



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE HADJ LAKHDAR  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT GENIE INDUSTRIEL



## MEMOIRE DE MAGISTER

PRESENTE AU

Laboratoire d'Automatique et Productique

LAP

*En vue de l'obtention d'un diplôme de magister*

**Spécialité**

Génie Industriel

Par

**BEN FERROUDJ Hafiza**  
Ingénieur en Génie industriel

Thème :

---

Modélisation stochastique pour l'évaluation  
des indicateurs de la sûreté de fonctionnement  
d'un système de production  
Cas de l'entreprise DOMELEC

---

**Le jury composé de :**

L.H. MOUSS

N. K. MOUSS

A. DIB

M. DJEBABRA

R. FRITAS

MC. Université de Batna

MC. Université de Batna

MC. CU. Oum-Elbouaghi

Pr. Université de Batna

Mr. Université de Batna

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Co-encadreur

**Année : 2010**

# Remerciements

*Les travaux présentés dans ce mémoire ont été préparés dans le Laboratoire d'Automatique et de Productique (LAP) au sein de l'équipe Gestion Industrielle et Logistique (GIL) dirigée par la docteur Nadia Kinza Mouss .*

*J'exprime toute ma reconnaissance envers la directrice de ce travail Dr.N.K.MOUSS pour la rigueur, les nombreuses initiatives et le sens des responsabilités dont elle a toujours fait preuve, et qui constituent des exemples que j'espère pouvoir suivre dignement. Je la remercie par ailleurs pour les remarques et conseils qu'elle m'a donnés dans le cadre de l'examen de ce mémoire.*

*Je remercie vivement Mr. R. FRITAS pour ses précieux conseils et son soutien dont j'ai bénéficié tout au long de notre travail.*

*Je tiens plus particulièrement à remercier : Dr. L.H. MOUSS, Dr. A. DIB et Pr. M. DJEBABRA pour nous avoir fait l'honneur d'être membres de jury. Ainsi que pour avoir consacré une partie de leur temps précieux pour lire et corriger ce mémoire.*

*Je remercie tous ceux qui ont aidé de loin ou de près dans la réalisation de ce mémoire.*

# *Dédicace*

*A mes parents*

*A mon fiancé*

*A mes sœurs*

*A mes frères*

*A Fayrouz*

*A Hadjer, Nedjoua, Houda et Wafia*

*BEN FERROUDJ Hafiza*

## Table des matières

Table des matières .....	ii
Liste des figures .....	v
Liste des tableaux .....	vi
<b>Introduction générale</b> .....	1

### Chapitre I : Présentation de l'entreprise

I.1 Présentation de l'entreprise et sont processus de fabrication .....	4
I.1.1 Présentation de l'entreprise .....	4
I.1.2 Présentation des unités du processus de fabrication.....	4
Unité de fabrication métallique .....	4
Unité de fabrication plastique.....	7
Unité de montage.....	7
I.1.3 Produit fabriqué par l'entreprise .....	8
Les produits de la gamme <i>ITHRI</i> .....	8
Les produits de la gamme <i>TASSILI</i> .....	9
I.1.4 Présentation du processus de fabrication du produit <i>TASSILI</i> .....	9

### Chapitre II : Modélisation par processus markovien

II.1 Introduction.....	11
II.2 La sûreté de fonctionnement .....	11
II.2.1 De la fiabilité à la sûreté de fonctionnement .....	11
II.2.2 La sûreté de fonctionnement dans les systèmes de production .....	12
II.2.3 Comment étudier la sûreté de fonctionnement .....	13
II.3 Approche markovienne.....	15
II.3.1 Principes.....	15
II.3.2 Grandeurs de la sûreté de fonctionnement et système markovien.....	16
II.3.3 Modélisation d'une installation par un processus markovien.....	17
II.3.3.1 Description d'un composant .....	17
Taux de défaillance.....	18
Taux de réparation .....	18
II.3.3.2 Modélisation d'un composant .....	19
II.3.3.3 Système de N composants indépendants .....	20
II.4 Modélisation du processus d'interrupteur étudié.....	21
II.4.1 Présentation de la ligne .....	21
II.4.2 Données industrielles .....	22
II.4.3 Structure de la matrice de transition .....	23

II.4.4 Résolution du système différentiel .....	24
II.5 Conclusion .....	26

### **Chapitre III : Intégration de la maintenance**

III.1 Introduction .....	27
III.2 La fonction maintenance .....	27
III.2.1 Définitions .....	27
III.2.2 Différents aspects de la maintenance.....	28
1_Maintenance corrective.....	28
2_Maintenance préventive.....	28
3_Maintenance systématique.....	29
4_Maintenance conditionnelle.....	29
III.3 Les Réseaux de Petri comme outil de modélisation.....	30
III.3.1 Liaison entre RdPS et Processus de Markov .....	31
III.3.2 Modélisation de la politique de maintenance .....	32
III.3.3 Application RdPSGSyI à la modélisation des SdP.....	34
III.4 Description du modèle.....	38
III.5 Modélisation modulaire .....	39
III.5.1 Principe de l’algorithme de décomposition/recomposition.....	41
III.5.2 Déterminer les matrices de transitions des cellules .....	43
III.6 Conclusion.....	48

### **Chapitre IV : La construction des indicateurs de la sûreté de fonctionnement**

IV.1 Introduction .....	49
IV.2 Les indicateurs de la sûreté de fonctionnement.....	49
IV.2.1 Le besoin d'indicateurs .....	49
IV.2.2 Méthode de calcul des indicateurs de sûreté de fonctionnement .....	50
IV.3 Résolution approchée .....	50
IV.4 Etude de comportement stationnaire .....	51
IV.5 Construction des indicateurs .....	54
IV.5.1 La disponibilité .....	54
IV.5.2 La fiabilité .....	57
IV.5.3 La maintenabilité.....	59
IV.6 Détermination du tableau de bord des indicateurs .....	60
IV.7 Conclusion.....	72

## **Chapitre V: Classement des équipements par ordre de priorité pour la maintenance**

V.1 Introduction .....	63
V.2 Détermination des machines de production à maintenir.....	63
V.2.1 L'ensemble des actions.....	64
V.2.2 La famille de critères .....	64
1_ Les critères retenus .....	64
2_ Les coefficients d'importance relative des critères .....	64
V.2.3 L'agrégation multicritère .....	64
V.2.3.1 Choix de la méthode .....	64
V.2.3.2 Application de la méthode ELECTRE III .....	65
1. Tableau des performances .....	66
2. Indices de concordance.....	68
3. Indice de discordance .....	71
4. Degré de crédibilité.....	72
5. Classement des scénari .....	74
6. Résultat de classement .....	75
V.3 Etude de différentes politiques de maintenance .....	76
V.4 Indicateurs et critères de choix pour la ligne .....	78
V.5 Conclusion .....	80
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>81</b>
<b><u>Bibliographie</u>.....</b>	<b>84</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>88</b>

## Liste des figures

Figure I.1 : Machine simple frappe .....	4
Figure I.2 : Machine double frappe.....	5
Figure I.3 : Machine à fondre les têtes de vis.....	5
Figure I.4 : Machines à rouler les vis .....	5
Figure I.5 : Ligne de décolletage.....	6
Figure I.6 : Ligne de découpe.....	7
Figure I.7 : Unité de fabrication plastique.....	7
Figure I.8 : les produits de la gamme ITHRI.....	8
Figure I.9 : les produits de la gamme TASSILI.....	9
Figure I.10 : interrupteur simple allumage TASSILI.....	10
Figure II.1 : évaluation de taux de défaillance en fonction de l'âge du composant.....	18
Figure II.2 : probabilité de réparation au cours de temps.....	19
Figure II. 3: Structure physique de la ligne d'interrupteur simple allumage.....	21
Figure II.4 : La disponibilité.....	25
Figure II.5: La fiabilité.....	25
Figure II.6: La maintenabilité.....	26
Figure III.1: différents aspects de la maintenance.....	30
Figure III.2: Evolution du nombre d'états et d'éléments.....	31
Figure III.3 : Liaison entre réseau de RdPS et PdM.....	32
Figure III.4 : Les temps d'intervention d'une maintenance corrective.....	32
Figure III.5 : Les temps d'intervention d'une maintenance préventive.....	33
Figure III.6 : machine générique, b: stock générique, c : maintenance générique.....	35
Figure III.8: RdPSGSyI de la ligne.....	37
Figure III.9: principe cellules élémentaires.....	40
Figure III.10: Représentation schématique du groupement en cellules simples.....	40
Figure III.11: PdM pour les cas SM, MS, M <sup>2</sup> .....	42
Figure V.1 : Calcul de l'indice de concordance par interpolation linéaire.....	69
Figure V.2 : Calcul de l'indice de discordance par interpolation linéaire.....	72
Figure V.3 : Classement des machines par ordre de priorité pour la maintenance.....	76
Figure V.4 : Probabilités de panne et d'arrêt pour maintenance.....	77
Figure V.5 : Variation de disponibilité opérationnelle des machines M1, M7 et M9.....	79
Figure V.6 : Variation de temps moyen de bon fonctionnement des machines M7, M1 et M9.....	79
Figure V.7 : Variation de temps moyen de réparation des machines M7, M1 et M9.....	79

## Liste des tableaux

Tableau II.1 : Les principales méthodes inductives et déductives.....	15
Tableau II.2 : Paramètres de chaque machine de la ligne étudiée.....	22
Tableau IV.1: Probabilité d'état des machines.....	53
Tableau IV.2 : Probabilité d'état de Maintenance.....	54
Tableau IV.3 : Probabilité d'état des stocks.....	54
Tableau IV.4 : Tableau de bord des indicateurs.....	61
Tableau V.1: Tableau des performances.....	67
Tableau V.2: La matrice de concordance.....	70
Tableau V.3: La matrice de degrés de crédibilité .....	73
Tableau V.4 : Table des critères de choix.....	78

## **INTRODUCTION GENERALE**

**L'**une des retombées du développement industriel est la complexité croissante des machines et des équipements de production. Aussi, pour satisfaire une demande de produit avec une meilleure qualité et à des prix compétitifs tout en respectant les délais de livraison, le développement des ateliers manufacturiers doit intégrer à la fois automatisation et flexibilité. D'où l'augmentation d'occurrence du risque des pannes qui se traduit par un temps croissant de détection et de réparation des machines. Cela a pour effet la diminution de la disponibilité du système globale.

Ainsi, comment assurer le fonctionnement des machines, maîtriser les délais de livraison et améliorer la disponibilité des ateliers manufacturiers ?

Pour rester compétitifs, les ateliers de production de plus en plus complexes, doivent assurer la continuité de leurs services et la qualité de leurs produits. La conception et l'exploitation d'un Système de Production (SdP), dans le but de satisfaire ces exigences, nécessitent des méthodes de la Sûreté de Fonctionnement (SdF). Ainsi pour rester compétitifs sur le marché mondial, un atelier manufacturier a besoin d'un système capable de maintenir le fonctionnement de l'appareil de production au plus haut niveau d'efficacité. Dans ce domaine, la *maintenance* est en train de s'imposer rapidement comme la meilleure solution permettant d'améliorer le niveau de SdF des SdP.

Le maintien des équipements de production est un enjeu clé pour la productivité aussi bien que pour la qualité de produit. La maintenance doit commencer dès la phase de conception d'un SdP, participer à l'installation et à la mise en route des machines et, assurer une surveillance permanente de l'atelier. Elle consiste à mettre en œuvre les objectifs fixés par la direction de production. Maintenir et rétablir contient respectivement les notions de prévention et correction.

Pour déterminer les paramètres de la SdF, il est nécessaire de posséder à une représentation du système lui-même, c'est-à-dire le modéliser. Parmi les nombreux outils de modélisation, les Réseaux de Petri Stochastique (RdPS) largement utilisés dans la SdF des SdP. En effet, ils offrent à la fois une puissance de description des systèmes, une méthode formelle, systématique et structurée, et une richesse de traitement et d'interprétation des modèles résultants. De plus, comme ils intègrent un aspect stochastique, ils permettent de prendre en compte des notions aussi aléatoires que le taux de panne d'une machine, le taux de

réparation ou encore son taux de service. Le graphe de marquage du RdPS permet sa transformation en Processus de Markov (PdM). Celui-ci offre de nombreuses possibilités de calcul telles que les grandeurs de la SdF. Cependant, la complexité des systèmes manufacturiers actuels est telle, que l'utilisation classique de ces outils présente certaines limites. En effet, les PdM obtenus pour ces systèmes présentent un nombre d'états importants qui rend leur stockage et leur analyse très long, voir même impossible ! Pour contourner ce problème, il s'agit de profiter de la structure modulaire du SdP pour opérer une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle. Dans ce cas la, on utilise *les Réseaux de Petri Stochastique Généralisés à Synchronisation Internes (RdPSGSyIs)*. Ces derniers permettent de réaliser une modélisation modulaire et fonctionnelle. Chaque fonctionnalité du système est décrite par un RdPSG et, ces différents réseaux sont synchronisés entre eux par le biais d'émissions/réceptions de données.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du laboratoire d'automatique et productique LAP. Notre premier objectif consiste à intégrer la fonction maintenance dans le SdP dans le but d'améliorer sa SdF. Cette étude doit se faire depuis la phase de conception jusqu'à la phase d'exploitation. Le deuxième objectif concerne l'analyse de l'impact de la fonction maintenance dans le but de choisir la politique de maintenance la mieux adaptée à implanter. Pour ce faire, il s'agit d'abord de construire un tableau de bord composé d'indicateurs significatifs à interpréter et analyser. Ensuite, la présentation d'une approche multicritère d'aide à la Décision permettant d'apporter une solution pour la mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance.

Le mémoire s'organise de la façon suivante :

- Le premier chapitre est réservé à la présentation de l'entreprise cible à savoir l'entreprise d'électricité domestique **DOMELEC**.
- Le deuxième chapitre consiste à connaître l'évolution des grandeurs de SdF de la ligne d'interrupteur simple allumage à l'aide d'une modélisation markovienne.
- Le 3<sup>ème</sup> chapitre traite l'approche modulaire ainsi que la modélisation par RdPS. Nous donnons des modèles génériques de référence pour chaque composant du SdP. A partir de ce modèle, le graphe de Markov généré est entièrement défini par sa matrice des taux de transitions. Cette matrice rend compte de tous les états du graphe, de tous les arcs permettant d'évoluer d'un état à un autre ainsi que des paramètres qui leur sont associés.

- Le 4<sup>ème</sup> chapitre fait l'objet d'une méthode de résolution numérique permettant de calculer les probabilités d'états des composants de la ligne d'interrupteur. Ces probabilités nous permettent d'en déduire quelques indicateurs de SdF.
- Le 5<sup>ème</sup> chapitre présente le problème du classement des équipements de production par ordre de priorité dans le contexte de mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance au niveau de l'entreprise **DOMELEC**. Nous introduisons une approche multicritères pour la mise au point d'un système d'aide à la décision pour la maintenance.

---

# *Chapitre I : Présentation de l'entreprise*

---

## I.1 Présentation de l'entreprise et sont processus de fabrication :

### I.1.1 Présentation de l'entreprise :

L'entreprise **DOMELEC** (appareillage électrique d'installations) est située à 30KM du chef lieu de la wilaya KHENCHELA (route national N°88 Ain Touila) produit depuis 1991 du matériel électrique basse tension à usage domestique.

L'entreprise est entrée en production avec une capacité qui représente l'équivalent de 250.000 logements par an.

### I.1.2 Présentation des unités du processus de fabrication:

Trois unités principales composent le processus de production :

- Unité de fabrication métallique
- Unité de fabrication plastique
- Unité de montage

#### A) Unité de fabrication métallique:

Elle regroupe trois lignes de production : ligne de découpe, décolletage et visseries.

- **Ligne de visseries** : elle regroupe les machines suivantes :
  - **Machine simple frappe** : cette machine est destinée à la fabrication des vis de petits diamètres.



*Figure I.1* : Machine simple frappe

- **Machine double frappe** : destinée à la fabrication des vis de grands diamètres.



*Figure I.2* : Machine double frappe

- **Machine à fondre les têtes de vis** : cette machine fend les têtes de vis fabriquée par les machines simple et double frappe sauf les vis indevissable.



*Figure I.3* : Machine à fondre les têtes de vis

- **Machines à rouler les vis** : cette machine sert à fileter toutes les vis.



*Figure I.4* : Machines à rouler les vis

- **Ligne de décolletage :** cette ligne est composée de cinq machines de transfert variomatic :
  - **Machine de transfert MT1 (variomatic 24300101) :** destinée à la fabrication des bornes contact, des bornes de pont, des broches de terre et des fausses bornes.
  - **Machine de transfert MT2 (variomatic 24300102) :** destinée à la fabrication des broches TV mal et femelle.
  - **Machine de transfert MT3 (variomatic 24300103) :** destinée à la fabrication de l'écrou de griffe.
  - **Machine de transfert MT4 (variomatic 24300104) :** destinée à la fabrication du plot de barrette.
  - **Machine de transfert MT5 (variomatic 24300105) :** destinée à la fabrication de borne de pont et pont de barrette.



*Figure I.5 : Ligne de décolletage*

Les composants de visserie (les vis) est les composants métalliques une fois finalisés, sont envoyés dans des bacs vers la machine de dégraissage à l'aide de palettes. Les composants dégraissés sont refroidis puis soufflés à l'aide d'air comprimé. Ils sont ensuite placés dans des bacs ou sacs et rangés sur des palettes.

- **Ligne de découpe :** cette ligne est composée de 03 machines de découpe :
  - **Machine de découpe MD1 (chappuis 24400101) :** cette machine fabrique les alvéoles.

- **Machine de découpe MD2 (chappuis 24400102)** : destinée à la fabrication de balanciers, ponts, contacts central et latéral.
- **Machine de découpe MD3 (chappuis 24400103)** : cette machine fabrique les griffes.



*Figure 1.6* : Ligne de découpe

### **B) Unité de fabrication plastique :**

Elle est constituée de 18 machines d'injection plastique.



*Figure 1.7* : Unité de fabrication plastique

### **C) Unité de montage :**

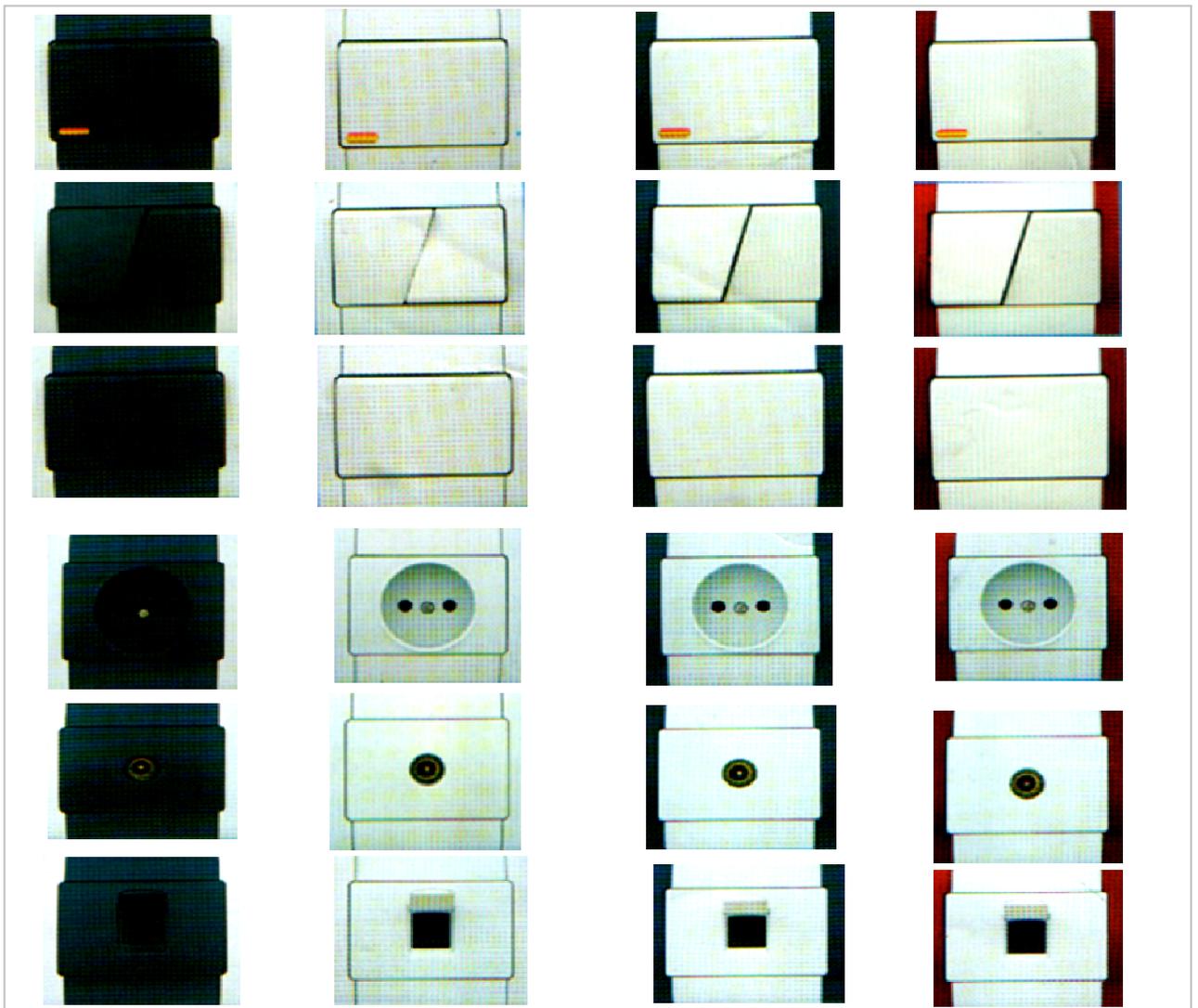
Au niveau de cette unité se fait l'assemblage des différents composants telle que : cadre, bouton, fausse borne, borne de contact etc.

### I.1.3 Produit fabriqué par l'entreprise :

*DOMELEC* fabrique deux gammes diversifiées de produit d'appareillage électrique à l'usage domestique à savoir : *ITHRI* et *TASSILI*.

A) Les produits de la gamme *ITHRI* : nous citons (*Figure I.8*) :

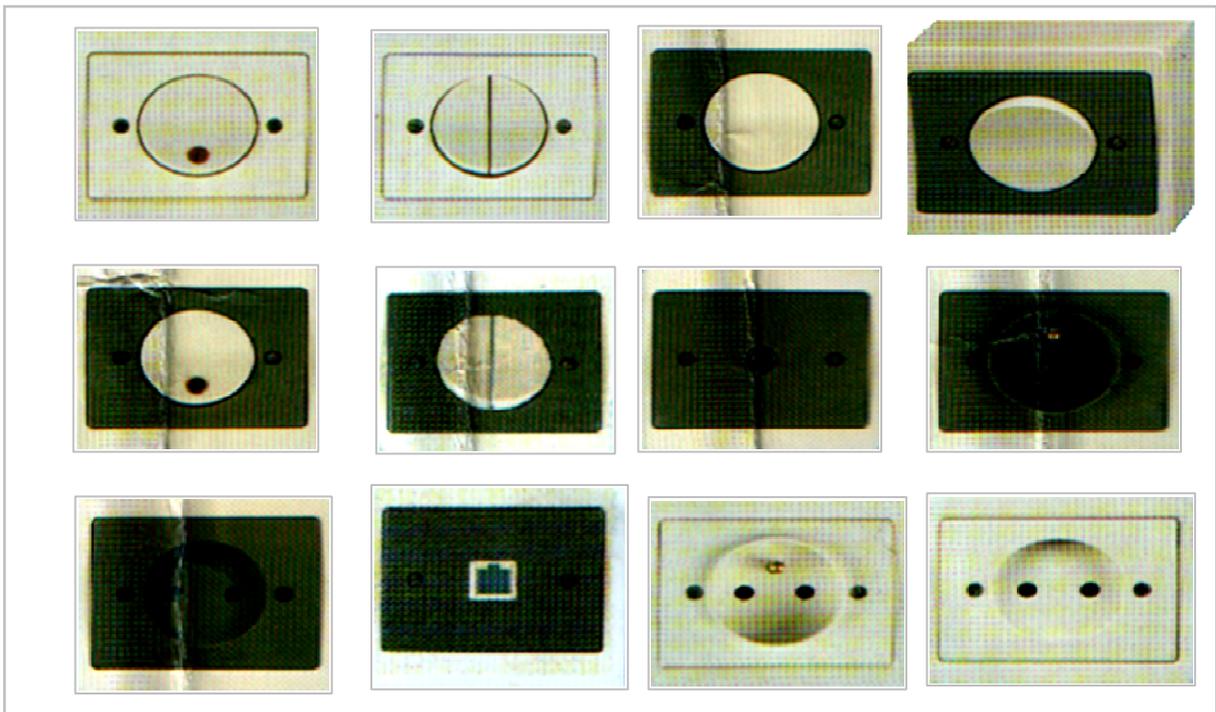
- Les poussoirs
- Prise de courant 10/16A 250V
- Interrupteur simple allumage
- Interrupteur va et vient
- Sorties de câble et dérivation
- Combines 10A 250V



*Figure I.8* : les produits de la gamme *ITHRI*

**B) Les produits de la gamme *TASSILI*: telle que (*Figure I.9*) :**

- Interrupteur simple allumage
- Interrupteur va et vient
- Les poussoirs
- Prise de courant 10/16A 250V
- Prise TV



*Figure I.9* : les produits de la gamme *TASSILI*

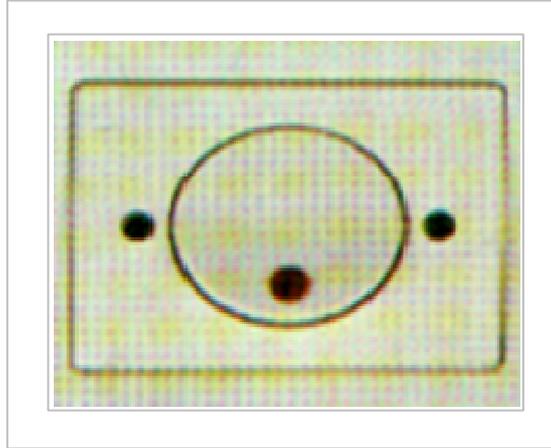
Le produit *TASSILI* est assez demandé sur le marché national et même internationale. Aussi notre étude porte sur ce produit.

**I.1.4 Présentation du processus de fabrication du produit *TASSILI* :**

Le produit *TASSILI* est constitué de deux parties : une partie métallique et une partie plastique.

La partie métallique est fabriquée au niveau de l'unité de fabrication métallique avec un taux de production de 75%, la partie plastique, quant à elle est réalisée sur les machines à injection de plastique (ces machines utilisent le même procédé d'injection, elles sont identiques).

La première étape de notre travail consiste à connaître l'évolution des grandeurs de sûreté de fonctionnement de la ligne de l'un des produits de la gamme **TASSILI** qui est l'interrupteur simple allumage (**Figure I.10**) à l'aide d'une modélisation markovienne.



**Figure I.10** : interrupteur simple allumage **TASSILI**

---

*Chapitre II : Modélisation par processus  
markovien*

---

## II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions générales de SdF. Deux aspects fort différents apparaissent dans ces notions: un aspect qualitatif et un aspect quantitatif. Le problème qualitatif revient à déterminer dans quelles circonstances un système remplit la tâche, la mission qui lui a été assignée. Le problème quantitatif consiste à chiffrer certaines grandeurs telles la "fiabilité" la "disponibilité", liées à l'accomplissement de cette mission.

Nous examinerons en particulier comment estimer ces grandeurs à l'aide d'une modélisation markovienne. Les différents paramètres seront calculé dans le cas de la ligne de fabrication d'interrupteur *TASSILI*.

## II.2 La sûreté de fonctionnement :

On peut considérer que la SdF a vu le jour dès que l'homme eut inventé ses premiers outils puisqu'il devint dépendant de leur bon fonctionnement. Si au début de l'ère industrielle, la complexité des systèmes était maîtrisable, on se limitait alors à l'expérience acquise pour s'assurer de leur bon fonctionnement, il n'en est plus de même avec les systèmes actuels pour lesquels les études de SdF, définies comme un prolongement des études de la fiabilité, sont devenues nécessaires [Sassine, 98].

### II.2.1 De la fiabilité à la sûreté de fonctionnement :

Les premiers modèles de fiabilité prévisionnelle sont apparus en Allemagne pendant la seconde guerre mondiale où se développaient les projets de missile V1 sous la direction de Von Braun. Le mot fiabilité est un néologisme introduit au cours des années soixante pour traduire le mot anglo-saxon Reliability. Depuis 1962, l'Académie des Sciences a défini la fiabilité en tant qu'une des sciences de l'ingénieur. C'est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données et pendant une durée déterminée [Villemeur, 88]. L'installation dans les années soixante-dix de centrales nucléaires nécessita des études de fiabilité poussées. De nombreuse méthodes dont l'Arbre de Défaillance (AdD) ou l'Analyse des Modes de Défaillance et de leurs Effets (AMDE) furent alors développées pour réaliser des études de risque. Ces dernières se sont développées considérablement dans les systèmes à haut risque (transport ferroviaire, aéronautique, transport électrique, etc.). Ce

développement est dû à trois facteurs principaux [Chapouille, 72] liés à l'industrialisation de l'outil et des systèmes :

- une criticité grandissante des défaillances ;
- un surcoût croissant de l'exploitation, lié aux défaillances et à la maintenance ;
- une complexité des systèmes nécessitant une rationalisation des activités industrielles.

Depuis les années quatre-vingt, ces outils (AMDE, AdD, etc.) ont été introduits dans le domaine industriel. L'objectif ne s'est plus limité à des études de fiabilité et des études de risque. En effet, on constate que la fiabilité - par définition - fait référence implicite à une période de fonctionnement continu (c'est à dire sans interruption due à une défaillance et sa réparation). De ce fait, cette définition ne s'applique qu'aux systèmes non réparables. Cependant, cette notion peut être élargie aux systèmes réparables en prenant en compte deux nouveaux concepts : la maintenabilité (aptitude du système à être maintenu ou rétabli) et la disponibilité (aptitude du système à être en état de remplir sa tâche).

