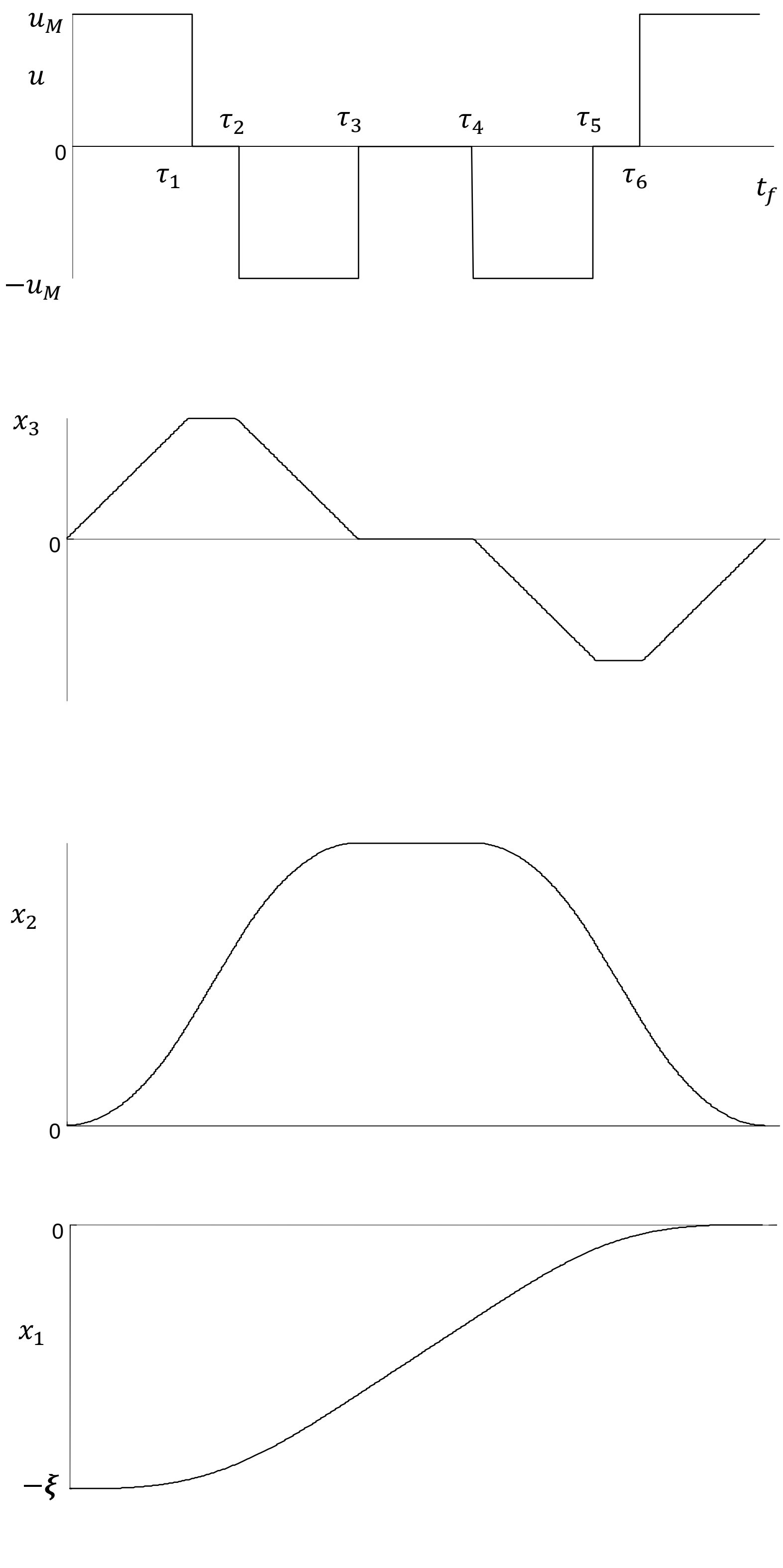


Figure 21. Réponses du système triple intégrateur

avec contraintes sur l'accélération et la vitesse.

4.4 Simulation:

On suppose le frottement $F_v = 8\ 10^{-6}\ N.m.s$. Les valeurs maximales des commandes par rapport à x , y, et ψ sont respectivement : $1\ m/s^3$, $1\ m/s^3$, et $\pi/10\ rd/s^3$.

<u>Exemple 1 :</u>

Dans ce premier exemple, on ne considère aucune contrainte sur les variables d'états, et les conditions initiales $x(0) = -5m,\ \ y(0) = -3m,\ \ \psi(0) = -\pi/3\ rd.$

Les temps optimaux obtenus sont respectivement :

$$t_{fx} = 5.4288\ s,\quad t_{fy} = 4.5789\ s,\quad t_{f\psi} = 4.7425\ s.$$

Figures 22 montrent les résultats simulés de l'accélération, vitesse, et position de x par rapport au temps, respectivement. La même opération est répétée pour y (figures 23) et pour ψ (figures 24).

<u>Exemple 2 :</u>

A présent, on considère des contraintes sur les accélérations de x et de y seulement :

$$|\ddot{x}| \leq 1\frac{m}{s^2},\qquad |\ddot{y}| \leq 0.5\frac{m}{s^2}.$$

Le temps final de ψ ne change pas, par contre ceux de x et de y sont :

$$t_{fx} = 5.5826\ s,\qquad t_{fy} = 5.4244\ s.$$

Les simulations sont montrées sur les figures 25 (pour la variable x), les figures 26 (pour la variable y), et les figures 27 sont celles de la variable ψ.

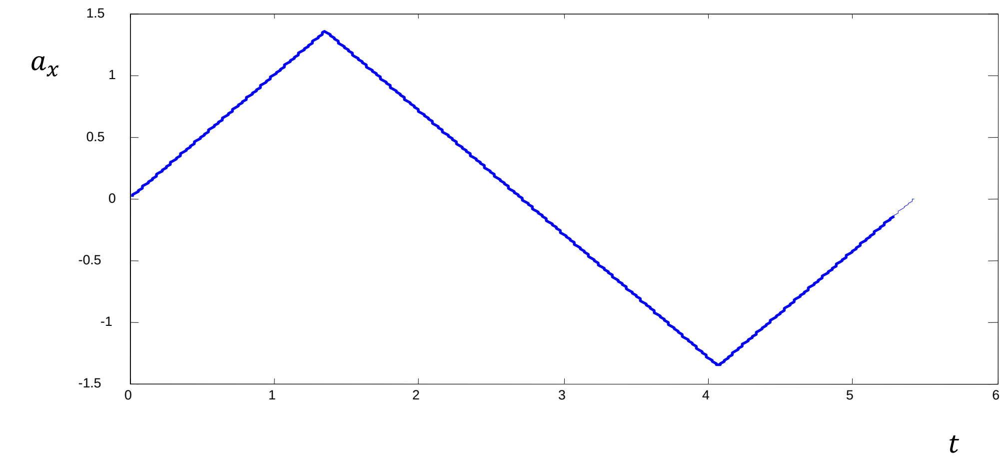
<u>Exemple 3 :</u>

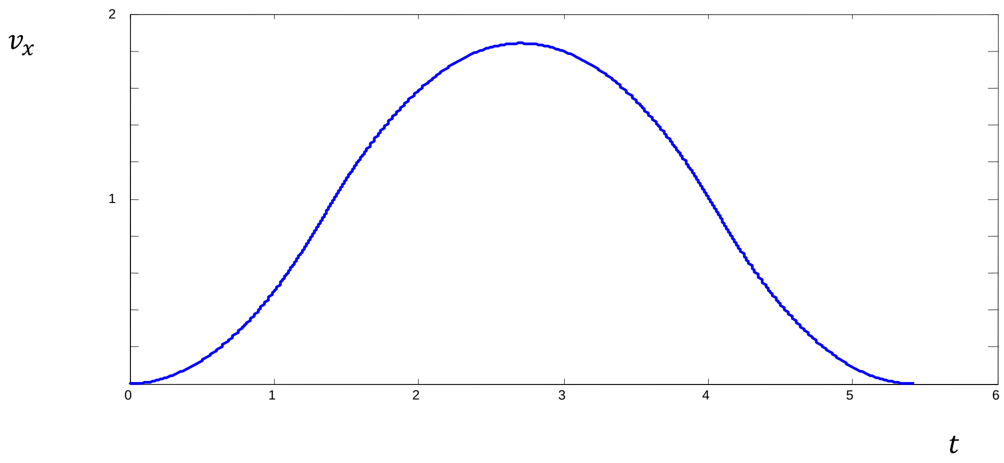
Dans ce dernier exemple, on considère également des contraintes sur les vitesses de x et de y : $\dot{x}_{max} = 1.5m/s,\quad \dot{y}_{max} = 0.5m/s.$

Les temps optimaux obtenus sont :

$$t_{fx} = 5.8333s,\qquad t_{fy} = 7.5\ s.$$

Les simulations sont montrées sur les figures 28 (pour la variable x), les figures 29 (pour la variable y), et les figures 30 sont celles de la variable ψ.





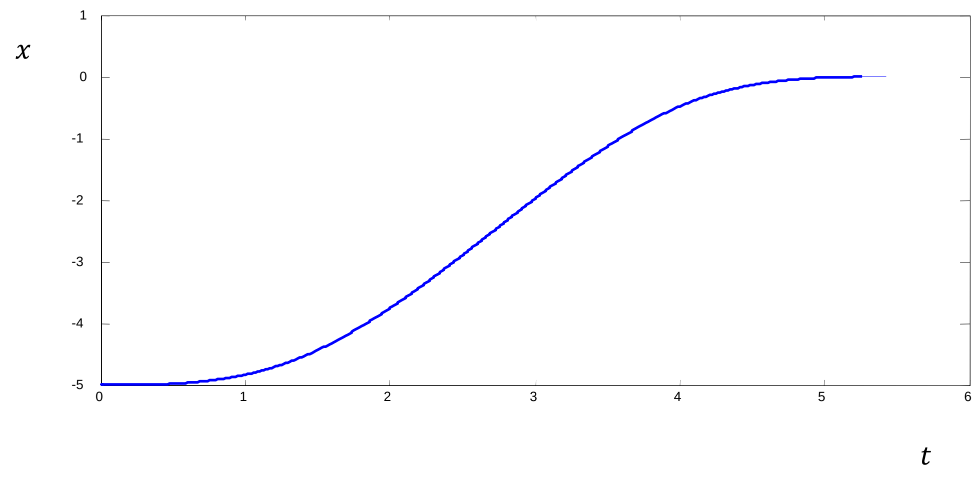


Figure 22. Cas sans contraintes, courbes de x.

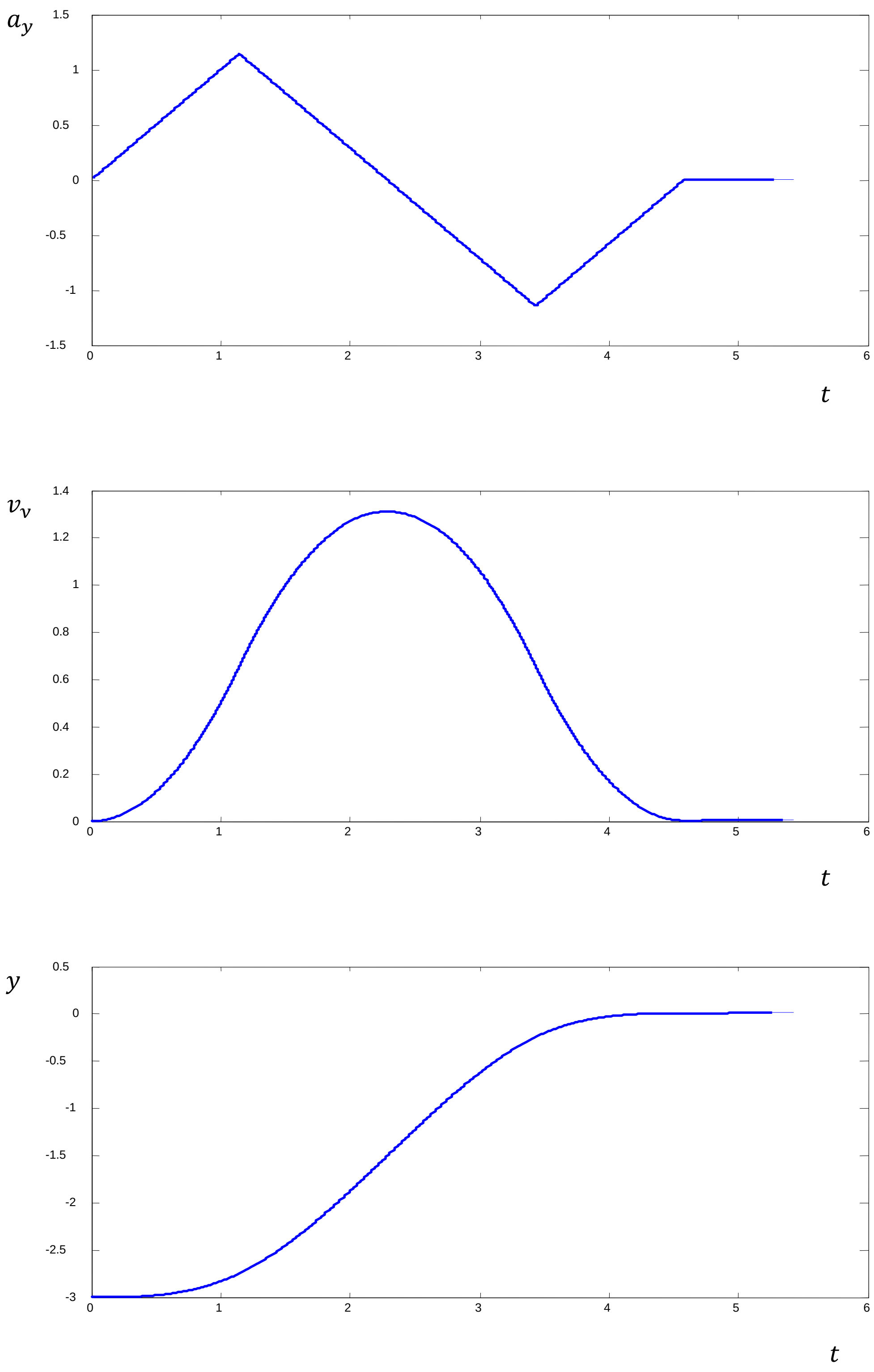


Figure 23. Cas sans contraintes,
courbes de y.

