

# Génération et Optimisation des Contrôleurs Flous Type-2

par

**Nora Boumella**

Ingénieur d'Etat en Electronique, Université de Batna, 1997

Magister en Electronique, Université de Batna, 2002

THÈSE

Présentée

pour Obtenir le Titre de

Docteur ès Sciences en Electronique

Université de Batna

Batna, Algérie

Mars, 2013

Nora Boumella, 2013

# Remerciements

C'est avec une grande humilité que j'ai le plaisir de présenter ce travail de recherche. Un travail auquel plusieurs institutions, groupes et personnes ont aimablement contribué et sans qui il n'aurait pas vu le jour.

Je voudrais ici, leur témoigner toute ma gratitude.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Mohammed BOULEMDEN, Professeur à l'Université de Batna, d'avoir assuré la lourde tâche de directeur de thèse, pour ses précieux conseils et pour ses encouragements.

Ma grande reconnaissance et ma profonde gratitude vont à mon co-encadrant Monsieur Karim DJOUANI, Professeur à l'Université PARIS 12 - France, à ses orientations et à son sens de l'engagement afin de faire de ce travail le début d'un chantier de recherches à venir. Les nombreuses discussions que nous avons eues et ses conseils pertinents sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Je ne saurai, par conséquent, l'en remercier suffisamment.

Je remercie Monsieur Noureddine BOUGUECHAL, Professeur à l'Université de Batna, pour l'honneur qu'il me fait de présider cet auguste Jury.

Je remercie Monsieur Saïd DJENNOUNE, Professeur à l'Université M. Mammeri de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté d'examiner cette thèse et de faire partie de ce Jury.

Je remercie également Monsieur Moussa DIAF, Professeur à l'Université M. Mammeri de Tizi-Ouzou, pour les conseils qu'il m'a donnés tout au long de ce travail et pour avoir accepté de le juger.

Je remercie Monsieur Rachid ABDESSAMAD, Professeur à l'Université de Batna, pour ses conseils également et pour avoir accepté d'être membre de ce Jury.

Leurs remarques et précisions me seront d'un intérêt certain et seront, de facto, prises en compte à la seule fin de rendre plus qualitative ma présente recherche.

Je me souviendrai toujours de l'aide que Monsieur Yacine AMIRAT, Directeur du Laboratoire LISSI et Professeur à l'Université PARIS 12 (UPEC) - France, a bien voulu m'apporter durant tout mon séjour au sein de son laboratoire.

Que tous les thésards et membres de l'équipe STIC du Laboratoire LISSI - UPEC trouvent dans l'achèvement de ce travail toute ma gratitude pour l'aide qu'ils n'ont cessé de me prodiguer, tout au long des deux années que j'ai passées en France. Je remercie notamment les Docteurs Sohail IQBAL et Safdar ABBAS KHAN d'avoir répondu à plusieurs de mes préoccupations scientifiques.

Mes remerciements particuliers à Monsieur Yskandar HAMAM, Professeur au French South African Institute of Technology (F'SATI), qui m'a beaucoup aidée tout au long de mon séjour en Afrique du Sud. Sa rigueur et sa capacité d'analyser les problèmes et ses très nombreuses connaissances, notamment sur l'optimisation linéaire, m'ont permis de beaucoup avancer.

Je remercie également Professeur François ROCARIES, Directeur du F'SATI, pour sa coopération, son aide et la mise à ma disposition des différentes structures du prestigieux institut.

Je voudrais remercier Monsieur Jerry M. MENDEL, Professeur à l'Université Sud Californienne de Los Angeles, expert en les systèmes flous de Type-2, d'avoir débattu avec moi, si modestement, de quelques systèmes d'inférence floue et de m'avoir suggéré des idées afin de mieux prouver la performance de mon travail.

Je remercie Monsieur Juan Carlos Figueroa GARCIA, Professeur à l'Université de Francisco JOSE DE CALDAS - Colombie, pour les échanges ô combien fructueux et d'avoir accepté le projet d'une coédition d'un livre sur les contrôleurs flous intitulé: « FUZZY CONTROLLERS –Recent Advances in Theory and Applications ».

Mes remerciements distingués vont à Monsieur Ali HADDAD, Président Directeur Général du Groupe ETRHB - Algérie, de m'avoir toujours apporté assistance, à titre de mécène, dans mes déplacements scientifiques. Je salue en lui le respect qu'il réserve à la recherche scientifique et aux chercheurs.

A vous toutes et tous qui, de près ou de loin, moralement ou matériellement, m'avez apporté soutien et encouragement, et avec reconnaissance, je réitère mes remerciements.

# Génération et Optimisation des Contrôleurs Flous Type-2

par

**Nora Boumella**

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Présentée

pour Obtenir le Titre de

Docteur ès Sciences en Electronique

Université de Batna

Batna, Algérie

Mars, 2013

# Génération et Optimisation des Contrôleurs Flous Type-2

par

**Nora Boumella**

Ingénieur d'Etat en Electronique, Université de Batna, 1997

Magister en Electronique, Université de Batna, 2002

Docteur ès Sciences en Electronique, Université de Batna, 2013

## Résumé

Dans ce travail, nous présentons dans un premier temps une méthode d'optimisation linéaire basée sur le Principe d'Orthogonalité Généralisé (POG) afin de déterminer les paramètres des conclusions d'un Contrôleur à Logique Floue (CLF). Cette méthode est par la suite étendue, en utilisant des données d'entraînement changeant avec le changement des conditions initiales, afin de prédire la sortie d'un système chaotique très sensible aux conditions initiales. La nature Type-2 d'un CLF spécifique de type Takagi-Sugeno-Kang (TSK) sensé prendre en compte les incertitudes contenues dans les paramètres des conclusions, est perdue quand on s'intéresse directement à sa sortie certaine. Afin de garder la nature Type-2 de ce type de système, nous proposons une méthode d'optimisation linéaire basée sur l'approximation de Chebyshev. La nature Type-2 étant récupérée, nous appliquons ce CLF afin de prédire la sortie d'un système chaotique fortement sensible aux conditions initiales. Le même système chaotique est prédit, à titre comparatif, avec un CLF conçu à base du POG sans pour autant

prendre en compte la nature Type-2 du système. Une étude comparative entre les deux prédicteurs est faite sur la base de la moyenne et l'écart-type de l'erreur quadratique moyenne de plusieurs systèmes chaotiques prédits. La deuxième partie de cette thèse porte sur le contrôle du trafic d'entrée d'un réseau cellulaire afin d'éviter sa congestion. Les paramètres des systèmes de télécommunication qui sont acteurs de la congestion sont sujets à des modélisations analytiques très sévères, incitant l'utilisation des ensembles flous pour une meilleure modélisation. Dans le but de remédier au problème de congestion, nous utilisons des ensembles flous pour modéliser ces paramètres, menant à un contrôleur de congestion à logique floue. Ce contrôle de congestion est basé essentiellement sur l'incitation monétaire qui permet aux utilisateurs d'un réseau de changer leur comportement selon la charge courante du réseau. Afin d'augmenter la capacité de traiter l'incertitude dans les paramètres du réseau, nous augmentons le degré du flou dans le modèle Type-1 menant à un contrôleur de congestion/prix CLF de Type-2. Une étude comparative entre les résultats obtenus par les deux contrôleurs est par la suite présentée.

## Abstract

Fuzzy Logic based Systems (FLSs) have been largely investigated in the literature with main focus on providing tools and methods that handle in the right way the uncertainties. Different approaches and models have been presented with their advantages and drawbacks. The research community is actually more focused on higher order fuzzy logic system. The present thesis focuses on how to handle uncertainties at consequent level by providing tool and methods for Type-1 and Type-2 Fuzzy Logic Systems Design. Firstly, a linear optimization method, based on the Generalized Orthogonality Principle (GOP), is proposed to tune the Type-1 FLS consequent parameters. This approach was extended using a set of training data that depend on the initial conditions and applied for the design of a chaotic system forecaster. Secondly, the Type-2 Takagi-Sugeno-Kang (TSK) FLS is considered. For such FLS, the uncertainties are supposed to be handled at the consequences' parameters. However the Type-2 nature of the Takagi-Sugeno-Kang (TSK) FLS, extended from its Type-1 counterpart, is lost if we are directly interested on the crisp output. In order to overcome this drawback, we propose another linear optimization method, based on the Chebyshev fitting, to tune the consequent parameters. The Takagi-Sugeno-Kang (TSK) FLS obtained using the proposed approach is used to predict the output of a chaotic system and a comparative study analysis with a Type-1 FLS obtained by GOP method is provided to show the effectiveness of the proposed design approach for a Type-2 forecaster. Finally, the first proposed design approach for Type-1 FLS is applied for Call Admission Control in a Cellular Network. In order to handle the network congestion problem that faces the majority of network operators, a Fuzzy Logic Controller (FLC) for call management in next generation cellular networks is proposed. Depending on how we consider the uncertainty modeling, two classes of FLS; Type-1 and Type-2 are discussed and simulation results are provided.



# Liste des Publications

## Journaux Internationaux

**Nora Boumella**, Mohammed Boulemden, Karim Djouani and Sohail Iqbal, "A New Approach for Enhancing Forecaster Performance for Chaotic Time Series," *International Journal of Intelligent Control and Systems (IJICS)*, Vol. 17, No. 2, pp. 41-46, June 2012.

**Nora Boumella**, Karim Djouani and Mohammed Boulemden, "A Robust Interval Type-2 TSK Fuzzy Logic System Design Based on Chebyshev Fitting," *International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)*, Vol. 10, No. 4, pp. 727-736, August 2012.

## Conférences Internationales

**Nora Boumella** and Mohammed Boulemden, "Réglage H-infini d'un Contrôleur PID Robuste pour la Commande d'un Système Flexible," *Seconde Conférence Internationale sur la Productique CIP'2003*, Algeria, October 2003.

**Nora Boumella** and Mohammed Boulemden, "On a Robust PID Controller Parameters Optimization Applied to a Mass-Spring System," in *IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems ICECS'2005*, Gammarth, Tunisia, December 2005, Vol. 2, pp. 262-265.

## Liste des Publications

**Nora Boumella**, Karim Djouani and Sohail Iqbal, "A New Design of Fuzzy Logic Controller Based on Generalized Orthogonality Principle," in *IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, CIRA 2009*, Daejeon, South Korea, December 2009, pp 497-502.

**Nora Boumella** and Karim Djouani, "A Type-2 Fuzzy Logic Decision System for Call Admission Control in Next Generation Mobile Networks," in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2010)*, Miami, Florida, December 2010, pp. 1-6.

**Nora Boumella**, Karim Djouani and Mohammed Boulemden, "On an Interval Type-2 TSK FLS A1-C1 Consequent Parameters Tuning," in *IEEE SSCI - T2FUZZ '2011 Symposium on Advances in Type-2 Fuzzy Logic Systems*, Paris, France, April 2011, pp. 150-156.

**Nora Boumella**, Mohammed Boulemden, Sohail Iqbal and Karim Djouani, "Designing a Global Fuzzy Logic Forecaster for Chaotic Time Series," in *22nd International Symposium Intelligent Manufacturing & Automation DAAAM 2011*, Vienna, Austria, November 2011, pp. 1473-1474.

## Chapitre de Livre

**Nora Boumella**, Juan Carlos Figueroa and Sohail Iqbal, "Enhancing Fuzzy Controllers Using Generalized Orthogonality Principle," *Chapter 16 in the book "Fuzzy Controllers- Recent Advances in Theory and Applications"* Edited by Sohail Iqbal, **Nora Boumella** and Juan Carlos Figueroa Garcia, ISBN 978-953-51-0759-0, InTech, September 2012, pp. 367-384.

# Table des Matières

Liste des Publications	xi
Liste des Figures	xix
Liste des Tableaux	xxii
Glossaire	xxiii
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Logique Floue Type-2 . . . . .	3
1.3 Objectif de la Thèse et Principales Contributions . . . . .	6
1.3.1 Optimisation des CLFs Type-1 et Type-2 . . . . .	6
1.3.2 Contrôleur Flou pour Eviter la Congestion dans un Réseau Cellulaire . . . . .	8
1.4 Organisation de la Thèse . . . . .	10

<b>2</b>	<b>Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction . . . . .	11
2.2	Bref Aperçu sur l'Ensemble Classique . . . . .	12
2.2.1	Ensemble . . . . .	12
2.2.2	Elément . . . . .	13
2.2.3	Sous-ensemble . . . . .	13
2.2.4	Sous-Ensemble Propre . . . . .	13
2.2.5	Ensemble Universel . . . . .	13
2.3	Concept du Flou <i>Logique Floue</i> . . . . .	14
2.3.1	Concept du Nombre Flou . . . . .	15
2.3.2	De l'Ensemble Classique à l'Ensemble Flou . . . . .	16
2.4	Système d'Inférence Floue . . . . .	19
2.4.1	Base de Règles . . . . .	20
2.4.2	Fuzzificateur . . . . .	20
2.4.3	Moteur d'Inférence Floue . . . . .	21
2.4.4	Défuzzificateur . . . . .	23
2.5	CLF de Type Takagi Sugeno Kang . . . . .	25
2.6	Fonctions de Base Floues . . . . .	26
2.6.1	Fonctions de Base Floues Pondérées . . . . .	27
2.7	Conclusion . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Principe d'Orthogonalité . . . . .	30
3.3	Principe d'Orthogonalité Généralisé . . . . .	32
3.4	Conception d'un CLF Basée sur le POG . . . . .	32
3.4.1	Optimisation d'un CLF de Type Mamdani . . . . .	33
3.4.2	Optimisation d'un CLF de Type TSK . . . . .	35
3.5	Conception d'un Prédicteur CLF pour les Systèmes Chaotiques Basée sur le POG . . . . .	39
3.5.1	Application à la Prédiction de la Série Temporelle de Mackey- Glass . . . . .	44
3.6	Conclusion . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction . . . . .	51
4.2	Ensemble Flou Type-2 . . . . .	52
4.2.1	Ensemble Flou Type-2 Intervalle . . . . .	56
4.3	Contrôleur de Logique Floue Type-2 . . . . .	57
4.3.1	Base de Règles . . . . .	58
4.3.2	Moteur d'Inférence Floue Type-2 . . . . .	59
4.3.3	Fuzzificateur . . . . .	61

Table des Matières

4.3.4	Processus de Sortie . . . . .	63
4.4	Conclusion . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Contrôleur Flou Type-2 TSK <i>Optimisation</i></b>	<b>65</b>
5.1	Introduction . . . . .	65
5.2	Du CLF TSK Type-1 à son Congénère Type-2 . . . . .	67
5.3	CLF TSK Type-2 A2-C1 <i>Cas Général</i> . . . . .	68
5.3.1	CLF TSK Type-2 Intervalle . . . . .	69
5.3.2	CLF TSK Type-2 Intervalle A2-C0 . . . . .	71
5.3.3	CLF TSK Type-2 Intervalle A1-C1 . . . . .	72
5.4	Optimisation d'un CLF TSK T2I A1-C1 . . . . .	74
5.4.1	Principe d'Orthogonalité Généralisé . . . . .	77
5.5	Optimisation du CLF TSK T2I A1-C1 Basée sur l'Approximation de Chebyshev . . . . .	80
5.5.1	Approximation de Chebyshev . . . . .	84
5.6	Prédiction d'un Système Chaotique . . . . .	86
5.6.1	Méthode du Principe d'Orthogonalité Généralisé . . . . .	87
5.6.2	Méthode de l'Approximation de Chebyshev . . . . .	90
5.7	Conclusion . . . . .	95
<b>6</b>	<b>CLF Type-2 pour le Contrôle de Congestion dans un Réseau Cel- lulaire</b>	<b>97</b>

Table des Matières

6.1	Introduction . . . . .	97
6.2	Généralités sur les Paramètres d'un Réseau Cellulaire . . . . .	100
6.2.1	Nouvel appel . . . . .	100
6.2.2	Appel Handover . . . . .	100
6.2.3	Modèle d'un Schéma RCS . . . . .	105
6.2.4	Contrôle d'Admission des Appels . . . . .	108
6.3	Fonction d'Utilité et Exigences en QoS . . . . .	109
6.3.1	Utilisateurs Acceptés <i>Fonction du NCAR</i> . . . . .	110
6.3.2	Probabilité de Blocage <i>Fonction du NCAR</i> . . . . .	111
6.3.3	Utilité Singulière <i>Fonction de Probabilité de Blocage</i> . . . . .	111
6.3.4	Utilité Totale <i>Fonction du NCAR</i> . . . . .	112
6.4	Mécanisme Flou pour Eviter la Congestion . . . . .	114
6.5	Modèle du Système . . . . .	124
6.6	Résultats des Simulations . . . . .	126
6.7	Conclusion . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>131</b>
7.1	Perspectives Futures . . . . .	134
	<b>Annexes</b>	<b>136</b>
<b>A</b>	<b>Relations Floues</b>	<b>137</b>

*Table des Matières*

A.1	Opérations sur les Ensembles Flous Type-1 . . . . .	137
A.2	Relations Floues Type-1 . . . . .	139
A.3	Compositions Floues Type-1 . . . . .	141
A.4	Opérations sur les Ensembles Flous Type-2 . . . . .	141
A.4.1	Ensembles Flous Type-2 Intervalles . . . . .	143
A.5	Relations et Composition Type-2 . . . . .	144
<b>B</b>	<b>Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2</b>	<b>147</b>
B.1	Principe d'Extension . . . . .	147
B.2	Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2 . . . . .	150
B.2.1	Procédure de Calcul du centroïde d'un Ensemble Flou Type-2	151
B.2.2	Centroïde Généralisé d'un Ensemble Flou Type-2 . . . . .	154
B.2.3	Centroïde Généralisé d'un Ensemble Flou Type-2 Intervalle . .	156
	<b>Références</b>	<b>160</b>

# Liste des Figures

2.1	Partitionnement de l'ensemble de tous les véhicules à New York en sous-ensembles. . . . .	14
2.2	Concept d'un nombre flou. . . . .	16
2.3	Fonctions d'appartenance pour les voitures de productions locale et étrangère. . . . .	18
2.4	Système d'inférence floue Type-1. . . . .	20
3.1	Idée de base du principe d'orthogonalité. . . . .	31
3.2	Visualisation de l'espace expliquant le POG. . . . .	32
3.3	Visualisation de l'espace expliquant la méthode de POG pour le CLF TSK. . . . .	38
3.4	Visualisation de l'espace expliquant le POG appliqué aux systèmes chaotiques. . . . .	43
3.5	Cinq séries temporelles de Mackey-Glass obtenues à partir de différentes conditions initiales . . . . .	46
3.6	Données d'entraînement $s(t+6)$ en fonction de $s(t-12)$ et $s(t-18)$ ainsi que leur approximation en utilisant le POG. . . . .	48

## Liste des Figures

3.7	Données d'entraînement $s(t + 6)$ en fonction de $s(t - 6)$ et $s(t)$ ainsi que leur approximation en utilisant le POG. . . . .	49
3.8	Sorties des prédicteurs flous local et global. . . . .	50
4.1	Blurring d'une MF. . . . .	53
4.2	Exemple d'une fonction d'appartenance Type-2. . . . .	55
4.3	Système d'inférence floue Type-2. . . . .	58
5.1	Visualisation de l'espace expliquant le principe du POG. . . . .	78
5.2	Série temporelle de Mackey-Glass sans bruit. . . . .	88
5.3	Moyenne, limites inférieure et supérieure de plusieurs séries temporelles de Mackey-Glass bruitées. . . . .	89
5.4	Sorties du prédicteur FLS SK T2I A1-C1 basé sur le POG. . . . .	91
5.5	Sorties du prédicteur flou TSK T2I A1-C1 basé sur l'approximation de Chebyshev. . . . .	94
6.1	Estimation du taux d'arrivée des nouveaux appels dans un réseau cellulaire selon Hou <i>et al.</i> . . . . .	101
6.2	Estimation du taux d'arrivée des nouveaux appels selon Fitkov <i>et al.</i>	102
6.3	Processus du Handover. . . . .	103
6.4	Organigramme du schéma standard NPS. . . . .	104
6.5	Organigramme de la stratégie RCS pour les Handovers. . . . .	105
6.6	Organigramme de la stratégie RCS pour les nouveaux appels. . . . .	106

*Liste des Figures*

6.7	Graphe associé au générateur de la chaîne de Markov pour la stratégie RCS. . . . .	107
6.8	Architecture conventionnelle du CAC. . . . .	109
6.9	Schéma du CLF proposé pour éviter la congestion dans un réseau cellulaire. . . . .	114
6.10	Données d'entraînement et leur approximation en utilisant la méthode du POG. . . . .	119
6.11	Différents modèles de la demande en fonction du prix. . . . .	121
6.12	FOUs utilisées pour représenter les quatre labels de $NL$ . . . . .	124
6.13	FOUs utilisées pour représenter les trois labels de $VNL$ . . . . .	125
6.14	NCAR, charge optimale et trafic d'entrée au CAC en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2. . . . .	127
6.15	Charges du trafic en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2. . . . .	128
6.16	Prix ajusté selon la charge du réseau, utilisant les contrôleurs flous de Type-1 et Type-2. . . . .	129
6.17	Probabilité de blocage des charges dans le système sans contrôle de prix et en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2. . .	130
B.1	Exemple d'un ensemble flou Type-2. . . . .	152
B.2	Ensemble flou Type-1 $C_{\tilde{A}}$ réduit de l'ensemble flou Type-2 $\tilde{A}$ . . . . .	154

# Liste des Tableaux

3.1	Paramètres des conclusions optimaux du prédicteur Type-1 basé sur le POG. . . . .	47
5.1	Centres des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur le POG. . . . .	90
5.2	Centres des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur la méthode de Chebyshev. . . . .	92
5.3	Écarts des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur l'approximation de Chebyshev. . . . .	93
6.1	Rapports de prix optimaux obtenus en appliquant la méthode du POG. . . . .	118
B.1	Paramètres du centroïde de l'ensemble flou Type-2. . . . .	153

# Glossaire

CAC	Call Admission Control (Contrôle d'admission des appels).
CLF	Contrôleur de Logique Floue.
EF	Ensemble Flou.
FA	Fonction d'Appartenance.
FBF	Fonction de Base Floue.
FBFP	Fonction de Base Floue Pondérée.
FOU	Footprint Of Uncertainty (Zone d'incertitude).
HCAR	Handover Call Arrival Rate (Taux d'arrivée des appels Handover).
HL	Heavy Load (Charge importante).
LF	Logique Floue.
LL	Light Load (Charge légère).
MBFP	Matrice de Base Floue Pondérée.
ML	Medium Load (Charge moyenne).
NCAR	New Call Arrival Rate (Taux d'arrivée des nouveaux appels).

## *Glossaire*

NL	Network Load (Charge du réseau).
NPS	Non-Prioritized Scheme (Système de non priorité).
POG	Principe d'Orthogonalité Généralisé.
QoS	Qualité de Service.
RCS	Reserved Channel Scheme RCS (Réservation des canaux de garde).
RMSE	Root Mean Square Error (Erreur quadratique moyenne).
SIF	Système d'Inférence Floue.
SNR	Signal to Noise Ratio (Rapport signal sur bruit).
TSK	Takagi Sugeno Kang.
T2I	Type-2 Intervalle.
VBF	Vecteur de Base Flou.
VBFP	Vecteur de Base Flou Pondéré.
VHL	Very Heavy Load (Charge très importante).
VNL	Variation of the Network Load (Variation de la charge du réseau).

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### 1.1 Introduction

Depuis Aristote et sa logique modale, à savoir du *tout-vrai* ou du *tout-faux* jusqu'aux travaux actuels sur la logique quaternaire [1] conduits par les physicien et mathématicien Français, J. F. Froger et R. Lutz, la *logique*, à titre de science pure et d'applications dans différents domaines de la recherche et du développement, a connu des évolutions que l'on peut qualifier de révolutionnaires.

Sans remonter trop loin dans une histoire de la logique, il est clair que cette dernière fut de tout temps liée à une histoire plus large, celle de la philosophie et des mathématiques. Des périodes dites classiques, modernes et contemporaines, de Kepler à Newton et de Bacon à Galilée, de Kant et de Hegel et bien plus tard de Gödel à Brouwer, la logique mathématique gagna beaucoup de terrain et devint, dans la méthode comme dans la pratique, un instrument incontournable dans la modélisation de la pensée scientifique.

La fin du XIXème siècle et la première moitié du XXème furent les plus mar-

## Chapitre 1. Introduction Générale

quantas quant aux développements survenus dans les sciences appliquées, surtout avec l'apparition de l'informatique et de toutes ses ramifications.

Outre, les implications de la théorie de la complexité engagèrent des chantiers nouveaux dans les mondes de la physique et des mathématiques appliquées à l'univers, à la pensée, à l'industrie et aux technologies de l'information et de la communication.

C'est alors que furent inventées et développées des logiques nouvelles et différentes. Telle Booléenne et celle émanant de la théorie des Types ou encore des Correspondances dites de Curry-Howard, la logique Bayésienne enclencha un processus irréversible dans la compréhension de l'incertitude et de l'exclu.

A ce propos, les travaux du logicien et philosophe, le prix Nobel Britannique Bertrand Russel, furent critiques et innovants, particulièrement dans la remise en cause de la logique bivalente et de son incapacité à définir et à formaliser un langage naturel [2]. Ce qui aida un autre philosophe Russo-Anglo-Américain, Max Black, à reconsidérer les philosophies du langage et des mathématiques. Son idée majeure fut celle de la formalisation du sens des prédicats vagues dans le langage commun par des fonctions d'appartenance numériques [3]. C'est d'ailleurs, grâce à ses travaux analytiques que l'on a découvert le génie et l'apport de l'un des pères fondateurs de la logique contemporaine, le philosophe et logicien Allemand Friedrich Frege.

De toutes ces recherches et avancées scientifiques, l'impact des idées novatrices du logicien Polonais, Jan Lukasiewicz, fut déterminant et considéré par ses concurrents et disciples comme une des clefs de la grande révolution scientifique du XXème siècle.

Outre son invention des notations infixée, préfixée et post-fixée connues sous le nom de la *notation Polonaise* ainsi que ses *axiomatisations* de la logique, J. Lukasiewicz [4], [5] fut reconnu comme le théoricien et développeur des logiques multivalentes [6], [7]. Ce qui est une profonde révolution paradigmatique de toute la logique classique.

Cette révolution trouva sa force et sa légitimité auprès de l'héritier et successeur de Lukasiewicz, le logicien et automaticien Iranien Lotfi Askar Zadeh qui, en 1965, et dans le but de modéliser l'imprécision relative à certaines classes d'objets, développa la théorie de l'Ensemble Flou (EF) [8]. Une théorie remarquable aux multiples applications techniques et industrielles. Dans l'intelligence artificielle comme dans l'automatisme et bien évidemment dans les applications de l'informatique dans différentes technologies de pointe et secteurs d'activité, tels la robotique, le contrôle aérien, la reconnaissance des formes, la sismologie, la médecine, la prévention des risques, etc., la Logique Floue (LF), fondée essentiellement sur l'ensemble flou, a ouvert depuis un demi siècle un champ incommensurable devant la manipulation des valeurs incertaines dont les résultats ne cesseront d'être pragmatiques et révolutionnaires.

Alors que toutes les applications d'ingénierie requièrent l'établissement d'une sortie certaine en fonction d'une entrée certaine, la logique floue infère et établit des ensembles de sortie flous en fonction d'ensembles d'entrée flous. Le problème devint alors plus difficile que le problème de la logique floue traditionnelle. L'introduction de deux processus, de *fuzzification* et de *défuzzification*, aux extrémités du modèle de la LF usuel s'avéra donc impératif. Ceci donna naissance au *Système d'Inférence Floue* (SIF), nommé aussi *Contrôleur de Logique Floue* (CLF) [9], [10], [11].

## 1.2 Logique Floue Type-2

Dix ans après l'invention de l'ensemble flou, Lotfi Zadeh reconnut qu'il y avait finalement un problème avec cet ensemble. Le problème résida dans le fait que le mot-concept *flou* signifie une incertitude alors que la Fonction d'Appartenance (FA) d'un EF, une fois ses paramètres déterminés, devient complètement certaine [12]. Le flou fût alors *paradoxalement* représenté par des degrés d'appartenance qui sont eux

## Chapitre 1. Introduction Générale

mêmes des nombres réels et précis [13]. C'est à ce moment là qu'il introduisit un ensemble flou d'ordre supérieur qu'il nomma ensemble flou Type-2 [14] et attribua le nom Type-1 à l'ensemble flou ordinaire.

Le concept de l'EF Type-2 a donc été introduit comme solution et extension du concept de l'EF ordinaire. Un ensemble flou Type-2 a des degrés d'appartenance qui sont eux mêmes flous. A chaque valeur de la variable primaire, l'appartenance est une fonction et non pas une valeur. La fonction d'appartenance d'un EF Type-2 est alors tridimensionnelle et c'est cette troisième dimension qui fournit un degré de liberté secondaire pour traiter les incertitudes. Ces ensembles s'avèrent très utiles face aux difficultés probables à déterminer la FA exacte pour un ensemble flou, comme dans la modélisation d'un mot par un EF [15].

À la question, "Où les incertitudes peuvent-elles se produire dans un système flou basé sur des règles ? Mendel avait répondu dans sa remarquable publication intitulée "*Type-2 Fuzzy Sets : Some Questions and Answers* [12]", de la manière suivante : Trois façons dont une règle incertaine peut se produire ; 1) les mots utilisés dans les prémisses et/ou les conclusions peuvent avoir différents sens à différentes personnes, 2) les conclusions obtenues en sondant un groupe d'experts peuvent être différentes pour une même règle, les experts ne sont pas forcément tous du même avis, et 3) il n'existe que des données d'entraînement bruitées. Assez souvent alors, la connaissance utilisée pour construire la base de règles d'un CLF est incertaine en se traduisant par des prémisses et/ou des conclusions incertaines et en ayant pour conséquences des règles incertaines.

Dans la théorie des probabilités, l'incertitude aléatoire ne peut être modélisée uniquement par la moyenne de la densité de probabilité. Afin qu'elle soit mieux modélisée, l'incertitude probabiliste requiert une connaissance de la dispersion autour de la moyenne, ce qui pourrait être fourni par la variance.

## Chapitre 1. Introduction Générale

Dans la logique floue, nous pouvons considérer le calcul de la sortie défuzzifiée d'un CLF Type-1 congénère au calcul de la moyenne de la densité de probabilité. Tout comme la variance fournit une mesure de dispersion par rapport à la moyenne dans l'incertitude probabiliste, un CLF requiert une mesure de dispersion pour la modélisation d'incertitudes contenues dans les règles incertaines et qu'une sortie certaine, toute seule, ne pourrait modéliser [16]. La LF Type-2 sembla être prometteuse pour fournir une telle *mesure de dispersion* et fut utile dans la conception des systèmes qui contiennent des incertitudes numériques et/ou linguistiques se traduisant par des règles incertaines [16].

L'introduction des processus de fuzzification et de sortie à la LF Type-2 s'avéra nécessaire pour un CLF Type-2 tout comme ce fut le cas pour son congénère Type-1. Toutefois, le processus de sortie d'un CLF Type-2 est constitué d'un processus très compliqué de *réduction de type* avant la défuzzification [16].

En utilisant les principes d'extension, les deux types du CLF Type-1, à savoir Mamdani et Takagi-Sugeno-Kang (TSK) ont été étendus à leurs congénères Type-2 [16], [17]. Le fait que le CLF TSK Type-1 soit exempt du processus de défuzzification fait de son congénère Type-2 un système exempt du processus de réduction de type, ce qui fait des systèmes CLF TSK Type-2 des systèmes moins compliqués.

Liang *et al.* ont présenté l'architecture de trois modèles différents de CLF TSK Type-2 [17]. Cette multiplicité est due aux différentes natures des FAs des prémisses et des conclusions. Le plus général est celui qui traite des incertitudes contenues dans les prémisses et les conclusions. Les deux qui en découlent traitent des incertitudes aux niveaux des prémisses ou des conclusions. Le CLF TSK Type-2 qui traite les incertitudes contenues dans les conclusions, *CLF Type-2 TSK A1-C1*, et dans le cas où on s'intéresse uniquement à sa valeur de sortie défuzzifiée, donne les mêmes résultats que ceux du CLF TSK Type-1 [15]. C'est un système qui, dans ce cas, perd sa nature de Type-2.

## 1.3 Objectif de la Thèse et Principales Contributions

Les travaux de cette thèse sont divisés en deux parties. La première partie porte sur l'optimisation linéaire des CLFs Type-1 et d'un type particulier du CLF Type-2. La deuxième partie rentre dans un cadre applicatif concernant le traitement d'incertitudes dans les paramètres des réseaux cellulaires de nouvelle génération.

### 1.3.1 Optimisation des CLFs Type-1 et Type-2

Le CLF est un système non linéaire capable d'inférer des relations non linéaires entre des variables d'entrée et de sortie. Cette propriété devient extrêmement importante quand le processus à modéliser est intrinsèquement non linéaire. L'apprentissage du CLF à cette fonction non linéaire se fait en lui présentant une séquence de paires entrées-sorties désirées qui, associées à un algorithme d'optimisation, permet de déterminer ses paramètres. Optimiser un CLF peut être considéré comme une approximation d'une fonction [18], [19], [20]. Le CLF est non linéaire par rapport à ses paramètres, des méthodes d'optimisation non linéaires ont été proposées pour déterminer ces paramètres [21], [22], [23], [24]. D'autres travaux de recherche [18], [19] ont démontré qu'une fois certains paramètres du CLF sont fixés, ce système peut être exprimé par une combinaison linéaire de fonctions non linéaires appelées Fonctions de Base Floues (FBFs) et qui sont des superpositions algébriques des fonctions d'appartenance floues. Cette expansion en série de FBFs, étant linéaire par rapport aux paramètres restants, permet l'utilisation de méthodes d'optimisation linéaires pour déterminer ces paramètres.

En utilisant l'expansion en série de FBFs comme point de départ, nous proposons dans un premier temps une méthode d'optimisation linéaire, basée sur le Principe

## Chapitre 1. Introduction Générale

d'Orthogonalité Généralisé (POG), pour déterminer les paramètres des conclusions d'un FLC. Nous fixons d'abord les formes et les paramètres des prémisses, puis nous utilisons les données d'entraînement pour former des Vecteurs de Base Flous (VBFs). Graphiquement, les paramètres optimaux peuvent être obtenus en ayant le vecteur d'erreur - *entre le vecteur des données d'entraînement de sortie et le vecteur formé par la combinaison linéaire des VBFs* - orthogonal au vecteur formé par la combinaison des VBFs [25].

Le comportement des systèmes chaotiques peut être décrit comme des fluctuations de la sortie d'un système non linéaire avec une très grande sensibilité aux conditions initiales [26]. Des trajectoires d'un même système chaotique avec des conditions initiales presque identiques peuvent amplement différer l'une de l'autre. La prédiction de tels systèmes relève d'une extrême délicatesse. La méthode d'optimisation POG proposée est alors adaptée, en l'étendant à un algorithme basé sur une variété de données d'entraînements, afin d'aider le prédicteur à *se désensibiliser* aux conditions initiales. Cette méthode d'optimisation est appliquée pour prédire la sortie de la série temporelle chaotique de Mackey-Glass [27], [28].

Dans la littérature, toutes les méthodes d'optimisation non linéaires qui ont été proposées pour déterminer les paramètres du CLF Type-1 ont été étendues afin de concevoir leurs congénères Type-2. Un software destiné à toutes ces méthodes est disponible sur *Type-2 Fuzzy Logic Software* [29].

Tout comme son congénère de Type-1, le CLF Type-2 peut être exprimé en combinaisons de FBFs. Néanmoins, l'effet des paramètres des conclusions apparaît indirectement dans la détermination de ces FBFs. D'où l'impossibilité de la détermination de ces paramètres linéairement [15]. Par conséquent, aucune méthode d'optimisation linéaire n'a été proposée pour concevoir un CLF Type-2.

Dans ce travail de recherche, nous proposons une méthode d'optimisation linéaire

pour concevoir le type spécifique FLC TSK Type-2 A1-C1. Cette méthode permet à la fois de déterminer les paramètres des conclusions de ce système en utilisant l'expansion du système en une série de FBFs comme point de départ, et de garder sa nature Type-2. L'algorithme est basé sur la présentation de paires de données d'entraînement *vecteur-ensemble*, cet ensemble contient les différentes valeurs possibles pour la sortie du système.

Les écarts des ensembles des conclusions, malgré qu'ils n'interviennent pas dans le calcul de la sortie du système défuzzifiée, engendrent une contrainte de non négativité sur le processus d'optimisation. Dans le but de rester toujours dans le cadre de l'optimisation linéaire, nous convertissons le problème en un problème d'approximation de Chebyshev sous contraintes [30], [31]. Nous appliquons l'algorithme proposé afin de prédire la sortie de la série temporelle de Mackey-Glass. Une étude comparative entre le prédicteur basé sur l'approximation de Chebyshev et un prédicteur basé sur le POG ne prenant en compte que les *valeurs* de sortie, et non pas les ensembles de sorties, est établie [30], [31].

### 1.3.2 Contrôleur Flou pour Eviter la Congestion dans un Réseau Cellulaire

Dans les réseaux de nouvelle génération, la délivrance de la Qualité de Service (QoS) requiert plus de ressources réseau par utilisateur. Outre, quand un utilisateur est admis dans un service, une dégradation dans la QoS se produit pour tous les autres utilisateurs. Ce phénomène *d'externalité négative* qui augmente avec l'augmentation du nombre d'utilisateurs mène à la *congestion du réseau*.

Le contrôle d'admission des appels (CAC Call Admission Control), qui est le processus responsable de l'acceptation ou du rejet d'un appel téléphonique, ne peut malheureusement pas remédier à cette congestion. Le CAC est donc en besoin d'une

## Chapitre 1. Introduction Générale

autre dimension qui pourrait l'aider à obvier à ce problème de congestion.

Plusieurs travaux de recherche ont prouvé que la congestion d'un réseau peut être évitée en implémentant des politiques de tarification dynamique. Ce qui découragerait les utilisateurs du réseau à ne pas utiliser les ressources réseau aux moments de congestion [32], [33], [34], [35], [36]. L'adjonction de cette politique monétaire comme nouvelle dimension au CAC semble alors être prometteuse.

Par ailleurs, Ghosh *et al.* [37] ont démontré que l'incertitude est inhérente au trafic d'entrée et à beaucoup d'autres paramètres environnementaux d'un réseau de télécommunication. Ces paramètres, provocateurs de congestion dans les réseaux, sont sujets à des modélisations analytiques très sévères. L'utilisation de la LF comme technique de modélisation de ces incertitudes semble détenir une approche intéressante pour résoudre le problème de congestion.

Dans cette optique et dans le but d'éviter la congestion d'un réseau cellulaire, nous proposons un CLF basé sur la politique monétaire comme dimension additionnelle au CAC [38]. Ce contrôleur doit maintenir la probabilité de blocage, qui est supposée être la métrique principale de la QoS dans un réseau cellulaire, inférieure ou égale au seuil toléré par les utilisateurs du réseau afin qu'ils obtiennent satisfaction.

La satisfaction des utilisateurs est modélisée par la fonction d'utilité. Nous verrons que cette fonction d'utilité est maximisée à une certaine charge du réseau qu'on qualifie comme *optimale*.

Le contrôleur doit alors ajuster le prix dynamiquement afin de maintenir la charge du réseau toujours inférieure ou égale à cette valeur optimale.

Outre, et dans le but d'augmenter la capacité de traiter l'incertitude contenue dans les paramètres du réseau [39], nous étendons le CLF de congestion proposé à son congénère Type-2 [38]. Une étude comparative entre les deux types de contrôleurs de congestion est établie.

## **1.4 Organisation de la Thèse**

Nous consacrons le deuxième chapitre aux fondements théoriques des ensembles et des systèmes flous Type-1.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode d'optimisation linéaire des systèmes flous Type-1 basée sur le principe d'orthogonalité généralisé qui est étendue afin de mieux prédire les sorties des systèmes sensibles aux conditions initiales.

Dans le quatrième chapitre, nous traitons du paradoxe de l'ensemble flou Type-1 et son extension à son congénère Type-2. Une étude théorique sur l'extension des systèmes d'inférence floue Type-1 à leurs congénères Type-2 est donnée dans le même chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous expliquons le problème posé par l'extension de l'un des systèmes flous Type-1 à son congénère Type-2, puis nous présentons une méthode d'optimisation linéaire qui permet à la fois de déterminer ses paramètres et de résoudre le problème lié à sa nature.

Dans le sixième chapitre, qui représente la deuxième partie de cette thèse, nous abordons quelques notions sur les paramètres d'un réseau cellulaire, nous expliquons l'origine du problème de congestion de ce réseau et nous discutons une politique de tarification implémentée afin d'y obvier. En se basant sur cette politique monétaire, nous proposons dans le même chapitre des CLFs Type-1 et Type-2 qui permettent d'éviter la congestion du réseau.

Nous résumons dans le chapitre de conclusion les contributions de cette thèse et nous donnons quelques perspectives qui peuvent être exploitées dans les futurs travaux.

# Chapitre 2

## Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1

### 2.1 Introduction

En 1965, et après plusieurs années de polémique et de recherche sur l'incapacité de la logique bivalente à modéliser l'imprécision inhérente au monde réel, L. Zadeh proposa le concept de l'ensemble flou [8] comme extension à l'ensemble classique. Cet ensemble, à l'avis des chercheurs de cette époque, permet de modéliser l'imprécision relative à certaines classes vagues tout en servant de fondement à une logique floue.

La logique floue fut un outil puissant dans la combinaison des deux formes de connaissance des problèmes; la *connaissance objective* tel que le modèle mathématique et la *connaissance subjective* qui représente une information linguistique telle que la règle SI-ALORS [40], [41].

