

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ EL HADJ LAKHDHAR BATNA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

THÈSE

présentée par

Menina Rachid

pour obtenir le titre de

Docteur en **S**ciences

Spécialité : **G**énie **M**écanique

Option : **É**nergétique

*Modélisation unidimensionnelle de la dynamique des gaz
dans les conduits à sections discontinues*

soutenue publiquement le **03/ 07/ 2012**,

devant le jury composé de :

Dr. BENMOUSSA Hocine	Pr. à l'Université de Batna	Président
Dr. ZEREG Moussa	Pr. à l'Université de Batna	Rapporteur
Dr. SAUREL Richard	Pr. à l'Université de Province Marseille	Co-Rapporteur
Dr. MOUMMI Noredine	Pr. à l'Université de Biskra	Examineur
Dr. ABDELHAMID Chawki	M.C.A à l'Université de Batna	Examineur
Dr. NEMOUCHI Zoubir	Pr. à l'Université de Constantine	Examineur

Dédicace

À ma famille.

Remerciements

Je tiens, en premier lieu, à remercier profondément mon Directeur de thèse Algérien le Professeur Zereg Moussa pour ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité malgré la charge de travail due aux postes qu'il a occupés (Vice Recteur chargé de la post-graduation puis Recteur de l'Université de Batna).

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse étranger le Professeur Richard Saurel, Professeur à l'Institut Universitaire de France et Directeur de l'École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur à Marseille, pour l'accueil qu'il m'a réservé au sein de son équipe de recherche SMASH et pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce travail de thèse. Malgré sa charge de travail impressionnante, Richard a dirigé cette thèse avec une disponibilité constante et une patience inégalée. Il m'a fait profiter de sa très grande expérience dans le domaine de la recherche scientifique. Grâce à lui j'ai pris goût au travail dans ce domaine. Pour tout cela, je tiens à l'assurer de toute mon amitié et de mon plus grand respect.

Je remercie également tous les membres de l'équipe SMASH de L'IUSTI, J. Massoni, A. Chinnayya et surtout O. Le Metayer. Son code de calcul Euler 2D m'a été d'une très grande utilité.

Je remercie aussi les Professeurs L. Houas et G. Jourdan responsables tous deux du group "Tubes à choc" de l'IUSTI pour leur implication dans l'obtention des résultats expérimentaux de référence. Je tiens aussi à remercier les membres du jury de soutenance, le Président pour m'avoir fait l'honneur de présider ce dernier et les Examineurs pour avoir accepté d'examiner mon travail de thèse. Pour finir, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Abstract

Most gas dynamic computations in industrial ducts are done in one dimension with cross section averaged Euler equations. This poses a fundamental difficulty as soon as geometrical discontinuities are present. The momentum equation contains a non conservative term involving a surface pressure integral, responsible for momentum loss. Definition of this integral is very difficult from a mathematical standpoint as the flow may contain other discontinuities (shocks, contact discontinuities). From a physical standpoint, geometrical discontinuities induce multidimensional vortices that modify the surface pressure integral. In the present thesis an improved one-dimensional flow model is proposed. An extra energy (or entropy) equation is added to the Euler equations expressing the energy and turbulent pressure stored in the vortices generated by the abrupt area variation. The turbulent energy created by the flow-area change interaction is determined by a specific estimate of the surface pressure integral. Model's predictions are compared with 2D averaged results from numerical solution of the Euler equations. Comparison with shock tube experiments is also presented. The new one-dimensional averaged model improves the conventional cross-section averaged Euler equations and is able to reproduce the main flow features.

Keywords: Compressible, Shock Waves, Thermodynamics, Turbulence.

Résumé

La plupart des simulations numériques en dynamique des gaz dans les conduits industriels sont effectuées à l'aide des équations d'Euler quasi-1D. Ceci pose une difficulté fondamentale si des discontinuités géométriques sont présentes. L'équation de bilan de quantité de mouvement contient un terme non conservatif impliquant une intégrale de surface de pression, responsable de la perte de quantité de mouvement. La définition de cette intégrale est très difficile du point de vue mathématique du fait que l'écoulement peut contenir d'autres discontinuités (chocs, discontinuités de contact). Du point de vue physique, les discontinuités géométriques induisent des tourbillons multidimensionnels qui modifient l'intégrale de surface de pression. Dans la présente thèse une amélioration du modèle d'écoulement quasi-1D conventionnel est proposée. Une équation d'énergie (ou d'entropie) supplémentaire est ajoutée aux équations d'Euler exprimant l'évolution de l'énergie et de la pression turbulente stockées dans les tourbillons générés par les changements brusques de section. L'énergie turbulente produite par l'interaction écoulement-variation de section est déterminée par une estimation spécifique de l'intégrale de surface de pression. Les résultats numériques des modèles quasi-1D sont comparés aux moyennes par section de la solution 2D des équations d'Euler. Une comparaison avec des expériences dans un tube à choc est également présentée. Le nouveau modèle améliore les prédictions obtenues à l'aide des équations d'Euler quasi-1D conventionnelles et est capable de reproduire les principales caractéristiques de l'écoulement.

Mots clés: Compressible, Ondes de Choc, Thermodynamique, Turbulence.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Dédicace</i>	i
<i>Remerciements</i>	ii
<i>Résumé</i>	v
<i>Nomenclature</i>	xi
1. <i>Introduction</i>	1
2. <i>Synthèse bibliographique</i>	5
2.1 Travaux antérieurs	7
2.2 Structures résultantes de l'interaction choc droit/détente-zone de transition	14
2.2.1 Interaction choc droit-zone de transition	14
2.2.2 Interaction détente-zone de transition	16
3. <i>Production de données de référence</i>	19
3.1 Données de référence expérimentales	20
3.1.1 Installation expérimentale	20
3.1.2 Enregistrements expérimentaux	21
3.2 Données de référence numériques	25
3.2.1 Méthode numérique de simulation 2D	25
3.2.2 Résultats numériques 2D	26
4. <i>Construction du modèle turbulent</i>	29

4.1	Modèle de transport de la turbulence	30
4.2	Production de la turbulence	33
4.2.1	Préliminaire	33
4.2.2	Modèles admissibles pour la pression d'interface P_I	34
5.	Problème de Riemann et schéma numérique associé	41
5.1	Résolution du problème de Riemann	42
5.1.1	Ondes faisant face à droite et à gauche dans les conduits à sections constantes	43
5.1.2	Discontinuités de contact et changements brusques de section transversale .	44
5.1.3	Solution au travers des changements brusques de section	45
5.1.4	Procédures itératives	51
5.2	Méthode numérique de type Godunov	52
6.	Validation du nouveau modèle turbulent	54
6.1	Interactions choc-discontinuité géométrique	55
6.2	Interactions détente-discontinuité géométrique	67
	Conclusion et Perspectives	76
	Bibliographie	77
	Annexes	82
A.	Théorie de Chisnell	83
B.	Modèle de transport turbulent dans les conduits à sections variables	85

LISTE DES FIGURES

3.1	Représentation 3D du tube à choc T80 et de ses accessoires.	21
3.2	Positions des capteurs de pression dans le tube à choc	21
3.3	Interaction choc-marche descendante pour un nombre de Mach $M_{CI} = 1.27$	22
3.4	Signaux de pression expérimentaux de l'essai à $M_{CI} = 1.27$	24
3.5	Comparaison des signaux de pression expérimentaux et numériques pour $M_{CI} = 1.27$	28
4.1	Représentation schématique de l'écoulement au niveau d'une marche	34
4.2	Représentation simplifiée de la pente de la paroi, cas d'un conduit régulier.	35
4.3	Structure d'ondes associée au Système (4.7). Cas subsonique	37
4.4	Volume de controle contenant la marche utilisé pour déterminer P_t	37
6.1	Signaux de pression pour l'interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 1.27$	56
6.2	Test de Schardin, évolutions de ρ , M, p et P_t en fonction de x.	59
6.3	Interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$, contours de densité.	59
6.4	Interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$, évolutions de ρ , p, M et s_t vs x.	60
6.5	Intéraction écoulements confluent-marche ascendante, contours de densité.	62
6.6	Intéraction écoulements confluent-marche ascendante, évolutions de ρ , p et u vs x.	63
6.7	Soufflerie à Mach 3, marche ascend. du tunnel modifiée, contours de densité	64
6.8	Soufflerie à Mach 3, marche ascend. du tunnel modifiée, évol. de ρ , M, p et s_t vs x	65
6.9	Interaction choc-forte abrupte réduction, $(p - p_0)/(p_1 - p_0)$ et M en fonct. de (L/H)	67
6.10	Écoulement en aval de l'entrée du conduit étroit.	68
6.11	Interaction choc-forte abrupte réduction. Comparaison des différents modèles	69
6.12	Évolution du facteur d'amplification en fonction de l'intensité du choc incident	70
6.13	Interaction détente-marche descendante. ρ , p, M en fonct. de x à différents instants.	72

6.14	Interaction détente-marche descendante. ρ , p , M en fonct. de x à 1.25 et 3.71 ms . . .	73
6.15	Interaction détente-marche ascendante. ρ , p , M en fonct. de x à différents instants. . .	74
6.16	Interaction détente-marche ascendante. ρ , p , M en fonct. de x à 1.25 et 3.58 ms . . .	75
B.1	Maillage 1D d'un conduit à section discontinue	86

LISTE DES TABLEAUX

6.1	Conditions initiales pour l'interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 1.27$	55
6.2	Conditions initiales pour le test de Schardin.	58
6.3	Conditions initiales pour l'interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$	61
6.4	Géométrie et conditions init., interaction écoulements confluents-marche ascendante	61
6.5	Géom. et cond. init., tunnel d'une soufflerie à Mach 3 avec marche ascend. modifiée	62

Nomenclature

Symboles latins

$C; c$	Vitesse du son	m/s
C_v	Chaleur spécifique à volume constant	$J/kg/K$
e	Énergie interne	J/kg
H	Hauteur	m
K	Pression turbulente	Pa ou bar
L	Longueur	m
\dot{m}	Flux massique	$kg/m^2/s$
n	Nombre de dimensions de l'écoulement	
\vec{n}	Vecteur normal	
P, p	Pression	Pa ou bar
R	Constante des gaz	$J/kg/K$
s	Entropie	J/kg
S	Surface ou section	m
t	Temps	s
T	Température	K
$u; v$	Vitesse suivant la direction x resp y	m/s
$x; y$	Coordonnée	m

Symboles grecs

γ	exposant adiabatique	
ε	energie interne <i>thermodynamique</i>	J/kg
ρ	densité	kg/m^3

Indices et exposants

CI Choc incident

g gaz

I interface

L Gauche

R Droit

t Turbulent

0 État avant la discontinuité géométrique

1 État après la discontinuité géométrique

(.)^{*} Solution du problème de Riemann

Abréviations

1D Monodimensionnel

2D Bidimensionnel

BP Basse pression

HP Haute pression

Moy Moyenné

1. INTRODUCTION

La simulation des écoulements de fluides compressibles dans les conduits industriels est très importante pour de nombreux domaines de recherche et d'ingénierie, allant de l'espace au transport des gaz (gazoducs), en passant par les souffleries, les tubes à choc, les turboréacteurs, les systèmes d'admission et d'échappement des moteurs à combustion interne etc.

Dans la plupart des situations, les conduits présentent des variations de la section transversale qui peuvent être continues ou abruptes. Les écoulements ayant lieu dans des conduits avec des variations de section continues peuvent être déterminés avec précision en appliquant les méthodes numériques existantes au modèle quasi-1D conventionnel. Lorsque des variations abruptes sont présentes, des difficultés fondamentales apparaissent à la fois sous les aspects mathématiques et physiques.

Cette configuration d'écoulement a attiré l'attention de nombreux chercheurs de différentes communautés, à la fois théoriciens et expérimentateurs. L'un des intérêts principaux de leurs études était la quête d'un modèle réduit ou de relations réduites [3, 6–8, 10, 11, 13, 15, 16, 19–21, 26–28, 33, 37, 40, 49].

Du point de vue mathématique, l'équation de quantité de mouvement contient un produit non conservatif de la pression sur l'interface solide-fluide et de la dérivée de la section transversale. Si cette dernière est discontinue le produit de sa dérivée et de la pression d'interface, prise égale à la pression du fluide, n'est pas défini en présence de choc. Il correspond à un produit d'une fonction de Heaviside et d'une fonction de Dirac.

Physiquement, quand une discontinuité géométrique est présente des tourbillons sont générés et une difficulté supplémentaire s'ajoute au problème. En effet, de tels phénomènes multidimensionnels sont difficiles à prendre en compte dans un modèle unidimensionnel. Leur effet est cependant important car ils induisent une chute de pression qui complique la détermination de la pression d'interface.

Pour être plus précis, les équations d'Euler quasi-1D correspondent au modèle d'écoulement communément adopté pour le calcul de la dynamique des gaz dans les conduites à sections variables. Ce modèle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) S}{\partial x} &= P_I \frac{\partial S}{\partial x} \\
\frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) u S}{\partial x} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

où ρ représente la densité et u la vitesse. L'énergie totale est définie par $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$, où ε représente l'énergie interne. La pression est déterminée par l'équation d'état $p = p(\rho, \varepsilon)$. La section transversale S dépend uniquement de l'espace.

Avec ce modèle, les effets turbulents induits par les discontinuités géométriques ne sont pas considérés. Cela ressort clairement de la définition de l'énergie totale qui ne tient pas compte des effets turbulents. Aussi, la seule estimation admissible pour la pression d'interface solide-fluide afin que l'écoulement soit isentropique dans les régions caractérisées par l'absence de chocs est $P_I = p$.

Notre objectif est d'améliorer le modèle (1.1) en tenant compte des effets turbulents produits par les singularités géométriques. Ceci sera fait en redéfinissant l'énergie totale, la pression de l'écoulement et la pression d'interface. Une équation d'énergie supplémentaire sera nécessaire. En effet, nous ajouterons une équation d'évolution de l'*entropie turbulente* au Système (1.1). La fermeture de cette nouvelle relation nécessitera la définition du terme de production de l'entropie turbulente due aux singularités géométriques. À cette fin, une modélisation fiable de la pression d'interface sera proposée.

Afin de progresser dans la compréhension des différents processus physiques, des observations expérimentales et des résultats qualitatifs sont nécessaires. Des expériences correspondantes ont été réalisées dans un tube à choc. Des simulations numériques basées sur les équations d'Euler 2D ont également été réalisées. Les enregistrements expérimentaux ont été utilisés pour valider le solveur bidimensionnel. Puis, les résultats 2D moyennés par section ont été utilisés pour évaluer l'exactitude du modèle unidimensionnel conventionnel (1.1) ainsi que le nouveau modèle turbulent, extension du Système (1.1).

La présente thèse, qui reprend avec plus de détails les travaux de Menina *et al.* [31], est organisée

comme suit. Une synthèse des travaux antérieurs importants est faite dans le Chapitre 2. L'installation expérimentale et les résultats de référence correspondants sont décrits dans le Chapitre 3. La méthode utilisée pour obtenir les résultats numériques 2D est résumée dans le même chapitre. Ces derniers sont d'abord validés par rapport aux résultats expérimentaux. Ils sont ensuite moyennés par section pour être utilisés comme résultats de référence aux modèles quasi-1D. Les ingrédients de base du modèle de turbulence sont reportés dans le Chapitre 4. Ce modèle est moyenné, afin de traiter les écoulements dans les conduits unidimensionnels à sections variables. Une attention particulière est réservée à la relation de fermeture concernant la pression d'interface et à la construction du terme de création de l'entropie turbulente. La résolution du problème de Riemann est examinée au Chapitre 5. Une attention particulière est accordée aux conditions de saut au travers de l'onde stationnaire produite par la discontinuité géométrique. Le schéma de Godunov associé est présenté dans le même chapitre. La validation du modèle turbulent réduit obtenu est considérée dans le Chapitre 6.

2. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

Les écoulements de gaz dans les conduits industriels s'accompagnent de la propagation d'ondes simples (de compression ou de détente), d'ondes de choc et de discontinuités de contact. Ceci conduit à des interactions, plus ou moins complexes, lorsque des variations de section droite sont présentes. En effet, lorsqu'un choc droit ou une détente (faisceau d'ondes de détente), se propageant dans un milieu gazeux initialement au repos dans un conduit, rencontre une variation brusque ou continue mais sur une longueur finie de la section transversale, des perturbations sont générées derrière l'onde transmise et un écoulement instationnaire s'y installe.

Pour des variations de section monotones et continues les perturbations multidimensionnelles sont relativement faibles de sorte que l'écoulement peut être considéré comme unidimensionnel. Le caractère multidimensionnel devient significatif pour des variations de section plutôt rapides et surtout abruptes (répartition non uniforme des variables de l'écoulement sur la section transversale près de la discontinuité géométrique et formation de tourbillons au niveau de celle-ci).

Les effets locaux de l'interaction s'atténuant avec le temps, l'écoulement généré tend à devenir, à terme, stationnaire avec une configuration d'ondes bien définie qui dépend du type de l'onde incidente, de son intensité, du type de transition et du rapport des sections.