Ce trinôme hiérarchisé est connu sous le nom de FMD (Fiabilité - Maintenabilité - Disponibilité) ou RAM (Reliability - Availability - Maintainability) pour les anglo-saxons. Toutefois la relation de ce trinôme avec la sécurité (du système et/ou des opérateurs) est très étroite, du fait de l'imbrication de différents sous-systèmes de nature variée et de performance non équivalente, et de l'impact des conséquences d'une défaillance. En effet, sur une ligne de fabrication, la notion FMD dépend non seulement des caractéristiques propres des machines et des stocks, et donc de l'installation, mais aussi de l'organisation, des communications, des procédures, des outils de travail, et bien évidemment du système "homme - machine". Dans ce cas, la sécurité (système et opérateurs) est prise en compte et devient un des objectifs recherchés par l'analyste. Le trinôme précédent appelé FMD devient alors FMDS qu'on appelle aujourd'hui la "Sûreté de Fonctionnement (SdF)". En résumé, la SdF est une science de l'ingénieur intégrant les concepts de Fiabilité - Maintenabilité - Disponibilité et Sécurité [Villemeur, 88]. L'annexe A détaille davantage ces concepts.

### **II.2.2 La sûreté de fonctionnement dans les systèmes de production:**

Dans le domaine de la production manufacturière, la SdF consiste à assurer le respect du cahier des charges en terme de productivité, en tenant compte des perturbations

(défaillances, aléas, etc.) affectant un atelier, en limitant les coûts de conception et de fonctionnement, et en assurant une qualité et une disponibilité maximale.

Au niveau de la conception, il est important de disposer de méthodes pouvant prédire la fiabilité d'un système, soit pour répondre à un cahier des charges, soit dans le domaine de la production manufacturière, où la concurrence est sévère, pour atteindre des objectifs de coût minimum et de qualité maximum. Les moyens et les méthodes d'analyse de la SdF reposent sur la prévention, la tolérance, la prévision et l'élimination au mieux des défaillances [Simeu, 98].

### II.2.3 Comment étudier la sûreté de fonctionnement ? :

Afin de déterminer quels moyens il convient de mettre en œuvre pour garantir qu'un système fournit réellement un service conforme aux spécifications, il est nécessaire de réaliser des études de SdF. Depuis le début des années soixante, la création et le développement des méthodes d'analyse et d'évaluation de la SdF n'a pas cessé de croître. Ces méthodes [Pagès, 80] [Monchy, 91] [Zwingelstein, 95], appliquées avec des objectifs différents pour l'analyse et l'évaluation de l'une ou l'autre composante de la SdF (Fiabilité. Disponibilité, etc.), sont souvent complémentaires. Généralement, on distingue deux types de démarches méthodologiques : inductive et déductive.

La démarche inductive (ascendante) cherche à étudier et établir, à partir d'une (ou plusieurs) défaillance(s), ses effets et ses conséquences. *On raisonne du plus particulier au plus général*. L'analyse des conséquences de l'arrêt d'une machine est, par exemple, de nature inductive. La démarche déductive (descendante), partant du fait que le système est défaillant, cherche à identifier et à hiérarchiser les causes de cette défaillance. On raisonne du plus général au plus particulier.

Le **Tableau II.1** donne les principales méthodes inductives et déductives:

<b>Méthodes inductives</b>	
<b>APD</b> (Analyse Préliminaire des Dangers) <b>ou APR</b> (des Risques)	C'est une méthode qui établit une première liste de risques inhérents au système (zones dangereuses, etc.). Elle associe à chaque risque identifié -si possible- des propositions de réduction des risques, applique ensuite des mesures concrètes répondant à ces propositions et enfin, définit des dispositifs de sécurité.

<p><b>AMDEC</b> (Analyse des Modes de Défaillances, de leurs Effets et de leur Criticité)</p>	<p>C'est une procédure qui identifie les modes de défaillance de tous les composants du système, recherche les causes, analyse les conséquences locales et globales, et enfin évalue la probabilité d'occurrence de chaque mode de défaillance en classant ces modes suivant la gravité de leurs effets.</p>
<p><b>HAZOP</b> (HAZard Operability) ou <b>SCF</b> (Schéma de Circulation de Fluides)</p>	<p>C'est une analyse d'exploitation qui identifie les effets de chaque dérive ou écart des différentes conditions de fonctionnement d'un procédé industriel, et définit des équipements d'alarme et de sécurité en fonction de chaque risque au niveau de la déviation étudiée.</p>
<p><b>MACQ</b> (Méthode de l'Arbre des Conséquences) ou <b>MAE</b> (d'Événements)</p>	<p>Cette analyse a pour but d'identifier toutes les conséquences d'un événement initiateur menant à des événements indésirables pour être ensuite quantifiées de manière probabiliste.</p>
<p><b>MCPR</b> (Méthode des Combinaisons des Pannes Résumées)</p>	<p>C'est une méthode qui complète l'AMDEC en analysant des combinaisons de défaillances des composants d'un système. Elle permet d'obtenir les modes de défaillance et/ou les événements indésirables du système en procédant par rassemblement des défaillances ayant les mêmes effets.</p>
<p><b>MEE</b> (Méthode d'Espace et d'États)</p>	<p>Cette procédure a pour but d'identifier et d'évaluer les états de fonctionnement et de panne d'un système réparable. Elle permet l'évaluation des systèmes ainsi que des calculs de la fiabilité, de la disponibilité ou de la productivité d'un système. L'outil de base de cette dernière est les PdM.</p>
<p><b>MTV</b> (Méthode de la Table de Vérité)</p>	<p>C'est une méthode d'analyse systématique de toutes les combinaisons d'événements des composants d'un système, chaque composant n'ayant que deux états (état de fonctionnement, état de panne).</p>
<p><b>Méthodes déductives</b></p>	
<p><b>MAC</b> (Méthode de l'Arbre des Causes) ou <b>MAD</b> (des</p>	<p>Cette démarche représente un mode de défaillance d'un système en fonction des modes de défaillances de ses sous-systèmes et composants. Elle permet alors d'identifier les causes d'un événement indésirable.</p>

Défaillances)	
<b>MDS</b> (Méthode du Diagramme de Succès)	C'est une méthode d'analyse et d'évaluation de la fiabilité d'un système débutant par l'analyse de son fonctionnement, et qui a pour but de traduire l'effet du comportement de chaque élément sur le comportement global du système.

**Tableau II.1** : Les principales méthodes inductives et déductives.

D'autres méthodes sont de nature mixte (inductive, déductive). La principale est la **MDCC** (Méthode du Diagramme Causes - Conséquences). Le principe de cette démarche repose sur une combinaison simultanée de l'analyse déductive de l'arbre des causes (MAC) et de l'analyse inductive de l'arbre des conséquences (MACQ). Elle permet non seulement d'analyser les causes et les conséquences d'un événement initiateur que l'on redoute de voir survenir dans un système, mais aussi de rendre compte de l'ordre chronologique d'apparition des événements.

Nous n'indiquons ici que l'inconvénient majeur de chaque méthode afin de pouvoir choisir celle qui semble la plus convenable à notre étude. Les méthodes MAC, MACQ, MCPR, MDS et MTV ne permettent pas de traiter des systèmes réparables ayant des stratégies complexes de maintenance ; la méthode MDCC se prête mal à l'analyse des systèmes complexes élémentaires en interactions ; la méthode HAZOP fournit une analyse très sommaire du système ; l'analyse quantitative lors de la méthode MEE peut devenir très complexe voir impossible pour un système comportant un grand nombre d'états ; l'APD est une méthode préliminaire donc insuffisante à elle seule ; l'AMDEC ne conduit pas à un modèle pour l'évaluation quantitative de la SdF. En résumé, toutes ses méthodes se prêtent assez mal à l'évaluation du niveau de la SdF des SdP complexes intégrant les politiques de maintenance. Par contre, parmi ces méthodes, la méthode MEE est la plus adaptée et la plus compatible et homogène avec les hypothèses concernant les taux moyens de loi de probabilité de distribution exponentielle.

## **II.3 Approche markovienne :**

### **II.3.1 Principes :**

Cette méthode consiste à représenter une installation industrielle par un ensemble d'états  $S$  et de transitions entre ces états. En général,  $S$  est un ensemble discret et les transitions sont décrites par une matrice  $A$ . Le plus souvent  $A$  est une matrice à éléments

constants. Les états sont partitionnés en deux classes:  $X$ , l'ensemble des états de fonctionnement du système,  $Y$ , son complément, l'ensemble des états de panne. Pour plus de détail sur la méthode markoviens, on pourra consulter l'annexe B.

### II.3.2 Grandeurs de la sûreté de fonctionnement et système markovien :

Supposons qu'une analyse préliminaire ait permis de modéliser une installation par :

- un ensemble  $S$  des états possibles, ensemble discret, équivalent à l'espace des états  $S$ ,
- une matrice de transition  $A$ , que nous supposons ici homogène,
- une répartition des états en  $X$  et  $Y$ , respectivement ensemble des états de fonctionnement et ensemble des états de panne de l'installation,
- éventuellement une distribution initiale  $\pi_0$  donnant la probabilité de chaque état du système en  $t = 0$ .

Introduisons les matrices

- $A^*$  obtenue à partir de  $A$  en rendant les états de panne absorbants,

$$A_{ij}^* = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \in X \text{ } i \neq j \\ 0 & \text{si } i \in Y \end{cases} \dots\dots\dots \text{(II.1)}$$

- $\bar{A}^*$  obtenue à partir de  $A^*$  en regroupant les états de panne absorbants en un seul état,
- $A^{**}$  obtenue à partir de  $A$  en rendant les états de fonctionnement absorbants,

$$A_{ij}^{**} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in X \\ A_{ij} & \text{si } i \in Y \text{ } i \neq j \end{cases} \dots\dots\dots \text{(II.2)}$$

- $\bar{A}^{**}$  obtenue en regroupant les états de fonctionnement rendus absorbants en un seul état.

Dans tous les cas, les éléments diagonaux sont calculés de manière à conserver un caractère g-ligne stochastique à la matrice ( $B_{ii} = -\sum_{j \neq i} B_{ij}$ ).

Nous désignerons par  $\pi(t), \pi^*(t), \bar{\pi}^*(t), \pi^{**}(t), \bar{\pi}^{**}(t)$  les solutions des systèmes différentiels. Les conditions initiales correspondantes sont :

$\pi_0, \pi_0^*, \bar{\pi}_0^*, \pi_0^{**}, \bar{\pi}_0^{**}$ , avec  $\pi_0 = \pi_0^* = \pi_0^{**}$ .  $\bar{\pi}_0^*$  est défini par :

$$\bar{\pi}_{0i}^* = \pi_{0i} \text{ pour } i \in X \text{ et } \bar{\pi}_{0Y}^* = \sum_{i \in Y} \pi_{0i}$$

$\bar{\pi}_{0Y}^*$  désignant la probabilité de l'unique état de panne associé au système  $\bar{A}^*$ .

De même  $\bar{\pi}_0^{**}$  est défini par :

$$\bar{\pi}_{0i}^{**} = \pi_{0i} \text{ pour } i \in Y \text{ et } \bar{\pi}_{0X}^{**} = \sum_{i \in X} \pi_{0i}$$

$\bar{\pi}_{0X}^{**}$  désignant la probabilité de l'unique état de fonctionnement du système  $\bar{A}^{**}$ .

Nous pouvons calculer les grandeurs suivantes:

**Disponibilité**

$$A(t) = \sum_{i \in X} \pi_i(t) = 1 - \sum_{i \in Y} \pi_i(t) \quad \dots \dots \dots \text{(II. 3)}$$

**Fiabilité**

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i \in X} \pi_i^*(t) = 1 - \sum_{i \in Y} \pi_i^*(t) \quad \dots \dots \dots \text{(II. 4)} \\ &= 1 - \bar{\pi}_Y^*(t) \end{aligned}$$

**Maintenabilité**

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{i \in X} \pi_i^{**}(t) = 1 - \sum_{i \in Y} \pi_i^{**}(t) \quad \dots \dots \dots \text{(II. 5)} \\ &= \bar{\pi}_X^{**}(t) \end{aligned}$$

**II.3.3 Modélisation d'une installation par un processus markovien :**

Dans les paragraphes précédentes, nous avons décrit les systèmes markoviens par une matrice de transition  $A$  dont les éléments  $A_{ij}$  donnaient le taux de transition de l'état  $i$  vers l'état  $j$ . Le système associé était  $d\pi / dt = \pi A$ , la distribution étant représentée par un vecteur ligne  $\pi$ .

Nous préférons par la suite utiliser un vecteur colonne  $p$  pour la distribution. Il sera solution du système  $dp / dt = Lp$  où  $L = A^t$ .  $L_{ij}$  donne cette fois le taux de transition de l'état  $j$  vers l'état  $i$ . La matrice  $L$  jouit de propriétés analogues à la matrice  $A$ . Elle est g-colonne-stochastique.

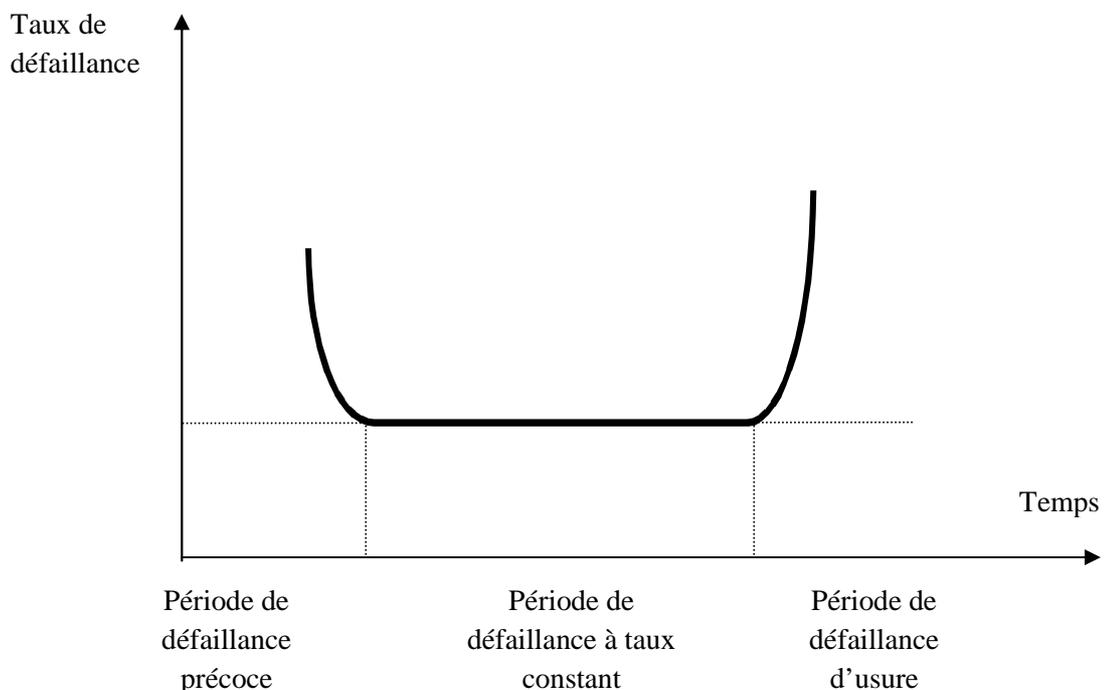
**II.3.3.1 Description d'un composant :**

Un composant est susceptible de se trouver dans deux états. Ces états sont soit des états de fonctionnement (de marche) soit des états défectueux (de panne).

Le passage d'un état de marche vers un état de panne est une "défaillance" le phénomène inverse est une "réparation".

✓ **Taux de défaillance**

Généralement, on admet que la probabilité de défaillance d'un composant dépend principalement de l'âge du composant. En début de vie se posent une série de problèmes de maladie de jeunesse liés à des erreurs de conception ou de fabrication. Au bout de quelques temps, toutes ces erreurs ont été détectées et les composants encore en vie présentent un taux de défaillance relativement constant. En fin de vie, on assiste à une augmentation de la probabilité de défaillance, suite aux phénomènes de fatigue et d'usure [Monchy, 00]. La **Figure II.1** représente l'évolution du taux de défaillance d'un composant au cours de sa vie.



**Figure II.1** : évaluation de taux de défaillance en fonction de l'âge du composant

✓ **Taux de réparation**

La probabilité de réparation d'un composant est principalement fonction du temps écoulé depuis l'instant de défaillance. Il existe un certain délai  $t$  avant que le composant puisse être réparé. Ce délai  $t$  comprend le temps de détection et le temps d'attente de l'équipe de réparation. Il s'y ajoute le temps de réparation proprement dit [Tombyuses, 95]. La

Figure II.2 donne l'allure de la probabilité de réparation d'un composant tombé en panne en  $t=0$ .

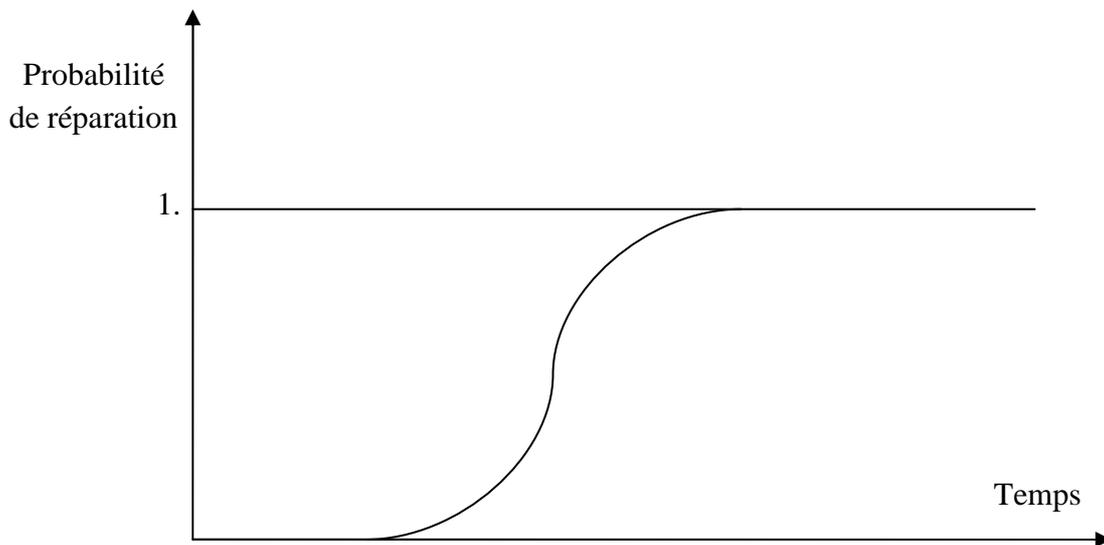


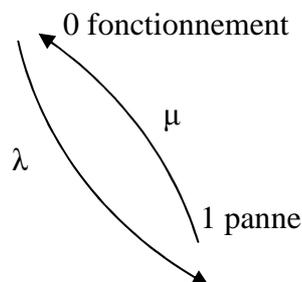
Figure II.2 : probabilité de réparation au cours de temps

### II.3.3.2 Modélisation d'un composant :

Un composant  $c$  sera modélisé par un ensemble de  $n_c$  états entre lesquels existent des transitions. Ces transitions seront à taux constants (système markovien homogène) et décrites par une matrice  $L$ ,  $L_{ij}$  donnant le taux de transition de  $j$  vers  $i$ . Nous numérotions les  $n_c$  états de 0 à  $n_c-1$ .

La représentation la plus simple est de ne considérer que deux états, l'état 0 de fonctionnement et l'état 1 de panne. Il existe deux transitions : la transition  $0 \rightarrow 1$  qui correspond à la défaillance du composant et la transition  $1 \rightarrow 0$  qui correspond à la réparation.

$$L = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}$$



### II.3.3.3 Système de N composants indépendants :

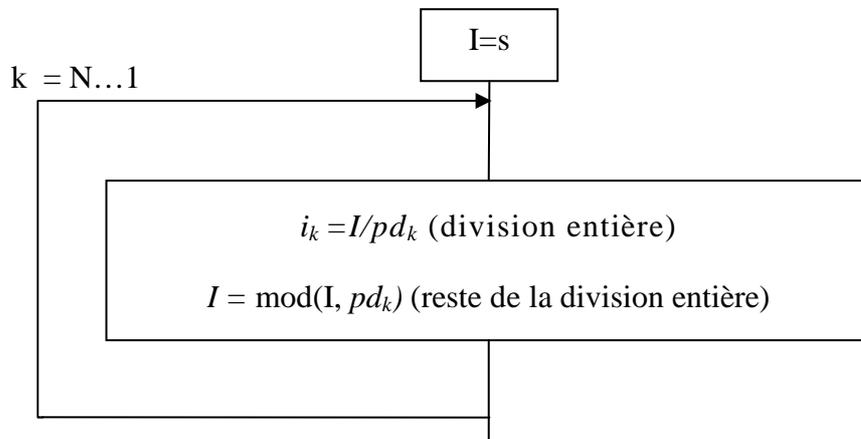
L'état d'un système comportant  $N$  composants sera décrit par un  $N$ -uples  $S = (s_1 s_2 \dots s_N)$ ,  $s_i$  donnant l'état du composant  $i$ .

Les  $N$ -uples seront numérotés de la manière suivante :

- on associe au premier composant un poids  $pd_1 = 1$ .
- on associe au composant  $i$  le poids  $pd_i = pd_{i-1} \cdot n_{i-1}$ .  $n_{i-1}$  désigne le nombre d'états du composant  $i - 1$ .
- le  $N$ -uples  $s = (s_1 \dots s_N)$  porte le numéro

$$s = \prod_{i=1}^N pd_i \cdot s_i \dots\dots\dots(II.6)$$

*L'algorithme II.1 permet de calculer l'état  $s_i$  de chaque composant à partir de l'état  $s$  du système.*



**Algorithme II.1** : Détermination de l'état  $s_i$  des composants à partir de l'état  $s$  du système

#### ✓ Indépendance de composants

Deux composants seront indépendants si la probabilité de chaque composant d'être dans un état donné ne dépend pas de l'état de l'autre composant, à tout instant.

#### ❖ Mathématiquement

$$\forall t \forall a, b \Pr(1 = a / 2 = b, t) = \Pr(1 = a, t) \text{ et } \Pr(2 = b / 1 = a, t) = \Pr(2 = b, t)$$

avec  $Pr(1 = a/2 = b, t)$  probabilité que le composant 1 soit dans l'état  $a$  si le composant 2 est dans l'état  $b$ .

$Pr(1 = a, t) = P_a^{(1)}(t)$  probabilité de l'état  $a$  du composant 1, au temps  $t$

Dans ce cas  $Pr(1 = a \text{ et } 2 = b, t) = P_{ab}(t)$  est donnée par  $P_a^{(1)}(t) \cdot P_b^{(2)}(t)$ .

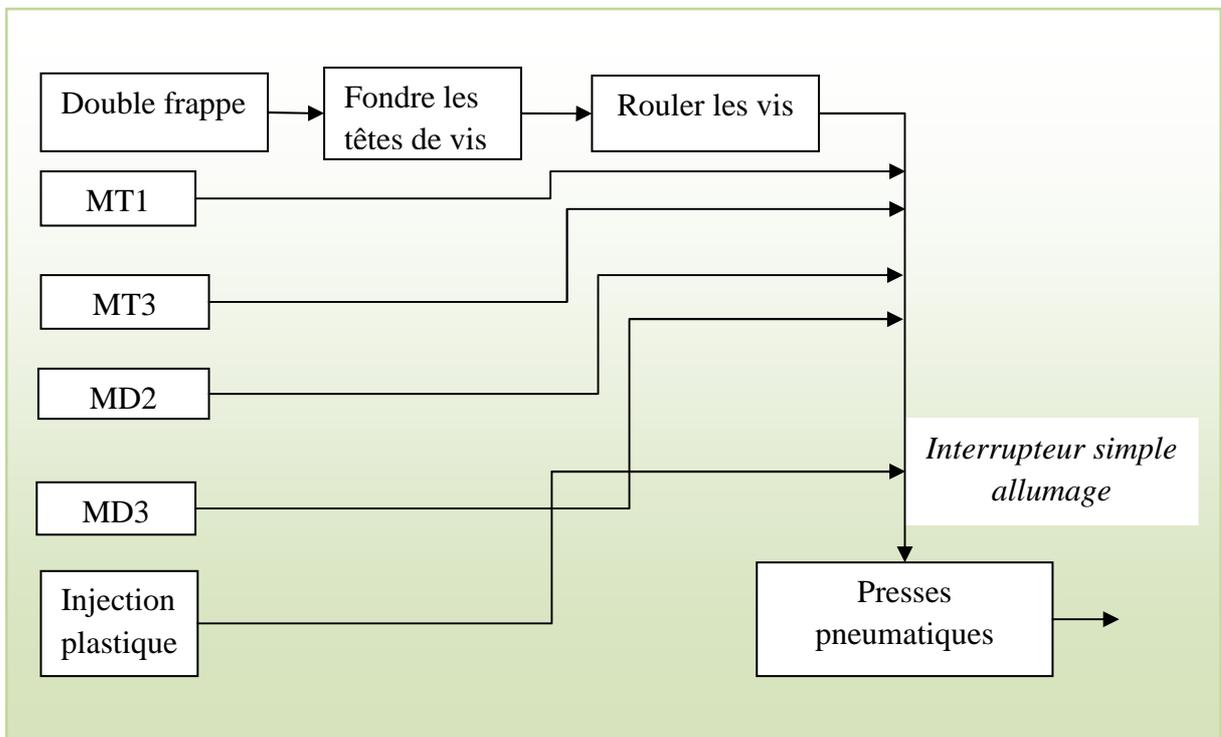
$N$  composants seront indépendants si la probabilité de l'état  $s = (s_1 s_2 \dots s_N)$  du système peut se décomposer en :

$$P_s(t) = \prod_{i=1}^N P_{s_i}^{(i)}(t) \dots \dots \dots (II. 7)$$

## II.4 Modélisation du processus d'interrupteur étudié :

### II.4.1 Présentation de la ligne:

Le produit le plus fabriqué par l'entreprise **DOMELEC** est l'interrupteur simple allumage. Pour cela on a choisie de modéliser se sous système. La **Figure II.3** nous donne la structure physique de cette ligne.



**Figure II. 3:** Structure physique de la ligne d'interrupteur simple allumage

La première étape de notre travail consiste à connaître l'évolution des grandeurs de SdF de la ligne d'interrupteur simple allumage à l'aide d'une modélisation markovienne.

#### II.4.2 Données industrielles :

Nous prenons comme paramètres les valeurs numériques présentées dans le **Tableau II.1**. Ces valeurs sont déterminées à l'aide d'une étude statistique au sein de l'entreprise.

Les informations contenues dans l'historique des pannes et des réparations des machines au niveau du service de maintenance, nous permet de déterminer :

- le taux moyen de panne de chaque machine.
- le taux moyen de réparation de chaque machine.

Pour le taux moyen de chargement d'une pièce dans la machine et le taux moyen d'usinage d'une pièce par la machine on a effectué une campagne de mesure sur le terrain pour les déterminer.

Pour plus de détail sur la méthodologie de calcul de ces paramètres. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C.

Paramètres Machines	Taux de chargement ( $\epsilon$ )	Taux de service ( $\delta$ )	Taux de panne ( $\lambda$ )	Taux de réparation ( $\mu$ )
Double frappe (M1)	450	320	0.0075	0.587
Fondre les têtes (M2)	380	270	0.0116	0.137
Rouler les vis (M3)	479	367	0.00029	0.294
MT1 (M4)	800	687	0.022	0.345
MT3 (M5)	456	567	0.0019	0.636
MD2V(M6)	567	447	0.00046	0.384
MD3 (M7)	689	576	0.0097	0.214
Injection plastique (M8)	340	150	0.0189	0.412
Presses pneumatiques (M9)	300	300	0.0057	0.623

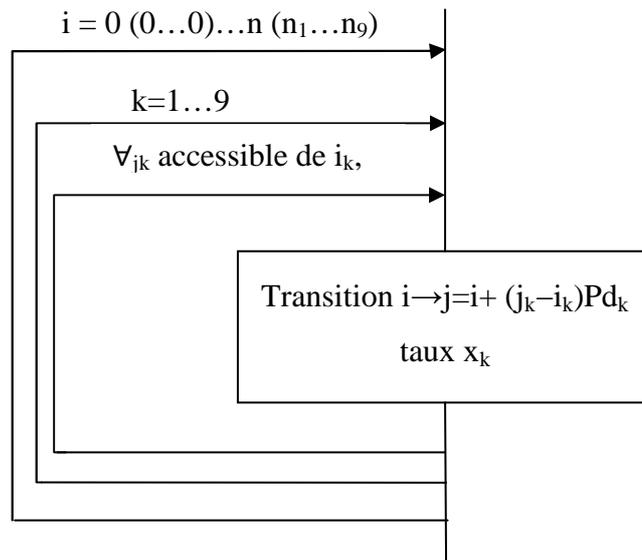
**Tableau II.2** : Paramètres de chaque machine de la ligne étudiée.