Deux approches pour combiner ces connaissances en utilisant la LF ont été élaborées dans la littérature; 1) une *approche basée sur le modèle* dans laquelle la

connaissance objective est représentée par des modèles mathématiques et la connaissance subjective est représentée par des allégations linguistiques qui sont converties en règles quantifiées en utilisant la LF, et 2) une *approche sans modèle* dans laquelle les règles sont extraites des données numériques et sont par la suite combinées avec une connaissance linguistique, les deux en utilisant la FL. Ce contournement de la logique floue lui permet d'offrir une approche incommensurable à la résolution des problèmes complexes et fut d'elle un outil puissant utilisé dans l'automatisme, la robotique, le contrôle aérien, la météorologie comme dans la médecine et bien d'autres.

Autant toutes ces applications ont besoin de sorties certaines à partir de leurs entrées aussi certaines, autant la LF fait correspondre des ensembles flous à d'autres ensembles flous. Cette logique est alors en manque de quelques processus qui lui permettent de *fuzzifier* les entrées puis *défuzzifier* les ensembles de sorties issus d'un processus de traitement appelé *inférence*. Ce qui donna naissance aux systèmes d'inférence floue.

Dans ce chapitre, nous présentons un bref aperçu sur l'extension de l'ensemble classique à son congénère flou, la construction des règles de décision à partir de ces ensembles flous, la compilation de ces règles qui compose, grâce au moteur d'inférence, le système d'inférence floue, ainsi que les deux types de SIFs communément utilisés, à savoir le type de Mamdani [42] et Takagi Sugeno-Kango (TSK) [43].

## 2.2 Bref Aperçu sur l'Ensemble Classique

### 2.2.1 Ensemble

Un ensemble,  $A$ , est une collection d'objets ayant une ou plusieurs caractéristiques communes. Il est défini en énumérant tous ses éléments  $x \in A$ . Une façon de faire

## Chapitre 2. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1

est de spécifier une ou plusieurs conditions pour qui  $x \in A$ . Dans ce cas,  $A$  peut être défini comme suit :

$$A = \{x \mid x \text{ satisfait quelques conditions}\} \quad (2.1)$$

On peut donc introduire une fonction d'appartenance zéro/un (fonction caractéristique) pour  $A$ , notée  $\mu_A(x)$ , telle que :

$$A \implies \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Élément

C'est un objet appartenant à un ensemble. L'élément  $x$  est représenté par  $x \in A$ , où  $A$  est un ensemble.

### 2.2.3 Sous-ensemble

$B$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $A$  si et seulement si  $y \in B \implies y \in A, \forall y$ . Il est représenté par :  $B \subseteq A$ .

### 2.2.4 Sous-Ensemble Propre

$B$  est un sous-ensemble propre (strict) de l'ensemble  $A$  si et seulement si  $B$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $A$  et  $\exists x \in A$  tel que  $x \notin B$ .

### 2.2.5 Ensemble Universel

Un ensemble universel  $U$  est un ensemble qui contient tous les éléments possibles d'un domaine particulier.

**Exemple 1** *Considérons l'ensemble de tous les automobiles à New York, noté  $X$ . Les éléments de  $X$  sont toutes les voitures individuelles; mais il y a différents types de sous ensembles qui peuvent être attribués à  $X$ . La figure 2.1 en illustre quelques exemples. Si la voiture est rouge ou non, c'est une exigence très certaine. Si une voiture a 6 cylindres, son degré d'appartenance au sous-ensemble des "6 cylindres" est unitaire alors que son degré d'appartenance au sous-ensemble des "8cylindres" est nul [9].*

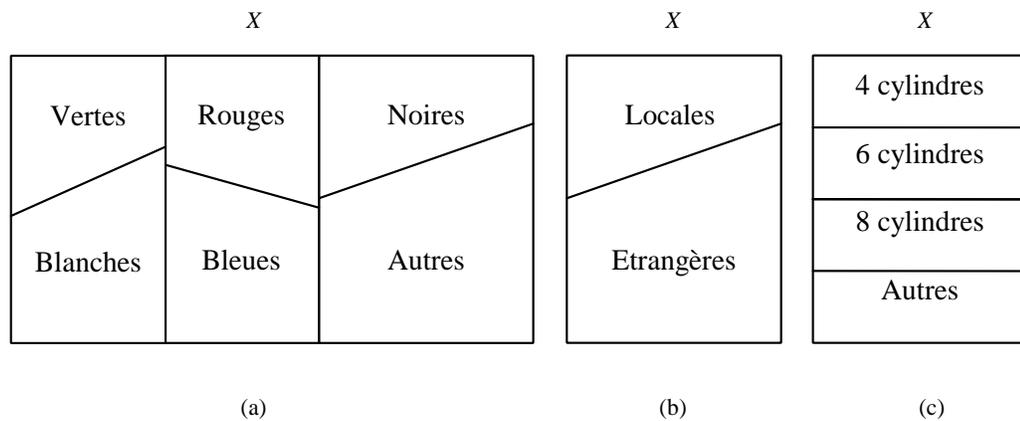


Figure 2.1. Partitionnement de l'ensemble de tous les véhicules à New York en sous-ensembles.

La Figure 2.1 illustre le partitionnement de l'ensemble de tous les véhicules à New York en sous-ensembles; (a) par couleur, (b) production locale ou étrangère, (c) par nombre de cylindres [9].

## 2.3 Concept du Flou *Logique Floue*

Dans le monde réel, notre expression, la façon dont on décrit ce monde et la façon dont on quantifie tout ce qui existe dans ce monde sont toutes imprécises. À demander

*quel temps fait-il?* Les réponses les plus évidentes seraient : il fait chaud, il fait très chaud, il fait froid...etc. Toutes ces réponses dépendent de la croyance de celui qui parle. *Notre description du monde qui nous entoure est donc toujours imprécise. Et ne pas être précis est exactement ce qui est flou.*

### 2.3.1 Concept du Nombre Flou

Le mot "Zéro" veut dire 0.0000 et ne contient aucune imprécision. On peut donc représenter le mot Zéro comme sur la Figure 2.2.

Le mot "Presque Zéro" n'exclut pas les valeurs étroitement voisines de la valeur zéro, il vise plutôt le voisinage de zéro. D'une certaine manière, quand on ajoute le mot "presque" on donne naissance à une bande entre les deux valeurs -1 et 1 (Fig. 2.2). Les limites de cette bande ne sont pas certaines.

Le mot "Proches de Zéro" permet l'extension de la bande jusqu'aux valeurs -2 et 2. Les valeurs appartenant à cette bande sont proches de zéro et leurs niveaux d'appartenance à l'ensemble des valeurs Proches de Zéro se réduisent de plus en plus en s'approchant des valeurs 2 et -2.

Dans le premier cas on est précis, on devient imprécis dans le deuxième cas et encore plus imprécis dans le troisième cas.

C'est ce type de terminologie qu'on utilise dans notre communication "presque zéro, proches de zéro, ..." qui représente des données incertaines plutôt que certaines. Naturellement, puisque notre langage de communication est imprécis, le calcul résultant d'un tel langage si imprécis doit être associé à une certaine logique; *c'est la logique floue.*

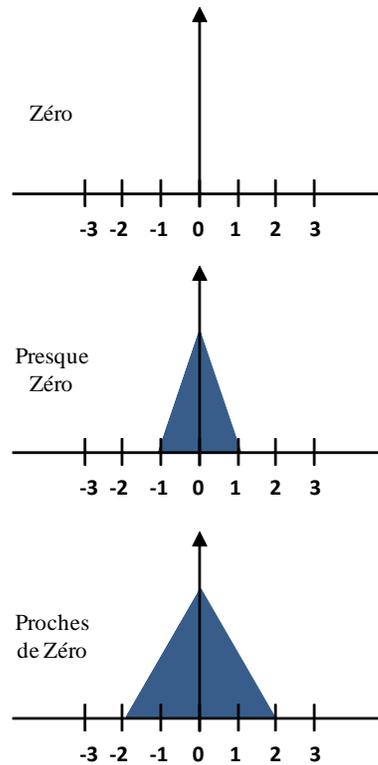


Figure 2.2. Concept d'un nombre flou.

### 2.3.2 De l'Ensemble Classique à l'Ensemble Flou

Pour illustrer le passage de l'ensemble classique à l'ensemble flou, nous exposons dans cette section la non possibilité de représenter des appartenances nulle ou unitaire de certains mots par le biais de quelques exemples.

Soit le sous-ensemble des *nombres naturels entre 1 et 11*, si on veut savoir si 12 appartient à cet ensemble la réponse est définitivement "non"; *c'est la logique classique*.

Dans un ensemble flou, on peut avoir beaucoup plus de nombres dans cet intervalle avec des degrés d'appartenance associés à ces éléments, quand on dit que le degré

## Chapitre 2. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1

d'appartenance d'un élément est entre 0 et 1 ceci détermine à quel degré cet élément peut appartenir à cet ensemble.

Creusons un peu plus. Soit l'ensemble de toutes les personnes grandes. Classiquement, si on définit une personne grande comme la personne qui mesure 1m80, ça paraîtrait très étrange de classer une personne de taille 1m80 comme étant grande et celle qui mesure 1m79 comme ne l'étant pas. Cette ambiguïté que nous avons en termes de classer une chose dans un ensemble classique résulte en un *ensemble flou*. Cependant, dans un ensemble flou, les personnes de taille 1m77, 1m78, 1m79, 1m80, 1m81, 1m82 sont considérées toutes comme étant des personnes grandes mais chacune avec un *degré d'appartenance* différent.

Un autre exemple illustratif est celui des voitures qui se trouvent à New York, que nous avons préalablement vu. Se référant à cet exemple, si on veut savoir si une voiture à 6 cylindres appartient au sous-ensemble de "4 cylindres", la réponse est définitivement "non"; *c'est la logique classique*. Regardons maintenant l'ensemble qui contient les deux sous-ensembles *Locale* et *Etrangère*, une voiture peut être considérée comme production locale ou production étrangère de plusieurs façons. Une façon de voir est *elle est locale si elle porte le nom d'un constructeur auto Américain, sinon elle est importée*. Cette perspective est précise et ne contient aucune ambiguïté, c'est aussi de la logique classique. Une autre perspective est que beaucoup de gens considèrent que les constructeurs auto Américains importent beaucoup de composants et le fait qu'une voiture porte le nom d'un constructeur Américain ne fait pas forcément d'elle une *production locale*, de plus, plusieurs voitures dont les pièces sont de conception étrangère sont produites aux USA. Par conséquent, il y a une certaine ambiguïté en termes de classer une voiture dans les ensembles classiques illustrés sur la Figure 2.1 (b) qui résulte en un *ensemble qui ne peut pas être certain*.

On peut donc penser à des appartenances qui ne sont pas forcément unitaires ou nulles mais qui ont des degrés d'appartenance entre 0 et 1, formant ainsi des

*fonctions d'appartenance.* Les fonctions d'appartenance pour le sous-ensemble des voitures de production locale, abrégées en *Locales*,  $\mu_L(x)$ , et le sous-ensemble des voitures de productions étrangère, abrégées en *Étrangères*,  $\mu_E(x)$ , peuvent avoir des allures comme celles illustrées sur la Figure 2.3. Cette figure représente les fonctions d'appartenance pour les voitures locales et étrangères se basant sur le pourcentage des pièces produites aux Etats-Unis,  $x$  [9].

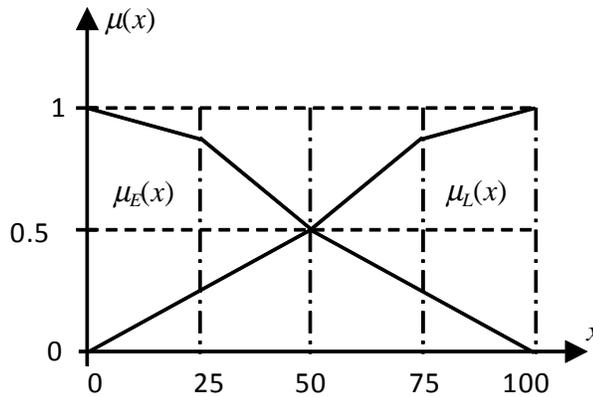


Figure 2.3. Fonctions d'appartenance pour les voitures de productions locale et étrangère.

Une voiture située sur l'axe des  $x$  en déterminant le nombre de ses pièces fabriquées aux Etats Unis, peut appartenir au Sous-ensemble "*Locales*" et au sous-ensemble "*Étrangères*" en même temps, mais avec des degrés d'appartenance différents. Par exemple, si une voiture a 75% de ses pièces fabriquées aux Etats-Unis, alors  $\mu_E(75\%) = 0.25$  et  $\mu_L(75\%) = 0.90$ . La voiture dans ce cas là est considérée comme locale; maximum des deux appartenances.

Un ensemble flou, noté  $F$ , est donc une extension de son congénère certain quand ce dernier fait face à une incertitude. Il est défini sur un univers de discours  $X$  et est caractérisé par une fonction d'appartenance  $\mu_F(x)$  dont les valeurs appartiennent à

l'intervalle  $[0, 1]$ . Notons que  $F$  est un sous ensemble de  $X$ .

Un ensemble flou  $F$  peut être représenté comme un ensemble de paires d'éléments  $x$  et de leurs degrés d'appartenance  $\mu_F(x)$  :

$$F = \{(x, \mu_F(x)) \mid x \in X\} \quad (2.3)$$

Si  $X$  est continu  $F$  est communément exprimé par :

$$F = \int_X \mu_F(x) / x \quad (2.4)$$

Le signe  $\int$  dans l'équation (2.4) ne signifie pas l'intégrale; il signifie plutôt la collection de tous les points  $x \in X$  avec leurs appartenances associées,  $\mu_F(x)$ .

Quand  $X$  est discret,  $F$  est exprimée par :

$$F = \sum_X \mu_F(x) / x \quad (2.5)$$

Le signe  $\sum$  dans l'équation (2.5) ne signifie pas la somme, il signifie plutôt la collection de tous les points  $x \in X$  avec leurs appartenances associées,  $\mu_F(x)$ .

Le slash dans (2.4) et (2.5) associe les éléments dans  $X$  à leurs degrés d'appartenance.

## 2.4 Système d'Inférence Floue

Le système d'inférence floue (SIF ou CLF) est un système de prise de décision à partir d'une base de règles *SI...ALORS*. Il est composé de quatre éléments illustrés sur la Figure 2.4 ; fuzzificateur, base de règles, moteur d'inférence et défuzzificateur. Pour décrire ce CLF, on aura besoin d'une formule mathématique qui lie l'entrée  $\mathbf{x}$  à la sortie  $y = f(\mathbf{x})$ . Cette formule peut être obtenue en faisant passer le signal  $\mathbf{x}$  du fuzzificateur au défuzzificateur passant par l'inférence [15].

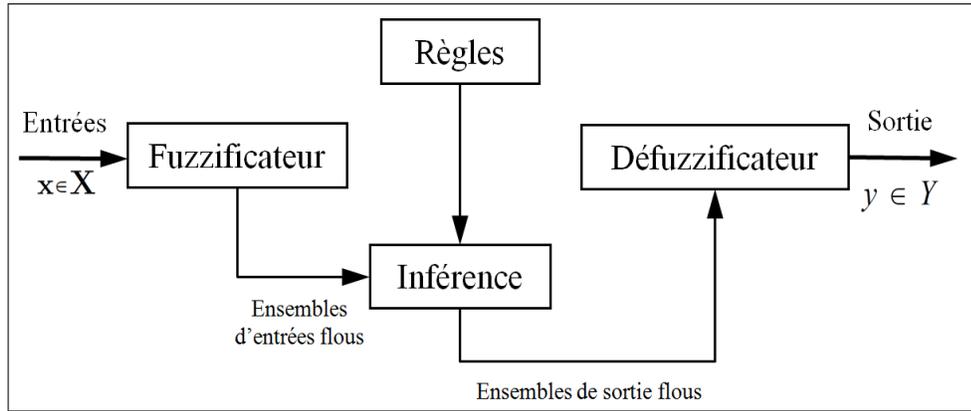


Figure 2.4. Système d'inférence floue Type-1.

### 2.4.1 Base de Règles

Les règles sont le noyau d'un CLF, elles peuvent être données par un expert comme elles peuvent être extraites à partir de données numériques. Dans les deux cas, elles peuvent être exprimées par une collection de règles SI-ALORS. La  $l$ ème règle d'un CLF ayant  $p$  entrées,  $x_1, \dots, x_p$ , et une sortie,  $y \in Y$ , est exprimée par :

$$R^l : \text{SI } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ ET } \dots \text{ ET } x_p \text{ est } F_p^l \text{ ALORS } y \text{ est } G^l \quad (2.6)$$

où  $F_i^l$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) sont les ensembles flous des prémisses qui sont représentés par leurs FAs,  $\mu_{F_i^l}$ ,  $G^l$  est l'ensemble flou de la conclusion et  $l = 1, \dots, M$  avec  $M$  est le nombre de règles dans le CLF [15].

### 2.4.2 Fuzzificateur

Le fuzzificateur est l'élément responsable sur la quantification floue des valeurs réelles d'une variable. Il établit une correspondance de l'entrée scalaire  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in X_1 \times \dots \times X_p \equiv \mathbf{X}$  en un ensemble flou  $F_{\mathbf{x}}$  dans  $\mathbf{X}$  (2.3) [15].

Dans cette étape de fuzzification, il faut donner 1) le domaine de définition de l'entrée en question - *son univers de discours* -, 2) une partition de cet univers en symboles et 3) les FAs de chacun de ces ensembles.

### 2.4.3 Moteur d'Inférence Floue

L'étape d'inférence floue est une opération logique par laquelle on admet une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions tenues pour vraies. En utilisant les principes de la logique floue, le moteur d'inférence floue combine les règles de la base et établit une correspondance des ensembles de sortie flous dans  $Y$  en fonction des ensembles d'entrée flous dans  $\mathbf{X}$ . Plus la condition sur les entrées est vraie, plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée.

Chaque règle est interprétée comme une implication floue, i.e., un ensemble flou dans  $\mathbf{X} \times Y$ .

Les deux méthodes principales de l'implication floue sont celles de Mamdani - *minimum* - [42] et de Larsen - *produit* - [44].

Une règle peut être exprimée par :

$$R^l : F_1^l \times \dots \times F_p^l \longrightarrow G^l = A^l \longrightarrow G^l \quad l = 1, \dots, M \quad (2.7)$$

Les deux implications - *implications de Mamdani* - sont proposées afin d'éviter une constante non nulle, même face à une entrée nulle, dans les applications de l'ingénierie bien qu'elles ne soient pas conformes à l'implication de la logique classique [15].

Nous combinons alors plusieurs prémisses en utilisant une  $t$  - *norme*, et la *lème*

Chapitre 2. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1

règle peut être exprimée par sa FA,  $\mu_{R^l}$ , telle que :

$$\begin{aligned}
 \mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) &= \mu_{A^l \rightarrow G^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{F_1^l \times F_2^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l}(\mathbf{x}, y) \\
 &= \mu_{F_1^l \times F_2^l \times \dots \times F_p^l}(x_1, x_2, \dots, x_p) \star \mu_{G^l}(y) \\
 &= \mu_{F_1^l}(x_1) \star \dots \star \mu_{F_p^l}(x_p) \star \mu_{G^l}(y) \\
 &= \left[ T_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i) \right] \star \mu_{G^l}(y)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

où  $T$  et  $\star$  sont des opérateurs de  $t$ -norme, i.e., *produit* ou *minimum*.

L'entrée de dimension  $p$  de la règle  $R^l$  est un ensemble flou  $A_{\mathbf{x}}$  dont la FA est représentée par [15] :

$$\mu_{A_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \mu_{X_1}(x_1) \star \dots \star \mu_{X_p}(x_p) = T_{i=1}^p \mu_{X_i}(x_i) \tag{2.9}$$

Chaque règle détermine un ensemble flou  $B^l$  dans  $Y$  qui est dérivé de la composition *sup - star* (§ Annexe A). La fonction d'appartenance de cet ensemble de sortie est exprimée par [15] :

$$\begin{aligned}
 \mu_{B^l}(y) &= \mu_{A_{\mathbf{x}} \circ R^l}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ \mu_{A_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \star \mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) \right] \\
 &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ \mu_{A_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \star \mu_{A^l \rightarrow G^l}(\mathbf{x}, y) \right]
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ce qui donne :

$$\mu_{B^l}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ T_{i=1}^p \mu_{X_i}(x_i) \star \left( \left[ T_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i) \right] \star \mu_{G^l}(y) \right) \right] \tag{2.11}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \mu_{B^l}(y) &= \mu_{G^l}(y) \star \left[ \sup_{x_1 \in X_1} \mu_{X_1}(x_1) \star \mu_{F_1^l}(x_1) \right] \\
 &\quad \star \dots \star \left[ \sup_{x_p \in X_p} \mu_{X_p}(x_p) \star \mu_{F_p^l}(x_p) \right]
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

## Chapitre 2. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-1

Puisque nous nous intéressons dans notre travail uniquement à la fuzzification singleton, i.e., les entrées du processus sont considérées comme certaines,  $\mu_{X_i}(x_i)$  est alors non nulle seulement en un point,  $x_i = x'_i$ , l'équation (2.11) devient alors [15] :

$$\begin{aligned} \mu_{B^l}(y) = \mu_{G^l}(y) \star & \left[ \mu_{X_1}(x'_1) \star \mu_{F_1^l}(x'_1) \right] \\ & \star \dots \star \left[ \mu_{X_p}(x'_p) \star \mu_{F_p^l}(x'_p) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec :

$$\mu_{X_i}(x'_i) \star \mu_{F_i^l}(x'_i) = 1 \star \mu_{F_i^l}(x'_i) = \mu_{F_i^l}(x'_i)$$

Si on change la notation de  $x'_i$  par  $x_i$ , la fonction d'appartenance de la sortie,  $\mu_{\tilde{B}^l}$ , de la lème règle est exprimée par [15] :

$$\mu_{B^l}(y) = \mu_{G^l}(y) \star \left[ T_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i) \right], \quad y \in Y \quad (2.14)$$

### 2.4.4 Défuzzificateur

Le processus de défuzzification est l'élément responsable sur l'association d'une sortie interprétable par l'utilisateur - *certaine* - à partir des ensembles flous issus du bloc d'inférence [15]. Il existe plusieurs méthodes de défuzzification, nous esquissons quelques unes dans ce qui suit.

#### Méthode du Centre de Gravité

La méthode par centre de gravité, ou centroïde, combine les ensembles flous de sortie en utilisant l'union (§ Annexe A), puis calcule le centre de gravité de l'ensemble issu.

La sortie défuzzifiée est donnée par l'abscisse de ce centre :

$$y_c(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_B(y_i)} \quad (2.15)$$

où la fonction d'appartenance de l'ensemble de sortie est discrétisée sur  $N$  points.

### Méthode du Centre des Sommes

Cette méthode combine les FAs des ensembles de sortie en les sommant :

$$\mu_B(y) = \sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(y), \quad y \in Y \quad (2.16)$$

puis calcule le centre de gravité de l'ensemble résultant :

$$y_a(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M c_{B^l} a_{B^l}}{\sum_{l=1}^N a_{B^l}} \quad (2.17)$$

où  $c_{B^l}$  est le centroïde de l'ensemble de sortie de la  $l$ ème règle, et  $a_{B^l}$  est la surface de cet ensemble.

### Méthode des Hauteurs

Cette méthode remplace chaque ensemble de sortie d'une règle  $\mu_{B^l}(y)$  par un singleton  $\mu_{B^l}(\bar{y}^l)$  au point ayant l'appartenance maximale, puis calcule le centroïde de l'ensemble formé par les singletons de toutes les règles. La sortie défuzzifiée est exprimée par :

$$y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \mu_{B^l}(\bar{y}^l)}{\sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(\bar{y}^l)} \quad (2.18)$$

où  $\bar{y}^l$  est le point ayant l'appartenance maximale dans l'ensemble de sortie de la  $l$ ème règle [15].

Le calcul de la sortie défuzzifiée par la méthode des hauteurs est beaucoup moins compliqué que celle du centroïde, parce que  $M \ll N$  et ne requiert pas l'opération de l'union. Nous considérons dans notre travail ce défuzzificateur.

## 2.5 CLF de Type Takagi Sugeno Kang

Le système flou de Takagi Sugeno Kang est un système caractérisé également par des règles SI-ALORS. Sa différence globale de celui de Mamdani est aux niveaux des conclusions qui ne sont pas des ensembles flous comme est le cas pour le modèle de Mamdani, mais des fonctions algébriques des entrées du système, pour le TSK du premier ordre, et des scalaires, pour le TSK d'ordre zéro. Cette différence aux niveaux des conclusions ne donne pas lieu au processus de défuzzification, ce qui fait du CLF TSK un système très utilisé dans les applications dont le nombre de règles est important.

La  $l$ ème règle d'un CLF TSK du premier ordre Type-1 ayant  $p$  entrées,  $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ , et une sortie,  $y \in Y$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} R^l : & \text{ SI } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ ET } x_2 \text{ est } F_2^l \text{ ET } \dots \text{ ET } x_p \text{ est } F_p^l \\ \text{ALORS } & y^l(\mathbf{x}) = c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_p^l x_p \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $l = 1, \dots, M$ ,  $c_j^l (j = 0, \dots, p)$  sont les paramètres (de type-0) des conclusions,  $y^l(\mathbf{x})$  est la sortie de la  $l$ ème règle, et  $F_k^l (k = 1, \dots, p)$  sont les ensembles flous Type-1 des prémisses.

La sortie du CLF TSK Type-1 est obtenue en combinant les sorties des  $M$  règles, elle est exprimée par :

$$\begin{aligned} y_{TSK}(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x}) y^l(\mathbf{x})}{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x}) (c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_p^l x_p)}{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $f^l(\mathbf{x}) (l = 1, \dots, M)$  sont les niveaux d'activation des règles et qui sont exprimés par :

$$f^l(\mathbf{x}) = T_{k=1}^p \mu_{F_k^l}(x_k) \quad (2.21)$$

où  $T$  est une opération de  $t$  – norme, et  $\mathbf{x}$  est le vecteur d'entrée appliqué au CLF TSK.

Le CLF TSK Type-1 dont la sortie est donné par (2.20) est la version normalisée de ce type de CLF. Une autre version non normalisée du CLF TSK Type-1 a pour sortie [45], [46] :

$$y_{TSK}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})y^l(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

## 2.6 Fonctions de Base Floues

Nous supposons dans tout ce qui suit que les fonctions d'appartenance sont normalisées, i.e.,  $\mu_{G^l}(\bar{y}^l) = 1$ . Nous utilisons une composition *max-produit* et le produit pour l'implication, la sortie du CLF obtenue par la méthode de défuzzification de la hauteur (2.18) devient :

$$y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \prod_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \prod_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)} \quad (2.23)$$

Le CLF (2.23) peut être exprimé par :

$$y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l \phi_l(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

où  $\phi_l(\mathbf{x})$  est appelée une Fonction de Base Floue (FBF) [19]. Elle est exprimée, particulièrement dans notre cas, par :

$$\phi_l(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \prod_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)} \quad l = 1, \dots, M \quad (2.25)$$

Cette combinaison linéaire permet l'expression du CLF comme une expansion en série de FBFs [19], [24], [18], ayant la possibilité de fournir des informations linguistiques et numériques.

On note ici que, malgré l'indice  $l$  semble associer  $\phi_l$  à la  $l$ ème règle, chaque FBF est affectée par toutes les règles à cause du dénominateur de  $\phi_l(\mathbf{x})$  (2.25). Donc l'association de la  $l$ ème FBF à la  $l$ ème règle est essentiellement liée au fait que si l'on ajoute ou l'on supprime une règle de la base de règles, il y aura un ajout ou une suppression d'une FBF de l'expansion.

La relation entre les FBFs et les autres fonctions de base a été étudiée en détail dans [47]. Dans ce travail, Kim *et al.* ont montré que les FBFs sont plus générales que les Fonctions de Base Radiales (FBR) et les FBRs généralisées. Et à des choix précis de leurs paramètres, les FBFs présentent une grande ressemblance, dans la structure, avec les réseaux de neurones régresseurs [48]. Le fait de pouvoir exprimer un FLC sous forme d'expansion de FBFs est très utile de par son placement dans la catégorie de l'approximation universelle des fonctions.

Dans toutes les méthodes d'optimisation entreprises dans cette thèse, l'expansion en série de FBFs est considérée comme le point de départ de la désignation des FLCs.

### 2.6.1 Fonctions de Base Floues Pondérées

La sortie certaine du FLC TSK dans (2.20) peut être exprimée par :

$$y_{TSK}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \phi_l(\mathbf{x}) \sum_{k=0}^p c_k^l x_k \quad (2.26)$$

où,  $\phi_l(\mathbf{x})$  est la  $l$ ème FBF du FLC qui est donnée dans (2.25). Cette sortie peut être aussi exprimée par :

$$y_{TSK}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=0}^p c_k^l \phi_k^l(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

où  $\phi_k^l(\mathbf{x})$  est la  $k$ ème Fonction de Base Floue Pondérée (FBFP) associée à la  $l$ ème règle, elle est exprimée par [30] :

$$\phi_k^l(\mathbf{x}) = x_k \phi_l(\mathbf{x}), \quad l = 1, \dots, M; k = 0, \dots, p \quad (2.28)$$

Cette combinaison linéaire permet d'exprimer le CLF en une expansion en série de FBFPs [30], [49]. Les FBFPs ont aussi la capacité de fournir une combinaison d'informations linguistiques et numériques.

## **2.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude détaillée sur l'ensemble flou et le contrôleur de logique floue conventionnels. Nous avons illustré les différents composants d'un CLF afin de pouvoir illustrer leurs extensions dans les chapitres suivants. Nous avons aussi illustré l'expansion des deux types de CLF, Mamdani et TSK, en séries de fonctions de base floues et fonctions de base floues pondérées afin d'en faire un point de départ de nos algorithmes d'optimisation des paramètres des CLFs.

# Chapitre 3

## Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG

### 3.1 Introduction

Aux premiers temps, les paramètres des systèmes de logique floue étaient fixés d'une façon arbitraire, i.e., la position et les écarts-type des fonctions d'appartenance des prémisses et des conclusions étaient choisis indépendamment des données numériques d'entraînement. Ceci menait à la possibilité d'un grand nombre de FLCs, forcément locaux. En 1992, et lors de la première conférence IEEE sur les systèmes flous qui s'était tenue à San Diego, trois groupes de chercheurs [50], [18], [22] avaient présenté la même idée, *régler les paramètres d'un CLF en utilisant des données numériques*. Et depuis, plusieurs méthodes d'optimisation pour concevoir un CLF ont été élaborées. Certaines de ces méthodes sont linéaires, d'autres non linéaires, d'autres récursives et d'autres visent la simplicité calculatoire.

Concevoir un CLF peut être vu comme l'approximation d'une surface complexe dans un espace multidimensionnel [20]. Soit un ensemble de paires de données

d'entrées-sortie, la conception d'un CLF est équivalente à la détermination d'un système flou qui fournit une approximation optimale à cet ensemble de paires d'entrées-sortie, soumise à une fonction de coût. Dans le cadre de la théorie de l'approximation, il est commun dans plusieurs méthodes d'approximation de générer une surface désirée en utilisant une combinaison linéaire de fonctions de base. Or, nous avons déjà vu qu'un FLC peut être exprimé par une combinaison linéaire de FBFs. Cette possibilité d'expansion en série fait de cette combinaison le point de départ de plusieurs méthodes d'optimisation de CLFs.

Toutes les méthodes d'optimisation abordées dans cette thèse sont linéaires et s'articulent autour du problème suivant. Soit une collection de  $N$  paires d'entrées - sortie de données d'entraînement,  $(\mathbf{x}^{(1)} : y^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)} : y^{(2)})$ , ...,  $(\mathbf{x}^{(N)} : y^{(N)})$ , où  $\mathbf{x}$  et  $y$  sont respectivement le vecteur d'entrées et de sortie d'un SIF. L'objectif est de spécifier le CLF en utilisant les données d'entraînement. En se basant sur le principe simple d'orthogonalité [51], qui fournit le résultat optimal d'un scalaire qui minimise l'erreur entre deux vecteurs en ayant deux vecteurs perpendiculaires, et en généralisant ce principe aux fonctions de base floues, le principe d'orthogonalité généralisé POG devient la base de nos méthodes d'optimisation dans ce travail, en l'occurrence dans ce chapitre.

Nous commençons par illustrer le principe d'orthogonalité pour ainsi l'étendre aux fonctions de base.

## 3.2 Principe d'Orthogonalité

Supposons que l'on ait un ensemble de  $N$  mesures regroupées dans un vecteur  $\vec{y}$  pour différentes valeurs rassemblées dans un autre vecteur  $\vec{\phi}$  de dimension  $N$ . L'objectif

est de trouver :

$$\min_{\theta} \left\| \vec{y} - \theta \vec{\phi} \right\| \quad (3.1)$$

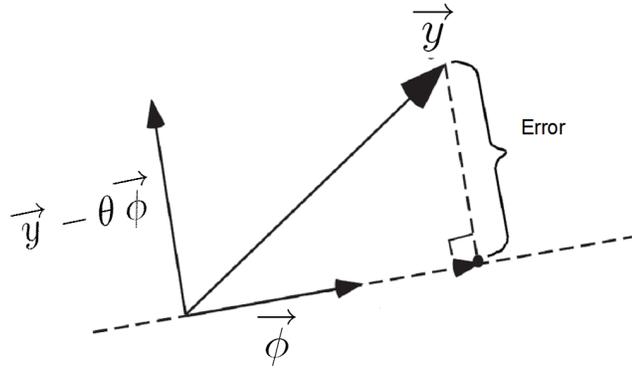


Figure 3.1. Idée de base du principe d'orthogonalité.

Graphiquement, et comme illustré sur la Figure 3.1, nous pouvons constater que le scalaire optimal  $\theta$  qui minimise la norme du vecteur d'erreur  $\vec{e}$ ,  $\left\| \vec{e} = \vec{y} - \theta \vec{\phi} \right\|$ , est obtenu quand  $\vec{e} \perp \vec{\phi}$ . Mathématiquement, ceci peut être exprimé comme suit [51] :

$$\vec{\phi} \cdot (\vec{y} - \theta \vec{\phi}) = 0 \quad (3.2)$$

Résolvant pour  $\theta$  donnera :

$$\theta_{opt} = \frac{\vec{y}^T \vec{\phi}}{\vec{\phi}^T \vec{\phi}} \quad (3.3)$$

où  $\theta_{opt}$  est le scalaire optimal qui minimise la norme du vecteur d'erreur entre  $\vec{y}$  et  $\vec{\phi}$ .

### 3.3 Principe d'Orthogonalité Généralisé

Nous avons vu dans ce qui précédait que les systèmes d'inférence floue peuvent être exprimés en des séries de FBFs. D'autre part, le principe d'orthogonalité a été généralisé au cas d'approximation des données à fonctions de base [51]. Le problème devient alors de trouver les scalaires optimaux qui approximent la somme des fonctions de base à un ensemble de données. Graphiquement, le vecteur d'erreur - *entre le vecteur de données à approximer et l'expansion des vecteurs de base* - doit être perpendiculaire à tous les vecteurs de base (Fig. 3.2).

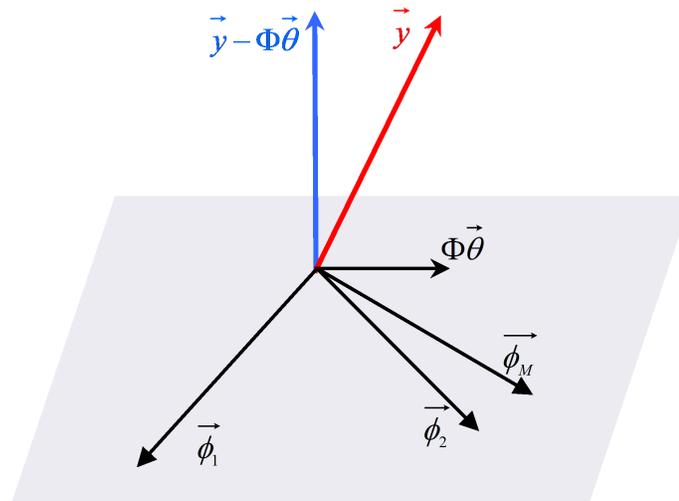


Figure 3.2. Visualisation de l'espace expliquant le POG.

### 3.4 Conception d'un CLF Basée sur le POG

Dans notre méthode de conception, les formes et les paramètres des FAs des prémisses sont préalablement fixés et les données d'entraînement sont utilisées exclusivement pour optimiser les paramètres des conclusions. Ces paramètres sont les  $\bar{y}^l$  de (2.18)

pour le CLF de type Mamdani, et les  $c_k^l$  ( $l = 1, \dots, M; k = 0, \dots, p$ ) dans (2.20) pour le CLF de type TSK.

### 3.4.1 Optimisation d'un CLF de Type Mamdani

Soient  $N$  paires de données d'entraînement entrées-sortie numériques  $(\mathbf{x}^{(1)} : y^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)} : y^{(2)})$ , ...,  $(\mathbf{x}^{(N)} : y^{(N)})$  où  $\mathbf{x}^{(i)}$  et  $y^{(i)}$  sont les vecteurs d'entrées et les sorties du CLF (2.23), respectivement. Notre objectif est d'optimiser les valeurs de  $\bar{y}^l$  ( $l = 1, \dots, M$ ) en utilisant ces données d'entraînement.

Dans un premier temps, nous calculons les FBFs avec les données d'entraînement *-entrées du système-*.

Sous notation des éléments d'entraînement, l'équation (2.24) devient :

$$y(\mathbf{x}^{(i)}) = f(\mathbf{x}^{(i)}) = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l \phi_l(\mathbf{x}^{(i)}) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

Plus en détail :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(1)}) = \bar{y}^1 \phi_1(\mathbf{x}^{(1)}) + \dots + \bar{y}^M \phi_M(\mathbf{x}^{(1)}) \\ y(\mathbf{x}^{(2)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = \bar{y}^1 \phi_1(\mathbf{x}^{(2)}) + \dots + \bar{y}^M \phi_M(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ y(\mathbf{x}^{(N)}) = f(\mathbf{x}^{(N)}) = \bar{y}^1 \phi_1(\mathbf{x}^{(N)}) + \dots + \bar{y}^M \phi_M(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Nous considérons chaque ensemble de  $N$  FBFs comme un Vecteur de Base Flou (VBF) :

$$\vec{\phi}_j = \begin{pmatrix} \phi_j(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \phi_j(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ \phi_j(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.6)$$

Chapitre 3. Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG

où  $M$  est le nombre de règles du système flou. Nous collectons chaque ensemble de  $N$  données d'entraînement -*sortie du système*- dans un vecteur  $\vec{y}$  :

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y(\mathbf{x}^{(1)}) \\ y(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ y(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

et tous les paramètres des conclusions dans un vecteur  $\vec{\theta}$  :

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \bar{y}^1 \\ \bar{y}^2 \\ \vdots \\ \bar{y}^M \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

En considérant les  $N$  équations, le CLF peut être exprimé dans un format matrice-vecteur comme suit :

$$\vec{y} = \mathbf{\Phi} \vec{\theta} \quad (3.9)$$

où la Matrice des Fonctions de Base Floues MFBF  $\mathbf{\Phi}$  est donnée par :

$$\mathbf{\Phi} = [\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_M] \quad (3.10)$$

Les colonnes de la MFBF sont formées par les VBFs (vecteurs tracés en noir sur la Figure 3.2).

L'objectif est de trouver  $\vec{\theta}_{opt}$  qui minimise l'erreur entre  $\vec{y}$  et la combinaison des VBFs. Le vecteur d'erreur doit donc être perpendiculaire à tous les vecteurs de base flous, comme illustré sur la Figure 3.2.

Dans une forme matricielle, nous aurons :

$$\mathbf{\Phi}^T \cdot (\vec{y} - \mathbf{\Phi} \vec{\theta}) = 0 \quad (3.11)$$

Résoudre pour  $\vec{\theta}$  donnerait :

$$\vec{\theta}_{opt} = \begin{pmatrix} \bar{y}^1 \\ \bar{y}^2 \\ \vdots \\ \bar{y}^M \end{pmatrix} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \vec{y}$$

où  $\vec{\theta}_{opt}$  est le vecteur qui contient les paramètres optimaux des conclusions, i.e.,  $\bar{y}_{opt}^l$  dans (2.23).

### 3.4.2 Optimisation d'un CLF de Type TSK

Le principe d'optimisation des paramètres du CLF reste le même que celui de type Mamdani. Les formes et les paramètres des prémisses sont fixés préalablement. L'approche d'optimisation est en accord avec le problème suivant. Soit une collection de  $N$  paires de données d'entraînement numériques  $(\mathbf{x}^{(1)} : y^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)} : y^{(2)})$ ,  $\dots$ ,  $(\mathbf{x}^{(N)} : y^{(N)})$  où  $\mathbf{x}^{(i)}$  est le vecteur d'entrée de dimension  $(p + 1)$  (avec  $x_0 \equiv 1$ ) et  $y^{(i)}$  est la sortie scalaire du CLF (2.20).

Nous calculons les FBFPs en utilisant les données d'entraînement -entrées du système-, nous appliquons par la suite le POG aux  $(p + 1)$  combinaisons des vecteurs des FBFPs et le vecteur de sortie de dimension  $N$ .