De nombreuses études analytiques et numériques ont été réalisées dans le passé traitant ce type de problème, en considérant l'écoulement unidimensionnel et non visqueux. La majeure partie des articles publiés sur ce sujet a porté sur l'étude de l'interaction d'un choc droit avec une zone de transition continue dont les plus importants sont [6–8, 13, 20, 27, 33, 37, 38, 49]. Un nombre moins important a traité de l'interaction d'un choc droit avec une variation brusque de la section transverse du conduit [3, 10, 11, 26, 28, 40]. Un nombre encore moindre a traité du cas d'interaction avec une détente [15, 16, 18–21]. Cependant, les articles traitant les interactions choc droit-variation continue de la section du conduit contiennent beaucoup d'informations qui sont utiles dans le cas des variations brusques. Aussi, certaines références traitant du cas du choc droit contiennent des informations pertinentes par rapport au cas des détentes.

Nous commençons ce chapitre par une synthèse de ces travaux et terminons par une revue des configurations résultantes des différentes interactions.

2.1 Travaux antérieurs

Les méthodes numériques permettent, de nos jours, de résoudre n'importe quel problème de la dynamique des gaz ou du moins la plupart d'entre eux. Ceci n'était pas possible lors des premiers travaux dans lesquels la méthode des caractéristiques était appliquée pour résoudre les écoulements non stationnaires de gaz dans les conduites contenant des variations de leur section transversale. Les chercheurs ont été contraints de considérer les écoulements dans les tronçons de transition comme stationnaires. De là, des méthodes analytiques approchées et exactes furent et restent toujours des outils importants dans les études d'écoulement de gaz dans les conduites.

Un effort important a été fourni pour développer des solutions analytiques approchées de l'écoulement instationnaire engendré par le passage d'un choc droit à travers une variation continue de la section transversale d'un conduit.

Meyer [32] a développé un traitement analytique de l'écoulement engendré par l'interaction choc droit-transition continue de la section en supposant ce dernier, y compris l'écoulement à travers les différentes ondes, isentropique. L'analyse se limite, dans ce cas, à de faibles ondes de choc.

Un autre traitement analytique approché traitant de la propagation d'un choc droit le long d'un changement continu de la section transversale d'un conduit est dû à Chester [6]. Il est basé sur la linéarisation de la structure derrière le choc diffracté, en considérant les petites variations de section qui engendrent de petites variations de l'intensité du choc. Dans cette analyse, l'effet des perturbations générées derrière le choc sur le choc lui-même n'est pas pris en considération. Le résultat est une relation différentielle entre le nombre de Mach du choc et la section du conduit. Cette même relation a été obtenue par Whitham [49] en approchant le problème par une linéarisation des équations quasi-unidimensionnelles de l'écoulement, exprimées en variables primitives (masse volumique ρ , vitesse u et pression p), combinée à une intégration suivant les directions caractéristiques. Chisnell [8] obtient, par intégration de l'équation différentielle due à Chester [6], une relation entre l'aire de la section transverse et le nombre de Mach local de propagation du choc dans un conduit non uniforme. Il proposa l'application de cette dernière à des taux de variation de la section transversale quelconques. Les détails de la relation qui porte son nom sont donnés dans l'annexe A. Rosciszewski [36] a élargi la méthode analytique approchée due à Chester [6], Chis-

nell [8] et Whitham [49] pour déterminer les paramètres de l'écoulement loin derrière un choc se propageant à travers une transition de section continue. Sloan *et al.* [44] ont conclu à partir de leur travail que la théorie de Chisnell peut s'appliquer aux discontinuités dans la section transversale du conduit.

Il est important de remarquer que la méthode analytique approchée [6, 8, 36, 49] n'est pas applicable aux cas des détente et qu'il n'existe aucune méthode similaire traitant ces derniers cas.

La deuxième méthode analytique, basée sur la théorie des écoulements stationnaires, permet de trouver la solution exacte de l'écoulement engendré par le passage d'un choc ou d'une détente au travers d'une variation de la section transverse du conduit, une fois ce dernier devenu quasi-stationnaire. En effet, au bout d'un temps suffisamment long, les perturbations locales s'atténuent et les paramètres de l'écoulement dans les différentes régions de la structure d'ondes générée par l'interaction atteignent des valeurs constantes. Ce qui se traduit par la constance des intensités des différentes ondes telles que les chocs et les détente et la stationnarité de l'écoulement dans la zone de variation de la section du conduit, ce dernier étant isentropique sauf au passage des chocs s'il en contient. Le seul paramètre qui évolue avec le temps, dans ce cas, est l'étendue des régions délimitées par les différentes ondes de la structure résultante de l'interaction. En appliquant les relations de passage au travers des différentes ondes et les principes de conservation à l'écoulement dans la transition avec une méthode itérative appropriée, une solution algébrique exacte peut être obtenue pour les propriétés dans tout le champ de l'écoulement. Pour être plus précis, les conditions d'interface à travers les discontinuités de contact, les invariants de Riemann (qui sont des relations isentropiques) à travers les ondes simples (détente), les relations de Rankine-Hugoniot à travers les chocs et les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie appliquées à la transition forment le système algébrique à résoudre pour déterminer les propriétés de l'écoulement résultant de l'interaction.

Des résultats, pour des ondes faibles, basés sur une approche isentropique ont été présentés par Schultz-Grunow [43] et Kahane *et al.* [25]. Laporte [27] et Rudinger [37] ont considéré dans leurs analyses le cas des chocs d'intensité arbitraire. Chester [7] a présenté une comparaison entre des résultats obtenus à l'aide de la théorie de Chisnell et ceux obtenus à l'aide de la théorie de l'écou-

lement stationnaire, montrant que l'erreur induite en négligeant l'effet des perturbations générées derrière le choc sur le choc lui même est parfois importante.

La note technique d'Oppenheim *et al.* [33] et le rapport UTIAS de Greatrix *et al.* [13] détaillent la méthode analytique exacte applicable à l'interaction d'un choc avec une variation continue de section transverse du conduit. Ils présentent aussi une analyse détaillée des limites des domaines d'existence des différentes configurations d'ondes engendrées par l'interaction en fonction du taux de changement de la section et du nombre de Mach du choc incident. Des résultats de calcul présentés par Greatrix *et al.* [13], sous forme de graphes, montrent que l'interaction d'un choc avec une variation de section continue provoque le renforcement de ce dernier si la transition est une réduction et son affaiblissement dans le cas d'un élargissement. L'intensité du choc transmis croît ou décroît selon le type de transition d'une façon monotone pour les chocs incidents faibles et tend vers une valeur asymptotique constante pour les chocs forts. Le taux de renforcement ou d'affaiblissement dépend aussi du rapport des sections du conduit. Russell [39] présente une comparaison de résultats de calcul obtenus par la théorie analytique approchée avec des résultats obtenus par la théorie de l'écoulement stationnaire du renforcement du choc passant par une réduction. Ses résultats vont dans le même sens que ceux présentés par Greatrix *et al.* [13], concernant le renforcement du choc. Les travaux de Chester [7], d'Oppenheim *et al.* [33] et de Greatrix *et al.* [13] montrent que la théorie de l'écoulement stationnaire prévoit cinq configurations d'ondes comme résultats de l'interaction d'un choc droit avec un élargissement continu de la section du conduit. Le type de structure d'ondes est régi par l'intensité du choc incident et le rapport des sections extrêmes de la transition. Dans le cas de l'interaction avec un rétrécissement, quatre configurations d'ondes sont susceptibles de se réaliser et le type de structure dépend aussi du choc incident et du rapport des sections. Cependant, comme il a été postulé par Oppenheim *et al.* [34], pour des chocs suffisamment forts produisant des écoulements supersoniques derrière eux, trois des quatre structures peuvent coexister pour les mêmes conditions initiales (intensité du choc incident et rapport des sections) dans un petit domaine connu comme domaine d'ambiguïté. Oppenheim *et al.* [34] proposent de résoudre l'ambiguïté en utilisant le principe de production minimale d'entropie. Ce qui les a amenés à accepter deux solutions dans la région d'ambiguïté, dont une contient un choc stationnaire dans la zone de tran-

sition. Rudinger [38] réfuta la solution avec choc stationnaire pour ne garder que celle avec une détente entraînée en aval avec l'écoulement. Il justifia le rejet de la structure avec choc stationnaire dans un convergent par le fait que ce dernier est instable. Des détails de ces différentes structures d'ondes seront donnés dans la Section 2.2.

Salas [40], Emanuel *et al.* [10] et Falcovitz *et al.* [11] ont considéré l'interaction d'un choc droit avec une discontinuité dans la section transverse du conduit. Les structures d'ondes produites sont celles engendrées dans le cas d'une transition continue sauf que la zone de transition, dans ce cas, se réduit à un point. Les mêmes équations de conservation et relations de passages au travers des différentes ondes sont donc applicables dans ce cas. L'analyse de Salas [40] se limite à de faibles rapports de sections. La résolution du système algébrique dans ce cas nécessite l'utilisation d'une méthode itérative. Pour résoudre le problème de la multiplicité de la solution dans le domaine d'ambiguïté, Salas [40] utilise une définition de la production d'entropie différente de celle utilisée par Oppenheim *et al.* [34]. Ses résultats montrent que la configuration avec détente se propageant en aval derrière la discontinuité de contact et le choc transmis produit le minimum d'entropie. Ceci concorde avec le rejet de la configuration avec choc stationnaire dans la zone de transition par Rudinger évoquant le problème de la stabilité. Emanuel *et al.* [10] proposent un modèle analytique pour l'écoulement stationnaire engendré par l'interaction d'un choc droit avec un rétrécissement brusque dans le cas où le rapport des sections est assez important (5 et plus). Ceci permet de considérer l'écoulement, présent dans la zone comprise entre la discontinuité géométrique et le choc réfléchi, très faible et par la suite résoudre le système algébrique sans utiliser de méthode itérative. Falcovitz *et al.* [11] considèrent que le fluide de la zone comprise entre la discontinuité géométrique et le choc réfléchi est dans un état d'arrêt ce qui, dans ce cas aussi, simplifie la résolution du système d'équations régissant l'écoulement engendré par l'interaction choc-transition.

Gottlieb *et al.* [15, 16] et Igra *et al.* [19, 21] ont utilisé la théorie stationnaire pour modéliser les interactions des détentes avec les deux types de variations continues de section du conduit. Le cas de la réduction de la section transversale a été traité par Gottlieb *et al.* [15, 16] et celui de l'élargissement par Igra *et al.* [19, 21]. Ces études, qui sont en fait complémentaires, prévoient quatre configurations d'ondes dans le cas de la réduction et deux dans le cas de l'élargissement. Gottlieb

et al. [15, 16] et Igra *et al.* [19, 21] ont incorporé dans leurs études l'analyse des frontières des domaines d'existence des différentes configurations. Gottlieb *et al.* [15, 16] montrent, par le biais de graphes, que la détente se renforce en passant par une réduction. Pour un même rapport de réduction l'intensité de la détente transmise croît, de façon monotone, en fonction de l'intensité de la détente incidente et prend une valeur constante au delà d'une certaine intensité de la détente. Dans le cas de l'interaction avec un élargissement, Igra *et al.* [19, 21] montrent que la détente s'affaiblit en passant par ce dernier. Pour un même rapport d'élargissement l'intensité de la détente transmise, bien que plus faible que la détente incidente, croît de façon monotone en fonction de l'intensité de cette dernière pour les détente faibles et modérées. Elle prend une valeur constante au delà d'une certaine intensité de détente incidente. Les résultats de Igra *et al.* [19, 21] montrent aussi que plus la détente incidente est forte plus le choc réfléchi et la détente réfléchie, si la configuration en contient, seront forts aussi et ceci indépendamment du rapport d'élargissement. Pour terminer avec les interactions des détente et des changements de section du conduit, il faut noter qu'aucune étude analytique exacte traitant les cas de discontinuités dans la section transversale du conduit n'est disponible. La démarche à adopter, dans ce cas, sera identique à celle de Salas [40], à savoir prendre comme modèles ceux de Gottlieb *et al.* [15, 16] et Igra *et al.* [19, 21] construits pour des changements continus de section transversale du conduit.

Pour mettre en évidence l'évolution de l'interaction choc droit/détente-variation de section jusqu'à l'établissement du régime quasi-stationnaire, une fois les phénomènes transitoires complètement atténués, l'analyse de l'écoulement instationnaire s'impose. Le modèle de base est donné par le système d'équations quasi-1D (1.1) dans lequel la pression d'interface solide-fluide P_I est prise égale à la pression thermodynamique p .

En plus de la méthode des caractéristiques utilisée dans les premiers travaux [17, 37, 43] pour n'en citer que quelques uns, d'autres méthodes numériques ont été développées en utilisant les différences finies, les volumes et les éléments finis.

Greatrix *et al.* [13], Gottlieb *et al.* [15, 16] et Igra *et al.* [19, 21] ont utilisé le schéma numérique RCM (Random Choice Method) développée par Glimm [12] pour simuler les évolutions des interactions choc droit/détente-zone de transition afin de vérifier les différentes configurations d'ondes obtenues

par la méthode analytique basée sur la théorie de l'écoulement stationnaire. Heuydong *et al.* [18] ont utilisé le schéma PLM (Piecewise Linear Method) dû à Van Leer [47] pour simuler le passage d'une détente au travers d'une réduction linéaire de section droite du conduit. Igra *et al.* [22] ont appliqué le schéma GRP (Generalized Riemann Problem) [5] aux équations d'Euler quasi-1D pour simuler les écoulements instationnaires produits par les interactions choc droit/détente-variation continue de section transversale du conduit. Le but de leur travail était de montrer que l'écoulement à caractère 2D ne peut être traité par un modèle 1D.

Dans les études sus citées, en vue de préparer le Système (1.1) à l'application des schémas numériques évoqués, ce dernier est réécrit sous la forme conservative avec termes sources, i.e. :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u^2 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)u}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} (\rho E + p)u \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le terme $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$ apparaissant dans les membres de droite des équations du Système (2.1) est défini à partir de la donnée de $S(x)$.

Deux types de variation continue de section du conduit ont été considérés. Dans le premier type [18, 22] la variation est linéaire et sa dérivée est constante,

$$S(x) = S_0 + \left(S_1 - S_0 \right) \frac{x - x_0}{l} \quad (2.2)$$

avec $l = x_1 - x_0$ la longueur de la zone de transition, S_0 et S_1 ses sections d'entrée et de sortie, x_0 et x_1 leurs positions respectives suivant x .

Dans le second type [13, 15, 16, 19, 21, 22], les variations de section et de sa dérivée sont prises toutes deux continues,

$$S(x) = S_0 \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_1}{S_0} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(x - x_0)}{l} \right) \right) \right] \quad (2.3)$$

Pour simuler les interactions des chocs avec des variations brusques de section, Salas [40] a opté

pour l'expression $S(x)$ suivante :

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(S_0 + S_1 \right) - \frac{1}{2} \left(S_0 - S_1 \right) \tanh \left(\sigma(x - x_0) \right) \quad (2.4)$$

qui est continue mais pour les grandes valeurs du paramètre σ ($\sigma \geq 10$) produit des variations pratiquement brusques. La transition de S_0 vers S_1 est centrée en $x = x_0$.

Les résultats de simulation de l'écoulement instationnaire [13, 15, 16, 19, 21, 40] sont en bon accord avec les modèles théoriques stationnaires proposés dans ces études.

LeFloch *et al.* [28] ont considéré le problème de Riemann pour le système (1.1) avec $P_I = p$ décrivant l'évolution d'un fluide isotherme au travers d'une discontinuité géométrique dans la section du conduit, l'équation de l'énergie ayant disparue automatiquement du système. En considérant la section du conduit comme une inconnue supplémentaire, ils ont étudié les propriétés du système résultant et déterminé toutes les combinaisons d'ondes possibles autour de l'onde stationnaire correspondant à la discontinuité géométrique. Ils ont ensuite construit les solutions du problème de Riemann pour différentes conditions initiales.

Andrianov *et al.*, dont l'article [3] fut publié un peu plus tard que celui de Lefloch *et al.* [28], ont considéré le problème de Riemann pour le système (1.1) avec $P_I = p$ et la section du conduit comme inconnue. Ils ont discuté ses propriétés en se basant sur le fait que le modèle (1.1) gouvernant les écoulements compressibles dans les conduites à sections variables pourrait être déduit du modèle de Baer-Nunziato des écoulements diphasiques à phases compressibles [4]. Leurs résultats montrent que pour certaines conditions la solution n'est pas unique. La solution non physique est déduite d'une comparaison avec la solution 2D moyennée par section fournie par un outil de simulation 2D. Ils ont remarqué que la solution physiquement pertinente satisfait le critère du minimum de la production d'entropie. Leur méthode numérique est du type Godunov et est basée sur la solution exacte du problème de Riemann. Le terme source agit uniquement au niveau de l'onde stationnaire correspondante à la discontinuité géométrique. Le problème de Riemann est à quatre ondes au niveau de la discontinuité géométrique et à trois ondes partout ailleurs.