### II.4.3 Structure de la matrice de transition :

La matrice de transition  $L$  de dimension  $512 \times 512$  (correspondant au système avec les 9 machines), s'obtient par la somme de Kronecker (annexe D) des matrices  $L^{(i)}$  de ses machines :

$$L = L^{(9)} \oplus L^{(8)} \oplus \dots \oplus L^{(2)} \oplus L^{(1)} \dots \dots \dots (II.8)$$

L'algorithme suivant effectue cette opération :



**Algorithme II.2 :** calcul de  $L = L^{(9)} \oplus L^{(8)} \oplus \dots \oplus L^{(2)} \oplus L^{(1)}$

Les éléments diagonaux sont calculés séparément,  $L$  étant g-colonne-stochastique. Les éléments de la matrice  $L$  sont :

$$L_{ij} = \sum_{k=1}^9 L_{i_k j_k}^{(k)} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^9 \delta_{i_q j_q} \dots \dots \dots (II.9)$$

Les éléments non diagonaux  $L_{ij}$  ( $i \neq j$ ) sont nuls lorsque les états  $i$  et  $j$  du système diffèrent par l'état de plus d'un composant. Lorsque  $i$  et  $j$  ne diffèrent que par l'état d'un composant  $M$  (Machine),  $L_{ij}$  est égal au taux de transition  $L_{i_M j_M}^{(M)}$  de l'état  $j_M$  de ce composant vers son état  $i_M$ .

L'apport de la méthode markovienne se situe au niveau de la quantification des grandeurs de la fiabilité la disponibilité et maintenabilité, par la résolution du système d'équations différentielles associé au processus markovien.

Les matrices associées à ces problèmes sont obtenues à partir de  $L$  en annulant les taux adéquats, les taux  $L_{ij}$  sont annulés si  $j$  est un état de panne (de marche). En numérotant d'abord les états de marche puis les états de panne,  $L$  se décompose en

$$L = \begin{pmatrix} L^{XX} & L^{XY} \\ L^{YX} & L^{YY} \end{pmatrix}$$

$L^*$  (problème de fiabilité) correspond à la situation où  $L^{XY}$  et  $L^{YY}$  ont été annulés (La fiabilité étant la probabilité que le système se trouve dans état de marche sans jamais être passé par un état de panne, il suffit de supprimer toutes les transitions des états de panne dans la matrice  $L$ ) et  $L^{**}$  (problème de maintenabilité) correspond à la situation  $L^{XX}$  et  $L^{YX}$  nuls. Les éléments diagonaux sont recalculés à partir de  $L$ ,  $L^*$  ou  $L^{**}$  de manière à garder le caractère g-colonne-stochastique aux matrices.

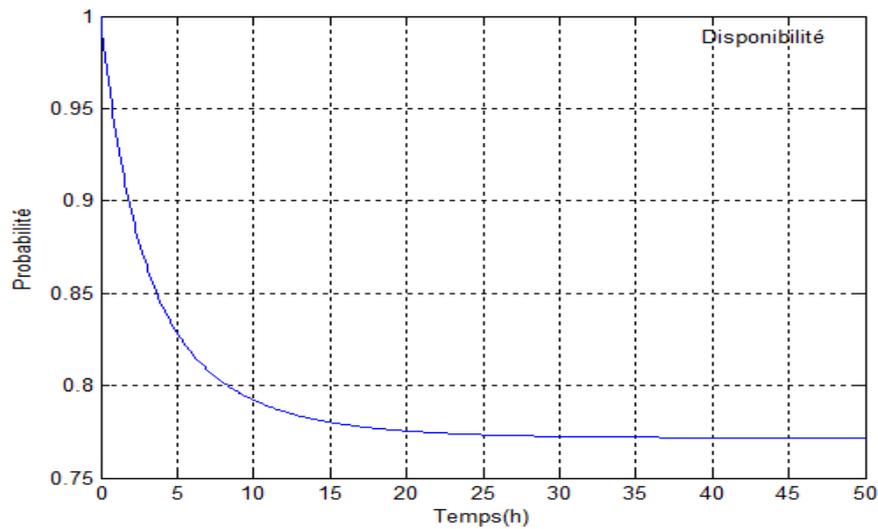
#### II.4.4 Résolution du système différentiel :

Pour autant que la condition initiale  $p(t)$  s'écrive  $p(0) = p^{(9)}(0) \otimes \dots \otimes p^{(1)}(0)$ , la solution  $p(t)$  du système  $dp/dt = Lp$  peut être calculée par  $p(t) = p^{(9)}(t) \otimes p^{(8)}(t) \otimes \dots \otimes p^{(1)}(t)$ , où  $p^{(M)}(t)$  est la solution de l'équation d'évolution du composant  $M$  :  $dp^{(M)}/dt = L^{(M)}p^{(M)}$ .

La définition de l'état initial (en  $t = 0$ ); supposé être un état de fonctionnement pour la fiabilité et la disponibilité et un état de panne pour la maintenabilité.

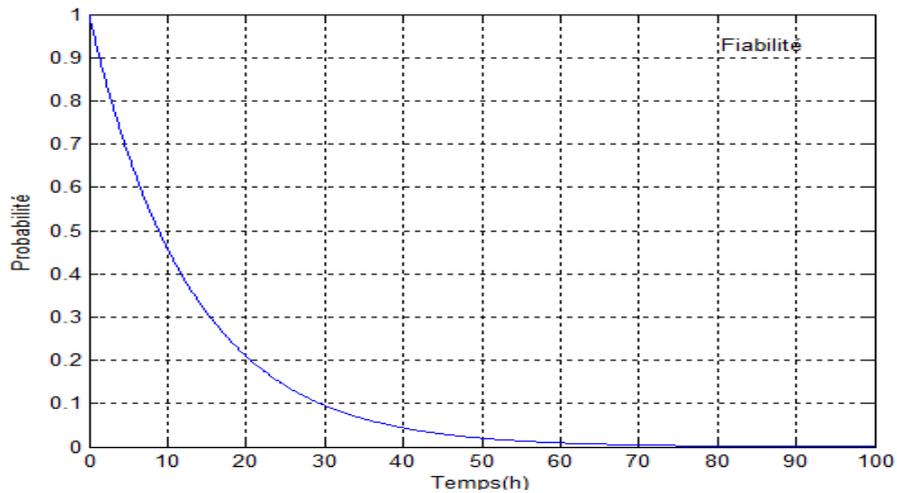
D'une manière générale, on mesure la durée de vie d'un système par le nombre d'heures durant lesquelles il a effectivement fonctionné.

Les **Figure II.4**, **II.5** et **II.6** montrent l'évolution de la disponibilité/ fiabilité/ maintenabilité.



**Figure II.4 :** La disponibilité

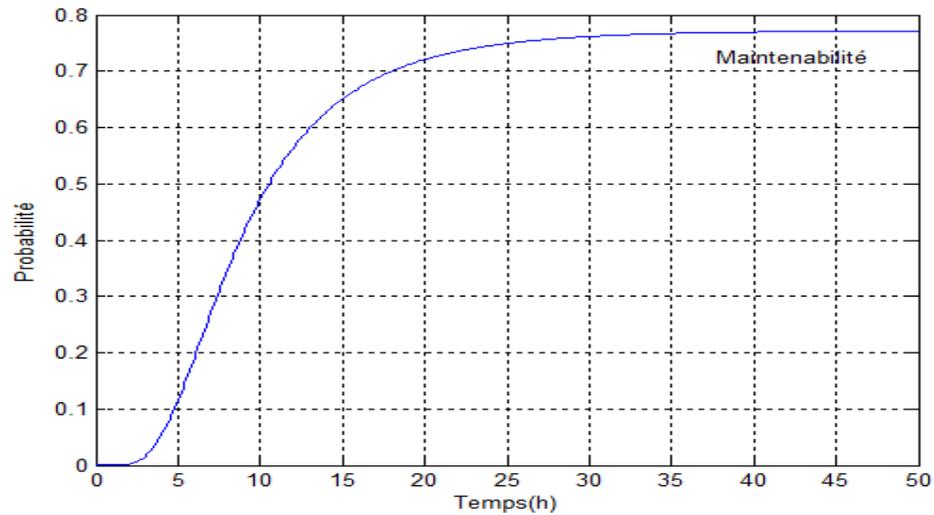
La **Figure II.4** donne l'évolution de la disponibilité au cours du temps, nous remarquons que la disponibilité de système est diminuée de 1 jusqu'au 0,77 après 40h.



**Figure II.5:** La fiabilité

Il apparaît clairement, lorsque l'on regarde la figure que la courbe de fiabilité décroît, donc à partir de 1 pour  $t=0$ , pour tendre vers 0 après  $t=80h$ , durant cette période (0 en 80h) le système non défaillant.

Nous voyons que la fiabilité du système est très faible, cette faible est due à la mise en marche des machines de système



**Figure II.6:** La maintenabilité

Dans cette courbe on remarque que la probabilité varie de manière continue pour atteindre rapidement leur valeur asymptotique. Cette probabilité est reportée sur l'état de maintenance qui voit sa probabilité passer de zéro (état opérationnel de système) à une valeur proche de l'unité (l'entrée dans l'état de maintenance après 40h) : ceci provient du fait que le système tombe plus en panne.

## **II.5 Conclusion :**

Nous avons présenté dans ce chapitre les grandeurs de la SdF que nous pouvons extraire des résultats de l'analyse markovienne en utilisant les données propres aux composants du SdP et celles fixées par la direction de la production. Le chapitre suivant est consacré à la prise en compte de la maintenance dans l'évaluation de la SdF.

---

*Chapitre III : Intégration de la  
maintenance*

---

### III.1 Introduction :

De nos jours, toute entreprise doit en permanence continuer à progresser en qualité, productivité et technicité et, s'adapter à un marché toujours plus concurrentiel où la minimisation des coûts de production et la flexibilité sont à rechercher constamment. Cette recherche d'accroissement des performances des SdP, qui deviennent de plus en plus variés et complexes techniquement, conduit notamment à transférer sur la maintenance, la responsabilité de garantir la disponibilité du SdP.

Dès la conception, une modélisation du système est nécessaire. L'association d'un outil de modélisation, les RdPSG et d'un outil de calcul, les PdM forment un moyen puissant d'analyse et d'évaluation de ces systèmes.

### III.2 La fonction maintenance :

#### III.2.1 Définitions :

Le maintien des équipements de production est un enjeu clé pour la productivité des usines aussi bien que pour la qualité des produits. C'est un défi industriel impliquant la remise en cause des structures figées actuelles et la promotion des méthodes adaptées à la nature nouvelle du matériels.

La définition de la maintenance est :

- D'après Larousse :

*Ensemble de tout ce qui permet de **maintenir** ou de **rétablir** un système en état de fonctionnement.*

- D'après l'AFNOR ( NF X60-010) :

*Ensemble des actions permettant de **maintenir** ou de **rétablir** un bien dans un **état spécifié** ou en mesure d'assurer un service déterminé.*

Le terme maintenance a son origine dans le vocabulaire militaire, dans le sens *maintien dans des unités de combat, de l'effectif et du matériel à un niveau constant*. Il est évident que les unités qui nous intéressent ici sont les unités de production, et le combat est avant tout économique.

L'apparition du terme *maintenance* dans l'industrie a eu lieu vers 1950 aux U.S.A. Et depuis, la plupart des entreprises ont connu de profondes mutations de l'entretien vers la maintenance.

### III.2.2 Différents aspects de la maintenance :

L'AFNOR diffuse depuis 1981 un ensemble de normes relatives à *la maintenance et la gestion des biens durables*, normes destinées à unifier le vocabulaire et les méthodes de maintenance.

#### 1 – Maintenance corrective

*Opération de maintenance effectuée après défaillance.* (norme X 60-010)

Synonymie : maintenance subie, maintenance fortuite, maintenance après défaillance,

Ce type de maintenance débouche sur deux formes d'interventions :

- Les dépannages, c'est à dire une remise en état de fonctionnement effectuée *in situ*, parfois sans interruption du fonctionnement de l'ensemble concerné, ils ont un caractère *provisoire*.

Ils caractérisent la **maintenance palliative**.

- Les réparations, faites *in situ* ou en atelier central, parfois après dépannage, ont un caractère *définitif*.

Elles caractérisent la **maintenance curative**.

#### 2 – Maintenance préventive

*Maintenance effectuée dans l'intention de réduire la probabilité de défaillance d'un bien ou la dégradation d'un service rendu.* (norme X 60-010)

C'est une intervention de maintenance prévue, préparée et programmée avant la date probable d'apparition d'une défaillance.

Les objectifs visés par le préventif sont :

- Augmenter la fiabilité d'un équipement, donc réduire les défaillances en service : réduction des coûts de défaillance, amélioration de la disponibilité.
- Augmenter la durée de vie efficace d'un équipement.

- Améliorer l'ordonnancement des travaux, donc les relations avec la production.
- Réduire et régulariser la charge du travail.
- Faciliter la gestion des stocks (consommations prévues).
- Assurer la sécurité (moins d'improvisations dangereuses).
- Plus globalement, en réduisant la part de *fortuit*, améliorer le climat des relations humaines (une panne imprévue est toujours génératrice de tension).

### 3 – Maintenance systématique

*Maintenance préventive effectuée selon un échéancier établi suivant le temps ou le nombre d'unités d'usage.* (norme X 60-010)

Synonymie : maintenance programmée, planifiée, par potentiel d'heures ou d'unité d'usage.

La mise en place d'actions préventives systématiques suppose une connaissance préalable du comportement du matériel dans le temps.

En effet, les interventions systématiques seront programmées suivant une périodicité, que nous nommerons T, obtenue à partir des préconisations du constructeur (1<sup>re</sup> phase), puis des résultats opérationnels recueillis lors des visites préventives ou lors d'essais (2<sup>e</sup> phase), ce qui permet une optimisation économique.

La connaissance des différentes périodes d'interventions systématiques permet d'établir un **échéancier**, relatif à une machine.

### 4 – Maintenance conditionnelle

*Maintenance subordonnée à un type d'événement prédéterminé (autodiagnostic, information d'un capteur, mesure...).*

Synonymie : on condition, selon l'état, ou prédictive, terme réservé par l'usage aux machines tournantes.

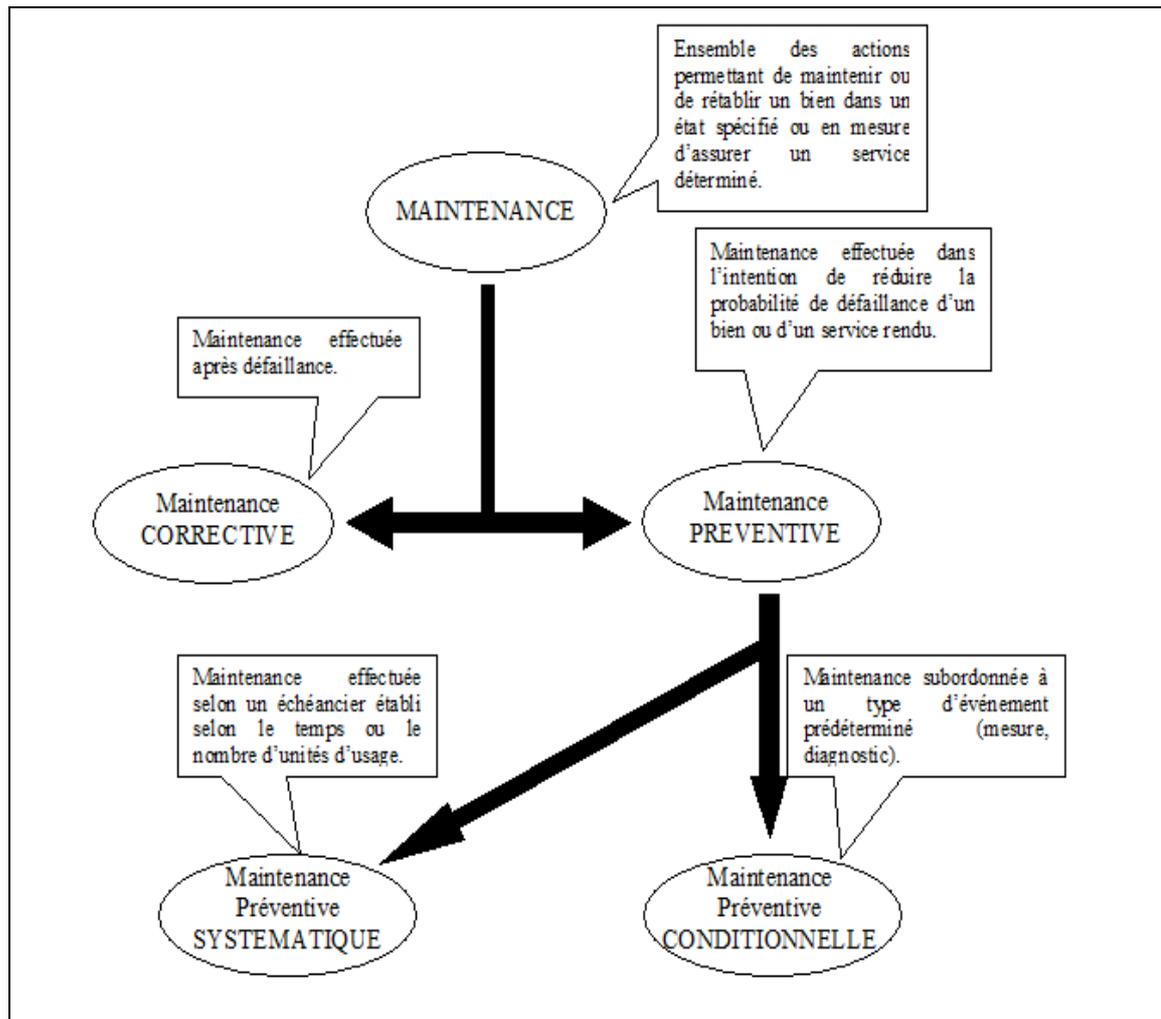


Figure III.1: différents aspects de la maintenance

### III.3 Les Réseaux de Petri comme outil de modélisation:

La croissance exponentielle (*Figure III.2*) du nombre d'états en fonction du nombre de composants est une limitation de la méthode markovienne. Des problèmes de stockage des vecteurs et de la matrice de transition apparaissent rapidement, ainsi que les problèmes numériques liés à la résolution de grands systèmes. Pour contourner ce problème, nous profitons de la structure modulaire de SdP pour opérer une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle. Dans ce but, on utilise les *Réseaux de Petri Stochastique Généralisés à Synchronisation Internes (RdPSGSyIs)*.

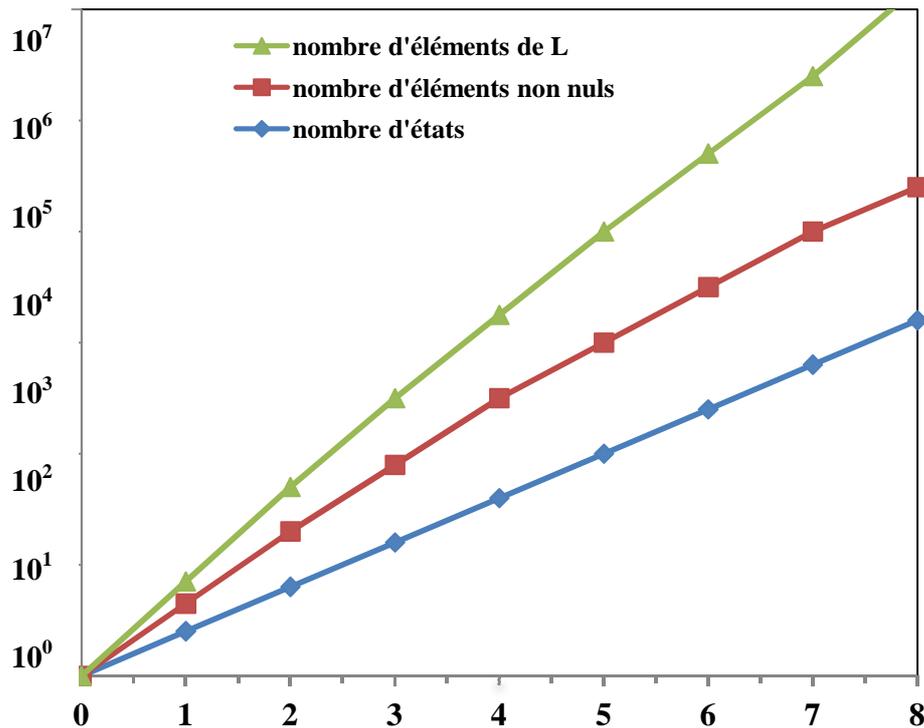


Figure III.2: Evolution du nombre d'états et d'éléments [Tombuyses, 95].

### III.3.1 Liaison entre RdPS et Processus de Markov :

Les RdPS ont été introduits par G.Florin et S.Natkin en 1978 pour étudier des systèmes ayant des temps d'évolution aléatoires. C'est le cas par exemple lors de l'étude du temps de bon fonctionnement (entre deux pannes) d'une machine. Cette durée peut être modélisée par une variable temporelle aléatoire associée au franchissement d'une transition. L'hypothèse la plus couramment utilisée fait appel à une distribution exponentielle des temporisations. Le marquage  $M(t)$  du RdPS est alors un processus Markovien homogène [Zemouri, 00].

La méthode employée consiste à construire le graphe des marquages accessibles du RdP et à étiqueter chaque arc par un taux de franchissement (*Figure III.3*). Le comportement aléatoire du RdPS est alors identique à celui du PdM ainsi déterminé. En appliquant les méthodes de résolution d'un PdM, on calcule les probabilités d'état en régime permanent. On peut alors en déduire des indices de performances tels que les marquages moyens de chaque place en régime permanent ou les fréquences moyennes de franchissements. Les notions de base ainsi que les principales propriétés se trouvent dans de nombreux travaux [David, 92], [Florin, 91] et [Alain, 93].

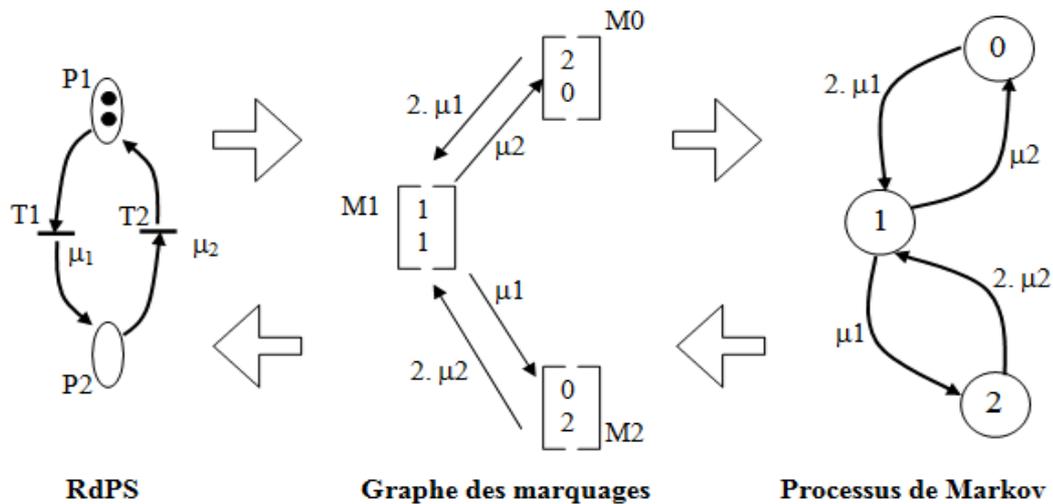
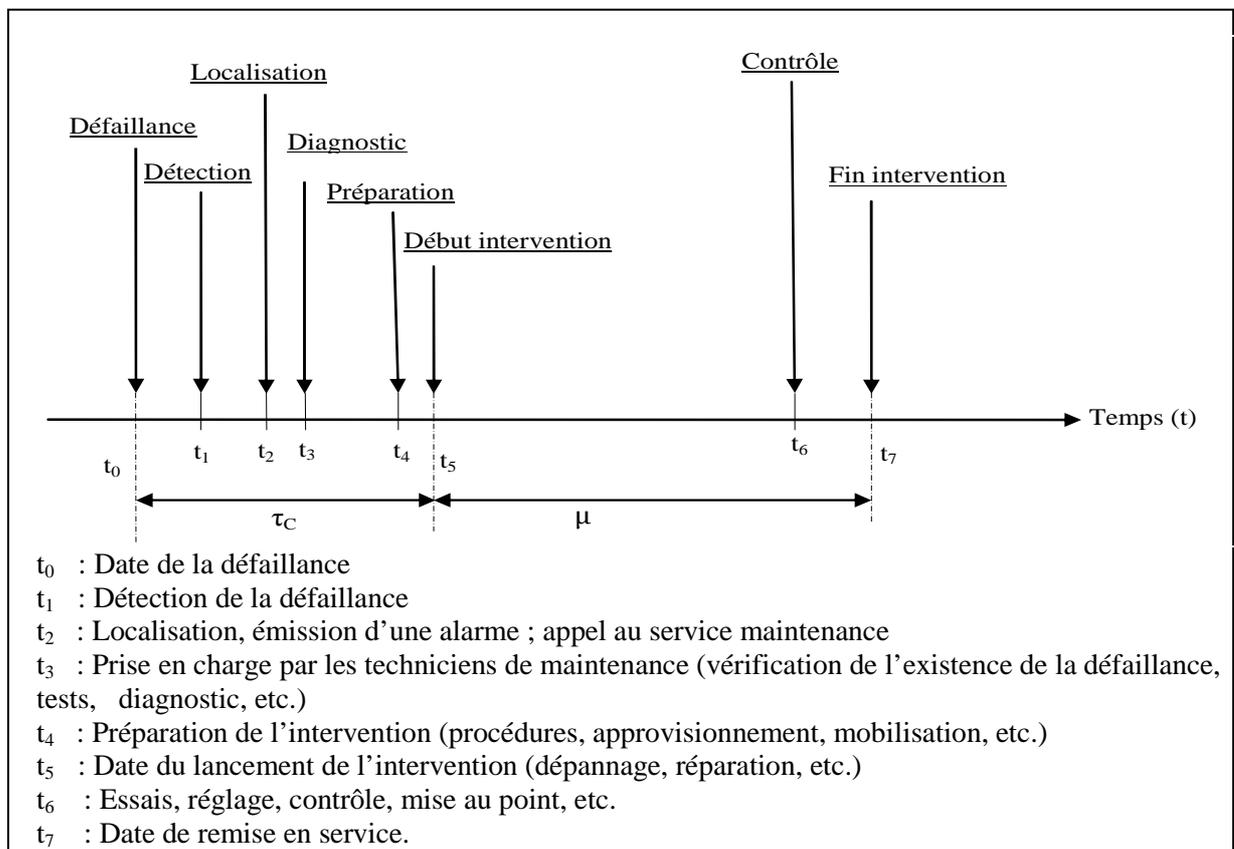


Figure III.3 : Liaison entre réseau de RdPS et PdM

### III.3.2 Modélisation de la politique de maintenance :

Pour modéliser chaque politique de maintenance, il est indispensable d'étudier, en détail, leur temps d'intervention. Commençons par observer le processus de déroulement d'une maintenance corrective (*Figure III.4*).

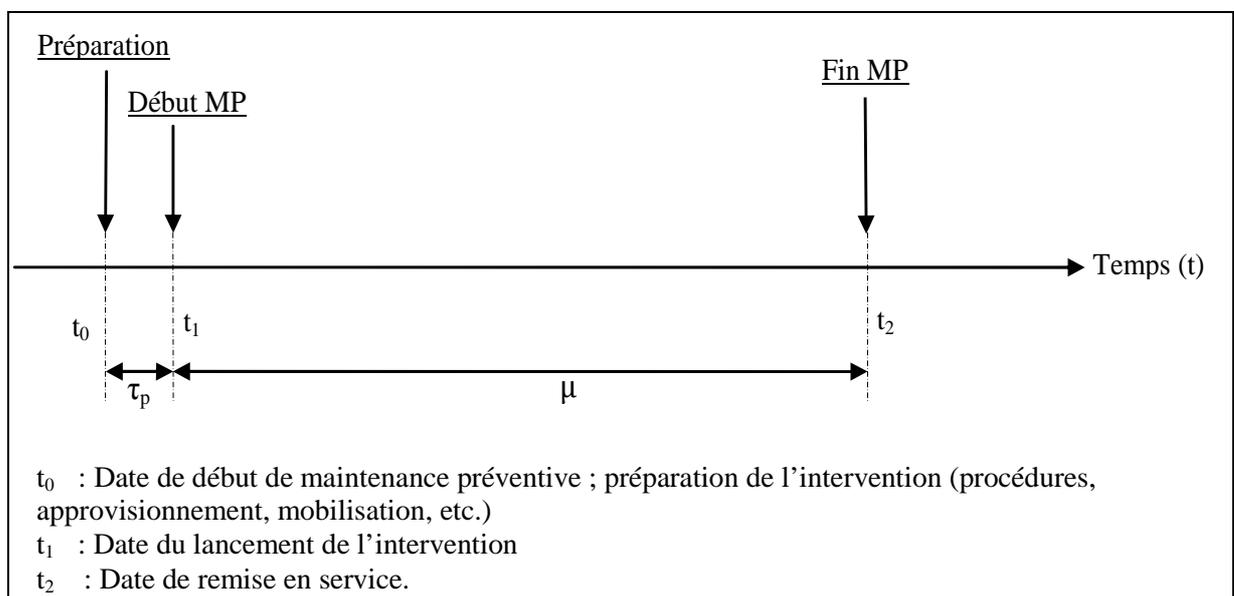


**Figure III.4 :** Les temps d'intervention d'une maintenance corrective.

Depuis la date effective d'occurrence d'une défaillance ( $t_0$ ) jusqu'à la date de lancement de la MC ( $t_5$ ) un certain temps est consacré à la détection, localisation, diagnostic et préparation de l'intervention corrective. Ce temps est variable d'une politique MC à une autre, d'une première intervention à une autre. Ainsi, toujours pour des raisons d'homogénéité des processus de Markov, nous modélisons ce temps par un *taux moyen de préparation de la MC* ( $\tau_C$ ).

D'autre part, la durée de cette intervention correspond soit à la durée d'une réparation, soit à celle d'un dépannage, etc. dans tout les cas, cette durée ( $t_7 - t_5$ ) correspond à la durée de l'exécution effective des tâches permettant de remettre la machine en état. En d'autres termes, cela correspond aux temps technique de réparation. Le taux moyen modélisant cette durée se confond alors avec le taux moyen de réparation ( $\mu$ ) décrit précédemment.