En utilisant les éléments des paires d'entrées-sortie d'entraînement, la sortie du

TSK, donnée par (2.27), est réécrite comme suit :

$$y_{TSK}(\mathbf{x}^{(i)}) = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \dots \\ \phi_p^1(\mathbf{x}^{(i)}) \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{array} \right] \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{c} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \dots \\ \phi_p^M(\mathbf{x}^{(i)}) \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{x}^{(i)} = [1, x_1^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}]^T$ . Collecter les  $N$  équations donnerait :

$$\overrightarrow{y_{TSK}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^1(\mathbf{x}^{(N)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{array} \right] \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^M(\mathbf{x}^{(N)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.13)$$

En prenant chaque ensemble de  $N$  FBFPs comme un Vecteur de Base Flou Pondéré VBFP, nous aurons :

$$\overrightarrow{\phi_k^l} = \left( \begin{array}{c} \phi_k^l(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right), \quad l = 1, \dots, M, k = 0, \dots, p \quad (3.14)$$

et chaque ensemble de  $N$  sorties dans un autre vecteur. Le vecteur contenant les

sorties du CLF est alors exprimé comme suit :

$$\overrightarrow{y_{TSK}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\phi_0^1} & \cdots & \overrightarrow{\phi_p^1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{array} \right] \\ + \cdots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\phi_0^M} & \cdots & \overrightarrow{\phi_p^M} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Nous avons  $p + 1$  paramètres à optimiser pour chaque règle, i.e.,  $M$  vecteurs de dimension  $(p + 1)$ . Notons que le nombre de paramètres à optimiser dans un CLF de type TSK est  $p$  fois plus grand que le nombre de paramètres à optimiser dans un CLF de type Mamdani.

$$\overrightarrow{c^l} = \begin{pmatrix} c_0^l \\ \vdots \\ c_p^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, M \quad (3.16)$$

Dénotant par :

$$\Phi_{TSK,l} = \left[ \overrightarrow{\phi_0^l}, \quad \cdots, \quad \overrightarrow{\phi_p^l} \right], \quad l = 1, \dots, M \quad (3.17)$$

Le vecteur de sortie (3.15) devient :

$$\overrightarrow{y_{TSK}} = \Phi_{TSK,1} \overrightarrow{c^1} + \cdots + \Phi_{TSK,M} \overrightarrow{c^M} \quad (3.18)$$

Dans une forme matricielle, (3.18) devient :

$$\overrightarrow{y_{TSK}} = \Phi_{TSK} \left[ \overrightarrow{c^1} \quad \cdots \quad \overrightarrow{c^M} \right]^T \quad (3.19)$$

où  $\Phi_{TSK}$  est la Matrice de Base Floue Pondérée (MBFP) exprimée par :

$$\Phi_{TSK} = \left[ \Phi_{TSK,1}, \quad \cdots, \quad \Phi_{TSK,M} \right] \quad (3.20)$$

Chapitre 3. Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG

Les vecteurs optimaux des paramètres des conclusions,  $\vec{c}^l$  dans (3.16) sont atteints quand le vecteur d'erreur  $\left(\vec{y} - \Phi_{TSK} \begin{bmatrix} \vec{c}^1 & \dots & \vec{c}^M \end{bmatrix}^T\right)$  est perpendiculaire à tous les VBFPs  $\vec{\phi}_k^l$  ( $k = 0, \dots, p$  et  $l = 1, \dots, M$ ), ceci est bien illustré sur la Figure 3.3. Ceci peut être exprimé en termes de matrices MBFPs comme suit :

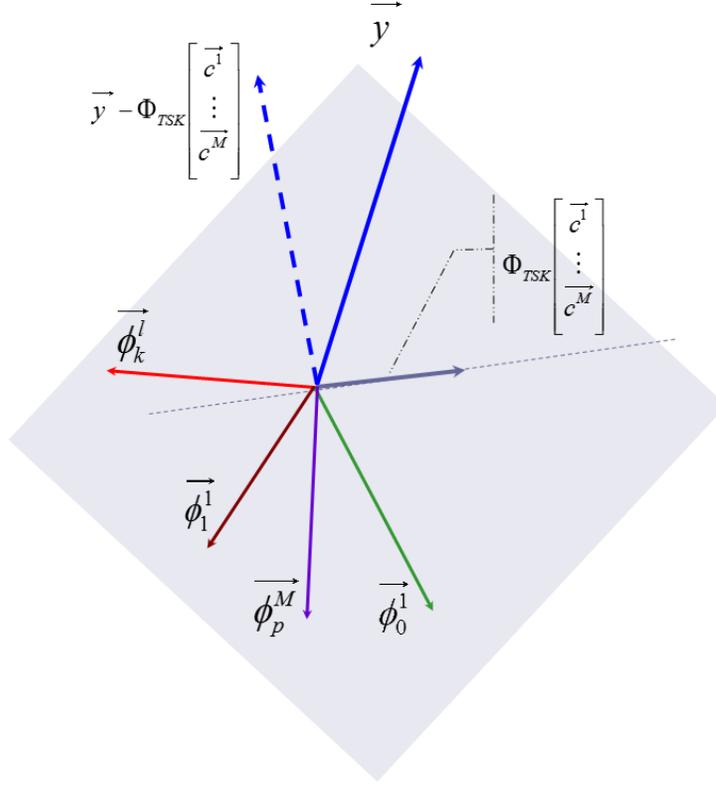


Figure 3.3. Visualisation de l'espace expliquant la méthode de POG pour le CLF TSK.

$$\Phi_{TSK}^T \vec{y} - \Phi_{TSK}^T \Phi_{TSK} \begin{bmatrix} \vec{c}^1 & \dots & \vec{c}^M \end{bmatrix}^T = 0 \quad (3.21)$$

Résoudre pour  $\begin{bmatrix} \vec{c}^1 & \dots & \vec{c}^M \end{bmatrix}^T$  donnerait :

$$\begin{bmatrix} \vec{c}^1 & \dots & \vec{c}^M \end{bmatrix}_{opt}^T = [\Phi_{TSK} \cdot \Phi_{TSK}^T]^{-1} \Phi_{TSK} \vec{y} \quad (3.22)$$

Le CLF optimal est alors reconstruit à partir de  $\left[ \begin{array}{ccc} \vec{c}^1 & \dots & \vec{c}^M \end{array} \right]_{opt}^T$ .

### 3.5 Conception d'un Prédicteur CLF pour les Systèmes Chaotiques Basée sur le POG

Les systèmes chaotiques, et de par leur sensibilité aux conditions initiales, sont des systèmes non prédictibles à long terme. Cette non prédictibilité a fait de la théorie du chaos un domaine de recherche assez étendu.

Nous avons vu dans la section précédente que concevoir un CLF en se basant sur le POG présente une agilité au niveau graphique. Dans le but de désensibiliser le prédicteur d'un système chaotique aux changements des conditions initiales, nous étendons cette méthode de conception pour la prédiction des séries temporelles chaotiques. La conception du prédicteur flou proposé est basée essentiellement sur une multitude de données d'entraînement relevées à partir de différentes conditions initiales. Cet entraînement à différentes conditions initiales désensibilise, en quelque sorte, le prédicteur aux changements des conditions initiales. L'approche de conception est en accord avec le problème suivant :

Soient  $M$  règles linguistiques d'un CLF avec  $p$  entrées et  $m$  ensembles de  $N_0$  paires de données d'entraînement entrées-sortie  $(\mathbf{x}^{(i)} : y^{(i)})^{(k)}$ , ( $i = 1, \dots, N_0$  et  $k = 0, \dots, m - 1$ ), où  $\mathbf{x}$  est le vecteur d'entrée et  $y$  est la sortie du prédicteur flou du système chaotique. Chaque ensemble correspond à des données d'entraînement avec différentes conditions initiales. Sans restreindre la généralité, nous considérons  $m = p + 1$  différentes conditions initiales ( $k = 0, 1, \dots, p$ ). Nous fixons les formes et les paramètres des fonctions d'appartenance des prémisses au préalable. Nous utilisons par la suite les données d'entraînement multiples pour optimiser les paramètres des conclusions, i.e.,  $c_k^l$  dans (2.27).

Chapitre 3. Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG

On commence par calculer les FBFs en utilisant les données d'entraînement. Nous réécrivons la sortie du CLF TSK (2.27) en utilisant la notation pour les  $N_0$  éléments des  $(p + 1)$  paires d'entraînement entrées-sortie.

Pour chaque ensemble de  $N_0$  valeurs, nous aurons donc :

$$y_k(\mathbf{x}^{(i)}) = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(i)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(i)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{array} \right] \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(i)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(i)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.23)$$

où  $k = 0, \dots, p$ ,  $i = kN_0 + 1, \dots, (k + 1)N_0$  et  $\mathbf{x}^{(i)} = [1, x_1^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}]^T$ . L'indice  $k$  correspond au numéro de la condition initiale.

On rassemble chaque ensemble de  $N_0$  équations sous forme vectorielle. Soit :

$$\begin{aligned} \vec{y}_k &= \begin{pmatrix} y^{(kN_0+1)} \\ \vdots \\ y^{((k+1)N_0)} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(kN_0+1)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(kN_0+1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^1(\mathbf{x}^{((k+1)N_0)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{((k+1)N_0)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{array} \right] \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(kN_0+1)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(kN_0+1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^M(\mathbf{x}^{((k+1)N_0)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{((k+1)N_0)}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Chapitre 3. Optimisation d'un CLF Type-1 Basée sur le POG

En prenant chaque ensemble de  $N_0$  FBFPs comme VBFP :

$$\overrightarrow{\phi}_k^{l(i)} = \begin{pmatrix} \phi_k^l(\mathbf{x}^{(iN_0+1)}) \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(iN_0+2)}) \\ \vdots \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(iN_0+N_0)}) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (3.25)$$

qui sont des vecteurs de dimension  $N_0$  avec  $k = 0, 1, \dots, p$  et  $l = 1, \dots, M$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{y}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \overrightarrow{\phi}_0^{1(0)} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi}_p^{1(0)} \right] \begin{bmatrix} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{bmatrix} \\ + \dots + \\ \left[ \overrightarrow{\phi}_0^{M(0)} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi}_p^{M(0)} \right] \begin{bmatrix} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{bmatrix} \\ \vdots \end{array} \right. \\ \overrightarrow{y}_p = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \overrightarrow{\phi}_0^{1(p)} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi}_p^{1(p)} \right] \begin{bmatrix} c_0^1 \\ \vdots \\ c_p^1 \end{bmatrix} \\ + \dots + \\ \left[ \overrightarrow{\phi}_0^{M(p)} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi}_p^{M(p)} \right] \begin{bmatrix} c_0^M \\ \vdots \\ c_p^M \end{bmatrix} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Nous avons à optimiser  $p + 1$  paramètres pour chaque règle, i.e.,  $M$  vecteurs de dimension  $(p + 1)$ . En collectant les paramètres des conclusions de chaque règle dans un même vecteur :

$$\overrightarrow{C}_l = \begin{pmatrix} c_0^l \\ \vdots \\ c_p^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, M \quad (3.27)$$

Dénotant par :

$$\Phi_l^{(i)} = \left[ \overrightarrow{\phi_0^{l(i)}}, \dots, \overrightarrow{\phi_p^{l(i)}} \right], \quad l = 1, \dots, M, \quad i = 0, \dots, p \quad (3.28)$$

et par :

$$\overrightarrow{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathbf{C}}_l \\ \vdots \\ \overrightarrow{\mathbf{C}}_M \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Dans une forme matricielle, (3.26) devient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{y_0} = \Phi^{(0)} \overrightarrow{\mathbf{C}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{y_p} = \Phi^{(p)} \overrightarrow{\mathbf{C}} \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $\Phi^{(k)}$  est la  $k$ ème MBFP. Chaque MBFP correspond à des données d'entraînement avec des conditions initiales différentes, la  $k$ ème MBFP est donnée par :

$$\Phi^{(k)} = \left[ \Phi_1^{(k)}, \dots, \Phi_M^{(k)} \right], \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

L'objectif maintenant est de trouver les éléments du vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ , à savoir les paramètres des conclusions qui minimisent les normes des vecteurs d'erreur entre les vecteurs  $\overrightarrow{y_i}$  ( $i = 0, \dots, p$ ) et les VBFPs correspondants  $\overrightarrow{\phi_k^{l(i)}}$ , qui sont les colonnes de la MBFP  $\Phi^{(i)}$ . Maintenant, nous étendons le principe d'orthogonalité généralisé à notre cas particulier, ce qui mènerait à la perpendicularité des  $(p + 1)$  vecteurs d'erreurs  $\overrightarrow{y_i} - \Phi^{(i)} \overrightarrow{\mathbf{C}}$  ( $i = 0, \dots, p$ ) aux VBFPs  $\overrightarrow{\phi_k^{l(i)}}$  avec  $i = 0, \dots, p$ . Ce principe est illustré sur la Figure 3.4 . Ceci peut être exprimé directement en termes des MBFPs  $\Phi^{(i)}$  :

$$\Phi^{(i)T} \cdot \left( \overrightarrow{y_i} - \Phi^{(i)} \overrightarrow{\mathbf{C}} \right) = 0 \quad (3.31)$$

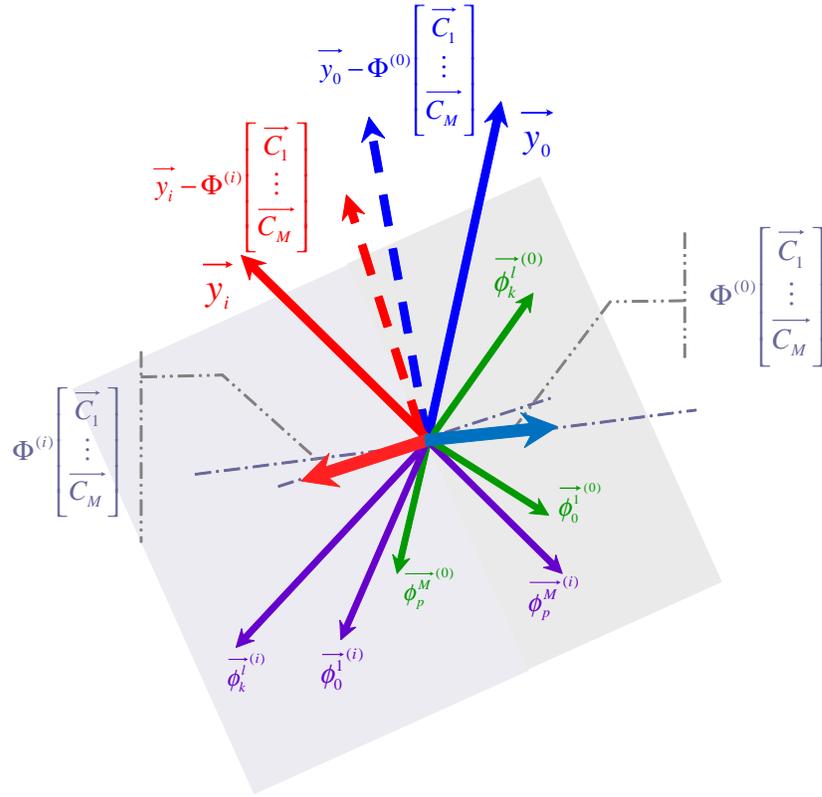


Figure 3.4. Visualisation de l'espace expliquant le POG appliqué aux systèmes chaotiques.

Faisant varier  $i = 0, \dots, p$  dans (3.31) donnera :

$$\begin{cases} \Phi^{(0)T} \vec{y}_0 - \Phi^{(0)T} \Phi^{(0)} \vec{C} = 0 \\ \vdots \\ \Phi^{(p)T} \vec{y}_p - \Phi^{(p)T} \Phi^{(p)} \vec{C} = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

En sommant toutes les équations dans (3.32), nous aurons :

$$\sum_{i=0}^p \Phi^{(i)T} \vec{y}_i - \sum_{i=0}^p \Phi^{(i)T} \Phi^{(i)} \vec{C} = 0 \quad (3.33)$$

La forme matricielle de (3.33) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)T} & \dots & \Phi^{(p)T} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{y}_0 \\ \vdots \\ \vec{y}_p \end{bmatrix} - \\ \left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)T} & \dots & \Phi^{(p)T} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi^{(0)} \\ \vdots \\ \Phi^{(p)} \end{bmatrix} \vec{C} = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Résoudre pour  $\vec{C}$  donnera :

$$\vec{C}_{opt} = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)} & \dots & \Phi^{(p)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi^{(0)} \\ \vdots \\ \Phi^{(p)} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)} & \dots & \Phi^{(p)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{y}_0 \\ \vdots \\ \vec{y}_p \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

où  $\vec{C}_{opt}$  contient les vecteurs de dimension  $(p + 1)$  qui contiennent les paramètres des conclusions optimaux du prédicteur flou TSK du système chaotique pour chaque règle, i.e.,  $c_k^l$  dans (2.27).  $\left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)} & \dots & \Phi^{(p)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)} & \dots & \Phi^{(p)} \end{array} \right]^T$  est inversible si et seulement si  $\left[ \begin{array}{ccc} \Phi^{(0)} & \dots & \Phi^{(p)} \end{array} \right]$  est de rang complet, i.e., si les vecteurs de base flous sont linéairement indépendants.

### 3.5.1 Application à la Prédiction de la Série Temporelle de Mackey-Glass

Pour évaluer la performance d'un prédicteur de séries temporelles, on fait souvent appel à la série chaotique de Mackey-Glass [52]. Cette équation est générée à partir

de l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + x^{10}(t - \tau)} - 0.1x(t) \quad (3.36)$$

Il a été montré que dès que le retard  $\tau$  prenne la valeur 17, la série-temporelle (3.36) devient non périodique et non convergente, rendant le système très sensible aux conditions initiales et présentant ainsi la propriété chaotique. Nous posons dans notre travail  $\tau = 20$  [28].

Nous utilisons quatre prémisses  $p = 4$ , à savoir  $s(k - 18)$ ,  $s(k - 12)$ ,  $s(k - 6)$  et  $s(k)$ , pour prédire  $s(k + 6)$ . Les données d'entraînement sont alors :

$$\mathbf{d}_i^{(k')} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} s(k' - 18) \\ s(k' - 12) \\ s(k' - 6) \\ s(k') \end{array} \right] : s(k' + 6) \end{array} \right) \quad (3.37)$$

où  $i = 0, \dots, p$  et  $k' = 1, \dots, 500$ .

Les données d'entraînement sont obtenues en simulant l'équation (3.36) qui requiert 20 valeurs initiales. Nous choisissons les valeurs initiales d'une façon arbitraire  $(p + 1)$  fois. Le fait que  $\tau$  soit mis à 20 et de par le changement dans les conditions initiales, la simulation donne cinq trajectoires différentes pour le même système,  $s_0, s_1, s_2, s_3$  et  $s_4$ . La Figure (3.5) illustre le comportement de ces signaux durant l'intervalle 1000~2000 secondes. Cet intervalle de temps est choisi de telle sorte qu'on puisse voir l'impact du changement dans les conditions initiales sur le comportement du signal. Pour concevoir le prédicteur flou qu'on qualifiera de *global*, nous utilisons les échantillons suivants :

$$\begin{aligned} s_0(1001) &\sim s_0(1124), s_1(1101) \sim s_1(1224), s_2(1201) \sim s_2(1324), \\ s_3(1301) &\sim s_3(1424) \text{ et } s_4(1401) \sim s_4(1524) \end{aligned}$$

Pour démontrer l'efficacité du prédicteur global, nous concevons un prédicteur flou *local*, i.e., sans changement dans les conditions initiales, puis nous comparons les résultats obtenus des deux prédicteurs flous.

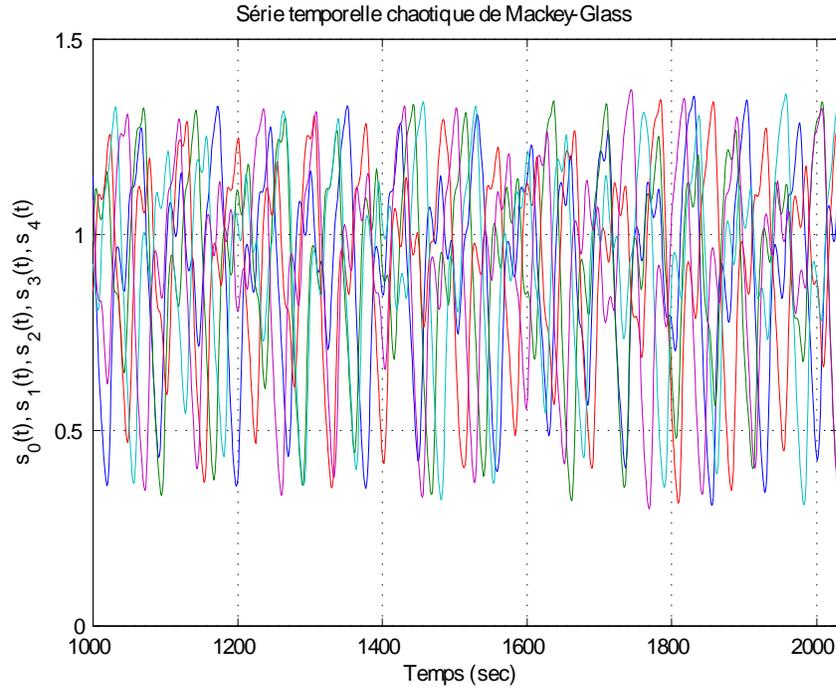


Figure 3.5. Cinq séries temporelles de Mackey-Glass obtenues à partir de différentes conditions initiales

Le prédicteur flou local est entraîné en utilisant les échantillons  $s_0(1001) \sim s_0(1524)$ . Pour les deux prédicteurs, les FAs des prémisses sont des Gaussiennes dont les centres et les écarts-type sont obtenus à partir des moyennes et des écarts-type des données d'entraînement.

Le Tableau 3.1 résume les paramètres optimaux des conclusions du prédicteur flou global.

La Figure (3.6) illustre la sortie du prédicteur pour les données d'entraînement en

Tableau 3.1. Paramètres des conclusions optimaux du prédicteur Type-1 basé sur le POG.

$R$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
1	-3.06	11.16	-4.33	24.01	-0.13
2	9.60	-9.03	-28.62	-12.77	24.69
3	-4.76	3.36	8.24	6.06	-9.95
4	1.56	-6.00	24.25	-29.98	-15.25
5	0.02	0.58	23.77	32.06	9.76
6	10.13	-2.31	-18.28	-0.07	2.61
7	-15.45	35.97	-1.45	-0.60	-10.83
8	3.05	-45.69	-5.60	-56.27	-8.62
9	-3.44	-0.97	-11.05	40.37	3.41
10	-4.46	-8.63	7.18	-38.77	10.52
11	23.16	-16.44	5.88	27.51	7.06
12	-7.48	-7.79	4.82	-0.26	-21.81
13	8.99	6.42	1.64	-40.16	7.78
14	-11.74	11.98	58.03	17.38	1.72
15	-14.24	35.28	-58.32	2.68	-2.25
16	7.34	-5.94	17.93	17.19	7.35

fonction des deux premières entrées  $x_1 = s_i(t-18)$  et  $x_2 = s_i(t-12)$ , et la Figure (3.7) illustre la sortie du prédicteur pour les données d'entraînement en fonction des deux dernières entrées  $x_3 = s_i(t-18)$  et  $x_4 = s_i(t-12)$ , avec  $i = 0, \dots, 4$ . Pour tester les deux prédicteurs, nous générons encore une fois un signal avec d'autres conditions initiales qu'on notera  $s_5$ , nous utilisons par la suite les échantillons  $s_5(1501) \sim s_5(1524)$  pour tester la performance.

La Figure 3.8 illustre les sorties des deux prédicteurs flous local et global basés sur la méthode du POG.

Pour évaluer et comparer la performance des deux prédicteurs, nous utilisons la moyenne quadratique Root Mean Square Error (RMSE) suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{k=1519}^{2018} (s(k+6) - y(\mathbf{x}^{(k)}))^2} \quad (3.38)$$

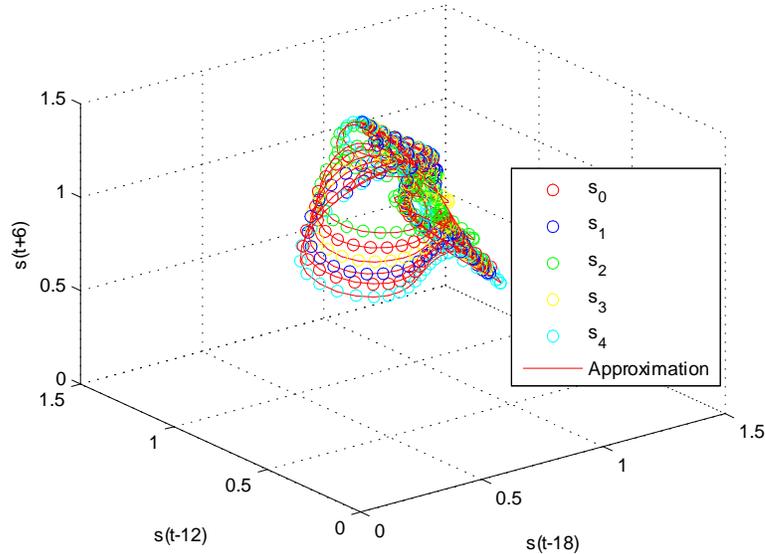


Figure 3.6. Données d'entraînement  $s(t + 6)$  en fonction de  $s(t - 12)$  et  $s(t - 18)$  ainsi que leur approximation en utilisant le POG.

Les RMSEs obtenues sont, pour le prédicteur global  $RMSE_{global} = 0.0077$  et pour le prédicteur local  $RMSE_{local} = 0.0252$ .

Le fait qu'on ait fait varier les conditions initiales  $m = p + 1$  fois, et que les FBFPs soient construites à partir de cette multitude de données d'entraînement, a désensibilisé le prédicteur au changement dans les conditions initiales. L'approche basée sur le POG présente une grande flexibilité quand à la multitude des données, le nombre  $p + 1$  a été fixé sans restreindre la généralité mais il peut être augmenté à condition que les parties divisées des signaux soient représentatives du signal. La  $RMSE$  du prédicteur global à  $m = 5$  conditions initiales différentes est égale à 0.0077, soit 30.55% de l'erreur du prédicteur local, nous remarquons une amélioration substantielle dans la performance du prédicteur global par rapport au prédicteur local. La  $RMSE$  du prédicteur global à  $m = 7$  conditions initiales différentes est

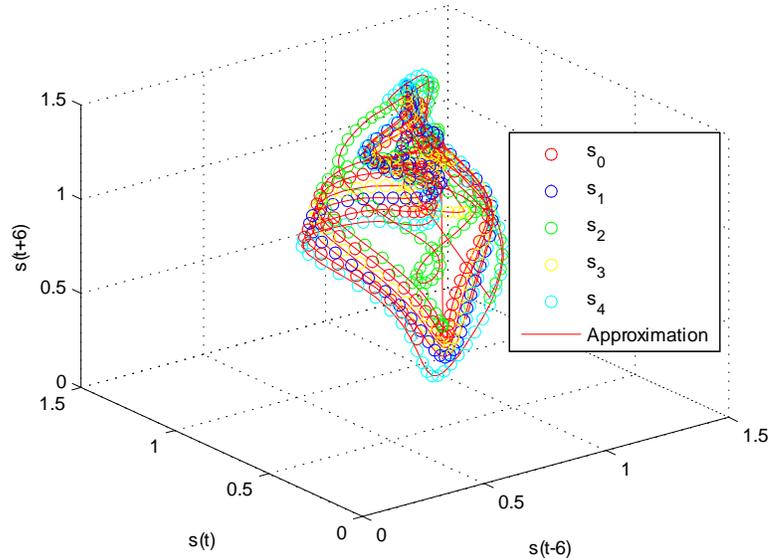


Figure 3.7. Données d'entraînement  $s(t+6)$  en fonction de  $s(t-6)$  et  $s(t)$  ainsi que leur approximation en utilisant le POG.

égale à 0.0063, soit 25% de l'erreur du prédicteur local et ce qui réduit l'erreur de 5.55% par rapport au prédicteur global à  $m = 5$ . Différentes simulations ont montré que plus  $k$  est grand moins le prédicteur est sensible aux conditions initiales.

### 3.6 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre une nouvelle méthode d'optimisation d'un SIF basée sur le principe d'orthogonalité généralisé qui présente une agilité au niveau graphique. De par la sensibilité des systèmes chaotiques aux conditions initiales, la prédictibilité de tels systèmes est quasiment impossible à long terme. Ceci rend tout processus de prédiction basé sur une optimisation localement conçue inadéquat. De ce fait, nous avons étendu la méthode d'optimisation proposée et basée sur le POG

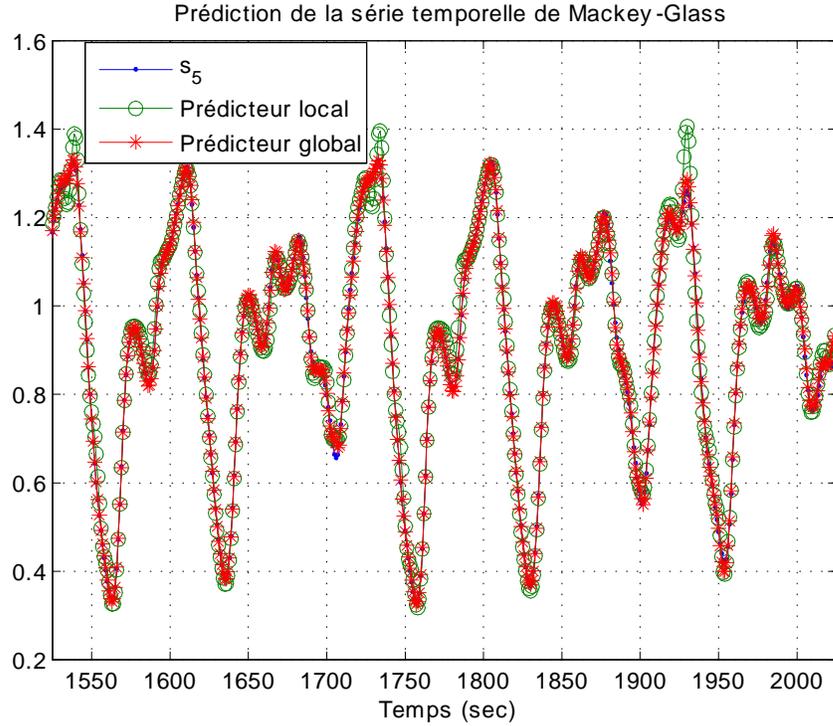


Figure 3.8. Sorties des prédicteurs flous local et global.

afin de concevoir un prédicteur global pour des systèmes chaotiques, en l'occurrence, la série temporelle de Mackey-Glass avec un paramètre exhibant le chaos. La méthode d'optimisation concerne les paramètres des conclusions d'un CLF de type TSK dont l'algorithme d'apprentissage est basé sur une multitude de données d'entraînement relevées à différentes conditions initiales. Les résultats des simulations ont prouvé la performance du prédicteur global par rapport au prédicteur local, une amélioration substantielle de la performance du prédicteur global est élucidée à travers les erreurs obtenues des deux prédicteurs. Différentes simulations ont montré que sous réserve que les parties divisées de la série temporelle soient représentatives du signal, l'augmentation dans la variation des conditions initiales désensibilise encore plus le prédicteur du système chaotique aux conditions initiales.

# Chapitre 4

## Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

### 4.1 Introduction

Depuis son introduction par L. Zadeh en 1965 [8], l'ensemble flou a été acteur de plusieurs applications. Peu après, une controverse est venue perturber la communauté scientifique en qualifiant l'ensemble flou de *paradoxal*. La controverse était en accord avec le fait que le flou dénote l'incertitude alors que la fonction d'appartenance d'un ensemble flou soit complètement certaine une fois ses paramètres sont fixés. Le fait que le *flou* ait une connotation d'incertitude et que finalement ne la modélise pas a beaucoup donné à réfléchir à Zadeh qui reconnut le problème et introduisit un ensemble flou dont la fonction d'appartenance est floue et qu'il nomma ensemble flou Type-2 [14].

En utilisant la falsification de Popper, Mendel a prouvé dans son ouvrage [53] que l'utilisation d'un ensemble flou Type-1 pour modéliser un mot est scientifiquement incorrect; *le mot est incertain alors qu'un ensemble flou est certain*. Alors que

## Chapitre 4. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

l'ensemble flou a été proposé dans son premier exemple [8] pour modéliser un mot, cette falsification a abasourdi encore plus la communauté scientifique, heureusement d'ailleurs que la plupart des applications des ensembles flous Type-1 utilisent le côté mathématique de l'EF et se concentrent peu sur le fait qu'il soit le modèle d'un mot.

Parlant de l'incertitude, il existe deux principaux types d'incertitudes, *linguistique* et *aléatoire*. La première est associée au mot et au fait qu'il puisse signifier différentes choses à différentes personnes alors que la deuxième est associée à l'imprédictibilité. La théorie de probabilité est utilisée pour traiter l'incertitude aléatoire et l'EF est utilisé pour traiter l'incertitude linguistique. Tout comme la variance fournit une mesure de dispersion autour de la moyenne dans l'incertitude probabiliste, un EF a besoin d'une mesure de dispersion de l'incertitude linguistique. *Un ensemble flou Type-2 fournit justement cette mesure de dispersion.*

En introduisant l'ensemble flou Type-2, la LF est devenue encore plus flexible ayant pour nouveau nom la LF Type-2. Cette dernière fait un mappage d'ensembles flous Type-2 en des ensembles flous Type-2 en utilisant les mêmes principes de son homologue de Type-1. Les applications d'ingénierie requièrent un mappage de nombre en nombre, le processus devient plus compliqué parce qu'il aura besoin de deux autres processus à l'entrée et à la sortie, c'est *le système d'inférence floue Type-2*.

Dans le présent chapitre, nous présentons quelques notions sur l'ensemble flou Type-2, les différents blocs d'un CLF Type-2 de type Mamdani ainsi que le modèle du CLF TSK Type-2.

## 4.2 Ensemble Flou Type-2

Un ensemble flou Type-2 est une extension de l'ensemble flou Type-1. Il a des degrés d'appartenance qui sont eux mêmes flous. À chaque valeur de la valeur primaire

(e.g., pression, température,...etc.), l'appartenance est une fonction et non pas une valeur, *fonction d'appartenance secondaire*, dont le domaine, *appartenance primaire*, est dans l'intervalle  $[0, 1]$  et dont la rangée, *degrés secondaires*, doit être aussi dans l'intervalle  $[0, 1]$ . La FA d'un ensemble flou Type-2 est donc tridimensionnelle, et c'est cette nouvelle troisième dimension qui fournit de nouveaux degrés de liberté dans la conception pour traiter l'incertitude. Ces ensembles sont très utiles dans les situations où il est difficile de déterminer la FA exacte pour un ensemble flou. Afin de mieux illustrer l'utilité de cet ensemble, nous présentons un petit exemple dans ce qui suit.

**Exemple 2** *Supposons que l'on veuille déterminer une fonction d'appartenance triangulaire et que l'on soit indécis par rapport à la position exacte des deux points gauche et droit extrêmes de cette fonction. Supposons que 100 experts ont spécifié 100 points différents pour chacune des extrémités. Une meilleure façon de faire, serait de positionner ces points extrêmes à la moyenne de tous ces points,  $P_g$  et  $P_d$  (Fig. 4.1), calculer l'écart-type de ces points, puis faire un "Blurring" comme montré sur la Figure 4.1.*

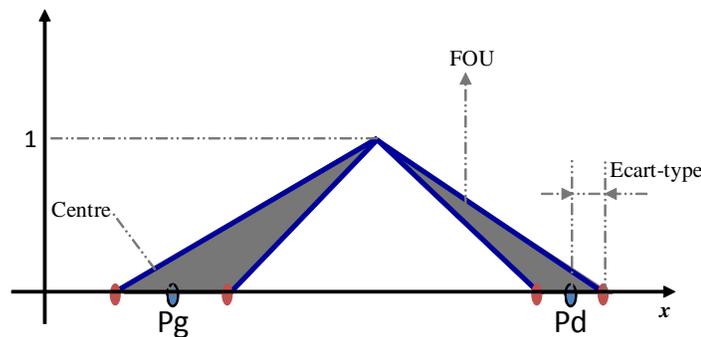


Figure 4.1. Blurring d'une MF.

**Définition 1** Un ensemble flou Type-2, dénoté par  $\tilde{A}$ , est caractérisé par une FA Type-2,  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ , où  $x \in X$  et  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$  :

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (4.1)$$

où  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ .

Cet ensemble peut être aussi exprimé par :

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u) \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (4.2)$$

où  $\int \int$  dénote l'union sur  $x$  et  $u$ .

**Exemple 3** La Figure 4.2 illustre un exemple de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  pour  $x$  et  $u$  discrets. Où  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $U = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ , avec  $J_1 = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ ,  $J_2 = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ ,  $J_3 = \{0.8, 1\}$ ,  $J_4 = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$  et  $J_5 = \{0, 0.2, 0.4, 0.6\}$ . Chacun des bâtons sur la Figure 4.2 représente  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  de chaque paire  $(x, u)$ .

La restriction  $J_x \subseteq [0, 1]$  est conforme à la contrainte Type-1 que  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ . La deuxième restriction,  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ , est conforme au fait que les amplitudes d'une fonction d'appartenance doivent se situer entre ou être égales à 0 et 1.

Par exemple, la fonction d'appartenance de  $x = 1$  est  $0.8/0 + 0.6/0.2 + 0.4/0.4 + 1/0.6 + 0.4/0.8$ , les valeurs de l'appartenance primaire à  $x = 1$  sont  $u = 0, 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.8$ .

**Définition 2** À chaque valeur de  $x$ , soit  $x = x'$ , le plan 2D dont les axes sont  $u$  et  $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$  est appelé la partie verticale de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ . Une FA secondaire est une partie verticale de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ . C'est  $\mu_{\tilde{A}}(x = x', u)$  pour  $x' \in X$  et  $\forall u \in J_{x'} \subseteq [0, 1]$ .

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) = \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u)/u \quad J_{x'} \subseteq [0, 1] \quad (4.3)$$

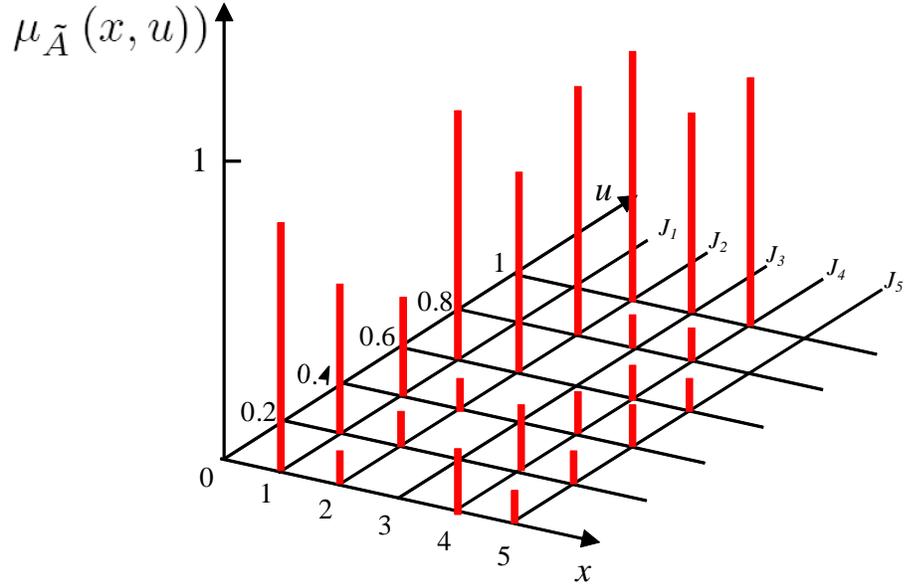


Figure 4.2. Exemple d'une fonction d'appartenance Type-2.

où  $0 \leq f_x(u) \leq 1$ . Nous référons à  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  comme une FA secondaire; c'est un EF Type-1 -ensemble secondaire-.

En se basant sur le concept des ensembles secondaires, on peut interpréter un EF Type-2 comme l'union de tous les ensembles secondaires :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid \forall x \in X\} \quad (4.4)$$

ou :

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (4.5)$$

Le domaine d'une FA secondaire est appelé l'appartenance primaire de  $x$ . Dans (4.5),  $J_x$  est l'appartenance primaire de  $x$ , où  $J_x \subseteq [0, 1] \forall x \in X$ .

L'amplitude d'une FA secondaire est appelée un degré secondaire. Dans (4.5),  $f_x(u)$  est un degré secondaire.

L'incertitude dans les appartenances primaires d'un EF Type-2,  $\tilde{A}$ , consiste en une région limitée que nous appellerons l'empreinte de l'incertitude (Footprint Of Uncertainty (FOU)). C'est l'union de toutes les appartenances primaires :

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (4.6)$$

### 4.2.1 Ensemble Flou Type-2 Intervalle

Quand  $f_x(u) = 1, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]$ , les FAs secondaires sont des ensembles intervalles. Si les FAs secondaires sont des ensembles intervalles pour  $\forall x \in X$ , une FA Type-2 Intervalle (T2I) aura lieu.

Une FA secondaire intervalle reflète une incertitude uniforme aux appartenances primaires de  $x$  [12], l'uniformité de l'ombre de la FOU sur la Figure 4.1 signifie que les poids ou les possibilités sont uniformes. Un ensemble flou Type-2 Intervalle est complètement décrit par sa FOU.

$$\tilde{A} = 1/FOU(\tilde{A}) \quad (4.7)$$

La notation dans (4.7) signifie que le degré secondaire est égal à 1 pour tous les éléments du  $FOU(\tilde{A})$ .

La plupart des applications utilisent plutôt les ensembles flous IT2 que les Type-2 généraux, parce que le calcul des applications l'utilisant est nettement plus facile. De plus, bien que les EFs Type-2 présentent plus de degré de liberté de traitement d'incertitudes que les EFs IT2, le choix de leurs FAs secondaires reste une question très délicate. L'extension des ensembles flous Type-1 se fait beaucoup plus à son congénère IT2 que Type-2.