Kröner *et al.* [26] ont considéré aussi le système (1.1) avec $P_I = p$ et la section du conduit comme

inconnue et introduit la notion d'état d'équilibre. En considérant que l'entropie *thermodynamique* se conserve au travers de l'onde stationnaire (au niveau de la discontinuité géométrique), l'état d'équilibre correspond à la solution obtenue par les relations de passage au travers de cette onde en donnant les états de part ou d'autre de cette dernière. L'étude de l'existence de la solution du système évoqué ci-dessus les a amenés à adopter un critère d'admissibilité pour le choix de la solution à travers l'onde stationnaire. Le schéma numérique qui est capable de produire l'état d'équilibre est basé sur une modification du schéma de Lax-Friedrichs et semble converger plus rapidement que le schéma original.

Cependant, comme il a été remarqué en introduction, les résultats de calcul montrent que les modèles (1.1 et 2.1) qui sont utilisés dans les travaux [3, 26, 28, 40] pour simuler les écoulements transitoires générés par les différentes interactions ne prennent pas en compte la formation de tourbillons au niveau des discontinuités géométriques, objectif principal de cette présente étude.

2.2 Structures résultantes de l'interaction choc droit/détente-zone de transition

2.2.1 Interaction choc droit-zone de transition

Un choc droit, se propageant dans un milieu gazeux initialement au repos dans un conduit, produit un écoulement dans le sens de sa propagation. Les perturbations transmises résultantes de l'interaction de ce dernier avec un changement de section transversale du conduit se déplacent toujours en aval relativement au gaz et peuvent rattraper le choc transmis et modifier sa structure et son intensité. Les perturbations réfléchies, quant à elles, se meuvent toujours en amont par rapport au gaz. Si leur vitesse d'onde est supérieure à la vitesse locale de l'écoulement (qui a lieu dans le sens opposé), celles-ci remontent l'écoulement et se rejoignent pour former un choc droit dans le cas d'une réduction de section ou se dispersent pour former un faisceau d'ondes de détente dans le cas d'un élargissement. Par contre, si la vitesse locale de l'écoulement dépasse la vitesse des perturbations celles-ci sont entraînées en aval. Elles peuvent se stabiliser dans la zone de transition pour y former un choc droit stationnaire ou se mouvoir hors de cette zone, puis converger et former un choc droit dans le cas d'un élargissement ou se disperser et former un faisceau d'ondes de détente

dans le cas d'une contraction. Toutes les ondes formées par la convergence ou la dispersion des perturbations réfléchies font face à l'amont de l'écoulement.

En plus de ces différentes ondes, une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse de l'écoulement se forme toujours entre le choc transmis et le reste de la configuration d'ondes générée par l'interaction avec la zone de transition. Elle produit une discontinuité de densité, de température et d'entropie *thermodynamique*. La pression et la vitesse de l'écoulement, quant à elles, restent continues à travers celle-ci.

Entre les configurations extrêmes pour chaque type de changement de section d'autres structures d'ondes sont susceptibles de se produire en fonction du rapport des sections en amont et en aval de la transition et de la force du choc incident.

1. Cas d'une contraction

Quatre configurations d'ondes, au total, sont envisageables dans ce cas [7, 13, 33, 40]. En plus des deux configurations extrêmes citées ci-dessus, l'écoulement subsonique produit derrière le choc réfléchi ou derrière le choc stationnaire positionné dans la zone de transition ne peut être accéléré au delà de la vitesse sonique à la sortie du convergent. Pour accélérer l'écoulement d'avantage, dans le cas de chocs incidents de plus fortes intensités, un faisceau d'ondes de détente faisant face à l'amont se développe en aval de la transition. Le front de cette détente sera positionné juste à la sortie du convergent.

2. Cas d'un élargissement

Cinq configurations d'ondes, en tout, sont susceptibles de se produire dans ce cas [7, 13, 33, 40]. Partons de la configuration avec un faisceau d'ondes de détente réfléchi, faisant face vers l'amont, produit par un choc incident faible. La détente accélère l'écoulement subsonique avant son entrée dans le divergent. Une augmentation de l'intensité du choc incident impliquera un ralentissement de la propagation de la détente réfléchie (la vitesse caractéristique de l'onde $u - c$, où u est la vitesse de l'écoulement et c la vitesse du son, devient de plus en plus faible). L'onde de queue peut devenir stationnaire juste à l'entrée du divergent. Dans ce cas l'écoulement devient sonique à l'entrée et supersonique dans le divergent. Un choc droit,

faisant face vers l'amont, se positionnera dans le divergent (choc stationnaire) ou se propagera en aval de celui-ci selon le rapport des sections extrêmes de la transition. Si l'écoulement derrière le choc incident devient supersonique la détente disparaît et nous retrouvons les deux cas comportant un choc droit stationnaire dans le divergent ou un choc droit se propageant en aval derrière le choc transmis.

2.2.2 Interaction détente-zone de transition

Une détente, se propageant dans un milieu gazeux initialement au repos dans un conduit, produit un écoulement dans le sens opposé à celui de sa propagation. Son interaction avec un changement de la section transversale du conduit produit une détente transmise, un choc droit réfléchi si la transition est un élargissement ou une détente réfléchie dans le cas d'une réduction et éventuellement d'autres ondes. Les configurations d'ondes résultantes dépendent du type de transition, du rapport des sections extrêmes de celle-ci et de l'intensité de l'onde incidente (ou du rapport des pressions de part et d'autre de celle-ci). Il faut noter qu'un élargissement (respectivement une réduction) de section dans la direction de propagation d'une détente est une réduction (respectivement un élargissement) dans le sens du mouvement du gaz. Aussi, les chocs droits et les détentes réfléchis sont à face tournée vers l'aval de l'écoulement du gaz. Enfin, la présence de choc, comme dans le cas de l'interaction d'un choc droit avec une transition, entraîne la formation d'une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse de l'écoulement derrière ce dernier.

1. Cas d'un élargissement

Deux configurations d'ondes sont susceptibles de se produire dans ce cas [19,21]. La première correspond à une détente incidente faible produisant une détente transmise plus faible et un choc droit réfléchi se propageant, dans la partie étroite du conduit, dans la direction de l'écoulement suivi d'une discontinuité de contact, comme il a été mentionné auparavant.

Pour une détente incidente d'intensité suffisamment forte, pour produire dans son éventail un écoulement supersonique, la partie située entre son front, où le gaz n'est pas encore en mouvement, et le point à l'intérieur de son éventail, où le gaz a une vitesse sonique, devient une détente transmise. Cette première étape de l'interaction produit aussi un choc droit réfléchi

suivi d'une discontinuité de contact se propageant tous deux en aval de l'écoulement, comme dans le cas d'une détente incidente faible. Le reste de l'éventail, du point sonique jusqu'à la queue, où l'écoulement est supersonique, devient une détente réfléchie, faisant face vers l'amont. Son front se stabilisera juste à la sortie de la transition et le reste sera emporté en aval par l'écoulement. Les intensités des différentes ondes transmises et réfléchies dépendent du rapport des sections extrêmes de la zone de transition [19,21].

2. Cas d'une contraction

Quatre configurations d'ondes sont susceptibles de se produire dans ce cas et ceci en rapport avec l'intensité de la détente incidente et le rapport des sections extrêmes de la zone de transition [15,16]. Dans les quatre configurations deux détentes l'une transmise et l'autre réfléchie sont produites comme mentionné auparavant. Leurs intensités dépendent évidemment de celle de la détente incidente et du rapport des sections limites de la transition.

Pour une détente incidente faible la détente transmise, bien que plus forte, ne produit qu'un écoulement subsonique en amont du divergent (relativement au mouvement du gaz). La transition fonctionne en diffuseur subsonique et l'écoulement est partout isentropique. Ce qui correspond à la première configuration d'ondes.

La partie comprise entre le front et le point sonique de l'éventail d'une détente incidente assez forte, pour produire un écoulement supersonique derrière elle, traverse à elle seule la zone de transition produisant la détente transmise. Sa queue se stabilise juste à l'entrée du divergent (relativement au mouvement du gaz), là où l'écoulement devient sonique. La partie restante de l'onde incidente ne peut remonter l'écoulement dans le divergent. Cependant elle produit une dépression qui provoque l'accélération de l'écoulement, d'une vitesse sonique à des vitesses supersoniques, dans le divergent. Le divergent devient ainsi une tuyère supersonique. Suite au blocage, par l'écoulement, des ondes de compression qui se forment au niveau de la queue de l'onde incidente, en essayant de remonter la zone de transition, un choc droit stationnaire, faisant face vers l'amont (relativement au mouvement du gaz), se formera dans le divergent produisant un écoulement subsonique derrière lui. Son intensité et sa position dans le divergent dépendent de l'intensité de l'onde incidente et du rapport des sections. Durant la

formation du choc droit stationnaire une discontinuité de contact est produite dans la partie large du conduit et est entraînée à la vitesse de l'écoulement. C'est la deuxième configuration d'ondes résultante d'une interaction d'une détente avec une réduction de section.

Si on augmente d'avantage l'intensité de la détente incidente elle se divisera en trois parties. La première, de l'onde de tête au point sonique de son éventail, produit les détentes transmises et réfléchies. La partie centrale produit le choc droit faisant face vers l'amont et la discontinuité de contact. La dernière partie, en interagissant avec le choc droit, l'affaiblit. Ce dernier ne peut se maintenir dans le divergent. Il est entraîné en aval par l'écoulement. C'est la troisième configuration d'ondes résultant d'une interaction d'une détente avec une réduction de section.

Une augmentation supplémentaire de l'intensité de la détente incidente fait que le choc réfléchi s'affaiblit de plus en plus et se réduit graduellement à une onde de Mach pour disparaître avec la discontinuité de contact et laisser place à la formation et la propagation avec l'écoulement d'une faible onde de détente dont la face est tournée vers l'aval de ce dernier. Cette dernière configuration, qui se compose d'une détente transmise, dont la queue est stationnaire à l'entrée du divergent (relativement au mouvement du gaz) et de deux détentes réfléchies dont la première est à face amont et la seconde à face aval, met plus de temps pour se réaliser en comparaison avec les autres configurations [15, 16].

Cette étude bibliographique des travaux existants étant réalisée, nous nous intéressons maintenant à l'obtention de résultats expérimentaux permettant de valider l'outil de simulation 2D qui va être utilisé par la suite. Ce code de calcul servira à la production de solutions de référence permettant de vérifier la précision du modèle réduit qui est au centre de notre étude. Les résultats expérimentaux constituent donc une étape de validation et vérification dans notre démarche.

3. PRODUCTION DE DONNÉES DE RÉFÉRENCE

3.1 *Données de référence expérimentales*

3.1.1 *Installation expérimentale*

Les expériences ont été réalisées dans le tube à choc T80 de l'IUSTI à l'Université de Provence en France. Une représentation 3D du tube à choc et de ses accessoires est donnée par la Figure 3.1. La référence Jourdan *et al.* [24] donne un aperçu sur ses caractéristiques techniques et ses performances. Ce tube à choc, de longueur totale 3.75 m, possède une section carrée de 8 cm de côté. La partie HP (haute pression) a une longueur de 75 cm et celle de la basse pression BP possède une chambre de visualisation amovible de 98 cm de longueur, avec des parois latérales munies de hublots en plexiglas transparent, de 80 cm de longueur sur toute la hauteur du tube.

Une barre en plexiglas de 1 m de longueur, 8 cm de largeur et 4 cm de hauteur a été fixée à l'intérieur du tube, sur sa paroi inférieure, créant ainsi une contraction puis un élargissement brusque de la section du tube à 70 cm du fond de la chambre BP, comme le montrent les Figures 3.1 et 3.2. La marche ainsi obtenue a été optimisée en longueur et en forme pour retarder au maximum l'arrivée sur sa face descendante des perturbations créées au niveau de la face ascendante. En effet, les perturbations créées durant l'interaction avec la marche ascendante seront transportées à la vitesse de l'écoulement, très lentement par rapport à la propagation du choc qui, passant par la marche descendante, produit l'interaction visée par l'expérience.

La section transparente du tube à choc permet de produire des clichés ombroscopiques des phénomènes étudiés à l'aide d'une caméra rapide. Le tube a été équipé aussi de capteurs de pression (PCB SM113A26) localisés aux positions P_7 , P_6 , P_5 et P_4 comme le montre la figure 3.2. Ces jauges ont un temps de réponse inférieur à la microseconde et sont disposées à 263 cm, 297 cm, 308 cm et 319 cm respectivement du fond de la chambre HP. Une jauge supplémentaire P_M a été fixée au centre de la face de la marche descendante (à 305 cm du fond de la chambre HP). Les enregistrements sont initiés par la jauge P_7 au moment où le choc incident l'atteint.

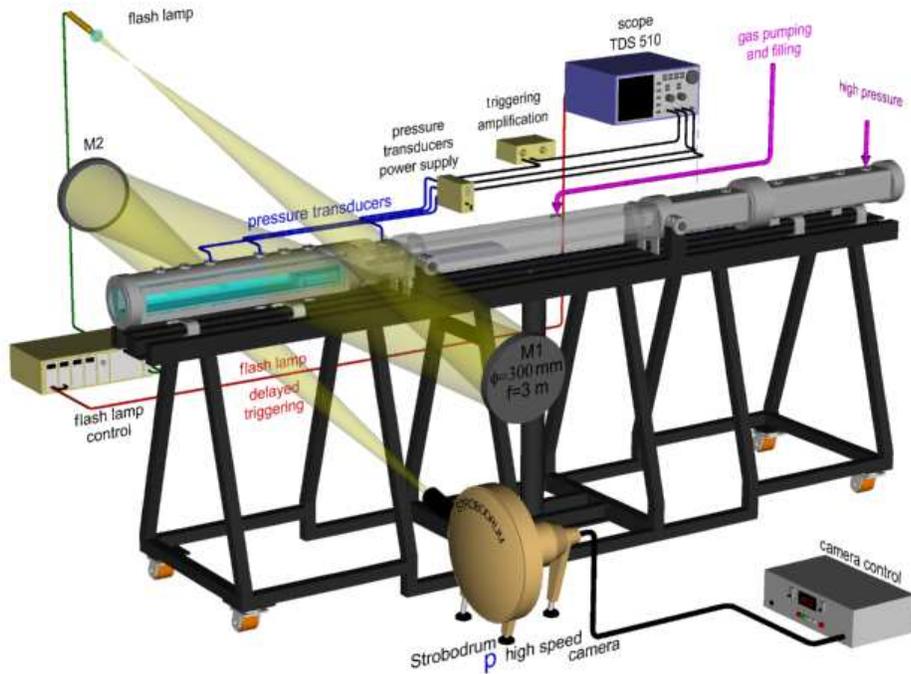


Fig. 3.1: Représentation 3D du tube à choc T80 et de ses accessoires.

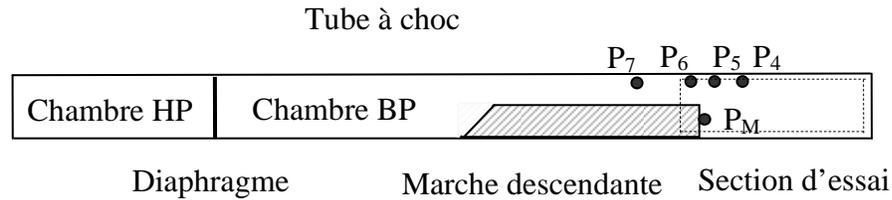


Fig. 3.2: Positions des capteurs de pression dans le tube à choc

3.1.2 Enregistrements expérimentaux

Des clichés numérotés de 14 à 23, faisant partie d'une série de 75 au total, sont montrés sur la colonne de gauche de la Figure 3.3. Ils correspondent à l'interaction choc-marche descendante pour un nombre de Mach du choc incident de 1.27, la marche descendante formant un élargissement brusque. L'air dans la section d'essai est initialement au repos, à la pression ambiante et à la température de 293K. Ces clichés montrent clairement la propagation du choc, sa transmission-diffraction, la formation du vortex de coin, divers réflexions de chocs obliques sur les parois inférieure et supérieure et leurs interactions avec le vortex. Deux clichés consécutifs correspondent à des flashes stroboscopiques consécutifs d'une période de $70 \mu s$. La première image correspond au 14^{ième} flash.