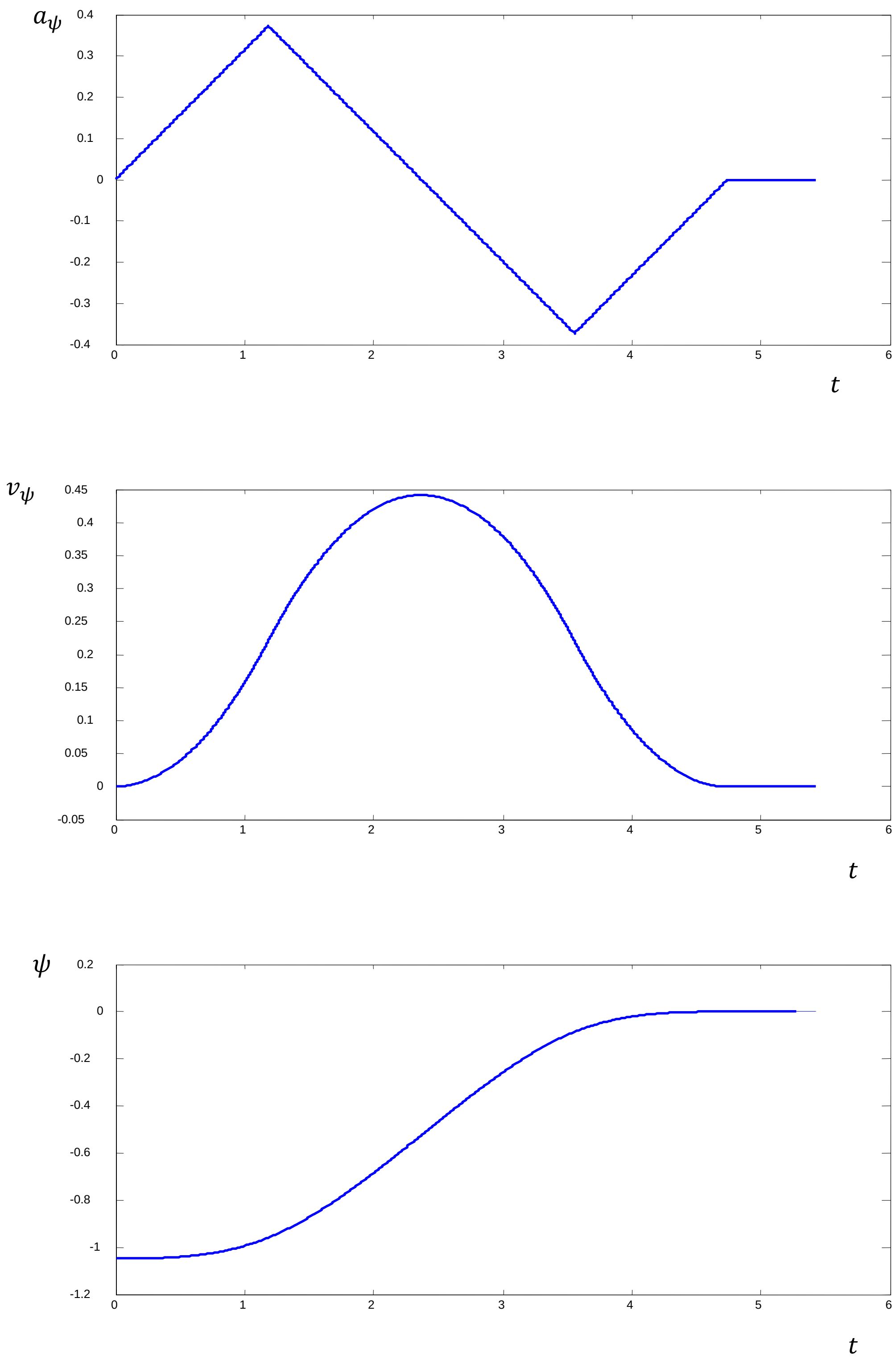


Figure 24. Cas sans contraintes, courbes de ψ.

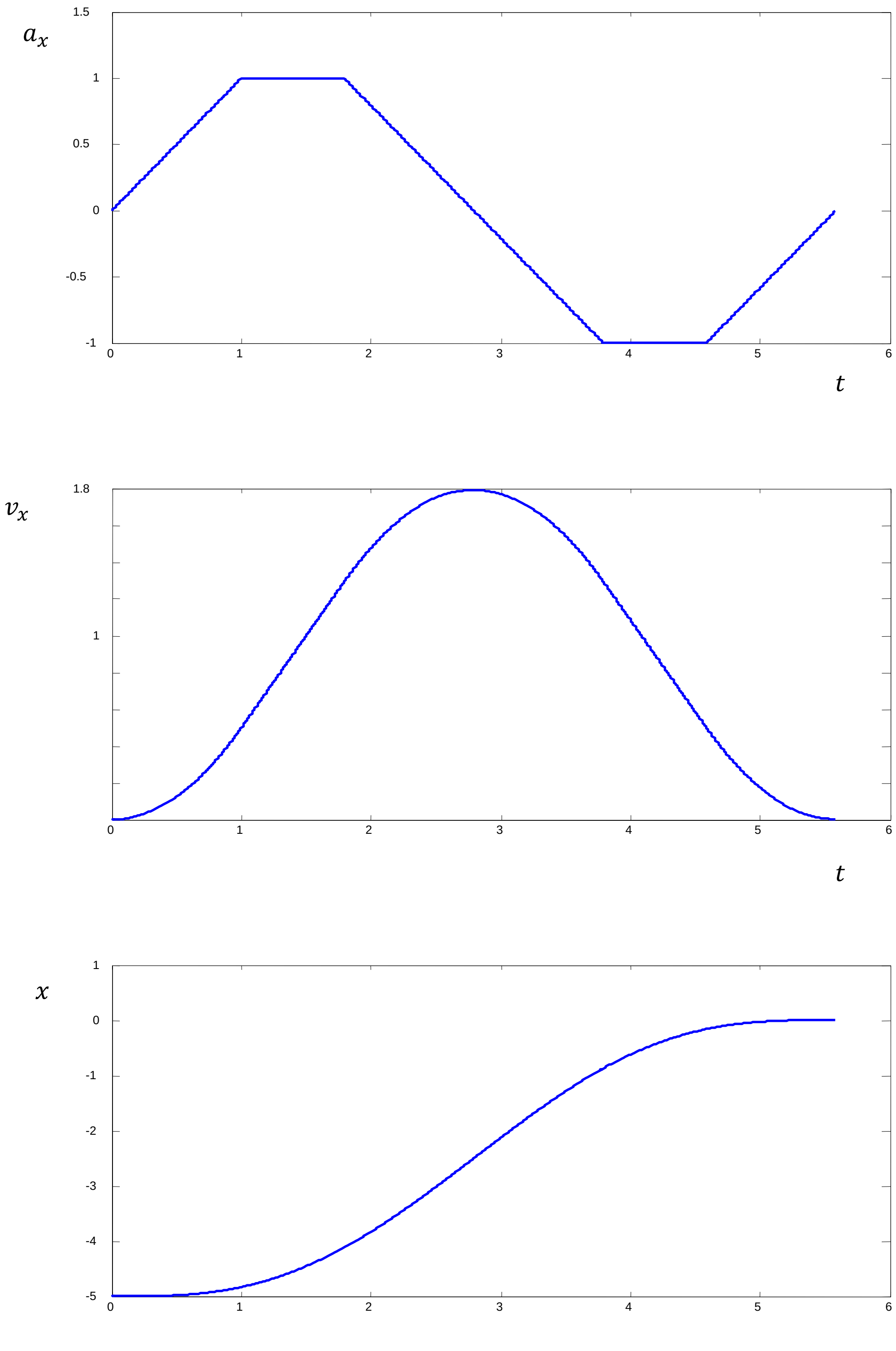


Figure 25. Contrainte sur l'accélération

Courbes de x.

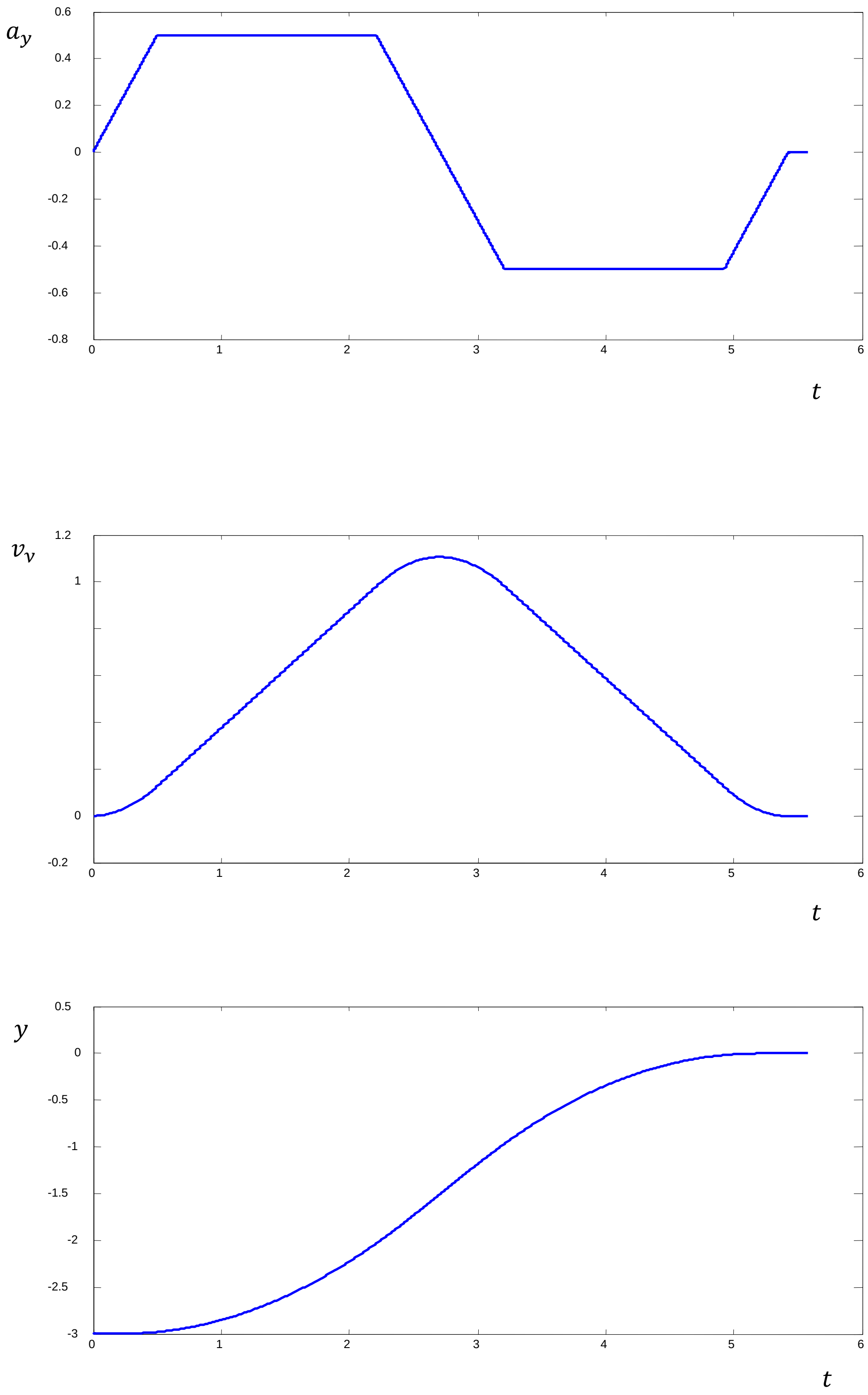


Figure 26. Contrainte sur l'accélération

Courbes de y.