### 4.3 Contrôleur de Logique Floue Type-2

Les différentes sources d'incertitude dans un système d'inférence floue ont été évoquées par Mendel dans ses différents travaux [15], [12]. Les incertitudes aux niveaux des prémisses et des conclusions se traduisent par des fonctions d'appartenance incertaines qui représentent des ensembles flous Type-2.

Dans la logique floue, nous pouvons considérer le calcul de la sortie défuzzifiée d'un CLF Type-1 comme congénère à la moyenne d'une densité de probabilité. Tout comme la variance d'une densité de probabilité fournit une mesure de dispersion autour de la moyenne et est utilisée pour mieux saisir l'incertitude probabiliste dans les conceptions statistiques, un CLF a besoin d'une mesure de dispersion pour mieux saisir les incertitudes contenues dans les règles et que la sortie certaine d'un CLF Type-1 ne pourrait donner. La logique floue Type-2 fournit cette mesure de dispersion et semble être nécessaire pour concevoir les systèmes flous qui contiennent des règles incertaines.

Dans un système donné, on veut souvent avoir une sortie à valeur déterminée interprétable par l'utilisateur à partir d'une entrée certaine. On est alors astreint à ajouter à la LF, qui établit un ensemble flou en fonction d'un ensemble flou, deux processus à l'entrée et à la sortie. Le premier processus est celui de fuzzification qui fait correspondre un ensemble flou à une valeur, le deuxième est le processus de sortie qui est constitué d'un processus de réduction de type suivi d'un processus de défuzzification. Ceci donne naissance à un CLF ou SIF Type-2.

Dans cette perspective, nous présentons dans cette section un aperçu sur le système d'inférence floue Type-2 tout en détaillant les différents blocs qui le constituent (Fig. 4.3).

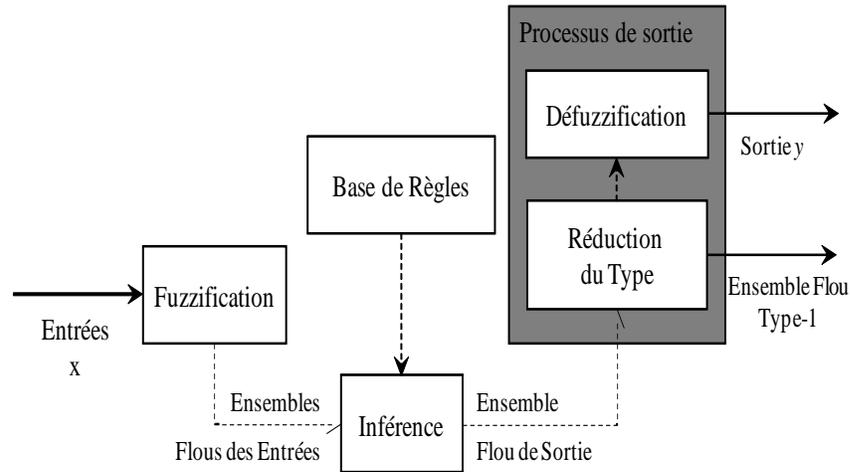


Figure 4.3. Système d'inférence floue Type-2.

### 4.3.1 Base de Règles

Lorsque les règles sont recueillies en interrogeant des experts, si on interrogeait des experts sur les positions et les écarts type des ensembles flous associés aux prémisses et aux conclusions, il est très probable que nous obtiendrions des réponses différentes de chaque expert. Ceci conduirait à des incertitudes statistiques sur les positions et les écarts type des prémisses et conclusions des règles. Ces incertitudes peuvent être modélisées par des fonctions d'appartenance Type-2. En outre, les experts donnent souvent des réponses différentes à la même question pour une règle donnée, cela se traduit par des règles qui ont les mêmes prémisses mais des conclusions différentes. Ceci se traduit par des incertitudes aux niveaux des conclusions qui peuvent être modélisées par des FAs Type-2.

La structure d'une règle floue est la même tant pour un CLF Type-1 que pour un CLF Type-2, la seule différence est que les ensembles flous associés aux prémisses et aux conclusions du premier sont tous des EFs Type-1 ou des nombres certains, alors qu'au moins un EF du deuxième système, qu'il soit associé à la prémisse ou à

## Chapitre 4. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

la conclusion, soit un EF de Type-2.

Soit un CLF Type-2 ayant  $p$  entrées  $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$  et une sortie  $y \in Y$ , avec une base de  $M$  règles, la  $l$ ème règle est exprimée par :

$$R^l : \text{SI } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^l \text{ ET...ET } x_p \text{ est } \tilde{F}_p^l \text{ ALORS } y \text{ est } \tilde{G}^l \quad (4.8)$$

où  $\tilde{F}_i^l$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) sont les ensembles flous des prémisses de Type-2 et  $\tilde{G}^l$  est l'ensemble flou de la conclusion de Type-2 aussi, avec  $l = 1, \dots, M$  [15].

Cette règle représente une relation floue Type-2 entre l'espace des entrées  $X_1 \times \dots \times X_p$  et l'espace de sortie  $Y$  du FLC Type-2.

### 4.3.2 Moteur d'Inférence Floue Type-2

Dans la LF Type-2, le processus d'inférence est similaire à son homologue Type-1. Ce processus combine les règles et fait correspondre, à travers une fonction, des EFs Type-2 de sortie à des EFs Type-2 d'entrée. Pour ce faire, l'inférence utilise l'union et l'intersection des ensembles Type-2, ainsi que les compositions des relations floues Type-2.

La composition *Sup – Star* étendue à partir de son congénère de Type-1 est le noyau de calcul dans un SIF Type-2 (§ Annexe A).

Chaque règle (4.8) est interprétée comme une implication floue Type-2, à savoir  $\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l = \tilde{A}^l$ , la règle peut être exprimée alors par :

$$R^l : \tilde{F}_1^l \times \tilde{F}_2^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l \equiv \tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l \quad (4.9)$$

Cette règle peut être décrite par la FA  $\mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{R^l}(x_1, \dots, x_p, y)$ , où :

$$\mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(\mathbf{x}, y)$$

Chapitre 4. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

Une règle peut être considérée comme une relation entre une collection de  $p$  prémisses et une conclusion. La fonction d'appartenance de l'implication de Type-1 donnée dans (2.8) est alors étendue à son homologue Type-2 :

$$\mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{\tilde{A}^l}(\mathbf{x}) \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \quad (4.10)$$

où  $\sqcap$  représente l'opérateur d'intersection, on utilise le plus souvent les  $t$  – *normes minimum* ou *produit* pour cet opérateur (§ Annexe A).

$$\begin{aligned} \mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) &= \mu_{\tilde{A}^l \longrightarrow \tilde{G}^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \longrightarrow G^l}(\mathbf{x}, y) \\ &= \mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l}(x_1, x_2, \dots, x_p) \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \\ &= \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \sqcap \dots \sqcap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \\ &= \left[ \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'entrée de dimension- $p$  de la règle  $R^l$  est donnée par l'ensemble flou Type-2  $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$  dont la fonction d'appartenance est :

$$\mu_{\tilde{A}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \sqcap \dots \sqcap \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) = \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \quad (4.12)$$

où  $X_i (i = 1, \dots, p)$  sont les labels des ensembles flous décrivant les entrées. Dans un SIF Type-2, chaque règle  $R^l$  détermine un ensemble flou Type-2 :

$$\tilde{B}^l = \tilde{A}_{\mathbf{x}} \circ R^l \quad (4.13)$$

Cet ensemble peut être exprimé par :

$$\tilde{B} = \tilde{A}_{\mathbf{x}} \circ [R^1, \dots, R^M] = \bigsqcup_{i=1}^M (\tilde{A}_{\mathbf{x}} \circ R^i)$$

On note que la composition d'un ensemble flou Type-2  $\tilde{R}$  et une relation floue Type-2  $\tilde{S}(U, V)$ , elle est donnée par [54] (§ Annexe A) :

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(y) = \sqcup_{u \in U} [\mu_{\tilde{R}}(u) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(u, v)] \quad (4.14)$$

## Chapitre 4. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

L'ensemble de sortie  $\tilde{B}^l$  est représenté par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{A_{\mathbf{x}} \circ R^l}(y) = \sqcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ \mu_{\tilde{A}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \sqcap \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(\mathbf{x}, y) \right], \quad y \in Y \quad (4.15)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \sqcup_{\mathbf{x} \in X} \left[ \sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \sqcap \left[ \sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \right], \\ &= \sqcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[ \left[ \sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \sqcap \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \right], \\ &= \sqcup_{\mathbf{x} \in X} \left[ \left[ \sqcap_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \sqcap \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \right], \\ &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \sqcap \left[ \sqcup_{x_1 \in X_1} \left[ \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \right] \sqcap \dots \\ &\quad \dots \sqcap \left[ \sqcup_{x_p \in X_p} \left[ \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'équation (4.16) résulte de la commutativité de l'intersection qui utilise soit le minimum soit le produit.

Si on remplaçait dans les équations (2.8) et (2.10) les FAs Type-1 par des FAs Type-2, l'opération sup par l'opération *join* et l'opération *t-norme* par l'opération *meet*, on remarque facilement la naissance des équations (4.11) et (4.14). Le résultat d'inférence Type-2 est alors directement extrait de son homologue Type-1 [54].

### 4.3.3 Fuzzificateur

Le fuzzificateur produit une fonction de la valeur déterminée  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in X_1 \times \dots \times X_p \equiv \mathbf{X}$  à un EF Type-2  $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$  dans  $\mathbf{X}$ , tel que  $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$  est un ensemble flou Type-2 singleton si  $\mu_{\tilde{A}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = 1/1$  pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  et  $\mu_{\tilde{A}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = 1/0$  pour  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ . Nous utilisons les fonctions d'appartenance séparables et du coup  $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = 1/1$  quand  $x_i = x'_i$  et  $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = 0/1$  quand  $x_i \neq x'_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, p$  [54].

Dans le cas où l'ensemble flou Type-2  $\tilde{A}_{\mathbf{x}}$  contient un seul élément  $\mathbf{x}'$ , l'opération *join* dans l'équation (4.16) devient très facile à évaluer parce que chaque  $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$  est

Chapitre 4. Ensemble et Système d'Inférence Flous Type-2

différente de zéro seulement en un point  $x_i = x'_i$ . La fonction d'appartenance dans (4.16) est alors exprimée par :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}^l}(y) &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \sqcap \left[ \sqcup_{x_1 \in X_1} \left[ \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \right] \right] \sqcap \dots \\ &\quad \dots \sqcap \left[ \sqcup_{x_p \in X_p} \left[ \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \right] \right], \\ &= \mu_{\tilde{G}^l}(y) \sqcap \left[ \mu_{\tilde{X}_1}(x'_1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) \right] \sqcap \dots \sqcap \left[ \mu_{\tilde{X}_p}(x'_p) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x'_p) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Et de par l'opération  $t$  – norme qui permet d'avoir le résultat suivant :

$$(1/1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) = \mu_{\tilde{F}_1^l}(x'_1)$$

La fonction d'appartenance de l'ensemble flou Type-2 déterminée par la règle  $R^l$  est donnée par :

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{G}^l}(y) \sqcap \left[ (1/1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_1^l}(x'_1) \right] \sqcap \dots \sqcap \left[ (1/1) \sqcap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x'_p) \right]$$

Au final [54] :

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{G}^l}(y) \sqcap \left[ \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x'_i) \right] \quad y \in Y \quad (4.18)$$

où le terme  $\left[ \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x'_i) \right]$  représente l'ensemble qui affecte l'ensemble de conclusion pour une règle activée dans un CLF Type-2 singleton, et c'est cet ensemble qui achemine les incertitudes des prémisses à l'ensemble de conclusion.

À une valeur spécifiée  $y \in Y$ ,  $y'$ , la FA secondaire  $\mu_{\tilde{B}^l}(y')$  est un ensemble flou Type-1. Une description complète de  $\mu_{\tilde{B}^l}(y)$  se fait en calculant (4.18) pour tout  $y \in Y$ .

Il est à noter que l'évaluation de (4.18) est une opération très compliquée de par la difficulté du calcul de l'opération *meet* pour les ensembles flous Type-2 généraux, et c'est l'une des raisons principales pour lesquelles on fait souvent recours aux ensembles flous Type-2 intervalles.

### 4.3.4 Processus de Sortie

Le processus de sortie dans un CLF Type-2 comporte deux parties; 1) le processus de réduction de type qui est un processus très complexe, notamment pour les ensembles flous généraux et 2) le processus de défuzzification.

#### Réduction de Type

Ce processus réduit l'ensemble flou Type-2 issu du moteur d'inférence en un EF Type-1. Ce processus est le résultat d'extension du processus de défuzzification. Toutes les méthodes de défuzzification ont été étendues à leurs congénères de réduction de type, à savoir les méthodes du centroïde, du centre des sommes, de la hauteur, de la hauteur modifiée et celle du centre des ensembles. Il est à noter que la réduction de type utilisant les méthodes de la hauteur, hauteur modifiée ou le centre des ensembles ne nécessite pas la combinaison préalable des ensembles Type-2 des sorties, i.e., ce sont des méthodes qui opèrent directement sur  $\mu_{\tilde{B}^i}(y)$  dans (4.18). Si jamais on utilisait les méthodes du centroïde ou du centre des sommes pour la réduction du type, on doit combiner les  $M \mu_{\tilde{B}^i}(y)$  en utilisant les opérations de somme et de *join*.

Tout comme la plupart des méthodes de défuzzification existantes dans la littérature requièrent le calcul du centroïde, les méthodes de réduction de type requièrent l'extension du centroïde pour pouvoir calculer le centroïde d'un ensemble flou Type-2. Il a été montré [15] que la réduction de type est équivalente au calcul du centroïde d'un ensemble flou Type-2. Le calcul du centroïde ainsi que le centroïde généralisé qui est la base de calcul de la réduction de type par le centre-des-ensembles sont détaillés en Annexe B. Ces calculs sont trop compliqués notamment pour les ensembles flous Type-2 généraux.

### **Défuzzification**

Une fois le processus de réduction de type aura généré l'ensemble flou type-1 à partir de l'ensemble flou Type-2, le processus de défuzzification devient entièrement similaire à celui du FLC Type-1 et fera correspondre une valeur certaine à l'ensemble flou Type-1 issu du processus de réduction de type.

## **4.4 Conclusion**

Nous avons exposé dans ce chapitre le paradoxe incertitude-ensemble flou Type-1, pour ainsi détailler l'extension de cet ensemble à son congénère Type-2. Nous avons illustré la capacité de ce nouveau type d'ensemble flou à mieux modéliser l'incertitude de par l'association d'un nouveau paramètre, à savoir la mesure de dispersion de l'incertitude linguistique. L'étude théorique a été étendue à la mesure de dispersion des incertitudes des règles qui donne naissance à un système d'inférence floue de Type-2, par parenthèse la source des différentes incertitudes contenues dans un CLF a été discutée. Les différents constituants d'un SIF Type-2 ont été détaillés dans ce même chapitre. Nous avons vu que le processus de sortie d'un tel système est constitué de deux processus, à savoir la réduction de type et la défuzzification. En outre, nous avons discuté sur la réduction de type qui est un processus très compliqué notamment pour les ensembles flous Type-2 généraux. Cette complexité a fait du CLF de Takagi Sugeno Kang, qui ne requiert pas le processus de réduction de type, un système plus flexible. Dans le chapitre suivant, nous présentons une étude détaillée sur l'extension du SIF TSK Type-1 à son congénère Type-2 et les différentes architectures qui en résultent.

# Chapitre 5

## Contrôleur Flou Type-2 TSK

### *Optimisation*

#### 5.1 Introduction

Tous les CLFs Type-1 proposés dans la littérature ont été étendus à leurs congénères Type-2. Dans leur travail de recherche [17], Liang et Mendel ont élaboré l'architecture de trois modèles différents de CLF TSK T2I issus de l'extension de son congénère Type-1, selon la nature des prémisses (A pour Antécédent) et des Conclusions (C). Le traitement des incertitudes contenues dans les prémisses et les conclusions donne naissance à un CLF Type-2 A2-C1, où A2 signifie un ensemble flou de la prémisse de Type-2 et C1 signifie un ensemble flou de la Conclusion de Type-1. Si l'incertitude est en raccord uniquement avec les prémisses, les ensembles flous de ces dernières, qui étaient à la base des EFs Type-1, deviennent des EFs Type-2 et les paramètres des conclusions restent non flous, i. e., Type-0. L'augmentation du flou uniquement aux niveaux des prémisses donne naissance à un CLF TSK A2-C0.

Par moments, les incertitudes se présentent uniquement aux niveaux des conclu-

sions. Ce cas peut se présenter par exemple quand des experts ont des avis différents sur la même question pour une règle donnée, ceci se traduit par des règles qui ont les mêmes prémisses mais des conclusions différentes. Dans ce cas, on étend les paramètres des conclusions, qui sont à la base des paramètres non flous ou de Type-0, à des ensembles flous Type-1 donnant naissance à un CLF TSK Type-2 A1-C1.

Néanmoins, la sortie du CLF TSK Type-2 Intervalle A1-C1 (CLF TSK T2I A1-C1) est similaire à la sortie du CLF TSK Type-1. Jerry Mendel a reconnu dans son livre "*Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*" que si l'on s'intéressait directement à la sortie défuzzifiée de ce modèle, autant utiliser un CLF de Type-1. Le CLF TSK T2I A1-C1 semble alors perdre sa nature Type-2 dans ce cas, ce qui représente une grosse perte.

Dans ce travail, nous proposons une méthode de conception qui permet à la fois d'optimiser le CLF TSK T2I A1-C1 en utilisant une méthode d'optimisation linéaire et de garder sa nature Type-2. La méthode proposée est essentiellement basée sur le principe d'orthogonalité généralisé et les données d'entraînement sont présentées sous forme de paires *vecteur d'entrées-ensemble de sortie*. Cette particularité au niveau des données d'entraînement, a contrario de tous les systèmes d'inférence floue Type-2, permet de faire de l'expansion du CLF TSK T2I A1-C1 en série de FBFs un point de départ de la conception de ce système. L'optimisation concerne les paramètres des conclusions qui sont les centres des ensembles intervalles intervenant dans le calcul de la sortie défuzzifiée. Cette méthode d'optimisation se réalise à travers un processus de minimisation d'erreur, à l'instar de la méthode proposée dans le Chapitre 2. Bien que les écarts des ensembles intervalles des conclusions de ce système flou n'interviennent pas dans le calcul de sa sortie, ces derniers ont un effet indirect et imposent une contrainte de non négativité sur le processus d'optimisation. De par cette contrainte, et pour rester toujours dans le contexte de l'optimisation linéaire, nous convertissons le problème en un problème d'approximation de Chebyshev. Le système proposé est

utilisé autant que prédicteur flou de la série temporelle de Mackey-Glass.

## 5.2 Du CLF TSK Type-1 à son Congénère Type-2

La  $l$ ème règle d'un CLF TSK Type-1 du premier ordre ayant  $p$  entrées,  $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ , et une sortie,  $y \in Y$ , est exprimée comme suit [15] :

$$\begin{aligned} R^l : & \text{ SI } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ ET } x_2 \text{ est } F_2^l \text{ ET...ETt } x_p \text{ est } F_p^l \\ \text{ALORS } & y^l(\mathbf{x}) = c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_p^l x_p \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $l = 1, \dots, M$ ,  $c_j^l (j = 0, \dots, p)$  sont les paramètres des conclusions,  $y^l(\mathbf{x})$  est la sortie de la  $l$ ème règle, et  $F_k^l (k = 1, \dots, p)$  sont les ensembles flous Type-1 des prémisses.

La sortie du CLF TSK Type-1 est obtenue en combinant les sorties des  $M$  règles, de la manière suivante [15] :

$$y_{TSK,1}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x}) (c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_p^l x_p)}{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})} \quad (5.2)$$

où  $f^l(\mathbf{x}) (l = 1, \dots, M)$  sont les niveaux d'activation des règles [15] :

$$f^l(\mathbf{x}) = T_{k=1}^p \mu_{F_k^l}(x_k) \quad (5.3)$$

et  $\mathbf{x}$  est le vecteur des entrées du CLF TSK.

La sortie du FLC TSK Type-1 (5.2) peut être exprimée par :

$$y_{TSK,1}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x}) (\sum_{k=0}^p c_k^l x_k)}{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})} \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) peut être exprimée comme une expansion en série de FBFPs :

$$y_{TSK,1}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=0}^p \phi_k^l(\mathbf{x}) c_k^l \quad (5.5)$$

où  $\phi_k^l(\mathbf{x})$  est la  $k$ ème fonction de base floue pondérée (FBFP) de la  $l$ ème règle exprimée par [30] :

$$\phi_k^l(\mathbf{x}) = x_k \frac{f^l}{\sum_{l=1}^M f^l}, \quad l = 1, \dots, M, k = 0, \dots, p \quad (5.6)$$

Supposons maintenant que l'on ait des incertitudes par rapport aux prémisses et conclusions des règles (5.1). Une relation floue d'ordre supérieur a été considérée comme une façon d'augmenter le flou d'une description et, de ce fait, augmenter la capacité de traitement de l'information inexacte dans cette description [39]. Ceci résulte en l'extension des ensembles flous des prémisses (Antecedents) Type-1 de la règle (5.1) en des des ensembles flous Type-2 (A2), et l'extension des paramètres des Conclusions Type-0 en des ensembles flous Type-1 (C1). L'augmentation du flou dans les prémisses et les conclusions est le cas le plus général de l'extension du FLC TSK conventionnel, noté A2-C1.

### 5.3 CLF TSK Type-2 A2-C1 Cas Général

La  $l$ ème règle d'un CLF TSK Type-2 A2-C1 est exprimée par :

$$\begin{aligned} R^l : \text{SI } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^l \text{ ET } x_2 \text{ est } \tilde{F}_2^l \text{ ET...ET } x_p \text{ est } \tilde{F}_p^l \\ \text{ALORS } Y^l(\mathbf{x}) = C_0^l + C_1^l x_1 + \dots + C_p^l x_p \end{aligned} \quad (5.7)$$

où  $\tilde{F}_k^l$  ( $k = 1, \dots, p$ ) sont des ensembles flous Type-2 des prémisses de la  $l$ ème règle,  $C_j^l$  ( $j = 0, \dots, p$ ) sont les ensembles flous Type-1 des conclusions. Dans un CLF TSK Type-2, le niveau d'activation de la  $l$ ème règle devient un EF Type-1 :

$$F^l(\mathbf{x}) = \sqcap_{k=1}^p \mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k) \quad (5.8)$$

où  $\sqcap$  est l'opération *meet* [15].

La sortie d'un CLF TSK Type-2 est obtenue en appliquant le principe d'extension (B.8) à (2.20). La sortie étendue du CLF TSK Type-2 est alors exprimée par [17] :

$$\mathbf{Y}_{TSK,2}(\mathbf{x}) = \int_{y^1 \in Y^1} \cdots \int_{y^M \in Y^M} \int_{f^1 \in F^1} \cdots \int_{f^M \in F^M} [T_{l=1}^M \mu_{Y^l}(y^l) \star T_{l=1}^M \mu_{F^l}(f^l)] / \frac{\sum_{l=1}^M f^l y^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \quad (5.9)$$

où  $\star$  et  $T$  sont des opérations de  $t$ -norme.

La sortie du CLF TSK Type-2 élucide les incertitudes des prémisses et des conclusions. Le calcul de cette sortie est très compliqué, il est équivalent au calcul du centroïde généralisé détaillé en Annexe B.

### 5.3.1 CLF TSK Type-2 Intervalle

Quand on n'a pas de connaissances a priori sur les incertitudes de la FA secondaire, ce qui est quasiment toujours le cas, les ensembles intervalles deviennent très utiles. Quand un EF Type-2 Intervalle est utilisé pour les prémisses de (5.7) et des ensembles intervalles Type-1 sont utilisés pour les conclusions, la FA  $\mu_{\bar{F}_k^l}(x_k)$  et  $C_j^l$  ( $j = 0, \dots, p$ ) sont des intervalles Type-1, chacun caractérisé par ses deux points extrêmes [15] :

$$\mu_{\bar{F}_k^l}(x_k) = \left[ \underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k), \bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k) \right] \quad k = 1, \dots, p \quad (5.10)$$

et :

$$C_j^l = [c_j^l - s_j^l, c_j^l + s_j^l] \quad j = 0, \dots, p \quad (5.11)$$

où  $\underline{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)$  et  $\bar{\mu}_{\bar{F}_k^l}(x_k)$  sont respectivement les FAs inférieure et supérieure,  $c_j^l$  et  $s_j^l$  sont respectivement les centres et écarts des ensembles  $C_j^l$ . Dans un CLF TSK Type-2 Intervalle avec l'opération meet de  $t$ -norme produit ou minimum, l'ensemble d'activation,  $F^l(\mathbf{x})$ , de la  $l$ ème règle devient un ensemble intervalle [55] :

$$F^l(\mathbf{x}) = \left[ \underline{f}^l(\mathbf{x}), \bar{f}^l(\mathbf{x}) \right]$$

où :

$$\underline{f}^l(\mathbf{x}) = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \quad (5.12)$$

et :

$$\overline{f}^l(\mathbf{x}) = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \quad (5.13)$$

Pour donner les expressions des points extrêmes des ensembles de sortie des règles,  $Y^l$ , nous commençons par présenter un algorithme de combinaison affine de plusieurs ensembles intervalles [15].

**Théorème 3** - *Combinaison affine des nombres flous intervalles* - Soient  $N$  nombres flous Type-1 intervalles  $F_1, \dots, F_n$  avec des centres  $m_1, \dots, m_n$  et des écarts  $s_1, \dots, s_n$ , leur combinaison affine,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i + \beta$ , où  $\alpha_i$  et  $\beta$  sont des constantes, est aussi un nombre flou intervalle avec comme centre  $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i + \beta$  et comme écart  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| s_i$ .

Cet algorithme permet de conclure que la sortie de la  $l$ th règle,  $Y^l$ , est un ensemble intervalle dont la moyenne est  $\sum_{k=0}^p c_k^l x_k$ , et l'écart est  $\sum_{k=0}^p |x_k| s_k^l$ .

La valeur extrême gauche (inférieure) de cette conclusion,  $y_l^l$  est exprimée par :

$$y_l^l = \sum_{k=0}^p c_k^l x_k - \sum_{k=0}^p |x_k| s_k^l \quad (5.14)$$

Sa valeur extrême droite (supérieure),  $y_r^l$  est exprimée par :

$$y_r^l = \sum_{k=0}^p c_k^l x_k + \sum_{k=0}^p |x_k| s_k^l \quad (5.15)$$

avec  $x_0 \equiv 1$ . Puisque  $F^l(x)$  et  $Y^l$  ( $l = 1, \dots, M$ ) sont des EFs intervalles, les appartenances  $\mu_{Y^l}(y^l)$  et  $\mu_{F^l}(f^l)$  dans (5.9) sont égales à 1. La sortie d'un CLF

TSK Type-2 Intervalle est un ensemble Type-1 intervalle et est représentée par ses deux points extrêmes  $y_l$  et  $y_r$  [15] :

$$\mathbf{Y}_{TSK,2}(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \cdots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \cdots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 \left/ \frac{\sum_{l=1}^M f^l y^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \right. \quad (5.16)$$

Le calcul des deux points de cet ensemble est équivalent au calcul du centroïde généralisé d'un ensemble flou Type-2 Intervalle, il est détaillé en Annexe B.

### 5.3.2 CLF TSK Type-2 Intervalle A2-C0

Un cas spécial de l'extension du CLF TSK Type-1 se produit quand les incertitudes aux niveaux des prémisses sont traitées en utilisant des ensembles flous Type-2 Intervalles pour modéliser ces dernières, et les paramètres des conclusions restent des valeurs certaines. C'est le CLF TSK Type-2 Intervalle A2-C0 dont la lème règle est exprimée par :

$$\begin{aligned} R^l : \text{SI } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^l \text{ ET } x_2 \text{ is } \tilde{F}_2^l \text{ ET...ET } x_p \text{ est } \tilde{F}_p^l \\ \text{ALORS } y^l(\mathbf{x}) = c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_p^l x_p \end{aligned} \quad (5.17)$$

La sortie de ce système est un cas spécial simplifié de (5.16):

$$\mathbf{Y}_{TSK,2}(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \cdots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 \left/ \frac{\sum_{l=1}^M f^l y^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \right. \quad (5.18)$$

Le calcul de (5.18) est quasi similaire au calcul de (5.16), avec  $y_l^1 = y_r^1 = y^l$ .

### 5.3.3 CLF TSK Type-2 Intervalle A1-C1

Dans le cas où on a du mal à traiter l'incertitude contenue dans les paramètres des conclusions d'un CLF TSK Type-1, on étend ces valeurs conventionnelles à des ensembles flous Type-1. Puisqu'on ne connaît pas les poids des éléments de l'ensemble on uniforme ces poids à 1. Les conclusions deviennent alors des ensembles Type-1 intervalles (C1) - une combinaison linéaire de plusieurs ensembles - et les prémisses restent des ensembles flous Type-1 (A1), donnant naissance à un CLF TSK Type-2 Intervalle A1-C1.

La  $l$ ème règle d'un CLF TSK T2I A1-C1 ayant  $p$  entrées,  $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ , et une sortie,  $y \in Y$ , est exprimée par [56] :

$$\begin{aligned} R^l : & \text{SI } x_1 \text{ est } F_1^l \text{ ET } \dots \text{ ET } x_p \text{ est } F_p^l \\ \text{ALORS } & Y^l(\mathbf{x}) = C_0^l + C_1^l x_1 + \dots + C_p^l x_p \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $l = 1, \dots, M$ ;  $F_k^l$  ( $k = 1, \dots, p$ ) sont des prémisses Type-1 et  $C_j^l$  ( $j = 0, \dots, p$ ) sont les ensembles intervalles des conclusions.

La sortie du système A1-C1 est un cas particulier de (5.16), où le niveau d'activation de la  $l$ ème règle devient une valeur non pas un ensemble,  $f^l(\mathbf{x})$  donné dans (2.21), cette sortie est exprimée par :

$$Y_{A1-C1}(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \int_{y^l \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} 1 \left/ \frac{\sum_{l=1}^M f^l y^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \right. \quad (5.20)$$

où  $y_l^l$  et  $y_r^l$  sont donnés dans (5.14) et (5.15), respectivement.

La sortie de la  $l$ ème règle,  $Y^l$ , est une combinaison linéaire de plusieurs ensembles intervalles et par conséquent un ensemble intervalle Type-1 [57]. La forme finale de la sortie du CLF TSK T2I A1-C1 est donnée par :

$$Y_{A1-C1}(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \left[ \frac{\sum_{l=1}^M f^l y_l^l}{\sum_{l=1}^M f^l}, \frac{\sum_{l=1}^M f^l y_r^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \right] \quad (5.21)$$

Le point extrême gauche de l'ensemble de sortie du CLF TSK T2I A1-C1 est exprimé alors comme suit :

$$y_l = \frac{\sum_{l=1}^M f^l \left( \sum_{k=0}^p c_k^l x_k - \sum_{k=0}^p |x_k| s_k^l \right)}{\sum_{l=1}^M f^l} \quad (5.22)$$

Le point extrême droit de l'ensemble de sortie du CLF TSK T2I A1-C1 est exprimé par :

$$y_r = \frac{\sum_{l=1}^M f^l \left( \sum_{k=0}^p c_k^l x_k + \sum_{k=0}^p |x_k| s_k^l \right)}{\sum_{l=1}^M f^l} \quad (5.23)$$

en termes de FBFPs, (5.22) et (5.23) peuvent être exprimées par [30] :

$$y_l(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \left( \sum_{k=0}^p (y_{c_k}^l \phi_k^l(\mathbf{x}) - s_k^l \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x})) \right) \quad (5.24)$$

et :

$$y_r(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \left( \sum_{k=0}^p (y_{c_k}^l \phi_k^l(\mathbf{x}) + s_k^l \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x})) \right) \quad (5.25)$$

Les  $\phi_k^l(\mathbf{x})$  sont données dans (2.28), et les  $\phi_{k_{abs}}^l$  sont exprimées par :

$$\phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}) = |x_k| \phi_k^l(\mathbf{x}) \quad (5.26)$$

En défuzzifiant l'ensemble donné dans (5.21), utilisant la moyenne des valeurs extrêmes, la sortie certaine du CLF TSK T2I A1-C1 est exprimée par :

$$y_{A1-C1}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x}) \left( \sum_{k=0}^p y_{c_k}^l x_k \right)}{\sum_{l=1}^M f^l(\mathbf{x})} \quad (5.27)$$

où  $y_{c_k}^l$  est le centre du  $k$ ème ensemble de la conclusion de la  $l$ ème règle dans (5.19),  $C_k^l$ , et le niveau d'activation  $f^l$  est donné dans (5.3). Notons que les  $y_{c_k}^l \neq c_k^l$ , parce que  $c_k^l$  dans (5.4) représentent des scalaires alors que  $y_{c_k}^l$  dans l'équation (5.19) sont les centres des ensembles.

La sortie certaine (5.27) peut être exprimée comme suit :

$$y_{A1-C1}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=0}^p \phi_k^l(\mathbf{x}) y_{c_k}^l \quad (5.28)$$

où l'expression de la FBFP,  $\phi_k^l(\mathbf{x})$ , est donnée dans (5.6).

Cette combinaison linéaire permet de voir ce type de CLF TSK Type-2 comme une expansion en série de FBFPs [19], [24], [18]. Les FBFPs ont l'avantage de fournir une information linguistique et numérique à la fois.

Dans ce type particulier de CLF TSK T2I, les paramètres des conclusions n'ont pas d'effet sur la détermination des FBFPs, contrairement au cas du système général. L'expansion en série de FBFPs est linéaire par rapport aux paramètres des conclusions, ces derniers peuvent alors être déterminés séparément en appliquant un algorithme d'optimisation linéaire. Nous illustrons dans ce qui suit l'optimisation des paramètres des conclusions d'un tel CLF.

## 5.4 Optimisation d'un CLF TSK T2I A1-C1

Nous avons vu dans la section précédente que les conclusions de la règle d'un CLF TSK T2I A1-C1 sont des ensembles intervalles déterminés par leurs points extrêmes droits et gauches. Néanmoins, dans l'expression de la sortie de ce système, ces points n'apparaissent pas. Nous voyons dans les équations (5.19) et (5.28) que seuls les centres des intervalles des conclusions qui interviennent dans l'expression de la sortie. Et si nous comparions les sorties des deux contrôleurs flous Type-1 et Type-2 données respectivement par les équations (5.4) et (5.19) on trouve qu'elles sont similaires bien que les paramètres des conclusions du Type-2 sont des centres d'intervalles.

Par conséquent, si on s'intéressait seulement à la sortie du système, la nature Type-2 du CLF TSK T2I A1-C1 est en quelque sorte perdue, et autant utiliser un

CLF TSK Type-1 du moment qu'il donne les mêmes résultats que son congénère A1-C1 [15].

Dans cette section, nous proposons une méthode d'optimisation linéaire afin de déterminer les paramètres des conclusions qui interviennent dans le calcul de la sortie d'un CLF TSK T2I A1-C1 sans pour autant perdre la nature Type-2 du système. Cette nature permet, bien entendu, de donner une information additionnelle sur les incertitudes associées aux conclusions.

Dans un premier temps, nous fixons les formes et les paramètres des prémisses du CLF TSK T2I A1-C1 qui sont des EFs Type-1, par la suite nous utilisons les données d'entraînement pour spécifier les centres des conclusions du système.

Soit un ensemble de  $N$  paires de données numériques bruitées,  $(\mathbf{x}^{(1)} : y^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)} : y^{(2)})$ ,  $\dots$ ,  $(\mathbf{x}^{(N)} : y^{(N)})$ , où  $\mathbf{x}^{(i)}$  est le vecteur d'entrée de dimension  $(p + 1)$  avec  $x_0 \equiv 1$  et  $y^{(i)}$  est la sortie scalaire du CLF TSK T2I A1-C1 donné par (5.27). Nous mettons l'accent sur le fait que dans ce cas, les données sont supposées être bruitées et le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}$  contient les valeurs moyennes des entrées bruitées multiples.

Les VBFPs sont calculés en utilisant les données d'entraînement, la méthode du POG est par la suite appliquée à la combinaison des  $(p + 1)$  vecteurs VBFPs de dimension  $N$ .

En utilisant les éléments des paires d'entraînement d'entrées-sortie, la sortie du CLF TSK T2I A1-C1, donnée dans (5.28), est réécrite comme suit :

$$y_{A1-C1}(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \dots \\ \phi_p^1(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_{c0}^1 \\ \vdots \\ y_{cp}^1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \dots \\ \phi_p^M(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_{c0}^M \\ \vdots \\ y_{cp}^M \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

où  $\mathbf{x}^{(i)} = [1, x_1^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}]^T$  avec  $i = 1, \dots, N$ . Rassembler les  $N$  équations sous forme

vectorielle donnerait :

$$\vec{y}_{A1-C1} = \begin{pmatrix} y_{A1-C1}(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \vdots \\ y_{A1-C1}(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{A1-C1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^1(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^1(\mathbf{x}^{(N)}) & \dots & \phi_p^1(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{c0}^1 \\ \vdots \\ y_{cp}^1 \end{bmatrix} \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \phi_0^M(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(1)}) \\ & \ddots & \\ \phi_0^M(\mathbf{x}^{(N)}) & \dots & \phi_p^M(\mathbf{x}^{(N)}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{c0}^M \\ \vdots \\ y_{cp}^M \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.30)$$

En collectant chaque ensemble de  $N$  FBFs dans un VBFP :

$$\vec{\phi}_k^l = \begin{pmatrix} \phi_k^l(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} l = 1, \dots, M \\ k = 0, \dots, p \end{cases} \quad (5.31)$$

et chaque ensemble de  $N$  sorties dans un même vecteur, le vecteur de sortie est exprimé par :

$$\vec{y}_{A1-C1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} \vec{\phi}_0^1 & \dots & \vec{\phi}_p^1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{c0}^1 \\ \vdots \\ y_{cp}^1 \end{bmatrix} \\ + \dots + \\ \left[ \begin{array}{ccc} \vec{\phi}_0^M & \dots & \vec{\phi}_p^M \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{c0}^M \\ \vdots \\ y_{cp}^M \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Rassembler les centres des ensembles des conclusions de chaque règle dans un vecteur :

$$\vec{y}_C^l = \begin{pmatrix} y_{c_0}^l \\ \vdots \\ y_{c_p}^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, M \quad (5.33)$$

Nous aurons à spécifier  $p + 1$  paramètres pour chaque règle, i.e.,  $M$  vecteurs de dimension  $(p + 1)$ . Nous rassemblons maintenant les  $M$  vecteurs dans une matrice :

$$\Phi_l = \left[ \vec{\phi}_0^l, \dots, \vec{\phi}_p^l \right], \quad l = 1, \dots, M \quad (5.34)$$

Le vecteur de sortie (5.32) devient :

$$\vec{y} = \Phi_1 \vec{y}_C^1 + \dots + \Phi_M \vec{y}_C^M \quad (5.35)$$

Dans une forme matricielle, (5.35) devient :

$$\vec{y} = \Phi \left[ \vec{y}_C^1 \quad \dots \quad \vec{y}_C^M \right]^T \quad (5.36)$$

où la matrice des fonctions de base floues pondérées MBFP  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi = \left[ \Phi_1, \dots, \Phi_M \right] \quad (5.37)$$

### 5.4.1 Principe d'Orthogonalité Généralisé

Afin d'optimiser les centres des ensembles des conclusions d'un CLF TSK T2I A1-C1,  $\vec{y}_C^l$  dans (5.33), nous appliquons le principe d'orthogonalité généralisé. Graphiquement, le vecteur contenant les centres des conclusions optimaux est obtenu quand le vecteur d'erreur  $\left( \vec{y} - \Phi \left[ \vec{y}_C^1 \quad \dots \quad \vec{y}_C^M \right]^T \right)$  est perpendiculaire à tous les vecteurs VBFPs,  $\vec{\phi}_k^l$  ( $k = 0, \dots, p$  et  $l = 1, \dots, M$ ), qui ne sont autres que les colonnes de la MBFP  $\Phi$ . Ce principe est illustré sur la Figure 5.1.

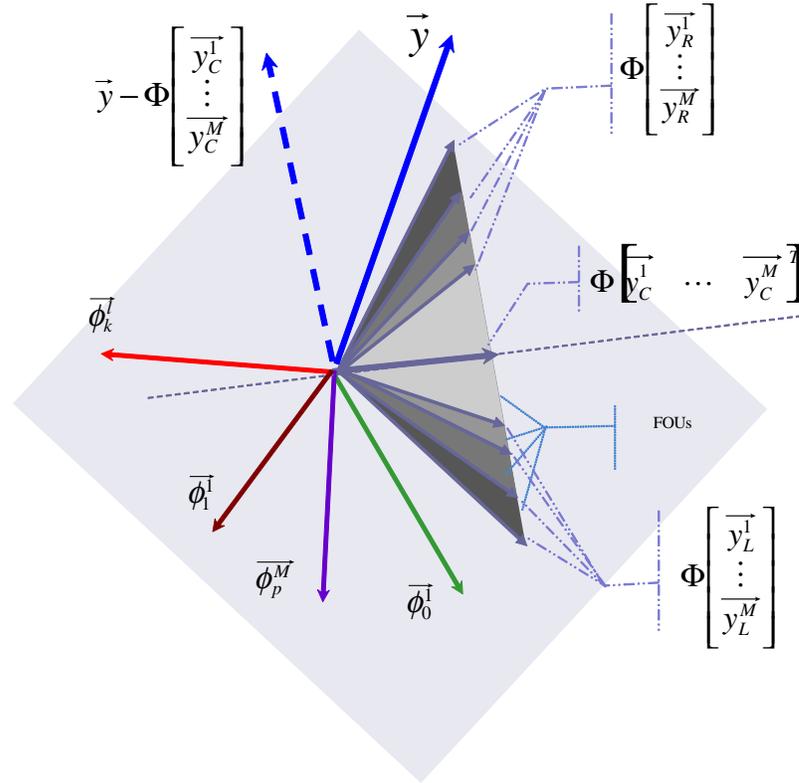


Figure 5.1. Visualisation de l'espace expliquant le principe du POG.