En ce qui concerne les politiques de maintenance préventive, les temps d'intervention (**Figure III.5**) sont légèrement différents :



**Figure III.5 :** Les temps d'intervention d'une maintenance préventive.

Là aussi, un certain temps est consacré à la préparation de l'intervention préventive ( $t_1 - t_0$ ) pour les mêmes raisons que précédemment, nous modélisons ce temps par un *taux moyen de préparation de la MP* ( $\tau_p$ ). Il se mesure par un nombre de préparation de maintenance préventive pouvant être effectuées par heure. Pour les mêmes raisons aussi, la

durée technique de l'intervention est confondue avec  $(\mu)$ . Par contre la différence de cette catégorie de maintenance par rapport à la précédente est l'occurrence d'une date de maintenance. Dans le cas d'une politique de MC, la date d'occurrence dépend de celle d'une défaillance. Alors que l'occurrence d'une date de MP provient d'un programme, d'un échéancier établi, ou bien suite à un événement prédéterminé (vieillessement, etc.), ou encore suite à l'occurrence d'un événement externe (défaillance d'autres composants, etc.).

### **III.3.3 Application RdPSGSyI à la modélisation des SdP :**

Le SdP est composé de machines, stocks et politique de maintenance. Chacun de ces composants a été décrit par un module réseau de Petri à part. Dans le but de tenir compte des différentes politiques de maintenance intégrées et des liens d'un (ou plusieurs) stock(s) avec une (ou plusieurs) machine(s) en amont ou en aval. Nous construisons des modèles RdP génériques de référence prenant en compte toutes les combinaisons possibles, que nous rencontrons souvent dans les SdP [Kaanit, 05]. La *Figure III.6* représente le RdPSGSyI de machine, stock et maintenance.

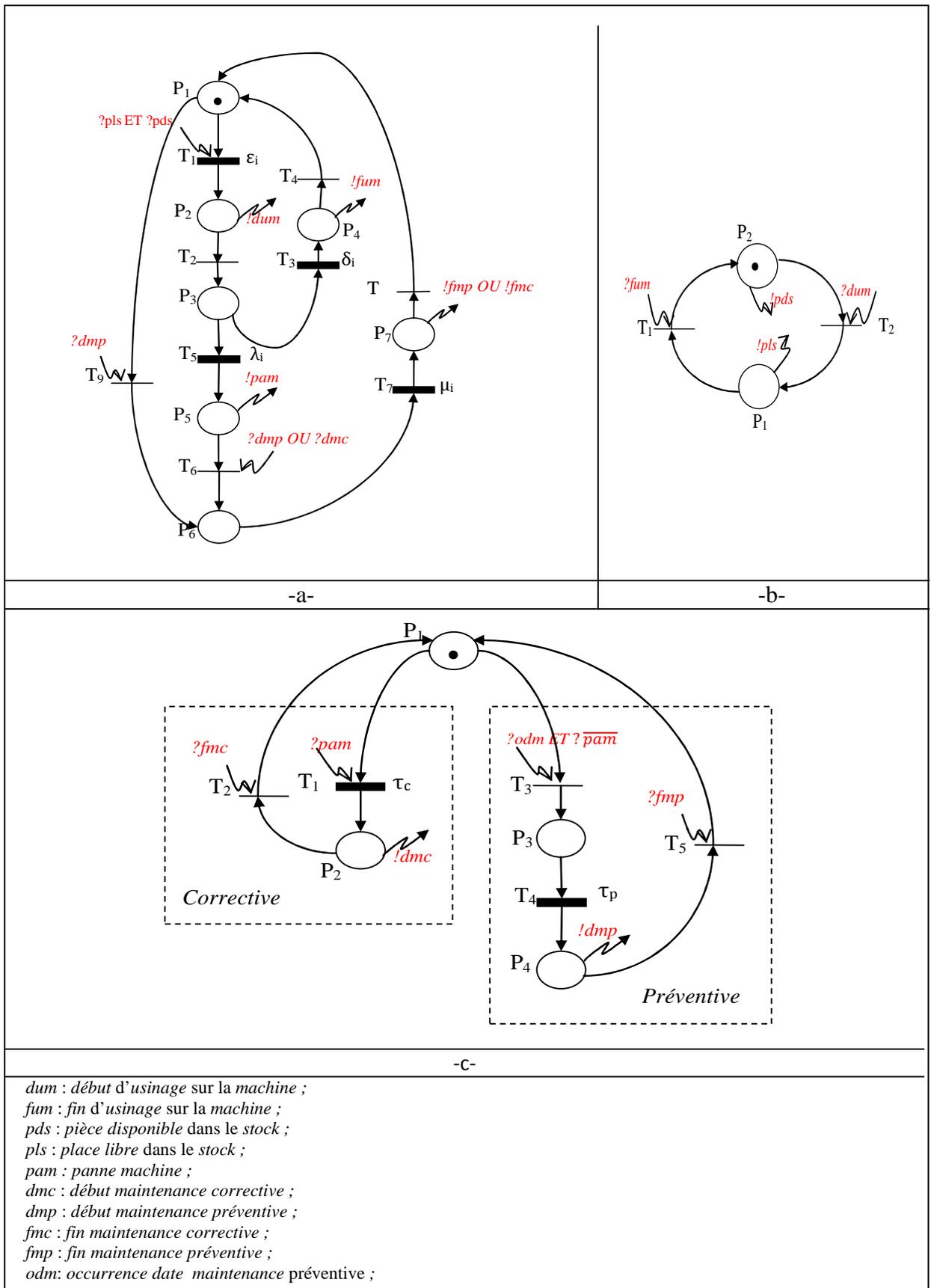


Figure III.6 : a: machine générique, b: stock générique, c : maintenance générique

Les RdPSGSyIs permettent de réaliser une modélisation modulaire et fonctionnelle du système considéré. Chaque fonctionnalité du système est décrite par un RdPSG et, ces différents réseaux sont synchronisés entre eux par le biais d'émissions/réceptions de signaux [Haoues, 05]. Les signaux de synchronisation sont émis par les places lorsqu'elles contiennent au moins une marque et sont reçus par les transitions.

La figure suivante (*Figure III.8*) représente les modèles **RdPSGSyIs** des machines de la ligne où nous associons, une maintenance préventive systématique pour M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 et M8 et une maintenance corrective pour M9:

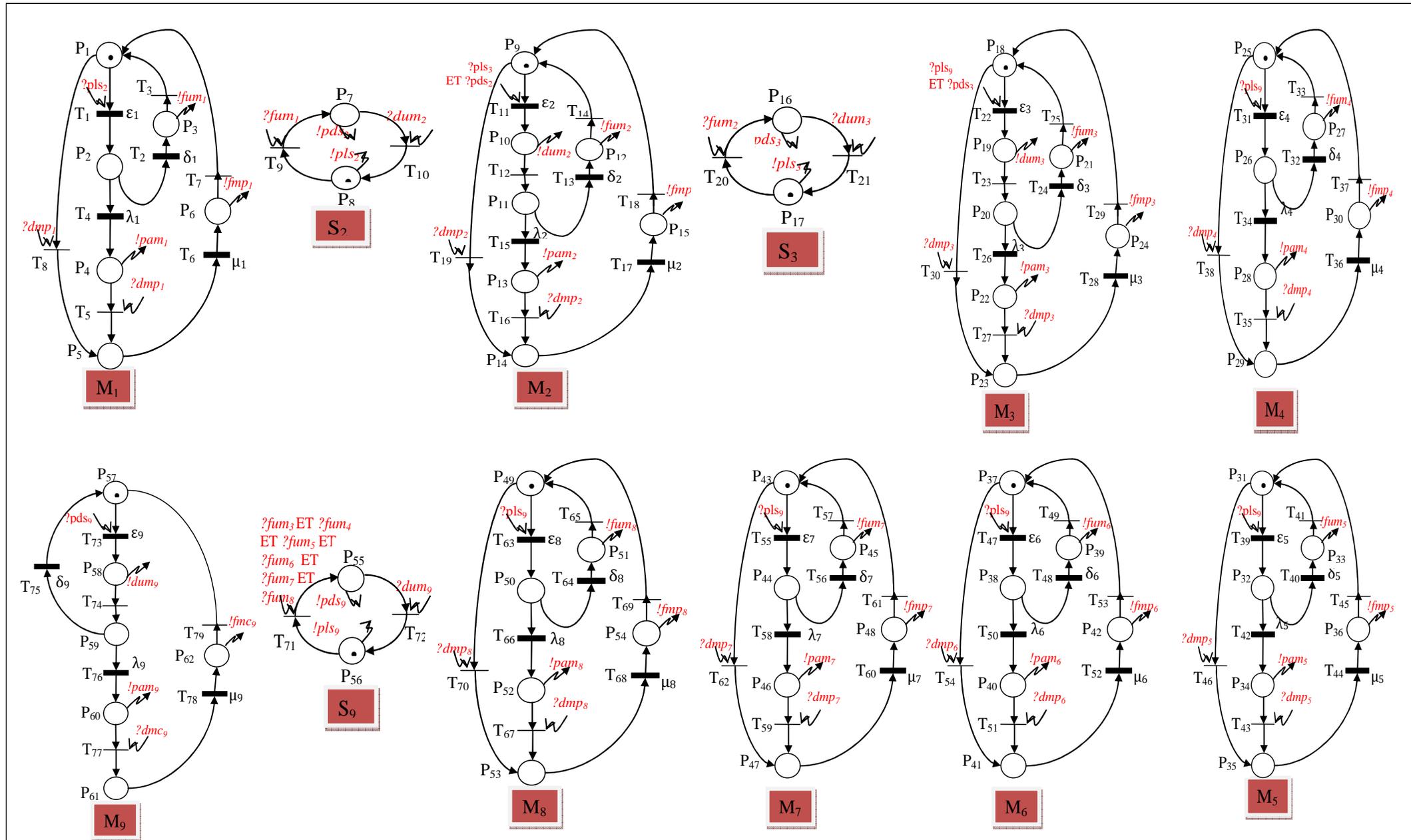


Figure III.8: RdPSGSyI de la ligne

### III.4 Description du modèle :

Les modèles des machines M1, M4, M5, M6, M7 et M8 ont des fonctionnements identiques. Ils comportent six places dont les significations sont les suivantes :

- ✓ place P<sub>1</sub> (resp. P<sub>25</sub>, P<sub>31</sub>, P<sub>37</sub>, P<sub>43</sub> et P<sub>49</sub>) : machine M1 (resp. M4, M5, M6, M7 et M8) au repos.
- ✓ place P<sub>2</sub> (resp. P<sub>26</sub>, P<sub>32</sub>, P<sub>38</sub>, P<sub>44</sub> et P<sub>50</sub>) : machine M1 (resp. M4, M5, M6, M7 et M8) en marche.
- ✓ place P<sub>3</sub> (resp. P<sub>27</sub>, P<sub>33</sub>, P<sub>39</sub>, P<sub>45</sub> et P<sub>51</sub>) : place émettrice envoyant un signal de fin d'activité à destination du stock S2 (resp. S9). Le franchissement des transitions de sortie de ces places est immédiat (temporisation nulle). Les signaux émis (*!fum<sub>1</sub>*, *!fum<sub>4</sub>*, *!fum<sub>5</sub>*, *!fum<sub>6</sub>*, *!fum<sub>7</sub>*, *!fum<sub>8</sub>*) seront donc de type impulsionnel.
- ✓ place P<sub>4</sub> (resp. P<sub>28</sub>, P<sub>34</sub>, P<sub>40</sub>, P<sub>46</sub> et P<sub>52</sub>) : machine M1 (resp. M4, M5, M6, M7 et M8) en panne.
- ✓ place P<sub>5</sub> (resp. P<sub>29</sub>, P<sub>35</sub>, P<sub>41</sub>, P<sub>47</sub> et P<sub>53</sub>) : machine M1 (resp. M4, M5, M6, M7 et M8) en arrêt pour maintenance préventive.
- ✓ place P<sub>6</sub> (resp. P<sub>30</sub>, P<sub>36</sub>, P<sub>42</sub>, P<sub>48</sub> et P<sub>54</sub>) : place émettrice envoyant un signal de fin de la maintenance préventive (*!fmp<sub>1</sub>*, *!fmp<sub>4</sub>*, *!fmp<sub>5</sub>*, *!fmp<sub>6</sub>*, *!fmp<sub>7</sub>*, *!fmp<sub>8</sub>*).

Les modèles des machines M2 et M3 sont sensiblement différents des autres modèles de machines. Ils comportent sept places :

- ✓ place P<sub>9</sub> (resp. P<sub>18</sub>) : machine M2 (resp. M3) au repos.
- ✓ place (P<sub>10</sub>, P<sub>11</sub>) (resp. (P<sub>19</sub>, P<sub>20</sub>)) : machine M2 (resp. M3) en marche. P<sub>10</sub> (resp. P<sub>19</sub>) est une place émettrice envoyant un signal de début d'activité au stock S2 (resp. S3). Le franchissement de la transition de sortie ((T<sub>12</sub>) (resp. (T<sub>23</sub>)) de la place P<sub>10</sub> (resp. P<sub>19</sub>) est immédiat. Les signaux émis (*!dum<sub>2</sub>*, *!dum<sub>3</sub>*) seront de type impulsionnel.
- ✓ place P<sub>12</sub> (resp. P<sub>21</sub>): place émettrice envoyant un signal de fin d'activité à destination du stock S3 (resp. S9). Le franchissement des transitions de sortie de ces places est immédiat. Les signaux émis (*!fum<sub>2</sub>*, *!fum<sub>3</sub>*) seront de type impulsionnel.
- ✓ place P<sub>13</sub> (resp. P<sub>22</sub>) : machine M2 (resp. M3) en panne.
- ✓ place P<sub>14</sub> (resp. P<sub>23</sub>) : machine M2 (resp. M3) en arrêt pour maintenance préventive.
- ✓ place P<sub>15</sub> (resp. P<sub>24</sub>) : place émettrice envoyant un signal de fin de la maintenance préventive (*!fmp<sub>2</sub>*, *!fmp<sub>3</sub>*).

Le modèle de la machine M9 (qui est une machine d'assemblage) est aussi sensiblement différent. Il comporte également six places dont les significations sont les suivantes :

- ✓ place P<sub>57</sub>: machine M9 au repos.
- ✓ place (P<sub>58</sub>, P<sub>59</sub>) : machine M9 en marche. P<sub>58</sub> est une place émettrice envoyant un signal de début d'activité au stock S9. Le franchissement de la transition de sortie de cette place (T<sub>74</sub>) est immédiat. Le signal émis (?dum9) sera donc de type impulsif.
- ✓ place P<sub>60</sub>: machine M9 en panne.
- ✓ place P<sub>61</sub>: machine M9 en arrêt pour maintenance corrective.
- ✓ place P<sub>62</sub>: place émettrice envoyant un signal de fin de la maintenance corrective (!fmc<sub>9</sub>).

Les modèles des stocks S2, S3 et S9 sont totalement identiques. Chacun de ces modèles possède deux places et deux transitions dont les significations sont données ci-après :

- ✓ place P<sub>7</sub> (resp. P<sub>16</sub> et P<sub>55</sub>) : nombre de pièces dans le stock S2 (resp. S3 et S9).
- ✓ place P<sub>8</sub> (resp. P<sub>17</sub> et P<sub>56</sub>) : nombre d'emplacements libres dans le stock S2 (resp. S3 et S9).

Une machine peut être au repos, en marche, en panne ou en arrêt pour maintenance. Une maintenance corrective (MC) ne peut être lancée qu'après l'occurrence d'une panne (T<sub>77</sub>) alors qu'une maintenance préventive (MP), lorsqu'elle doit s'effectuer, arrête la machine si cette dernière se trouve au repos (T<sub>8</sub>, T<sub>19</sub>, T<sub>30</sub>, T<sub>38</sub>, T<sub>46</sub>, T<sub>54</sub>, T<sub>62</sub>, T<sub>70</sub>). Si la machine est en panne alors qu'elle est associée uniquement à une politique de MP, elle attend l'occurrence d'une date de MP pour pouvoir être réparée. Pour signaler la fin des tâches de maintenance, la machine émet un signal ( !fmc pour une MC ou !fmp pour une MP).

### III.5 Modélisation modulaire :

Un système manufacturier est constitué d'un ensemble de machines séparées par des stocks. Chaque machine M<sub>i</sub> puisant les pièces à usiner dans un (ou plusieurs) stock(s) d'entrée, et déposant les pièces finies dans un (ou plusieurs) stock(s) de sortie est caractérisée par 4 paramètres : le taux moyen de chargement ( $\epsilon_i$ ), le taux moyen de service ( $\delta_i$ ), le taux moyen de panne ( $\lambda_i$ ) et le taux moyen de réparation ( $\mu_i$ ). Nous associons à chaque machine une politique de maintenance, corrective ou préventive [Simeu, 98]. La **Figure III.9** représente les principales structures que l'on peut rencontrer dans un atelier:

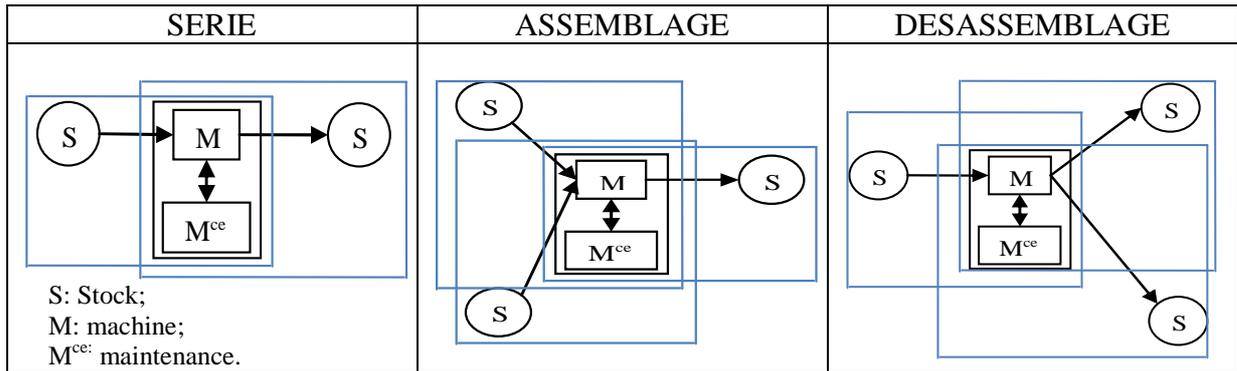


Figure III.9: principe cellules élémentaires

La décomposition cellulaire de la ligne étudiée se fait par rapport aux machines. Tout le système peut être décomposé en autant de cellules qu'il y a de machines.

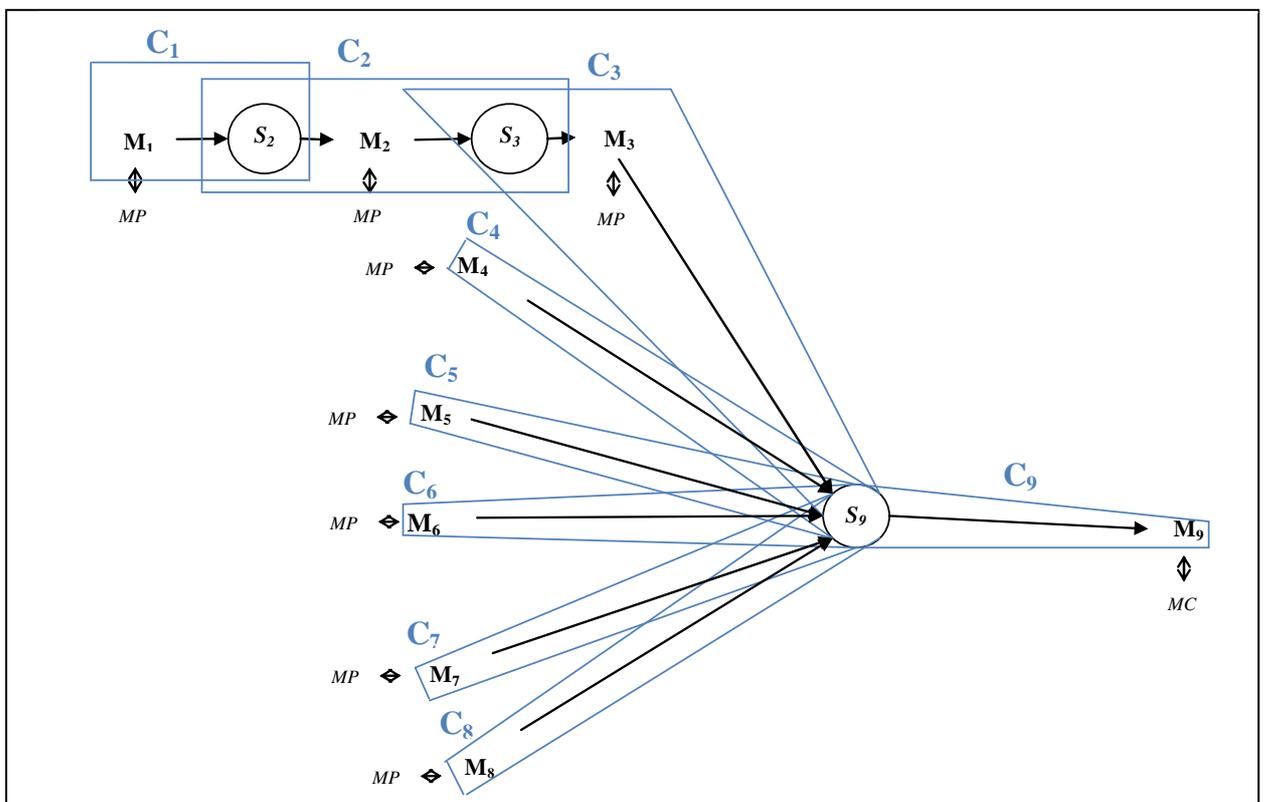


Figure III.10: Représentation schématique du groupement en cellules simples.

La ligne de la **Figure III.10** peut être décomposée en 9 cellules (C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8 et C9) qui sont réparties comme suit :

- Six demi-série aval : C1  $\Rightarrow$  (M1-S2), C4  $\Rightarrow$  (M4-S9) , C5  $\Rightarrow$  (M5-S9), C6  $\Rightarrow$  (M6-S9), C7  $\Rightarrow$  (M7-S9), C8  $\Rightarrow$  (M8-S9)
- Une demi-série amont : C9  $\Rightarrow$  (S9-M9)
- Deux séries : C2  $\Rightarrow$  (S2-M2-S3), C3  $\Rightarrow$  (S3-M2-S9)

Au SdP formé par un ensemble de cellules élémentaires nous appliquons la modélisation modulaire qui peut être décomposée en plusieurs étapes :

1. Effectuer un découpage structurel de la ligne de production en cellules élémentaire. Ainsi, une ligne de production contenant  $n$  machines est décomposée en  $n$  cellules élémentaires.
2. Modéliser chaque machine avec le type de maintenance associé et chaque stock du système par un RdPSG.
3. Introduire les signaux de synchronisation.
4. Appliquer l'algorithme de décomposition/recomposition afin de déduire les chaînes de Markov relatives à chaque cellule élémentaire.

### **III.5.1 Principe de l'algorithme de décomposition/recomposition :**

Pour générer le PdM d'un RdPSGSyI, noté  $R$ , associé à deux RdPSG ( $R_a$  et  $R_b$ ) synchronisés entre eux. Nous utilisons l'algorithme de DEcomposition- REComposition baptisée DEREK, cet algorithme possède quatre étapes [Sassine, 98], [Haoues, 05] :

**Etape I :** Détermination des modèles RdP de chaque module à part à partir des modèles génériques de références de la **Figure III.7** ;

**Etape II :** Génération des matrices de transitions de chaque module considéré à part ;

**Etape III :** Détermination de la matrice de transition du système complet (ensemble de tous les modules synchronisés) ;

**Etape IV :** Simplification de la matrice obtenu à l'étape précédente la matrice finale obtenue [ $GR$ ] représente le PdM d'un système complet (sous formes matricielle et graphique).

Suivant le type de maintenance appliqué, on obtient différents modèles représentant les états de la machine. La **Figure III.11** donne respectivement les graphes de Markov d'une machine dans le cas où la maintenance n'est pas intégrée et dans les cas où les maintenances corrective ou préventive sont intégrées.

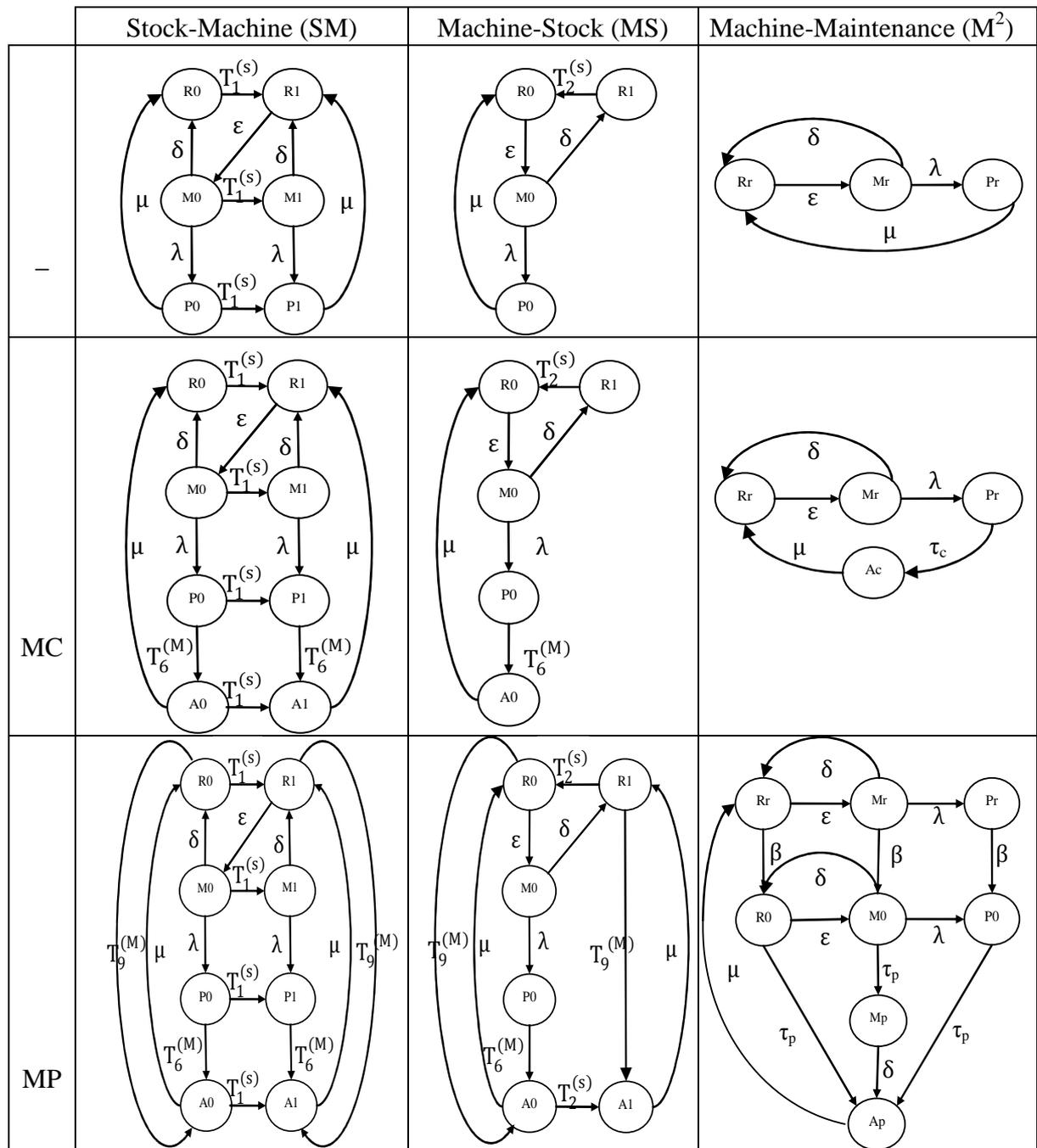


Figure III.11: PdM pour les cas SM, MS,  $M^2$

Quatre états pour la machine : R=Repos, M=Marche, P=Panne et A=Arrêt pour maintenance. Deux états pour le stock : 0 quand il ne contient pas de pièces et 1 s'il contient une pièce. Et trois états pour la maintenance : r=repos, o=occupée et p (resp. c)= maintenance préventive en cours (resp. maintenance corrective en cours).

### III.5.2 Déterminer les matrices de transitions des cellules :

Une cellule  $C_i$  avec une politique de maintenance intégrée se décompose en trois cellules élémentaires : une SM, une MS et une  $M^2$ . Les PdM pour chacune de ces cellules élémentaires sont données à la *Figure III.11*. Pour déterminer le PdM de la cellule  $C_i$  toute entière, il s'agit de combiner les PdM de ces trois cellules élémentaires.

Si nous observons de près la structure de la cellule, nous remarquons que l'intersection de ces trois cellules élémentaires (SM, MS et  $M^2$ ) est une machine. Cela veut dire que, pour pouvoir combiner les trois PdM (ou matrices de transition) des trois cellules élémentaires, nous devons impérativement les réorganiser selon les états de la machine.