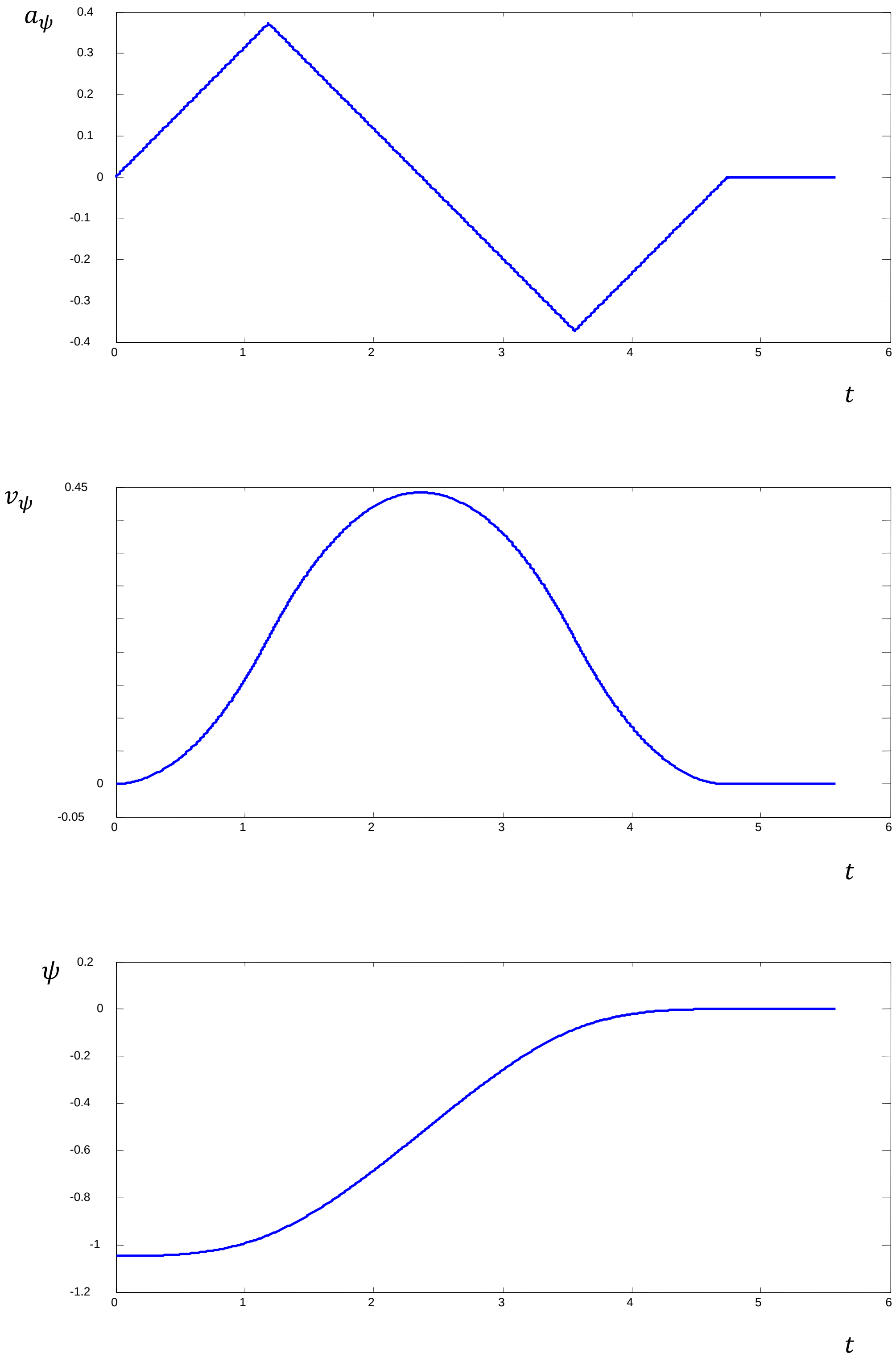


Figure 27. Contrainte sur l'accélération

Courbes de ψ.

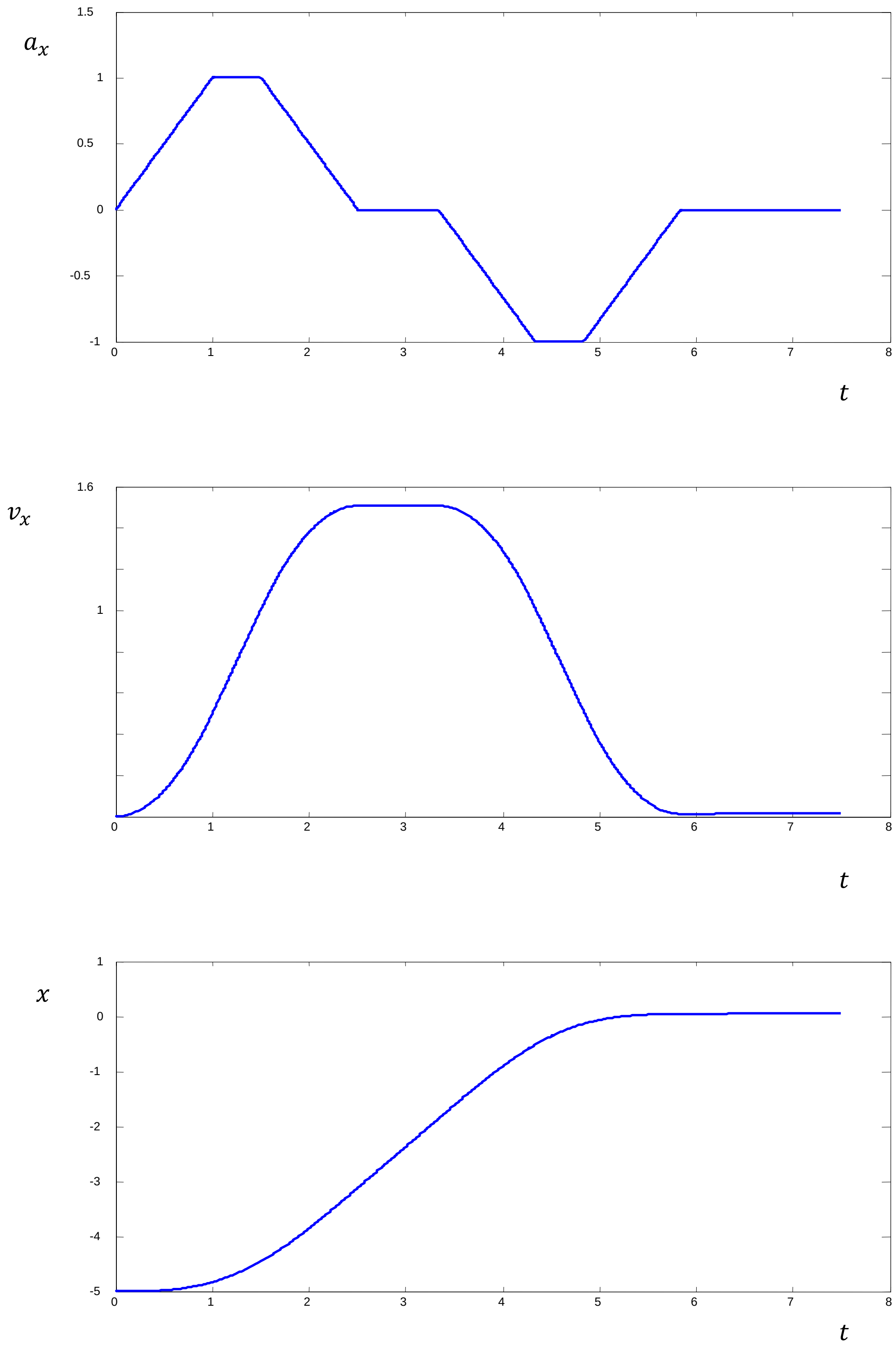


Figure 28. Contraintes sur l'accélération et la vitesse

Coubes de x.

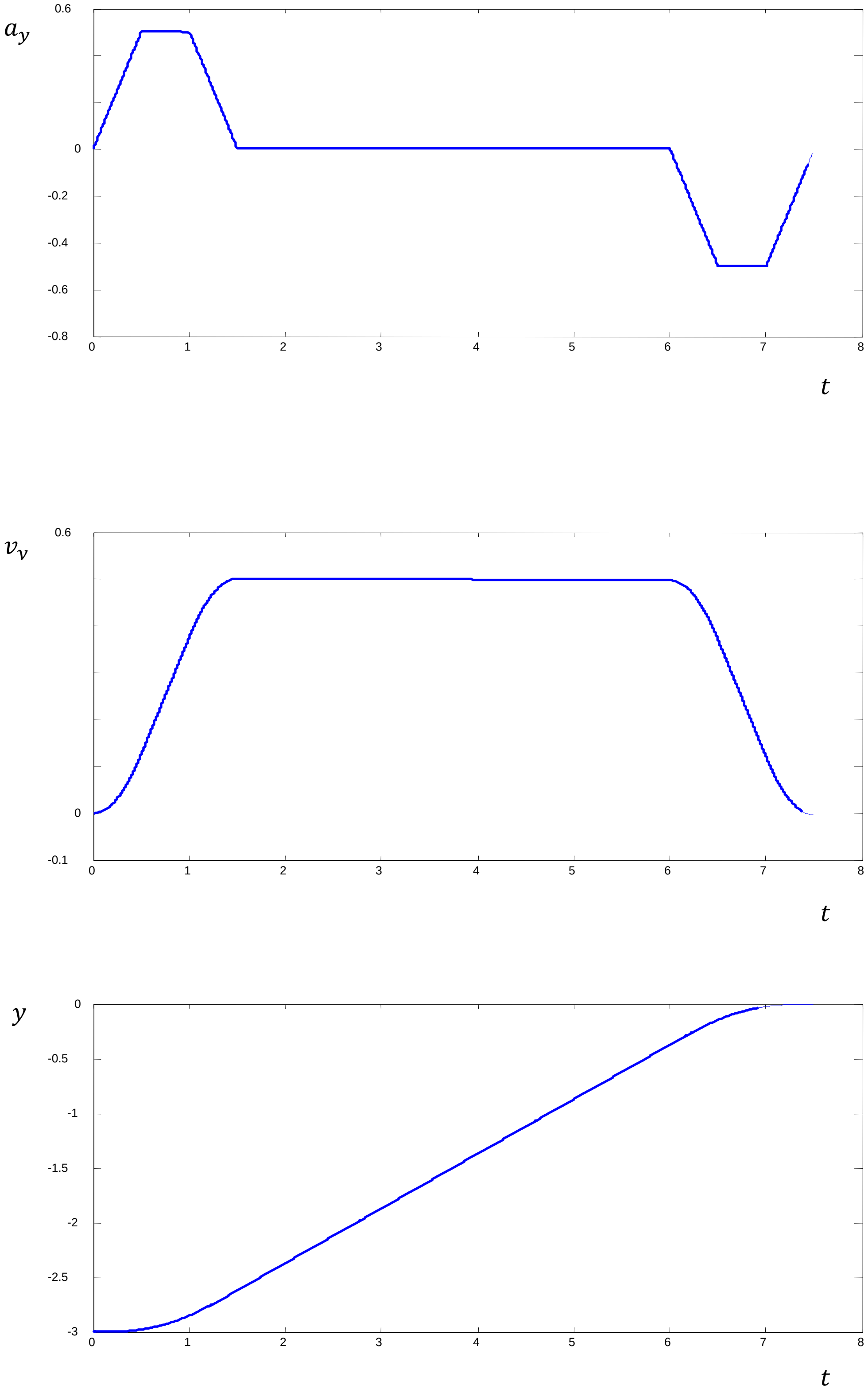


Figure 29. Contraintes sur l'accélération et la vitesse

Coubes de y.

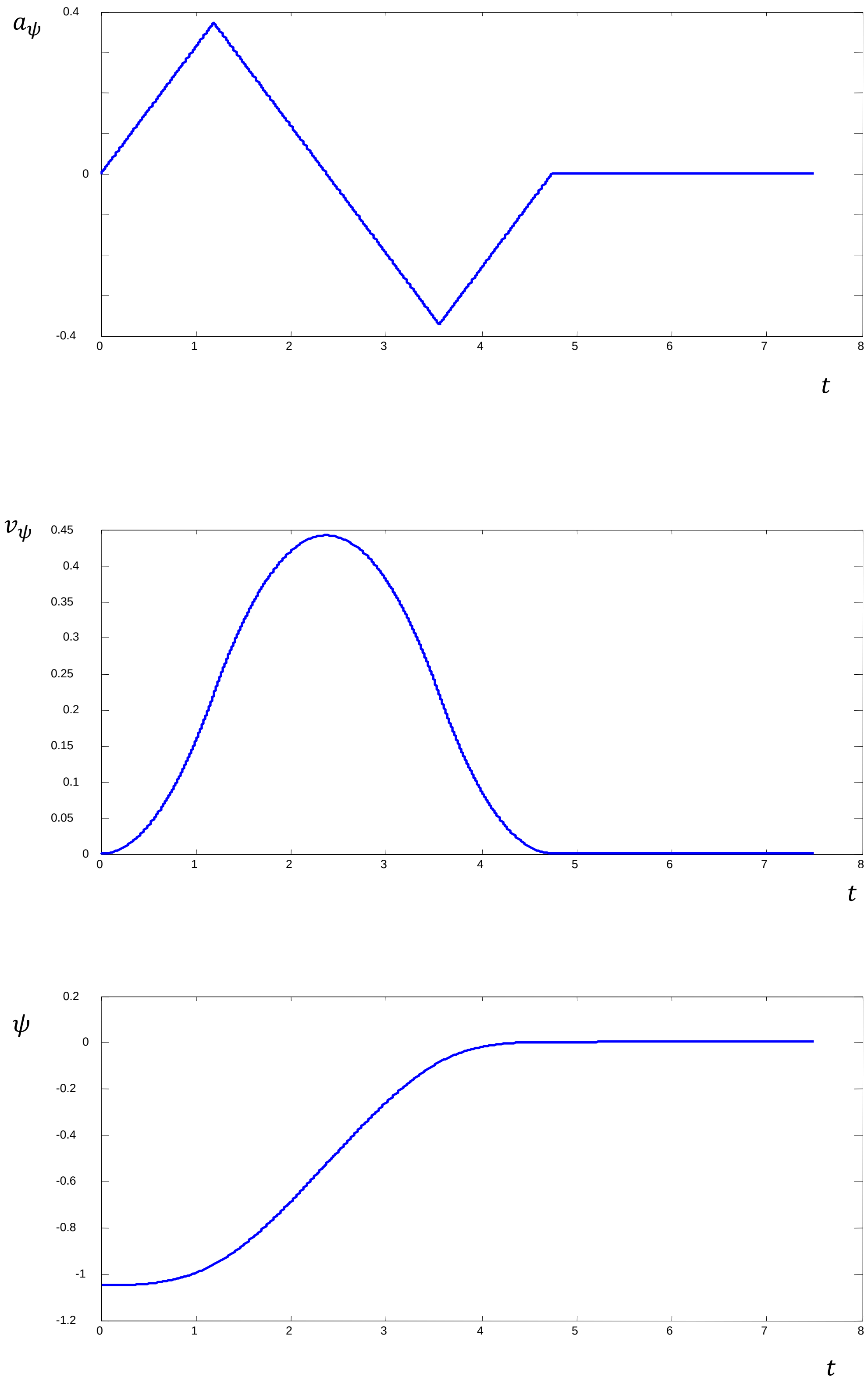


Figure 30. Contraintes sur l'accélération et la vitesse

Coubes de ψ.