Ceci peut être exprimé en forme matricielle par :

$$\Phi^T \vec{y} - \Phi^T \Phi \begin{bmatrix} \vec{y}_C^I & \dots & \vec{y}_C^M \end{bmatrix}^T = 0 \quad (5.38)$$

Résoudre pour  $\begin{bmatrix} \vec{y}_C^I & \dots & \vec{y}_C^M \end{bmatrix}^T$  donnerait :

$$\begin{bmatrix} \vec{y}_C^I & \dots & \vec{y}_C^M \end{bmatrix}_{opt}^T = [\Phi \cdot \Phi^T]^{-1} \Phi^T \vec{y}_{A1-C1} \quad (5.39)$$

Le vecteur  $\begin{bmatrix} \vec{y}_C^I & \dots & \vec{y}_C^M \end{bmatrix}_{opt}^T$  regroupe les  $M$  vecteurs de dimension  $(p + 1)$  des centres optimaux des ensembles des conclusions d'un CLF TSK T2I A1-C1.

On note que la matrice  $[\Phi \cdot \Phi^T]$  n'est inversible que si les vecteurs de  $\Phi$  sont linéairement indépendants, i.e.,  $\Phi$  est de rang complet.

La sortie du CLF TSK Type-2 A1-C1 Intervalle pour un vecteur d'entrées spécifié,  $\mathbf{x}$ , est exprimée par :

$$y_{A1-C1_{POG}}(\mathbf{x}) = \left[ \phi_0^1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_p^M(\mathbf{x}) \right] \vec{Y}_{C_{opt_{POG}}} \quad (5.40)$$

L'indice *POG* sur  $y_{A1-C1}$  et  $\vec{Y}_{C_{opt}}$  indique que c'est la conception basée sur le POG.

**Problème 4** Sur la Figure 5.1, le FOU représente la quantité des incertitudes dans tout le CLF TSK Type-2 Intervalle A1-C1. Cette zone d'incertitude se situe entre 1) le vecteur contenant les points extrêmes gauches de tous les ensembles des conclusions du CLF TSK T2I A1-C1,  $y_{lk}^l = y_{ck}^l - s_k^l$ , noté  $\vec{y}_L = \left[ \vec{y}_L^1 \quad \dots \quad \vec{y}_L^M \right]^T$ , où  $\vec{y}_L^i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) sont des vecteurs de dimension  $(p + 1)$ , et 2) le vecteur contenant les points extrêmes droits de tous les ensembles des conclusions du CLF TSK T2I A1-C1,  $y_{rk}^l = y_{ck}^l + s_k^l$ , noté  $\vec{y}_R = \left[ \vec{y}_R^1 \quad \dots \quad \vec{y}_R^M \right]^T$ , où  $\vec{y}_R^i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) sont des vecteurs de dimension  $(p + 1)$ , les deux pondérés par la matrice MBFP  $\Phi$ .

Comme il est clairement illustré sur la Figure 5.1, pour une zone de FOU étroite qui est représentée par la zone de couleur gris clair et qui interprète peu d'incertitudes dans les paramètres des conclusions, ou pour une FOU large qui est représentée par la zone de couleur gris foncé et qui interprète beaucoup d'incertitudes dans les paramètres des conclusions, les centres des ensembles intervalles des conclusions du CLF TSK T2I A1-C1 sont les mêmes. Par conséquent, la sortie certaine du CLF TSK T2I A1-C1 conçu en se basant sur le POG ne prend pas en considération les ensembles des conclusions.

Afin de pallier ce désavantage, nous proposons une autre méthode d'optimisation qui concerne non seulement les centres des ensembles des conclusions mais aussi leurs écarts, même si ces derniers n'interviennent pas dans le calcul de la sortie défuzzifiée du CLF TSK T2I A1-C1.

## 5.5 Optimisation du CLF TSK T2I A1-C1 Basée sur l'Approximation de Chebyshev

Dans cette section, nous proposons une méthode d'optimisation d'un CLF TSK T2I A1-C1 qui prend en compte les limites extrêmes que les données d'entraînement incertaines peuvent atteindre. L'approche de la méthode est reliée au problème suivant [30], [31] :

Soit un ensemble de  $N$  paires de données d'entraînement numériques d'entrées-sortie :  $(\mathbf{x}^{(1)} : \mathbf{y}^{(1)}), \dots, (\mathbf{x}^{(N)} : \mathbf{y}^{(N)}) = \left\{ x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_p^{(i)} : \left[ y_l^{(i)}, y_r^{(i)} \right] \right\}_{i=1}^N$ , où  $x_0, x_1, \dots, x_p$  sont les entrées du système avec  $x_0 \equiv 1$ ,  $y_l$  et  $y_r$  sont les points-extrêmes, i.e., la plus petite valeur et la plus grande valeur, de l'ensemble des valeurs de sortie que peut avoir le système. Nous fixons les formes et les paramètres des prémisses Type-1 dans un premier temps, puis nous utilisons les données d'entraînement pour déterminer les centres et les écarts des ensembles des conclusions du CLF TSK T2I A1-C1.

L'expansion du système en série de FBFs est le point de départ de notre algorithme. Nous réécrivons les points extrêmes droit et gauche de l'ensemble de sortie du CLF TSK T2I A1-C1 (5.22) et (5.23) en utilisant la notation pour les éléments des paires d'entraînement d'entrées-sortie.

En termes de FBFs, le  $i$ ème point extrême droit de l'ensemble de sortie du CLF TSK T2I A1-C1 est exprimé par [30] :

$$y_r(\mathbf{x}^{(i)}) = \sum_{l=1}^M \left( \sum_{k=0}^p (y_{c_k}^l \phi_k^l(\mathbf{x}^{(i)}) + s_k^l \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(i)})) \right) \quad (5.41)$$

Et en termes de FBFs toujours, le  $i$ ème point extrême gauche de l'ensemble de

sortie du CLF TSK T2I A1-C1 est exprimé par [30] :

$$y_l(\mathbf{x}^{(i)}) = \sum_{l=1}^M \left( \sum_{k=0}^p (y_{c_k}^l \phi_k^l(\mathbf{x}^{(i)}) - s_k^l \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(i)})) \right) \quad (5.42)$$

où  $i = 1, \dots, N$ ,  $\phi_k^l(\mathbf{x}^{(i)}) = x_k^{(i)} \phi_l(\mathbf{x}^{(i)})$  et  $\phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(i)}) = |x_k^{(i)}| \phi_l(\mathbf{x}^{(i)})$ . L'indice *abs* sur  $\phi_{k_{abs}}^l$  est pour dénoter la valeur absolue de  $x_k$ . Notons que  $\phi_k^l$  et  $\phi_{k_{abs}}^l$  sont toutes les deux des fonctions de base floues pondérées.

L'objectif est maintenant de trouver les valeurs optimales de  $y_{c_k}^l$  et  $s_k^l$  dans (5.42).

L'écart d'un ensemble, en l'occurrence, l'ensemble de la conclusion du système ne peut prendre une valeur négative. Cette non-négativité s'oppose à l'utilisation de l'algorithme basé sur le POG qui est à la base d'un algorithme d'optimisation linéaire sans contraintes.

Afin de prendre en compte la contrainte de non-négativité des écarts et afin de rester dans un cadre de linéarité, nous convertissons le problème d'optimisation en un programme linéaire sous contraintes [30].

- En collectant chaque ensemble de  $N$  FBFPs dans un vecteur de base flou pondéré VBFP, nous obtenons :

$$\vec{\phi}_k^l = \begin{pmatrix} \phi_k^l(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ \phi_k^l(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{\phi}_{k_{abs}}^l = \begin{pmatrix} \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ \phi_{k_{abs}}^l(\mathbf{x}^{(N)}) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

où  $k = 0, 1, \dots, p$  et  $l = 1, \dots, M$ .

- En collectant les  $N$  valeurs d'entraînement des points extrêmes droits et gauches dans des vecteurs de dimensions  $N$ ,  $\vec{Y}_R$  et  $\vec{Y}_L$ , respectivement,

Chapitre 5. Contrôleur Flou Type-2 TSK Optimisation

- tous les centres des ensembles des conclusions dans un vecteur  $\overrightarrow{Y_C}$ , et
- tous les écarts des ensembles des conclusions dans un vecteur  $\overrightarrow{S}$ .

Et sous une forme vectorielle, les points extrêmes droits donnés dans (5.41) deviennent :

$$\overrightarrow{Y_R} = \Phi \overrightarrow{Y_C} + \Phi_{abs} \overrightarrow{S} \quad (5.44)$$

et les points extrêmes gauches donnés dans (5.42) sont exprimés par :

$$\overrightarrow{Y_L} = \Phi \overrightarrow{Y_C} - \Phi_{abs} \overrightarrow{S} \quad (5.45)$$

où  $\Phi$  est donné dans (3.20), et :

$$\Phi_{abs} = \left[ \overrightarrow{\phi_{0_{abs}}^1} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi_{p_{abs}}^1} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi_{0_{abs}}^M} \quad \dots \quad \overrightarrow{\phi_{p_{abs}}^M} \right] \quad (5.46)$$

De l'expression (5.44) et (5.45), nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{Y_R} \\ \overrightarrow{Y_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{abs} \\ \Phi & -\Phi_{abs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{Y_C} \\ \overrightarrow{S} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Nous collectons les valeurs extrêmes dans le même vecteur de dimension  $2N$ ,  $\overrightarrow{Y_{RL}} = \left[ \overrightarrow{Y_R} \quad \overrightarrow{Y_L} \right]^T$ .

Nous obtenons par la suite :

$$\overrightarrow{Y_{RL}} = \Psi \overrightarrow{P} \quad (5.48)$$

avec :

$$\overrightarrow{P} = \left[ \overrightarrow{Y_C} \quad \overrightarrow{S} \right]^T$$

où  $\vec{P}$  est un vecteur de dimension  $2(p+1)M$  qui contient tous les paramètres des ensembles des conclusions du CLF TSK Type-2 A1-C1, à savoir les centres et les écarts. Et :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{abs} \\ \Phi & -\Phi_{abs} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

où  $\Psi$  est une matrice de dimensions  $2N \times 2(p+1)M$ .

En prenant chaque ensemble de  $2N$  FBFPs comme un vecteur de base flou pondéré VBFP, nous obtenons :

$$\vec{\psi}_k^l = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_k^l \\ \vec{\phi}_k^l \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{\psi}_{k_{abs}}^l = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_{k_{abs}}^l \\ -\vec{\phi}_{k_{abs}}^l \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

La matrice  $\Psi$  dans (5.49) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \vec{\psi}_0^1 & \cdots & \vec{\psi}_p^M & \vec{\psi}_{0_{abs}}^1 & \cdots & \vec{\psi}_{p_{abs}}^M \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,2(p+1)M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{2N,1} & \cdots & \psi_{2N,2(p+1)M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Notons que chaque élément de la matrice  $\Psi$  est une FBFP, et pour chaque  $i = 1, \dots, N$ , nous avons :

$$\psi_{i+N,j} = \begin{cases} \psi_{i,j} & j = 1, \dots, (p+1)M \\ -\psi_{i,j} & j = (p+1)M + 1, \dots, 2(p+1)M \end{cases} \quad (5.52)$$

Nous considérons cet ensemble de FBFPs comme un système de Chebyshev [58], [59].

### 5.5.1 Approximation de Chebyshev

Dans le sens de Chebyshev, si  $y = f(\mathbf{x})$  doit être approximée à  $(\mathbf{x}^{(i)}, y_i)$   $i = 1, \dots, n$ ,  $f(x)$  est obtenue en minimisant le maximum des normes des erreurs  $|y_i - f(\mathbf{x}^{(i)})|$ .

Dans notre cas, ceci prend la forme suivante [30], [31] :

$$\min r = \max_i (|y_i - f(\mathbf{x}^{(i)})|) \quad (5.53)$$

où :

$$f(\mathbf{x}^{(i)}) = p_1 \psi_{i,1}(\mathbf{x}^{(i)}) + \dots + p_{2M(p+1)} \psi_{i,2M(p+1)}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (5.54)$$

Notre objectif est de trouver les paramètres optimaux  $p_j$  ( $j = 1, \dots, 2(p+1)M$ ) sous la contrainte de non négativité de  $p_j$  ( $j = (p+1)M + 1, \dots, 2(p+1)M$ ).

L'approximation de Chebyshev doit être reformulée comme suit [30], [31] :

$$\min r = \max_i \left( \left| y_{rl_i} - \sum_{j=1}^{2(p+1)M} \psi_{ji} p_j \right| \right)$$

$$\text{Soumis à } \begin{aligned} r + y_{rl_i} - \sum_{j=1}^{2(p+1)M} \psi_{ji} p_j &\geq 0 \\ r - y_{rl_i} + \sum_{j=1}^{2(p+1)M} \psi_{ji} p_j &\geq 0 \\ p_k &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

avec  $i = 1, \dots, 2N$  et  $k = (p+1)M + 1, \dots, 2(p+1)M$ , où  $\psi_{ji}$  sont les éléments de la matrice  $\Psi$ , et  $y_{rl_i}$  sont les éléments du vecteur de sortie d'entraînement et  $p_k$ ,  $k = (p+1)M + 1, \dots, 2(p+1)M$ , sont les écarts des ensembles intervalles des conclusions.

Chapitre 5. Contrôleur Flou Type-2 TSK Optimisation

Le problème de minimisation (5.55) est un programme linéaire qui peut être exprimé en la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & f^T \mathbf{X} \\ \text{Soumis à} \quad & A\mathbf{X} \leq b \\ & \mathbf{X} \geq lb \end{aligned} \tag{5.56}$$

avec :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} r \\ \vec{Y}_C \\ \vec{S} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(1+2(p+1)M) \times 1} \tag{5.57}$$

et :

$$A = \begin{bmatrix} K & -\Psi \\ K & \Psi \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\vec{Y}_{RL} \\ \vec{Y}_{RL} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

et :

$$lb = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ Z \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

où :

$$K = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{2N \times 1}; \quad V = v * \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{(p+1)M \times 1}; \quad \text{et } Z = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(p+1)M \times 1}$$

où  $v$  est la valeur minimale que le centre de l'ensemble de la conclusion puisse atteindre. La sortie du CLF TSK T2I A1-C1 pour un vecteur d'entrées spécifié est exprimée par :

$$y_{A1-C1_{Cheb}}(\mathbf{x}) = \left[ \phi_0^1(\mathbf{x}), \dots, \phi_p^M(\mathbf{x}) \right] \vec{Y}_{C_{optCheb}} \tag{5.60}$$

où  $\vec{Y}_{C_{opt}Cheb} = \left[ \vec{y}_C^1 \quad \dots \quad \vec{y}_C^M \right]_{opt}^T$  contient les centres des ensembles des conclusions obtenus par l'approximation de Chebyshev sous la contrainte de non négativité des écarts de ces ensembles. L'indice *Cheb* sur  $y_{A1-C1}$  et  $\vec{Y}_{C_{opt}}$  indique que c'est la conception basée sur l'approximation de Chebyshev.

Notons que les sorties (5.40) et (5.60) sont équivalentes, mais  $\vec{Y}_{C_{opt}Cheb} \neq \vec{Y}_{C_{opt}POG}$ . Bien que les écarts des ensembles des conclusions n'apparaissent pas dans le calcul de la sortie défuzzifiée du CLF TSK T2I A1-C1, ils ont un effet sur la détermination des centres optimaux de ces ensembles, i.e., les éléments de  $\vec{Y}_{C_{opt}POG}$ . L'écart de l'ensemble,  $s_k^l$ , fournit une information sur la quantité de l'incertitude de la valeur du  $k$ ème paramètre dans la  $l$ ème règle d'un CLF TSK T2I A1-C1.

## 5.6 Prédiction d'un Système Chaotique

Le système chaotique le plus utilisé comme benchmark dans le domaine des SIFs Type-2 est la prédiction de la série temporelle de Mackey-Glass (3.36) avec un comportement chaotique, i.e.,  $\tau > 17$  [52]. Dans cette section, nous appliquons les deux méthodes d'optimisation du CLF TSK T2I A1-C1 proposées afin de prédire la série temporelle de Mackey-Glass.

Le modèle du système en question est donné par :

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{0.2s(t-\tau)}{1+s^{10}(t-\tau)} - 0.1s(t) \quad (5.61)$$

Les deux prédicteurs CLF TSK T2I A1-C1 opèrent sur les mêmes données bruitées générées en utilisant 100 signaux bruités :

$$x_i(k) = s(k) + n_i(k) \quad (5.62)$$

où  $n_i(k)$  est un bruit de mesure additif, avec  $k = 1, \dots, 2030$  et  $i = 1, \dots, 100$ .

Pour les deux méthodes de conception, nous utilisons quatre prémisses, à savoir  $x(k - 18)$ ,  $x(k - 12)$ ,  $x(k - 6)$  et  $x(k)$  pour prédire  $x(k + 6)$ .

Nous utilisons des fonctions d'appartenance Gaussiennes et le nombre de règles est égal à 16. Les échantillons  $x(100), \dots, x(623)$  sont utilisés pour concevoir les prédicteurs et les échantillons  $x(600), \dots, x(1123)$  sont utilisés pour tester les conceptions.

Nous fixons les paramètres des Gaussiennes, i.e., le centre et l'écart type des MFs, selon le moyenne et l'écart type des échantillons d'entraînement.

La Figure 5.2 illustre la série temporelle de Mackey-Glass sans bruit. La Figure 5.3 illustre les échantillons bruités utilisés pour la conception des deux prédicteurs TSK Type-2 A1-C1 Intervalle, à savoir 1) la moyenne des 100 signaux bruités,  $y_{mean}$ , qui représente les données d'entraînement entrées-sortie pour la méthode de conception basée sur le POG, et les entrées de la méthode pour la conception basée sur l'approximation de Chebyshev, et 2) les limites supérieure et inférieure des trajectoires incertaines et qui forment les données d'entraînement de sortie pour la méthode de conception basée sur l'approximation de Chebyshev.

### 5.6.1 Méthode du Principe d'Orthogonalité Généralisé

Dans la méthode d'optimisation basée sur le POG, nous déterminons uniquement les paramètres optimaux des conclusions qui interviennent dans le calcul de la sortie du CLF TSK T2I A1-C1, i.e., les centres des ensembles des conclusions. Les données d'entraînement sont obtenues en simulant les signaux bruités (5.61), (5.62) pour  $\tau = 20$  qui est un paramètre donnant un comportement très chaotique au système.

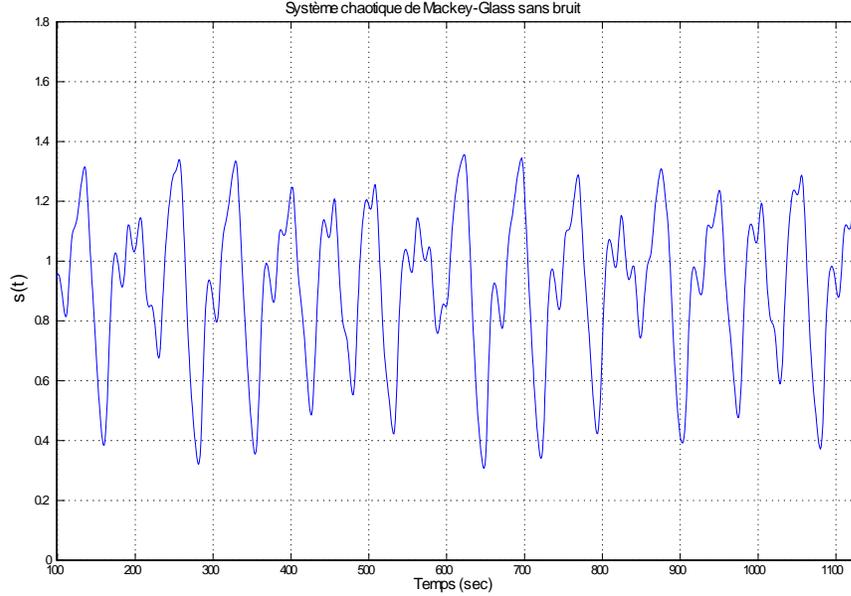


Figure 5.2. Série temporelle de Mackey-Glass sans bruit.

Le format des données d’entraînement pour cette méthode d’optimisation est :

$$\mathbf{d}_{POG}^{(k)} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x(k-18) \\ x(k-12) \\ x(k-6) \\ x(k) \end{array} \right] : x(k+6) \end{array} \right) \quad (5.63)$$

où  $x(k)$  est la valeur moyenne des échantillons bruités  $x_i(k)$ , avec  $i = 1, \dots, 100$ .

Dans cette méthode d’optimisation, il y a  $p + 1 = 5$  paramètres de conclusions à optimiser pour chaque règle, ce qui fait un nombre total de  $5 \times 16 = 80$  paramètres pour tout le système. Le Tableau 5.1 résume les centres optimaux obtenus par la méthode du POG.

La Figure 5.4 illustre les sorties du prédicteur CLF TSK T2I A1-C1 conçu avec la méthode du POG pour les 100 séries temporelles de Mackey-Glass bruitées.

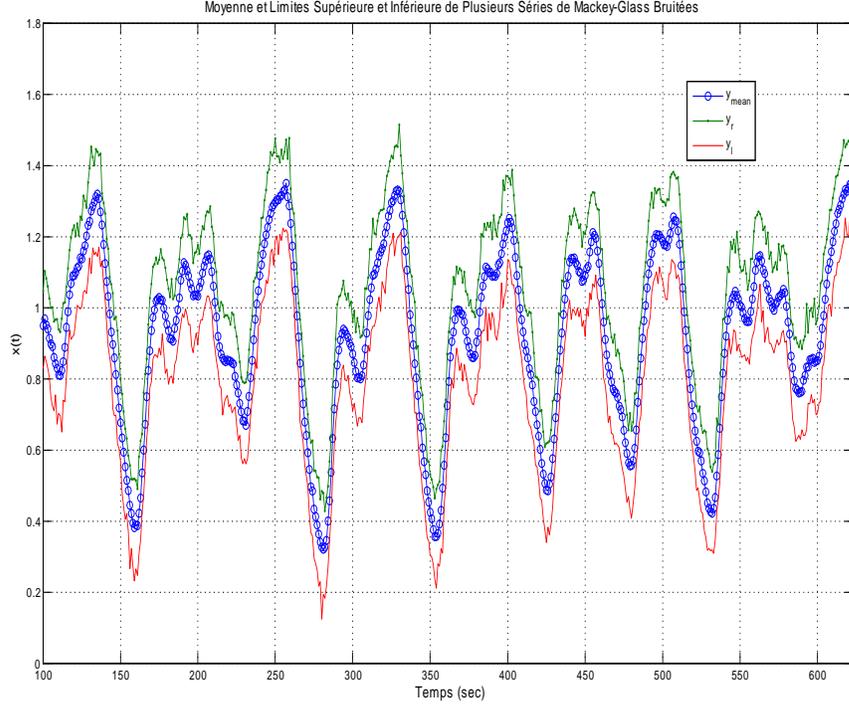


Figure 5.3. Moyenne, limites inférieure et supérieure de plusieurs séries temporelles de Mackey-Glass bruitées.

L'erreur de la moyenne quadratique (RMSE Root Square Mean Error) pour la sortie du prédicteur CLF TSK T2I A1-C1 est calculée en utilisant la formule suivante:

$$RMSE_{POG} = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{k=624}^{1123} (x(k+6) - y_{POG}(\mathbf{x}^{(k)}))^2} \quad (5.64)$$

où :

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x(k-18) & x(k-12) & x(k-6) & x(k) \end{bmatrix}^T$$

Pour évaluer la robustesse du prédicteur conçu à base du POG face à un environnement bruité, nous calculons la valeur moyenne et l'écart type des 100 RMSEs. Ces valeurs sont respectivement,  $\overline{RMSE}_{POG} = 0.0979$  et  $\sigma_{RMSE_{POG}} = 0.0050$ .

Tableau 5.1. Centres des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur le POG.

$R$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
1	0.197	0.223	-0.474	0.197	0.757
2	-0.508	0.720	0.352	0.456	0.730
3	5.954	0.555	-0.929	0.575	-8.200
4	2.241	-0.299	-1.034	1.315	-1.518
5	2.488	0.736	6.445	-10.20	-0.190
6	7.039	-1.128	-6.507	-2.461	1.701
7	4.717	0.144	-4.642	-1.3638	4.647
8	0.655	2.295	-0.982	-1.067	1.359
9	1.505	-0.433	-0.807	-1.048	1.157
10	-0.544	2.028	-2.841	-0.639	1.543
11	10.839	-6.315	3.345	-7.808	1.701
12	3.918	-2.002	-1.170	0.394	-0.033
13	-0.639	0.846	-0.633	0.496	0.135
14	8.728	-7.077	-0.417	0.077	0.454
15	0.628	0.077	-0.260	-0.705	1.518
16	0.343	-0.271	-0.291	0.200	0.613

Nous réitérons que seuls les centres des ensembles des conclusions sont optimisés avec cette méthode et les écarts de ces ensembles ne sont pas pris en considération.

### 5.6.2 Méthode de l'Approximation de Chebyshev

Nous utilisons l'approximation de Chebyshev pour optimiser cette fois les centres et les écarts des ensembles des conclusions du prédicteur CLF TSK Type-2 A1-C1.

Quand nous générons les 100 signaux bruités, nous gardons la valeur maximum et la valeur minimum de chaque échantillon pour former les limites supérieure et inférieure (Fig. 5.3) qui sont utilisées pour entraîner le prédicteur. Le format de ces

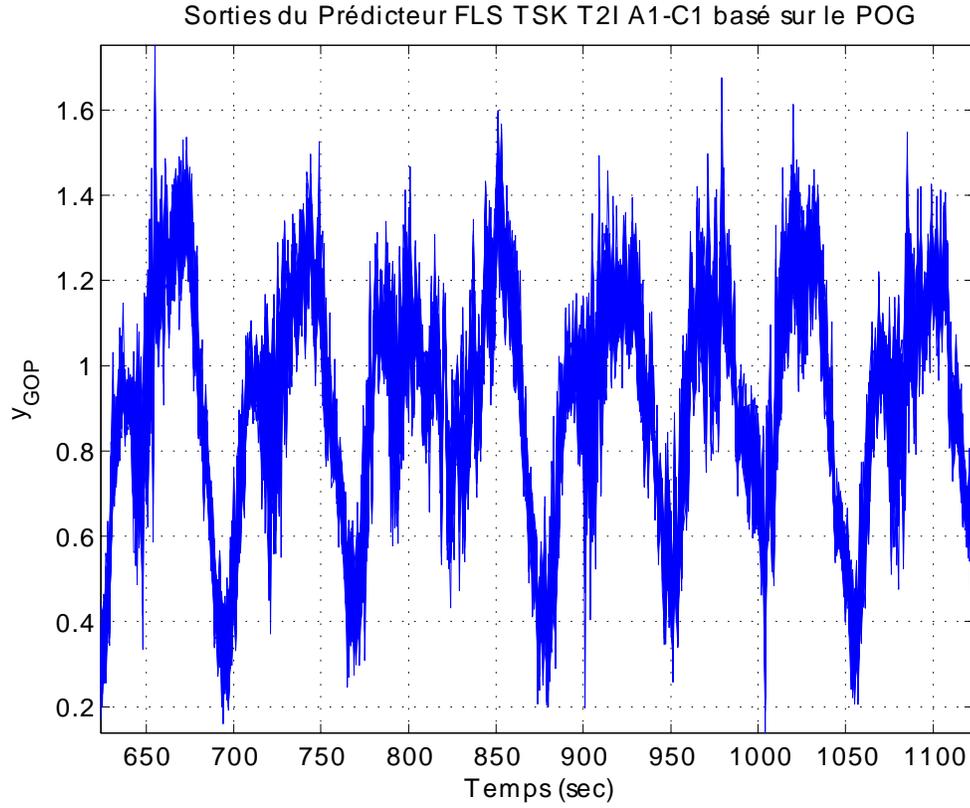


Figure 5.4. Sorties du prédicteur FLS SK T2I A1-C1 basé sur le POG.

données d'entraînement est alors donné par :

$$\mathbf{d}_{Cheb}^{(k)} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x(k-18) \\ x(k-12) \\ x(k-6) \\ x(k) \end{array} \right] : \left[ \begin{array}{c} y_l(k+6) \\ y_r(k+6) \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (5.65)$$

où  $y_l(k)$  et  $y_r(k)$  sont les points extrêmes de l'ensemble  $\mathbf{y}$ , qui contient toutes les valeurs possibles des 100 échantillons bruités.

Dans cette méthode d'optimisation, nous avons  $2(p+1) = 10$  paramètres de conclusions à optimiser pour chaque règle, ce qui donne un nombre total de  $10 \times 16 =$

160 paramètres pour tout le système dont 80 seulement qui interviennent dans le calcul de la sortie.

Les Tables 5.2 et 5.3 résument les centres et écarts des ensembles des conclusions obtenus par l'approximation de Chebyshev pour chaque règle. Les zéros dans le Tableau 5.3 approximent des valeurs très petites.

Tableau 5.2. Centres des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur la méthode de Chebyshev.

$R$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
1	1.756	-1.000	-.0331	1.009	-0.493
2	-0.521	1.119	0.557	0.195	0.557
3	1.720	-1.000	1.260	-1.000	-1.000
4	0.450	0.068	0.485	-0.386	0.575
5	0.669	1.882	1.050	-1.000	-1.000
6	-1.000	1.719	-1.000	-1.000	2.044
7	-1.000	1.567	-1.000	3.455	-1.000
8	0.629	0.969	-0.796	0.240	0.401
9	1.163	-0.781	0.229	-0.433	0.930
10	2.205	-1.000	1.712	-1.000	-0.990
11	-1.000	-1.000	0.611	3.883	-1.000
12	3.603	-1.000	-1.000	-0.601	0.066
13	1.229	-1.000	-0.134	0.927	-0.192
14	1.156	-1.000	0.967	-1.000	0.894
15	1.132	-0.895	-0.062	0.273	0.415
16	1.584	-1.000	-0.372	0.169	0.554

La Figure 5.5 illustre les sorties du prédicteur CLF TSK Type-2 A1-C1 conçu avec la méthode de Chebyshev pour les 100 séries temporelles de Mackey-Glass bruitées.

La RMSE pour chaque sortie du prédicteur CLF TSK Type-2 A1-C1 basé sur la méthode de Chebyshev est calculée en utilisant la formule suivante :

$$RMSE_{Cheb} = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{k=624}^{1123} (x(k+6) - y_{Cheb}(\mathbf{x}^{(k)}))^2} \quad (5.66)$$

Tableau 5.3. Écarts des conclusions optimaux du prédicteur TSK T2I A1-C1 basé sur l'approximation de Chebyshev.

$R$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
1	0.109	0.018	0	0	0.030
2	0.071	0	0	0.075	0
3	0	0	0	0.129	0
4	0	0.002	0.174	0	0
5	0	0.204	0	0	0
6	0	0	0.059	0.417	0
7	0	0	0	0.055	0
8	0	0.064	0	0	0.070
9	0.120	0	0	0	0
10	0	0.055	0	0	0.047
11	0	0	0	0.321	0
12	0	0	0.222	0	0
13	0	0	0.089	0	0.110
14	0	0	0	0	0.043
15	0.046	0.031	0.010	0.032	0
16	0.040	0.035	0	0	0.043

La valeur moyenne des 100 RMSEs et leur écart type obtenus par la méthode de Chebyshev sont respectivement,  $\overline{RMSE}_{Cheb} = 0.0736$  et  $\sigma_{RMSE_{Cheb}} = 0.0021$ .

Nous remarquons que la moyenne et l'écart type des 100 RMSEs obtenus des sorties prédites par le système TSK T2I A1-C1 conçu à base de l'approximation de Chebyshev sont respectivement 75,18% et 42% moins que ceux obtenus des sorties prédites par le système TSK T2I A1-C1 conçu à base du POG. Il y a donc une amélioration substantielle de la performance et de la robustesse pour le prédicteur conçu à base de l'approximation de Chebyshev par rapport au prédicteur conçu à base de la méthode du POG.

Cette amélioration peut être directement, et à vue d'œil, constatée à partir des Figures 5.4 et 5.5, où nous remarquons que l'épaisseur des tracés superposés des sorties prédites par le CLF conçu à base de l'approximation de Chebyshev est moins

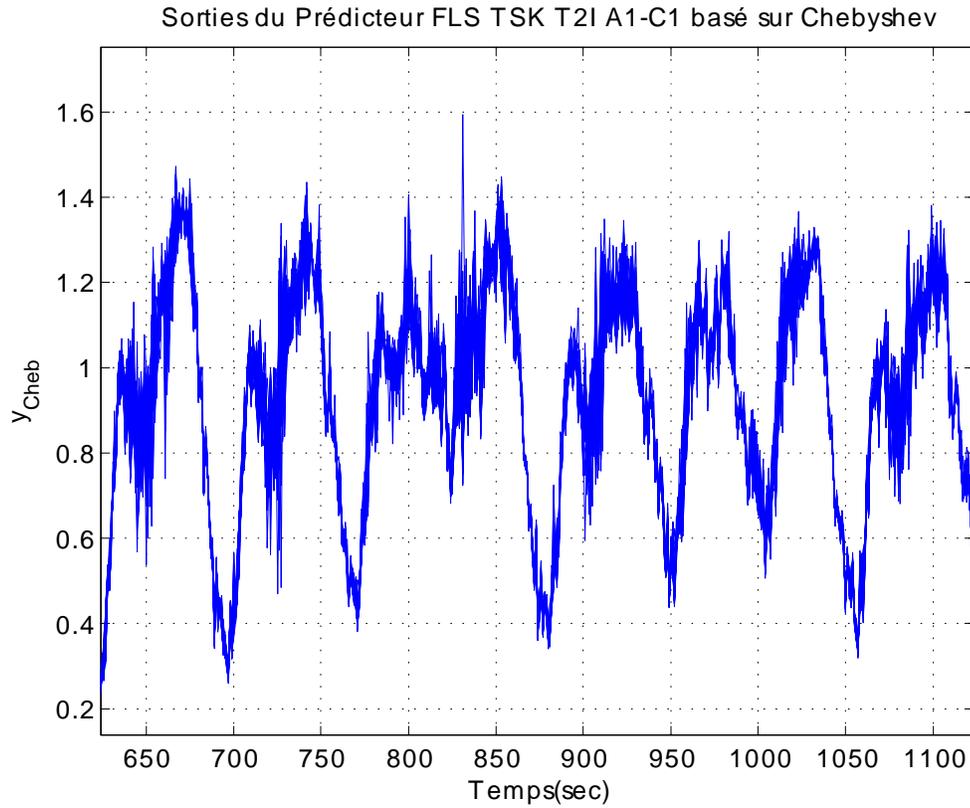


Figure 5.5. Sorties du prédicteur flou TSK T2I A1-C1 basé sur l'approximation de Chebyshev.

épaisse par rapport à celle de la superposition des sorties prédites par le CLF conçu à base du POG. La méthode de l'approximation de Chebyshev surperforme, et de loin, celle basée sur la méthode du POG. Par conséquent, le prédicteur basé sur la méthode de Chebyshev est plus robuste dans un environnement bruité que son homologue basé sur le POG. Cette robustesse est due essentiellement à la prise en compte, dans la méthode de Chebyshev, des écarts type des données incertaines qui sont introduites dans les règles du prédicteur flou, alors que la méthode du POG ne les prend pas en compte.

Nous considérons le degré chaotique de la série temporelle de Mackey-Glass ( $\tau$ ) et les niveaux de bruits comme des sources d'incertitudes [31], nous mettons  $\tau = 100$  qui est un paramètre qui rend le système encore plus chaotique, et nous ajoutons différents niveaux de bruit à la série temporelle puis nous comparons les résultats de simulation avec ceux obtenus dans [60]. Bien que dans notre cas, l'optimisation a été faite uniquement aux niveaux des conclusions, les résultats obtenus montrent la performance du prédicteur CLF TSK Type-2 A1-C1 basé sur la méthode de Chebyshev. Par exemple, la prédiction pour  $\tau = 100$  corrompu par un bruit, la RMSE obtenue est 0.13 à 30 dB de rapport signal sur bruit (SNR Signal to Noise Ratio) et 0.16 à 20 dB, qui sont des résultats qui restent proches des résultats obtenus dans le travail de [60].

## 5.7 Conclusion

L'extension du système TSK a donné naissance à trois architectures différentes selon la nature des prémisses et conclusions, ces différentes architectures ont été présentées en détail dans ce chapitre. L'un de ces trois modèles, conçu afin de prendre en compte les incertitudes par rapport aux paramètres des conclusions de son homologue Type-1, à savoir le CLF TSK T2I A1-C1, perd sa nature Type-2 quand on optimise les paramètres qui interviennent dans l'expression finale de sa sortie. Nous avons proposé dans ce chapitre, et à titre comparatif, deux méthodes d'optimisation linéaire, l'une basée sur le principe de POG et qui ne prend pas en compte les écarts des incertitudes dans les paramètres des conclusions, et l'autre basée sur l'approximation de Chebyshev et qui prend en compte ces écarts.

Afin de prédire la sortie d'un système chaotique fortement sensible aux conditions initiales, nous avons utilisé les CLFs TSK Type-2 proposés. Nous avons généré 100 signaux différents et avons comparé leurs sorties prédites avec les deux méthodes.

Bien que dans notre cas, l'optimisation a été faite uniquement aux niveaux des conclusions, les résultats obtenus ont montré que le prédicteur CLF TSK Type-2 A1-C1 basé sur la méthode de Chebyshev surperforme celui basé sur la méthode du POG.

Se basant sur les écarts types des RMSEs obtenues avec les deux prédicteurs, nous avons conclu que le prédicteur basé sur la méthode de Chebyshev est plus robuste dans un environnement bruité que son homologue basé sur le POG. Cette robustesse est due essentiellement à la prise en compte, dans la méthode de Chebyshev, des écarts type des paramètres incertains des conclusions du prédicteur flou.

L'utilisation d'un algorithme d'optimisation pour les paramètres des prémisses et des conclusions améliorerait beaucoup les résultats. Par ailleurs, l'architecture de notre modèle et la technique d'ajustement des paramètres des conclusions présentent une meilleure complexité algorithmique, puisque l'approche proposée est linéaire et permet de garder la nature Type-2 du système.

# Chapitre 6

## CLF Type-2 pour le Contrôle de Congestion dans un Réseau Cellulaire

### 6.1 Introduction

Le champ des réseaux de télécommunications est en besoin permanent de nouvelles approches et nouveaux algorithmes innovants pour répondre à la capacité croissante dans chacun de ses différents aspects; performance, sécurité, stabilité, connectivité, etc.

Les réseaux cellulaires sont des réseaux très dynamiques qui sont soumis à des surcharges et des défaillances, l'incertitude est donc inhérente à leurs paramètres [61]. Cette contrainte fait que les réseaux défient toute modélisation analytique précise. La logique floue, comme technique utilisée pour traiter cette incertitude, s'avère un outil prometteur pour dissenter les aspects des réseaux.

Dans ses débuts, l'application de la logique floue aux réseaux de télécommunications était moins étendue qu'au champ de l'automatisme. En 1917, les travaux de l'ingénieur Danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques ont donné naissance à un domaine de recherches sur la théorie des files d'attente qui se créent pour chaque cas où des clients d'un service désirent le recevoir. Dans les années 80s, plusieurs travaux de recherche [62], [63] ont souligné que dans les situations pratiques, les paramètres de la théorie des files d'attente sont fréquemment incertains et ne peuvent, par conséquent, être exprimés par des termes précis. Dans ces mêmes travaux, ont été proposées des approches floues pour la gestion des files d'attente pour être étendues par la suite à la gestion des buffers, routage, acceptation d'un appel, allocation de bande passante, affectation de canaux, gestion du réseau, évaluation quantitative des performances du réseau, etc. [64], [37].

Holtzman *et al.* [61] ont démontré aussi que l'incertitude est inhérente au trafic d'entrée et à beaucoup d'autres paramètres environnementaux d'un réseau. Ce sont ces paramètres qui sont acteurs de certains problèmes du réseau, et ils mènent à une impossibilité de modélisation analytique précise. La logique floue, comme technique utilisée pour traiter l'incertitude, s'avère un outil prometteur pour modéliser ces paramètres.

Un des aspects des réseaux cellulaires des nouvelles générations les plus cruciaux est le déploiement des ressources des services. Ces réseaux s'aiguillent de plus en plus vers une architecture où différents types de services avec différentes exigences en Qualité de Service (QoS) coexistent. Quand un utilisateur est admis dans un service d'un réseau cellulaire, une dégradation dans la QoS se produit pour tous les autres utilisateurs. Ce phénomène appelé *phénomène d'externalité négative*, et qui augmente avec l'augmentation du nombre d'utilisateurs demandant les différents services, mène au problème indésirable de *congestion*. Ce problème de congestion, qui nuit sérieusement au fonctionnement du réseau, ne peut malheureusement pas

être traité par le contrôle d'admission des appels (CAC pour Call Admission Control en Anglais) qui est le seul mécanisme responsable sur l'acceptation ou le rejet des appels.