Autrement dit, la décomposition en blocs de la matrice  $[G_R]$  de chacune des trois cellules élémentaires doit se faire selon les états de la machine. Pour notre cas, nous obtenons les matrices suivantes :

$[G_R]_{C_i}$	Rr <sub>1</sub> 0	Ro <sub>1</sub> 0	Rr <sub>1</sub> 1	Ro <sub>1</sub> 1	Mr <sub>1</sub> 0	Mo <sub>1</sub> 0	Mp <sub>1</sub> 0	Pr <sub>1</sub> 0	Po <sub>1</sub> 0	Ap <sub>1</sub> 0	Ap <sub>1</sub> 1
Rr <sub>1</sub> 0		$\beta_1$			$\varepsilon_1$						
Ro <sub>1</sub> 0										$\tau_{P1}$	
Rr <sub>1</sub> 1	$T_2^{(S_2)}$			$\beta_1$	$\varepsilon_1$						
Ro <sub>1</sub> 1		$T_2^{(S_2)}$									$\tau_{P1}$
Mr <sub>1</sub> 0		$\delta_1$				$\beta_1$		$\lambda_1$			
Mo <sub>1</sub> 0				$\delta_1$			$\tau_{P1}$		$\lambda_1$		
Mp <sub>1</sub> 0											
Pr <sub>1</sub> 0									$\beta_1$		
Po <sub>1</sub> 0											$\tau_{P1}$
Ap <sub>1</sub> 0	$\mu_1$										
Ap <sub>1</sub> 1			$\mu_1$							$T_2^{(S_2)}$	

$[G_R]_{C_2}$	0Rr <sub>2</sub> 0	0Rr <sub>2</sub> 1	1Rr <sub>2</sub> 0	1Rr <sub>2</sub> 1	0Rr <sub>2</sub> 0	0Rr <sub>2</sub> 1	1Rr <sub>2</sub> 0	1Rr <sub>2</sub> 1	0Mr <sub>2</sub> 0	1Mr <sub>2</sub> 0	0Mo <sub>2</sub> 0	1Mo <sub>2</sub> 0	0Mp <sub>2</sub> 0	1Mp <sub>2</sub> 0	0Pr <sub>2</sub> 0	1Pr <sub>2</sub> 0	0Po <sub>2</sub> 0	1Po <sub>2</sub> 0	0Ap <sub>2</sub> 0	0Ap <sub>2</sub> 1	1Ap <sub>2</sub> 0	1Ap <sub>2</sub> 1	
0Rr <sub>2</sub> 0		$\beta_2$			$T_1^{(S_2)}$																		
0Rr <sub>2</sub> 1						$T_1^{(S_2)}$														$\tau_{p_2}$			
1Rr <sub>2</sub> 0	$T_2^{(S_3)}$			$\beta_2$			$T_1^{(S_2)}$																
1Rr <sub>2</sub> 1		$T_2^{(S_3)}$						$T_1^{(S_2)}$													$\tau_{p_2}$		
0Ro <sub>2</sub> 0						$\beta_2$			$\epsilon_2$														
0Ro <sub>2</sub> 1										$\epsilon_2$												$\tau_{p_2}$	
1Ro <sub>2</sub> 0					$T_2^{(S_3)}$			$\beta_2$															
1Ro <sub>2</sub> 1						$T_2^{(S_3)}$																	$\tau_{p_2}$
0Mr <sub>2</sub> 0			$\delta_2$								$\beta_2$					$\lambda_2$							
1Mr <sub>2</sub> 0				$\delta_2$								$\beta_2$					$\lambda_2$						
0Mo <sub>2</sub> 0													$\tau_{p_2}$										
1Mo <sub>2</sub> 0							$\delta_2$							$\tau_{p_2}$				$\lambda_2$					
0Mp <sub>2</sub> 0								$\delta_2$											$\lambda_2$				
1Mp <sub>2</sub> 0																							
0Pr <sub>2</sub> 0																		$\beta_2$					
1Pr <sub>2</sub> 0																			$\beta_2$		$\tau_{p_2}$		
0Po <sub>2</sub> 0																							
1Po <sub>2</sub> 0																							$\tau_{p_2}$
0Ap <sub>2</sub> 0	$\mu_2$																					$T_1^{(S_2)}$	
0Ap <sub>2</sub> 1			$\mu_2$																	$T_2^{(S_3)}$			$T_1^{(S_2)}$
1Ap <sub>2</sub> 0					$\mu_2$																		
1Ap <sub>2</sub> 1							$\mu_2$															$T_2^{(S_3)}$	

$[G_R]_{C_3}$	0Rr <sub>3</sub> 0	0Rr <sub>3</sub> 1	1Rr <sub>3</sub> 0	1Rr <sub>3</sub> 1	0Rr <sub>3</sub> 0	0Rr <sub>3</sub> 1	1Rr <sub>3</sub> 0	1Rr <sub>3</sub> 1	0Mr <sub>3</sub> 0	1Mr <sub>3</sub> 0	0Mo <sub>3</sub> 0	1Mo <sub>3</sub> 0	0Mp <sub>3</sub> 0	1Mp <sub>3</sub> 0	0Pr <sub>3</sub> 0	1Pr <sub>3</sub> 0	0Po <sub>3</sub> 0	1Po <sub>3</sub> 0	0Ap <sub>3</sub> 0	0Ap <sub>3</sub> 1	1Ap <sub>3</sub> 0	1Ap <sub>3</sub> 1	
0Rr <sub>3</sub> 0		$\beta_3$			$T_1^{(S_3)}$																		
0Rr <sub>3</sub> 1						$T_1^{(S_3)}$														$\tau_{p_3}$			
1Rr <sub>3</sub> 0	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_3$			$T_1^{(S_3)}$																
1Rr <sub>3</sub> 1		$T_2^{(S_9)}$						$T_1^{(S_3)}$													$\tau_{p_3}$		
0Ro <sub>3</sub> 0						$\beta_3$			$\varepsilon_3$														
0Ro <sub>3</sub> 1										$\varepsilon_3$												$\tau_{p_3}$	
1Ro <sub>3</sub> 0					$T_2^{(S_9)}$		$\beta_3$																
1Ro <sub>3</sub> 1						$T_2^{(S_9)}$																	$\tau_{p_3}$
0Mr <sub>3</sub> 0			$\delta_3$								$\beta_3$				$\lambda_3$								
1Mr <sub>3</sub> 0				$\delta_3$								$\beta_3$				$\lambda_3$							
0Mo <sub>3</sub> 0													$\tau_{p_3}$										
1Mo <sub>3</sub> 0							$\delta_3$							$\tau_{p_3}$			$\lambda_3$						
0Mp <sub>3</sub> 0								$\delta_3$										$\lambda_3$					
1Mp <sub>3</sub> 0																							
0Pr <sub>3</sub> 0																	$\beta_3$						
1Pr <sub>3</sub> 0																		$\beta_3$			$\tau_{p_3}$		
0Po <sub>3</sub> 0																							
1Po <sub>3</sub> 0																							$\tau_{p_3}$
0Ap <sub>3</sub> 0	$\mu_3$																					$T_1^{(S_3)}$	
0Ap <sub>3</sub> 1			$\mu_3$																	$T_2^{(S_9)}$			$T_1^{(S_3)}$
1Ap <sub>3</sub> 0					$\mu_3$																		
1Ap <sub>3</sub> 1							$\mu_3$															$T_2^{(S_9)}$	

$[G_R]_{C_4}$	Rr <sub>4</sub> 0	Ro <sub>4</sub> 0	Rr <sub>4</sub> 1	Ro <sub>4</sub> 1	Mr <sub>4</sub> 0	Mo <sub>4</sub> 0	Mp <sub>4</sub> 0	Pr <sub>4</sub> 0	Po <sub>4</sub> 0	Ap <sub>4</sub> 0	Ap <sub>4</sub> 1
Rr <sub>4</sub> 0		$\beta_4$			$\varepsilon_4$						
Ro <sub>4</sub> 0										$\tau_{P4}$	
Rr <sub>4</sub> 1	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_4$		$\varepsilon_4$					
Ro <sub>4</sub> 1		$T_2^{(S_9)}$									$\tau_{P4}$
Mr <sub>4</sub> 0		$\delta_4$				$\beta_4$		$\lambda_4$			
Mo <sub>4</sub> 0				$\delta_4$			$\tau_{P4}$		$\lambda_4$		
Mp <sub>4</sub> 0											
Pr <sub>4</sub> 0									$\beta_4$		
Po <sub>4</sub> 0											$\tau_{P4}$
Ap <sub>4</sub> 0	$\mu_4$										
Ap <sub>4</sub> 1			$\mu_4$								$T_2^{(S_9)}$

$[G_R]_{C_5}$	Rr <sub>5</sub> 0	Ro <sub>5</sub> 0	Rr <sub>5</sub> 1	Ro <sub>5</sub> 1	Mr <sub>5</sub> 0	Mo <sub>5</sub> 0	Mp <sub>5</sub> 0	Pr <sub>5</sub> 0	Po <sub>5</sub> 0	Ap <sub>5</sub> 0	Ap <sub>5</sub> 1
Rr <sub>5</sub> 0		$\beta_5$			$\varepsilon_5$						
Ro <sub>5</sub> 0										$\tau_{P5}$	
Rr <sub>5</sub> 1	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_5$		$\varepsilon_5$					
Ro <sub>5</sub> 1		$T_2^{(S_9)}$									$\tau_{P5}$
Mr <sub>5</sub> 0		$\delta_5$				$\beta_5$		$\lambda_5$			
Mo <sub>5</sub> 0				$\delta_5$			$\tau_{P5}$		$\lambda_5$		
Mp <sub>5</sub> 0											
Pr <sub>5</sub> 0									$\beta_5$		
Po <sub>5</sub> 0											$\tau_{P5}$
Ap <sub>5</sub> 0	$\mu_5$										
Ap <sub>5</sub> 1			$\mu_5$								$T_2^{(S_9)}$

$[G_R]_{C_6}$	Rr <sub>6</sub> 0	Ro <sub>6</sub> 0	Rr <sub>6</sub> 1	Ro <sub>6</sub> 1	Mr <sub>6</sub> 0	Mo <sub>6</sub> 0	Mp <sub>6</sub> 0	Pr <sub>6</sub> 0	Po <sub>6</sub> 0	Ap <sub>6</sub> 0	Ap <sub>6</sub> 1
Rr <sub>6</sub> 0		$\beta_6$			$\varepsilon_6$						
Ro <sub>6</sub> 0										$\tau_{P6}$	
Rr <sub>6</sub> 1	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_6$		$\varepsilon_6$					
Ro <sub>6</sub> 1		$T_2^{(S_9)}$									$\tau_{P6}$
Mr <sub>6</sub> 0		$\delta_6$				$\beta_6$		$\lambda_6$			
Mo <sub>6</sub> 0				$\delta_6$			$\tau_{P6}$		$\lambda_6$		
Mp <sub>6</sub> 0											
Pr <sub>6</sub> 0									$\beta_6$		
Po <sub>6</sub> 0											$\tau_{P6}$
Ap <sub>6</sub> 0	$\mu_6$										
Ap <sub>6</sub> 1			$\mu_6$								$T_2^{(S_9)}$

$[G_R]_{C_7}$	Rr70	Ro70	Rr71	Ro71	Mr70	Mo70	Mp70	Pr70	Po70	Ap70	Ap71
Rr70		$\beta_7$			$\varepsilon_7$						
Ro70										$\tau_{p7}$	
Rr71	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_7$		$\varepsilon_7$					
Ro71		$T_2^{(S_9)}$									$\tau_{p7}$
Mr70		$\delta_7$				$\beta_7$		$\lambda_7$			
Mo70				$\delta_7$			$\tau_{p7}$		$\lambda_7$		
Mp70											
Pr70									$\beta_7$		
Po70											$\tau_{p7}$
Ap70	$\mu_7$										
Ap71			$\mu_7$								$T_2^{(S_9)}$

$[G_R]_{C_8}$	Rr80	Ro80	Rr81	Ro81	Mr80	Mo80	Mp80	Pr80	Po80	Ap80	Ap81
Rr80		$\beta_8$			$\varepsilon_8$						
Ro80										$\tau_{p8}$	
Rr81	$T_2^{(S_9)}$			$\beta_8$		$\varepsilon_8$					
Ro81		$T_2^{(S_9)}$									$\tau_{p8}$
Mr80		$\delta_8$				$\beta_8$		$\lambda_8$			
Mo80				$\delta_8$			$\tau_{p8}$		$\lambda_8$		
Mp80											
Pr80									$\beta_8$		
Po80											$\tau_{p8}$
Ap80	$\mu_8$										
Ap81			$\mu_8$								$T_2^{(S_9)}$

$[G_R]_{C_9}$	Rr90	Rr91	Mr90	Mr91	Pr90	Pr91	Ac90	Ac91
Rr90		$T_1^{(S_9)}$						
Rr91			$\varepsilon_9$					
Mr90				$T_1^{(S_9)}$	$\lambda_9$			
Mr91						$\lambda_9$		
Pr90						$T_1^{(S_9)}$	$\tau_c$	
Pr91								$\tau_c$
Ac90	$\mu_9$							$T_1^{(S_9)}$
Ac91		$\mu_9$						

Jusqu'à présent, nous avons introduit la notion de cellules, la démarche permettant de les construire, de décomposer notre SdP en cellules et de générer les PdM par cellules, plusieurs remarques s'imposent :

- Lors du regroupement en cellules, chaque stock appartient nécessairement à (au moins) deux cellules et deux cellules adjacentes partagent (au moins) un stock.
- L'observation des PdM (ou matrices de transitions  $[G_R]$ ) appelle immédiatement une remarque : elles contiennent à la fois des valeurs numériques ( $\epsilon$ ,  $\delta$ , etc.) et des paramètres formels, c'est-à-dire des inconnues ( $T_1^{(S)}$ ,  $T_2^{(S)}$ , etc.).

Pour un SdP composé de plusieurs cellules, il faudra pour chacune d'entre elles calculer les durées moyennes de franchissement des transitions, afin de simuler au mieux la présence de son environnement. L'objectif étant défini, il ne nous reste plus qu'à trouver le moyen de l'atteindre (l'objectif du prochain chapitre).

### III.6 Conclusion :

Le SdP composé de machines, stocks et politique de maintenance. Chacun de ces composants a été décrit par un module RdP à part. Grâce aux **RdPSGSyIs** qui permettent de synchroniser les différents modules, nous avons obtenu une représentation modulaire, nous sommes passés à une représentation plus adaptée, les PdM. Cette représentation markovienne est connue pour tout couple de modules, c'est-à-dire pour de petits sous-ensembles du système globale. Nous introduisons la notion de "cellule" permettant de définir les petits sous-ensembles. Le chapitre suivant est consacré à la résolution des PdM pour calculer la distribution stationnaire du système tout entier.

---

*Chapitre IV : La construction des  
indicateurs de la sûreté de  
fonctionnement*

---

## **IV.1 Introduction :**

La mesure de l'efficacité des SdP se traduit à travers l'utilisation des méthodes qui doivent démontrer l'aptitude des SdP de production à atteindre les résultats planifiés.

La mesure permet de suivre l'évolution du SdP, de détecter les dérives ou dysfonctionnement éventuels, et de localiser les champs d'amélioration possible.

Les indicateurs constituent un élément essentiel de la maîtrise des processus de production, à condition que l'ensemble des indicateurs mis en place permette de lancer des actions correctives et de prendre des décisions cohérentes quant à l'évolution nécessaire des processus.

## **IV.2 Les indicateurs de la sûreté de fonctionnement :**

### **IV.2.1 Le besoin d'indicateurs :**

L'amélioration de la SdF correspond à des anomalies, des insuffisances ou des dysfonctionnements qui ont des causes qu'il faut identifier. On constate d'ailleurs souvent qu'il y a des enchaînements de défaillances de niveaux différents; il faut alors identifier la cause première de ces enchaînements car c'est celle sur laquelle il convient d'agir. Les indicateurs de la SdF quantifiés permettent d'identifier ces divers types d'anomalies et de dysfonctionnements de différents niveaux. C'est donc d'un ensemble d'indicateurs qu'il convient de disposer. Outre leur utilité lors d'un diagnostic pour identifier un problème de tout ordre et définir ensuite les actions correctives ou préventives à lancer pour le résoudre, les indicateurs permettent également de suivre les résultats des actions décidées [Kaanit, 05].

Les indicateurs constituent une solution possible pour évaluer le SdP à partir de la recherche d'objectifs quantifiables. Un indicateur est *une donnée exprimée en quantité et non en valeur qui mesure l'efficacité de tout ou partie d'un processus ou d'un système par rapport à une norme, un plan ou un objectif qui aura été déterminé et accepté dans le cadre d'une stratégie d'ensemble* [Bonnefous, 93].

Les entreprises occidentales ont toujours privilégié les indicateurs de résultat, les entreprises japonaises, ceux de processus. "Les occidentaux comptent les œufs de la poule, les japonais s'intéressent à la santé de celle-ci". Une entreprise qui n'a pas de stratégie industrielle bien précise trouvera peu d'indicateurs de processus à afficher. Si on ne sait pas où on va, on peut difficilement se demander comment y aller ! Jusqu'au début des années quatre-vingt, la

philosophie occidentale - produire en saturant la capacité - pouvait se satisfaire de peu d'indicateurs. C'est avec les politiques de qualité totale, d'élimination des gaspillages, d'amélioration du niveau de la SdF (disponibilité, fiabilité, etc.) et les politiques de maintenance que les indicateurs de processus sont devenus nécessaires.

#### **IV.2.2 Méthode de calcul des indicateurs de sûreté de fonctionnement :**

La méthode de calcul exacte nécessite l'obtention de la matrice de transition du système global. Le moindre accroissement de la complexité du système se traduit par une explosion du nombre de marquages accessibles. L'approche que nous avons utilisée permet de contourner ce problème d'explosion combinatoire. Elle permet de calculer la distribution stationnaire du modèle markovien pour un mode de fonctionnement fixé et une structure d'atelier donnée. En effet, la forme cellulaire obtenue après découpage est telle que chaque cellule interagit fortement avec celles qui la précèdent ainsi qu'avec celles qui la suivent les unes parce qu'elles alimentent en pièces ses stocks d'entrée, les autres parce qu'elles puisent des pièces dans ses stocks de sortie. Cette forte interaction impose que la méthode de résolution soit du type itérative car seules les méthodes itératives sont capables, au cours des passages successifs, de véhiculer les contraintes d'une cellule à une autre.

#### **IV.3 Résolution approchée :**

La méthode du calcul itératif est basée sur la propagation d'informations d'une cellule vers une autre. Les paramètres à propager vers les cellules en aval d'une cellule  $C_i$  seront les fréquences moyennes de franchissement des transitions de fin d'usinage de ses machines, ce qui représente les taux moyens de dépôts dans le stock aval. De même, les paramètres à propager vers les cellules en amont de  $C_i$  seront les fréquences moyennes de franchissement des transitions de chargement de ses machines, soit les taux moyens de retrait du stock amont. Pour propager les informations d'une cellule à une autre, nous utilisons le fait que toutes les pièces qui sont déposées par une cellule dans ses stocks de sortie sont nécessairement consommées par les cellules suivantes. Pour la propagation de l'information vers l'aval et vers l'amont, plusieurs étapes sont nécessaires. Mais, avant de commencer la première itération, il est nécessaire d'introduire dans le système des valeurs initiales. Si elles sont quelconques, cela ne modifie pas les valeurs des solutions obtenues mais par contre augmente le nombre d'itération avant convergence. Comme nous sommes intéressés par gagner un maximum de temps sur toutes les étapes de notre démarche, nous injectons dans le

système des valeurs initiales calculées correspondant au débit à vide de chaque machine. L'algorithme de résolution est le suivant :

**Début**

Calcule des taux de dépôt initiaux ;  
Propagation amont pour obtention des taux de retrait initiaux ;  
nb=0 ; // nombre d'itérations  
Faire  
n=n+1 ;  
Propagation aval pour obtention des taux de dépôt à l'itération n ;  
Propagation amont pour obtention des taux de retrait à l'itération n ;  
Tant que critère de convergence non satisfait

**Fin**

Tout algorithme itératif doit posséder un critère de convergence. Nous avons opté pour un critère de convergence assez sévère qui est le critère quadratique. Soit deux cellules consécutives  $C_i$  et  $C_j$  séparées par le stock  $S_k$ . lors de la propagation aval, on calcule :

$$\tau_{ij} = (\text{Pr} \{ \text{Marche de } M_i \} * \delta_i)$$

à l'itération n. Et vers l'amont, on calcule :

$$\tau_{ji} = (\text{Pr} \{ M_j \text{ au repos} \} * \varepsilon_j)$$

#### **IV.4 Etude de comportement stationnaire :**

Comme règle générale, dans l'évaluation des performances d'un système, le comportement en régime permanent joue un rôle prépondérant [ZEMOURI 00]. Pour cela nous nous intéressons seulement à l'étude de ce régime.

Pour cela, on applique la technique des perturbations singulières en continu sur le générateur du PdM, on découple le PdM en deux sous-systèmes dont les évolutions des probabilités sont lentes ou rapides. Toutefois, seul le sous-système lent conserve les propriétés des PdM.

On peut à chaque instant calculer la probabilité pour que le système occupe tel ou tel état. On peut définir ainsi le vecteur probabilité instantanée  $[Pr(t)] = [Pr_1(t), Pr_2(t), \dots, Pr_n(t)]$  tel que  $0 \leq Pr_i(t) \leq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  avec :

$$\sum_{i=1}^n Pr_i(t) = 1 \dots \dots \dots (IV. 1)$$

Où  $Pr_i(t)$  est la probabilité d'être dans l'état  $E_i$  à l'instant  $t$ . Ce vecteur  $[Pr(t)]$  est intéressant car il donne à chaque instant une *image probabiliste* de l'état du système.

Comme le temps  $t$  intervient dans les expressions de  $P_i(t)$ , une observation du système pendant un temps infini laisse place à un régime dit *stationnaire (ou permanent)*. Ce régime permanent correspond à un état d'équilibre atteint par le système. Ce sont ces paramètres en régime stationnaire qui nous intéressent lors de notre étude.

Dans ce cas, le vecteur probabilité instantanée correspond à un vecteur dit de *distribution stationnaire*, noté  $[Pr] = [Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n]$ . La recherche de ce vecteur se résume: soit à la résolution du système d'équation différentielles d'ordre ( $n$ ) et en faisant tendre  $t \rightarrow \infty$  au niveau des solutions, soit par la résolution d'un système de  $n$  équations linéaires de  $n$  inconnues.

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\left[ \frac{dP(t)}{dt} \right] = [Pr(t)][B] \dots \dots \dots (IV. 2)$$

Or, lorsqu'on atteint le régime stationnaire,  $\frac{dP(t)}{dt}$  tend vers 0 et  $P(t)$  atteint la distribution stationnaire  $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$  d'où, l'équation ci-dessus devient :

$$[Pr]. [B] = 0 \dots \dots \dots (IV. 3)$$

Se résultat se généralise comme suit :

Soit un PdM à  $n$  états et dont la matrice des taux de transitions est  $[B]$ . Soit  $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$  son vecteur distribution stationnaire. La recherche de ce vecteur se résume à la résolution du système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues suivantes :

$$[Pr]. [B] = 0 \dots \dots \dots (1) \quad / \quad \sum_{i=1}^n Pr_i(t) = 1 \dots \dots \dots (IV. 4)$$

La relation (1) prend alors la forme suivante :

$$[P] = [B]_{\pi}^{-1} \cdot P_{\pi}(0) \dots \dots \dots (IV. 5)$$

La résolution des matrices des taux de transitions associée au PdM nous donne les probabilités d'états recherchées. A partir de ces probabilités, nous déduisons les probabilités d'états des machines des politiques de maintenance et des stocks. Nous avons présenté dans ce paragraphe seulement les probabilités qui nous utilisons dans la construction des indicateurs de SdF.

Les probabilités d'états des composant de la ligne (machines, maintenance, stocks) sont :

$Pr_{Mi}$  : Probabilité que la machine  $M_i$  soit en état de marche ;

$Pr_{Pi}$  : Probabilité que la machine  $M_i$  soit en état de panne ;

$Pr_{Ai}$  : Probabilité que la machine  $M_i$  soit en arrêt pour cause de MC ou MP;

$Pr_{Aci}$  : Probabilité que la machine  $M_i$  soit en arrêt pour cause de MC ;

$Pr_{Api}$  : Probabilité que la machine  $M_i$  soit en arrêt pour cause de MP ;

$Pr_{psj}$  : Probabilité qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock  $S_j$  ;

$Pr_{plsj}$  : Probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans le stock  $S_j$  ;

Les **Tableau IV.1**, **IV.2** et **IV.3** récapitulent les différentes probabilités d'états des machines/ maintenance/ stocks.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
$Pr_M$	0.7409	0.6244	0.4266	0.3137	0.3312	0.2601	0.2103	0.6501	0.2750
$Pr_P$	0.0861	0.0270	0.0122	0.0137	0.0401	0.0111	0.0226	0.0431	0.0201
$Pr_A$	0.0191	0.1005	0.0880	0.0936	0.1203	0.0898	0.0824	0.1031	0.1015

**Tableau IV.1:** Probabilité d'état des machines

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
$Pr_{Api}$	0.0191	0.1005	0.0880	0.0936	0.1203	0.0898	0.0824	0.1031	–
$Pr_{Aci}$	–	–	–	–	–	–	–	–	0.1015

**Tableau IV.2** : Probabilité d'état de Maintenance

	S2	S3	S9
$Pr_{psj}$	0.242	0.219	0.158
$Pr_{plsj}$	0.779	0.620	0.457

**Tableau IV.3** : Probabilité d'état des stocks

## IV.5 Construction des indicateurs :

Nous avons vu, au cours de ce travail, que la SdF d'un SdP est évaluée par des indicateurs tels que : la disponibilité, la fiabilité et la maintenabilité. Pour chacune de ces catégories, nous allons donner quelques indicateurs avec leurs modes de calcul.

### IV.5.1 La disponibilité :

La disponibilité est l'aptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche dans des conditions de temps déterminées sous les aspects combinés de sa fiabilité, maintenabilité et de l'organisation de sa maintenance. Notons qu'une haute disponibilité exige une excellente fiabilité, mais aussi une bonne maintenabilité. Les indicateurs relatifs à la disponibilité sont :

#### *Disponibilité OPérationnelles (DOP)*

C'est l'aptitude de la machine à accomplir (sans aucun arrêt pour cause de défaillance, maintenance, "famine", ou "bourrage") sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système. C'est donc le rapport entre le temps de bon fonctionnement et le temps requis.

$$DOP(M_i) = \frac{TBF(M_i)}{TRQ(M_i)} = Pr_{Mi} \quad (\text{sans unité})$$

Avec:

TBF : Temps de Bon Fonctionnement (C'est le temps pendant lequel le système produit des pièces sans anomalies tant au niveau de son fonctionnement propre que au niveau de la qualité des pièces produites).

TRQ : Temps Requis (C'est la durée pendant laquelle le système de production ou l'élément est effectivement engagé avec la volonté de produire).

La disponibilité opérationnelle pour le système de production global est la plus petite DOP de toutes ses machines de sortie, c'est-à-dire  $M_i$  telles que  $M_i \in S$ .

$$DOP(S) = \text{Min} (DOP(M_i)) \quad (\text{sans unité})$$

❖ *Remarque :*

La disponibilité opérationnelle est parfois appelée Taux de Rendement Global (TRG) de la machine. Il n'est pas souhaitable dans la production moderne que cet indicateur soit proche de 1 ce qui indiquerait que la machine est saturée et qu'il n'y a plus aucune marge pour réagir (réactivité), notamment à des commandes urgentes ou à une augmentation de volume de production. À l'inverse, une DOP faible ne signifie pas forcément que la machine soit disponible et que la réactivité soit élevée.

### **Disponibilité PROpre (DPR)**

C'est l'aptitude de la machine à accomplir sa tâche uniquement pendant le temps de son engagement propre à fonctionner. C'est-à-dire on ne prend pas en compte les temps d'attente (ou arrêts induits) pour causes externes ("famine" ou "bourrage"). C'est donc le rapport entre le temps de bon fonctionnement et celui de l'engagement propre de la machine.

$$DPR (M_i) = \frac{TBF (M_i)}{TEP (M_i)} = \frac{Pr_{M_i}}{1 - Pr_{R_i}} \quad (\text{sans unité})$$

TEP : Temps d'Engagement Propre (Ce temps prend en compte l'ensemble des temps effectifs où la machine s'est engagée à produire, y compris ses temps d'arrêts propres).

### **Disponibilité TotalLe (DTL)**

C'est l'aptitude de la machine à s'engager totalement pour accomplir sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système.

$$DTL ( M_i ) = \frac{TEP (M_i)}{TRQ (M_i)} = 1 - Pr_{Ri} \quad (\text{sans unité})$$

De la même manière, nous définissons la notion d'indisponibilité avec ses trois indicateurs **Indisponibilité Opérationnelle (IOP)**, **Propre (IPR)** et **Totale (ITL)** :

$$IOP (M_i) = 1 - DOP(M_i)$$

$$IOP(S) = 1 - DOP(S)$$

$$IPR(M_i) = 1 - DPR(M_i)$$

$$ITL(M_i) = 1 - DTL(M_i)$$

**Indisponibilité due aux arrêts pour cause de défaillance (IAD)**

C'est l'inaptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche à cause d'une défaillance.

$$IAD( M_i ) = \frac{TAD (M_i)}{TBF (M_i) + TAD (M_i)} = \frac{Pr_{Pi}}{Pr_{Mi} + Pr_{Pi}} \quad (\text{sans unité})$$

TAD : Temps d'Arrêt pour cause de Défaillance.

**Indisponibilité due aux arrêts pour Maintenance corrective(IMC)**

C'est l'inaptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche à cause des arrêts fonctionnels suite à des actions de maintenance corrective.

$$IMC( M_i ) = \frac{TMC (M_i)}{TBF (M_i) + TMC (M_i)} = \frac{Pr_{Aci}}{Pr_{Mi} + Pr_{Aci}} \quad (\text{sans unité})$$

TMC : Temps d'arrêt pour cause de Maintenance Corrective.

### **Indisponibilité due aux arrêts pour Maintenance préventive (IMP)**

C'est l'inaptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche à cause des arrêts fonctionnels suite à des actions de maintenance préventive.

$$IMP(M_i) = \frac{TMP(M_i)}{TBF(M_i) + TMP(M_i)} = \frac{Pr_{Api}}{Pr_{Mi} + Pr_{Api}} \quad (\text{sans unité})$$

TMP : Temps d'arrêt pour cause de Maintenance Préventive.