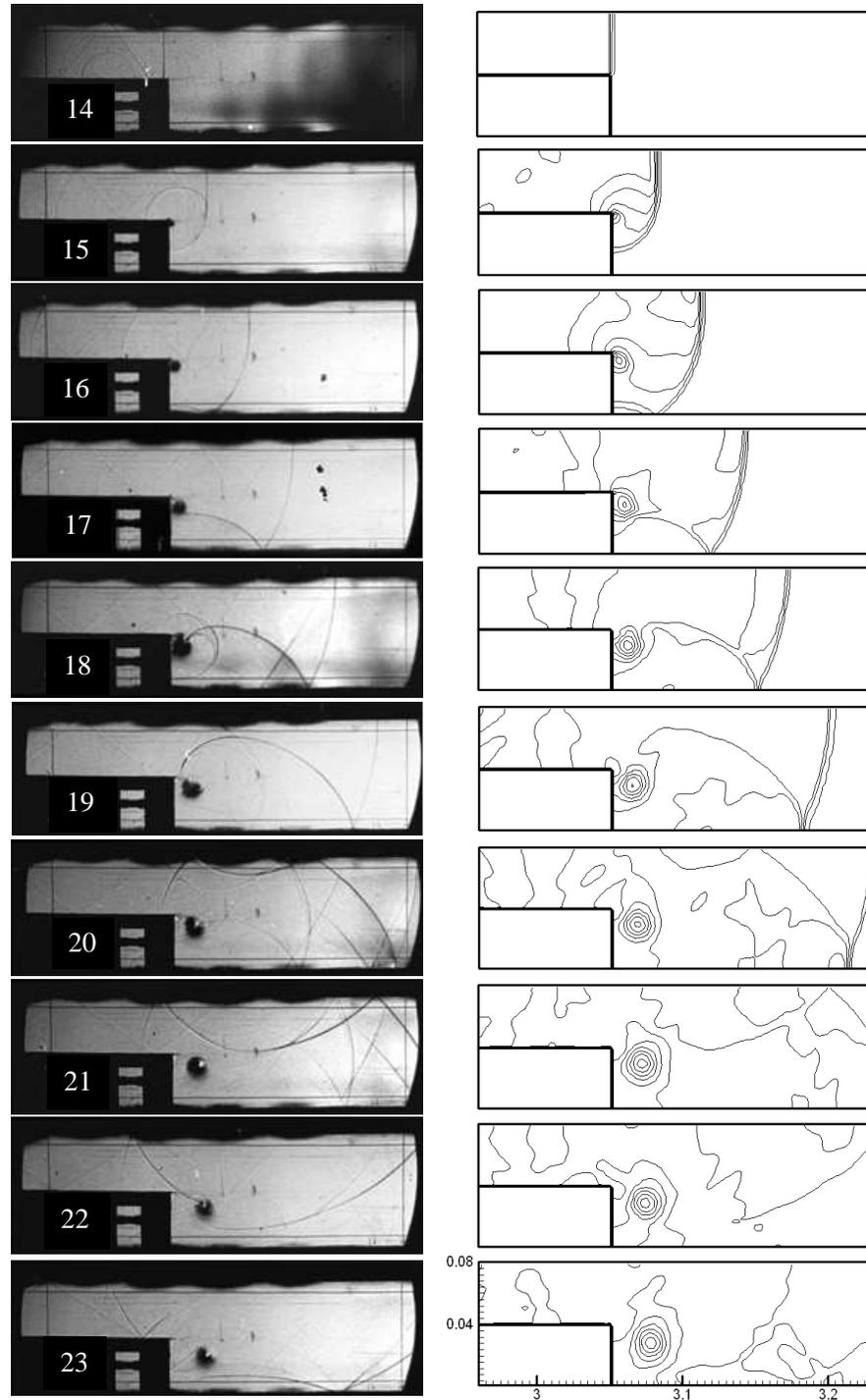


Fig. 3.3: Interaction choc-marche descendante pour un nombre de Mach du choc incident de 1.27. Sur la colonne de gauche, les clichés ombroscopiques expérimentaux obtenus lors de l'essai avec le tube à choc, correspondant à un Mach du choc incident de 1.27, sont montrés chaque $70 \mu s$. Sur la colonne de droite, des iso-contours de densité sont montrés aux mêmes instants que ceux de la colonne de gauche. Ces iso-contours ont été obtenus en résolvant les équations d'Euler bidimensionnelles. Une concordance très acceptable est observée. Les résultats 2D sont moyennés par section et utilisés comme résultats de référence pour les modèles réduits 1D.

L'onde de choc se propageant de gauche à droite a parcouru la distance du capteur P_7 jusqu'à la position indiquée sur le cliché 14 en $980 \mu s$. Sur le cliché suivant, on observe la formation du tourbillon de coin et le choc transmis arrive juste à la position du capteur de pression P_5 sur la paroi supérieure du tube tandis que sa partie diffractée se propageant le long de la face de la marche descendante atteint juste le capteur P_M . L'onde courbée se propageant en amont correspond à une onde de détente. Sur le cliché 16, le choc transmis atteint tout juste la paroi inférieure du tube et sa réflexion est visible sur le cliché 17. Cette propagation bidimensionnelle continue sur les clichés 18 et 19. Sur le cliché 18, le choc réfléchi interagit avec le tourbillon de coin qui s'est déplacé maintenant légèrement vers la droite. Ce dernier est bien détaché du coin sur le cliché 19. Une seconde réflexion se produit à partir de la paroi supérieure du tube, comme le montre le cliché 20. À ce moment, le choc transmis a atteint le fil de pêche fixé sur la partie droite du domaine. Ce dernier forme avec trois autres fils un repère fixe qu'on peut distinguer sur tous les clichés. Le choc transmis ne sera plus visible sur le reste des clichés. Le choc transversal réfléchi continue sa propagation. Il se divise en deux parties suite à son interaction avec le vortex qui se produit sur le cliché 22. Le même fractionnement a été évoquée dans plusieurs études dont [1, 2, 23].

En plus des clichés ombroscopiques, des signaux de pression ont été enregistrés au cours de l'expérience, comme le montre la Figure 3.4. Les quatre signaux associés aux jauges de pression P_7 , P_6 , P_M et P_5 sont présentés ensemble sur ce graphe, chaque signal étant arbitrairement décalé d'une *atm* de l'autre. Ces enregistrements sont présentés séparément sur la Figure 3.5 pour faciliter la comparaison avec les résultats de simulation 2D. Sur cette dernière figure, l'intervalle de temps est limité entre le moment où le choc incident atteint la jauge P_7 et celui où le choc réfléchi par le fond du tube atteint la jauge P_5 . Notre intérêt est, en effet, axé uniquement sur la structure de l'écoulement qui se développe autour de la marche descendante en raison de son interaction avec le choc incident. Il correspond à une durée d'environ $3.7 ms$. La série de clichés de la Figure 3.3 correspond seulement à $0.63 ms$ et relate les premiers instants de l'interaction.

Les signaux de la pression des Figures 3.4 et 3.5 sont très caractéristiques. Les temps de propagation du choc enregistré optiquement sur la Figure 3.3 et mesuré sur les Figures 3.4 et 3.5 sont en très bon accord, sauf en ce qui concerne l'enregistrement de la jauge P_M . Comme le montre le

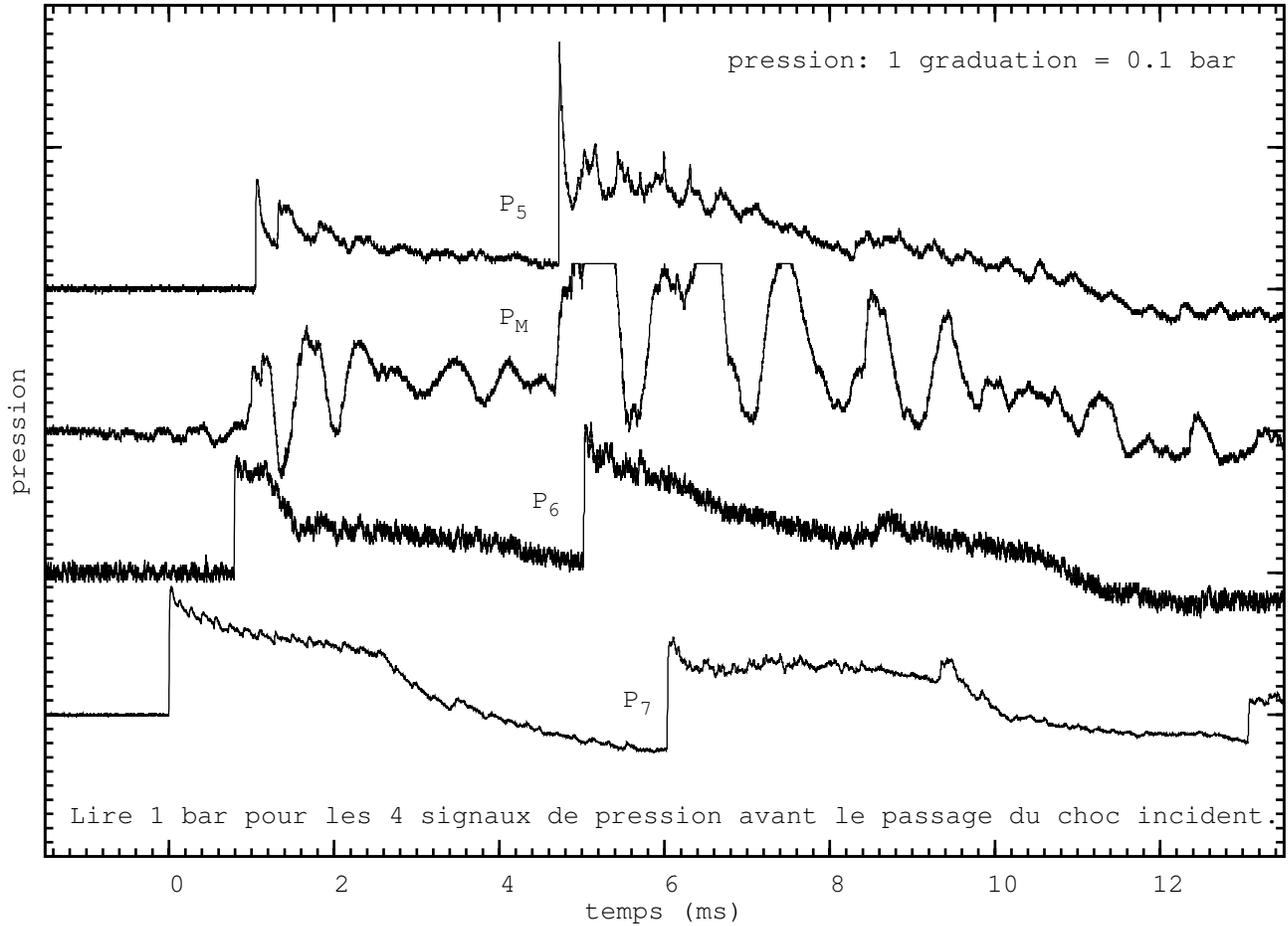


Fig. 3.4: Signaux de pression expérimentaux de l'essai à $M_{CI} = 1.27$. Quatre enregistrements de pression sont montrés à diverses positions données sur la Figure 3.2. Chaque signal est décalé arbitrairement de l'autre d'une différence de pression d'une *atm*. Ces signaux sont présentés séparément dans la Figure 3.5, où une comparaison, avec les résultats numériques obtenus à partir des équations d'Euler 2D, est effectuée.

cliché 15 de la Figure 3.3, le choc transmis atteint les jauges P_M et P₅ simultanément, alors que sur les Figures 3.4 et 3.5, le signal de P_M monte en pression tôt et présente, en outre, des fluctuations avant l'arrivée même du choc. Nous soupçonnons que ces anomalies sont dues à des ondes acoustiques transmises par le plexiglas de la marche. Par conséquent, les fluctuations visibles dans l'enregistrement expérimental de la jauge P_M sur les Figures 3.4 et 3.5 sont probablement excessives.

La montée en pression des jauges P₇ et P₆ jusqu'à 1.7 *atm* caractérise le choc incident. Ce saut est en accord avec les relations du choc basées sur l'enregistrement de la vitesse du choc entre ces

deux jauges. La jauge de pression P_5 enregistre approximativement le même saut, étant fixée à la paroi supérieure, dans une région où les effets de l'expansion en raison de la marche descendante sont faibles. Ceci est en accord avec Sloan *et al.* [44] qui ont enregistré une diminution du saut de pression pour les fronts de choc fortement incurvés.

L'onde de détente réfléchie qui apparaît au cours de la diffraction du choc se propage en amont de l'écoulement. La chute de pression associée à cette détente est visible sur les enregistrements des jauges P_7 et P_6 . Elle arrive aux positions des jauges avec des intervalles de temps de 2,6 ms et 0,6 ms respectivement par rapport au passage du choc incident. Une deuxième chute de pression est également visible sur l'enregistrement de la jauge de pression P_7 , après passage de l'onde de détente réfléchie. Cette dernière chute est associée à l'onde de détente principale réfléchie sur le fond de la chambre HP.

Une dernière remarque est liée aux variations de pression qui surviennent après le passage du choc, comme le montre le graphe correspondant à la jauge de pression P_5 sur la Figure 3.5. Des oscillations de pression périodiques sont clairement visibles. Ces oscillations sont dues aux divers chocs et réflexions acoustiques transverses entre les parois inférieures et supérieures du tube.

Ces différents enregistrements et phénomènes observés seront utiles pour les comparaisons avec les différents modèles, 2D et 1D. Le modèle 2D est très classique et sera uniquement utilisé pour obtenir des résultats de référence. Les principales caractéristiques du code de simulation 2D sont résumées dans la section suivante.

3.2 *Données de référence numériques*

3.2.1 *Méthode numérique de simulation 2D*

Le code de simulation est basé sur les équations d'Euler 2D, gouvernant les écoulements instationnaires des fluides compressibles, exprimées en coordonnées Cartésiennes. La présence de chocs requiert la formulation conservative des équations :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \text{ et } G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}$$

où $E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}$ représente l'énergie totale spécifique, ε l'énergie interne spécifique, ρ la densité, u et v les composantes de la vitesse du fluide. La pression est donnée par l'équation d'état des gaz parfaits, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ où γ représente le rapport des chaleurs spécifiques.

L'approximation numérique est basée sur la formulation en volumes finis de la méthode Godunov sur un maillage Cartésien structuré. Les flux sont calculés avec un solveur de Riemann exact. Une montée en ordre est obtenue à l'aide de l'algorithme de MUSCL-Hancock [47]. Les limiteurs de pente Van Albada *et al.* [46] et Superbee de Roe [35] sont utilisés pour maintenir la monotonie de la solution. Les détails des divers ingrédients de construction du code sont donnés dans [45].

3.2.2 Résultats numériques 2D

Les résultats numériques de la Figure 3.3 sont obtenus avec cette méthode. Le domaine de calcul correspond au tube à choc entier présenté sur la Figure 3.2. La résolution utilise 1491×40 cellules. Le limiteur de pente Superbee est utilisé. Comme tout le tube à choc est considéré, uniquement des conditions de réflexion sont utilisées sur les limites du domaine.

Comme indiqué précédemment, des évolutions temporelles des contours de la densité sont illustrées sur la Figure 3.3 et comparées avec les clichés ombroscopiques. Le choc a atteint la marche descendante en un temps calculé de 5.45 ms à partir de la rupture du diaphragme. Ceci s'accorde parfaitement avec les enregistrements expérimentaux. Lorsque le choc rentre dans la chambre de visualisation, la propagation du choc transmis, la formation du vortex, la trajectoire et dynamique du choc ainsi que ses diverses interactions sur les parois inférieure et supérieure sont bien prédites. Des comparaisons quantitatives des signaux de pression sont également montrées sur la Figure 3.5. En dehors de l'artéfact enregistré par la jauge de pression P_M en raison de la transmission acoustique dans le plexiglas et la déviation de la pression de la jauge P_7 due au type de capteur PCB les

résultats sont en bon accord. Les sauts de pression sont bien prédits ainsi que la chronologie des différents événements.

Le saut de pression calculé pour la jauge P_M atteint environ $1,38 \text{ atm}$ en deux temps. La première montée est due à la propagation du choc diffracté et la seconde à sa réflexion sur la paroi inférieure du tube. Ce fractionnement de la montée en pression, difficilement visible sur l'enregistrement expérimental du capteur P_M , est en accord avec le chronométrage de la propagation du choc enregistré optiquement sur les clichés 15, 16 et 17 de la Figure 3.3. La pression calculée montre aussi une chute de la pression durant quelques centaines de microsecondes après un maintien de pression à $1,38 \text{ atm}$. En effet, le choc réfléchi par la paroi inférieure du tube en interagissant avec le vortex agrandit la zone de basse pression où l'énergie interne est convertie en énergie cinétique. Lorsque la zone de vortex interagit avec la position de la jauge de pression, une diminution de la pression est enregistrée. Cette dépression est présente jusqu'au moment où le tourbillon, convecté par l'écoulement vers l'aval, s'éloigne du capteur.

Pour résumer, les résultats expérimentaux et de calcul 2D montrent clairement qu'un vortex à grande échelle est produit au niveau de la marche descendante. Ce vortex est ensuite convecté vers l'aval avec l'écoulement principal. Le modèle unidimensionnel qui est le but de cette étude aura à modéliser la production de cette turbulence ainsi que son transport. La construction du modèle d'écoulement capable de transporter l'énergie turbulente et la modélisation de la production sont abordées dans le chapitre suivant.