Plusieurs travaux de recherche ont montré que la meilleure façon d'éviter la congestion inespérée dans un réseau est de décourager les sur-allocations de ses ressources. Ce découragement peut être obtenu en influant les utilisateurs selon les conditions courantes du réseau. Ces incitations peuvent être produites en implémentant des politiques de tarification appropriées qu'on appellera *incitation monétaire* [32], [33], [34], [35], [36], poussant les utilisateurs à changer leurs comportements et leurs façons d'utiliser les ressources selon la charge du réseau. Durant les périodes de congestion du réseau, le prix de l'unité d'appel augmente, ce qui incite les utilisateurs à ne pas effectuer leurs appels en ce moment et rappeler plus tard – s'ils veulent bien sûr - et du coup éviter la sur-allocation des ressources. Durant les périodes normales, c.-à-d. les périodes de non-congestion, l'appel revient à son prix normal, ce qui encourage les utilisateurs à effectuer normalement leurs appels et donc allouer les ressources disponibles. *C'est une politique qui permet l'utilisation effective et efficace des ressources du réseau.*

Dans cette optique, nous introduisons une nouvelle dimension au CAC en implémentant un mécanisme basé essentiellement sur un contrôleur d'inférence floue répondant à la politique d'incitation monétaire. Afin de gérer rigoureusement le réseau et réguler le trafic entrant au CAC, ce contrôleur ajuste le prix des appels en fonction des conditions du réseau, ce qui permettrait de maintenir le trafic toujours inférieur ou égal à une charge qu'on qualifiera comme optimale, et du coup éviter la congestion dans le réseau pour atteindre la QoS requise.

Nous utilisons dans un premier temps des ensembles flous Type-1 pour modéliser les paramètres qui occasionnent la congestion dans le réseau cellulaire. Et se basant sur le travail de recherche de Tanaka *et al.* [64], là où il a été remarqué la difficulté

de l'obtention des FAs appropriées pour un contrôle effectif dans un réseau, nous proposons des ensembles flous Type-2 pour dissiper l'incertitude dans le réseau cellulaire. Un contrôleur à logique floue Type-2 est alors implémenté pour contrôler le prix de l'unité d'appel afin d'utiliser les ressources du réseau de façon efficace et effective.

## 6.2 Généralités sur les Paramètres d'un Réseau Cellulaire

Dans un réseau cellulaire, l'appel est l'unité de données du trafic. On retrouve deux sortes d'appels dans une cellule, le *nouvel appel* et le *Handover*.

### 6.2.1 Nouvel appel

Les nouveaux appels sont les appels initiés à la demande des utilisateurs qui viennent juste d'accéder au réseau. L'arrivée des nouveaux appels dans un réseau cellulaire suit un processus Poissonnien d'intensité  $\lambda_n$ . Des estimations sur le taux d'arrivée des nouveaux appels,  $\lambda_n$  pendant les 24 heures de la journée ont été faites par plusieurs chercheurs. Les Figures 6.1 et 6.2 illustrent deux courbes modélisant ce taux. Les courbes estimées par Fitkov *et al.* [65] et Hou *et al.* [66] sont basées sur la valeur moyenne de l'arrivée des nouveaux appels calculée pendant 9 jours.

### 6.2.2 Appel Handover

Quand le canal radio utilisé par un terminal mobile est changé, on parle d'un Handover. Au moment où le mobile traverse la région de croisement de deux régions de

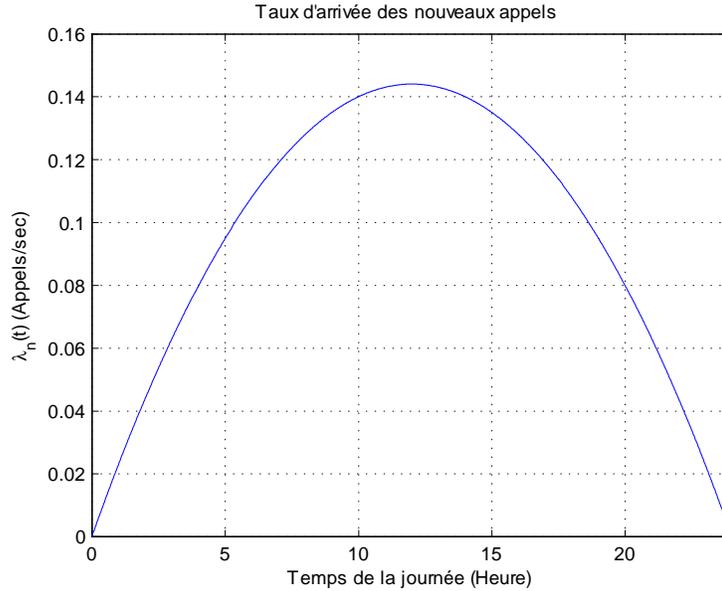


Figure 6.1. Estimation du taux d'arrivée des nouveaux appels dans un réseau cellulaire selon Hou *et al.*

recouvrement, l'appel Handover s'initie. Pendant l'intervalle de dégradation, i.e., le temps mis par le mobile dans la région d'entrelacement, l'appel peut être traité par deux stations et le Handover commence dès que la puissance reçue par la station de base d'une cellule voisine dépasse celle de la station de base courante [67]. La valeur de dépassement est le seuil du Handover  $S_H$ , et le Handover s'établit avec succès quand un canal est alloué à la requête Handover avant que le rapport des puissances reçues par le mobile atteigne le seuil de réception  $S_R$ , i.e., le seuil du rapport de puissances reçues au dessous duquel une communication acceptable avec la station de base de la cellule courante n'est plus possible [67].

Entre les points  $t_0$  et  $t_1$  (Fig. 6.3), le rapport des puissances reçues par la station de base courante et voisine,  $R_p$ , appartient à l'ensemble  $[S_R, S_H]$ , le mobile traverse dans ce cas la région du Handover.

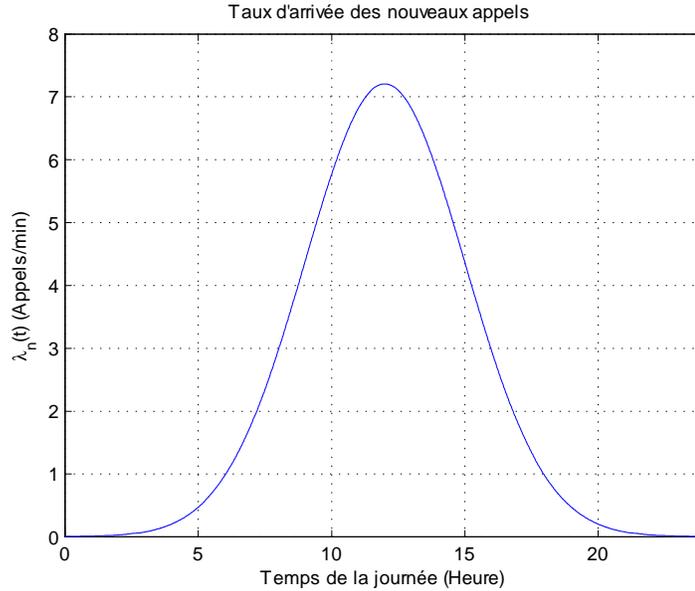


Figure 6.2. Estimation du taux d'arrivée des nouveaux appels selon Fitkov *et al.*

L'arrivée des Handover dans un réseau cellulaire suit un processus Poissonnien d'intensité  $\lambda_h$ . Le taux d'arrivée des appels Handover,  $\lambda_h$  est en général fonction de 1)  $\lambda_n$ , 2) du temps de séjour des utilisateurs mobiles dans une cellule,  $T_{dwell}$  qui est supposé être exponentiellement distribué de moyenne  $1/\eta$ , et 3) de la durée d'un appel voix,  $T_{call}$  qui est supposée être exponentiellement distribuée de moyenne  $1/\mu$ .

Il est à noter que le temps d'occupation d'un canal dans une cellule est le minimum de  $T_{dwell}$  et de  $T_{call}$ . Par conséquent, le temps d'occupation d'un canal par un appel voix  $T_v$  est exponentiellement distribué de moyenne :

$$\frac{1}{\mu_v} = \frac{1}{\mu + \eta} \quad (6.1)$$

.Plusieurs modèles de Handover, basés sur des hypothèses de la mobilité des utilisateurs, ont été élaborés [68], [69], [70], [71], [72]. Le modèle du taux d'arrivée des appels Handover utilisé dans notre travail est, sans restreindre la généralité, celui de

Zeng *et al.* [72]. Ce taux est exprimé par l'équation suivante :

$$\lambda_h = \frac{\eta}{\mu} \lambda_n \quad (6.2)$$

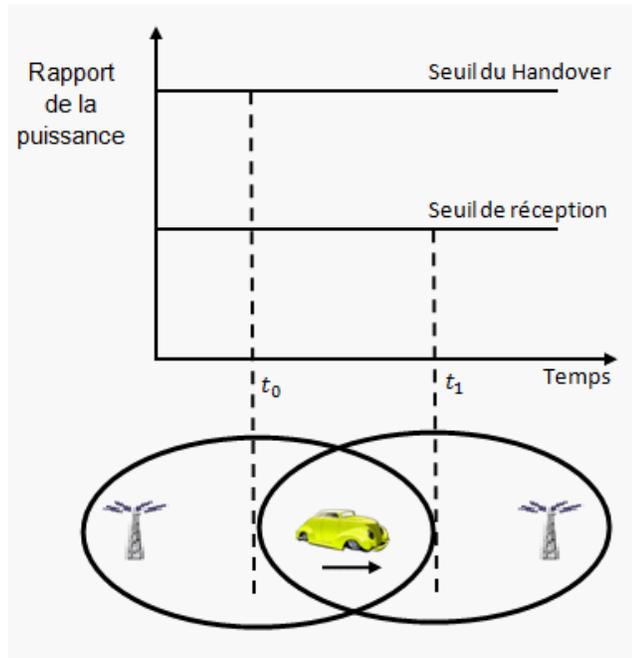


Figure 6.3. Processus du Handover.

Les utilisateurs du réseau cellulaire sont plus sensibles à la coupure d'un appel qu'à son rejet. Par conséquent, les appels Handovers sont généralement traités de façon plus prioritaire par rapport aux nouveaux appels. La plupart des cellules contient des canaux de garde réservés exclusivement aux Handovers.

### Priorité des Appels Handovers

Dans un réseau cellulaire, les utilisateurs rebutent la terminaison forcée d'un appel. Afin de réduire la probabilité de blocage d'un Handover, plusieurs travaux de recherche ont porté sur la priorité des Handovers. Ces travaux ont permis d'améliorer

la performance du réseau où l'appel Handover est traité de la même manière que le nouvel appel, un tel réseau est représenté par le schéma standard de non priorité (Non-Prioritized Scheme NPS), dont l'organigramme est représenté sur la Figure 6.4.

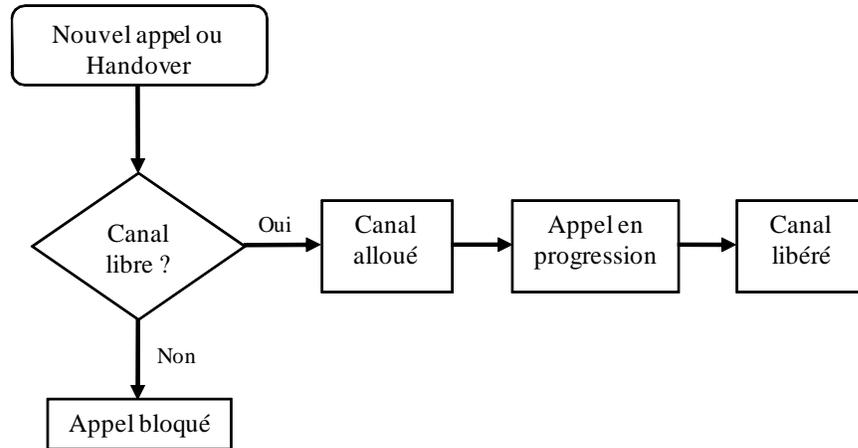


Figure 6.4. Organigramme du schéma standard NPS.

Une stratégie de priorité souvent utilisée est la réservation des canaux de garde (Reserved Channel Scheme RCS) [67]. Dans cette stratégie, des canaux de garde dans chaque cellule sont exclusivement réservés aux Handovers. De plus, les autres canaux sont destinés aux nouveaux appels et aussi aux Handovers. L'organigramme d'une telle stratégie pour les Handovers est illustré sur la Figure 6.5, et pour les nouveaux appels est illustré sur la Figure 6.6, où  $C$  est le nombre des canaux dans la cellule et  $g$  est le nombre des canaux de garde.

Dans ce cas, le nouvel appel n'est accepté que si le nombre de canaux occupés est inférieur à  $C - g$ , alors qu'un Handover est accepté dès qu'il y ait un canal libre, qu'il soit exclusivement réservé à lui ou non.

Nous utilisons dans notre travail la stratégie de priorité RCS, raison pour laquelle

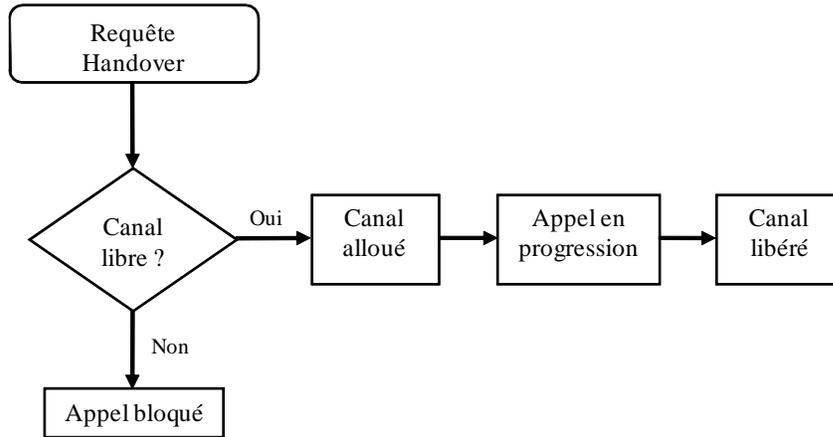


Figure 6.5. Organigramme de la stratégie RCS pour les Handovers.

nous donnons son modèle dans ce qui suit.

### 6.2.3 Modèle d'un Schéma RCS

Soit  $X_t$  une variable aléatoire définissant l'état d'une cellule au temps  $t$  et est le nombre des canaux occupés dans cette cellule.  $X_t$  est une chaîne de Markov à temps continu et à états discrets.

$X$  prend les valeurs de  $i$  tels que  $i \in [0, \dots, C]$ . Le passage de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  avec  $0 \leq i \leq C - g - 1$ , comme illustré sur la Figure 6.7, se produit quand un nouvel appel ou un Handover arrive.

Nous avons vu que la stratégie RCS (Fig. 6.6) attribue le niveau de blocage  $C - g$  pour les nouveaux appels. Cependant, le passage de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  avec  $C - g \leq i \leq C - 1$  se produit quand un Handover arrive. Par ailleurs, le passage de l'état  $i + 1$  à l'état  $i$  avec  $0 \leq i \leq C - g - 1$  se produit suite au départ de l'un des  $i + 1$  appels servis avec un temps de service  $T_v$  [67].

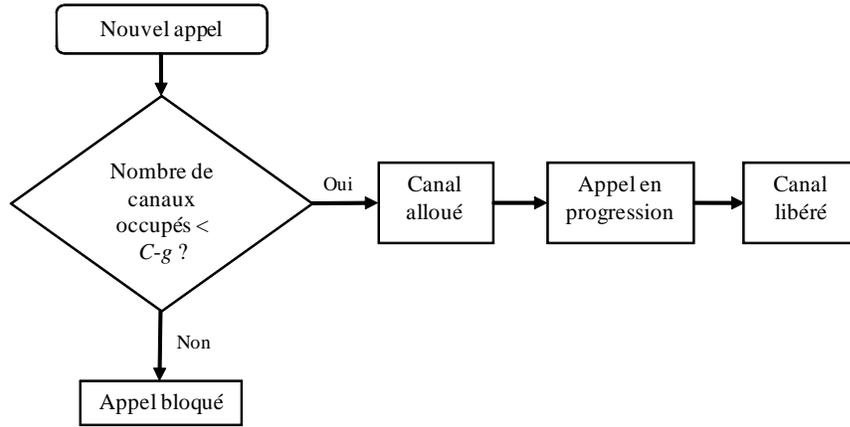


Figure 6.6. Organigramme de la stratégie RCS pour les nouveaux appels.

### Métrique de la Performance d'un Réseau Cellulaire

Une des métriques principales permettant d'évaluer la performance d'un réseau cellulaire est la probabilité de blocage  $P_b$ . L'expression de la probabilité de blocage est obtenue à partir de la résolution des équations de Kolmogorov (6.3) à l'état stationnaire. Ces équations sont données par  $\mu_s A = 0$ , où  $A$  est le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov (Fig. 6.7) et  $\mu_s$  est la distribution stationnaire [67].

$$\begin{aligned}
 (\lambda_n + \lambda_h) \pi_0 &= \mu_s \pi_1 \\
 &\vdots \\
 (\lambda_n + \lambda_h) \pi_{C-g-1} + (C - g + 1) \mu_s \pi_{C-g+1} &= (\lambda_h + (C - g) \mu_s) \pi_{C-g} \quad (6.3) \\
 \lambda_h \pi_{C-g} + (C - g + 2) \mu_s \pi_{C-g+2} &= (\lambda_h + (C - g + 1) \mu_s) \pi_{C-g+1} \\
 &\vdots \\
 \lambda_h \pi_{C-1} &= C \mu_s \pi_C
 \end{aligned}$$

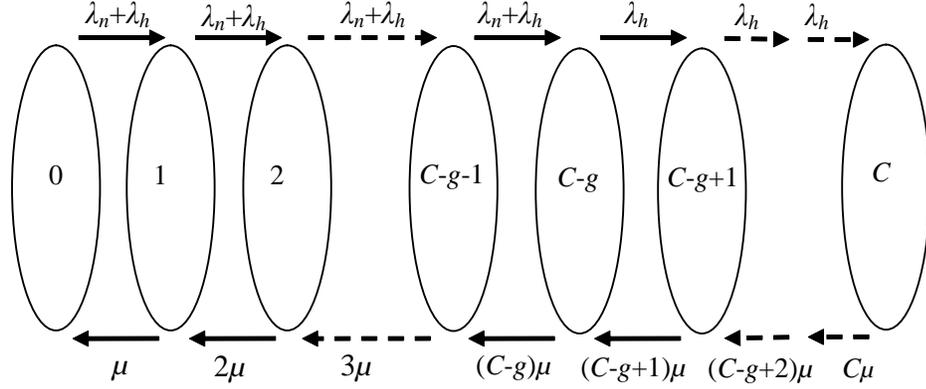


Figure 6.7. Graphe associé au générateur de la chaîne de Markov pour la stratégie RCS.

Soit  $\rho$  une charge définie par :

$$\rho = \frac{\lambda_n + \lambda_h}{\mu_s} \quad (6.4)$$

Les probabilités stationnaires en sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{\rho^i}{i!} \pi_0, \quad 0 \leq i \leq C - g \\ \pi_{C-g+j} &= \frac{\rho^{C-g}}{(C - g + j)!} \left( \frac{\lambda_h}{\mu_s} \right)^j \pi_0, \quad 1 \leq j \leq g \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec :

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{C-g} \frac{\rho^i}{i!} + \rho^{C-g} \sum_{j=1}^{g-1} \frac{1}{(C-g+j)!} \left( \frac{\lambda_h}{\mu_s} \right)^j}$$

Dans un réseau cellulaire, il existe une probabilité de blocage des nouveaux appels,  $P_{bn}$ , et une probabilité de blocage des Handovers,  $P_{bh}$ .

Dans la stratégie RCS, 1) un nouvel appel est bloqué si le nombre total de canaux

occupés  $i \geq C - g$ . Sa probabilité de blocage  $P_{bn}$  est exprimée par :

$$\begin{aligned} P_{bn} &= \sum_{i=0}^g \pi_{C-g+i} \\ &= \pi_{C-g} + \pi_{C-g+1} + \dots + \pi_C \end{aligned} \quad (6.6)$$

2) un appel Handover est bloqué si tous les canaux sont occupés. Sa probabilité de blocage  $P_{bh}$  est exprimée par :

$$\begin{aligned} P_{bh} &= \pi_C \\ &= \frac{\rho^{C-g}}{C!} \left( \frac{\lambda_h}{\mu_s} \right)^g \pi_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Des expressions (6.6) et (6.7), on remarque que  $P_{bn} > P_{bh}$ .

## 6.2.4 Contrôle d'Admission des Appels

Le contrôle d'admission des appels (CAC pour Call Admission Control) est le mécanisme responsable sur la régulation du volume du trafic dans les communications vocales dans les réseaux mobiles sans fil ou dans la téléphonie VoIP (Voice over Internet Protocol). Il est le processus responsable sur le maintien d'un certain niveau de qualité audio dans les réseaux de communications vocales ou un certain niveau de performance dans les nœuds d'Internet et les serveurs dans le cas de la VoIP. Le CAC régule la bande passante totale utilisée, le nombre total d'appels ou le nombre total de paquets de données afin de ne pas dépasser un taux spécifié. Si le seuil déterminé est atteint, un nouvel appel est interdit d'accéder au réseau jusqu'à ce qu'au moins un appel en cours soit achevé.

L'architecture standard d'un CAC est donnée sur la Figure 6.8.

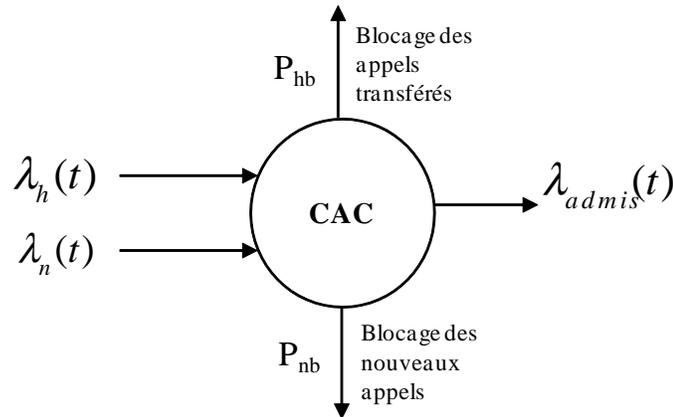


Figure 6.8. Architecture conventionnelle du CAC.

### 6.3 Fonction d'Utilité et Exigences en QdS

La mobilité des utilisateurs et la conception des réseaux mobiles basée sur les cellules rendent la tâche du CAC très compliquée. Un appel qui vient d'être émis - *nouvel appel* - peut être accepté ou rejeté, selon la disponibilité des canaux, les utilisateurs du réseau sont sensibles au rejet de l'appel. Si un utilisateur dont l'appel a été accepté mais qui ne l'ait pas terminé dans la cellule courante, son appel doit être transféré à une autre cellule -*appel handover*-. Mais cet appel peut ne pas avoir un canal disponible dans la nouvelle cellule pour assurer la continuité du service, l'appel est par conséquent bloqué, les utilisateurs du réseau sont encore plus sensibles à ce blocage d'appel. La haute sensibilité des utilisateurs au rejet et au blocage des appels fait de la probabilité de blocage la *métrique principale* de la QdS dans un réseau cellulaire.

Les normes du Comité Consultatif International Téléphonique et Télégraphique (CCITT) E.800 décrivent la QdS comme étant l'effet collectif de la performance du

service qui détermine le degré de satisfaction d'un utilisateur de service. Cette description relie directement la QoS à la perception de l'utilisateur du réseau. Pour quantifier cette relation, nous utilisons les concepts de la fonction d'utilité qui modélise la satisfaction de l'utilisateur. Dans les réseaux cellulaires, cette utilité est fonction décroissante de la métrique principale de la QoS qui n'est autre que la probabilité de blocage des appels.

Dans cette section, nous montrons que pour un taux d'arrivée des nouveaux appels donné, qu'on qualifiera comme charge optimale, l'utilité de l'utilisateur peut être maximisée et la QoS requise peut être atteinte et au-delà de cette charge les performances du réseau s'écroulent menant à sa congestion [66], [38].

Dans tout ce qui suit, NCAR signifie le taux d'arrivée des nouveaux appels (pour New Call Arrival Rate en Anglais), et HCAR signifie le taux d'arrivée des appels Handover (pour Handover Call Arrival Rate en Anglais).

### 6.3.1 Utilisateurs Acceptés *Fonction du NCAR*

Dans le mécanisme du CAC conventionnel, si nous supposons que les utilisateurs bloqués ne refont pas leurs appels et quittent le système, les deux entrées du CAC sont le NCAR,  $\lambda_n$ , et le HCAR,  $\lambda_h$ . Soit  $N$  le nombre moyen des utilisateurs acceptés dans le système. La fonction  $N$  est alors une fonction continue monotone croissante différentiable de  $\lambda_n$  [66], [38]. Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\lambda_n) < C; \quad f'(\lambda_n) > 0 \\ f(\lambda_n = 0) = 0; \quad \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} f(\lambda_n) = C \end{aligned} \tag{6.8}$$

où  $C$  est le nombre des canaux attribués à chaque cellule.

### 6.3.2 Probabilité de Blocage *Fonction du NCAR*

Il est à noter que les utilisateurs du réseau cellulaire sont plus sensibles à la coupure d'un appel (blocage du Handover ou terminaison forcée) qu'au rejet d'un nouvel appel. La probabilité de blocage totale,  $P_b$ , est la somme pondérée de la probabilité de blocage des nouveaux appels,  $P_{bn}$ , et de la probabilité de blocage des appels Handover,  $P_{bh}$  :

$$P_b = \alpha P_{bn} + \beta P_{bh} \quad (6.9)$$

où  $\alpha$  représente la pénalité associée au rejet des nouveaux appels et  $\beta$  représente la pénalité associée au rejet des Handovers. On attribue à  $\beta$  une valeur supérieure à celle de  $\alpha$ , ce qui se traduit par la favorisation des appels Handovers.

Il est clair que  $P_{bn}$  et  $P_{bh}$  sont toutes les deux des fonctions monotones croissantes de  $\lambda_n$ , ce qui permet de conclure que  $P_b = g(\lambda_n)$  est aussi une fonction monotone croissante de  $\lambda_n$  et a les propriétés suivantes [66], [38] :

$$\begin{aligned} 0 \leq g(\lambda_n) < 1; \quad g'(\lambda_n) > 0; \\ g(\lambda_n = 0) = 0; \quad \lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} g(\lambda_n) = 1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

### 6.3.3 Utilité Singulière *Fonction de Probabilité de Blocage*

La satisfaction de l'utilisateur d'un service est caractérisée par la fonction d'utilité. Cet utilisateur est moins satisfait quand la probabilité de blocage est à sa valeur maximale. Ce qui conduit à modéliser cette utilité en fonction de la probabilité de blocage. Quand la probabilité de blocage des appels augmente la satisfaction de l'utilisateur diminue, quand la probabilité de blocage diminue la satisfaction de l'utilisateur augmente. La fonction d'utilité singulière (d'un seul utilisateur),  $U_s$ , est alors une fonction monotone décroissante de la métrique principale de la QoS,  $P_b$ .

La fonction  $U_s = h(P_b)$  possède les propriétés suivantes [66], [38] :

$$h(P_b) \geq 0; \quad h'(P_b) < 0; \quad h''(P_b) < 0 \quad (6.11)$$

Nous déduisons deux valeurs significatives pour la fonction d'utilité singulière :

- Quand la probabilité de blocage des appels est nulle, l'utilisateur possède le degré de satisfaction le plus haut, ce qui signifie que  $U_s$  atteint sa valeur maximale  $U_s^{\max}$  à  $P_b = 0$ , i.e.,  $U_s(P_b = 0) = U_s^{\max}$ .
- Quand la probabilité de blocage est très élevée, l'utilisateur possède le degré de satisfaction le plus bas,  $U_s(P_b \geq P_b^{\max}) = 0$ , où  $P_b^{\max}$  est la valeur maximale de  $P_b$  qui peut être atteinte telle que la QoS est considérée comme acceptable [38].

### 6.3.4 Utilité Totale *Fonction du NCAR*

La fonction d'utilité totale,  $U$ , est l'utilité singulière de tous les utilisateurs admis dans le service. Elle est exprimée en fonction de NCAR :

$$\begin{aligned} U &= N \times U_s \\ &= f(\lambda_n) \times h(P_b) \\ &= f(\lambda_n) \times h(g(\lambda_n)) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Du fait de la continuité des fonctions  $N$  et  $U_s$  sur l'intervalle fermé  $[0, \lambda_n^{\max}]$ , la fonction d'utilité totale (6.12) est aussi une fonction continue sur cet intervalle. Selon le théorème des bornes, la fonction d'utilité totale doit atteindre sa valeur maximale et minimale au moins une fois dans cet intervalle. Nous voyons que la valeur minimale de la fonction positive d'utilité ( $U = 0$ ) est atteinte deux fois, notamment quand :

**Cas 1**  $\lambda_n = 0$  : ce qui signifie qu'il n'y a aucun utilisateur dans le système,  $N = 0$ .

**Cas 2**  $\lambda_n = \lambda_n^{\max}$  : ce qui signifie que l'utilité singulière devient nulle,  $U_s = 0$ .

La fonction d'utilité totale atteint alors sa valeur minimale aux bornes de l'intervalle fermé  $[0, \lambda_n^{\max}]$ . Selon le théorème des bornes, il est évident que la valeur maximale de la fonction d'utilité totale se situe nécessairement dans l'intervalle ouvert  $]0, \lambda_n^{\max}[$ . Ce qui conduit à déduire que pour un réseau cellulaire spécifié, il existe nécessairement une valeur optimale du NCAR que nous noterons  $\lambda_n^*$ , et qui maximise l'utilité totale  $U$  [66], [38].

L'état du réseau possède donc trois cas principaux :

1.  $\lambda_n < \lambda_n^*$  : Les utilisateurs peuvent avoir une meilleure qualité que leur exigence en QoS, mais les ressources du réseau ne sont pas entièrement utilisées. Du point de vue utilisateur, il y a grande satisfaction, du point de vue opérateur, il y a moins de revenu.
2.  $\lambda_n > \lambda_n^*$  : Un grand nombre d'utilisateurs est bloqué quand ils essayent d'effectuer leurs appels ou quand ils essayent de basculer vers une autre cellule au milieu d'un appel. Ceci engendre la dégradation de la QoS jusqu'à ce qu'elle devienne inacceptable. A partir de ce point, la QoS décroît avec la croissance de  $\lambda_n$ .
3.  $\lambda_n = \lambda_n^*$  : Le nombre des utilisateurs satisfaits est maximisé et la majorité des ressources du réseau sont efficacement utilisées. *C'est la charge du trafic pour le fonctionnement idéal du système.*

Pour forcer le système à opérer à cette charge optimale quand le trafic d'entrée dépasse  $\lambda_n^*$  aux moments de congestion, nous proposons un mécanisme comme nouvelle dimension au CAC qui permettrait d'ajuster le prix en fonction de la charge du réseau. Et vu que l'incertitude est inhérente aux paramètres du trafic d'entrée, le mécanisme qu'on implémente est un contrôleur de logique floue.

## 6.4 Mécanisme Flou pour Eviter la Congestion

Le mécanisme proposé dans cette section est basé sur un contrôleur flou. Ce contrôleur régule le trafic entrant au CAC en ajustant le prix de l'unité d'appel en fonction de la charge courante du réseau.

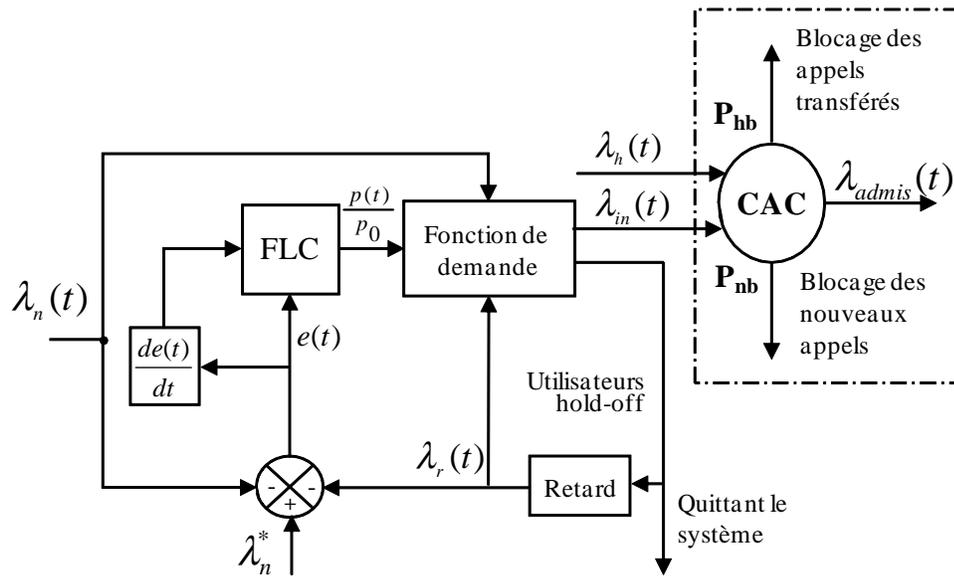


Figure 6.9. Schéma du CLF proposé pour éviter la congestion dans un réseau cellulaire.

Durant les heures de congestion, quand les suppléments de prix sont demandés aux utilisateurs, si des utilisateurs n'acceptent pas le tarif courant ils n'émettent pas leurs appels. Ces utilisateurs peuvent émettre leurs appels après un certain moment, quand les conditions du réseau changent. Ceci génère un autre flux de trafic au bloc de demande (Fig. 6.9) qui est le trafic des ré-appelants dont le taux d'arrivée  $\lambda_r$  est fonction du retard et des autres taux du trafic.

## Contrôleur de Logique Floue

Ayant pour objectif de maintenir la charge du réseau à sa valeur optimale  $\lambda_n^*$ , le CLF a deux entrées :

1. La charge du réseau *Network Load (NL)*,  $\lambda_n^* - (\lambda_n(t) + \lambda_r(t))$

C'est la différence entre le point opérationnel optimal du système  $\lambda_n^*$  et la charge du réseau courante. Notons que le taux d'arrivée des appels Handover n'est pas considéré dans cette charge parce que les Handovers ne sont pas concernés par le nouveau prix du moment que leur opération est gérée par le prix imposé lors du début d'appel, le prix de l'unité d'appel ne change pas durant l'appel.

Cette entrée du contrôleur est modélisée par quatre ensembles flous :

1. Une charge légère *Light Load (LL)* : Aux moments de non congestion, i.e.,  $\lambda_n(t) + \lambda_r(t) < \lambda_n^*$ ,
2. une charge moyenne *Medium Load (ML)* : Quand la cellule tend à être congestionnée,
3. une charge importante *Heavy Load (HL)* : Quand la cellule est à peine congestionnée, i.e.,  $\lambda_n(t) + \lambda_r(t) > \lambda_n^*$ , et
4. une charge très importante *Very Heavy Load (VHL)* : Quand la cellule est fortement congestionnée, i.e.,  $\lambda_n(t) + \lambda_r(t) \gg \lambda_n^*$ .

2. La dérivée de la charge du réseau *Variation Network Load (VNL)*,

$$(\lambda_n^* - (\lambda_n(t) + \lambda_r(t)))'$$

La variation de la charge du réseau permet de donner une idée sur l'augmentation ou la diminution de la charge dans le système, ce qui permet de fixer minutieusement le prix. Cette entrée du contrôleur flou est modélisée par trois ensembles flous :

1. *Positive (Pos)*, Quand la charge du trafic décroît et la cellule tend à revenir à son état de non-congestion,
2. *Zéro*, quand la charge du réseau est à peu près constante et,
3. *Négative (Neg)*, la charge du réseau est en croissance, ce qui signifie que la cellule du réseau tend à être congestionnée.

La sortie du CLF,  $rap\_prix$ , est le rapport du prix  $p(t)/p_0$  où  $p_0$  est le prix initial de l'unité de l'appel et  $p(t) \geq p_0$  est la somme du prix initial et le supplément de prix chargé aux utilisateurs à l'instant  $t$ . Nous avons deux états :

- Le rapport du prix doit être égal à 1 dans les périodes de non-congestion, i.e., il n'y a aucun supplément et  $p(t) = p_0$ .
- Le rapport du prix doit dépasser 1 aux moments de congestion,  $p(t) > p_0$ .

### Contrôleur Flou Type-1

On utilise dans un premier temps un CLF Type-1 de type TSK d'ordre zéro, i.e., la conclusion est une valeur scalaire et non une fonction de l'entrée. Les fonctions d'appartenance utilisées pour les prémisses sont de formes trapézoïdales et triangulaires, elles sont tracées en lignes continues sur les Figures 6.12 et 6.13.

La base de règles du CLF contient 12 règles. La lème règle du système flou est exprimée par :

$$R^l : \text{SI } NL \text{ est } F_1^l \text{ ET } VNL \text{ est } F_2^l \text{ ALORS } rap\_prix = c^l$$

où  $F_1^l = \{LL, ML, HL, VHL\}$ ,  $F_2^l = \{Neg, Zer, Pos\}$  et  $l = 1, \dots, 12$ . Les règles sont alors :

- $R^1$  : SI  $NL$  est  $LL$  ET  $VNL$  est  $Neg$  ALORS  $rap\_prix = c^1$
- $R^2$  : SI  $NL$  est  $LL$  ET  $VNL$  est  $Zer$  ALORS  $rap\_prix = c^2$
- $R^3$  : SI  $NL$  est  $LL$  ET  $VNL$  est  $Pos$  ALORS  $rap\_prix = c^3$
- $R^4$  : SI  $NL$  est  $ML$  ET  $VNL$  est  $Neg$  ALORS  $rap\_prix = c^4$
- $R^5$  : SI  $NL$  est  $ML$  ET  $VNL$  est  $Zer$  ALORS  $rap\_prix = c^5$
- $R^6$  : SI  $NL$  est  $ML$  ET  $VNL$  est  $Pos$  ALORS  $rap\_prix = c^6$
- $R^7$  : SI  $NL$  est  $HL$  ET  $VNL$  est  $Neg$  ALORS  $rap\_prix = c^7$
- $R^8$  : SI  $NL$  est  $HL$  ET  $VNL$  est  $Zer$  ALORS  $rap\_prix = c^8$
- $R^9$  : SI  $NL$  est  $HL$  ET  $VNL$  est  $Pos$  ALORS  $rap\_prix = c^9$
- $R^{10}$  : SI  $NL$  est  $VHL$  ET  $VNL$  est  $Neg$  ALORS  $rap\_prix = c^{10}$
- $R^{11}$  : SI  $NL$  est  $VHL$  ET  $VNL$  est  $Zer$  ALORS  $rap\_prix = c^{11}$
- $R^{12}$  : SI  $NL$  est  $VHL$  ET  $VNL$  est  $Pos$  ALORS  $rap\_prix = c^{12}$

La sortie du CLF Type-1 peut être exprimée comme une expansion en série de FBFs :

$$\begin{aligned}
 y_{TSK,1}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{12} c^l \left( \frac{T_{i=1}^2 \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^{12} T_{i=1}^2 \mu_{F_i^l}(x_i)} \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{12} c^l \phi_l(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

où  $f^l(\mathbf{x})$  ( $l = 1, \dots, 12$ ) sont les niveaux d'activation des règles, exprimés par :

$$f^l(\mathbf{x}) = \mu_{F_1^l}(x_1) \cdot \mu_{F_2^l}(x_2) \tag{6.14}$$

Les paramètres des conclusions  $c^l$  ( $l = 1, \dots, 12$ ) dans (6.13) sont optimisés en utilisant le principe d'orthogonalité généralisé.

Chapitre 6. CLF Type-2 pour le Contrôle de Congestion dans un Réseau Cellulaire

Soit un ensemble de 19 données d'entraînement,  $(\mathbf{x}^{(1)} : y^{(1)})$ ,  $(\mathbf{x}^{(2)} : y^{(2)})$ , ...,  $(\mathbf{x}^{(19)} : y^{(19)})$ , où  $\mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} NL^{(i)} & VNL^{(i)} \end{bmatrix}^T$  et  $y^{(i)} = rap\_prix^{(i)}$  avec  $i = 1, \dots, 19$  sont respectivement les entrées et la sortie du CLF.

Nous formons 12 VBFs de dimension 19 en utilisant les données d'entrée numériques,  $\vec{\phi}_l$  ( $l = 1, \dots, 12$ ), et un vecteur de sortie de dimension 19 en utilisant les données de sortie d'entraînement,  $\vec{y}$ . Nous appliquons par la suite le POG sur ces VBFs et le vecteur de sortie d'entraînement pour obtenir le vecteur optimal de dimension 12 qui contient les paramètres des conclusions,  $rap\_prix_{opt}$  exprimé par :

$$\overrightarrow{rap\_prix_{opt}} = \left[ [\vec{\phi}_1 \cdots \vec{\phi}_{12}]^T [\vec{\phi}_1 \cdots \vec{\phi}_{12}] \right]^{-1} [\vec{\phi}_1 \cdots \vec{\phi}_{12}]^T \vec{y} \quad (6.15)$$

Notons que le nombre de paires de données d'entraînement a été choisi  $N = 19$  qui satisfait la condition  $N \geq M = 12$ , pour que la matrice  $[\vec{\phi}_1 \cdots \vec{\phi}_{12}]$  soit de rang complet. La figure montre les données d'entraînement ainsi que leur approximation en utilisant la méthode du POG.

Les paramètres optimaux obtenus par cette méthode sont résumés sur le Tableau 6.1.

Tableau 6.1. Rapports de prix optimaux obtenus en appliquant la méthode du POG.

$NL/VNL$	$LL$	$ML$	$HL$	$VHL$
<i>Neg</i>	1	1.7986	2.1045	2.6107
<i>Zer</i>	1	2.0292	1.8100	2.6054
<i>Pos</i>	1	1.8354	2.1356	2.5732

Notons que le prix est ajusté toutes les cinq minutes en fonction de la charge du réseau et de sa variation.