Chapitre 5

Etude de la stabilité :

Dans ce chapitre, on va démontrer l'existence d'une rétroaction linéaire pour le véhicule omnidirectionnel, qui va assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, ceci, malgré le fait que les variations de la transformation de linéarisation et de découplage par rapport à sa valeur nominale ne sont pas entièrement connues.

Considérons la transformation de la formule (3.1.3), qui peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}(\psi)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.1}$$

Où :

$$\boldsymbol{M}(\psi) = L\boldsymbol{B}(\psi)^{-1}/(\rho K_T) \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y}) = L\boldsymbol{B}(\psi)^{-1}\{\boldsymbol{G}_1(\psi,\Omega)\boldsymbol{Y}_3 + \boldsymbol{G}_2(\psi,\Omega,\dot{\Omega})\boldsymbol{Y}_2\}/(\rho K_T) \tag{5.3}$$

Pour que la transformation de la formule (5.1) soit réalisable, il est nécessaire que chacune des fonctions $\boldsymbol{M}(\psi)$ et $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y})$ soient bien déterminées. Evidemment, cela n'est jamais vrai dû au fait que les paramètres du modèle ainsi que les états du système ne sont pas toujours disponibles.

Supposons qu'à cause des variations imprévisibles, telles que les erreurs de modélisation, variations de température, effets de glissements, et autres, la transformation employée est :

$$\widehat{\boldsymbol{V}} = \widehat{\boldsymbol{M}}(\psi)\boldsymbol{U} + \widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.4}$$

Où :

$$\widehat{\boldsymbol{M}}(\psi) = \boldsymbol{M}(\psi) + \boldsymbol{\Delta M}(\psi) \tag{5.5}$$

$$\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\Delta b}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.6}$$

De telle façon que $\boldsymbol{\Delta M}(\psi)$ et $\boldsymbol{\Delta b}(\boldsymbol{Y})$ sont les erreurs dans $\boldsymbol{M}(\psi)$ et $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y})$ respectivement. A ce moment là, la fonction de retour n'est plus possible et l'application de la nouvelle commande ne permet pas d'avoir la réponse souhaitée.

Notons que le degré de magnitude de la fonction $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y})$ est nettement supérieur à celui de la fonction $\boldsymbol{M}(\psi)$ ce qui nous permet de dire que l'étude par rapport à la première fonction est suffisante ce qui nous autorise à introduire la supposition suivante :

<u>Supposition :</u>

$$\boldsymbol{\Delta M}(\psi) = \boldsymbol{0} \qquad \forall\psi \in \boldsymbol{R}.$$

En tenant compte de cette supposition, alors la fonction $\widehat{\boldsymbol{V}}$ peut être reformulée de la façon suivante :

$$\widehat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{M}(\psi)[\boldsymbol{U} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y})] + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.7}$$

Où :

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{M}(\psi)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Delta b}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{M}(\psi)^{-\mathbf{1}} = \rho K_T \boldsymbol{B}(\psi) \tag{5.9}$$

Donc, le problème de singularité ne se pose jamais.

Dans l'expression (5.7), on peut considérer le terme $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y})$ comme étant un élément de la nouvelle commande $\boldsymbol{U}$, le modèle dynamique en boucle ouverte utilisé dans le chapitre 3 peut être reconsidéré **:**

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{Y}}_1 &= \boldsymbol{Y}_2 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_2 &= \boldsymbol{Y}_3 \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_3 &= \boldsymbol{U} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Où : $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3$ et $\boldsymbol{Y}$ sont des vecteurs définis dans les formules (2.3.16) et (2.3.15).

Autrement dit, pour chaque degré de liberté nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{1i} &= Y_{2i} \\ \dot{Y}_{2i} &= Y_{3i} \\ \dot{Y}_{3i} &= U_i + d_i(\boldsymbol{Y}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pour tout $i = 1,2,3$.

Du moment que $d_i(\boldsymbol{Y})$ peut être une fonction non-linéaire de toutes les variables d'état, le système en boucle ouverte n'est plus linéaire et non plus découplé en un ensemble formant le triple intégrateur traité auparavant.

Cependant, l'équation (5.11.3) peut être traitée comme étant une équation de perturbation dont $d_i(\boldsymbol{Y})$ représente un bruit additif agissant sur le système nominal. Par conséquent, l'objectif principal serait la façon d'arranger les perturbations $d_i(\boldsymbol{Y})$, à travers une fonction de retour appropriée dans chaque sous-système, afin que la stabilité asymptotique du système en boucle fermée au voisinage de l'origine de l'espace des états soit garantie.

Dans ce qui suit, on va démontrer l'existence d'une commande linéaire garantissant la stabilité asymptotique à l'origine du système en boucle fermée.

<u>Supposition :</u>

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y})$ est un vecteur de fonctions analytiques.

Comme, toute application analytique, entre autres $\boldsymbol{d(Y)}$, possède un développement en séries de Taylor convergent au voisinage de l'origine $\boldsymbol{Y = 0}$ de la forme :

$$\boldsymbol{d(Y) = d(0) + DY + d_\infty(0)} \tag{5.12}$$

Où :

$\boldsymbol{d(0)}$ est un vecteur constant,

$$\boldsymbol{D = \frac{\partial d(Y)}{\partial Y}\Big|_{Y=0}}$$

Et $\boldsymbol{d_\infty(0)}$ est le résiduel des séries convergentes contenant aux moins deux termes.

Le système d'équations (5.10) est équivalent au suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\dot{Y}_1} &= \boldsymbol{Y_2} \\ \boldsymbol{\dot{Y}_2} &= \boldsymbol{Y_3} \\ \boldsymbol{\dot{Y}_3} &= \boldsymbol{U + d(0) + DY + d_\infty(Y)} \end{aligned} \tag{5.13}$$

<u>Théorème :</u>

Il existe une loi de rétroaction linéaire telle que le système défini par (5.13) est asymptotiquement stable à l'origine de l'espace des états pour toute perturbation analytique $\boldsymbol{d(Y)}$ ayant une partie linéaire déterministe.

<u>Démonstration :</u>

Trois étapes majeures sont considérées. Dans la première étape on introduit une commande dynamique pour laquelle on démontre que la partie linéaire du système (5.13) est stable. La seconde étape consiste à translater la commande de telle sorte que le système en boucle fermée global ait un point d'équilibre à l'origine. Dans la troisième et dernière étape, on fait appel à l'un des théorèmes de Lyapounov pour montrer l'existence de la stabilité asymptotique en présence du terme $\boldsymbol{d_\infty(Y)}$.

Etape 1 : La partie linéaire du système (5.13) est donnée par :

$$\boldsymbol{\dot{Y} = FY + GU} \tag{5.14}$$

Où :

$$\boldsymbol{F = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}} \tag{5.15}$$

Et :

$$\boldsymbol{D = (D_1 \quad D_2 \quad D_3)}$$

$$\boldsymbol{D_i} = \frac{\boldsymbol{\partial d(Y)}}{\boldsymbol{\partial Y_i}}(\boldsymbol{0})$$

$$i = 1,2,3 \tag{5.16}$$

Soit la loi de commande suivante :

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Y_C} + \boldsymbol{KY} \tag{5.17}$$

Il est important de noter que cette loi de commande n'est pas unique, la forme choisie est à cause de sa simplicité seulement.

$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{K_1} \quad \boldsymbol{K_2} \quad \boldsymbol{K_2})$ qui sera défini ultérieurement, et $\boldsymbol{Y_C}$ est un vecteur d'états tel que :

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_C = -\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{Y}_3 = (-\boldsymbol{I} \quad -\boldsymbol{I} \quad -\boldsymbol{I})\boldsymbol{Y} \tag{5.18}$$

En remplaçant (5.17) et (5.16) dans (5.13) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{Y}} \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}^\star \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Y}_C \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Où :

$$\boldsymbol{F}^\star = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K_1} + \boldsymbol{D_1} & \boldsymbol{K_2} + \boldsymbol{D_2} & \boldsymbol{K_3} + \boldsymbol{D_3} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Maintenant, il suffit de prouver que $\boldsymbol{F}^\star$ est une matrice stable, autrement dit, toutes ses valeurs propres sont dans le demi-plan complexe gauche.

$$|\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{F}^\star| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{sI} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{sI} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{K_1} - \boldsymbol{D_1} & -\boldsymbol{K_2} - \boldsymbol{D_2} & \boldsymbol{sI} - \boldsymbol{K_3} - \boldsymbol{D_3} & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{sI} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{s}^4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{s}^3(\boldsymbol{K_3} + \boldsymbol{D_3}) +$$

$$\boldsymbol{s^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K_2} - \boldsymbol{D_2}) + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K_1} - \boldsymbol{D_1}) + \boldsymbol{I}| \tag{5.21}$$

Rappelons que les $\boldsymbol{K_i}$ sont à fixer, pour cela on les choisit comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K_1} &= -3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D_1} \\ \boldsymbol{K_2} &= -5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D_2} \\ \boldsymbol{K_3} &= -4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D_3} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Tandis que l'équation (5.21), en employant le dernier choix (5.22) devient équivalente à l'égalité suivante :

$$|\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{F}^\star| = \left|\boldsymbol{s}^4\boldsymbol{I} + 4\boldsymbol{s^3}\boldsymbol{I} + 6\boldsymbol{s^2}\boldsymbol{I} + 4\boldsymbol{sI} + \boldsymbol{I}\right| = (\boldsymbol{s}^4 + 4\boldsymbol{s^3} + 6\boldsymbol{s^2} + 4\boldsymbol{s} + 1)^3 = (\boldsymbol{s} + 1)^{12}$$

Ce qui signifie que toutes les 12 valeurs propres de $\boldsymbol{F}^{\star}$ sont égales à $\boldsymbol{s} = -1$ et donc la matrice $\boldsymbol{F}^{\star}$ est stable.

Etape 2 :

En injectant les équations (5.17) et (5.18) dans le système (5 .13) on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_1 = \boldsymbol{Y}_2$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_2 = \boldsymbol{Y}_3 \tag{5.23}$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_3 = \boldsymbol{Y}_C + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{0})$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_C = -\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{Y}_3$$

Si on pose :

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \dot{\boldsymbol{Y}}_C = \boldsymbol{0}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{Y}_C = -\boldsymbol{d}(\boldsymbol{0})$$

Qui représente un point d'équilibre.

Et si on définit :

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_C = \boldsymbol{Y}_C + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{0}) \tag{5.24}$$

Alors les dynamiques du système global peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{Y}} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{Y}}}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}^{\star} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Y}_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{d}_{\infty}(\boldsymbol{Y}) \tag{5.25}$$

A présent, d'après la dernière équation (5.25), il est clair que le système (5.13) possède un point d'équilibre à l'origine de l'espace des états, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$$

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_C = \boldsymbol{0}$$

Etape 3 :

La structure de commande introduite par la formule (5.17) à été employée pour stabiliser la partie linéaire du système (5.13). A ce niveau on peut faire appel au théorème de Lyapounov suivant.

<u>Théorème :</u>

Soit le système :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$$

Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice stable et $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ est une série convergente, comprenant au moins des termes du second ordre, alors l'origine $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ est stable pour tout $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$.

Sachant que $\boldsymbol{F}^{\star}$est stable (étape 1), et que $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \widehat{\boldsymbol{Y}}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ est un point d'équilibre, et comme le terme de non-linéarité $\boldsymbol{d}_{\infty}(\boldsymbol{Y})$ satisfait :

$$\boldsymbol{d}_{\infty}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{d}_{\infty}}{\partial \boldsymbol{Y}}\Big|_{\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$$

Alors le point d'équilibre $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \widehat{\boldsymbol{Y}}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ est stable quel que soit $\boldsymbol{d}_{\infty}(\boldsymbol{Y})$.

Chapitre 6

Minimisation du temps avec poursuite de trajectoire :

Désormais, lorsque l'environnement de travail du robot contient des obstacles, ou bien la tâche à accomplir est bien précise, à ce moment là l'approche qu'on vient d'élaborer n'est plus valable.

Dans de telles circonstances une formulation en fonction de la trajectoire à traquer s'avère indispensable.

6.1. Cas cinématique :

Le robot mobile est soumis à des contraintes sur ses vitesses et accélérations, qu'on considère de la forme suivante :

$$v_{iMin} \leq v_i(t) \leq v_{iMax} \tag{6.1.1}$$

$$a_{iMin} \leq \dot{v}_i(t) \leq a_{iMax} \tag{6.1.2}$$

$$\forall i \in \{1,2,3\}$$

Où les v_i sont les vitesses introduites dans l'équation (2.2.8).

Considérons, à présent, un chemin que doit le véhicule poursuivre, un tel problème a été traité en détail dans le cadre du mouvement en temps minimal de robots manipulateurs par [47], [8], [46]. Ces résultats ont été étendus aux robots mobiles [26] en tenant compte des contraintes sur les vitesses seulement.

Soit la trajectoire à traquer $p(t)$ admissible définie dans l'intervalle $[0, D]$ telle que :

$$\dot{p}(t) = {}^{v_i(t)}\!/_{v_i(p)} \tag{6.1.3}$$

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

En dérivant cette équation par rapport au temps on obtient :

$$\ddot{p}(t) = {(\dot{v}_i(t) - \dot{p}(t)^2 v_i'(p))}\Big/{v_i(p)} \tag{6.1.4}$$

$$v_i'(p) = \frac{dv_i(p)}{dp}$$

L'expression des contraintes (6.1.1) et (6.1.2) devient :

$$v_{iMin} \leq \dot{p}(t) v_i(p) \leq v_{iMax} \tag{6.1.5}$$

$$a_{iMin} \leq v_i(p)\ddot{p}(t) + \dot{p}(t)^2 v_i'(p) \leq a_{iMax} \tag{6.1.6}$$

Le processus de poursuite de chemin est donc en charge de l'évolution dans le plan de phases $(p, \dot{p})$, sous l'action des dernières contraintes.

Notons que lorsque $p = t$ alors les vitesses réelles et relatives (par rapport à p) sont confondues.