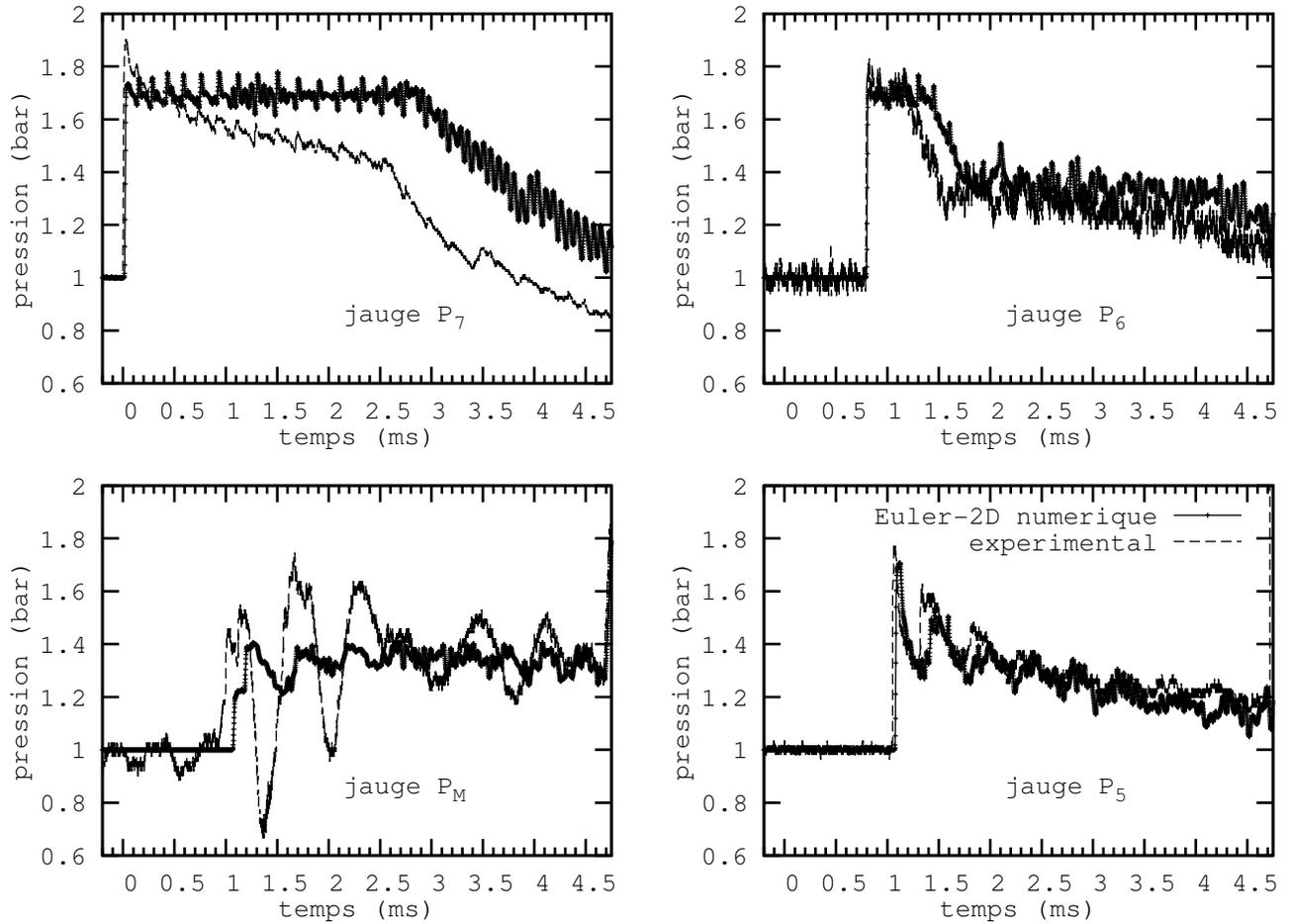


Fig. 3.5: Comparaison des signaux de pression expérimentaux et numériques obtenus pour l'interaction choc-marche descendante à un nombre de Mach $M_{CI} = 1.27$. Les résultats 2D obtenus à partir des équations d'Euler sont comparés aux enregistrements en 4 emplacements caractéristiques où sont fixées les jauges de pression. L'accord est très bon pour tous les enregistrements sauf celui correspondant au capteur P_7 . Ceci n'est pas du à des imprécisions dans les calculs mais est plutôt liée à la jauge de pression qui présente une "déviation électronique" lors d'enregistrement de pressions constantes. Ce comportement est bien connu pour les jauges type PCB et peut être corrigé avec des jauges de type ENDEVCO.

4. CONSTRUCTION DU MODÈLE TURBULENT

Les observations expérimentales et numériques précédentes ont montré que la création de la turbulence est une conséquence des singularités géométriques. Notre but maintenant est de construire un modèle monodimensionnel, sans viscosité, qui prend en compte la pression et l'énergie turbulentes avec une fermeture thermodynamique cohérente. La méthode de modélisation est conventionnelle par rapport aux différentes étapes de moyenne et moins conventionnelle par rapport à la fermeture thermodynamique.

Le modèle recherché ici diffère du modèle classique d'Euler 1D pour les écoulements dans les conduites à sections variables. Nous partons, dans notre approche, du système d'Euler 2D. Le modèle turbulent qui en résulte, bien que monodimensionnel, tient compte des fluctuations dans les deux dimensions, celle de l'écoulement et celle de la dimension perpendiculaire. Le modèle classique Euler 1D à sections variables ne considère aucune fluctuation, seules les grandeurs moyennes de l'écoulement dans la direction longitudinale sont déterminées.

4.1 Modèle de transport de la turbulence

Les décompositions et moyennes de Reynolds et Favre sont appliquées aux équations d'Euler 2D. La densité est exprimée par $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ où $\bar{\rho}$ est la moyenne de Reynolds de la densité et ρ' sa fluctuation avec $\bar{\rho}' = 0$. Pour toute autre variable α la décomposition de Favre donne $\alpha = \tilde{\alpha} + \alpha''$ où $\tilde{\alpha}$ représente la moyenne pondérée ou moyenne de Favre définie par $\tilde{\alpha} = \frac{\bar{\rho}\alpha}{\bar{\rho}}$ et α'' sa fluctuation avec $\tilde{\alpha}'' = \frac{\bar{\rho}\alpha''}{\bar{\rho}} = 0$. Les deux identités qui suivent sont appliquées tout au long de la dérivation : $\forall \alpha, \beta \quad \widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \widetilde{\alpha''\beta''}$ et $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$.

Suite à ces relations, les équations d'Euler 2D moyennées deviennent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{\rho}\widetilde{u''^2} + \bar{p})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{\rho}\widetilde{v''^2} + \bar{p})}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{\rho}\widetilde{u''^2} + \bar{p})\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{\rho}\widetilde{v''^2} + \bar{p})\tilde{v}}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $\tilde{E} = \tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} + \frac{\widetilde{u''^2} + \widetilde{v''^2}}{2}$ et la pression moyennée est exprimée par : $\bar{p} = (\gamma - 1)\bar{\rho}\tilde{\varepsilon}$.

Les produits des fluctuations de la vitesse tels que $\widetilde{u''v''}$ ont été supprimés des équations en considérant que les tourbillons sont symétriques, ce qui équivaut à considérer la turbulence isotrope .

Nous cherchons un modèle d'écoulement unidimensionnel, l'écoulement principal dans le tube à choc étant en effet 1D, mais contenant des tourbillons multi-D. Par conséquent, le système (4.1) devient (les symboles de moyenne ont été supprimés par souci de clarté) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + K + p)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + K + p)u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

où la pression turbulente K est définie par $K = \bar{\rho}\widetilde{u''^2} = \bar{\rho}\widetilde{v''^2}$ et l'énergie totale donnée par $E = \varepsilon + \frac{n}{2} \frac{K}{\rho} + \frac{u^2}{2}$. Le nombre de dimensions de l'écoulement dans lequel les tourbillons se développent est représenté par le paramètre n . Habituellement $n = 3$, mais la configuration actuelle de l'écoulement correspondant à un tube à choc de section carrée, les tourbillons se développent en 2D seulement. Ainsi $n = 2$ dans la présente étude.

Une équation d'évolution supplémentaire est nécessaire pour fermer le système, en particulier pour exprimer la pression turbulente K . En l'absence de chocs ou de dissipation, l'entropie thermodynamique doit être constante le long des trajectoires. En imposant cette contrainte dans (4.2), nous obtenons pour la pression turbulente l'équation suivante :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial x} + K \left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

D'après Saurel *et al.* [41] une entropie turbulente s_t peut être définie, obéissant à l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial \rho s_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho s_t u}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

L'entropie, l'énergie et la pression turbulentes sont reliées par une équation d'état *turbulente*. En définissant l'énergie cinétique turbulente $e_t = \frac{nK}{2\rho}$ et la pression turbulente $P_t = K$, une équation d'état apparaît : $P_t = (\gamma_t - 1)\rho e_t$, avec un *exposant polytropique turbulent* $\gamma_t = \frac{n+2}{n}$.

L'entropie turbulente est liée à l'énergie turbulente par la relation, analogue de l'équation d'État des gaz parfaits, suivante : $e_t = \frac{1}{\gamma_t - 1} \rho^{\gamma_t - 1} \exp\left(\frac{s_t}{C_{vt}}\right)$, où $C_{vt} = \frac{R}{\gamma_t - 1}$ est la *chaleur spécifique turbulente* et R la constante des gaz. Une *température turbulente* peut aussi être définie : $T_t = \frac{e_t}{C_{vt}}$.

Il est important de mentionner que l'équation d'évolution de la pression turbulente (4.3) peut s'obtenir facilement de l'équation d'entropie turbulente (4.4) avec les précédentes définitions de la *thermodynamique turbulente*. En particulier, l'équation de la pression turbulente est *indépendante* du choix de la *chaleur spécifique turbulente* (C_{vt}).

Avec ces définitions le modèle de transport de la turbulence (la production turbulente n'est pas considérée pour le moment) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + P)u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho s_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho s_t u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec

$E = e + \frac{u^2}{2}$, $e = \varepsilon + e_t$ où $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} \exp\left(\frac{s_g}{C_v}\right)$ et $e_t = \frac{1}{\gamma_t - 1} \rho^{\gamma_t - 1} \exp\left(\frac{s_t}{C_{vt}}\right)$. s_g représente l'entropie thermodynamique du gaz. La pression *totale* P sera la somme de la pression thermodynamique p et de la pression turbulente P_t , soit $P = p + P_t$ avec $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ et $P_t = (\gamma_t - 1)\rho e_t$.

Ce modèle d'écoulement est hyperbolique avec les vitesses d'ondes u , $u + C$ et $u - C$ où la vitesse du son est définie par :

$$C^2 = c^2 + c_t^2 \quad (4.6)$$

avec $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ et $c_t^2 = \gamma_t \frac{P_t}{\rho}$.

En présence de variations singulières de la section transversale, la production de la turbulence doit être modélisée. C'est le but de la section suivante.

4.2 Production de la turbulence

4.2.1 Préliminaire

Dans les conduits à section transversale variable le Système (4.5) devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P) S}{\partial x} &= P_I \frac{\partial S}{\partial x} \\
 \frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + P) u S}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho s_t S}{\partial t} + \frac{\partial \rho s_t u S}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où S représente la section transversale.

La méthode d'obtention du système de transport de la turbulence dans les conduits à sections variables (4.7) est détaillée dans l'annexe B.

Dans ce système, la pression d'interface P_I est une inconnue. Des estimations admissibles peuvent être déterminées par l'analyse suivante.

Examinons l'équation d'entropie associée au système (4.7). La combinaison des équations de bilan de masse, de l'impulsion et de l'énergie conduit à :

$$\frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx}$$

En utilisant les définitions de l'énergie $e = \varepsilon + e_t$ et de la pression $P = p + P_t$ nous obtenons avec l'aide des deux identités de Gibbs ($d\varepsilon = T ds_g + \frac{p}{\rho^2} d\rho$, $de_t = T_t ds_t + \frac{P_t}{\rho^2} d\rho$) :

$$T \frac{ds_g}{dt} + T_t \frac{ds_t}{dt} = \frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx}$$

En absence de chocs, ce système doit prédire des évolutions isentropiques. Donc nous posons :

$$\frac{ds_g}{dt} = 0.$$

Cela signifie que toute la production d'entropie est stockée sous forme de turbulence. Cette idée a été

proposée par Saurel *et al.* [42] dans le contexte de l'interaction choc-bulle de gaz. Par conséquent :

$$T_t \frac{ds_t}{dt} = \frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} \quad (4.8)$$

La signification physique de cette hypothèse est que lorsque la turbulence est créée, toute l'énergie correspondante est stockée dans de grandes structures et qu'aucune dissipation ne se produit à ce stade. La dissipation se produit plus tard après suffisamment de temps, quand les grandes structures sont détruites, leur énergie étant transférée lentement vers l'énergie interne.

Finalement le transport et la production de la turbulence dans les conduits présentant des discontinuités dans la section transversale sont gouvernés par le Système (4.7) dont la dernière équation est remplacée par l'équation de production de la turbulence (4.8).

La production turbulente dans la présente approche est liée uniquement à la modélisation de la pression d'interface P_I . Sa modélisation doit concorder avec les principes suivants :

- le terme de création dans (4.8) doit s'annuler pour les conduits assez réguliers,
- le terme de production doit être positif, afin de satisfaire l'inégalité d'entropie.

4.2.2 Modèles admissibles pour la pression d'interface P_I

Deux modèles admissibles au moins concordent avec ces principes.

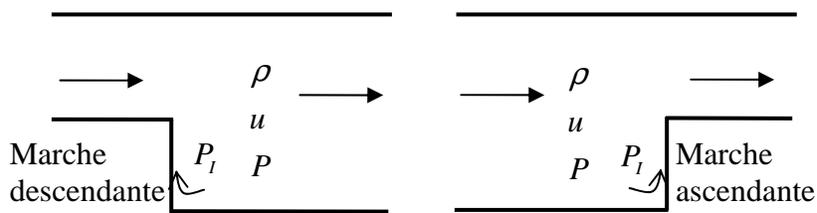


Fig. 4.1: Représentation schématique de l'écoulement au niveau d'une marche. La pression de paroi est sujette, dans le cas d'une marche descendante (schéma de gauche) à l'effet d'aspiration qui peut être modélisé par la relation caractéristique $P_I = P - \rho C u$. Dans la situation opposée (schéma de droite) avec une marche ascendante, la pression de paroi est sujette à un effet de compression qui peut être modélisé par la relation caractéristique $P_I = P + \rho C u$.

4.2.2.1 Modèle du problème de Riemann local

Considérons les configurations de la Figure 4.1. Dans le cas de la marche descendante, la pression d'interface est donnée par la relation caractéristique : $P_I = P - \rho C u$.

L'équation de l'entropie devient :

$$\frac{ds_t}{dt} = \frac{Cu^2}{T_t S} \frac{dS}{dx}$$

Comme $\frac{dS}{dx}$ est positif dans cette situation, la production d'entropie est nécessairement positive.

Dans la seconde situation, avec une marche ascendante, la pression d'interface est donnée par la relation caractéristique : $P_I = P + \rho C u$

et l'équation de l'entropie devient maintenant :

$$\frac{ds_t}{dt} = -\frac{Cu^2}{T_t S} \frac{dS}{dx}$$

Comme $\frac{dS}{dx}$ est négatif la production d'entropie est aussi positive.

Pour les conduits réguliers, ces relations caractéristiques peuvent être généralisées en utilisant la pente de la paroi $\frac{dS}{dx}$.

En effet, à l'aide de Figure 4.2, la relation généralisée pour P_I s'écrit :

$$P_I = P - \rho C u \sin \theta, \quad (4.9)$$

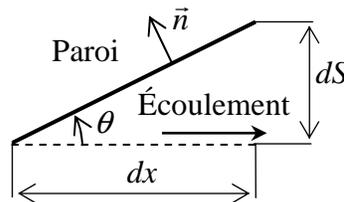


Fig. 4.2: Représentation simplifiée de la pente de la paroi, cas d'un conduit régulier.

où $\tan \theta = \frac{dS}{dx}$.

Cette formulation contient les deux cas limites de marche descendante et ascendante, ainsi que le cas limite de la section transversale constante, pour lequel $P_I = P$, assurant la disparition de la production de la turbulence.

Ce modèle présente de bonnes propriétés. Cependant, après son essai en écoulements subsoniques dans des conduits avec élargissement brusque, il a donné une production excessive de la turbulence, comparée aux résultats 2D moyennés par section. Par conséquent, il peut conduire à une structure d'onde non physique.

4.2.2.2 Modèle d'équilibre mécanique

Considérons la structure d'ondes associée au Système (4.7). Le Système (4.7) est hyperbolique avec les mêmes vitesses d'ondes que le Système (4.5), sauf qu'une onde caractéristique supplémentaire de vitesse nulle lui est ajoutée. La structure d'ondes correspondante dans le plan (x, t) pour l'écoulement subsonique est schématisée sur la Figure 4.3.

À partir des variables des états 0 et 1 indiqués par la Figure 4.3, il est possible d'établir une expression pour la pression d'interface P_I :

$$\rho_1 u_1^2 S_R - \rho_0 u_0^2 S_L + P_1 S_R - P_0 S_L - P_I (S_R - S_L) = 0$$

Avec l'aide de la relation de conservation de la masse ($\rho u S = \dot{m}$) le modèle s'écrit :

$$P_I = \frac{\dot{m}(u_1 - u_0) + P_1 S_R - P_0 S_L}{S_R - S_L} \quad (4.10)$$

Cette relation provient de la formulation conservative de l'équation de la quantité de mouvement dans le volume de control V_C incluant la discontinuité géométrique, comme le montre la Figure 4.4.

Montrons que ce modèle est isentropique pour les conduits réguliers, bien qu'il soit non isentropique i.e. producteur d'entropie pour les conduits contenant des singularités.