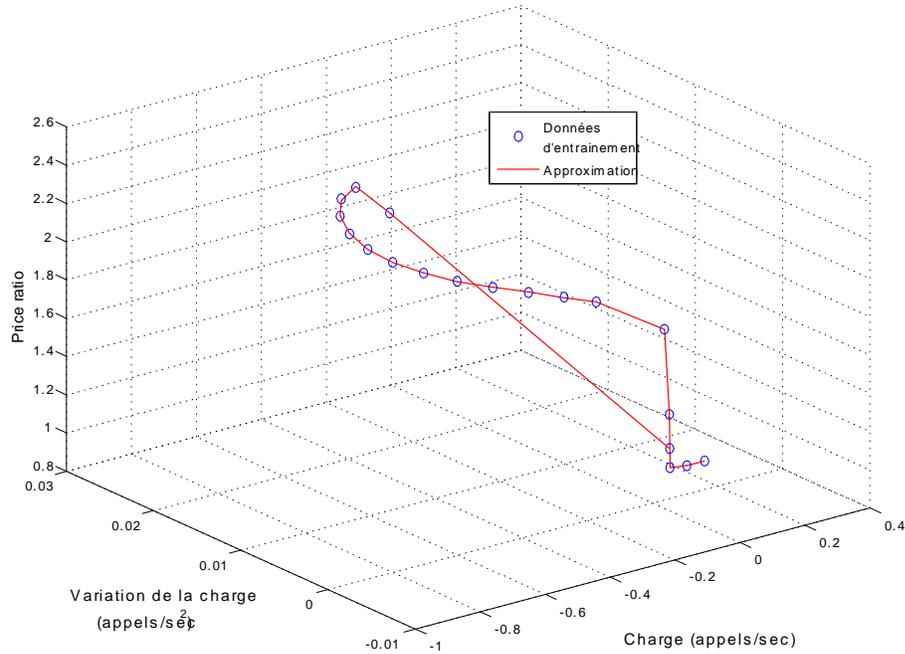


Figure 6.10. Données d'entraînement et leur approximation en utilisant la méthode du POG.

### Bloc de Demande

La réaction des utilisateurs d'un réseau au changement de prix peut être caractérisée par la fonction de demande. Plusieurs fonctions de demande ont été proposées dans la littérature [34]. Nous en citons quelques unes :

$$D_1 [p(t)] = e^{-p(t)^2} \quad p(t) \geq 0 \quad (6.16)$$

$$D_2 [p(t)] = \frac{e^{-p(t)}}{1 + p(t)} \quad p(t) \geq 0 \quad (6.17)$$

$$D_3 [p(t)] = \frac{1}{1 + p(t)^4} \quad p(t) \geq 0 \quad (6.18)$$

où  $p(t)$  est la somme du prix initial et le supplément chargé à l'instant  $t$ . Dans notre étude, le prix représente le prix de l'unité d'appel au cours de la journée.

À titre comparatif, la Figure 6.11 illustre les trois modèles de demande (6.16), (6.17),(6.18). Nous faisons varier le prix entre 0 et 5 Dollars et nous traçons les demandes en fonction du prix dans cet intervalle. Il est évident que les demandes de tous les modèles sont égales à 1 à 0 Dollar. Néanmoins, nous en remarquons qu'avec :

1. le modèle  $D_2$  : les utilisateurs sont trop sensibles à l'augmentation du prix ; la demande décroît aussi vite qu'elle le fasse avec les deux autres modèles.
2. le modèle  $D_3$  : les utilisateurs sont beaucoup moins sensibles à l'augmentation du prix qu'ils le soient avec le modèle  $D_2$ , jusqu'à l'atteinte d'une augmentation considérable (2 Dollars par exemple).
3. le modèle  $D_1$  : à comparer aux deux modèles  $D_2$  et  $D_3$ , les utilisateurs sont moyennement sensibles à l'augmentation du prix. Par exemple à 1 Dollar, la demande avec  $D_1 = 36\%$ ,  $D_2 = 18\%$  et  $D_3 = 50\%$ .

La sortie du CLF, qui est le rapport du prix, est l'entrée du bloc de la demande. Vu que notre système est supposé opérer dans des pays moyennement riches, le modèle de la fonction de demande est choisi être  $D_1$  (6.16).

Dans le but de ne pas être contraint à connaître le prix exact d'un opérateur, nous apportons une modification dans cette fonction et nous modélisons la demande avec le rapport du prix. Le modèle de la demande s'exprimera alors comme suit [38]

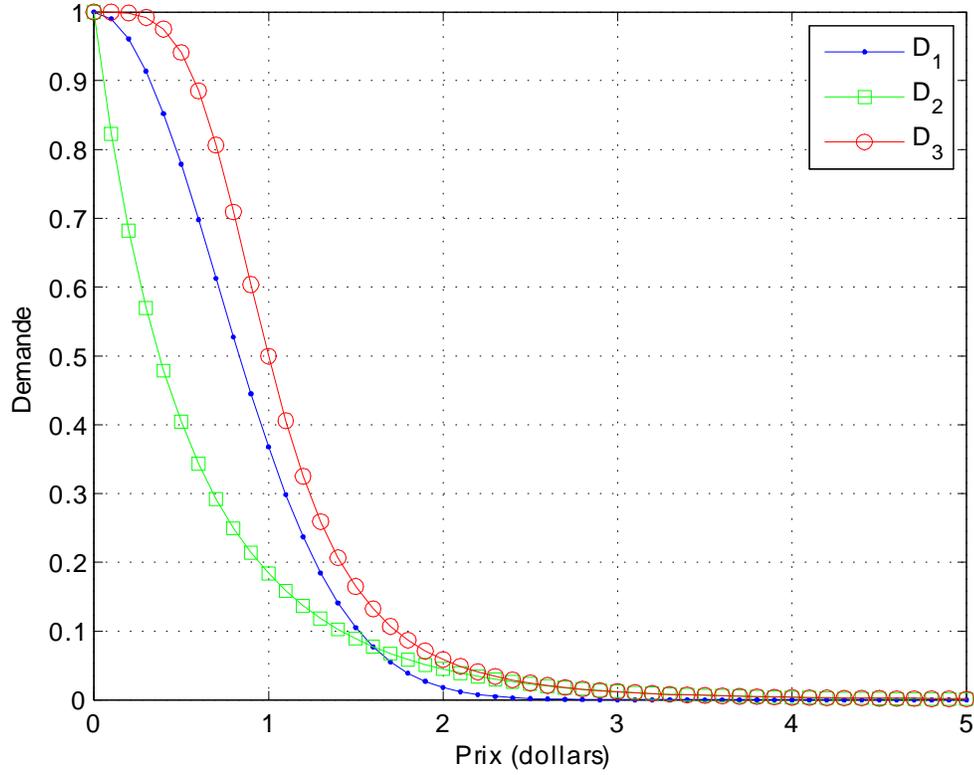


Figure 6.11. Différents modèles de la demande en fonction du prix.

:

$$D[p(t)] = e^{-(\frac{p(t)}{p_0}-1)^2} \quad p(t) \geq p_0 \quad (6.19)$$

Quand la cellule est non congestionnée, le supplément de prix est nul, i.e.,  $p(t) = p_0$  est par conséquent  $D[p(t)] = 1$ , ce qui signifie que tous les utilisateurs acceptent le prix normal.

## Contrôleur Flou Type-2

Dans la détermination des points des bases des triangles et trapèzes utilisés dans les fonctions d'appartenance des ensembles flous Type-1 des prémisses, il y a beaucoup d'incertitudes. Fuzzifier ces points serait donc plus plausible et traite les incertitudes contenues dans la détermination de ces points, ce Blurring donne naissance à des ensembles flous Type-2 (Fig. 6.12 et 6.13). Les paramètres des conclusions  $c^l$  ( $l = 1, \dots, 12$ ) requièrent eux aussi des Blurings afin de mieux correspondre aux nouvelles FAs des prémisses Type-2. Ceci donne naissance à des ensembles intervalles Type-1,  $C^l = [y_l^l, y_r^l] = [c^l - s^l, c^l + s^l]$  avec  $l = 1, \dots, 12$ .

Le système né est un FLC TSK Type-2 A2-C1 [17], [38]. Puisque nous n'avons pas de connaissances a priori sur les incertitudes des fonctions d'appartenance secondaires des prémisses, une incertitude uniforme aux appartenances primaires est imposée [12], [55], [73], [74], le contrôleur est alors un FLC TSK T2I A2-C1.

Le FLC TSK T2I A2-C1 contient évidemment 12 règles. La lème règle de sa base est exprimée par :

$$R^l : \text{SI } NL \text{ est } \tilde{F}_1^l \text{ ET } VNL \text{ est } \tilde{F}_2^l \text{ ALORS } rap\_prix = C^l$$

où  $\tilde{F}_1^l = \{\widetilde{LL}, \widetilde{ML}, \widetilde{HL}, \widetilde{VHL}\}$ ,  $\tilde{F}_2^l = \{\widetilde{Neg}, \widetilde{Zer}, \widetilde{Pos}\}$  et  $l = 1, \dots, 12$ . Les règles sont alors :

$$R^1 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{LL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Neg} \text{ ALORS } rap\_prix = C^1$$

$$R^2 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{LL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Zer} \text{ ALORS } rap\_prix = C^2$$

$$R^3 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{LL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Pos} \text{ ALORS } rap\_prix = C^3$$

$$R^4 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{ML} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Neg} \text{ ALORS } rap\_prix = C^4$$

$$R^5 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{ML} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Zer} \text{ ALORS } rap\_prix = C^5$$

$$R^6 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{ML} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Pos} \text{ ALORS } rap\_prix = C^6$$

$$R^7 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{HL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Neg} \text{ ALORS } rap\_prix = C^7$$

$$R^8 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{HL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Zer} \text{ ALORS } rap\_prix = C^8$$

$$R^9 : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{HL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Pos} \text{ ALORS } rap\_prix = C^9$$

$$R^{10} : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{VHL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Neg} \text{ ALORS } rap\_prix = C^{10}$$

$$R^{11} : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{VHL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Zer} \text{ ALORS } rap\_prix = C^{11}$$

$$R^{12} : \text{SI } NL \text{ est } \widetilde{VHL} \text{ ET } VNL \text{ est } \widetilde{Pos} \text{ ALORS } rap\_prix = C^{12}$$

Les limites inférieures et supérieures des MFs Type-2 des prémisses ainsi que les points extrêmes gauches et droits des ensembles intervalles des conclusions sont obtenus en utilisant la fonction *train\_tsk\_type2.m* [29] avec quelques modifications apportées, puisque cette dernière est consacrée à l'optimisation des paramètres d'un FLS TSK T2I A2-C1 dont les FAs des prémisses sont des Gaussiennes avec des centres incertains.

Les valeurs initiales des paramètres du FLC Type-2, utilisées dans la fonction d'optimisation, sont celles des paramètres du FLC Type-1 avec de très légers Blur-rings. Les résultats obtenus ont montré que les points extrêmes des ensembles intervalles des conclusions  $y_l^l$  et  $y_r^l$  sont très proches des scalaires  $c^l$  du Tableau 6.1. Il est à noter que l'établissement de la base de données d'entraînement est une tâche très délicate et dure à réaliser. Les empreintes d'incertitudes (FOUs) des prémisses obtenues sont illustrées sur les Figures 6.12, 6.13.

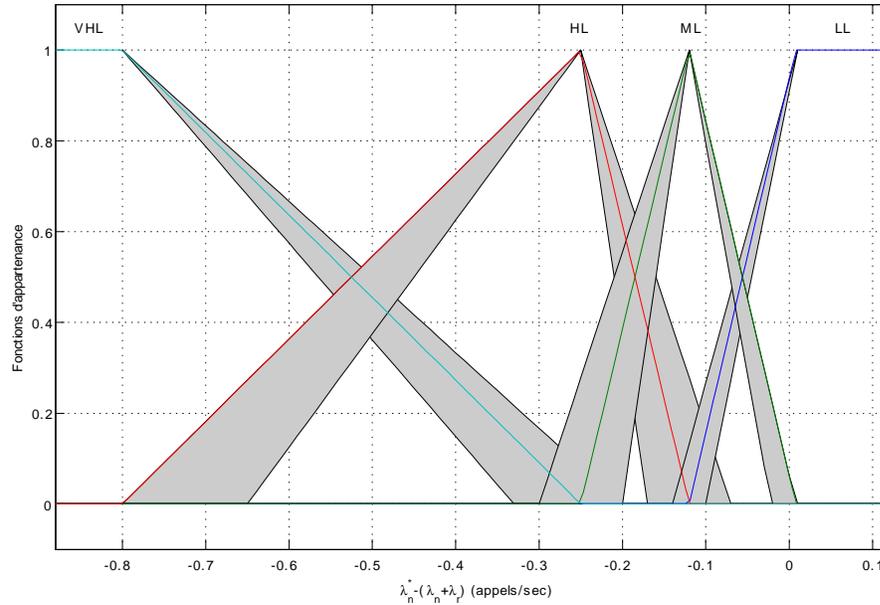


Figure 6.12. FOU utilisées pour représenter les quatre labels de  $NL$ .

## 6.5 Modèle du Système

Le modèle du réseau utilisé dans ce travail est typique de Hou *et al.* dans leur travail de recherche dans [75]. Pour le taux d'arrivée des appels Handovers, comme il a été mentionné précédemment, il est modélisé selon le travail de Xie *et al.* [71]. Les paramètres du système sont :

- À chaque cellule sont attribués  $g = 40$  canaux dont deux sont des canaux de garde.
- Le temps de séjour des utilisateurs dans la cellule est exponentiellement distribué avec une moyenne  $1/\eta = 120$  sec.
- La durée d'un appel est de moyenne  $1/\mu = 240$  sec.

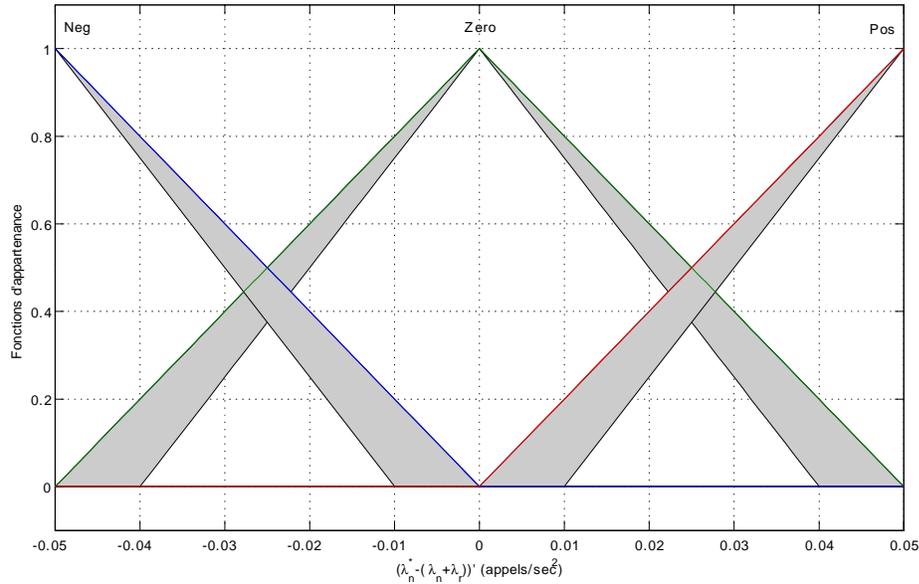


Figure 6.13. FOU utilisées pour représenter les trois labels de  $VNL$ .

- Une fois l'appel est accepté, le prix ne changera pas même aux moments de congestion, i.e., le prix de l'appel est fixé au moment de son acceptation.
- Le taux d'arrivée des nouveaux appels sur 24 heures est celui illustré sur la Figure 6.1.
- Dans ce système, les appels Handover sont traités deux fois plus importants que les nouveaux appels. Par conséquent, les paramètres de probabilité de blocage  $\alpha$  et  $\beta$  donnés dans (6.9) sont respectivement  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$ .
- Le taux d'arrivée des nouveaux appels optimal pour ce système est  $\lambda_n^* = 0.12$  appels/sec.
- Le modèle de la fonction d'utilité est donné par (6.19).

## 6.6 Résultats des Simulations

La Figure 6.14 illustre le taux d'arrivée des nouveaux appels estimé durant les 24 heures de la journée, la charge optimale du réseau ainsi que le trafic entrant au CAC obtenu en utilisant les contrôleurs de prix de Type-1 et de Type-2. Rappelons encore une fois que le contrôleur de prix n'a aucun effet sur les appels Handovers. Remarquons sur cette même figure que la charge du trafic entrant au CAC ne dépasse jamais la valeur optimale  $\lambda_n^* = 0.12$  appels/sec. Après 17h00, cette charge dépasse le taux d'arrivée des nouveaux appels jusqu'à 22 heures passées de quelques minutes. Ce dépassement est dû au trafic né des ré-appelants qui n'acceptent pas le prix aux moments de congestion et qui tentent de rappeler plus tard, ce trafic est additionné au NCAR pour former l'entrée du CLF (Fig. 6.15). Rappelons que ce trafic a été modélisé de telle sorte qu'une partie des clients qui n'accepte pas le prix de surcharge quitte carrément le système, i.e., sans tentative de rappel, et une autre partie tente de rappeler après un temps de 15 minutes.

La Figure 6.16 illustre la sortie du contrôleur de prix qui est le rapport du prix initial sur le prix actuel. Nous en remarquons que le rapport est égal à 1 aux moments de non congestion, i.e., le supplément de prix est nul, ce qui permet à tous les utilisateurs d'effectuer leurs appels. Nous remarquons de la Figure 6.16 que le rapport de prix commence à dépasser la valeur 1 à 6h45mn pour le CLF Type-1 et 6h50 pour le CLF Type-2, ce prix est appliqué aux cinq minutes qui suivent raison pour laquelle le trafic entrant au CAC,  $\lambda_{in}$  ne commence à devenir inférieur à  $\lambda_n^*$  qu'à partir de 6h50mn pour le CLF Type-1 et 6h55mn pour le CLF Type-2 (Fig 6.14). Le prix de l'appel commence à hausser avant que le NCAR atteigne la charge optimale à 7h00 parce que le contrôleur de prix prend en considération la charge du réseau et sa variation, et avec une base de données d'entraînement plus précise, nous arriverions à mieux contrôler le trafic pendant ce laps de temps critique. Sachant qu'à ce temps là, la charge commence à s'approcher du seuil et sa variation est positive, i.e., la charge

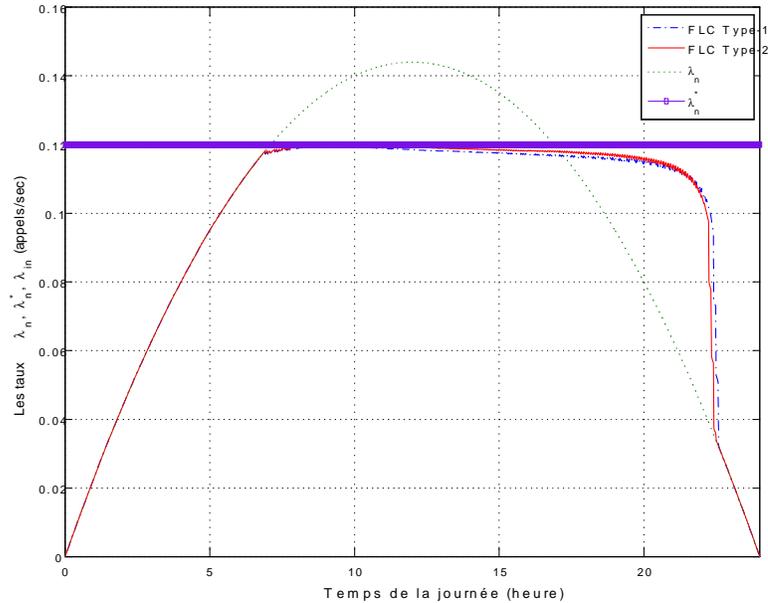


Figure 6.14. NCAR, charge optimale et trafic d'entrée au CAC en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2.

est en augmentation. Le prix donné par le CLF Type-2 hausse 5 minutes après celui donné par le CLF Type-1. Quoique la variation de prix est minimale à ces deux instants, mais ceci permet de conclure que le contrôleur Type-2 agit de façon plus effective, parce que les utilisateurs sont sensibles au fait que le prix soit haussé même dans les moments de non congestion habituels. La probabilité de blocage des charges du réseau dans la Figure 6.17 montre qu'avec le mécanisme Type-1 les utilisateurs sont plus satisfaits du moment que la courbe obtenue avec ce dernier est relativement loin du seuil toléré par les utilisateurs qui est 0.01, d'un autre côté il y a beaucoup de ressources non utilisées quand nous utilisons le Type-1, même aux moments de non congestion. Avec le mécanisme Type-2 les ressources sont plus utilisées sans pour autant dépasser le seuil toléré qui traduit la congestion dans le réseau.

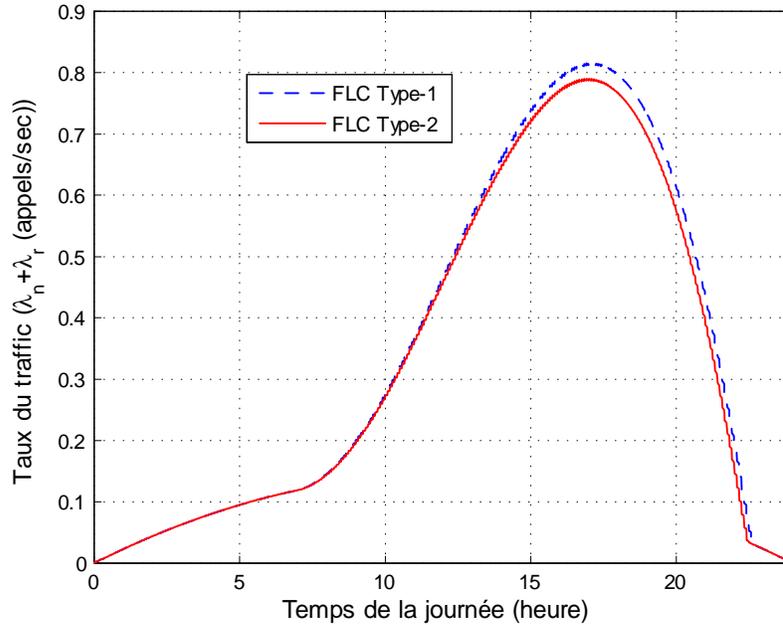


Figure 6.15. Charges du trafic en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2.

On conclut alors que le CLF Type-2, autant que mécanisme de contrôle de congestion dans un réseau cellulaire, permet l'utilisation effective et efficace des ressources et par conséquent un meilleur revenu pour l'opérateur tout en évitant la congestion.

## 6.7 Conclusion

Nous avons proposé dans cette partie un mécanisme d'inférence floue comme une nouvelle dimension au contrôle d'admission des appels dans un réseau cellulaire. En se basant sur la politique de l'incitation monétaire qui permet de décourager les sur-allocations des ressources dans les réseaux des télécommunications, ce contrôleur a été conçu pour ajuster le prix de l'unité de trafic afin d'éviter la congestion dans

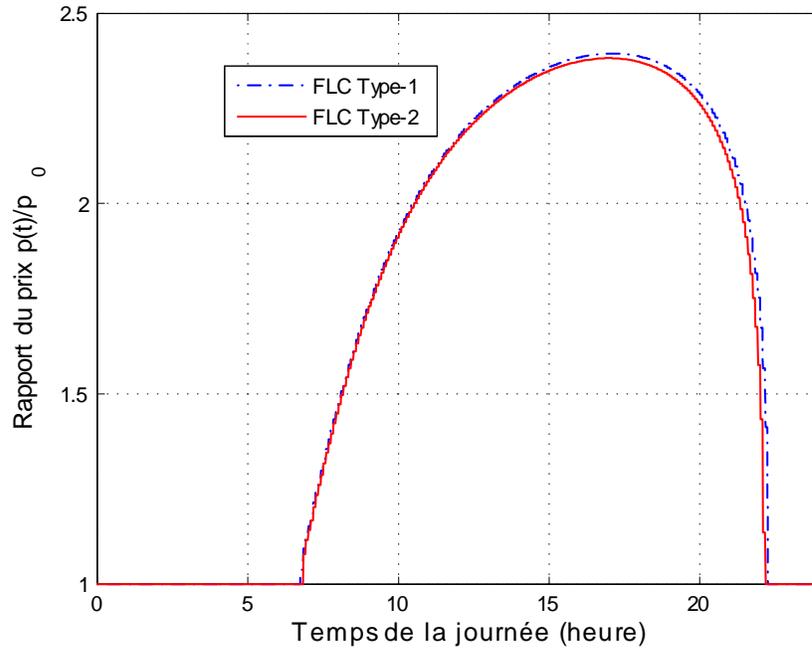


Figure 6.16. Prix ajusté selon la charge du réseau, utilisant les contrôleurs flous de Type-1 et Type-2.

un réseau cellulaire. Après avoir fait une étude sur l'existence d'un seuil du taux d'arrivée des nouveaux appels optimal qui permet à la fois de maximiser la satisfaction des utilisateurs et d'utiliser les ressources du réseau d'une façon effective, nous avons construit un système à base de règles qui permet de maintenir la charge du réseau toujours égale ou inférieure à cette charge optimale. La base de règles du système flou de TSK a été construite à l'aide d'EFs Type-1 et des paramètres de conclusions d'ordre zéro. Ce CLF Type-1 a permis d'éviter la congestion en réduisant la probabilité de blocage qui est considérée comme métrique principale de la QoS dans ce travail. Néanmoins, les ressources du réseau n'ont pas été utilisées pleinement. Et comme l'augmentation du flou dans une description aide à mieux prendre en compte l'information inexacte, nous avons étendu le CLF Type-1 à son

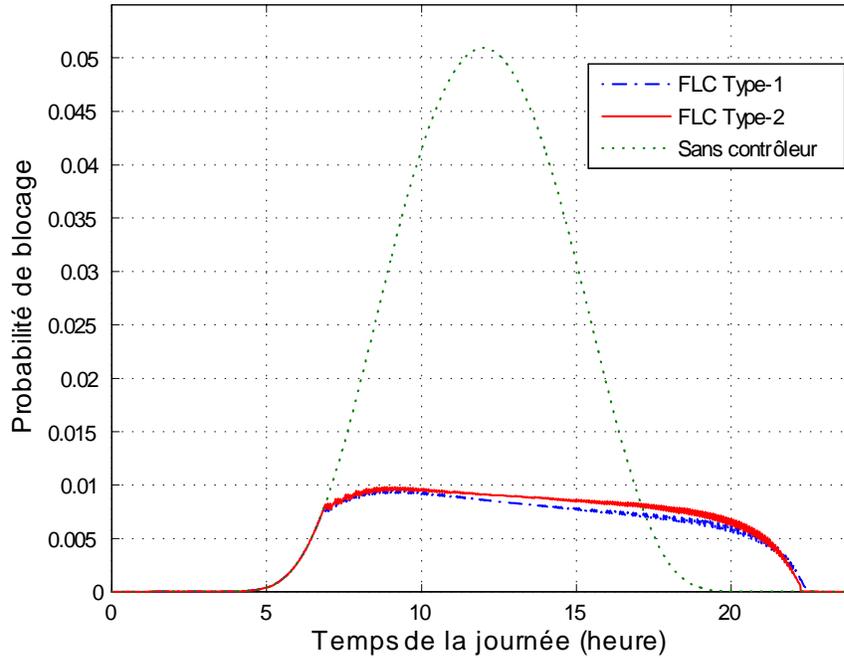


Figure 6.17. Probabilité de blocage des charges dans le système sans contrôle de prix et en utilisant les contrôleurs de prix flous Type-1 et Type-2.

homologue Type-2. Le mécanisme proposé a permis d'utiliser les ressources d'une façon plus effective tout en forçant la charge du trafic à ne pas dépasser celle optimale et tout en maintenant la probabilité de blocage inférieure au seuil toléré par les utilisateurs et du coup atteindre l'exigence en QoS. La construction de la base de données d'entraînement a été une tâche très délicate, et nous estimons qu'avec une base de données plus précise le contrôleur flou utiliserait les ressources du réseau d'une façon plus effective et efficace.

# Chapitre 7

## Conclusion Générale

Dans la première partie de cette thèse, nous avons présenté une méthode d'optimisation pour spécifier les paramètres des conclusions d'un système d'inférence floue Type-1. Le CLF Type-1 exprimé en expansion en série de FBFs est linéaire par rapport aux paramètres des conclusions, une méthode d'optimisation linéaire basée sur le principe d'orthogonalité généralisé lui est appliquée pour spécifier ces paramètres. La méthode, bénéficiant d'une agilité au niveau graphique, a été étendue afin de spécifier les paramètres des conclusions d'un prédicteur flou Type-1 des systèmes sensibles aux conditions initiales, à savoir les systèmes chaotiques. Cette méthode, basée toujours sur le POG, opère avec des données d'entraînement relevées à partir du même système avec différentes conditions initiales. Cette multitude dans les données d'entraînement a forcé le prédicteur à se désensibiliser au changement des conditions initiales. Les résultats des simulations ont montré une amélioration substantielle dans la performance du prédicteur par rapport à son congénère qui opère avec des données d'entraînement basées sur une seule condition initiale.

Après avoir exposé le paradoxe incertitude - ensemble flou Type-1 et les limitations associées, nous avons présenté une étude théorique détaillée sur l'extension de

## Chapitre 7. Conclusion Générale

cet ensemble à son congénère de Type-2. Nous avons discuté la capacité du nouveau type à mieux modéliser l'incertitude de par l'association d'un nouveau paramètre, à savoir la mesure de dispersion de l'incertitude. L'étude théorique a été étendue à la mesure de dispersion des incertitudes contenues dans la base de règles d'un système d'inférence floue Type-1, ce qui donne naissance à un système d'inférence floue de Type-2.

Tous les systèmes d'inférence floue ont été étendus à leurs congénères Type-2. Dans l'inférence de Mamdani, la méthode de défuzzification a été étendue au processus de réduction de type qui souffre d'une grande complexité, notamment à l'utilisation des FSs Type-2 généraux et non pas intervalles. Ce processus n'a pas lieu dans les CLFs TSK Type-2 tout comme son congénère Type-1 ne requiert pas le processus de défuzzification, ce qui fait du modèle TSK Type-2 un système moins compliqué et très utilisé. L'extension du système TSK à son homologue Type-2 a donné naissance à trois architectures différentes selon la nature des prémisses et des conclusions. L'un de ces trois modèles, conçu afin de prendre en compte les incertitudes par rapport aux paramètres des conclusions, à savoir le FLC T2I TSK A1-C1, perd sa nature Type-2 quand on s'intéresse directement à sa sortie défuzzifiée. Ce qui constitue une limitation importante pour un système d'inférence floue Type-2 bénéficiant de la non nécessité du processus de réduction de type. Nous avons proposé une méthode d'optimisation linéaire afin de garder la nature Type-2 de ce modèle. Cette méthode, basée essentiellement sur des paires de données d'entraînement vecteur d'entrée-ensemble de sortie, se fonde sur l'approximation de Chebyshev pour déterminer les paramètres des conclusions de ce système, tout en faisant de l'expansion du système en série de FBFs le point de départ.

Afin de prédire la sortie d'un système chaotique fortement sensible aux conditions initiales, nous utilisons le FLC T2I TSK A1-C1 proposé. Puisqu'un simple changement dans les conditions initiales influe de façon importante la sortie du système

## Chapitre 7. Conclusion Générale

chaotique, nous rassemblons plusieurs sorties possibles dans un ensemble pour former la sortie du système flou Type-2 pour chaque vecteur d'entrée. Nous générons plusieurs signaux et nous comparons les résultats obtenus du prédicteur basé sur l'approximation de Chebyshev avec un prédicteur flou basé sur le POG. La comparaison est faite en utilisant la moyenne et les écarts-type des erreurs quadratiques moyennes. Les résultats des simulations obtenus montrent l'efficacité de l'approche basée sur l'approximation de Chebyshev ainsi qu'une amélioration importante en termes de robustesse par rapport à l'approche basée sur le POG.

La deuxième partie de ce travail rentre dans un cadre applicatif concernant la gestion des incertitudes dans les réseaux cellulaires de nouvelle génération. Les incertitudes sont inhérentes à la plupart des paramètres des réseaux, en l'occurrence, les paramètres responsables sur la congestion dans les réseaux cellulaires. Afin d'éviter la congestion dans de tels réseaux, nous avons proposé un mécanisme d'inférence floue autant que processus additionnel au contrôle d'admission des appels, basé sur la politique de l'incitation monétaire afin d'ajuster le prix de l'unité d'appel en fonction du trafic courant du réseau. En se basant sur les travaux de Hou *et al.*, nous avons prouvé l'existence d'un taux d'arrivée des nouveaux appels optimal au-delà duquel la probabilité de blocage des appels, qui est supposée être la métrique principale de la QoS dans un réseau cellulaire, dépasse le seuil toléré par les utilisateurs. Le FLC proposé a pu maintenir la charge du réseau, qui est composée du taux d'arrivée des nouveaux appels et du taux d'arrivée des ré-appelants généré par les utilisateurs qui n'ont pas accepté le prix aux moments de congestion, inférieure ou égale à la charge optimale.

L'obtention des fonctions d'appartenance du système flou appropriées pour un contrôle effectif dans le réseau est très difficile. En se basant sur les travaux de Tanaka *et al.* [64] et dans le but de maintenir la charge du réseau le plus proche possible de la charge optimale pour maximiser le revenu de l'opérateur, nous avons

proposé des ensembles flous Type-2 pour dissiper l'incertitude dans les paramètres du réseau cellulaire. Un contrôleur de logique floue Type-2 a donc été implémenté comme extension au mécanisme flou de Type-1. Effectivement, le nouveau contrôleur a permis d'utiliser les ressources du réseau de façon plus effective, il a relativement haussé la charge tout en la maintenant inférieure à la charge optimale. Cette augmentation a évidemment augmenté la probabilité de blocage mais cette dernière est restée inférieure au seuil toléré par les utilisateurs.

Les résultats obtenus par le contrôleur Type-2 indiquent que ce dernier peut éviter le problème de congestion dans les réseaux cellulaires. En même temps qu'il répond à la QoS requise par les utilisateurs il maximise le revenu de l'opérateur par rapport à son congénère Type-1. L'établissement de la base de données d'entraînement étant très délicat, les données obtenues n'ont pas aidé à spécifier les meilleurs paramètres du contrôleur flou appropriés à mieux utiliser les ressources du réseau. Avec une base de données d'entraînement plus précise, nous estimons que le contrôleur arriverait à éviter la congestion avec plus de revenu pour l'opérateur.

## **7.1 Perspectives Futures**

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a été de proposer des méthodes et des outils de conception de systèmes d'inférence floue de Type-2 ou plus précisément une sous classe des systèmes d'inférence floue de Type-2. Nous avons montré l'intérêt d'une prise en compte des incertitudes aux niveaux des conclusions dans la phase de conception.

Plusieurs questions restent ouvertes et seront l'objet des recherches à venir.

Pour la classe des systèmes d'inférence floue de Type-2, il serait nécessaire de proposer une méthode de conception plus globale pour l'adaptation paramétrique

## *Chapitre 7. Conclusion Générale*

des prémisses et des conclusions. Nous nous intéresserons ainsi à la prise en compte des incertitudes à différents niveaux et leur impact sur la complexité algorithmique.

Par ailleurs, nous nous intéresserons à la génération des systèmes d'inférence floue de façon supervisée ou non tout en assurant le passage de la forme numérique, valable dans certains cas, à la forme symbolique.

L'apprentissage graduel sera analysé ainsi que son impact sur la partie incertitude. Nous parlons ainsi de la plasticité floue.

On s'intéressera aussi aux systèmes d'inférence floue d'ordre élevé, comme les systèmes de Dubois et Prade où les éléments flous proposés ne permettent pas une manipulation des incertitudes de façon explicite comme dans le cas des systèmes d'inférence floue de Type-2.

Pour enrichir le travail élaboré sur le traitement des incertitudes dans les paramètres des réseaux de télécommunications et sur l'évitement de congestion, nous comptons étendre notre proposition afin de prendre en compte plusieurs métriques de la qualité de service.

# Annexes

A Relations Floues 137

B Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2 147

# Annexe A

## Relations Floues

### A.1 Opérations sur les Ensembles Flous Type-1

En logique floue, l'union, l'intersection et le complément sont définis en termes de fonctions d'appartenance. Soient, par exemple,  $A$  et  $B$  deux ensembles flous des voitures locales et étrangères (§ Chap. 2), décrits par leurs fonctions d'appartenance  $\mu_A(x)$  et  $\mu_B(x)$ , respectivement.

- Union Floue

C'est l'ensemble des voitures locales OU étrangères. Plusieurs définitions de l'union floue ont été données dans la littérature [8], [76]. L'opérateur **t-conorme** (noté  $\oplus$ ) a été introduit pour définir l'union floue, et depuis, toutes les opérations concernant l'union floue sont considérés être des t-conormes. Nous en citons quelques unes:

L'union basée sur l'opérateur maximum (le plus utilisé) [8] :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (\text{A.1})$$

## Annexe A. Relations Floues

L'union basée sur la somme algébrique [8] :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \mu_B(x) \quad (\text{A.2})$$

Les opérations (A.1) et (A.2) sont les plus utilisées, mais il y a une autre basée sur la somme limitée :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad (\text{A.3})$$

et celle basée sur la somme de Drastic :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{si } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & \text{si } \mu_A(x) = 0 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

- Intersection Floue

C'est l'ensemble des voitures locales ET étrangères. Plusieurs définitions de l'intersection floue ont été données dans la littérature [8], [76]. L'opérateur **t-norme** (noté  $\star$  ou  $T$ ) a été introduit pour définir l'intersection floue, et depuis, toutes les opérations concernant l'intersection floue sont considérées être des *t-normes*. Nous en citons quelques opérations :

L'intersection basée sur l'opérateur minimum :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \star \mu_B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (\text{A.5})$$

L'intersection basée sur le produit algébrique :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \star \mu_B(x) = \mu_A(x) \mu_B(x) \quad (\text{A.6})$$

Les opérations (A.5) et (A.6) sont les plus utilisées, mais il y a une autre basée sur le produit limité :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \star \mu_B(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \quad (\text{A.7})$$

## Annexe A. Relations Floues

et celle basée sur *le produit de Drastic* :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \star \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{if } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x) & \text{if } \mu_A(x) = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

- Complément flou

C'est l'ensemble des voitures NON locales. Dans les applications d'ingénierie, le complément de l'ensemble flou le plus utilisé est :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (\text{A.9})$$

En utilisant les formes (A.1), (A.2), (A.5), (A.6) et (A.9), on peut aussi avoir :

$$\mu_{A \cup B}(x) = 1 - \min[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] \quad (\text{A.10})$$

et :

$$\mu_{A \cap B}(x) = 1 - \max[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Relations Floues Type-1

Les relations floues jouent un rôle très important dans un système d'inférence floue. La relation floue représente un degré de présence ou d'absence d'association et d'interaction entre les éléments de deux ou plusieurs ensembles flous [15]. Nous en citons quelques exemples :

- $x$  est plus grand que  $y$ .
- *Système1* est plus amorti que *système2*.

## Annexe A. Relations Floues

- La *bande – passante* du système 1 est plus large que la *bande – passante* du système 2.

Soient  $U$  et  $V$  deux univers de discours. Une *relation floue*  $R(U, V)$  est un ensemble flou dans l'espace du produit Cartésien  $U \times V$  et est caractérisée par la fonction d'appartenance  $\mu_R(x, y)$  où  $x \in U$  et  $y \in V$  :

$$R(U, V) = \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\} \quad (\text{A.12})$$

La fonction d'appartenance d'une relation floue  $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$ , alors que la fonction d'appartenance d'une relation classique  $\mu_R(x, y) = 0$  ou  $1$ .

Soient  $P(U, V)$  et  $Q(V, W)$  deux relations floues :

$$P(U, V) = \{(x, y), \mu_P(x, y) \mid (x, y) \in U \times V\} \quad (\text{A.13})$$

$$Q(V, W) = \{(y, z), \mu_Q(y, z) \mid (y, z) \in V \times W\} \quad (\text{A.14})$$

- L'intersection de ces deux relations floues est donnée par :

$$\mu_{P \cap Q}(x, y) = \mu_P(x, y) \star \mu_Q(x, y) \quad (\text{A.15})$$

- Leur union est donnée par :

$$\mu_{P \cup Q}(x, y) = \mu_P(x, y) \oplus \mu_Q(x, y) \quad (\text{A.16})$$

### A.3 Compositions Floues Type-1

Il existe plusieurs compositions floues dans la littérature [15] :

- Composition *max – min*

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} [\min (\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z))] \quad (\text{A.17})$$

- Composition *max – produit*

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} [(\mu_P(x, y) \mu_Q(y, z))] \quad (\text{A.18})$$

- Composition *sup – star*

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_{y \in V} [\mu_P(x, y) \star \mu_Q(y, z)] \quad (\text{A.19})$$

### A.4 Opérations sur les Ensembles Flous Type-2

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux ensembles flous type-2 représentés par :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) | \forall x \in X\} \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x) | \forall x \in X\} \quad (\text{A.21})$$

Annexe A. Relations Floues

- L'union de ces deux ensembles est un ensemble flou type-2 :

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[ \int_{v \in J_x^v} h_x(v) / v \right] / x \quad (\text{A.22})$$

tels que :

$$\int_{v \in J_x^v} h_x(v) / v = \varphi \left[ \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / u, \int_{w \in J_x^w} g_x(w) / w \right] \quad (\text{A.23})$$

$$= \varphi [\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad (\text{A.24})$$

En appliquant le principe d'extension :

$$\int_{v \in J_x^v} h_x(v) / v = \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / \varphi(u, w) \quad (\text{A.25})$$

- Union de deux ensembles flous Type-2 :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \vee w) \\ &= \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

où  $\vee$  est l'opérateur max et  $\sqcup$  est l'opérateur *join*

- Intersection de deux ensembles flous Type-2 :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= \int_{u \in J_x^u} \int_{w \in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \wedge w) \\ &= \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{B}}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

où  $\wedge$  est l'opérateur min et  $\sqcap$  est l'opérateur *meet*

Annexe A. Relations Floues

- Complément d'un ensemble flou Type-2 :

$$\lceil \mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / 1 - u \quad (\text{A.28})$$

### A.4.1 Ensembles Flous Type-2 Intervalles

Soient  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  deux ensembles flous Type-2 Intervalles Soient  $J_x^u = [l_f, r_f]$  et  $J_x^w = [l_g, r_g]$ .