Et dans le cas où on suppose :

$$0 \leq \dot{p}(t) \leq 1 \tag{6.1.7}$$

Alors on obtient :

$$v_{iMin} \leq v_i(p) \leq v_{iMax} \tag{6.1.8}$$

$$a_{iMin} \leq v_i'(p) \leq a_{iMax} \tag{6.1.9}$$

La contrainte (6.1.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{p}_{min}(p, \dot{p}) \leq \ddot{p} \leq \ddot{p}_{max}(p, \dot{p}) \tag{6.1.10}$$

Ce qui signifie que pour sortir du chemin on doit freiner, autrement dit, on doit intégrer l'équation :

$$\ddot{p} = \ddot{p}_{min}(p, \dot{p}) \tag{6.1.11}$$

Jusqu'à atteindre la limite inférieure qui est :

$$\dot{p}(t) = 0 \tag{6.1.12}$$

Cette opération est représentée dans la figure 31.

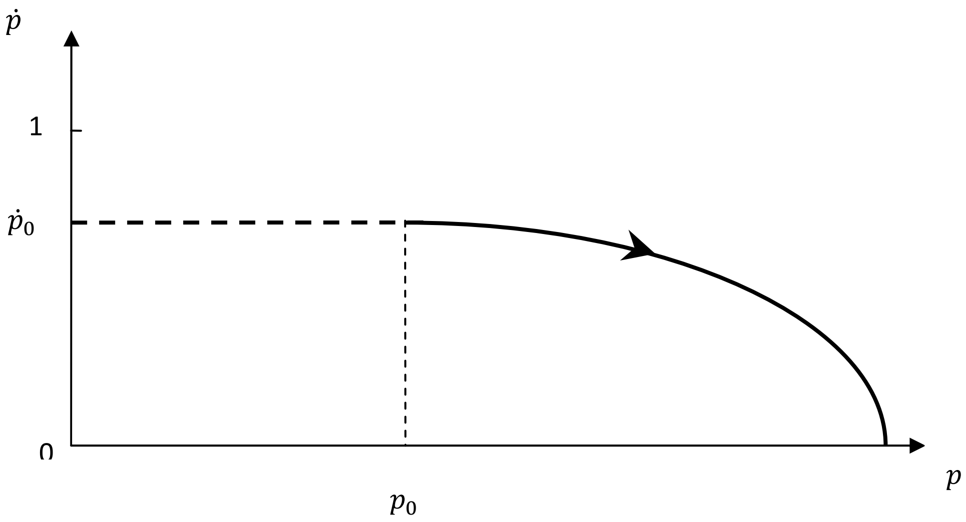


Figure 31. Courbe de décélération optimale.

Pour de simples chemins (formés de lignes droites et/ou d'arcs pouvant s'exprimer en fonction du rayon de courbure) la procédure d'optimisation est relativement simple. La méthode proposée par [9] donne une expression mathématique de l'évolution de la décélération dans le plan de phases et qui est :

$$\dot{p} = \sqrt{1 - (1 - \dot{p}_0^2)e^{2m(p-p_0)}} \tag{6.1.13}$$

Où $(\dot{p}_0, p_0)$est l'état initial de la phase de freinage. Dans cette approche les bornes inférieure et supérieure des vitesses et accélérations sont considérées égales en valeurs absolues, autrement dit :

$$v_{iMin} = -v_{iMax} \quad \text{et} \quad a_{iMin} = -a_{iMax} \qquad \forall i = 1,2,3$$

Avec :

$$m = min_{i=1,2,3} \frac{a_{iMax}}{v_{iMax}}$$

Dans la technique de calcul présentée par [7], les équations du mouvement dans le plan de phases sont formulées en fonction du rayon de courbure, ce qui signifie que cette idée n'est valable qu'a un type particulier de chemins.

En tenant compte de la dernière hypothèse, la détermination de la solution optimale est immédiate, car la vitesse maximale est obtenue lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\ddot{p}_{min}(p,\dot{p}) = \ddot{p}_{max}(p,\dot{p}) \tag{6.1.14}$$

Dans ce cas là, l'instant qui correspond au changement de signe de la commande est obtenu lorsque la solution avant des équations du mouvement (en prenant la borne supérieure de la commande) coïncide avec la solution d'avant en arrière des mêmes équations (en prenant la borne inferieure de la commande). La forme générale de la vitesse résultante est représentée dans la figure suivante :

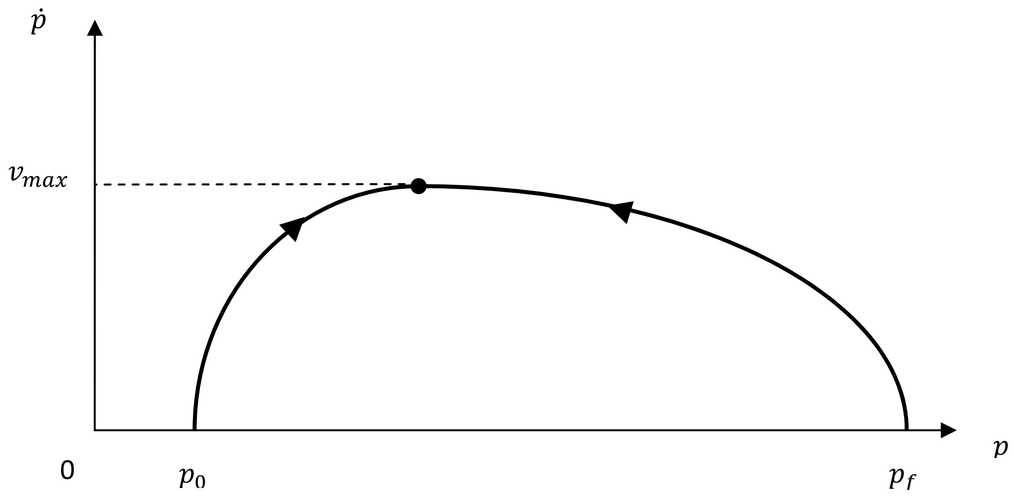


Figure 32. Courbe de vitesse optimale.

Notons, dans ce contexte, que le véhicule est sensé suivre le chemin prédéfini dans le tronçon $[p_0, p_f]$ dans lequel ce dernier est admissible.

Cette méthode, également, propose des formules analytiques d'approximation de la vitesse optimale qui sont :

$$v = -\alpha p e^{(-\beta|R(p)|)} \tag{6.1.15}$$

$$v = {}^{-p}/_{(|R(p)| + \beta)} \tag{6.1.16}$$

$$v = {}^{-p}/_{(R(p)^2 + \beta)} \tag{6.1.17}$$

Où α et β sont des constantes positives qui dépendent des caractéristiques du chemin et du véhicule (généralement régulées par tâtonnement), et $R(p)$ désigne le rayon de courbure.

Il faut souligner que l'expression de ce dernier doit être connue, ce qui veut dire que l'actuelle technique concerne des chemins simples (formes spirales).

6.2. Cas dynamique :

Pour faciliter le travail, on considère l'inductance des moteurs négligeable (ceci est valable sans aucune perte de généralité), de telle façon qu'on ait un système d'équations équivalent au système (2.3.14) :

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{X}_2$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2 = \left[\boldsymbol{A}(\Omega) - {\rho^3 K_T K_V \boldsymbol{B}(\psi)\boldsymbol{C}(\psi)}/{r r_a}\right]\boldsymbol{X}_2 + {\rho K_T \boldsymbol{B}(\psi)\boldsymbol{V}}/{r_a} \qquad (6.2.1)$$

Soit la formulation suivante :

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{f}(p) \qquad (6.2.2)$$

Où p représente le déplacement sur la trajectoire à poursuivre, et $\boldsymbol{f}$ est un vecteur de fonctions dérivables. Dérivons deux fois par rapport au temps l'équation (6.2.2) pour avoir :

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{f}_p \dot{p} = \boldsymbol{X}_2$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{f}_p \ddot{p} + \boldsymbol{f}_{pp} \dot{p}^2 \qquad (6.2.3)$$

En remplaçant (6.2.3) dans (6.2.1) on obtient :

$$\boldsymbol{a}(p)\ddot{p} + \boldsymbol{b}(p)\dot{p}^2 + \boldsymbol{c}(p)\dot{p} = \boldsymbol{V} \qquad (6.2.4)$$

Où :

$$\boldsymbol{a}(p) = {r_a \boldsymbol{B}(p)^{-1}\boldsymbol{f}_p}/{\rho K_T}$$

$$\boldsymbol{b}(p) = {r_a \boldsymbol{B}(p)^{-1}\boldsymbol{f}_{pp}}/{\rho K_T} - \boldsymbol{A}(p)\boldsymbol{f}_p$$

$$\boldsymbol{c}(p) = {\rho^3 K_T K_V \boldsymbol{C}(p)\boldsymbol{f}_p}/{r \rho K_T}$$

Ou bien sous la forme scalaire :

$$a_i(p)\ddot{p} + b_i(p)\dot{p}^2 + c_i(p)\dot{p} = V_i \qquad i = 1,2,3. \qquad (6.2.5)$$

Telle que :

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \qquad \text{Pour tout} \quad i = 1,2,3.$$

Etant données les contraintes sur les tensions, les valeurs maximales et minimales de $\ddot{p}$ peuvent être déterminées en fonction de p et de $\dot{p}$ de la façon suivante :

$$V_i^{min} \leq a_i(p)\ddot{p} + b_i(p)\dot{p}^2 + c_i(p)\dot{p} \leq V_i^{max} \qquad i = 1,2,3. \qquad (6.2.6)$$

Qui peut être écrite autrement :

$$\alpha_i(p,\dot{p}) \leq \ddot{p}_i \leq \beta_i(p,\dot{p}) \qquad (6.2.7)$$

Où :

$$\alpha_i = {[V_i^{\alpha} - b_i(p)\dot{p}^2 - c_i(p)\dot{p}]}\Big/{a_i(p)} \qquad (6.2.8)$$

$$\beta_i = {\left[V_i^{\beta} - b_i(p)\dot{p}^2 - c_i(p)\dot{p}\right]}\Big/{a_i(p)} \qquad (6.2.9)$$

Avec :

$$V_i^{\alpha} = V_i^{min} \qquad \text{Si} \qquad a_i(p) > 0$$

$$V_i^{\alpha} = V_i^{max} \qquad \text{Si} \qquad a_i(p) < 0$$

$$V_i^{\beta} = V_i^{min} \qquad \text{Si} \qquad a_i(p) < 0$$

$$V_i^{\beta} = V_i^{max} \qquad \text{Si} \qquad a_i(p) > 0$$

Equation (6.2.7) peut être formulée de manière plus compacte :

$$\alpha(p,\dot{p}) \leq \ddot{p} \leq \beta(p,\dot{p}) \qquad (6.2.10)$$

Où :

$\alpha(p,\dot{p}) = max\{\alpha_i(p,\dot{p})\}$

$\beta(p,\dot{p}) = min\{\beta_i(p,\dot{p})\}$ $\forall i = 1,2,3.$

Remarque :

Le point qui correspond à $a_i(p) = 0$ est un cas de singularité dans lequel la détermination de l'accélération $\ddot{p}$ n'est pas unique, néanmoins, il peut être un point où la tension correspondante change de signe.

Dans la suite de ce chapitre, on supposera la courbe de la vitesse maximale continue et différentiable. La dérivabilité de la vitesse maximale, particulièrement au point de changement de signe, signifie que $\ddot{p}$ est continue au voisinage de ce point, et que la trajectoire dans le plan de phases doit être continue et différentiable localement. Par conséquent, si la trajectoire rencontre la courbe de vitesse maximale et pour que cette trajectoire ne viole pas la contrainte (la vitesse maximale), il faut que dans ce point de rencontre la trajectoire soit tangente à la courbe de vitesse.

Théorème : [47]

A chaque instant, au moins l'une des tensions doit être saturée, et à chaque changement de signe une autre tension doit être saturée également.

Pour cela, supposons que la tension d'ordre j soit saturée, et comme au voisinage du point de changement de signe la trajectoire doit être en phase de décélération de la façon suivante :

$$\ddot{p} = \alpha_j(p,\dot{p}) = {\left[V_j^{\alpha} - b_j(p)\dot{p}^2 - c_j(p)\dot{p}\right]}\Big/{a_j(p)} \qquad (6.2.11)$$

D'autre part, dans un tel point une autre tension doit être saturée aussi i.e. :

$$V_k = {a_k(p)\left[V_j^{\alpha} - b_j(p)\dot{p}^2 - c_j(p)\dot{p}\right]}\Big/{a_j(p)} + b_k(p)\dot{p}^2 + c_k(p)\dot{p} \qquad (6.2.12)$$

Du moment que la trajectoire de la tension V_k doit rencontrer sa contrainte tangentiellement au point de changement de signe, alors il faut qu'on ait le suivant :

$$dV_k = 0 \qquad (6.2.13)$$

Et comme d'après (6.2.12) V_k est une fonction de p et de $\dot{p}$ seulement on a :

$$\frac{\partial V_k}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial V_k}{\partial \dot{p}}\ddot{p} = 0 \qquad (6.2.14)$$

En utilisant les équations (6.2.11), (6.2.12) et (6.2.14) on obtient :

$$\varphi_1(p)\dot{p}^3 + \varphi_2(p)\dot{p}^2 + \varphi_3(p)\dot{p} + \varphi_4(p) = 0 \qquad (6.2.15)$$

Où :

$$\varphi_1(p) = \frac{d\mu_1}{dp} - 2\mu_1\frac{b_j}{a_j}$$

$$\varphi_2(p) = \frac{d\mu_3}{dp} - 2\mu_1\frac{c_j}{a_j} - \mu_3\frac{b_j}{a_j}$$

$$\varphi_3(p) = \frac{d\mu_2}{dp} - \mu_3\frac{c_j}{a_j}$$

$$\varphi_4(p) = \mu_3\frac{V_j^\alpha}{a_j}$$

Avec :

$$\mu_1 = b_k - b_j\frac{a_k}{a_j}$$

$$\mu_2 = V_j^\alpha\frac{a_k}{a_j}$$

$$\mu_3 = c_k - c_j\frac{a_k}{a_j}$$

La procédure de calcul serait la suivante :

Pour chaque valeur de p , à partir de l'équation (6.2.15) déterminer $\dot{p} \geq 0$, puis vérifier pour ce point $(p, \dot{p})$ si $V_k = V_k^{max}$ pour $a_k > 0$, ou bien si $V_k = V_k^{min}$ pour $a_k < 0$.