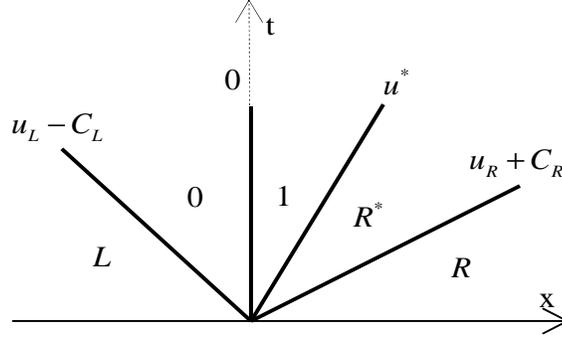


Fig. 4.3: Structure d'ondes associée au Système (4.7) au niveau de la discontinuité géométrique pour le cas subsonique. Une onde faisant face à gauche se propageant à la vitesse $u_L - C_L$ transforme l'état L à l'état 0. Une onde faisant face à droite se propageant à la vitesse $u_R + C_R$ transforme l'état R à l'état R^* . La discontinuité de contact se propageant à la vitesse u^* sépare les états 1 and R^* . L'état 1 correspond à la transformée de l'état 0 à travers le changement brusque de la section. Ceci correspond à un Problème de Riemann à 4 ondes.

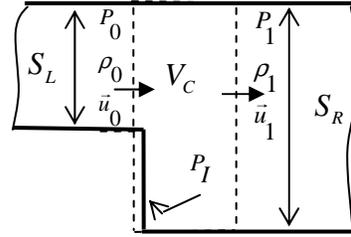


Fig. 4.4: Volume de controle contenant la marche utilisé pour déterminer P_I .

1. Conduits réguliers

Pour les petites variations qui caractérisent les conduits réguliers le modèle de l'équilibre mécanique (4.10) pour P_I peut s'écrire comme :

$$P_I = \frac{\rho u S \Delta u + \Delta(P S)}{\Delta S}$$

Ainsi, le terme de production d'entropie turbulente dans (4.8) devient :

$$\begin{aligned} \frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} &= \frac{P \Delta S - \rho u S \Delta u - P \Delta S - S \Delta P}{\rho S \Delta S} u \frac{\Delta S}{\Delta x} \\ &= \frac{-\rho u S \Delta u - S \Delta P}{\rho S} u \frac{1}{\Delta x} \\ &= -\frac{u}{\rho} \left(\rho u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta P}{\Delta x} \right) \cong -\frac{u}{\rho} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière expression, considérons la conservation de l'enthalpie totale résultant de la combinaison des conditions de saut de la masse et de l'énergie du système (4.7) à travers la discontinuité de section transversale :

$$\begin{aligned} dh + udu &= d\left(\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t-1)\rho}\right) + udu \\ &= \frac{\gamma}{(\gamma-1)\rho} dp + \frac{\gamma_t}{(\gamma_t-1)\rho} dP_t - \left(\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho^2} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t-1)\rho^2}\right) d\rho + udu = 0 \end{aligned}$$

La variation de la densité peut être éliminée en différenciant les deux isentropes i.e. :

$$dp = c^2 d\rho \text{ et } dP_t = c_t^2 d\rho.$$

Ainsi, l'équation de l'enthalpie devient :

$$dp + dP_t + \rho u du = dP + \rho u du = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} = 0$$

Cela signifie que, pour des conduits réguliers, le modèle est isentropique, comme prévu.

2. Conduits non réguliers

Réécrivons le terme de production turbulente selon la théorie des chemins de Volpert [48]

(voir aussi [9, 29, 30]) :

$$\frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1 - P_I}{\rho_1 S_R} u_1 + \frac{P_0 - P_I}{\rho_0 S_L} u_0 \right) \frac{dS}{dx}$$

En insérant la formule de la pression d'interface (4.10) dans l'expression qui en résulte, nous obtenons :

$$\frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} = \left(\frac{(P_0 - P_1)(\rho_0 u_1 S_L^2 + \rho_1 u_0 S_R^2) - \dot{m}(u_1 - u_0)(\rho_0 u_1 S_L + \rho_1 u_0 S_R)}{2\rho_1 S_R \rho_0 S_L (S_R - S_L)} \right) \frac{dS}{dx}$$

L'intégration approximative de l'équation d'enthalpie ($dP + \rho u du = 0$) autour de l'état 1 donne :

$$P_1 - P_0 + \rho_1 u_1 (u_1 - u_0) = 0.$$

La multiplication de la dernière relation par S_R donne :

$$\dot{m}(u_1 - u_0) = (P_0 - P_1)S_R.$$

Avec cette égalité le terme de production devient :

$$\frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{P_0 - P_1}{\rho_1 S_R} u_1 \frac{dS}{dx}$$

Dans les tuyères divergentes subsoniques ($dS > 0$) la pression augmente ($P_1 - P_0 > 0$). Ainsi, la production d'entropie turbulente est positive.

Dans les tuyères convergentes subsoniques ($dS < 0$) la pression diminue ($P_1 - P_0 < 0$). Ainsi, la production d'entropie turbulente est positive.

Par conséquent le modèle est producteur d'entropie pour les écoulements subsoniques.

Dans les écoulements supersoniques l'état 0 coïncide avec l'état de gauche L . Intégrons maintenant l'équation d'enthalpie autour de l'état 0. En exprimant le débit massique dans le même état, nous obtenons :

$$\dot{m}(u_1 - u_0) = (P_0 - P_1)S_L.$$

Par conséquent le terme de production devient :

$$\frac{P - P_I}{\rho S} u \frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \frac{P_0 - P_1}{\rho_0 S_L} u_0 \frac{dS}{dx}$$

Dans les tuyères divergentes supersoniques ($dS > 0$) la pression diminue ($P_1 - P_0 < 0$). Ainsi, la production d'entropie turbulente est positive.

Dans les tuyères convergentes supersoniques ($dS < 0$) la pression augmente ($P_1 - P_0 > 0$). Ainsi, la production d'entropie turbulente est positive.

Finalement le modèle est producteur d'entropie pour les deux cas d'écoulements subsoniques et supersoniques.

5. PROBLÈME DE RIEMANN ET SCHÉMA NUMÉRIQUE ASSOCIÉ

5.1 Résolution du problème de Riemann

Le modèle turbulent 1D réduit se compose du Système (4.7) dans lequel la dernière équation est remplacée par l'équation (4.8) et sa fermeture réalisée par la relation (4.10). Le système résultant peut s'écrire sous forme compacte comme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} - J(U) \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} U &= (S, \rho S, \rho u S, \rho E S, \rho s_t S)^T, \\ F(U) &= \left(0, \rho u S, (\rho u^2 + P) S, (\rho E + P) u S, \rho s_t u S\right)^T, \\ J(U) &= \left(0, 0, P_I, 0, \frac{(P - P_I) u}{T_t}\right)^T. \end{aligned}$$

et P_I donnée par la relation (4.10).

Nous considérons le problème de Riemann pour le système (5.1) avec les conditions initiales :

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & x \leq x_0 \\ U_R & x > x_0 \end{cases}$$

Comme le montre la Figure 4.3, ce problème de Riemann comporte 4 ondes. Une situation similaire du 'problème de Riemann à 4 ondes' a été étudiée dans [3, 26], dans le contexte des équations d'Euler 1D en présence de changements brusques de la section i.e. le système (1.1). La présente analyse suit les mêmes lignes.

Le système (5.1) contient deux termes non-conservatifs qui rendent la définition de solutions faibles difficile. Cependant, les deux termes non-conservatifs agissent uniquement au niveau des discontinuités géométriques. En tout autre position, où la section transversale est constante, ce système se réduit au système (4.5) pour lequel les conditions de saut sont disponibles.

Nous détaillons d'abord les relations de passage au travers des ondes faisant face à droite et à gauche pour la résolution du problème de Riemann. Puis, nous examinons les relations au travers des variations brusques de section ainsi que les discontinuités de contact.

5.1.1 Ondes faisant face à droite et à gauche dans les conduits à sections constantes

Pour le modèle d'écoulement turbulent, comme pour les équations d'Euler avec l'équation d'état des gaz parfaits, il est possible d'exprimer les relations de saut au travers des chocs et des ondes de détente sous une forme compacte.

Considérons un état K dans lequel un choc ou une détente se propage, l'état après la propagation de l'onde est donné par :

$$u_K^* = u_K \pm \begin{cases} I_K & \text{si } P_K^* \leq P_K \\ [J_K] \frac{1}{2} & \text{si } P_K^* > P_K \end{cases} \quad (5.2a)$$

$$\rho_K^* = \rho_K \begin{cases} L_K & \text{si } P_K^* \leq P_K \\ M_K & \text{si } P_K^* > P_K \end{cases} \quad (5.2b)$$

$$P_{tK}^* = P_{tK} \begin{cases} [L_K]^{\gamma_t} & \text{si } P_K^* \leq P_K \\ [M_K]^{\gamma_t} & \text{si } P_K^* > P_K \end{cases} \quad (5.2c)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_K &= \int_{\rho_K}^{\rho_K^*} \frac{C(\rho)}{\rho} d\rho, \\ J_K &= \frac{2(P_K^* - P_K) \left(P_K^* - P_K - r(P_{tK}^* - P_{tK}) \right)}{(\gamma + 1)\rho_K \left(P_K^* + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} P_K - \frac{2r}{(\gamma + 1)} P_{tK}^* \right)}, \\ L_K &= \left[\frac{P_K^* - P_{tK}^*}{P_K - P_{tK}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{et} \\ M_K &= \frac{P_K^* + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} P_K - \frac{2r}{(\gamma + 1)} P_{tK}^*}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} P_K^* + P_K - \frac{2r}{(\gamma + 1)} P_{tK}}. \end{aligned}$$

où :

$$r = \frac{\gamma_t - \gamma}{\gamma_t - 1}.$$

5.1.2 Discontinuités de contact et changements brusques de section transversale

À travers les discontinuités de contact, les relations de saut ou relations d'interface sont immédiates :

$$P_1 = P_R^* \text{ et } u_1 = u_R^*, \quad (5.3)$$

pour la situation décrite sur la Figure 4.3 où une singularité géométrique est présente.

Si la singularité géométrique est absente, les relations de saut à travers les surfaces de contact deviennent :

$$P_L^* = P_R^* \text{ et } u_L^* = u_R^*. \quad (5.4)$$

Au travers des changements brusques de section, le système suivant doit être considéré :

$$\begin{aligned} \left[\dot{m} \right]_0^1 &= \left[\rho u S \right]_0^1 = 0, \\ \left[s_g \right]_0^1 &= 0, \\ \left[h_{tot} \right]_0^1 &= \left[\frac{\gamma(P - P_t)}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t - 1)\rho} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = 0 \\ \int_0^1 d \left(\frac{P_t}{\rho^{\gamma_t}} \right) &= \int_0^1 \frac{P - P_I}{\rho^{\gamma_t}} \frac{dS}{S}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La dernière équation exprime la production d'entropie turbulente au niveau de la discontinuité géométrique, la pression d'interface P_I étant donnée par (4.10). Ce système peut s'intégrer comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \left(\rho u S \right)_0^1 &= 0, \\ \Delta \left(\frac{P - P_t}{\rho^\gamma} \right)_0^1 &= 0, \\ \Delta \left(\frac{\gamma(P - P_t)}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t - 1)\rho} + \frac{u^2}{2} \right)_0^1 &= 0 \text{ et} \\ \Delta \left(\frac{P_t}{\rho^{\gamma_t}} \right)_0^1 &= \left(\frac{P - P_I}{\rho^{\gamma_t} S} \right) \Delta S_0^1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les trois premières équations ne posent aucune difficulté. Elles dérivent de lois de conservation. La dernière contient un terme non conservatif qui exprime la production de l'entropie turbulente au

niveau de la discontinuité géométrique. D'après [9, 29] une intégrale approximative de ce produit non conservatif est la moyenne arithmétique définie par :

$$\overline{(f(W))} = \frac{f(W_0) + f(W_1)}{2}$$

avec $W = \left(S, \rho, u, P, \frac{P_t}{\rho^{\gamma_t}} \right)^T$.

Nous allons maintenant analyser le système (5.6) en vue de déterminer l'état 1 pour un état 0 donné.

5.1.3 Solution au travers des changements brusques de section

Avec P_I donnée par (4.10), le système (5.6) devient :

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 S_L &= \rho_1 u_1 S_R \\ \frac{P_0 - P_{t0}}{\rho_0^{\gamma_0}} &= \frac{P_1 - P_{t1}}{\rho_1^{\gamma_1}} \\ \Delta \left(\frac{\gamma(P - P_t)}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t - 1)\rho} + \frac{u^2}{2} \right)_0^1 &= 0 \\ \Delta \left(\frac{P_t}{\rho^{\gamma_t}} \right)_0^1 &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\Delta P_1^0 \Delta S_L^R}{\rho_1^{\gamma_t} S_R} & \text{cas subonique} \\ \frac{1}{2} \frac{\Delta P_1^0 \Delta S_L^R}{\rho_0^{\gamma_t} S_L} & \text{cas supersonique} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'existence de solutions pour ce système est à considérer maintenant.

Récrivons la seconde et la quatrième équations en omettant l'indice 1 et en considérant $P_{t0} = 0$.

Ces équations deviennent :

$$P - P_t = \frac{P_0 - P_{t0}}{\rho_0^{\gamma_0}} \rho^{\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^{\gamma_0}} \rho^{\gamma} = A \rho^{\gamma} \quad (5.8)$$

avec $A = \frac{P_0}{\rho_0^{\gamma}}$ et

$$P_t = \begin{cases} \frac{B}{2} & \text{cas subonique} \\ \frac{-B}{2(1-F)} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_t} & \text{cas supersonique} \end{cases} \quad (5.9)$$

avec $B = F(P - P_0)$ et le facteur de forme F donné par $F = 1 - \frac{S_L}{S_R}$, $0 < F < 1$ pour un divergent et $F < 0$ pour un convergent.

En tenant compte de (5.8), (5.9) devient :

$$P_t = \begin{cases} \frac{\kappa}{2-F} & \text{cas subsonique} \\ -\kappa \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t} & \\ \frac{-\kappa \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t}}{2(1-F) + F \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t}} & \text{cas supersonique} \end{cases} \quad (5.10)$$

avec $\kappa = F(A\rho^\gamma - P_0)$.

La positivité de la pression turbulente P_t doit d'abord être examinée.

5.1.3.1 Positivité de la pression turbulente

Les expressions (5.10) montrent que dans le cas subsonique P_t est positive $\forall F < 1$.

C'est aussi évident dans le cas de divergents supersoniques. Il reste à analyser le cas de convergents supersoniques, i.e. cas supersonique avec $F < 0$.

Dans ce cas $\frac{\rho}{\rho_0} > 1$, $F \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t} < 0$ et $(P_0 - A\rho^\gamma) < 0$.

La positivité de P_t est déterminée par celle de $2(1-F) + F \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t}$.

Or,

$$\begin{aligned} 2(1-F) + F \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t} &> 0 \\ \Leftrightarrow F + 2(1-F) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma_t} &> 0 \\ \Leftrightarrow F > 2(F-1) \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma_t} \\ \Leftrightarrow F > 2(F-1) \quad (0 < \frac{\rho_0}{\rho} < 1, (F-1) < 0) \\ \Leftrightarrow F < 2 \end{aligned}$$

Comme $F < 0 \Rightarrow F < 2 \Rightarrow 2(1-F) + F\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma_t} > 0$, la pression turbulente P_t est positive dans tous les cas, i.e. convergent, divergent subsonique et supersonique.

Nous allons, maintenant, vérifier l'existence de solutions du Système (5.7)

5.1.3.2 Existence de la solution au travers des changements brusques de section

La résolution du Système (5.7) requiert la solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = 2 \left(\frac{\gamma(P - P_t)}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\gamma_t P_t}{(\gamma_t - 1)\rho} \right) \\ + \left(\frac{\rho_0 u_0 S_L}{S_R} \right)^2 \frac{1}{\rho^2} - (u_0^2 + 2h_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec $h_0 = \frac{\gamma(P_0 - P_{t0})}{(\gamma - 1)\rho_0} + \frac{\gamma_t P_{t0}}{(\gamma_t - 1)\rho_0}$, $(P - P_t)$ et P_t données par (5.8) and (5.10) respectivement.

L'existence de solutions pour cette équation doit être étudiée. Ceci est l'objet de ce qui suit. Notons d'abord que la solution de (5.11) dépend des expressions de $(P - P_t)$ et P_t , qui dépendent du régime de l'écoulement.

1. Cas subsonique

En remplaçant $(P - P_t)$ et P_t par leurs expressions respectives (5.8) et (5.10), (5.11) devient :

$$\begin{aligned} \phi = 2 \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)} + \frac{2\gamma_t}{(\gamma_t - 1)} \frac{F}{(2 - F)} \left(A \rho^{\gamma-1} - \frac{P_0}{\rho} \right) \\ + (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho^2} - (u_0^2 + 2h_0) = 0 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \phi'(\rho) = 2\gamma A \rho^{\gamma-2} + \frac{2\gamma_t F}{(\gamma_t - 1)(2 - F)} \\ \left(A(\gamma - 1)\rho^{\gamma-2} + \frac{P_0}{\rho^2} \right) - 2(\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho^3} \end{aligned}$$

Soit

$$\psi(\rho) = \frac{\phi'(\rho)\rho^2}{2} = \gamma A \rho^\gamma + \frac{\gamma_t F}{(\gamma_t - 1)(2 - F)} \left(A(\gamma - 1)\rho^\gamma + P_0 \right) - (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho}$$

Alors, $\phi'(\rho)$ et $\psi(\rho)$ doivent avoir le même signe.