- L'union de deux ensembles flous Type-2 Intervalles :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \int_{u \in [l_f, r_f]} \int_{w \in [l_g, r_g]} 1 / (u \vee w) \quad (\text{A.29})$$

donc :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= \int_{q \in [l_f \vee l_g, r_f \vee r_g]} 1 / q \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) &= \int_{q \in [l_f \vee l_g, r_f \vee r_g]} 1 / q \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

- Leur intersection est exprimée par :

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \int_{u \in [l_f, r_f]} \int_{w \in [l_g, r_g]} 1 / (u \wedge w) \quad (\text{A.31})$$

## Annexe A. Relations Floues

donc :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= \int_{q \in [l_f \wedge l_g, r_f \wedge r_g]} 1 / q \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{B}}(x) &= \int_{q \in [l_f \wedge l_g, r_f \wedge r_g]} 1 / q\end{aligned}\tag{A.32}$$

Le complément d'un EF Type-2 Intervalle est donné par :

$$\lceil \mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{q \in [1-r_f, 1-l_f]} 1 / q\tag{A.33}$$

## A.5 Relations et Composition Type-2

Soient  $\tilde{R}(u, v)$  et  $\tilde{S}(u, v)$  deux relations floues type-2 sur le même espace produit :

$$\begin{aligned}\tilde{R}(U, V) &= \int_{U \times V} \mu_{\tilde{R}}(u, v) / (u, v) \\ &= \int_{U \times V} \left[ \int_{\alpha \in J_{(u,v)}^\alpha} r_{(u,v)}(\alpha) / \alpha \right] / (u, v)\end{aligned}\tag{A.34}$$

et :

$$\begin{aligned}\tilde{S}(U, V) &= \int_{U \times V} \mu_{\tilde{S}}(u, v) / (u, v) \\ &= \int_{U \times V} \left[ \int_{\beta \in J_{(u,v)}^\beta} s_{(u,v)}(\beta) / \beta \right] / (u, v)\end{aligned}\tag{A.35}$$

Leur union et intersection sont données par :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(u, v) &= \mu_{\tilde{R}}(u, v) \sqcup \mu_{\tilde{S}}(u, v) \\ &= \int_{\alpha \in J_{(u,v)}^\alpha} \int_{\beta \in J_{(u,v)}^\beta} r_{(u,v)}(\alpha) \star s_{(u,v)}(\beta) / (u \vee v)\end{aligned}\tag{A.36}$$

## Annexe A. Relations Floues

et :

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(u, v) &= \mu_{\tilde{R}}(u, v) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(u, v) \\ &= \int_{\alpha \in J_{(u,v)}^\alpha} \int_{\beta \in J_{(u,v)}^\beta} r_{(u,v)}(\alpha) \star s_{(u,v)}(\beta) / (u \wedge v)\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

Soient  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{S}$  deux relations floues type-2 définies respectivement sur les espaces produits:  $U \times V$  et  $V \times W$ . L'appartenance pour une paire  $(x, z)$ , où  $x \in U, z \in W$  est non-zéro et seulement si il existe au moins  $y \in V$  tels que  $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \neq 1/0$  et  $\mu_{\tilde{S}}(y, z) \neq 1/0$ . Cette condition est équivalente à la composition étendue de la composition *sup - star* suivante :

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{S}}(x, z) = \sqcup_{y \in V} [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(y, z)] \quad x \in U, z \in W \quad (\text{A.38})$$

- Composition d'un ensemble avec une relation

Dans le cas où l'une des relations précédentes est un ensemble flou type-2 (soit  $\tilde{A}$  défini dans l'univers  $U$  au lieu de  $\tilde{R}$  dans  $U \times V$ )

La composition de l'ensemble  $\tilde{A}$  défini dans  $U$  et la relation  $\tilde{S}$  défini dans  $U \times V$  est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{S}}(y) = \sqcup_{x \in U} [\mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{S}}(x, y)] \quad y \in V \quad (\text{A.39})$$

- Implication floue Type-2

Soit la  $l$ ème règle d'une base  $R^l$  ( $l = 1, \dots, M$ ) avec  $p$  prémisses et une conclusion. Elle est exprimée par :

$$R^l : \tilde{F}_1^l \times \tilde{F}_2^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l \equiv \tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l \quad (\text{A.40})$$

## Annexe A. Relations Floues

C'est une relation entre la collection de  $p$  prémisses et une conclusion. L'implication floue Type-2 est représentée par :

$$\mu_{R^l}(\mathbf{X}, y) = \mu_{\tilde{F}_1^l \times \tilde{F}_2^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l}(x_1, x_2, \dots, x_p) \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \quad (\text{A.41})$$

donc :

$$\mu_{R^l}(\mathbf{X}, y) = \left[ \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i) \right] \sqcap \mu_{\tilde{G}^l}(y) \quad (\text{A.42})$$

# Annexe B

## Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

### B.1 Principe d'Extension

Introduit par L. Zadeh en 1975, le principe d'extension nous permet d'étendre les relations mathématiques des variables certaines aux variables floues. Imaginons que nous avons la fonction d'appartenance de l'ensemble flou "*Petit*" et que nous voulons avoir la fonction d'appartenance de "*Petit*<sup>2</sup>". Le principe d'extension nous permet d'avoir la FA pour "*Petit*<sup>2</sup>" en utilisant la relation mathématique non floue  $y = x^2$  dans laquelle l'ensemble flou "*Petit*" joue le rôle de  $x$ .

Supposons que l'on ait une fonction à une seule variable,  $y = f(x)$ , où  $x \in U$ ,  $y \in V$  et  $U$  est supposée être un univers de discours discrétisé.  $A$  est un ensemble flou dont le domaine est l'univers de discours  $U$  :

$$A = \sum_{x \in U} \mu_A(x) / x \tag{B.1}$$

Le principe d'extension indique que l'image de l'ensemble flou  $A$  selon la fonction

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

$f(\cdot)$  peut être exprimée par un ensemble flou  $B$ , tel que [11] :

$$\begin{aligned}
 B &= f(A) = f\left(\sum_{x \in U} \mu_A(x)/x\right) \\
 &= \mu_A(x_1)/y_1 + \dots + \mu_A(x_N)/y_N \equiv \mu_B(y)/y \\
 &= \mu_A(x_1)/f(x_1) + \dots + \mu_A(x_N)/f(x_N)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

où  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Exemple 4** Supposons que l'univers de discours  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , et  $A$  est un ensemble flou des valeurs proches de 1,  $A = \text{Pr oche\_de\_un} = 1/1 + 0.9/2 + 0.5/3 + 0.4/4$ , alors :

$$B = \text{Pr oche\_de\_un}^2 = 1/1 + 0.9/4 + 0.5/9 + 0.4/16$$

Il est possible que la même valeur de  $y$  peut être obtenue pour différentes valeurs de  $x$ , on peut par exemple avoir  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , mais  $x_1 \neq x_2$  et  $\mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$ . Dans ce cas là (B.2) doit être modifiée pour remédier à cette ambiguïté, on attribue alors la plus grande des valeurs d'appartenance à  $\mu_B(y)$ , ainsi :

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad y \in V \tag{B.3}$$

où  $f^{-1}(y)$  dénote l'ensemble de tous les points  $x \in U$  tel que  $f(x) = y$  [15]. Supposons maintenant que l'on ait une fonction de deux variables  $f(x_1, x_2)$ , où  $x_1 \in X_1$  et  $x_2 \in X_2$ , et  $X_1$  et  $X_2$  sont supposés être deux univers de discours discrétisés. Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux ensembles flous :

$$A_1 = \sum_{x_1 \in X_1} \mu_{A_1}(x_1)/x_1 \tag{B.4}$$

$$A_2 = \sum_{x_2 \in X_2} \mu_{A_2}(x_2)/x_2 \tag{B.5}$$

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

Le principe d'extension dans ce cas devient :

$$\mu_{f(A_1, A_2)}(y) = \mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} \\ 0 \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

où  $f^{-1}(y)$  dénote l'ensemble de tous les points  $x_1 \in X_1$  et  $x_2 \in X_2$  tels que  $f(x_1, x_2) = y$ . La condition  $f^{-1}(y) = \emptyset$  dans (B.6) signifie que s'ils n'existent pas des valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  pour lesquelles on ne peut pas avoir une valeur spécifique de  $y$ , on pose la valeur d'appartenance pour cette valeur de  $y$  égale à zéro.

Dans le cas de plusieurs variables :

$$\mu_{f(A_1, \dots, A_r)}(y) = \mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r) \} \\ 0 \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

où  $f^{-1}(y)$  dénote l'ensemble de tous les points  $x_1 \in X_1, \dots, x_r \in X_r$  tels que  $f(x_1, \dots, x_r) = y$ . Quand on veut étendre une opération de la forme  $f(x_1, \dots, x_r)$  à une opération  $f(A_1, \dots, A_r)$ , où les  $A_i$  sont des ensembles flous type-1, nous n'étendons pas les opérations individuelles telles que la multiplication et l'addition incluses dans  $f$ . Nous utilisons plutôt la définition suivante qui provient de (B.7) quand l'opération maximum est utilisée pour l'union et la  $t$ -norme est utilisée au lieu de l'opération minimum :

$$f(A_1, \dots, A_r) = \int_{x_1 \in X_1} \dots \int_{x_r \in X_r} \mu_{A_1}(x_1) \star \dots \star \mu_{A_r}(x_r) \Big/ f(x_1, \dots, x_r) \quad (\text{B.8})$$

où  $\int$  dénote la collection de tous les points  $x_i \in X_i$  avec leurs FAs associées,  $\mu_{A_i}(x_i)$ .

**Exemple 5** Soit la fonction :

$$f((x_1, x_2)) = \frac{x_1^2}{3x_1 + 2x_2} \quad (\text{B.9})$$

L'extension de la fonction  $f$  aux ensembles flous  $A_1$  et  $A_2$  est exprimée par :

$$f(A_1, A_2) = \int_{x_1 \in X_1} \int_{x_2 \in X_2} \mu_{A_1}(x_1) \star \mu_{A_2}(x_2) \Big/ \frac{x_1^2}{3x_1 + 2x_2} \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

Dans un ensemble flou type-1 le centroïde est une valeur scalaire, dans un ensemble flou Type-2 le centroïde est un ensemble flou type-1; d'où l'appellation *Réduction de Type* (i.e., l'ensemble flou Type-2 est réduit à un ensemble flou type-1). Nous allons voir dans ce qui suit comment calculer en général la réduction de type.

Le centroïde d'un ensemble flou type-1  $A$ , dont le domaine,  $x \in X$ , est discrétisé en  $N$  points, est donné par :

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)} \quad (\text{B.11})$$

Soit  $\tilde{A}$  un ensemble flou Type-2 :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) | \forall x \in X\}$$

dont le domaine des  $x$  est discrétisé en  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$ , tel que :

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^N \left[ \int_{u \in J_{x_i}} f_{x_i}(u) / u \right] / x_i$$

Le centroïde de l'ensemble flou Type-2  $\tilde{A}$  en utilisant le principe d'extension (B.8) est donné sous la forme suivante :

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \dots \int_{\theta_N \in J_{x_N}} [f_{x_1}(\theta_1) \star \dots \star f_{x_N}(\theta_N)] / \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (\text{B.12})$$

$C_{\tilde{A}}$  est un ensemble flou type-1 (ensemble réduit). Chaque combinaison de  $\theta_1, \dots, \theta_N$  et son degré d'appartenance secondaire associé  $f_{x_1}(\theta_1) \star \dots \star f_{x_N}(\theta_N)$  forment un ensemble Type-2 encadré,  $\tilde{A}_e$ . Ainsi, chaque élément de  $C_{\tilde{A}}$  est déterminé par le calcul du :

- centroïde  $\sum_{i=1}^N x_i \theta_i / \sum_{i=1}^N \theta_i$  de l'ensemble flou type-1 encadré  $A_e$  associé avec  $\tilde{A}_e$

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

- t-norme  $f_{x_1}(\theta_1) \star \dots \star f_{x_N}(\theta_N)$  des degrés secondaires associés avec  $\theta_1, \dots, \theta_N$

Et ce, pour tous les ensembles Type-2 encastrés dans  $\tilde{A}$ .

### B.2.1 Procédure de Calcul du centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

1. Discrétiser le domaine des  $x$  en  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$ .
2. Discrétiser chaque  $J_{x_j}$  en  $M_j$  points ( $j = 1, \dots, N$ ).
3. Déterminer les  $\prod_{j=1}^N M_j$  ensembles flous type-1 encastrés.
4. Calculer les  $\alpha$  couples  $\left( f_{x_1}(\theta_1) \star \dots \star f_{x_N}(\theta_N), \sum_{i=1}^N x_i \theta_i / \sum_{i=1}^N \theta_i \right)_k$ , avec  $k = 1, \dots, \alpha = \prod_{j=1}^N M_j$ .

Le résultat de ce calcul est un ensemble flou type-1.

**Exemple 6** Soit  $\tilde{A}$  un ensemble flou Type-2.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mu_{\tilde{A}}(2) &= 0.4/0.2 + 0.75/0.4 + 0.10/0.6 \\
 \mu_{\tilde{A}}(3) &= 0.5/0.4 + 0.3/0.6 + 0.5/0.8 \\
 \mu_{\tilde{A}}(4) &= 0.7/0.4 + 0.9/0.6
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Avec  $M_2 = 3$ ;  $M_3 = 3$ ;  $M_4 = 2$ . Le nombre  $\alpha$  de couples à calculer est alors égal à  $\prod_{j=2}^4 M_j = M_2 M_3 M_4 = 18$ .

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

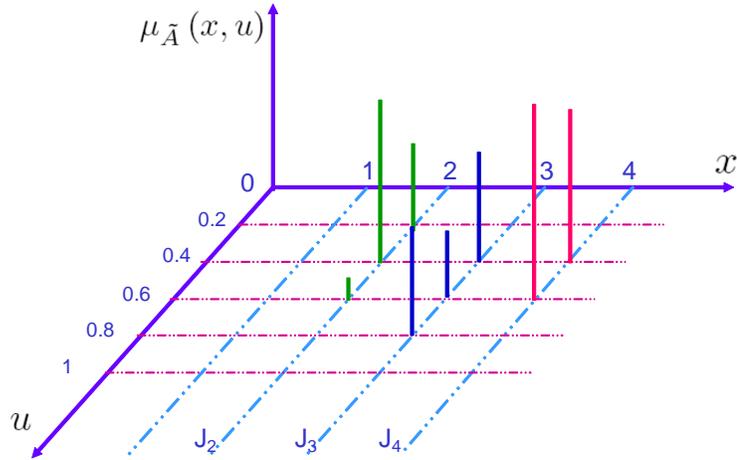


Figure B.1. Exemple d'un ensemble flou Type-2.

Soit le premier ensemble flou type-1 encastré  $A_{e_1}$  défini par :

$$A_{e_1} = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.4/4 \quad (\text{B.14})$$

Son centroïde est exprimé par :

$$\begin{aligned} C_{e_1} &= \frac{\sum_{i=2}^4 x_i \mu_{A_{e_1}}(x_i)}{\sum_{i=2}^4 \mu_{A_{e_1}}(x_i)} \\ &= \frac{x_2 \mu_{A_{e_1}}(x_2) + x_3 \mu_{A_{e_1}}(x_3) + x_4 \mu_{A_{e_1}}(x_4)}{\mu_{A_{e_1}}(x_2) + \mu_{A_{e_1}}(x_3) + \mu_{A_{e_1}}(x_4)} \\ &= \frac{0.2 * 2 + 0.4 * 3 + 0.4 * 4}{0.2 + 0.4 + 0.4} = 3.2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y_{e_1} &= f_2(0.2) \star f_3(0.4) \star f_4(0.4) \\ &= \min(0.4, 0.5, 0.7) = 0.4 \end{aligned}$$

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

De la même manière, nous calculons les  $\alpha = 18$  couples  $(C_{e_k}, y_{e_k})_{k=1, \dots, 18}$ .

$$A_{e_2} = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.6/4$$

$$C_{e_2} = 3.33$$

et :

$$y_{e_2} = f_2(0.2) \star f_3(0.4) \star f_4(0.6)$$

$$= \min(0.4, 0.5, 0.9) = 0.4$$

Les coordonnées de l'ensemble réduit  $C_{\tilde{A}}$  Type-1 qui est le centroïde de  $\tilde{A}$  sont résumées dans le Tableau B.1.

Tableau B.1. Paramètres du centroïde de l'ensemble flou Type-2.

$i$	$C_{e_i}$	$y_{e_i}$
1	3.2	0.4
2	3.33	0.4
3	3.16	0.3
4	3.28	0.3
5	3.14	0.4
6	3.25	0.4
7	3	0.5
8	3.14	0.5
9	3	0.3
10	3.14	0.3
11	3	0.5
12	3.11	0.5
13	2.85	0.1
14	3	0.1
15	2.87	0.1
16	3	0.1
17	2.88	0.1
18	3	0.1

## Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2



Figure B.2. Ensemble flou Type-1  $C_{\tilde{A}}$  réduit de l'ensemble flou Type-2  $\tilde{A}$ .

La Figure B.2 illustre l'ensemble flou Type-1,  $C_{\tilde{A}}$ , qui est le centroïde de l'ensemble flou Type-2  $\tilde{A}$ .

### B.2.2 Centroïde Généralisé d'un Ensemble Flou Type-2

Le centroïde d'un ensemble flou type-1 dans (B.11) est une moyenne pondérée de la forme générale :

$$y(z_1, \dots, z_N, w_1, \dots, w_N) = \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{B.15})$$

où  $z_l \in \mathfrak{R}$  et  $w_l \in [0, 1]$  pour  $l = 1, \dots, N$ . Le principe d'extension (B.8) concerne le cas où  $w_l$  devient un ensemble Type-1. Plusieurs méthodes de réduction de type ainsi que l'extension du CLF TSK type-1 à son congénère Type-2 requièrent le cas où  $w_l$  et  $z_l$  deviennent les deux des ensembles flous type-1. Nous avons besoin donc de généraliser l'extension de (B.15) quand  $w_l$  et  $z_l$  sont des ensembles flous type-1, et ce processus s'appelle le Centroïde Généralisé.

## Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

Ainsi, si  $z_l$  est remplacé par un ensemble flou type-1  $Z_l \subset \mathfrak{R}$  et  $w_l$  est remplacé par un ensemble flou type-1  $W_l \subseteq [0, 1]$ , l'extension de (B.15) devient :

$$GC = \int_{z_1 \in Z_1} \cdots \int_{z_N \in Z_N} \int_{w_1 \in W_1} \cdots \int_{w_N \in W_N} [T_{l=1}^N \mu_{Z_l}(z_l) \star T_{l=1}^N \mu_{W_l}(w_l)] / \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (B.16)$$

où :

- $\mu_{Z_l}(z_l)$  est la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou  $Z_l$ .
- $\mu_{W_l}(w_l)$  est la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou  $W_l$ .
- $T$  et  $\star$  sont les  $t$ -normes utilisées (produit ou minimum).

L'équation (B.16) représente le centroïde généralisé d'un ensemble flou général de Type-2.

### Procédure de Calcul du centroïde Généralisé d'un ensemble Flou Type-2

1. Discrétiser le domaine de chaque ensemble flou type-1  $Z_l$  en un nombre de points  $N_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ).
2. Discrétiser le domaine de chaque ensemble flou type-1  $W_l$  en un nombre de points  $M_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ).
3. Déterminer les  $\prod_{j=1}^N M_j N_j$  combinaisons possibles  $\theta = [z_1, \dots, z_N, w_1, \dots, w_N]^T$ ;  $z_1 \in Z_1$  et  $w_1 \in W_1$
4. Calculer le centroïde généralisé en utilisant (B.16) qui est équivalent au calcul des  $k$  couples  $\left( \left( \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \right)_k, (T_{l=1}^N \mu_{Z_l}(z_l) \star T_{l=1}^N \mu_{W_l}(w_l))_k \right)$ ,  $k = 1, \dots, \prod_{j=1}^N M_j N_j$ .

## Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

Ce calcul devient de plus en plus compliqué avec la croissance de  $M_j$  et  $N_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). C'est le processus le plus compliqué dans un CLF Type-2, raison pour laquelle les scientifiques font recours aux ensembles flous Type-2 Intervalles qui réduisent nettement la complexité de l'algorithme.

### B.2.3 Centroïde Généralisé d'un Ensemble Flou Type-2 Intervalle

Dans le cas d'un ensemble flou intervalle Type-2, toutes les appartenances secondaires sont égales à 1. Par conséquent,  $T_{l=1}^N \mu_{Z_l}(z_l) \star T_{l=1}^N \mu_{W_l}(w_l) = 1$ , ( $l = 1, \dots, M$ ), car  $\mu_{W_l}(w_l) = \mu_{Z_l}(z_l) = 1$ , l'équation (B.16) devient alors :

$$GC = \int_{z_1 \in Z_1} \dots \int_{z_N \in Z_N} \int_{w_1 \in W_1} \dots \int_{w_N \in W_N} 1 / \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} = [y_l, y_r] \quad (\text{B.17})$$

Puisque  $Z_l$  et  $W_l$ , ( $l = 1, \dots, M$ ) sont des ensembles intervalles type-1,  $GC$  est aussi un ensemble intervalle type-1. Supposons que  $Z_l$  est un ensemble intervalle type-1 dont le centre est  $c_l$  et l'écart  $s_l$ , et  $W_l$  est un ensemble intervalle type-1 dont le centre est  $h_l$  et l'écart est  $\Delta_l$  (puisque  $W_l \subseteq [0, 1]$ ,  $h_l \geq \Delta_l$  alors  $w_l \geq 0$ ). Pour calculer le centroïde généralisé d'un ensemble flou Type-2 intervalle, il suffit de déterminer ses deux points limites  $y_l$  et  $y_r$ .

Posons :

$$y = \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{B.18})$$

Et puisque  $w_l \geq 0$  pour tout  $l$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial y}{\partial z_k} = \frac{w_k}{\sum_{l=1}^N w_l} \geq 0$ . Cependant,  $y$  croît avec la croissance de  $z_k$  et pour n'importe quelle combinaison de  $w_1, \dots, w_N$  choisie telle que  $w_l \in W_l$ , ( $l = 1, \dots, N$ ) :

- $y$  est maximisée quand  $z_l = c_l + s_l$  (sachant que  $z_l \in [c_l - s_l, c_l + s_l]$ ) et,

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

- $y$  est minimisée quand  $z_l = c_l - s_l$ .

Les points limites du centroïde généralisé  $GC$  sont obtenus comme suit :

- Le point inférieur du centroïde généralisé  $y_l$  est obtenu en minimisant :

$$\min \frac{\sum_{l=1}^N (c_l - s_l) w_l}{\sum_{l=1}^N w_l},$$

soumis aux contraintes :

$$w_l \in W_l, (l = 1, \dots, N)$$
(B.19)

- Le point supérieur  $y_r$  est obtenu en maximisant :

$$\max \frac{\sum_{l=1}^N (c_l + s_l) w_l}{\sum_{l=1}^N w_l},$$

soumis aux contraintes :

$$w_l \in W_l, (l = 1, \dots, N)$$
(B.20)

Le problème du calcul du centroïde généralisé d'un ensemble flou Type-2 intervalle devient alors un problème d'*optimisation* de:

$$y(w_1, \dots, w_N) = \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l},$$

soumis aux contraintes :

$$w_l \in [h_l - \Delta_l, h_l + \Delta_l], \quad l = 1, \dots, N$$
(B.21)

où  $h_l \geq \Delta_l, l = 1, \dots, N$ .

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

**Algorithme 1** *Algorithme d'Optimisation [77]*

Soit la dérivée partielle de  $y$  par rapport à  $w_k$  :

$$\frac{\partial}{\partial w_k} y(w_1, \dots, w_N) = \frac{\partial}{\partial w_k} \left[ \frac{\sum_{l=1}^N z_l w_l}{\sum_{l=1}^N w_l} \right] = \frac{z_k - y(w_1, \dots, w_N)}{\sum_{l=1}^N w_l} \quad (\text{B.22})$$

Et puisque  $\sum_{l=1}^N w_l > 0$ ;

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial w_k} y(w_1, \dots, w_N) \geq 0 & \text{si } z_k \geq y(w_1, \dots, w_N) \\ \frac{\partial}{\partial w_k} y(w_1, \dots, w_N) \leq 0 & \text{si } z_k \leq y(w_1, \dots, w_N) \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Si } z_k > y(w_1, \dots, w_N) & \quad y(w_1, \dots, w_N) \text{ augmente avec l'augmentation de } w_k \\ \text{Si } z_k < y(w_1, \dots, w_N) & \quad y(w_1, \dots, w_N) \text{ augmente avec la diminution de } w_k \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

On sait que les valeurs maximale et minimale que  $w_k$  puisse atteindre sont respectivement  $h_k + \Delta_k$  et  $h_k - \Delta_k$ . De (B.24):

$y(w_1, \dots, w_N)$  atteint sa valeur maximale quand :

$$\begin{cases} w_k = h_k + \Delta_k \text{ pour les valeurs de } k \text{ pour lesquelles } z_k > y(w_1, \dots, w_N) \\ w_k = h_k - \Delta_k \text{ pour les valeurs de } k \text{ pour lesquelles } z_k < y(w_1, \dots, w_N) \end{cases}$$

Similairement,  $y(w_1, \dots, w_N)$  atteint sa valeur minimale quand :

$$\begin{cases} w_k = h_k + \Delta_k \text{ pour les valeurs de } k \text{ pour lesquelles } z_k < y(w_1, \dots, w_N) \\ w_k = h_k - \Delta_k \text{ pour les valeurs de } k \text{ pour lesquelles } z_k > y(w_1, \dots, w_N) \end{cases}$$

**Théorème 5 (Karnik & Mendel (1998))** (a) *Le maximum de  $y(w_1, \dots, w_N)$  peut être obtenu par la procédure itérative suivante. Mettre  $z_l = c_l + s_l$  pour  $l = 1, \dots, N$ , nous supposons que  $z_l$  sont triés dans l'ordre croissant; i.e.;  $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_N$ . Alors:*

Annexe B. Centroïde d'un Ensemble Flou Type-2

1. Initialiser  $w_l$  en mettant  $w_l = h_l$  pour  $l = 1, \dots, N$ , puis calculer  $y' = y(h_1, h_2, \dots, h_N)$  en utilisant (B.18).
2. Trouver  $k$  ( $1 \leq k \leq N - 1$ ) tel que  $z_k \leq y' \leq z_{k+1}$ .
3. Mettre  $w_l = h_l - \Delta_l$  pour  $l \leq k$  et  $w_l = h_l + \Delta_l$  pour  $l \geq k + 1$ , puis calculer  $y' = y(h_1 - \Delta_1, \dots, h_k - \Delta_k, h_{k+1} + \Delta_{k+1}, \dots, h_N + \Delta_N)$  en utilisant (B.18).
4. Tester si  $y'' = y'$ . Si oui, arrêter.  $y''$  est la valeur maximale de  $y(w_1, \dots, w_N)$ . Sinon, aller à Etape 5.
5. Mettre  $y'$  égal à  $y''$ . Aller à Etape 2.

(b) Le minimum de  $y(w_1, \dots, w_N)$  peut être obtenu par une procédure similaire à (a). Sauf que:

1. Mettre  $z_l = c_l - s_l$  pour  $l = 1, \dots, N$ .
2. Dans l'étape 3, mettre  $w_l = h_l + \Delta_l$  pour  $l \leq k$  et  $w_l = h_l - \Delta_l$  pour  $l \geq k + 1$ , puis calculer  $y' = y(h_1 + \Delta_1, \dots, h_k + \Delta_k, h_{k+1} - \Delta_{k+1}, \dots, h_N - \Delta_N)$  en utilisant (B.18).

# Références

- [1] J. F. Froger and R. Lutz, *La structure cachée du réel*, E. DésIris, Ed., September 2009.
- [2] B. Russell, “Vagueness,” *The Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, vol. 1, pp. 84–92, June 1923.
- [3] M. Black, “Vagueness. an exercise in logical analysis,” *Philosophy of Science*, vol. 4, no. 4, pp. 427–455, October 1937.
- [4] J. Lukasiewicz, “O logice trójwartosciowej (in polish),” in *Ruch filozoficzny*, vol. 5, 1920, p. 170–171.
- [5] ———, *Selected works*, North-Holland, Amsterdam, 1970, ch. On three-valued logic, p. 87–88, english translation of ‘O logice trójwartosciowej (in Polish)’.
- [6] ———, *On 3-valued Logic*, P. L. -. S. McCall, Ed. Oxford University Press, 1967.
- [7] ———, *Many-valued systems of propositional logic*, P. L. -. S. McCall, Ed. Oxford University Press, 1967.
- [8] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [9] J. M. Mendel, “Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial,” *Proceedings of IEEE*, vol. 83, pp. 345–377, March 1995.
- [10] J.-S. R. Jang and C.-T. Sun, “Neuro-fuzzy modeling and control,” *Proceedings of IEEE*, vol. 83, pp. 378–406, Mars 1995.
- [11] J. S. R. Jang, C. T. Sun, and E. Mizutani, *Neuro fuzzy and soft-computing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

## Références

- [12] J. M. Mendel, “Type-2 fuzzy sets: Some questions and answers,” *IEEE Connections, Newsletter of the IEEE Neural Networks Society*, vol. 1, pp. 10–13, August 2003.
- [13] G. J. Klir and T. A. Folger, *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [14] L. A. Zadeh, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i,” *Inf. Sci.*, vol. 8, no. 3, pp. 199–249, 1975.
- [15] J. M. Mendel, *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [16] N. N. Karnik and J. M. Mendel, “Type-2 tsk fuzzy logic systems,” *IEEE Trans. on Fuzzy systems*, vol. 7, no. 6, pp. 643–658, December 1999.
- [17] Q. Liang and J. M. Mendel, “An introduction to type-2 tsk fuzzy logic systems,” in *FUZZ-IEEE’99*, Seoul, Korea, 1999, pp. 1534–1539.
- [18] L. Wang, “Fuzzy systems are universal approximators,” in *Proc. IEEE Int’l. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, CA, 1992, pp. 1163–1170.
- [19] L. X. Wang and J. M. Mendel, “Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least squares learning,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 3, no. 5, pp. 807–814, September 1992.
- [20] J. Mendel and G. Mouzouris, “Designing fuzzy logic systems,” *IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, no. 11, pp. 885–895, 1997.
- [21] L. X. Wang and J. M. Mendel, “Analysis and design of fuzzy logic controller,” USC-SIPI Rep. 184, Tech. Rep., 1991.
- [22] J. Jang, “Self-learning fuzzy controllers based on temporal back propagation,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 714–723, 1992.
- [23] L. X. Wang and J. M. Mendel, “Back-propagation fuzzy systems as non linear dynamic system identifiers,” in *IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, 1992.
- [24] H. Berenji and P. Khedkar, “Learning and tuning fuzzy logic controllers through reinforcements,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, no. 5, pp. 724–740, 1992.
- [25] N. Boumella, K. Djouani, and S. Iqbal, “A new design of fuzzy logic controller based on generalized orthogonality principle,” in *IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, CIRA 2009*, South Korea, December 2009, pp. 497–502.

## Références

- [26] M. Casdagli, “A dynamical systems approach to modeling. input-output systems,” *Nonlinear Modeling and Forecasting, SFI Studies in the Sciences of Complexity Process*, vol. 12, pp. 265–281, 1992.
- [27] N. Boumella, M. Boulemden, S. Iqbal, and K. Djouani, “Designing a global fuzzy logic forecaster for chaotic time series,” in *22nd International Symposium Intelligent Manufacturing Automation DAAAM 2011*, Vienna, Austria, November 2011, pp. 1473–1474.
- [28] N. Boumella, M. Boulemden, K. Djouani, and S. Iqbal, “A new approach for enhancing forecaster performance for chaotic time series,” *International Journal of Intelligent Control and Systems (IJICS)*, vol. 17, no. 2, pp. 41–46, June 2012.
- [29] N. N. Karnik, Q. Liang, F. Liu, D. Wu, J. Jhoo, and J. M. Mendel, “Type-2 fuzzy logic software,” University of Southern California., 1998, <http://sipi.usc.edu/mendel/software>.
- [30] N. Boumella, K. Djouani, and M. Boulemden, “On an interval type-2 tsk fls a1-c1 consequent parameters tuning,” in *SSCI-T2FUZZ’2011 IEEE Symposium on Advances in Type-2 Fuzzy Logic Systems*, Paris, France, April 2011, pp. 150–156.
- [31] ———, “A robust interval type-2 tsk fuzzy logic system design based on chebyshev fitting,” *International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)*, vol. 10, no. 4, pp. 727–736, August 2012.
- [32] R. Cocchi, S. Shenker, D. Estrin, and L. Zhang, “Pricing in computer networks: motivation, formulation, and example.” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 1, no. 6, pp. 614–627, December 1993.
- [33] C. Courcoubetis, V. A. Siris, and G. D. Stamoulis, “Integration of pricing and flow control for available bit rate services in atm networks,” in *In Proceedings of the IEEE GLOBECOM*, 1996, pp. 644–648.
- [34] P. C. Fishburn and A. M. Odlyzko, “Dynamic behavior of differential pricing and quality of service options for the internet,” in *Proc. First Intern. Conf. on Information and Computation Economies (ICE-98)*, ACM. Press, 1998, pp. 128–139.
- [35] L. A. DaSilva, “Pricing for qos-enabled networks: A survey,” *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, vol. 3, no. 2, pp. 2–8, 2000.
- [36] S. Shih, H. Katz, and D. Joseph, “Pricing experiments for a computer-telephony-service usage allocation,” in *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM’01)*, vol. 4, Piscataway, NJ, USA, November 2001, pp. 2450–2454.

## Références

- [37] S. Ghosh, Q. Razouqi, H. J. Schumacher, and A. Celmins, “A survey of recent advances in fuzzy logic in telecommunications, networks and new challenges,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6, pp. 443–447, August 1998.
- [38] N. Boumella and K. Djouani, “A type-2 fuzzy logic decision system for call admission control in next generation mobile networks,” in *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2010)*, Miami, Florida, December 2010, pp. 1–6.
- [39] E. Hisdal, “The if then else statement and interval-valued fuzzy sets of higher type,” *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 15, no. 4, pp. 385–455, 1981.
- [40] R. F. Popoli and J. Mendel, “Heuristically constrained estimation for intelligent signal processing,” in *IEEE Decision and Control*, vol. 26, December 1987, pp. 1041–1046.
- [41] ———, “Estimation using subjective knowledge with tracking applications,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 3, pp. 610–623, 1993.
- [42] E. H. Mamdani, “Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant,” *Proceedings of IEEE*, vol. 121, no. 12, pp. 1585–1588, 1974.
- [43] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116–132, February 1985.
- [44] P. M. Larsen, “Industrial applications of fuzzy logic control,” *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 12, no. 1, p. 3–10, January 1980.
- [45] K. Tanaka, M. Sano, and H. Watanabe, “Modeling and control of carbon monoxide concentration using a neuro-fuzzy technique,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 3, pp. 271–279, Aug. 1995.
- [46] K. Tanaka and M. Sugeno, “Introduction of fuzzy modeling,” in *Fuzzy Systems Modeling and Control*. Boston: Kluwer Academic, 1998, pp. 63–89.
- [47] Y. Kim and J. Mendel, “Fuzzy basis functions: comparisons with other basis functions,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 158–168, May 1995.
- [48] D. F. Specht, “A general regression neural network,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 2, no. 6, pp. 568–576, November 1991.

## Références

- [49] N. Boumella, J. C. Figueroa, and S. Iqbal, *Fuzzy Controllers- Recent Advances in Theory and Applications*. Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia: InTech, September 2012, no. ISBN: 978-953-51-0759-0, ch. Enhancing Fuzzy Controllers Using Generalized Orthogonality Principle, pp. 367–384.
- [50] S. i. Horikawa, T. Furuhashi, and Y. Uchikawa, “On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm,” *Trans. Neur. Netw.*, vol. 3, no. 5, pp. 801–806, September 1992.
- [51] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, T. Edition, Ed. Brooks/Cole, February 1988.
- [52] M. C. Mackey and L. Glass, “Oscillation and chaos in physiological control systems,” *Science*, vol. 197, no. 4300, pp. 287–289, July 1977.
- [53] J. M. Mendel, “Fuzzy sets for words: a new beginning,” in *Proc. of IEEE Int’l. Conf. on Fuzzy Systems*, St. Louis, MO, 2003, pp. 37–42.
- [54] N. N. Karnik and J. M. Mendel, “An introduction to type-2 fuzzy logic systems,” University of Southern California, Los Angeles, CA, Tech. Rep., June 1998.
- [55] J. M. Mendel, “On the importance of interval sets in type-2 fuzzy logic systems,” in *Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS Int’l. Conf.*, Vancouver, British Columbia, Canada, July 2001, pp. 1647–1652.
- [56] J. M. Mendel and Q. Liang, “Pictorial comparisons of type-1 and type-2 fuzzy logic systems,” in *in Proc. IASTED Int’l Conference on Intelligent Systems Control*, Santa Barbara, CA, October 1999.
- [57] Q. Liang and J. M. Mendel, “Interval type-2 fuzzy logic systems: Theory and design,” *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, vol. 8, no. 5, October 2000.
- [58] G. H. Golub and L. B. Smith, “Algorithm 414: Chebyshev approximation of continuous functions by a chebyshev system of functions,” *Communications of the ACM*, vol. 14, no. 3, pp. 737–746, November 1971.
- [59] N.I.Achieser, *Theory of Approximation*. Frederick’Ungar Publ. Co., New York, 1956.
- [60] J. R. Castro, O. Castillo, P. Melin, and A. R. Díaz, “A hybrid learning algorithm for a class of interval type-2 fuzzy neural networks,” *International Journal of Information Sciences*, vol. 179, no. 13, pp. 2175–2193, June 2009.

## Références

- [61] J. M. Holtzman, “Coping with broadband traffic uncertainties: Statistical uncertainty, fuzziness, neural networks,” in *IEEE GLOBECOM’ 90*, vol. 1, San Diego, CA, December 1990, pp. 7–11.
- [62] H. M. Prade, “An outline of fuzzy or possibilistic models for queuing systems,” in *Symp. Policy Anal. Inform. Syst.*, Durham, NC, 1980, pp. 147–153.
- [63] R. J. Li and E. S. Lee, “Analysis of fuzzy queues,” *Comput. Math. Applicat.*, vol. 17, no. 7, pp. 1143–1147, 1989.
- [64] Y. Tanaka and S. Hosaka, “Fuzzy control of telecommunications networks using learning techniques,” *Electronics and Communications in Japan*, vol. 76, no. 12, p. 41–51, December 1993.
- [65] E. D. Fitkov-Norris and A. Khanifar, “Dynamic pricing in mobile communication systems,” in *First International Conference on 3G Mobile Communication Technologies*, 2000, pp. 416–420.
- [66] J. Hou and S. Papavassiliou, “Influence-based channel reservation scheme for mobile cellular,” in *IEEE International Symposium Computers and Communications*, Tunisia, July 2001, pp. 218–223.
- [67] S. Tohmé, R. Naja, and L. Decreusefond, *Analyse quantitative de réseaux*, IRS, Université de Versailles, Versailles, France, 2006.
- [68] D. Hong and S. S. Rappaport, “Traffic model and performance analysis for cellular mobile radio telephone systems with prioritized and non-prioritized handoff procedures,” in *ICC*, 1986, pp. 1146–1150.
- [69] S. A. El-Dolil, W. C. Wong, and R. Steele, “Teletraffic performance of highway microcells with overlay macrocell,” *IEEE J. Sel. A. Commun.*, vol. 7, no. 1, pp. 71–78, September 2006.
- [70] R. Steele and M. Nofal, “Teletraffic performance of microcellular personal communication networks,” in *Communications, Speech and Vision, IEE Proceedings I*, vol. 139, no. 4, August 1992, pp. 448–461.
- [71] H. Xie and S. Kuek, “Priority handoff analysis,” in *IEEE VTC ’93*, 1993, pp. 855–858.
- [72] Q.-A. Zeng, K. Mukumoto, and A. Fukuda, “Performance analysis of mobile cellular radio systems with two-level priority reservation handoff procedure,” *IEICE transactions on communications*, vol. 80, no. 4, pp. 598–604, April 1997.

## Références

- [73] J. M. Mendel, “Type-2 fuzzy sets and systems: An overview,” *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 2, no. 1, pp. 20–29, February 2007.
- [74] ———, “Advances in type-2 fuzzy sets and systems,” *Information Sciences*, vol. 177, no. 1, pp. 84–110, 2007.
- [75] J. Hou, J. Yang, and S. Papavassiliou, “Integration of pricing with call admission control to meet qos requirements in cellular networks,” *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, vol. 13, no. 9, pp. 898–910, 2002.
- [76] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [77] N. Karnik and J. Mendel, “Introduction to type-2 fuzzy logic systems,” in *IEEE Fuzzy Systems*, vol. 2, Anchorage, AK, May 1998, pp. 915–920.