### **Indisponibilité due aux Arrêts Induits (IAI)**

C'est l'inaptitude d'une machine à être en état d'accomplir sa tâche à cause des attentes pour des raisons de "famine" ou de "bourrage".

$$IAI(M_i) = \frac{TAI(M_i)}{TBF(M_i) + TAI(M_i)} = \frac{Pr_{Ri}}{Pr_{Mi} + Pr_{Ri}} \quad (\text{sans unité})$$

TAI : Temps d'Arrêt Induit (Ce temps concerne les arrêts d'une machine qui sont dus, soit à une famine, soit à un bourrage, et qui sont donc la conséquence des défaillances d'autres éléments)

## **IV.5.2 La fiabilité :**

La fiabilité est la probabilité qu'a une machine d'accomplir, de manière satisfaisante, sa tâche, sous des conditions données et pendant une période de temps déterminé. Les indicateurs suivants permettent d'évaluer la fiabilité :

### **Fréquence Opérationnelle d'Arrêt (FOA)**

C'est le nombre de fois (pendant toute la durée de fonctionnement du système) où la machine s'arrête, qu'il s'agisse d'un arrêt propre ou d'un arrêt induit.

$$FOA(M_i) = \frac{NAT(M_i)}{TRQ(M_i)} \quad (\text{arrêts /heure})$$

NAT : Nombres d'arrêts Total

**Fréquence des Arrêts pour cause de Défaillance (FAD)**

C'est le nombre de fois, pendant toute la durée de fonctionnement du système où la machine s'arrête pour cause de défaillance

$$FAD (M_i) = \frac{NAD (M_i)}{TRQ (M_i)} = Pr_{pi} * \mu_i \quad (\text{arrêts /heure})$$

NAD : Nombres d'arrêts pour cause de défaillance

**Fréquence des Arrêts pour cause de Maintenance (FAM)**

C'est le nombre de fois, pendant toute la durée de fonctionnement du système où la machine est arrêtée pour des procédures de maintenance préventive.

$$FAM (M_i) = \frac{NAM (M_i)}{TRQ (M_i)} = \beta_i \quad (\text{arrêts /heure})$$

NAM : Nombres d'arrêts pour maintenance préventive.

**Fréquence des Arrêts Propres (FAP)**

C'est le nombre de fois, pendant toute la durée de fonctionnement du système où la machine s'arrête pour causes de défaillance ou de maintenance (corrective, préventive, mixte).

$$FAP (M_i) = \frac{NAP (M_i)}{TRQ (M_i)} = (Pr_{pi} * \mu_i) + \beta_i \quad (\text{arrêts /heure})$$

NAP : Nombres d'arrêts Propres.

**Fréquence des Arrêts Induits (FAI)**

C'est le nombre de fois, pendant toute la durée de fonctionnement du système où la machine s'arrête pour causes externes ("famine" ou "bourrage").

$$FAI (M_i) = \frac{NAI (M_i)}{TRQ (M_i)} = (Pr_{Ri} * \epsilon_i) \quad (\text{arrêts /heure})$$

NAI : Nombres d'arrêts Induits

**Temps Moyen de Bon Fonctionnement (TMBF)**

Cet indicateur vient de l'anglais MTBF (Mean Time Between Failure). Il représente la moyenne des temps de bon fonctionnement entre deux défaillances d'un système réparable. En général, il s'obtient de la façon suivante

$$TMBF(M_i) = \frac{TBF(M_i)}{NAP(M_i)} = \frac{Pr_{Mi}}{(Pr_{Pi} * \mu_i) + \beta_i} \quad \text{heure}$$

**IV.5.3 La maintenabilité :**

C'est, dans des conditions données d'utilisation, l'aptitude d'une machine à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir sa tâche. Cette définition suppose que la maintenance soit, elle aussi, accomplie dans des conditions données, avec des procédures et des moyens prescrits.

**Temps Moyen de Réparation (TMR)**

Cet indicateur vient de l'anglais MTTR (Mean Time To Repair). Pour une machine donnée, il représente la moyenne des temps de réparation. Il s'obtient à l'aide du rapport suivant :

$$TMR(M_i) = \frac{TAP(M_i)}{NAP(M_i)} = \frac{Pr_{Pi} + Pr_{Ai}}{(Pr_{Pi} * \mu_i) + \beta_i} \quad \text{heure}$$

**Taux du Correctif (TXC)**

C'est le nombre de maintenances correctives effectuées parmi toutes les interventions de maintenance sur la machine.

$$TXC(M_i) = \frac{NAD(M_i)}{NAP(M_i)} \quad \text{(sans unité)}$$

### ***Taux du Préventif (TXP)***

C'est le nombre de maintenances préventives effectuées parmi toutes les interventions de maintenance sur la machine.

$$TXP (M_i) = \frac{NAM (M_i)}{NAP (M_i)} \quad (\text{sans unité})$$

### ***Efficacité Globale de la Maintenance (EGM)***

C'est le rapport entre le nombre d'arrêts pour cause de défaillance et le temps de bon fonctionnement de la machine.

$$EGM (M_i) = \frac{NAD (M_i)}{TBF (M_i)} \quad (\text{sans unité})$$

## **IV.6 Détermination du tableau de bord des indicateurs :**

Les indicateurs doivent être un outil de mobilisation et de motivation du personnel de l'entreprise. Il ya donc une véritable nécessité d'une politique d'affichage et d'une politique de communication interne. Les indicateurs doivent être mis en place pour les acteurs de la production (c'est-à-dire simples, explicites, pour orienter les acteurs et non les juger), par les acteurs (c'est-à-dire définis par eux, donc ils comprennent parfaitement la nature et l'intérêt) et près des acteurs (c'est-à-dire en permanence directement à leur disposition). Le *Tableau IV.4* donne les différents indicateurs calculés :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
DOP	74.09	62.44	42.66	31.37	33.12	26.01	21.03	65.01	27.50
DPR	87.56	83.04	80.97	74.51	67.37	72.22	66.69	81.73	69.33
DTL	84.61	75.19	52.68	42.10	49.16	36.07	31.53	79.61	39.66
IAD	10.41	4.14	2.78	4.18	10.79	4.09	9.70	6.22	6.81
IAI	17.19	28.43	52.59	64.86	60.55	71.07	76.50	23.85	68.69
IMC	0	0	0	0	0	0	0	0	0.27
IMP	2.51	13.86	17.10	22.98	26.64	25.66	28.15	13.68	0
FAD	0.0505	0.0037	0.0036	0.0047	0.0255	0.0043	0.0048	0.0178	0.0125
FAI	69.25	20.27	11.42	17.87	8.766	9.881	19.65	4.554	6.877
FAM	0.23	0.57	0.75	0.53	0.42	0.85	0.16	0.92	0
FAP	0.2805	0.5737	0.7536	0.5047	0.42551	0.8043	0.1648	0.9178	0.0125
FOA	2.3180	10.98	4.478	9.874	2.783	7.245	2.3711	0.2870	5.478
EGM	23.9	11.7	15.6	20.16	6.5	12.19	41.13	25.26	32.29
TXC	0.08	0.07	0.02	0.12	0.06	0.21	0.08	0.15	1
TXP	0.92	0.93	0.98	0.88	0.94	0.79	0.92	0.85	0

**Tableau IV.4** : Tableau de bord des indicateurs

## **IV.7 Conclusion :**

L'objectif à pour suivre est d'analyser, d'interpréter et de décider en fonction de ces indicateurs. Le tableau de bord les groupant selon plusieurs critères, comment déterminer un compromis entre toutes les informations ? Comment prendre en compte différents points de vue des utilisateurs ou décideurs ? Le but est de choisir la meilleure politique de maintenance à appliquer en fonction du contenu du tableau de bord. L'aide multicritère à la décision est indispensable. Ce dernier est l'objectif du prochain chapitre.

---

*Chapitre V : Classement des équipements  
par ordre de priorité pour la maintenance*

---

## **V.1 Introduction :**

Le calcul et la construction d'un tableau de bord d'indicateurs de SdF constitue une aide précieuse pour le suivi de la production. L'analyse et l'interprétation des données affichées sur ce tableau nécessite un processus de décision permettant du classement des équipements de production par ordre de priorité dans le contexte de mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance.

## **V.2 Détermination des machines de production à maintenir :**

Les applications de l'approche multicritère aux problèmes de décision en gestion des opérations de production et de maintenance retiennent de plus en plus l'attention des chercheurs et des praticiens. Les limites des méthodes mono critères pour la résolution des problèmes liés à la planification et à la gestion de la production ont été le principal catalyseur de cette tendance. Le gestionnaire d'aujourd'hui préfère des solutions qui permettent d'atteindre des niveaux satisfaisants par rapport à un ensemble d'objectifs préétablis, plutôt que des alternatives qui réalisent des performances optimales sur l'un des objectifs et des résultats médiocres sur les autres.

Les dirigeants vont donc chercher à concevoir un système qui permet d'avoir des produits de meilleure qualité avec un coût le plus bas possible dans les délais convenus, tout en étant aptes à répondre rapidement aux demandes de modifications imposées par le marché et aux exigences de personnalisation exprimées par les clients. La multitude des facteurs à considérer rend le processus de décision assez complexe.

La présente étude a été menée au sein de l'entreprise (*DOMELEC*). Elle consiste à classer les équipements de production de cette usine par ordre de priorité en considérant un ensemble de critères.

La démarche que nous avons adoptée pour aborder ce problème s'articule, comme c'est d'ailleurs le cas pour la plupart des approches multicritères, autour de quatre étapes principales [Abbou, 03]:

- 1- identifier l'ensemble des équipements à classer;
- 2- établir une liste cohérente de critères de priorité;
- 3- évaluer les performances de chaque équipement selon les différents critères retenus;

- 4- appliquer une procédure d'agrégation pour classer ces équipements selon leurs performances globales.

### **V.2.1 L'ensemble des actions :**

Dans le cadre de cette étude, les équipements doivent être rangés par ordre de priorité décroissante en vue d'orienter les efforts de l'équipe de maintenance chargée de les maintenir. Il s'agit d'un ensemble de neuf équipements appartenant à l'entreprise.

### **V.2.2 La famille de critères :**

#### **1 Les critères retenus :**

Nous prenons les critères définis dans le tableau de bord et en ajoutant le critère sécurité (Influence de la panne sur la sécurité des personnes).

#### **2 Les coefficients d'importance relative des critères :**

L'attribution de ces coefficients (ou poids) aux critères a été effectuée selon une méthode dite « Ranking & Rating ». Dans un premier temps, il a été demandé à l'équipe technique et à la direction générale de l'entreprise de classer les critères par ordre d'importance décroissant et ce, selon un jugement unanime issu d'une consultation entre tous les membres de l'équipe (ingénieurs, techniciens et gestionnaires). La deuxième étape consistait à répartir un ensemble de 100 points entre les différents critères en respectant le classement précédent.

### **V.2.3 L'agrégation multicritère :**

À cette étape de la démarche de rangement suivie, nous sommes appelés à utiliser une méthode d'agrégation multicritère pour dégager une évaluation globale de chacune des machines considérées à partir des scores élémentaires obtenus selon chaque critère pris séparément [Chelbi, 01].

#### **V.2.3.1 Choix de la méthode :**

Comme procédure d'exploitation multicritère, nous avons opté pour les approches multicritères de surclassement de synthèse [Roy, 93], ces méthodes sont simples à exploiter et

présentent l'avantage d'être facilement comprises par le décideur.

Ces méthodes de surclassement de synthèse qui acceptent l'incomparabilité dans la modélisation des préférences, sont fondées principalement sur une logique non totalement compensatoire (contrairement à celle basée sur un critère unique de synthèse). Elles s'appuient sur une famille cohérente de critères. Les avantages des méthodes de type relation de surclassement de synthèse résident dans le fait de surpasser les inconvénients relevés à propos du critère unique de synthèse, ainsi:

- l'indifférence n'est pas transitive: le fait qu'un décideur soit indifférent entre deux actions « a » et « b » et indifférent entre « b » et « c » n'implique pas forcément qu'il est indifférent entre les actions « a » et « c »,
- l'incomparabilité est introduite : on peut avoir des actions incomparables,
- l'utilisation du seuil de veto est possible: lorsqu'un critère est jugé très important et que l'on n'accepte pas qu'une action soit bien classée malgré ses performances médiocres sur ce critère on accorde à ce dernier un droit de veto.
- la méthode ne nécessite pas la détermination relativement complexe de fonctions de transformation.

L'ensemble des actions (ou alternatives) est, dans ce cas, *explicite*; aussi la plupart de ces méthodes ont été proposées pour des problèmes où cet ensemble est fini. Elles reposent presque toutes sur des comparaisons par paire entre les actions. Durant l'exploitation de la plupart de ces procédures d'agrégation multicritère, on associe à chacun des critères un coefficient d'importance relative (poids). On dit que l'action « a » *surclasse* l'action « b » si « a » est *au moins aussi bonne* que « b » c'est-à-dire qu'elle est globalement mieux évaluée.

La classification des équipements, objet de notre étude, constitue une problématique de rangement. Parmi les méthodes de surclassement de synthèse qui s'adressent à cette problématique, nous avons ELECTRE III.

### **V.2.3.2 Application de la méthode ELECTRE III :**

La méthode ELECTRE III (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) procède par comparaison des scénarios deux à deux. Le résultat de cette comparaison est formulé en terme d'une relation de surclassement qui permet de constater une situation d'indifférence, de préférence faible ou stricte ou d'incomparabilité pour chaque paire de scénario.

## 1. Tableau des performances :

Le tableau des performances constitue le point de départ de la méthode ELECTREIII. Il rassemble pour chaque machine les évaluations de chaque indicateur. Le tableau contient également les poids et les seuils.

Les poids traduisant l'importance accordée à chaque indicateur. Les *seuils* permettent de nuancer le classement. Le *seuil d'indifférence*  $q$  représente la limite de la différence entre deux évaluations en dessous de laquelle les évaluations sont jugées équivalentes. Il peut être interprété comme la marge d'incertitude minimale liée aux calculs effectués. Le *seuil de préférence stricte*  $p$  est la limite de la différence entre deux évaluations au-dessus de laquelle l'évaluation  $e_i$  est strictement préférée à l'évaluation  $e_k$ . Le *seuil de veto*  $v$  marque la limite de la différence entre deux évaluations au-delà de laquelle la machine  $M_i$ , moins bon pour l'indicateur examiné, ne peut être considéré comme meilleur que la machine  $M_k$  même si toutes les autres évaluations de  $M_i$  sont meilleures et donc en concordance avec le surclassement. Les résultats de ces notations pour notre système sont regroupés dans le **Tableau V. 1:**

Chapitre V : Classement des équipements par ordre de priorité pour la maintenance

Critère Machine	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
M1	74.09	87.56	84.61	10.41	17.19	0	2.51	0.0505	69.25	0.23	0.2805	2.3180	23.9	0.08	0.92	3
M2	62.44	83.04	75.19	4.14	28.43	0	13.86	0.0037	20.27	0.57	0.5737	10.98	11.7	0.07	0.93	1
M3	42.66	80.97	52.68	2.78	52.59	0	17.10	0.0036	11.42	0.75	0.7536	4.478	15.6	0.02	0.98	1
M4	31.37	74.51	42.10	4.18	64.86	0	22.98	0.0047	17.87	0.53	0.5047	9.874	20.16	0.12	0.88	2
M5	33.12	67.37	49.16	10.79	60.55	0	26.64	0.0255	8.766	0.42	0.4255	12.783	6.5	0.06	0.94	2
M6	26.01	72.22	36.07	4.09	71.07	0	25.66	0.0043	9.881	0.85	0.8043	7.245	12.19	0.21	0.79	3
M7	21.03	66.69	31.53	9.70	76.50	0	28.15	0.0048	19.65	0.16	0.1648	2.3711	41.13	0.08	0.92	3
M8	65.01	81.73	79.61	6.22	23.85	0	13.68	0.0178	4.554	0.92	0.9178	0.2870	25.26	0.15	0.85	2
M9	27.50	69.33	39.66	6.81	68.69	0.27	0	0.0125	6.877	0	0.0125	5.478	32.29	1	0	3
Poids	1	1	2	15	14	2	2	14	13	3	3	4	18	1.5	1.5	5
Seuil d'indifférence $q$	1.5	0	2	0.5	1	0	3	0.0001	1.5	0	0.001	0	2	0	0	0
Seuil de préférence stricte $p$	5	3,5	4.25	1	2.5	1	4	0.001	3	0.1	0.01	2.5	3.25	0.01	0.01	1
Seuil de veto $v$	–	–	–	5	4	–	–	0.02	7	–	–	–	4.5	–	–	2

$C1 = DOP$ ,  $C2 = DPR$ ,  $C3 = DTL$ ,  $C4 = IAD$ ,  $C5 = IAI$ ,  $C6 = IMC$ ,  $C7 = IMP$ ,  $C8 = FAD$ ,  $C9 = FAI$ ,  $C10 = FAM$ ,  $C11 = FAP$ ,  $C12 = FOA$ ,  $C13 = EGM$ ,  $C14 = TXC$ ,  $C15 = TXP$ ,  $C16$  : Influence de la panne sur la sécurité des personnes

Tableau V.1: Tableau des performances

## 2. Indices de concordance :

Les indices de concordance se calculent d'abord par indicateurs puis sont agrégés en un indice de concordance globale calculé pour chaque couple de machines.

### a. Indice de concordance par indicateur :

Noté  $c_j(M_i, M_k)$ , cet indice spécifie dans quelle mesure la machine  $M_i$  et au moins aussi bonne que la machine  $M_k$  pour un critère  $j$ . Il fait intervenir la différence entre les évaluations des machines ( $g_j(M_k) - g_j(M_i)$ ) qui est comparée aux seuils d'indifférence  $q_j$  et de préférence stricte  $p_j$  de l'indicateur.

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est inférieure au seuil d'indifférence  $q_j$ , les évaluations sont jugées équivalentes ; l'indice de concordance  $c_j(M_i, M_k)$  vaut donc 1. La machine  $M_i$  est au moins aussi bonne que la machine  $M_k$  puisqu'il lui est indifférent.

$$\text{Si } g_j(M_k) - g_j(M_i) \leq q_j \text{ alors } c_j(M_i, M_k) = 1$$

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est supérieure au seuil de préférence  $p_j$ , l'évaluation de la machine  $M_k$  est strictement préférée au machine  $M_i$  ; l'indice de concordance  $c_j(M_i, M_k)$  vaut donc 0. La machine  $M_i$  n'est pas au moins aussi bonne que la machine  $M_k$  puisqu'il lui est inférieur.

$$\text{Si } g_j(M_k) - g_j(M_i) \geq p_j \text{ alors } c_j(M_i, M_k) = 0$$

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est comprise entre le seuil d'indifférence  $q_j$  et le seuil de préférence stricte  $p_j$ , l'évaluation de la machine  $M_k$  est largement préférée à la machine  $M_i$  ; l'indice de concordance  $c_j(M_i, M_k)$  est donc compris entre 0 et 1. La valeur de  $c_j(M_i, M_k)$  est calculée par interpolation linéaire (**Figure V.1**)

$$\text{Si } q_j < g_j(M_k) - g_j(M_i) < p_j \text{ alors } c_j(M_i, M_k) = \frac{p_j - (g_j(M_k) - g_j(M_i))}{p_j - q_j}$$

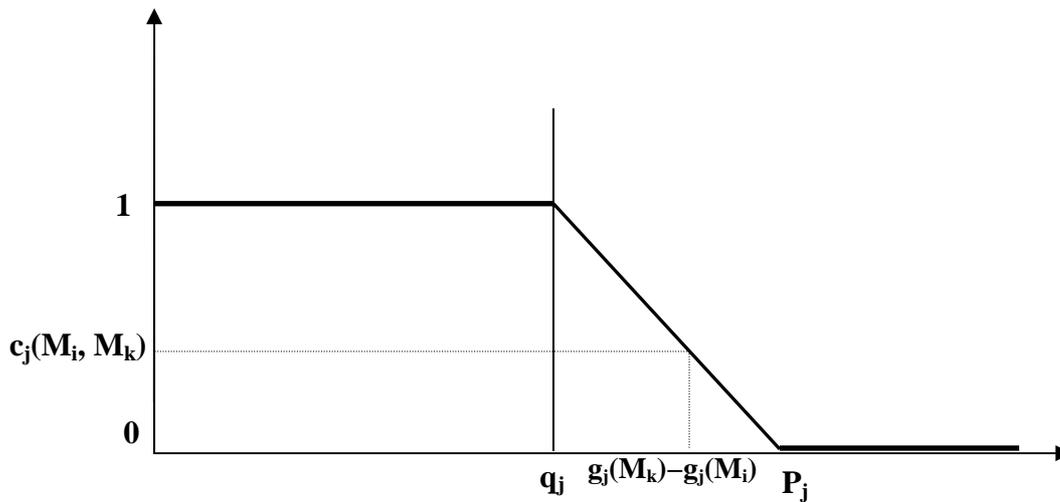


Figure V.1 : Calcul de l'indice de concordance par interpolation linéaire [Roy, 93]

### b. Indice de concordance globale :

Noté  $C_{ik}$  cet indice indique dans quelle mesure il y a concordance avec l'hypothèse « la machine  $M_i$  surclasse la machine  $M_k$  » il s'agit d'une agrégation des indices de concordance par indicateur qui fait intervenir les poids  $P_j$  accordés aux indicateurs. Cet indice varie entre 0 et 1.

$$C_{ik} = \frac{\sum p_j * c_j(M_i, M_k)}{\sum p_j}$$

La matrice de concordance résultante est la suivante (*Tableau V.2*) :

	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>M4</b>	<b>M5</b>	<b>M6</b>	<b>M7</b>	<b>M8</b>	<b>M9</b>
<b>M1</b>	–	0.26	0.29	0.25	0.41	0.34	0.47	0.44	0.45
<b>M2</b>	0.76	–	0.63	0.81	0.57	0.77	0.71	0.67	0.70
<b>M3</b>	0.74	0.6	–	0.88	0.60	0.72	0.85	0.66	0.73
<b>M4</b>	0.75	0.46	0.13	–	0.45	0.55	0.84	0.65	0.70
<b>M5</b>	0.60	0.45	0.44	0.60	–	0.62	0.57	0.50	0.60
<b>M6</b>	0.70	0.64	0.43	0.73	0.54	–	0.84	0.60	0.55
<b>M7</b>	0.8	0.29	0.17	0.42	0.45	0.58	–	0.28	0.16
<b>M8</b>	0.76	0.40	0.39	0.42	0.70	0.42	0.75	–	0.72
<b>M9</b>	0.58	0.30	0.29	0.27	0.55	0.48	0.74	0.46	–

*Tableau V.2: La matrice de concordance*

### 3. Indice de discordance :

Les indices de discordance se calculent par indicateur. Ils vont affaiblir la concordance définie ci-dessus. Noté  $d_j(M_i, M_k)$ , cet indice montre dans quelle mesure la machine  $M_i$  ne peut surclasser la machine  $M_k$  parce que le déficit d'évaluation qu'il présente pour l'indicateurs  $j$  considéré est jugé trop important. Il fait intervenir la différence  $g_j(M_k) - g_j(M_i)$  entre les évaluations des machines qui est comparée aux seuils de préférence stricte  $p_j$  et de veto  $v_j$ .

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est supérieure au seuil de veto  $v_j$ , le déficit de la machine  $M_i$  pour cet indicateur est trop important que pour accepter le surclassement de cette machine ; l'indice de discordance  $d_j(M_i, M_k)$  vaut donc 1.

$$\text{Si } g_j(M_k) - g_j(M_i) \geq v_j \text{ alors } d_j(M_i, M_k) = 1$$

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est inférieure au seuil de préférence stricte  $p_j$ , l'évaluation de la machine  $M_i$  n'est pas jugée strictement moins bonne que celle de la machine  $M_k$  ; l'indice de discordance  $d_j(M_i, M_k)$  vaut donc 0.

$$\text{Si } g_j(M_k) - g_j(M_i) \leq p_j \text{ alors } d_j(M_i, M_k) = 0$$

Si la différence des évaluations pour l'indicateur  $j$  est comprise entre le seuil de préférence stricte  $p_j$  et le seuil de veto  $v_j$ , l'évaluation de la machine  $M_i$  est strictement moins bonne que celle de la machine  $M_k$  ; l'indice de concordance  $d_j(M_i, M_k)$  est donc compris entre 0 et 1. La valeur de  $d_j(M_i, M_k)$  est calculée par interpolation linéaire (**Figure V.2**)

$$\text{Si } p_j < g_j(M_k) - g_j(M_i) < v_j \text{ alors } d_j(M_i, M_k) = \frac{(g_j(M_k) - g_j(M_i)) - p_j}{v_j - p_j}$$

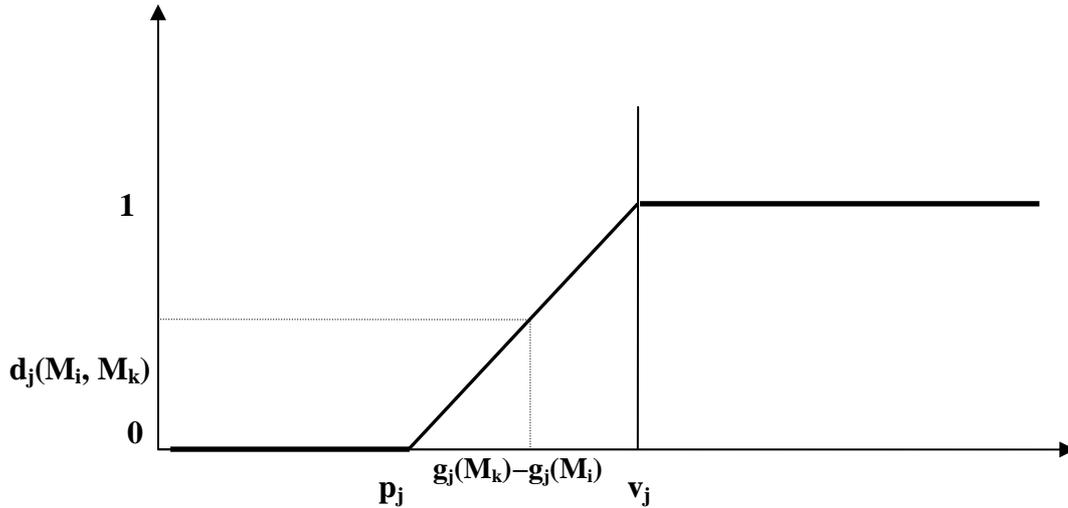


Figure V.2 : Calcul de l'indice de discordance par interpolation linéaire [Roy, 93]

#### 4. Degré de crédibilité :

En combinant l'indice de concordance globale et les indices de discordance, il est possible de définir un degré de crédibilité du surclassement. Noté  $\delta_{ik}$  et variant de 0 à 1, il traduit la crédibilité à accorder à l'affirmation « la machine  $M_i$  est meilleur que la machine  $M_k$  ». Cet indice n'est autre que l'indice de concordance globale affaibli par les indices de discordance. La discordance n'intervient toutefois que si elle est supérieure à la concordance globale.

$$\delta_{jk} = C_{jk} * \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(M_i, M_k)}{1 - C_{jk}}$$

$$\bar{F} = \{j/j \in F, d_j(M_i, M_j) > C_{ik}\} \text{ et } F \supset \bar{F}$$

Une fois calculés, les degrés de crédibilité sont rassemblés dans un tableau appelé « matrice de degrés de crédibilité » (**Tableau V.3**)

	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>M4</b>	<b>M5</b>	<b>M6</b>	<b>M7</b>	<b>M8</b>	<b>M9</b>
<b>M1</b>	–	0	0	0	0	0	0.23	0	0
<b>M2</b>	0.11	–	0.63	0.81	0	0.64	0	0.13	0.11
<b>M3</b>	0	0.12	–	0.88	0	0	0.85	0	0.73
<b>M4</b>	0.7	0	0	–	0	0	0.84	0	0.43
<b>M5</b>	0	0	0	0.45	–	0	0.44	0	0.12
<b>M6</b>	0.66	0	0	0	0	–	0	0	0.21
<b>M7</b>	0	0	0	0	0	0	–	0	0.09
<b>M8</b>	0	0	0	0.23	0	0	0.75	–	0
<b>M9</b>	0	0	0	0	0	0	0.74	0	–

**Tableau V.3:** La matrice de degrés de crédibilité

## 5. Classement des scénari :

Le classement des scénari s'effectue au départ de la matrice des degrés de crédibilité et se base sur la définition d'un seuil de discrimination.

### a. Seuil de discrimination :

Le seuil de discrimination  $s(\lambda)$  a été introduit car le calcul des degrés de crédibilité, servant de base au classement, recèle une part d'arbitraire liée notamment aux interpolations linéaires. Leur valeur ne peut donc être considérée comme absolue, il ne suffit donc pas qu'un degré de crédibilité soit supérieur à un autre pour qu'on puisse considérer que le surclassement associé est strictement plus crédible que l'autre.

Le seuil de discrimination définit donc la limite de la différence des degrés de crédibilité à partir de laquelle un surclassement peut être considéré comme étant effectivement plus crédible qu'un autre. Le seuil de discrimination est une fonction décroissante de  $\lambda$  qui représente la valeur maximum des degrés de crédibilité comparés. La valeur des paramètres de cette fonction sont fixés arbitrairement. L'équation utilisée dans les comparaisons est :

$$s(\lambda) = 0.3 - 0.15 \lambda$$

Les degrés de crédibilité sont comparés pour chaque paire de scénari.

### b. Algorithme de classement :

La méthode ELECTRE III a pour but de classer les scénari du meilleur au moins bon. Pour ce faire, elle opère deux *distillations*. La première, *distillation descendante*, consiste à sortir de l'ensemble des scénari le meilleur, puis de répéter l'opération avec les scénari restants et ainsi de suite jusqu'au dernier. La seconde, *distillation ascendante*, effectue une opération semblable mais commence par sortir le moins bon d'entre tous.