En même temps, les deux autres tensions doivent être dans leurs régions admissibles (sans violation d'aucune des contraintes sur ces tensions), si de telles conditions sont vérifiées, le point $(p, \dot{p})$ peut être un point de changement de signe.

Remarque :

Du moment que les indices j et k doivent être différents, il n'existe que 3 combinaisons possibles, ce qui signifie que le temps d'exécution des opérations de calcul est considérablement réduit.

Dans le but d'illustrer l'approche, on considère une autre fois le simple exemple de deux degrés de liberté dans lequel on néglige le frottement et on prend un angle constant $\psi = 0$, ce qui signifie que :

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = v_x \\
&\dot{v}_x = -k_1 v_x - 3k_2(V_1 + V_2) \qquad (6.2.16) \\
&\dot{y} = v_y \\
&\dot{v}_y = -k_1 v_y + \sqrt{3}k_2(V_1 - V_2)
\end{aligned}
$$

Où :

$$k_1 = {}^{-3\rho^3 K_T K_V b_1}/_{r r_a}\,; \qquad k_2 = {}^{\rho K_T b_1}/_{r_a}\,;$$

Avec :

$$V_3 = -(V_1 + V_2) \qquad (6.2.17)$$

Les équations du système (6.2.16) peuvent être combinées pour avoir deux équations en fonction du paramètre p et telles que chacune doit être contrôlée par une seule tension :

$$
\begin{aligned}
&a_1(p)\ddot{p} + b_1(p)\dot{p}^2 + c_1(p)\dot{p} = V_1 \\
&a_2(p)\ddot{p} + b_2(p)\dot{p}^2 + c_2(p)\dot{p} = V_2 \qquad (6.2.18)
\end{aligned}
$$

De telle sorte que :

$$a_1(p) = k_3\left(\sqrt{3}y'(p) - 3x'(p)\right); \qquad a_2(p) = -k_3\left(\sqrt{3}y'(p) + 3x'(p)\right);$$

$$b_1(p) = k_3\left(\sqrt{3}y''(p) - 3x''(p)\right); \qquad b_2(p) = -k_3\left(\sqrt{3}y''(p) + 3x''(p)\right);$$

$$c_1(p) = k_4\left(\sqrt{3}y'(p) - 3x'(p)\right); \qquad c_2(p) = -k_4\left(\sqrt{3}y'(p) + 3x'(p)\right);$$

$$k_3 = {}^{r_a}\!/_{6\rho K_T b_1}; \qquad k_4 = {}^{\rho^2 K_V}\!/_{2r}.$$

La procédure de recherche des points de changement de signes est la suivante :

1) Pour chaque valeur de p résoudre les équations (6.2.18) pour obtenir $\dot{p}$, en même temps, vérifier pour chaque paire $(p, \dot{p})$ si l'autre commande vérifie l'une des deux conditions suivantes $V_j = V_j^{max}$ si $a_j > 0$ ou bien $V_j = V_j^{min}$ si $a_j < 0$.
2) A partir de ces points, intégrer $\ddot{p} = \alpha(p, \dot{p})$ d'avant en arrière par rapport au temps, et $\ddot{p} = \beta(p, \dot{p})$ en avant par rapport au temps jusqu'à ce que la trajectoire dans le plan de phase atteigne l'un des axes p et /ou $\dot{p}$, ou bien l'une des contraintes sur les autres actuateurs soit violée.
3) Obtenir le reste des points de changement de signes, selon la position du point initial, comme c'est expliqué dans l'exemple suivant.

Exemple :

Soit le cas où on veut traquer dans l'intervalle $p \in [0.5, 1.5]$ la trajectoire de coordonnées suivantes :

$$x(p) = p + 1 \qquad y(p) = {}^{(p-0.5)^3}\!/_{(3\sqrt{3})}$$

En respectant les contraintes sur les tensions des actuateurs suivantes :

$$|V_1| \le V_1^{max}; \qquad |V_2| \le V_2^{max}; \qquad |V_3| \le V_3^{max}.$$

$V_1^{max} = V_2^{max} = 6$ Volts et $V_3^{max} = 12$ Volts.

Dans ce cas, on a :

$$a_1(p) = k_3(p^2 - p - 2.75); \qquad a_2(p) = -k_3(p^2 - p + 3.25);$$

$b_1(p) = 2k_3(p - 0.5)$; $\qquad b_2(p) = -b_1(p)$;

$c_1(p) = {k_4 a_1(p)}/{k_3}$; $\qquad c_2(p) = {k_4 a_2(p)}/{k_3}$.

On constate que lorsque $p \in [-1.23, 2.23]$, on a : $a_1(p) < 0$ et $a_2(p) < 0$.

Et donc on obtient :

Dans le premier cas où $k = 1, j = 2$:

La première tension est saturée $V_1^{\alpha} = V_1^{max}$, ce qui signifie que :

$$\mu_1 = b_2 - {b_1 a_2}/{a_1} = {12k_3(p - 0.5)}/{(p^2 - p - 2.75)} ;$$

$$\mu_2 = {V_1^{\alpha} a_2}/{a_1} = {-V_1^{max}(p^2 - p + 3.25)}/{(p^2 - p - 2.75)} ;$$

$$\mu_3 = c_2 - {c_1 a_2}/{a_1} = 0 ;$$

D'où :

$$\varphi_1 = {-12k_3(5p^2 - 5p + 4.25)}/{(p^2 - p - 2.75)^2}$$

$$\varphi_2 = {-24k_4(p - 0.5)}/{(p^2 - p - 2.75)}$$

$$\varphi_3 = {6V_1^{max}(2p - 1)}/{(p^2 - p - 2.75)^2}$$

Et donc la première équation qui nous permet de déterminer les points où la tension V_2 change de signe est :

$$k_3(5p^2 - 5p + 4.25)v^2 + 2k_4(p - 0.5)(p^2 - p - 2.75)v - V_1^{max}(p - 0.5) = 0 \quad (6.2.19)$$

Dans le deuxième et dernier cas, lorsque $k = 2$ et $j = 1$, la deuxième tension qui est saturée : $V_2^{\alpha} = V_2^{max}$ ce qui nous mène à dire que :

$$\mu_1 = b_1 - {}^{b_2 a_1}/_{a_2} = {}^{12k_3(p-0.5)}\Big/_{(p^2-p+3.25)}$$

$$\mu_2 = {}^{V_2^{max} a_1}/_{a_2} = {}^{-V_2^{max}(p^2-p-2.75)}\Big/_{(p^2-p+3.25)}$$

$$\mu_3 = c_1 - {}^{c_2 a_1}/_{a_2} = 0$$

Et donc :

$$\varphi_1 = {}^{-12k_3(5p^2-5p-1.75)}\Big/_{(p^2-p+3.25)^2}$$

$$\varphi_2 = {}^{-24k_4(p-0.5)}\Big/_{(p^2-p+3.25)}$$

$$\varphi_3 = {}^{-12V_2^{max}(p-0.5)}\Big/_{(p^2-p+3.25)^2}$$

Aboutissant à l'équation :

$$k_3(5p^2-5p+1.75)v^2 + 2k_4(p-0.5)(p^2-p+3.25)v + V_2^{max}(p-0.5) = 0 \quad (6.2.20)$$

Où $v = \dot{p}$.

Dans cet exemple, on remarque que seule l'équation (6.2.19) qui donne une solution faisable, car l'autre équation (6.2.20) lorsqu'elle est intégrée fournit une vitesse négative, qui est inadmissible.

Le point correspondant au minimum de V_2, lorsque l'équation (6.2.19) est résolue, a pour coordonnées :

$p_0 = 0.712$ et $\dot{p}_0 = 0.5158$.

Pour la condition initiale $\dot{p} = 0$, on obtient la courbe de vitesse représentée dans la figure 33.

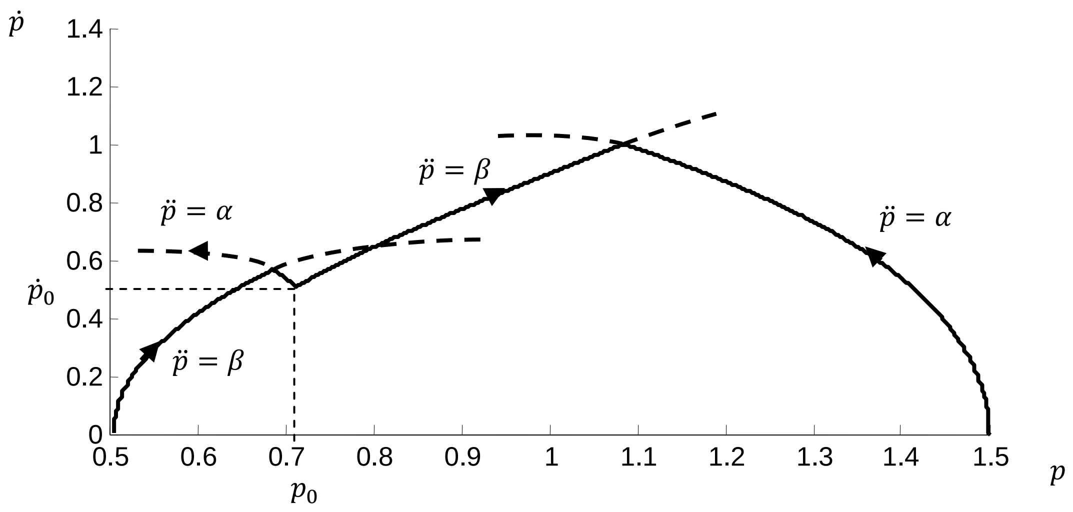


Figure 33. Variation dans le plan de phases.

Et les commandes correspondantes respectives, dans la figure 34. Ainsi que le déplacement par rapport au temps figure 35.

On constate que si la position maximale p_{max} est comprise entre .8304 et 1.5 alors on a trois changements de signe, si $0.5658 < p_{max} < 0.8304$ on a deux changements de signe, et lorsque $0.5 < p_{max} < 0.5658$ dans ce cas on obtient un seul changement de signe.

<u>Remarque :</u>

Dans le cas général, où tous les degrés de liberté sont pris en considération, c'est-à-dire le système complet sans aucune simplification, le maximum nombre de changement de signe des trois tensions d'actuateurs serait sept.

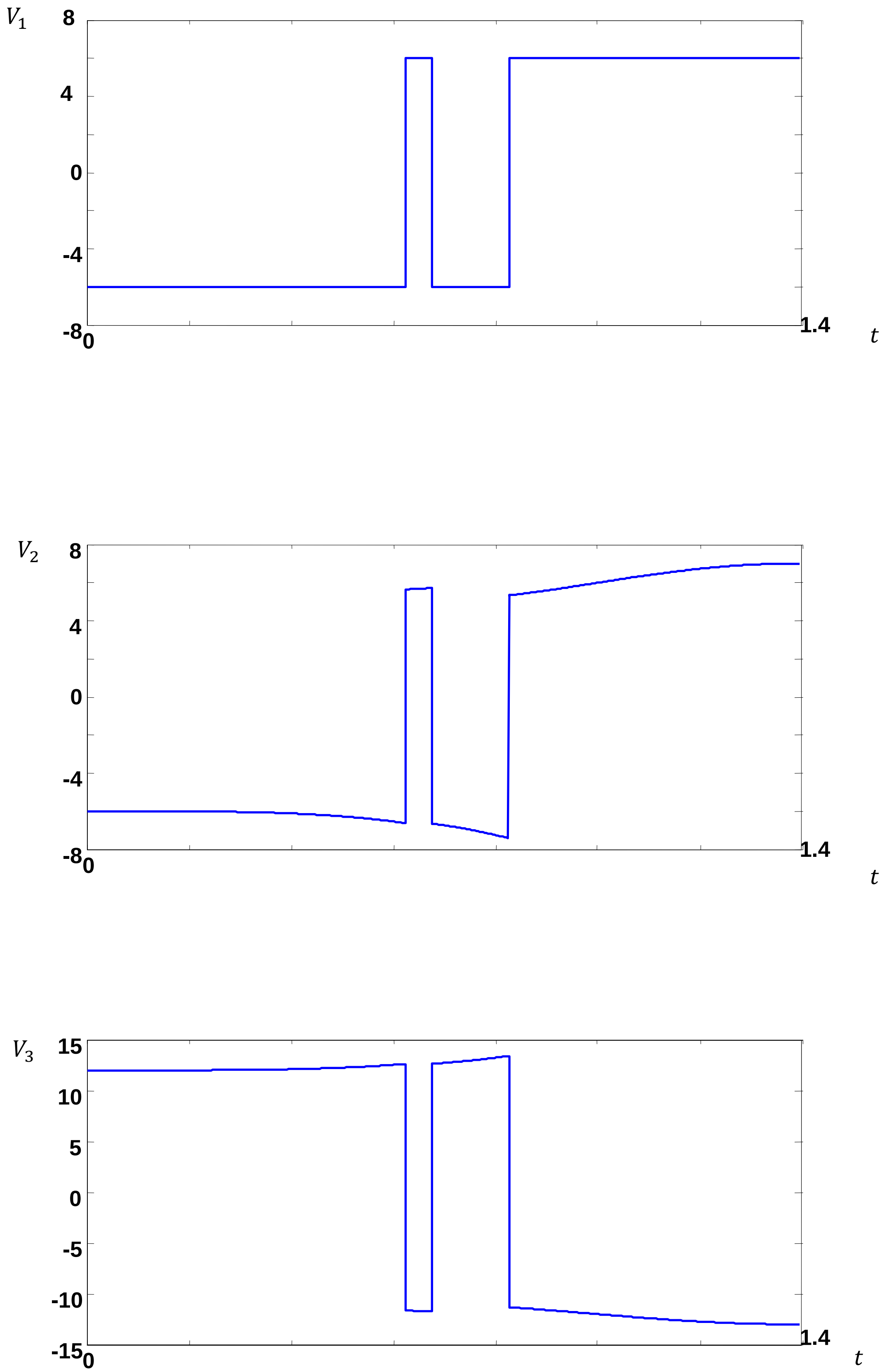


Figure 34. Tensions optimales.