La dérivée de cette seconde fonction est donnée par :

$$\psi'(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \gamma \left(\gamma + \frac{\gamma_t F}{(\gamma_t - 1)(2 - F)} (\gamma - 1) \right) A \rho^{\gamma+1} + \frac{1}{\rho^2} (\rho_0 u_0 (1 - F))^2$$

dont la positivité est discutée ci-après.

$$\text{Soit } X = \gamma + \frac{\gamma_t F}{(\gamma_t - 1)(2 - F)} (\gamma - 1)$$

$$\begin{aligned} \psi'(\rho) > 0 &\Leftrightarrow \gamma X A \rho^{\gamma+1} + (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow X \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma+1} > -M_0^2 (1 - F)^2 \end{aligned}$$

où M_0 est le nombre de Mach dans l'état 0.

Comme $X > 0 \forall F < 1$ et $\frac{\rho}{\rho_0} > 0$, la dernière inégalité est vérifiée et par conséquent $\psi'(\rho) > 0 \forall \rho$ et $\forall F < 1$, i.e. pour les écoulements subsoniques dans les convergents et divergents.

Exprimons maintenant $\psi(\rho)$ comme suit :

$$\psi(\rho) = X A \rho^\gamma + \frac{\gamma_t F}{(\gamma_t - 1)(2 - F)} P_0 - (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho}$$

Avec cette dernière expression, il est aisé de montrer que $\psi(\rho) \rightarrow -\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$ et $\psi(\rho) > 0$ quand ρ devient grand $\forall F < 1$.

2. Cas supersonique

En remplaçant $(P - P_t)$ et P_t par leurs expressions respectives (5.8) et (5.10), (5.11) devient :

$$\begin{aligned} \phi &= 2 \left(\frac{1}{2} (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho^2} + \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)} \right) \\ &\quad + \frac{2\chi}{\varphi} \left(A \rho^{\gamma-1} - \frac{P_0}{\rho} \right) - (u_0^2 + 2h_0) = 0 \end{aligned}$$

avec $\chi = \frac{\gamma t}{\gamma t - 1} F \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma t}$

et $\varphi = 2(F - 1) - F \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma t}$

d'où

$$\begin{aligned} \phi'(\rho) &= -2 (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho^3} + 2\gamma A \rho^{\gamma-2} \\ &\quad + \frac{2\chi}{\varphi} \left((\gamma - 1) A \rho^{\gamma-2} + \frac{P_0}{\rho^2} \right) \\ &\quad + \frac{4\gamma t (F - 1) \rho^{-1} \chi}{\varphi^2} \left(A \rho^{\gamma-1} - \frac{P_0}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Le réarrangement des deux derniers termes de $\phi'(\rho)$ donne :

$$\begin{aligned} \phi'(\rho) &= -2 (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho^3} + 2 \left(1 + \frac{\chi}{\varphi} \right) \\ &\quad \left(\gamma A \rho^{\gamma-2} + \frac{(\gamma t - 1) \chi}{\varphi} \left(A \rho^{\gamma-2} - \frac{P_0}{\rho^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= \frac{\phi'(\rho) \rho^2}{2} = - (\rho_0 u_0 (1 - F))^2 \frac{1}{\rho} + \left(1 + \frac{\chi}{\varphi} \right) \\ &\quad \left(\gamma A \rho^\gamma + \frac{(\gamma t - 1) \chi}{\varphi} (A \rho^\gamma - P_0) \right) \end{aligned}$$

$\phi'(\rho)$ et $\psi(\rho)$ doivent avoir le même signe.

$$\begin{aligned} \psi'(\rho) = & (\rho_0 u_0 (1-F))^2 \frac{1}{\rho^2} \\ & + \gamma A \rho^{\gamma-1} \left(\frac{2(\gamma_t - 1)\chi^2 + \varphi \zeta}{\varphi^2} \right) \\ & + 2(\gamma_t^2 - \gamma_t)(F-1)\chi \left(\frac{A\rho^\gamma - P_0}{\rho} \right) \\ & \left(\frac{2(F-1) + (1 + \frac{1}{\gamma_t})\chi}{\varphi^3} \right) \end{aligned}$$

avec $\zeta = 2\gamma(F-1) + (2\gamma_t + \frac{\gamma}{\gamma_t} - 1)\chi$.

Le premier terme de la dérivée $\psi'(\rho)$ est positif $\forall F < 1$.

- Pour $0 < F < 1$:

$\frac{\rho}{\rho_0} < 1$ et $F \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_t}$ est petit comparé aux autres termes. Donc le second terme est positif et le troisième négligeable. Finalement $\psi'(\rho) > 0 \forall \rho$.

- Pour $F < 0$:

$\varphi < 0$ (voir positivité de la pression turbulente), le second terme de la dérivée $\psi'(\rho)$ est positif. Comme $A\rho^\gamma - P_0 > 0$, le troisième terme est aussi positif.

Alors, $\psi'(\rho) > 0 \forall \rho$ pour les écoulements supersoniques dans les divergents et les convergents.

Nous pouvons montrer aussi, pour les écoulements supersoniques, que $\psi(\rho) \rightarrow -\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$ et $\psi(\rho) > 0$ quand ρ devient grand $\forall F < 1$.

Finalement pour tous les cas, i.e. convergents, divergents subsoniques et supersoniques $\psi'(\rho) > 0 \forall \rho$ et $\psi(\rho) \rightarrow -\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$ et devient positive pour les grandes valeurs de ρ .

Ainsi la fonction $\psi(\rho)$ est monotone croissante de $-\infty$ à une certaine valeur positive. Et, il existe exactement une valeur ρ_* de ρ pour laquelle $\psi(\rho) = 0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\phi'(\rho) = \psi(\rho) = 0 & \quad \text{pour} \quad \rho = \rho_* \\
\phi'(\rho) < 0 & \quad \text{pour} \quad \rho < \rho_* \\
\phi'(\rho) > 0 & \quad \text{pour} \quad \rho > \rho_*
\end{aligned}$$

D'autre part nous pouvons vérifier que $\phi(\rho) \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$ ou $\rho \rightarrow +\infty$.

Alors $\phi(\rho) = \phi_{min}$ pour $\rho = \rho_*$.

La relation (5.11) et donc le Système (5.7) admettent une solution si et seulement si :

$$\phi_{min} = \phi(\rho_*) \leq 0 \tag{5.12}$$

Plus précisément, (5.12) implique que (5.11) admet deux racines qui coïncident pour l'égalité correspondante au cas de résonance (l'onde stationnaire coïncidant avec une autre onde). Un critère de choix de la racine de $\phi(\rho) = 0$, basé sur une solution monotone au niveau de la discontinuité géométrique, a été adopté dans [26,28]. Cela nous amène au choix de la racine située du même côté que ρ_0 par rapport à ρ_* . Ainsi, l'onde stationnaire reste dans le même domaine de phase. Nous suivons la même stratégie en initiant la méthode itérative avec une valeur de ρ très proche de ρ_0 .

5.1.4 Procédures itératives

Deux méthodes itératives différentes sont utilisées. La première traite la résolution du problème de Riemann *turbulent* dans les conduits à section constante. La seconde considère le cas des singularités géométriques.

5.1.4.1 Écoulements turbulents dans les conduits à section transversales constantes

Le problème de Riemann implique seulement 3 ondes dans cette situation. Une estimation pour $P^* = P_L^* = P_R^*$ est utilisée pour initier la procédure d'itération et le système (5.2) est résolu pour fournir tous les paramètres de l'écoulement dans les états R^* et L^* . Les équations (5.2c) sont d'abord résolues, puis (5.2b) et enfin (5.2a). Un test de convergence se fait sur la différence de vitesse de

part et d'autre de la discontinuité de contact $\Delta u = u_R^* - u_L^*$. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour obtenir la convergence. Cette procédure est identique à celle du solveur de Riemann exact utilisé dans le cas des équations d'Euler avec l'équation d'état des gaz parfaits (voir [14, 45]), sauf que la pression turbulente, fournie par les équations (5.2c), doit être déterminé en premier.

5.1.4.2 Changements discontinus de la section transversale du conduit

Le problème de Riemann implique maintenant 4 ondes et 3 états sont à déterminer, chacun impliquant 4 inconnues. Ainsi, avec la notation de la Figure 4.3, 12 inconnues doivent être déterminées : $\rho_0, P_0, u_0, P_{t0}, \rho_1, P_1, u_1, P_{t1}, \rho_R^*, P_R^*, u_R^*, P_{tR}^*$. La solution est aussi obtenue par un processus itératif basé sur la pression de l'état 0 (P_0). Pour une pression P_0 donnée, l'état 0 est déterminée entièrement à l'aide des Relations (5.2). Les paramètres de l'écoulement dans l'état 1 sont obtenus à partir des Relations (5.6). Puis la pression de l'état R^* est obtenue avec la condition d'interface ($P_1 = P_R^*$). Les autres paramètres de l'état R^* sont obtenus avec les Relations (5.2). La convergence de cette procédure est basée sur la différence de vitesse $\Delta u = u_1 - u_R^*$, qui doit tendre vers zéro.

La procédure se simplifie pour les écoulements supersoniques car l'un des états juxtaposant la discontinuité géométrique est déjà connu. Dans le cas d'une vitesse positive l'état 1 est déterminé avec les Relations (5.6), avec l'état gauche L remplaçant l'état 0 dans la Figure 4.3. La solution est échantillonnée le long de $x/t = 0$, l'état 1 seul étant nécessaire.

Ce solveur exact de Riemann est maintenant utilisé dans une méthode de type Godunov comme détaillé ci-après.

5.2 Méthode numérique de type Godunov

Par souci de simplicité et pour ne pas introduire d'artéfact supplémentaire, la méthode est considérée dans sa version au premier ordre. L'approximation numérique du Système (5.1) est traitée dans ce contexte.

Considérons un maillage composé de cellules régulières : $C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, $x_{i+1/2} = i\Delta x$.

Dans la formulation qui suit, les singularités géométriques sont *forcément* localisées aux frontières

des cellules. Par conséquent, chaque cellule a une section transversale constante. Ainsi, les termes non-conservatifs du Système (5.1) s'annulant dans chaque cellule la formulation conservative des équations est récupérée :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (5.13)$$

où U et $F(U)$ sont donnés par (5.1), i.e. :

$$U = (S, \rho S, \rho u S, \rho E S, \rho s_t S)^T \quad \text{et}$$

$$F(U) = (0, \rho u S, (\rho u^2 + P) S, (\rho E + P) u S, \rho s_t u S)^T$$

Le Système (5.13) est approximé par la méthode de type Godunov qui s'écrit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F(U_{i+1/2}^G) - F(U_{i-1/2}^D) \right], \quad (5.14)$$

où les exposants n et $n+1$ désignent deux temps consécutifs.

Le vecteur variables conservatives $U_{i\pm 1/2}^K$, $K = G$ ou D représente la solution du problème de Riemann à la frontière $i \pm 1/2$ de la cellule. Les exposants G et D désignent respectivement l'état à gauche et à droite de la frontière de la cellule. Il y a en conséquence perte de quantité de mouvement et production d'entropie turbulente au niveau des discontinuités géométriques.

La méthode numérique étant développée, la validation du modèle et de la méthode est maintenant abordée.

6. VALIDATION DU NOUVEAU MODÈLE TURBULENT

6.1 Interactions choc-discontinuité géométrique

La précision du modèle turbulent 1D *réduit* (5.1) avec la pression d'interface donnée par (4.10) est évaluée en comparant sa prédiction avec celle du modèle conventionnel 1D basé sur les équations d'Euler et les résultats de référence obtenus à partir des équations d'Euler 2D. Les résultats 2D sont moyennés par section. Tous les calculs sont effectués avec un nombre CFL de 0.5. Dans toutes les figures, nous désignons par 'Euler-1D' les prédictions du système d'Euler quasi monodimensionnel. Les résultats d'Euler 2D moyennés sont désignés par 'Euler 2D-Moy' et ceux du modèle 1D turbulent par 'Turbulent-1D'.

Chambre HP	Chambre BP
$u = 0 \text{ m/s}$	$u = 0 \text{ m/s}$
$\rho = 2.9036 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 1.1904 \text{ kg/m}^3$
$p = 2.4391 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$p = 10^5 \text{ Pa}$
$P_t = 0$	$P_t = 0$

Tab. 6.1: Conditions initiales pour l'interaction choc marche descendante à $M_{CI} = 1.27$ (Section 3.1). Les données géométriques prises de la sous Section 3.1.1 correspondent à la Figure 3.2.

Le premier cas test correspond à celui qui est déjà présenté dans la Section 3.1 avec un nombre de Mach du choc incident $M_{CI} = 1.27$. Les calculs unidimensionnels sont effectués avec le même maillage le long de la direction longitudinale du tube à choc (1491 cellules). Les paramètres des équations d'état sont $\gamma = 1.4$ et $\gamma_t = 2$. Des conditions aux limites de paroi sont utilisées à chaque extrémité du tube. Les conditions initiales sont résumées dans le Tableau 6.1.

Les résultats numériques relatifs aux sondes de pression P_7 , P_6 , P_M et P_5 sont donnés par la Figure 6.1. Les courbes en traits continus avec symboles correspondent aux résultats de simulation Euler 2D moyennés, celles en traits continus aux résultats du modèle turbulent 1D et celles en traits discontinus aux résultats du modèle classique Euler 1D. Les deux modèles 1D donnent les mêmes résultats lorsque les effets turbulents ne sont pas significatifs. Ceci est observable sur les graphes relatifs aux jauges P_7 et P_6 pour la première partie des signaux : jusqu'à $2,6 \text{ ms}$ pour P_7 et $1,3 \text{ ms}$ pour P_6 . L'onde de détente due à la diffraction du choc au niveau de la marche descendante atteint la jauge P_7 en 2.6 ms . Les 3 différents modèles sont encore en accord pendant l'intervalle de

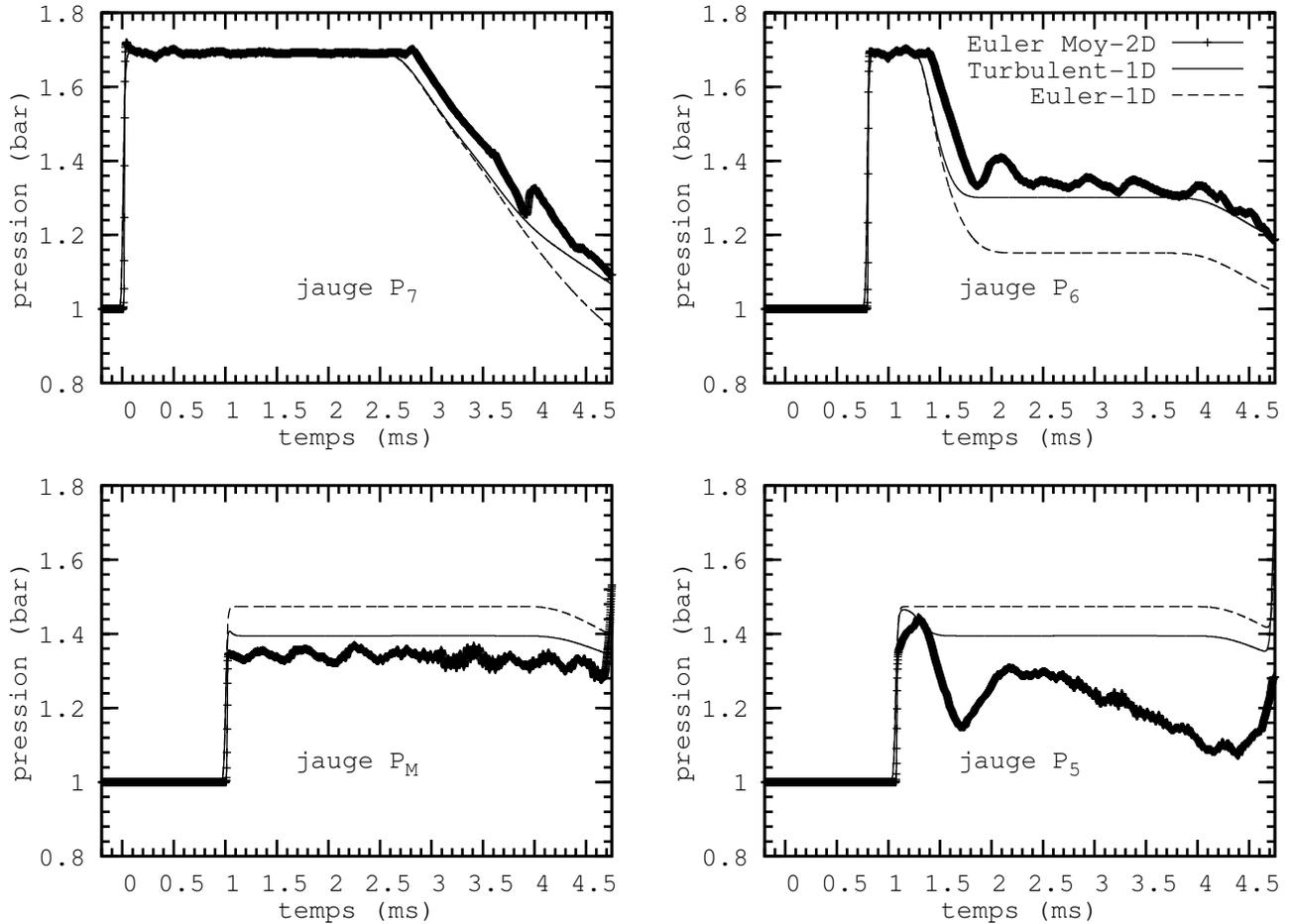


Fig. 6.1: Signaux de pression aux emplacements des jauges de pression P_7 , P_6 , P_M et P_5 en fonction du temps pour l'interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 1.27$. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du nouveau modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle d'Euler 1D.

temps $2.6 - 3.8\text{ms}$. Puis l'onde de détente principale réfléchiée par la paroi du fond de la chambre haute pression atteint la jauge P_7 au temps $3,8\text{ms}$. Les résultats 2D ainsi que ceux du modèle turbulent 1D sont en parfait accord car ils ont tous deux pris en considération les effets turbulents générés au niveau de la marche descendante. Le modèle Euler 1D suit un chemin de détente différent durant l'intervalle de temps $3.8 - 4.5\text{ms}$. Le même rapprochement du modèle turbulent 1D avec le modèle Euler 2D moyenné est visible sur le graphe relatif à la jauge P_6 . Les 3 modèles, signaux de la jauge P_6 , prévoient le même choc incident, mais l'onde de détente diffractée est mieux prédite avec le modèle turbulent 1D qu'avec le modèle d'Euler 1D. Ceci est clairement visible pendant

l'intervalle de temps $1.6 - 4.5ms$. La même observation est faite pour la jauge de pression P_M . Le choc transmis est surestimé avec le modèle Euler 1D, tandis que les résultats turbulent 1D et 2D sont en meilleur accord. Quant aux signaux de pression de la jauge P_5 , le modèle turbulent 1D est en meilleur accord que celui d'Euler 1D. Toutefois, les différences avec les résultats 2D sont plus grandes, éventuellement en raison d'une production de turbulence supplémentaire due aux diverses interactions transversales onde de choc/vortex. Cet effet n'est pas actuellement pris en considération dans le modèle turbulent 1D.