L'algorithme de classement est le suivant :

- a) Recherche de la valeur maximale des degrés de crédibilité des scénari à comparer

$$\lambda_m = \max (\delta_{ik})$$

- b) Calcul du seuil de discrimination pour  $\lambda_m$  :  $s(\lambda_m) = 0.3 - 0.15 \lambda_m$

- c) Calcul de niveau de séparation  $\lambda_{m+1}$ . Celui-ci correspond au degré de crédibilité maximum qui est toutefois strictement inférieur à  $\lambda_{m-1} - s(\lambda_m)$ . le niveau de séparation permet de ne considérer que les surclassements pour lesquels le degré de crédibilité est strictement supérieur à ce niveau.
- d) Pour les surclassements sélectionnés à l'étape précédente, recherche des surclassements strictement crédibles. A partir de ceux-ci, détermination pour chaque scénario, de sa puissance de sa faiblesse et de sa qualification.
- e) Isolement du scénario ayant la meilleure qualification ou la moins bonne. Puis retour à l'étape a) en ne considérant plus que les scénari restants et ce, jusqu'à épuisement des scénarios.

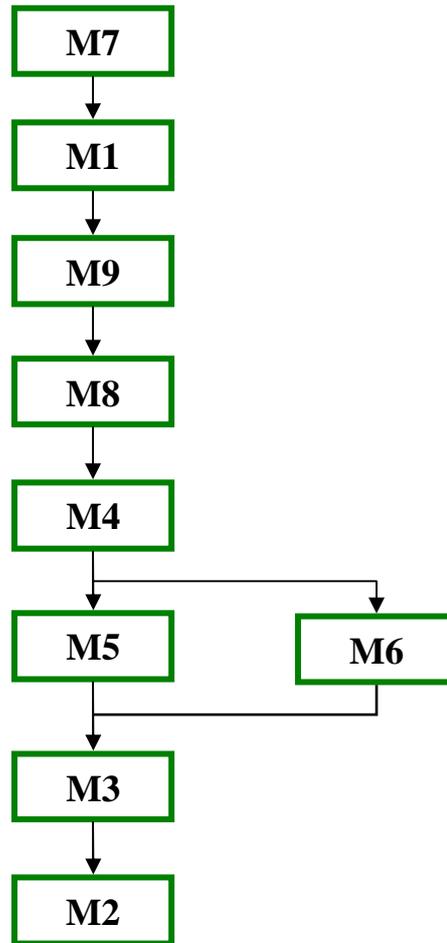
❖ **Remarque**

Si deux ou plusieurs scénari ont la même meilleure ou moins bonne qualification, on recommence, pour ces scénari, le processus à l'étape b) en considérant  $m = m+1$  jusqu'à ce qu'on puisse isoler un seul scénario ou que  $\lambda_m = 0$ .

Cet algorithme permet de considérer d'abord les surclassements ayant un degré de crédibilité élevé puis de moins en moins élevé en procédant par palier. Plus les degrés de crédibilité sont faibles et plus leur différence doit être élevée pour accepter le surclassement.

## 6. Résultat de classement :

Les relations de surclassement des machines peuvent être représentées sous la forme d'un graphe (*Figure V.3*) :



**Figure V.3** : Classement des machines par ordre de priorité pour la maintenance

Il ressort clairement que la machine M7 avec la machine M1 et M9 constituent le lot de machines qui se démarquent nettement de l'ensemble. Il a donc été décidé d'accorder une attention particulière à ces équipements dans l'élaboration, l'exécution et le suivi de leur programme de maintenance ainsi que dans la gestion de leurs pièces de rechange spécifiques.

### **V.3 Etude de différentes politiques de maintenance :**

Nous étudions l'influence de l'intégration des deux maintenances MCc ( $\tau_C = 5$ ) et MP ( $\tau_P = 4, \beta=0.3$ ), aux machines M1, M7 et M9. Les résultats obtenus sur le calcul des probabilités de panne de chacune des machines et leur probabilité d'arrêt pour maintenance sont représentés à l'aide des courbes de la **Figure V.4** :

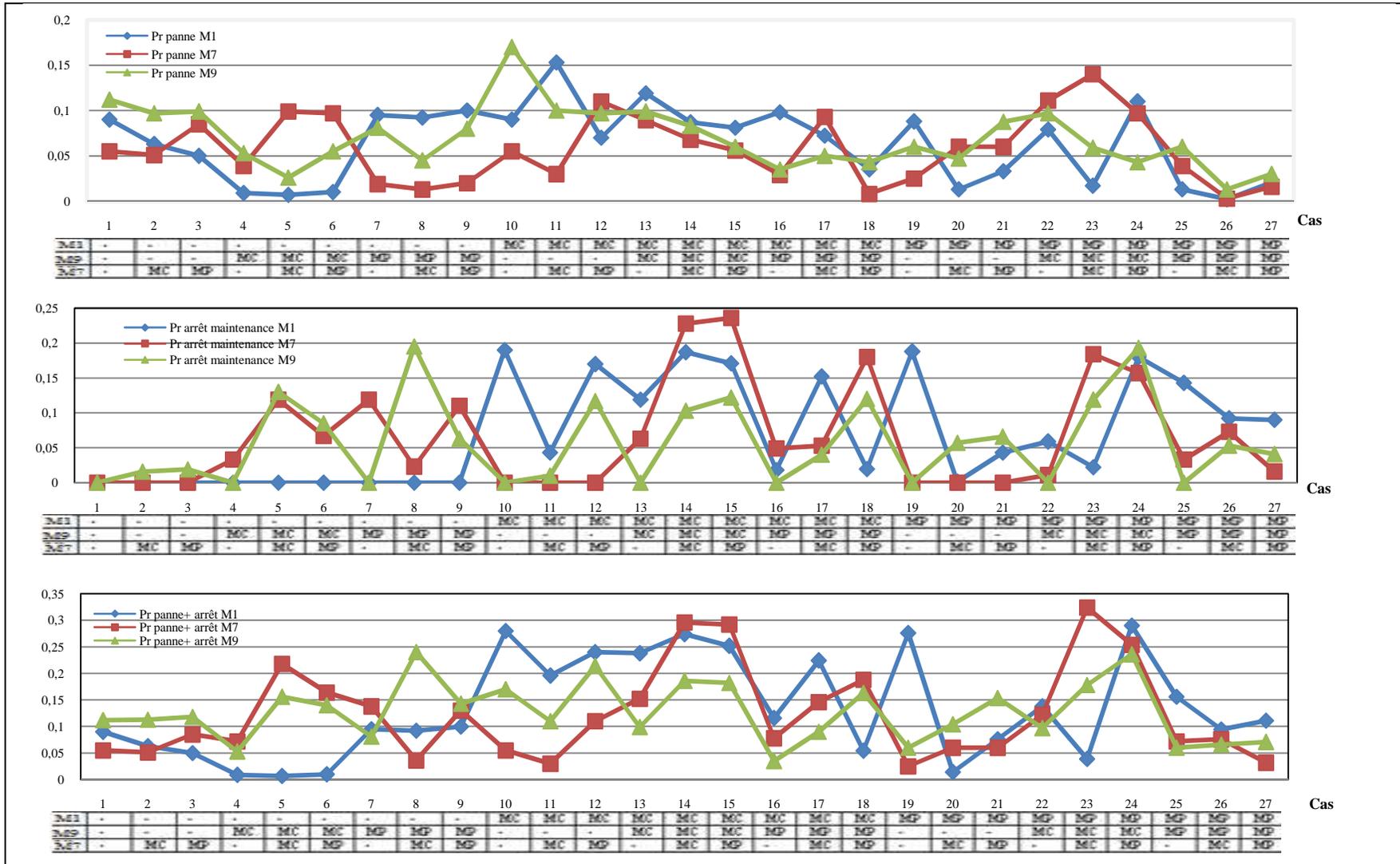


Figure V.4 : Probabilités de panne et d'arrêt pour maintenance

Notre but est de réduire les taux de panne des machines et de diminuer les temps d'indisponibilité des machines. En se basant sur les valeurs des probabilités d'états, il apparaît clairement que les taux de pannes minimales pour M1, M7 et M9 sont obtenus dans les cas 26 et 27. Comme les arrêts pour maintenance sont élevés pour les cas 14 et 15, nous pouvons dire que 26 est le meilleur cas. Il est alors conseillé d'appliquer une maintenance préventive aux machines M1 et M9 et une maintenance corrective au machine M7

#### **V.4 Indicateurs et critères de choix pour la ligne :**

Suite à la résolution du système, une liste d'indicateurs significatifs seront sélectionnés. Pour simplifier le processus de choix, chaque catégorie sera associée à un seul indicateur significatif. Trois paramètres caractéristiques sont représentés sur la table des critères (*Tableau V.4*). Il s'agit maintenant de minimiser ou maximiser l'indicateur significatif de chaque catégorie. A titre d'exemple, le critère n°3 consiste à minimiser les temps de réparation ce qui correspond à maximiser la maintenabilité des machines.

<b>N°</b>	<b>Type</b>	<b>Indicateur</b>	<b>Critère</b>
<b>1</b>	Disponibilité	<i>DOP</i>	MAXimiser
<b>2</b>	Fiabilité	<i>TMBF</i>	MAXimiser
<b>3</b>	Maintenabilité	<i>TMR</i>	MINimiser

*Tableau V.4* : Table des critères de choix

Le calcul des indicateurs significatif pour différentes politique de maintenance de chacune des machines est représenté à l'aide des courbes (*Figure V.5, V.6, V.7*) :

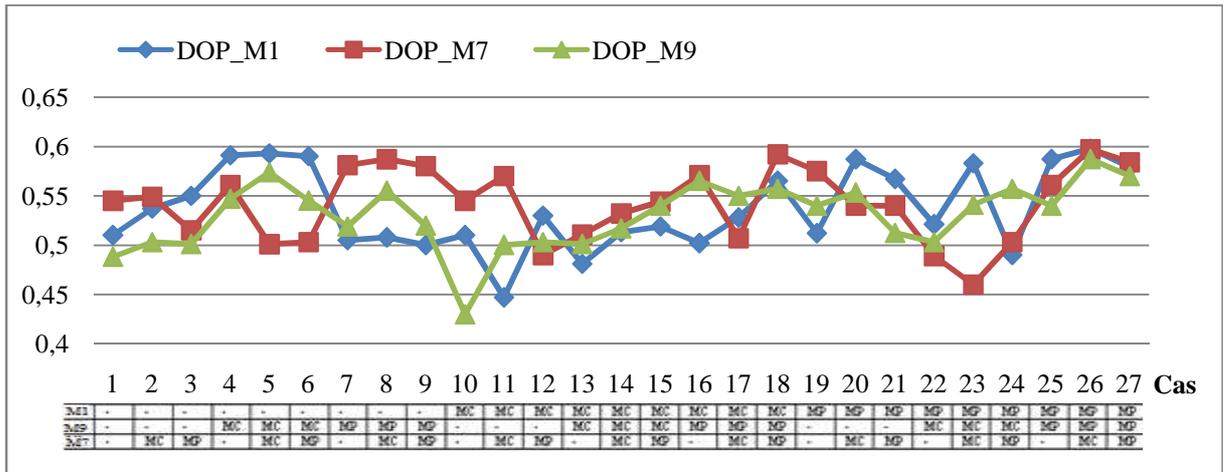


Figure V.5 : Variation de disponibilité opérationnelle des machines M1, M7 et M9

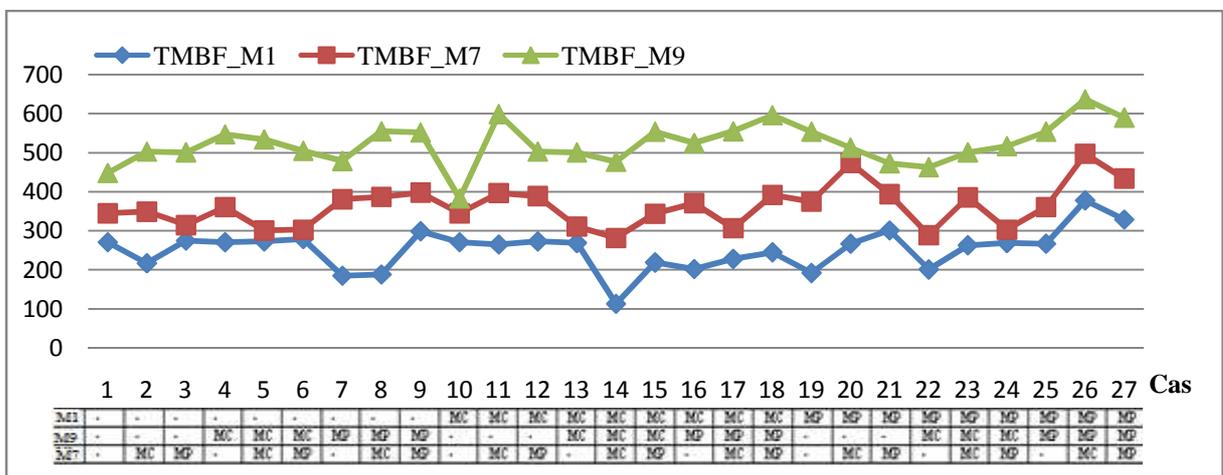


Figure V.6 : Variation de temps moyen de bon fonctionnement des machines M7, M1 et M9

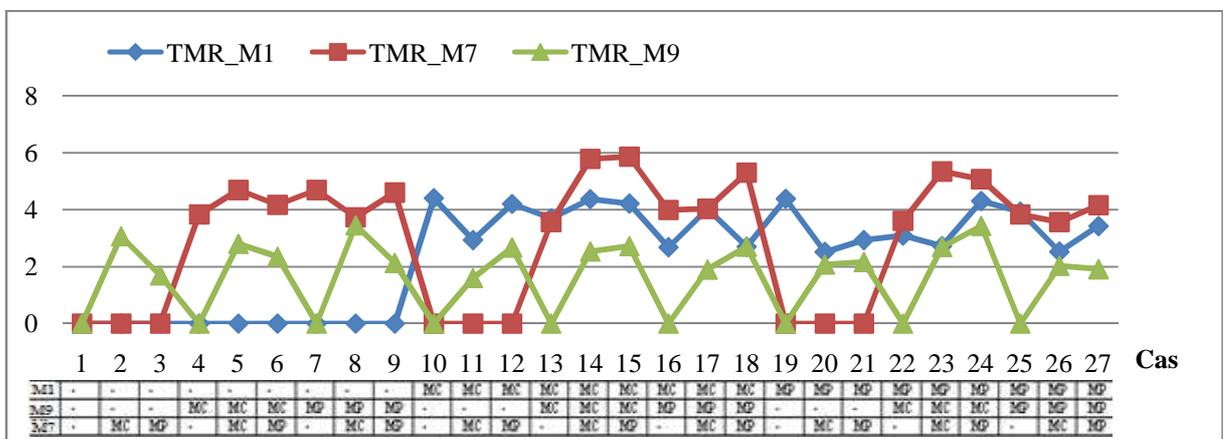


Figure V.7 : Variation de temps moyen de réparation des machines M7, M1 et M9

Si l'on s'intéresse au critère de fiabilité, on remarque que pour la machine M1, le cas 26 semble meilleur que les cas 27 et 21, qui sont à leur tour meilleur du cas 9, etc. d'autre part, pour le même critère appliqué à la machine M7, les cas 20, 26, et 27 sont en tête. Si le premier objectif est celui d'améliorer la fiabilité de l'atelier, c'est-à-dire minimiser les probabilités de panne des trois machines à la fois M1, M7 et M9, alors les cas 26 et 27 semblent être les meilleurs choix.

## **V.5 Conclusion :**

Nous avons présenté dans ce chapitre le problème du classement des équipements de production par ordre de priorité dans le contexte de mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance au sein de l'entreprise industrielle *DOMELEC*. Une approche multicritère est proposée pour classer les équipements de notre entreprise œuvrant dans le domaine d'appareillage électrique. Les résultats obtenus permettent aisément de dégager un lot de machines jugées stratégiques pour la maintenance.

Les principaux indicateurs de la SdF que nous pouvons extraire des résultats de l'analyse markovienne en utilisant les données propres aux composants du SdP et celles fixées par la direction de la production. Ces divers indicateurs constituent une aide précieuse pour suivre les performances de l'outil de production, pour mettre en évidence le problème lié à la maintenance, pour prendre des décisions et pour mesurer les améliorations.

## **CONCLUSION GENERALE**

Les travaux présentés dans ce mémoire traitent de la modélisation et l'évaluation de Sûreté de Fonctionnement (SdF) des Systèmes de Production (SdP) à événements discrets par une approche analytique, basé sur l'utilisation des Réseaux de Petri Stochastiques (RdPS) et des Processus de Markov (PdM).

Les RdPSG et d'un outil de calcul, les PdM forment un moyen puissant d'analyse et d'évaluation les grandeurs de la sûreté de fonctionnement (fiabilité, disponibilité...) qui sont de bons indicateurs de la confiance qu'on peut attribuer à un système. Cependant, la complexité des systèmes manufacturiers actuels est telle, que l'utilisation classique de ces outils présente certaines limites. En effet, Les PdM obtenus pour ces systèmes présentent un nombre d'états importants qui rend leur stockage et leur analyse très long, voir même impossible!

Le calcul et la construction d'un tableau de bord d'indicateurs significatifs de SdF constitue une aide précieuse pour le suivi de la production. L'analyse et l'interprétation des données affichées sur ce tableau nécessite un processus de décision permettant le classement des équipements de production par ordre de priorité dans le contexte de mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance afin d'améliorer le niveau de SdF.

D'abord, nous présentons les SdP, leurs principaux composants (machines, stocks, politique de maintenance). Chacun de ces composants a été décrit par un module RdP à part. Grâce aux RdPSGSyIs qui permettent de synchroniser les différents modules, nous avons obtenu une représentation modulaire, nous somme passé à une représentation plus adaptée, les PdM. Cette représentation markovienne est connue pour tout couple de modules, c'est-à-dire pour de petits sous-ensembles du système globale. Nous introduisons la notion de "cellule" permettant de définir les petits sous-ensembles. Nous montrons comment les matrices de transition de ces cellules peuvent être obtenues directement par le calcul.

Ensuite, Nous présentons un algorithme itératif de recherche de la distribution stationnaire du système sous sa forme cellulaire. L'algorithme de résolution a besoin de tous les paramètres des composants afin de calculer les probabilités d'états de ses éléments.

Enfin, Ces résultats obtenus, par l'analyse markovienne, nous permettent d'en déduire quelques indicateurs de SdF. A partir de ces indicateurs, l'entreprise sélectionne ceux qui lui semblent significatifs et les affiche à l'aide d'un tableau de bord. L'analyse et l'interprétation

des données affichées sur ce tableau nécessite un processus de décision permettant le classement des équipements de production par ordre de priorité dans le contexte de mise en œuvre d'un système de gestion et de suivi de la maintenance. Parmi l'ensemble de méthode multicritère pour le classement, nous avons retenu ELECTRE III (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) car elle permet :

- De structurer les indicateurs en tenant compte de l'imprécision possible de leur évaluation (seuil d'indifférence et de préférence);
- De mettre en évidence les différences inacceptables entre deux scénari sur un indicateur défini (*seuil de veto*) ;
- De proposer un classement des scénari du meilleur au moins bon en tenant compte de l'effet de chacun des indicateurs
- De mettre en évidence les scénari incomparables.

Les résultats de classement obtenus permettent aisément de dégager un lot de machines jugées stratégiques dans le but est de choisir la politique de maintenance à intégrer sur chaque machine.

La plate forme présenter dans ce mémoire ne constitue qu'un début, reste maintenant à la finalisé. La première des perspectives de ce travail concerne :

1. l'amélioration des modèles génériques et la souplesse des algorithmes à toutes structures d'ateliers, c'est-à-dire la possibilité d'avoir des bouclages entre composants et des routages de différentes pièces.
2. Indépendamment de la contrainte induite par l'explosion combinatoire du nombre des états à prendre en compte lors du passage aux PdM, qui est résolu par une décomposition fonctionnelle (modélisation modulaire par RdPSGSyI), l'utilisation de cet outil est limité par le fait que les lois régissant les transitions entre états doivent être du type exponentiel (taux de défaillance et de réparation constants). Or, pour prendre en compte le vieillissement et l'état d'usure des équipements, les durées de fonctionnement avant défaillance et les durées de réparation des machines ne suivent pas une loi exponentielle. Mais exhibe des lois de Weibull, des lois uniformes et des lois de Dirac...etc [Chabot, 01].
3. comparer d'une part la puissance de modélisation des RdPSs par rapport à d'autres formalismes tels les réseaux de files d'attente, l'algèbres de graphes et réseaux d'automates stochastiques (RAS), et d'autre part les méthodes et algorithmes sur des

modèles identiques. Pour comparer les différents formalismes, il faut mettre un programme d'échange d'exemples, et nous traduisons ainsi des modèles de RdP en modèles RAS. L'idée est d'arriver à systématiser le passage d'un modèle RdP à un modèle RAS ou l'inverse, de manière à pouvoir utiliser l'un ou l'autre formalisme, suivant le modèle et les techniques de résolution dont on dispose.

---

# *Bibliographie*

---

[**Abbou, 03**] R. Abbou “Contribution à la mise en œuvre d’une maintenance centralisée : conception et optimisation d’un atelier de maintenance”. Thèse de doctorat en automatique et productique, 21/10/2003, 142 pages.

[**Aït-Kadi, 02**] D .Aït-Kadi “La fiabilité des systèmes”. Notes de cours, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec, Canada, 2002.

[**Alain, 93**] J .Alain “Stochastic petri nets”. Belgium French Netherland’Summer School on Discret Event Systems, Spa – Belgique, 1993.

[**Bélisle, 03**] C. Bélisle “Classification des états d’une chaîne de Markov”. Rapport de cours, Université Laval, Septembre 2003.

[**Benakcha, 08**] F. Benakcha “Analyse et ordonnancement d’un atelier de production: application à l’entreprise d’électricité domestique DOMELEC”. Mémoire d’ingénieur en génie industriel, 2008.

[**Benoit, 03**] A. Benoit “Méthodes et algorithmes pour l’évaluation des performances des systèmes informatiques à grand espace d’états”. Thèse de doctorat, INPG-2003.

[**Berman, 79**] A. Berman, et R.J. Plemmons “Nonnegative matrices in the mathematical science”. Academic press, New York, 1979.

[**Bharucha, 60**] A.T. Bharucha “Elements of theory of Markov processes and their applications”. MC Graw-Hill, New York, 1960.

[**Bon, 95**] J.L .Bon “Fiabilité des systèmes : Méthodes mathématiques”. Edition Masson, Paris, 1995.

[**Bonnefous, 93**] C. Bonnefous “Les indicateurs de performance” Pôle Infos, Pôle productique Rhône –Alpes, Mai 1993, n°25.

[**Brewer, 78**] J.W. Brewer “Kronecker products and matrix calculus in system theory”. IEEE Transaction on reliability, 35(5): 595-601, 1978.

[**Cafaro, 86**] G. Cafaro, F. Corsi et F. vocca “Multistate Markov models and structural properties of the transition rate matrix”. IEEE transactions on reliability, 35(2) :192-200 , 1986.

[**Chabot, 01**] J-L. Chabot, Y. Dutuit, A. Rauzy “De l’usage de la simulation de Monte-Carlo couplée aux réseaux de Petri en sûreté de fonctionnement, 3<sup>ème</sup> Conférence francophone de Modélisation et Simulation”. MOSIM’01 Troyes-France, Avril 2001, 6 pages.

[**Chapouille, 72**] P. Chapouille “ La fiabilité”. Paris : PUF-(Que sais-je ?) 1972.

[**Chelbi, 01**] A. Chelbi, et D .Ait-kadi “Classement des équipements par ordre de priorité pour la maintenance : une approche multicritère”. Revue internationale d’ingénierie de production mécanique. 2001.

[**Daniel, 94**] O. Daniel, Z. S-Abazi et B. Descotesgenon “Méthode analytique d’évaluation des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production”. Colloque International de Fiabilité et Maintenabilité, La Baule, France, 30/05-03-06/1994.

[**Daniel, 95-1**] O. Daniel “Les réseaux de Petri stochastiques pour l’évaluation des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes manufacturiers”. Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l’INPG, 26/01/1995, 182 pages.

[**Daniel, 95-2**] O.Daniel, Z. S-Abazi et B. Descotesgenon “Automatic Generation of markovian processus for the manufacturing systems, IEEE International Conferences on systems Man and Cybernetics, October 1995.

[**David, 92**] R. David et H. Alla “Du Grafcet aux réseaux de Petri”. Edition HERMES (2<sup>e</sup> édition), 1992.

[**Delabriere, 00**] S. Delabriere “équations différentielles méthodes de résolution numérique”. licence B, Université Pierre et Marie Curie - Paris, (2000,2001).

[**Florin, 91**] G.Florin “Stochastic Petri nets: Properties, applications and tools”.Microelectron, Reliab, 31(4), 1991, pp.669-697.

[**Garet, 04**] O. Garet “Chaînes de Markov et algorithmes stochastiques”. Rapport de cours, université d’Orléans 2004.

[**Haoues, 05**] M. Haoues “ L’utilisation conjointe des réseaux de petri stochastiques et des processus de Markov pour la modélisation, l’analyse et l’évaluation des performances d’un système de production Cas pratiques : Entreprise Bouteille A Gaz Batna”. Mémoire de magister en génie industriel, 2005.

[**Horn, 91**] R.A. Horn et Ch.R. Johnson “Topics in matrix analysis”. Cambridge university press, Cambridge, 1991.

[**Kaanit, 05**] O. Kaanit “Aide multicritère à la décision pour le choix des politiques de maintenance dans les systèmes de production manufacturiers Cas pratiques : Entreprise Bouteille A Gaz Batna”. Mémoire de magister en génie industriel, 2005.

[**Kemeny, 76**] J.G. Kemeny, J.L. Snell et A.W. Knapp “Denumerable Markov chains”. Springer-verlage, New York, 1976.

[Lefebvre, 03] Y. Lefebvre “Nouveaux Développements et Justifications de Méthodes de Calcul de Mesures de Performance en Sûreté de Fonctionnement”. Thèse de doctorat en Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques, 10/10/2003, 166 pages.

[Monchy, 00] F. Monchy “Maintenance : Méthodes et organisation”. Edition Dunod, 2000.

[Monchy, 91] F. Monchy “La fonction maintenance, Formation à la gestion de la maintenance industrielle”. Collection Technologies de l’Université à l’Industrie, Editions Masson, Paris 1991.

[Pagès, 80] A. Pagès “La fiabilité des systèmes”. Paris : Eyrolles, -(Collection de la direction des études et recherches d’électricité de France, n°39), 1980.

[Roy, 93] B. Roy et D. Bouyssou “Aide multicritère à la décision : méthodes et cas”. Édition Economica, Paris. 1993.

[Sassine, 97] C. Sassine et Z. Simeu-Abazi “Prise en compte de la maintenance dans l’évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production”. 2ème Congrès Pluridisciplinaire en Qualité et Sûreté de Fonctionnement, Angers (France), 20-21/03/1997.

[Sassine, 98] C. Sassine “Intégration des politiques de maintenance dans les systèmes de production manufacturiers”. Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l’INPG, 02/07/1998, 233 pages.

[Sericola, 98] B. Sericola “Processus de Markov pour la sûreté de fonctionnement et la qualité de service”. Thèse de doctorat en Informatique et en Communication, 2/10/ 1998, 54 pages.

[Simeu, 98] Z. Simeu-Abazi “Sur la sûreté de fonctionnement des systèmes de production”. Mémoire de HDR présentée à l’INPG, 1998, 102 pages.

[Tijms, 86] H.C. Tijms “Stochastic modeling and analysis: a computational approach”. J.Wiley & Sons, Chisester, 1986.

[Tombyuses, 95] B. Tombyuses “Modélisation markovienne en fiabilité : réduction des grands systèmes ”. Thèse de doctorat, Université libre de Bruxelles, 1995.

[Villemeur, 88] A. Villemeur “Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels, fiabilité – facteurs humains – information”. Paris : Eyrolles,- (Collection de la Direction des Etudes et Recherches d’Electricité de France, n° 67), 1988.

[Vinck, 89] P.H. Vinck “L’aide multicritère à la décision”. Éditions de l’université de Bruxelles, 1989.

[Wang, 06] X. Wang, et E. Triantaphyllou “Ranking Irregularities When Evaluating Alternatives by Using Some ELECTRE Methods”. Department of Industrial Engineering,

2006.

[Wiley, 95] J. Wiley et S. Inc “Maintainability: A key to effective serviceability and maintenance management”. Virginia polytechnic institute and state university. Copyright, 1995.

[Zemouri, 00] R. Zemouri “Modélisation et simplification des processus stochastiques : application à l’optimisation de la maintenance chez PSA”. Mémoire de DEA en informatique, automatique et productique présentée dans l’UFR des sciences et techniques de l’université de Franche-Comté, 28/09/2000, 95 pages.

[Zemouri, 02] R. Zemouri, D. Racoceanu, N. Zerhouni et S. Durand “Une approche hybride pour l’évaluation et l’amélioration des performances d’un service de maintenance, basée sur les modèles analytiques et la simulation”. 2002, 12 pages.

[Zemouri, 03] R. Zemouri “Contribution à la surveillance des systèmes de production à l’aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance”. Thèse de doctorat présentée à L’UFR des Sciences et Techniques de l’Université de Franche-Comté en Automatique et Informatique, 28/11/ 2003, 264pages.

[Zwingelstein, 95] G. Zwingelstein “Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels”. Traité des Nouvelles Technologies, Série Diagnostic et Maintenance, Edition Hermès, Paris 1995.

[Zwingmann, 95] X. Zwingmann “Modèle d’évaluation de la fiabilité et de la maintenabilité au stade de la conception”. Thèse de doctorat en cotutelle présentée à la Faculté des études supérieures de l’Université Laval, 1995.