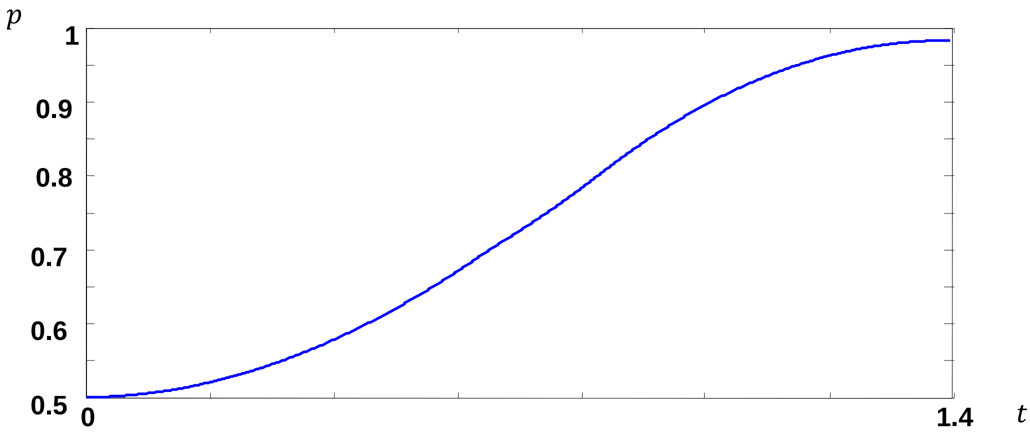


Figure 35. Déplacement par rapport au temps.

Conclusion :

D'après la présente thèse les conclusions suivantes peuvent être constatées :

L'existence d'une transformation de linéarisation et de découplage dans le cas du système déterministe d'un robot mobile omnidirectionnel.

Il a été montré que le problème de commande et positionnement en temps optimal d'un robot mobile ne peut être résolu par le biais de la théorie de commande optimale traditionnelle, de plus, si le problème de commande en temps optimal est considéré, l'unicité des trajectoires et commandes optimaux résultants n'est jamais garantie.

Une forme analytique de la loi de commande pour le problème restreint de la CPTO du robot omnidirectionnel satisfaisant les différentes contraintes sur les variables d'état à été obtenue, et ceci à l'aide d'une transformation de linéarisation et de découplage.

Le système découplé résultant est facile à programmer, aboutissant à une solution optimale unique.

Les allures trapézoïdales des accélérations obtenues pour chaque degré de liberté dans le cas où toutes les contraintes sont actives, sont des formes connues et qui sont souvent recommandées dans les minimisations des amplitudes transitoires concernant les structures dynamiques (rigides ou flexibles).

Les allures des commandes optimales obtenues montrent un comportement différent de celui du type « bang-bang » classique, assumé dans plusieurs approches.

Les effets déstabilisateurs dus à l'imparfaite modélisation et aux déviations analytiques possibles lors de la réalisation de la fonction de linéarisation et de découplage sont montrés contrôlables du moment qu'il existe toujours une loi de commande linéaire par rétroaction garantissant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. Ceci, en supposant la partie linéaire de l'erreur connue.

Comme le système dynamique linéaire et découplé résultant est d'ordre de trois pour chaque degré de liberté, d'autres critères de performances peuvent être associés au critère du minimum de temps, à titre d'exemple minimiser les pertes d'énergies dans chaque actuateur et/ou minimiser les variations brusques et donc indésirables de certaines grandeurs.

Il est, également, intéressant de noter que la présente linéarisation facilite la solution du problème de poursuite de chemin ou de trajectoire. Dans ce contexte, une approche similaire à celle présentée par (Slotine) à été employée, afin de traquer un chemin le plus rapidement possible.

L'un des objectifs de futures recherches est de tenir comptes d'éventuelles différences et écarts de synchronisations entre les trois actuateurs, ceci est du au fait que les mouvements de rotation et de translation des roues sont indépendants lorsqu'on applique la fonction de retour.

Comme le travail présenté dans cette thèse ne concerne que deux hiérarchies du robot mobile et qui sont le planificateur (la partie qui se charge de la commande du navigateur) et le pilote (les actuateurs et roues qui se chargent de l'exécution des signaux et ordres fournis par le planificateur), une idée légitime serait l'intégration du troisième et dernier niveau qui est le cartographe (l'ensemble de capteurs nécessaires pour la localisation et la détection des objets statiques ou mobiles dans l'espace de travail), ce qui nous permettrait de commander le véhicule en temps réel.

L'un des inconvénients majeurs des robots omnidirectionnels est leur manque de robustesse lors de leurs mouvements dans des chemins à grand nombre de déviations, d'ailleurs qui est le cas le plus fréquent dans la pratique. Bien qu'il soit connu que l'une des causes principales de ce défaut est le poids relativement léger des robots omni directionnel par rapport aux véhicules réels, le sujet de la robustesse par rapport aux forces centrifuges générées dans les mouvements de rotation reste un sujet ouvert.

Une autre amélioration intéressante serait l'augmentation du nombre de roues, ceci a pour inconvénient de rendre le robot plus lourd et donc plus lent que dans nôtre actuelle approche. Il a été montré dans certaines études que les robots omnidirectionnels dotés de quatre roues, par exemple, présentent d'importantes propriétés de stabilité.

Des tests ont permis de constater une grande sensibilité du robot face aux perturbations aérodynamiques, aux irrégularités des sols et à d'autres facteurs extérieurs.

Comme ces paramètres sont très difficiles à modéliser, il serait donc plus adéquat de tenir compte des paramètres de régulation de type boucle fermée.

Annexe A

Solutions en temps optimal du modèle cinématique [6] :

En plus des hypothèses présentées dans le chapitre 2, nous assumons les trois vitesses : v_1 , v_2 , et v_3 ayant des valeurs admissibles dans l'intervalle $[-1,1]$.

Soit la matrice suivante :

$$\boldsymbol{M} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} cos\left(\psi - {}^{4\pi}/_{3}\right) & sin\left(\psi + {}^{2\pi}/_{3}\right) & 3d/2 \\ cos\left(\psi - {}^{2\pi}/_{3}\right) & sin\left(\psi + {}^{4\pi}/_{3}\right) & 3d/2 \\ cos\psi & sin\psi & 3d/2 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Dont l'inverse est :

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} cos\left(\psi - {}^{4\pi}/_{3}\right) & cos\left(\psi - {}^{2\pi}/_{3}\right) & cos\psi \\ sin\left(\psi + {}^{2\pi}/_{3}\right) & sin\left(\psi + {}^{4\pi}/_{3}\right) & sin\psi \\ {}^{1}/_{3d} & {}^{1}/_{3d} & {}^{1}/_{3d} \end{pmatrix}$$

Où la trajectoire est définie comme étant le vecteur dont les composantes sont :

$$\boldsymbol{q}(t) = (x(t) \quad y(t) \quad \psi(t))^T \tag{A.2}$$

En prenant comme vecteur de commande le vecteur :

$$\boldsymbol{u}(t) = (v_1(t) \quad v_2(t) \quad v_3(t))^T \tag{A.3}$$

En supposant les conditions initiales nulles, la solution (A.2) est obtenue en intégrant:

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{u}(t) \tag{A.4}$$

Pour simplifier, on prend $d = 1$, l'Hamiltonien s'écrit :

$$H = \lambda_1\dot{x}(t) + \lambda_2\dot{y}(t) + \lambda_3\dot{\psi}(t) \tag{A.5}$$

Où :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \psi}$$

De telle sorte que $u(t)$ doit minimiser H. On définit également:

$$G = -H \tag{A.6}$$

D'après le théorème nous pouvons faire les constatations suivantes :

a) La commande $u(t)$ doit minimiser l'Hamiltonien, c'est-à-dire :

$$H_{optimal} = minH \quad \forall u(t).$$

b) G est constante non-négative pour toute trajectoire optimale.

La dernière remarque nous permet d'obtenir les éléments du vecteur adjoint :

$$\lambda_1 = 3\lambda_{10}\,, \quad \lambda_2 = 3\lambda_{20} \quad \text{, et} \quad \lambda_3 = 3(\lambda_{10}y - \lambda_{20}x + \lambda_{30})\,.$$

Soient les fonctions suivantes :

$$f_1 = 2(-\lambda_{10}sin\psi + \lambda_{20}cos\psi) + \lambda_{10}y - \lambda_{20}x + \lambda_{30} \tag{A.7}$$

$$f_2 = 2(-\lambda_{10}sin(\psi + {}^{2\pi}/_{3}) + \lambda_{20}cos(\psi + {}^{2\pi}/_{3})) + \lambda_{10}y - \lambda_{20}x + \lambda_{30} \tag{A.8}$$

$$f_3 = 2(-\lambda_{10}sin(\psi + {}^{4\pi}/_{3}) + \lambda_{20}cos(\psi + {}^{4\pi}/_{3})) + \lambda_{10}y - \lambda_{20}x + \lambda_{30} \tag{A.9}$$

L'Hamiltonien peut se réécrire sous la forme suivante :

$$H = f_1v_1 + f_2v_2 + f_3v_3 \tag{A.10}$$

Lorsqu'on combine la remarque a) et l'équation (A.10) on déduit que si les f_i sont des fonctions négatives alors les vitesses v_i doivent prendre leur valeur maximale qui est 1, et dans le cas où les f_i sont positives alors les v_i doivent prendre leur valeur minimale qui est -1. Pour cette raison là les f_i seront appelées les fonctions de changement de signe. Rappelons que dans le cas où l'une des f_i est nulle dans un intervalle alors la trajectoire est singulière sur le même intervalle.

Une autre constatation importante, basée l'analyse différentielle des fonctions de changement de signe, qui est le fait que les commandes doivent être constantes continument dérivables par morceaux.

Par conséquent, quatre mouvements de base sont possibles pour le robot :

- Tourner sur place à droite (+) ou à gauche (-), de symbole $S_{\pm}$.
- Suivre un arc circulaire à droite ou à gauche, de symbole $C_{i\pm}$. l'indice i correspond à l'ordre de la roue $i = 1,2,3$.
- Translater dans une direction perpendiculaire à la droite liant les deux roues i et j, de symbole D_{ij} , où $i \neq j$.
- Translater dans une direction parallèle à la droite liant les deux autres roues dans le sens droit ou gauche, symbolisé par $P_{i\pm}$.

Concernant les commandes optimales, il en résulte vingt (20) possibilités selon les valeurs des fonctions de changement de signe, tous les résultats extrémaux sont illustrés dans le tableau suivant:

Symbole	f_i	v_i
S_-	+ + +	-1, -1, -1
S_+	- - -	1, 1, 1
C_{1-}	- + +	1, -1, -1
C_{2-}	+ - +	-1, 1, -1
C_{3-}	+ + -	-1, -1, 1
C_{1+}	+ - -	-1, 1, 1
C_{2+}	- + -	1, -1, 1
C_{3+}	- - +	1, 1, -1
D_{13}	- 0 +	1, 0, -1
D_{12}	- + 0	1, -1, 0
D_{32}	0 + -	0, -1, 1
D_{31}	+ 0 -	-1, 0, 1
D_{21}	+ - 0	-1, 1, 0
D_{23}	0 - +	0, 1, -1
P_{3+}	0 0 +	.5, .5, -1
P_{1-}	- 0 0	1,-.5,-.5
P_{2+}	0 + 0	.5, -1, .5
P_{3-}	0 0 -	-.5,-.5, 1
P_{1+}	+ 0 0	-1, .5, .5
P_{2-}	0 - 0	-.5, 1,-.5

Annexe B

Réalisation de la transformation, cas cinématique :

Dans le but de justifier la possibilité de réaliser la transformation utilisée dans cette thèse on fait appel à quelques outils mathématiques indispensables.

Soit le système non-linéaire à multi entrées et multi sorties suivant :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{B.1}$$

Où : $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$

Et : $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ sont des vecteurs champs constitués de fonctions lisses (continument dérivable dans $\boldsymbol{R}$.

Alors on appelle la dérivée de Lie de la fonction scalaire g_i par rapport à $\boldsymbol{f}$ le vecteur champ défini par :

$$L_{\boldsymbol{f}} g_i = \nabla g_i \, \boldsymbol{f} \tag{B.2}$$

Où :

$$\nabla g_i = \frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{x}}$$

On définit également le crochet de Lie des deux vecteurs champs $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ un autre vecteur champ tel que:

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = ad_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{g} = \nabla \boldsymbol{g} \, \boldsymbol{f} - \nabla \boldsymbol{f} \, \boldsymbol{g} \tag{B.3}$$

Alors des crochets répétés sont obtenus récursivement comme suit :

$$\begin{aligned} & ad_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \\ & ad_{\boldsymbol{f}}^1 \boldsymbol{g} = \langle \boldsymbol{f}, ad_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{g} \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \\ & ad_{\boldsymbol{f}}^2 \boldsymbol{g} = \langle \boldsymbol{f}, ad_{\boldsymbol{f}}^1 \boldsymbol{g} \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \rangle \\ & \qquad \vdots \end{aligned} \tag{B.4}$$

Le changement de coordonnées qui nous était nécessaire dans la transformation utilisée, dans le cas général, s'appelle difféomorphisme.

Définition :

Une fonction continue $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^n}$, définie dans une région Ω est appelée difféomorphisme si les conditions suivantes sont vraies :

- La dérivée première de $\boldsymbol{\varphi}$ est continue.
- L'inverse de $\boldsymbol{\varphi}$ existe et est continue.
- La dérivée première de l'inverse de $\boldsymbol{\varphi}$ continue également.

Le principe général de linéarisation par retour des états ou des sorties est de dériver ces derniers autant de fois jusqu'à ce que les entrées (commandes) apparaissent, rappelons que le problème que nous sommes entrain d'étudier est un cas MIMO (multi entrées et multi sorties). Soient l'expression des sorties suivante :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(B.5)}$$

Alors la procédure de différentiation de la composante y_j s'écrit :

$$\dot{y}_j = L_f h_j + \sum_{i=1}^{m} L_{gi} h_j u_i \qquad \text{(B.6)}$$

Si $L_{gi} h_j = 0 \quad \forall i$, alors la commande n'apparait par aucun de ses éléments. Donc, on doit dériver une deuxième fois. Admettons r_j l'ordre de différentiation à partir duquel au moins l'une des entrées apparait dans l'expression de $y_j^{r_j}$, alors on a :

$$y_j^{r_j} = L_{\boldsymbol{f}}^{r_j} h_j + \sum_{i=1}^{m} L_{gi} L_f^{r_j-1} h_j u_i \qquad \text{(B.7)}$$

Où : $L_{gi} L_f^{r_j-1} h_j \neq 0$ pour au moins un i , et ceci $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$.

La procédure précédente est effectuée pour les autres sorties $y_k \quad \forall k \neq j$, pour avoir la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1^{r_1} \\ \vdots \\ y_m^{r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_{\boldsymbol{f}}^{r_m} h_m \end{pmatrix} + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{B.8}$$

Où :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} L_{g1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{gm} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{gm} L_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

La matrice $\boldsymbol{E}$ est dite matrice de découplage du système MIMO défini par(B.1), si cette matrice est non-singulière dans une région $\boldsymbol{\Omega}$ autour d'un point x_0 , alors la transformation :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}^{-1} \begin{pmatrix} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_{\boldsymbol{f}}^{r_m} h_m \end{pmatrix} + \boldsymbol{E}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

Implique une relation entre le vecteur de sorties $\boldsymbol{y}$ et le nouveau vecteur d'entrées qui est :

$$\begin{pmatrix} y_1^{r_1} \\ \vdots \\ y_m^{r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{z} \tag{B.11}$$

<u>Exemple :</u>

Considérons les équations cinématiques développées dans le chapitre 2 et exprimées dans l'équation (2.2.8). si on prend comme vecteur de commande :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Alors le système cinématique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(cos\psi + \sqrt{3} sin\psi)/_2 \\ \\ (-sin\psi + \sqrt{3} cos\psi)/_2 \\ \\ ^1/_{3d} \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} (-cos\psi + \sqrt{3} sin\psi)/_2 \\ \\ -(sin\psi + \sqrt{3} cos\psi)/_2 \\ \\ ^1/_{3d} \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} cos\psi \\ sin\psi \\ ^1/_{3d} \end{pmatrix} u_3$$

Et si on opte pour les sorties comme étant les variables d'état de telle façon que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$$

Il est facile de remarquer que si on dérive l'équation dernière une fois par rapport au temps on a les commandes qui apparaissent, ce qui signifie que la matrice de découplage est :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -(cos\psi + \sqrt{3}sin\psi)/_2 & \left(-cos\psi + \sqrt{3}sin\psi\right)/_2 & cos\psi \\ \left(-sin\psi + \sqrt{3}cos\psi\right)/_2 & -\left(sin\psi + \sqrt{3}cos\psi\right)/_2 & sin\psi \\ {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d} & {}^1/_{3d} \end{pmatrix}$$

Où :

$$\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{-cos\psi}{3} - \frac{sin\psi}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{-sin\psi}{3} + \frac{cos\psi}{\sqrt{3}}\right) & d \\ \left(\frac{-cos\psi}{3} + \frac{sin\psi}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{-sin\psi}{3} - \frac{cos\psi}{\sqrt{3}}\right) & d \\ \frac{2cos\psi}{3} & \frac{2sin\psi}{3} & d \end{pmatrix}$$

D'où la loi de commande par rétroaction :

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

qui permet le découplage du modèle cinématique.

References

[1] A.A. Agrachev, G. Stefani, P.L. Zezza, *Strong Optimality for a bang-bang trajectory.* SIAM Journal of control optimization, 41 2002, p.991-1014.

[2] A.P. Aguiar, J.P. Hespanha. *Logic-based switching control for trajectory tracking and path following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty.* In proceedings of the American Control Conference. Boston USA. June 2004.

[3] M. Asada, and H. Kitano, “editors, Robocup 1998: Robot Soccer World Cup II,” *In Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1999.

[4] H. Asama, M. Sato, L. Bogoni, H. Kaetsu, A. Matsumoto, I. Endo, *Development of an Omni-Directional Mobile Robot with 3 DOF Decoupling Drive Mechanism.* In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1995.

[5] D. Augustin, H. Maurer, *Computational sensitvity analysis for state constrained optimal control problems.* Ann. Operational research, 101 2001, p.75-99.

[6] D.J. Balkcom, M. T. Mason. *Time optimal trajectories for bounded velocity differential drive robots.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2000.

[7] L. Beji, Y. Bestaoui. *Motion generation and adaptive control method of automated guided vehicles in road following.* IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. Vlo.6. n°1. P.113-123. March 2005.

[8] J.E. Bobrow, S. Dubowsky, J.S. Gibson. *Time optimal control of robotic manipulators along specified paths.* International Journal of Robotics, vol. 4, p.3-17. 1985.

[9] D. Bonnafous, F. Lamiraux. *Sensor based trajectory following for nonholonomic systems in highly cluttered environment.* International Conference on Intelligent Robots and Systems, p.892-897. 2003.

[10] J. Borenstein, H.R. Everett, L. Feng, *Mobile robot positioning: sensors and techniques,* Journal of Robotic Systems 14:231-249, 1997.

[11] A. Bressan, *A high order test for optimality of bang-bang controls.* SIAM Journal of control optimization. 23 1985 p.38-48.

[12] G. Campion, G. Bastin, B. D’Andréa-Novel, *Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots,* In IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, pp. 47-62, 1996.

[13] B. Carlisle, *An Omni-Directional Mobile Robot.* In B. Rooks, (ed.): Developments in Robotics. IFS Publications/North-Holland Publishing Company, pp. 79-87, 1983.

[14] B.H. Cho, B.S. Choi, J.M. Lee, *Time-optimal trajectory planning for a robot system under torque and impulse constraints,* International Journal of Control, Automation and Systems, vol.4. no.1,pp.10-16, February 2006.

[15] L.E. Dubins, *On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents.* American Journal of Mathematics. 79 1957 p.497-516.

[16] S. Dubowsky, F. Genot, S. Godding, H. Kozono, A. Skwersky, H. Yu, L. Yu, *PAAM- a robotic aid to the elderly for mobility assistance and monitoring: a helping-hand for the elderly,* IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000.

[17] N. Faiz, and S. K. Agrawal, *Trajectory planning of robots with dynamics and inequalities,* in proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 4, pp. 3976-3982, 2000.

[18] L. Ferrière, B. Raucent, J.C. Samin, *Rollmobs, a new omnimobile robot.* Proceedings IROS, pp.913-918, 1997.

[19] E. Frazzoli, M. A. Dahleh, and E. Feron, *Real-time motion planning for agile autonomous vehicles,* AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, pp.116-129, 2002.

[20] D. Gu, H. Hu. *Receding horizon tracking control of wheeled mobile robots.* IEEE Transactions on Control System Technology. Vol. 14. N°. 4. July 2006.

[21] K.M. Hangos, J. Bokor, G. Szederkenyi. *Analysis and control of nonlinear process systems.* Springer-Verlag London. 2004.

[22] F.V. Hundelshausen, et al. *FU-fighters team description 2003.* Proceedings of the Robo-Cup International Symposium, 2003.

[23] G. Indiveri. *Kinematic time-invariant control of a 2D nonholonomic vehicle.* IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix USA. December 1999.

[24] G. Indiveri, J. Paulus, P.G. Ploger, *Motion control of swedish wheeled mobile robots in the presence of actuator saturation.* In 10^{th} Annual RoboCup International Symposium, 2006.

[25] T. Kalmár-Nagy, R. D'Andrea, P. Ganguly, *Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle,* Journal of Robotics and Autonomous Systems 46, pp. 47-64, 2004.

[26] F. Lamiraux, D. Bonnafous, O. Lefebvre. *Reactive path deformation for non-holonomic mobile robots.* IEEE Transactions on Robotics. Vol. 20. N°6. p. 967-977. December 2004.

[27] T. Lee, K. Song, C. Lee, C. Teng. *Tracking control of a unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller.* IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 9. N°.2. March 2001.

[28] O. Lefebvre, F. Lamiraux. *Docking task for nonholonomic mobile robots.* International Conference on Robotics and Automation. Orlando, USA. May 2006.

[29] K. Moore, N. Flann, *Hierarchical Task Decomposition Approach to Path Planning and Control for an Omni-Directional Autonomous Mobile Robot.* In IEEE Int. Symp. On Intelligent Control/Intelligent System and Semiotics, 1999.

[30] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An introduction*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.

[31] H. Kitagawa, T. Kobatashi, T. Beppu, and K. Terashima, “Semi-autonomous obstacle avoidance of omnidirectional wheelchair by joystick impedance control,” in *Proc. 2001 IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems,* 2001,pp.2148-2153.

[32] K. C. Koh, and H. S. Cho, *A smooth path tracking algorithm for wheeled mobile robots with dynamic constraints*, Journal of Intelligent Robots and Systems, pp. 367-385, 1999.

[33] Y. Lin, X. Wu., J. J. Zhu., and J. Lew, *Omni-directional mobile robot controller design by trajectory linearization,* Automatic Control Conference, 2003.

[34] A. K. Mackworth, *On seeing robots, In: Computer visions: Systems, Theory and Applications,* World Scientific, Singapore, pp. 1-13, 1993.

[35] K. L. Moore, and N. S. Flann, *Hierarchical task decomposition approach to path planning and control for an omni-directional autonomous mobile robot*, in Proceedings of the International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics, pp. 302-307, 1999.

[36] V. Muñoz, A. Ollero, M. Prado, and A. Simón, *Mobile robot trajectory planning with dynamics and kinematics constraints*, in Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 342-351, 1994.

[37] A. Ouddaï, *On Time Optimal Control Of Two Nonlinear Plants,* Master’s Thesis, Drexel University, Philadelphia, PA, USA. October 1986.

[38] A. Ouddaï, *Minimum Time Control Of A Mobile Robot*, Journal of Electrical Engineering, volume 8, edition 1, 2008.

[39] A. Ouddaï, S. E. Rebiai, *Time Optimal Control Of An Omni-directional Mobile Robot,* A.M.S.E. Advances in modeling and analysis. C. Vol. 61. n° 3.4. 2006.

[40] M. Renaud and J. Y. Fourquet, *Minimum-time motion of a mobile robot with two independent acceleration-driven wheels*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics a*nd* Automation, Albuquerque, New Mexico, April 1997, pp. 2608-2613.

[41] J. A. Reeds, L.A. Shepp, *Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards.* Pacific Journal of Mathematics. 145 1990 p.367-393.

[42] D. B. Reister, F. G. Pin, *Time optimal trajectories for mobile robots with two independently driven wheels.* International Journal of Robotics Research. 13 February 1994 p.38-54.

[43] A.P. Sage, C.C. White, *Optimum systems control.* 2nd edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1977.

[44] A.J. Scolari Conceicao, A. Moreira, P. Costa, *Trajectory tracking for omni-directional mobile robots based on restrictions of the motor's velocities.* In 8th International IFAC Symposium on Robot Control, 2006.

[45] Z. Shiller, H. Chang, V. Wong, *The practical implementation of time-optimal control for robotic manipulators.* Robotics and Computer Integrated Manufacturing. 12 1996 p.29-39.

[46] K.G. Shin, N.D. McKay. *Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints.* IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 30, pages 531-541. 1986.

[47] J.J.E. Slotine, *Improving the efficiency of time-optimal path following algorithms*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.5, pp.118-124, February 1989.

[48] J. J. E. Slotine, and W. Li, *Applied Nonlinear Control.*, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.

[49] Y. Tanaka, T. Tsuji, M. Kaneko, and P. G. Morasso, *Trajectory generation using time scaled artificial potential field*, in Proceedings of 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 223-228, 1998.

[50] K. Terashima, T. Miyoshi, J. Urbano, H. Kitagawa, *Frequency shape control of omni-directional wheelchair to increase user's comfort.* In ICRA, Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation.

[51] C.C. Tsai, H.C. Huang, T.S. Wang, C.M. Chen, *System design, trajectory planning and control of an omni-directional mobile robot,* In Automatic Control Conference, 2006.

[52] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis.* Prentice-Hall. New Jersey 1993.

[53] K. Watanabe, *Control of an omnidirectional mobile robot.* In 2nd International Conference on Knowledge-based Intelligent Electronic Systems, 1998.

[54] M. West, H. Asada, *Design of ball wheel mechanisms for omni-directional vehicles with full mobility and invariant kinematics,* Journal of Mechanical Design, Vol. 119 pp.153-61, 1997.

[55] L. Wilson, J. Y. Lew, and al., *Design and modeling of a redundant omni-directional robocup goalie*, Robocup 2001 International Symposium, Seattle, WA. August 2001.

[56] J. Zhu, A. Scott Hodel, K. Funston, C.E. Hall, *X-33 entry flight controller design by trajectory linearization- a singular perturbation approach.* American Astronautical Society Guidance and Control Conference, Breckenridge, Colorado, January 2001, In Guidance and Control 2001, Advances in the Astronautical Sciences, Volume 107, 151-170, American Astronautical Society.