---

# *Annexe*

---

## **A. Les concepts de la sûreté de fonctionnement:**

**A.1 la Fiabilité** est la caractéristique d'un système exprimée par la probabilité qu'il accomplisse la fonction pour laquelle il a été conçu, dans des conditions données et pendant une durée donnée [AFNOR, 91]. Ainsi, la durée de vie d'un système est utilisée pour mesurer la quantité de service rendu. D'une manière générale, on mesure la durée de vie d'un système par le nombre d'heures durant lesquelles il a effectivement fonctionné [Aït-Kadi, 02] ;

**A.2 la Maintenabilité** est la probabilité qu'un matériel, lorsqu'il nécessite une intervention de maintenance, soit remis dans un état de fonctionnement donné, dans des limites de temps spécifiées, lorsque le travail est effectué selon des procédures prescrites et des conditions données [AFNOR, 91] ;

**A.3 la Disponibilité** est l'aptitude d'une entité, sous les aspects combinés de sa fiabilité, de sa maintenabilité et de la logistique de maintenance, à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs nécessaires soit assurée. Ce qui importe, c'est que le service correct soit fourni au moment où l'utilisateur en a besoin [AFNOR, 88];

**A.4 la Sécurité** est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques [Villemeur, 88]. D'une part, on distingue la sécurité-innocuité (safety), si l'on s'intéresse à la non occurrence de défaillances catastrophiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles les conséquences sont inacceptables vis-à-vis du risque encouru par les utilisateurs du système. Accroître la sécurité d'un système peut parfois se faire au détriment de sa disponibilité.

D'autre part, on spécifie la *sécurité-confidentialité (security)*, par rapport à la prévention d'accès ou de manipulations non autorisées de l'information, ou de façon plus générale, si la préoccupation essentielle est de lutter contre les fautes intentionnelles. L'évaluation de ces différentes mesures de sûreté de fonctionnement fait appel au calcul des probabilités, les défaillances survenant de façon aléatoire. Sans rentrer dans le détail, on retiendra que c'est la loi exponentielle qui est la plus fréquemment utilisée en fiabilité, car elle se prête bien aux calculs ; cela conduit à considérer que le taux de défaillance est une constante, hypothèse réaliste ou du moins acceptable, dans la plupart des cas.

## B.1 Définitions et rappels mathématiques.

[Berman, 79] [Kemeny, 76]

### B.1.1 Espace de probabilité et variables aléatoires

- Soit  $X$  un ensemble non vide et  $\mathcal{F}$  une famille de sous-ensembles de  $X$ .

$\mathcal{F}$  est un *champ d'ensembles* (field of sets) si

- 1)  $\emptyset$ , ensemble vide,  $\in \mathcal{F}$ .
- 2)  $\bar{A}$ , complément de  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\in \mathcal{F}$
- 3)  $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$  est un *champ de Borel* (Borel field)  $\forall i = 1, 2, 3 \dots$  alors  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

- Un *espace de probabilité* (probability space) est défini par trois éléments  $(\Omega, \beta, \mu)$  où  $\beta$  est un champ de Borel défini sur l'ensemble  $\Omega$ ,  $\mu$  une mesure dans  $\Omega$ , telle que  $\mu(\Omega) = 1$ . Sans entrer dans les détails,  $\Omega$  regroupe un ensemble d'observables et  $\mu$  associe une probabilité à tout élément  $\omega$  de  $\Omega$ . La probabilité d'une proposition  $p$  sera la mesure de l'ensemble  $\Omega_0 = \{\omega / \omega \text{ tel que la proposition } p \text{ est vraie}\}$ , soit  $Pr(p) = \int_{\Omega_0} d\mu$
- Un *espace de suites* (sequence space) est un espace de probabilité où les éléments  $\omega$  de  $\Omega$  sont de la forme  $\omega = (c_{i_0}, c_{i_1}, c_{i_2}, \dots)$   $i_0 < i_1 < \dots < i_j$ ,  $i_j \in T$ ,  $c_{i_j} \in S$ .  $T$  est un ensemble d'indices (le temps) et  $S$  est l'*espace des états* (state space).
- Soit  $\{f_{ij}\}$  une suite de fonctions de domaine  $\Omega$  et d'image  $S$ ,  $\{\beta_{ij}\}$  une suite de champs de Borel.  $(f_{ij}, \beta_{ij})$  définit un processus stochastique si

$$1) \beta_{i_1} \subset \beta_{i_2} \subset \dots \subset \beta_{i_j} \dots \subset \beta \quad i_1 < i_2 < \dots < i_j \in T$$

$$2) \forall i_j \in T, s \in S : \{\omega / f_{i_j}(\omega) = s\} \in \beta_{i_j} .$$

- Illustrons ces notions quelque peu abstraites par un exemple simple: le lancement d'un dé

$T = \{1, 2, 3, \dots\}$ : les différents lancers,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ : les résultats possibles,

$\Omega = \{\omega / \omega = (c_0, c_1, \dots) \mid c_i \in S\}$  : les différentes histoires ou "chemins",

$f_n(\omega)$  : le résultat du  $n^{\text{e}}$  lancé pour l'histoire  $\omega$ ;  $f_n(\omega) = c_n$

$\beta_n$  : ensemble de sous-ensembles ne faisant intervenir que les  $n$  premiers lancés.

- Soit  $p$  et  $q$  deux propositions et  $Pr(q) \neq 0$ . La *probabilité conditionnelle* de  $p$  si  $q$  est  $Pr(q/p) = Pr(p \text{ et } q) / Pr(p)$ .
- Une *variable aléatoire* (random variable) est une fonction mesurable  $f$  de domaine  $\Omega$  et d'image l'ensemble étendu des réels. La moyenne d'une fonction  $f$  est  $M(f) = \int_{\Omega} f d\mu$
- Soit la proposition  $p$  et  $\Omega_0$  son ensemble vrai, la *moyenne conditionnelle* de  $f$  si  $p$  est  $M(f \setminus p) = \int_{\Omega_0} f d\mu / Pr(p) = \int_{\Omega_0} f d\mu / \int_{\Omega_0} f d\mu$ .

### B.1.2 Probabilité conditionnelle et processus stochastique

Nous travaillons désormais dans un espace de suites  $(\Omega, \beta, \mu)$  avec un processus stochastique défini par  $(x_n, \beta_n), x_n (n \in T)$  étant le  $n^{\text{e}}$  résultat d'une variable aléatoire  $X, \beta_n = \{\omega / x_{i_0} = c_{i_0} \text{ et } X_{i_1} = c_{i_1} \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_n} = c_{i_n}, i_0 < i_1 < \dots < i_n\}$

Nous avons

$$\begin{aligned} Pr(X_0 = c_0 \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_{n-1}} = c_{i_{n-1}} \text{ et } X_{i_n} = c_{i_n}) \\ = Pr(X_{i_n} = c_{i_n} / X_{i_0} = c_{i_0} \dots \text{ et } X_{i_{n-1}} = c_{i_{n-1}}) \\ \times Pr(X_{i_0} = c_{i_0} \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_{n-1}} = c_{i_{n-1}}) \\ = \left( \prod_{j=1}^n Pr(X_{i_j} = c_{i_j} / X_{i_0} = c_{i_0} \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_{j-1}} = c_{i_{j-1}}) \right) Pr(X_{i_0} = c_{i_0}) \end{aligned}$$

Le processus est donc entièrement défini si nous donnons

- 1) les probabilités initiales  $Pr(X_{i_0} = c_{i_0})$
- 2) les probabilités de transition  $Pr(X_{i_j} = c_{i_j} / X_{i_0} = c_{i_0} \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_{j-1}} = c_{i_{j-1}})$

### B.1.3 Processus markovien

L'hypothèse markovienne est formulée en termes de probabilités conditionnelles. Un processus est dit *markovien* si les probabilités de transition ne sont fonction que de l'état le plus récent du système. Si les probabilités sont de plus indépendantes du temps, le processus est dit *homogène*. Suivant que  $S$  et  $T$  sont discrets ou continus, nous avons quatre types de processus. Pour un processus markovien homogène à espace d'états  $S$  discret et  $T$  discret (soit  $T = N$ ), nous avons affaire à une *chaîne de Markov dénombrable homogène*.

Nous avons dans ce cas:

$$Pr(X_n = j / X_{n-1} = i) = Pr(X_m = j / X_{m-1} = i) = P_{ij}(i, j \in S).$$

## B. 2 Chaîne dénombrable (homogène)

Soit  $T = N$ ,  $S$  espace d'états discret et  $P$  la matrice de transition

$$Pr_{ij} = Pr(X_n = j / X_{n-1} = i).$$

Désignons par  $Pr_i(X_n = j)$  la probabilité d'être dans l'état  $j$  au temps  $n$  pour un processus démarré en  $i$ . Trivialement  $Pr_i(X_0 = j) = \delta_{ij}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} Pr_i(X_n = j) &= \sum_k Pr_i(X_{n-1} = k) P_{kj} \\ &= \sum_k \delta_{ik} (P^n)_{kj} \quad \text{par récurrence} \\ &= (P^n)_{ij} = \text{probabilité de passer de } i \text{ en } j \text{ en } n \text{ étapes.} \end{aligned}$$

Pour une distribution initiale  $\pi$  ( $\pi$  vecteur ligne,  $\pi_i = Pr(X_0 = i)$ ), nous avons, de manière similaire, à l'instant  $n$

$$\begin{aligned} \pi_j(n) &= \sum_k \pi_k(n-1) P_{kj} = \sum_i \mu_i(0) (P^n)_{ij} = (\pi P^n)_j \\ \pi(n) &= \pi P^n \end{aligned}$$

### B. 2.1 Propriétés de la matrice de transition $P$

Par sa définition, nous avons directement

$$1) \quad P_{ij} \geq 0 \quad \forall_{i,j}$$

$$2) \quad P e = e \quad \text{c. à. d.} \quad \sum_j P_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$P$  est une matrice-ligne-stochastique. (Notons qu'une théorie plus générale permet de considérer des matrices de transition telles que  $P e \leq e$ ).

### B. 2.2 Grandeurs associées à une chaîne

Introduisons les variables aléatoires suivantes

$$u_j^n(\omega) = 1 \text{ si } X_n = j (j \in S), 0 \text{ sinon,}$$

$$n_j(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^n(\omega), \text{ cette variable compte le nombre de fois que } j \text{ est atteint}$$

sur le chemin  $\omega$ ,

$$t_j(\omega) = \text{temps pour atteindre la } 1^{\text{e}} \text{ fois } j \text{ sur le chemin } \omega.$$

Et en désignant par  $\omega_1$  la suite  $(c_1, c_2, \dots)$  définie à partir de  $\omega = (c_0, c_1, \dots)$

$$\bar{n}_j(\omega) = n_j(\omega_1)$$

$$\bar{t}_j(\omega) = t_j(\omega_1) + 1$$

Nous nous intéresserons aux moyennes de ces variables sous la condition que le processus soit démarré en  $i$ , c.-à-d. aux matrices

$$N_{ij} = M_i(n_j),$$

$$\bar{N}_{ij} = M_i(\bar{n}_j) \quad N = I + \bar{N},$$

$$M_{ij} = M_i(t_j),$$

$$\bar{M}_{ij} = M_i(\bar{t}_j),$$

$M_i$  désignant la moyenne conditionnelle de la variable sous la condition citée ci-dessus.

Introduisons également les propositions

$$h_j(\omega) = 1 \text{ si } j \text{ est atteint sur } \omega, 0 \text{ aussi non}$$

$$\bar{h}_j(\omega) = h_j(\omega_1) = 1 \text{ si } j \text{ est atteint sur } \omega_1, 0 \text{ aussi non}$$

et les matrices  $H_{ij} = Pr_i(h_j)$  et  $\bar{H}_{ij} = Pr_i(\bar{h}_j)$  ( $H_{ii} = 1$ )

Pour un processus démarré avec une distribution quelconque  $\pi$ ,

- $N_{\pi j} = (\pi N)_j$  représente le nombre moyen de fois que  $j$  est atteint,
- $M_{\pi j} = (\pi M)_j$  le temps moyen pour atteindre  $j$  la 1<sup>e</sup> fois
- $H_{\pi j} = (\pi H)_j$  la probabilité d'atteindre  $j$ .

Les données  $\bar{N}_{\pi j}, \bar{M}_{\pi j}, \bar{H}_{\pi j}$  définies de manière analogue à partir des matrices  $\bar{N}, \bar{M}, \bar{H}$ , ont une signification similaire, sauf que l'état initial n'est pas pris en compte.

### B.2.3 Premières propriétés

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} P^k$$

$$\bar{N} = PN$$

$$\bar{H} = PH$$

### B.3.4 Classification des états

- $i$  a accès à  $j$  si  $H_{ij} > 0$  c.à.d. qu'il est possible d'atteindre  $j$  depuis  $i$

**Propriété :**  $i$  a accès à  $j \Leftrightarrow \exists n \ (P^n)_{ij} > 0$

- $i$  et  $j$  communiquent si  $i$  a accès à  $j$  et  $j$  à  $i$ . Nous noterons  $i \sim j$ .

$\sim$  est une relation d'équivalence. Elle partitionne  $S$  en classes d'équivalence.

- $i$  est récurrent si  $\bar{H}_{ii} = 1$ , c.à.d. que l'on repassera avec certitude dans  $i$  en partant de  $i$ .
- $i$  est absorbant si  $\bar{H}_{ij} = \delta_{ij}$ ;  $i$  n'a accès à aucun autre état que lui-même.  $P_{ii} = 1$ . Un état absorbant est récurrent.
- $i$  est transitoire si  $\bar{H}_{ii} < 1$

#### Propriétés :

- $i$  est transitoire  $\Leftrightarrow N_{ii} < \infty$ . Dans ce cas  $N_{ii} = 1/(1 - \bar{H}_{ii})$
- Si  $j$  est transitoire, alors  $\forall i \ N_{ij} < \infty$  et  $N_{ij} = H_{ij}N_{jj}$
- Tous les états d'une classe d'équivalence sont de même type: récurrent ou transitoire. Suivant le cas, la classe sera dite récurrente ou transitoire. Une classe  $A$  a accès à une autre classe  $B$  si un état de  $A$  a accès à un état de  $B$ . Une classe récurrente

est fermée, c.à.d. qu'elle n'a pas accès à d'autres classes. Un processus démarrant dans une classe récurrente y reste donc indéfiniment.

- Une chaîne est récurrente si elle comporte une seule classe d'équivalence et si cette classe est récurrente.
- Une chaîne est transitoire si tous ses états récurrents sont absorbants.

Une chaîne quelconque comportant  $r$  classes récurrentes pourra être étudiée par l'étude d'une chaîne transitoire, obtenue en rendant absorbant tous les états récurrente et  $r$  chaînes récurrentes correspondant à ses différentes classes récurrentes. Par la suite nous nous intéresserons seulement aux chaînes transitoires et récurrentes.

**N.B.** La classification des états peut s'obtenir en étudiant le graphe orienté associé à la matrice de transition  $P$  de la chaîne. En particulier les classes récurrentes correspondent aux composantes fortement connexes, et une chaîne récurrente est associée au graphe d'une matrice irréductible

### B. 2.5 Propriétés des chaînes transitoires

**Forme canonique** : partitionnons les états de  $S$  en  $E$ ,  $E$  reprenant l'ensemble des états absorbants et  $\bar{E}$  son complément. Par permutation, la matrice de transition d'une chaîne transitoire s'écrit

$$\begin{matrix} & E & \bar{E} \\ E & (I & 0) \\ \bar{E} & (R & Q) \end{matrix}$$

La matrice  $N$  associée à une chaîne transitoire à les propriétés suivantes

- pour  $j$  absorbant  $N_{ij} = 0$  ou  $1^\infty$  suivant que  $j$  puisse être atteint ou non à partir de  $i$ ,
- pour  $i$  absorbant  $N_{ij} = 0$  ou  $1^\infty$  suivant que  $i \neq j$  ou  $i = j$ .

Seules les entrées  $N_{ij}$  pour des états  $i$  et  $j$  transitoires sont donc intéressantes. Désignons par  $N^*$  la matrice  $N$  limitée à ces entrées.

**Propriétés :**

$$N^* = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k, \quad N^* \text{ est une matrice dont tous les éléments sont finis,}$$

$$\bar{N}^* = QN^*,$$

$$N^* = I + QN^* \quad , N(I - Q) = (I - Q)N = I, \quad QN^* = N^*Q.$$

**Matrice d'absorption** :  $B = (B_{ij})$  où  $B_{ij}$  représente la probabilité d'être absorbé dans l'état  $j$  pour un processus démarrant dans l'état transitoire  $i$

$$\text{Nous avons } B = N^*R \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

**Temps moyen d'absorption**: La variable aléatoire  $a(\omega)$ , temps moyen d'absorption pour le chemin  $\omega$ , est  $\sum_{j \text{ transitoire}} n_j(\omega)$ . Nous définissons un vecteur  $a$  de composante  $a_i(a(\omega))$

donnant le temps moyen d'absorption pour un processus démarré en  $i$ .

**Propriétés :**

$$a = N^*e,$$

$$(I - Q)a = e.$$

### B.2.6 Propriétés des chaîne récurrentes

Pour une chaîne récurrente, nous avons  $Pe = e, \bar{H} = E, N_{ij} = (M_i[n_j]) = \infty$

**Périodicité** : Soit  $T_i = \{k : (P^k)_{ii} > 0, k > 0\}$  et  $d_i$  le plus grand commun diviseur de cet ensemble d'entiers. On peut démontrer que  $d_i$  est en fait indépendant de  $i$ .  $d_i$  est appelé période de la chaîne de Markov récurrente. Pour  $d > 1$ , la chaîne est dite périodique ou cyclique, pour  $d = 1$  la chaîne est non cyclique ou régulière .

**Ergodicité**: soit  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k$  pour une chaîne récurrente, cette limite existe et telle

que  $A \geq 0$  et  $AP = A = PA = A^2$ .

Si  $A = 0$ , la chaîne est nulle, si  $A \neq 0$  la chaîne est ergodique. Notons que dans le cas d'un espace  $S$  fini, il n'y a pas de chaîne nulle. Pour une chaîne ergodique non cyclique, nous avons  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = A$ .

**Solution stationnaire et asymptotique.**

Pour une chaîne récurrente, il existe un vecteur  $\alpha$  positif unique (à une constante

multiplicative près) tel que  $\alpha = \alpha P$ .  $\alpha$  correspond à la distribution stationnaire (en imposant la normalisation  $\alpha e = 1$ ).

Pour une chaîne ergodique non cyclique,  $\alpha$  correspond de plus à la distribution asymptotique  $\pi_\infty = \lim \pi P^n$ .  $\pi_\infty$  est donc indépendant de la distribution initiale.

### **Matrice des temps de premier passage – Mean First Passage Time Matrix**

- Les matrices  $M$  et  $\bar{M}$  ont été définies au paragraphe B.2.2.

**Propriété :** Pour une chaîne récurrente

$$\bar{M}_{ii} = \begin{cases} \infty & \text{si la chaîne est nulle} \\ \frac{1}{\alpha_i} & \text{si la chaîne est ergodique avec } \alpha \text{ défini par } \alpha = \alpha P \text{ et } \alpha e = 1 \end{cases}$$

- Désignons par  $D$  la matrice diagonale d'éléments  $d_{ii} = 1/\alpha_i$

**Propriété :** Pour une chaîne ergodique  $M$  satisfait les trois propriétés suivantes

- 1)  $\text{diag}(M) = 0$  et  $M \geq 0$
- 2)  $M_{ij}$  est fini  $\forall i, j$
- 3)  $(1 - P)M = E - D$

Réciproquement, toute matrice  $M$  vérifiant ces propriétés est la matrice de "mean first lime passage" associée à la chaîne de matrice  $P$ .

### **Temps de premier passage et chaîne absorbante**

Notons que le temps de premier passage dans  $j$  en partant de  $i$  ( $= M_{ij}$ ) peut s'obtenir en définissant une chaîne absorbante  ${}^j P$  où l'état  $j$  est rendant absorbant. Alors  $M_{ij}$  est égal à  $a_i$ ,  $a$  étant le vecteur temps moyen d'absorption relatif à la chaîne  ${}^j P$ .

De même pour calculer le temps de premier passage d'un groupe d'états  $E$ , il suffit de définir la chaîne  ${}^E P$ , obtenue à partir de  $P$  en rendant les états de  $E$  absorbants.

## **B.3 Processus markovien à paramètre continu (S discret)**

[Bharucha, 60] [Tijms, 86]

### **B.3.1 Définitions**

Le paramètre  $t$ , est à présent continu (soit  $T = \mathbb{R}^+$ ).

Un processus stochastique markovien sera cette fois caractérisé par une matrice de taux de transition  $A$ . Elle est liée à la probabilité  $Pr(j, t + \Delta t \mid i, t)$  de passer de l'état  $i$  en  $t$  à l'état  $j$  durant l'intervalle  $\Delta t$ , par la relation suivante :

$$A_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pr(j, t + \Delta t \mid i, t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

La probabilité d'être en  $j$  pour un processus démarré en  $i$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} Pr_i(j, t) = \sum_k Pr_i(k, t) A_{kj}(t) \quad \text{avec } Pr_i(j, 0) = \delta_{ij}$$

Pour une distribution initiale  $\pi$ , la distribution au temps  $t$ ,  $\pi(t)$  est solution du système différentiel  $d\pi(t)/dt = \pi(t)A(t)$ ,  $\pi(0) = \pi$

Le processus est homogène si  $A$  est une matrice indépendante du temps. Dans ce cas  $\pi(t) = \pi e^{At}$ .

**Propriétés :**

1.  $A_{ii} \leq 0 \quad \forall i$
2.  $A_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$
3.  $Ae = 0$

$A$  est appelée matrice g-ligne-stochastique, g pour générateur car  $e^{At} (t \geq 0)$  est une matrice ligne-stochastique.

Par la suite nous limiterons aux processus homogènes.

**B.3.2 Propriétés des chaînes homogènes**

**Uniformisation**

*L'uniformisation permet d'établir une équivalence simple entre une chaîne continue et une chaîne discrète (dans le cas homogène).*

Soit  $v$  un nombre positif tel que  $v \geq A_{ii} \quad \forall i$ . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Pr_i(j, t) &= (e^{At})_{ij} = \{e^{(I + \frac{A}{v})vt} e^{-vt}\}_{ij} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(I + A/v)^n]_{ij} \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{ij} \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt}$$

La probabilité d'être dans un état  $j$  en partant de l'état  $i$  en  $t = 0$  est obtenue en sommant les probabilités de passer de  $i$  en  $j$  en  $n$  étapes ( $n = 0, 1, \dots, \infty$ ), chacune de ces probabilités étant pondérée par la probabilité d'avoir exactement  $n$  transitions entre l'instant 0

et l'instant  $t$ :  $\frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt}$

*Une chaîne de Markov (homogène) continue est donc caractérisée par :*

1. Une chaîne discrète de matrice  $P = I + A/v$
2. *Un processus poissonien de paramètre  $v$ , gouvernant les différents instants de transition.*

### **Classification des états et des chaînes :**

A part la notion de cyclicité qui disparaît, la classification se transpose aux chaînes continues en considérant la chaîne discrète associée de matrice  $P = (1 + A/v)(v \geq A_{ii} \forall i)$ .

### **Solution asymptotique et valeurs propres :**

Les valeurs propres de la chaîne continue  $A$  sont liées aux valeurs propres de la chaîne discrète associée par  $\lambda_A = (\lambda_P - 1)v$  ; les vecteurs propres sont les mêmes.

Pour une chaîne continue ergodique, 0 est donc une valeur propre simple à laquelle correspond le vecteur propre droit  $e$  et le vecteur propre gauche  $\alpha$ .  $\alpha$  est positif et pour  $\alpha e = 1$ ,  $\alpha$  correspond à la solution asymptotique du problème  $d\pi/dt = \pi A$  ; elle est indépendante de l'état initial.

### **Temps moyen passé dans un état, temps d'absorption, temps de premier passage**

Soit  $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_{ij})$ ,  $\mathcal{N}_{ij}$  donnant le temps que le système passe dans l'état  $j$  pour un processus démarré en  $i$ . Nous avons  $\mathcal{N}_{ij} = \int_0^{\infty} \text{Pr}_i(j) dt = \bar{P}(0)$  où  $P$ , la matrice  $(\text{Pr}_i(j))$  est solution de  $dP/dt = PA$ ,  $P(0) = I$ .  $\bar{P}$  désigne la transformée de Laplace de  $P$ . Nous avons  $s\bar{P} - I = \bar{P}A$ . Pour  $s = 0$ ,  $\mathcal{N}A = \bar{P}(0)A = -I$ .

Pour la chaîne discrète associée, nous avons  $N(I - (I + A/v)) = -I$  c.-à-d.

$$\frac{N}{v}A = -I.$$

La matrice  $\mathcal{N}$  correspond à la matrice  $N$  de la chaîne discrète multipliée par le facteur  $1/v$ . Ce facteur donne le temps moyen d'une transition d'un processus poissonien de paramètre  $v$ .

De même, le vecteur temps d'absorption d'une chaîne transitoire sera solution du problème  $A^*a = -e$  ( $a = \mathcal{N}^*e$ ) (\* limite la matrice aux seuls états transitoires). La matrice de premier passage  $\mathcal{M}_0$  pour une chaîne ergodique sera caractérisée par

$$\mathcal{M}_{ij} \text{ fini } \forall i, j$$

$$\mathcal{M}_{ii} = 0 \forall i$$

$$A\mathcal{M} = E - D$$

## C. Calcul des paramètres des machines :

### C.1 Le taux moyen de chargement ( $\varepsilon_i$ ) :

Le taux moyen de chargement ( $\varepsilon_i$ ) caractérise la vitesse de la mise en route et du chargement d'une pièce dans la machine. Considérons une machine qui passe un temps moyen de 10 secondes pour charger 1 pièce. En prenant l'heure comme unité de temps, ce taux ( $\varepsilon_i$ ) est donc égal à :

$$\varepsilon_i = \frac{1 \text{ pièce}}{10 \text{ secondes}} = \frac{1 \text{ pièce}}{\left(\frac{10}{3600}\right) \text{ heures}} = 360 \text{ pièces/heure.}$$

### C.2 Le taux moyen de service ( $\delta_i$ ) :

De la même manière, si les tâches à effectuer par le produit brut se déroulent sans aucun incident, la machine  $M_i$  met un certain temps pour fabriquer le produit fini. Ce temps opératoire est caractérisé par un taux moyen de service ( $\delta_i$ ) (d'usinage ou de fabrication, etc.) d'une pièce par la machine  $M_i$ . En d'autres termes, c'est la cadence de sortie d'une pièce usinée (ou finie) depuis la machine  $M_i$  (par exemple,  $\delta_i = 20$  pièces par heure). Après l'étude statistique que nous avons effectuée dans l'entreprise DOMELEC une machine quelconque, des valeurs précises bien que, pouvant, dans certains cas, varier légèrement. Les taux  $\varepsilon_i$  et  $\delta_i$  sont donc supposés constants.

### C.3 Le taux moyen de défaillance ( $\lambda_i$ ):

Pour caractériser la fréquence d'occurrence des défaillances, un taux moyen de défaillance ( $\lambda_i$ ) ou d'avarie est introduit. Il caractérise le nombre total de défaillances pendant la durée du service, c'est-à-dire la durée totale de fonctionnement de la machine  $M_i$  moins la durée des défaillances. Par exemple, une machine  $M_i$  ayant fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 défaillances dont les durées respectives sont 7 ; 22 ; 8.5 ; 3.5 et 9 heures :

$$\lambda_i = \frac{5 \text{ défaillances}}{[8000 - (7 + 22 + 8.5 + 3.5 + 9)] \text{ heures}} = 6.289 \cdot 10^{-4} \text{ défaillances/heure.}$$

Soit environ 0.0007 défaillances par heure ou 0.7 défaillances pour 1000 heures ou encore, 7 défaillances toutes les 10000 heures.

#### **C.4 Le taux moyen de réparation ( $\mu_i$ ) :**

Pour caractériser la vitesse des réparations, un taux moyen de réparation ( $\mu_i$ ) est introduit. Il caractérise le nombre total de réparations effectuées dans un ensemble groupant tous les temps de réparation. Reprenons le même exemple précédent, une machine  $M_i$  ayant fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 défaillances dont les durées respectives sont 7 ; 22 ; 8.5 ; 3.5 et 9 heures. Ces durées représentent les temps de remise en service donc de réparation (ou maintenance) et le nombre de défaillances sont identique à celui des réparations. Par suite, le taux moyen de réparation est égal à :

$$\mu_i = \frac{5 \text{ réparations}}{(7 + 22 + 8.5 + 3.5 + 9) \text{ heures}} = 0.1 \text{ réparation / heure.}$$

## D. Produit et somme de Kronecker

[Brewer, 78] [Horn, 91]

### D.1 Définition

- Le produit de Kronecker d'une matrice  $A(p \times q)$  par une matrice  $B(m \times n)$  est une matrice  $C(np \times nq)$  définie par

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

- La somme de Kronecker d'une matrice carrée  $A(p \times p)$  et d'une matrice carrée  $B(n \times n)$  est une matrice  $C(mp \times nq)$  définie par

$$C = A \oplus B = A \otimes I_n + I_p \otimes B$$

$I_n, I_p$  représentent respectivement les matrices unité  $n \times n$  et  $p \times p$ .

### D.2 Propriétés du produit de Kronecker

Soient  $A, B, C, D$  des matrices de dimensions appropriées,  $\alpha$  une constante complexe,

- $A \otimes B \neq B \otimes A$
- $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$
- $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$
- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
- $A$  et  $B$  matrice non singulière  $\Rightarrow A \otimes B$  est non singulière et  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

### D.3 Propriétés de la somme de Kronecker

Soient  $A, B, C$  des matrices de dimensions appropriées,

- $A \oplus B \neq B \oplus A$
- $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$