La plus grande différence entre les modèles turbulent 1D et Euler 1D est observée après passage de l'onde de détente, due à l'interaction, sur la jauge de pression P_6 , située juste avant la marche descendante.

Pour confirmer cette observation, nous considérons un autre problème test, avec un écoulement subsonique, étudié par Schardin avec des conditions initiales prises de [3] et résumées dans le Tableau 6.2. Il correspond au même test considéré auparavant, sauf en ce qui concerne le nombre de Mach du choc incident qui est pris égale à 1,3 et la géométrie qui est un peu différente. Ce problème a été examiné par [3] pour montrer l'importance des erreurs induites par le modèle d'Euler 1D par rapport à des calculs 2D. Dans ce test, les paramètres géométriques sont légèrement changés par rapport au test précédent. La chambre haute pression a une longueur de 0,75 m et la chambre basse pression une longueur de 1,05 m. La singularité géométrique avec le rapport de la section transversale de 0,5 est localisé juste au niveau de la séparation entre les chambres haute et basse pression.

La Figure 6.2 montre la comparaison entre les différents modèles. Il est clair que ce test est très sévère pour les modèles 1D. Mais le modèle turbulent améliore nettement la précision par rapport à celle d'Euler 1D. La différence la plus importante apparaît sur l'évolution du nombre de Mach. En effet, le nombre de Mach, juste avant la marche descendante, prédit par le modèle 2D est de 0,55. Il est de 0,65 pour le modèle 1D turbulent et atteint 0,9 avec le modèle Euler 1D. Une légère augmentation du nombre de Mach du choc incident (i.e. $M_{CI} = 1.303$) fait que le modèle Euler 1D produit l'état sonique juste avant la marche. Pour une valeur légèrement plus grande, la transition vers une autre structure de l'écoulement se produit. Un choc stationnaire apparaît au niveau de la

discontinuité géométrique [40]. Ceci n'est pas observé avec les calculs 2D. La différence dans ces comportements est due à la production de la turbulence. La pression turbulente produite au niveau de la marche descendante avec le modèle turbulent 1D et transportée en aval est illustrée sur la même Figure 6.2.

Le troisième test consiste en l'interaction d'un choc incident de Mach 2.5 et un rapport de section de la marche descendante de 0.5. La solution auto-similaire de [40] a été utilisée pour vérifier les calculs Euler 1D qui montrent un parfait accord. Cependant, cette solution exacte ne prend pas en compte la création du vortex. Ce test diffère des tests précédents d'interaction choc-marche descendante par le comportement supersonique de l'écoulement derrière l'onde de choc principale. En effet, il n'y a aucune onde réfléchie mais l'apparence d'un choc secondaire se propageant dans la même direction que le choc transmis. Initialement le choc est localisé à la discontinuité géométrique, positionnée sur les graphiques des Figures 6.3 et 6.4 à l'origine des abscisses. Les conditions initiales pour ce problème test sont résumées sur le Tableau 6.3.

Les contours de densité obtenus à partir de la résolution des équations d'Euler 2D sont montrés sur la Figure 6.3 à l'instant $3.0ms$. L'interaction choc-marche descendante résulte en un écoulement hautement turbulent derrière le choc transmis. Les résultats 2D seront moyennés par section et utilisés comme résultats de référence pour les modèles réduits 1D. La Figure 6.4 montre une comparaison des divers modèles aux instants $0,9ms$ et $3,0ms$ pour la densité en haut, pour la pression sur la deuxième ligne et le nombre de Mach sur la troisième ligne. La dernière ligne montre l'entropie turbulente (modèle turbulent 1D) qui est produite par la marche en interagissant avec le choc incident, puis convectée en aval par l'écoulement. Sur la colonne de droite (i.e. à l'instant $3,0ms$), le modèle turbulent 1D apparaît en meilleur accord avec les calculs 2D pour la densité et

Chambre HP	Chambre BP
$u = 139.867 m/s$	$u = 0 m/s$
$\rho = 2.122 kg/m^3$	$\rho = 1.4 kg/m^3$
$p = 1.805 \cdot 10^5 Pa$	$p = 10^5 Pa$
$P_t = 0$	$P_t = 0$

Tab. 6.2: Conditions initiales pour le test de Schardin.

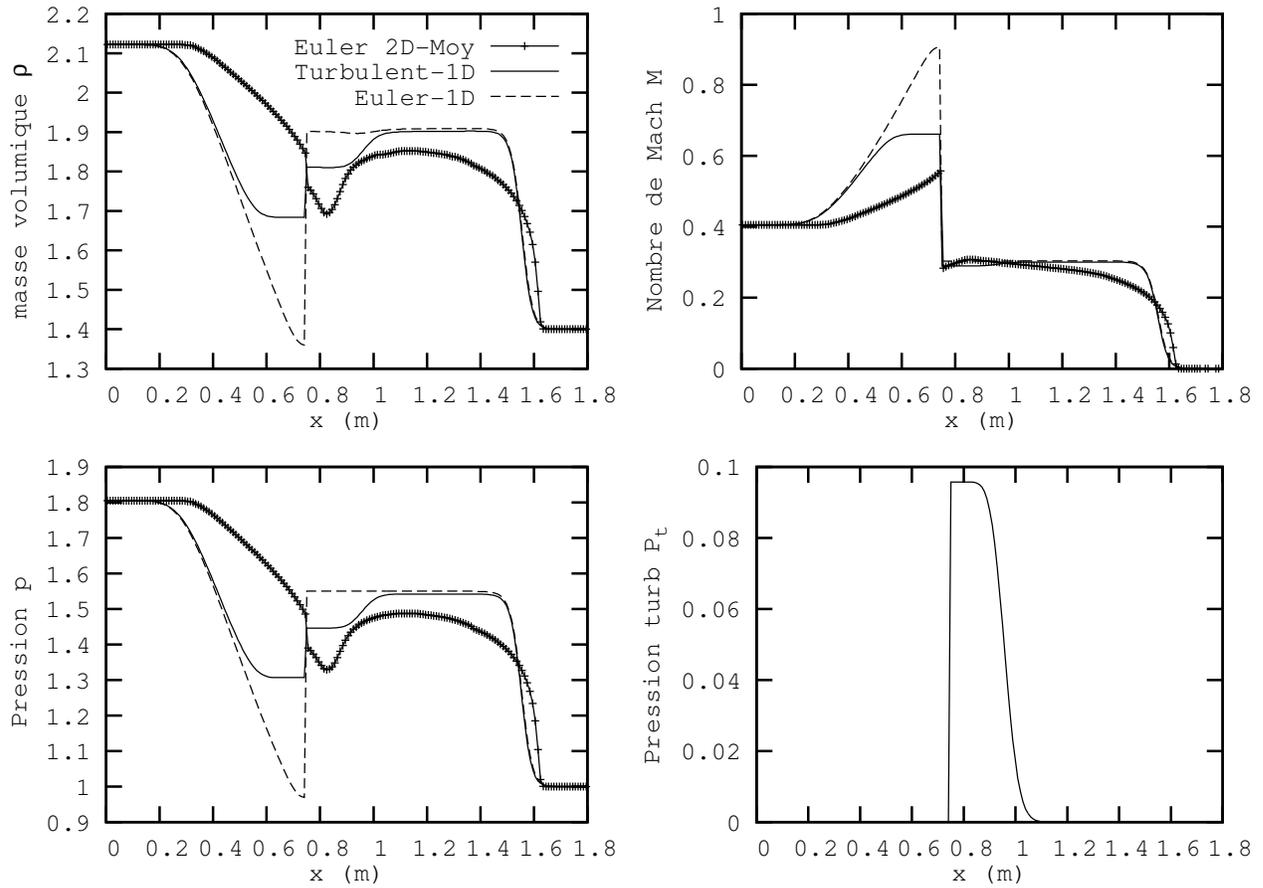


Fig. 6.2: Test de Schardin, évolutions de ρ , M , p et P_t en fonction de x . Les évolutions de la densité, du nombre de Mach, de la pression et de la pression turbulente versus x sont montrées à l'instant $2.1ms$. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D.

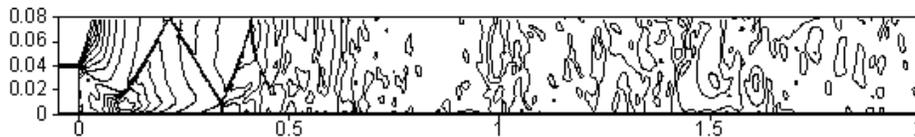


Fig. 6.3: Interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$, contours de densité. Les contours de la densité obtenus de la résolution des équations d'Euler 2D sont montrés à l'instant $3.0ms$. Les résultats 2D seront moyennés par section et utilisés comme résultats de référence pour les modèles réduits 1D.

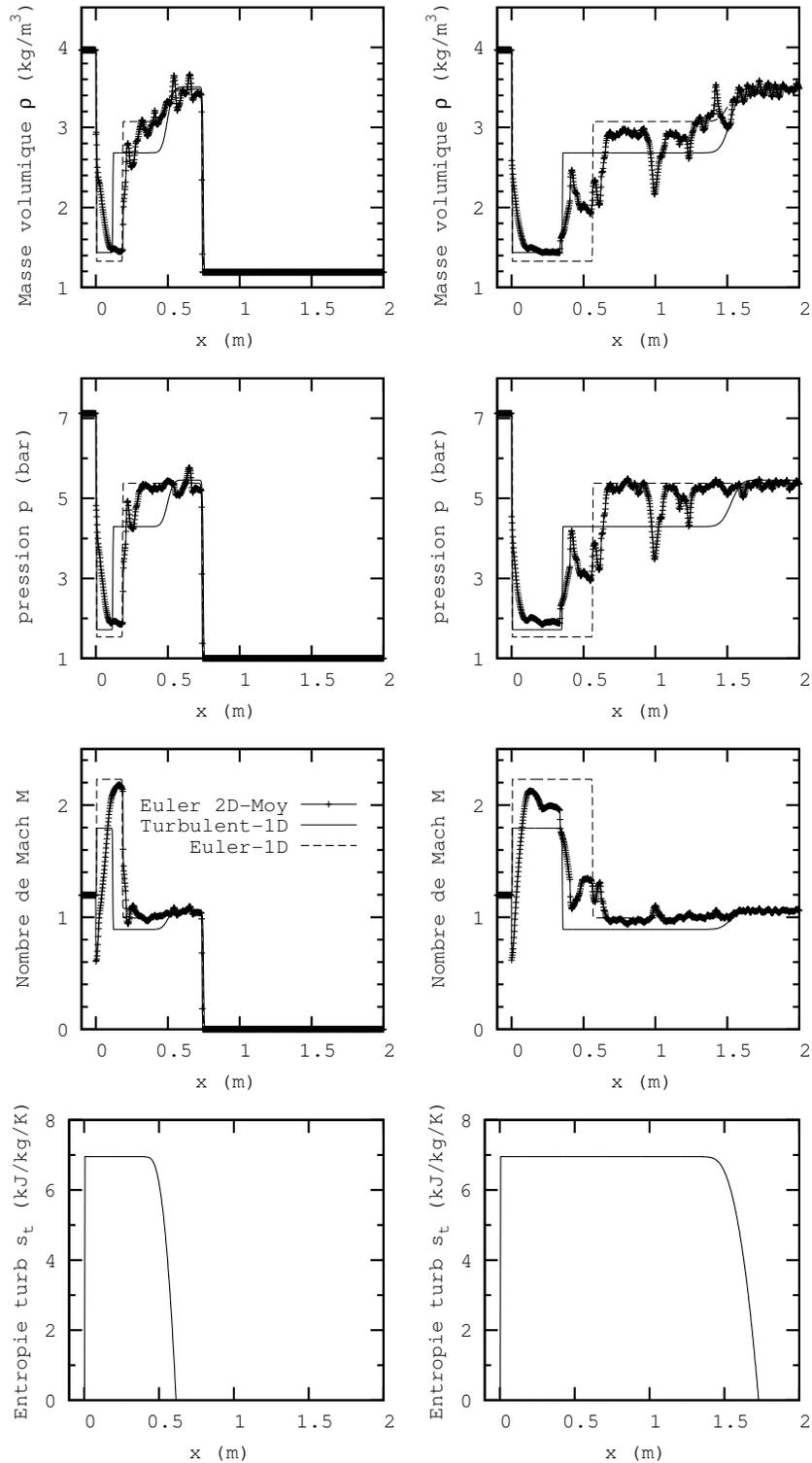


Fig. 6.4: Interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$, évolutions de ρ , p , M et s_t vs x . Les évolutions de la densité, de la pression et du nombre de Mach suivant la direction longitudinale sont montrées aux instants $0.9ms$ et $3.0ms$. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du nouveau modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D, en particulier en ce qui concerne la propagation de l'onde de choc secondaire.

Chambre HP	Chambre BP
$u = 600.125 m/s$	$u = 0 m/s$
$\rho = 3.968 kg/m^3$	$\rho = 1.1904 kg/m^3$
$p = 7.125 10^5 Pa$	$p = 10^5 Pa$
$P_t = 0$	$P_t = 0$

Tab. 6.3: Conditions initiales pour l'interaction choc-marche descendante à $M_{CI} = 2.5$.

la pression. Cependant, parfois la courbe de pression des résultats d'Euler 2D se rapproche de très près de celle des résultats d'Euler 1D . Il semble que dans certains endroits, la turbulence a disparu, alors qu'elle ne l'est pas en d'autres endroits. Ce phénomène est observable même pour un maillage plus fin. Le modèle turbulent donne une prédiction qui se situe juste entre les niveaux des régimes "dissipé" et "non dissipé". Ceci est visible sur le graphe de pression où les fluctuations de pression du modèle 2D oscillent autour de la pression de modèle turbulent. Plus encore, la vitesse du choc secondaire est vraiment mieux reproduite par le modèle turbulent que par celui d'Euler 1D. Ceci est visible sur les graphes de la densité, de la pression et du nombre de Mach de la colonne de droite où le choc secondaire prédit par le modèle turbulent est juste à la même position que celle du choc prédit par le modèle Euler 2D.

Le quatrième test traite de l'interaction de deux écoulements confluent avec une marche ascendante . Ce test correspond à une problème déjà étudié par Andrianov *et al.* [3]. La géométrie correspondante et les conditions initiales du *Problème de Riemann à 4 ondes* sont résumées dans le Tableau 6.4, sous forme adimensionnelle. La chambre de gauche est de 0.5 unités de longueur et celle de droite d'une unité.

Andrianov *et al.* [3] ont montré que le modèle Euler 1D conventionnel produit dans ce cas une

Chambre de gauche	Chambre de droite
0.8 unités de hauteur	0.3 unités de hauteur
$u = 3.991$	$u = -3.1666$
$\rho = 0.2069$	$\rho = 0.1354$
$p = 0.07$	$p = 0.0833$
$P_t = 0$	$P_t = 0$

Tab. 6.4: Géométrie et conditions initiales pour l'interaction écoulements confluent-marche ascendante.

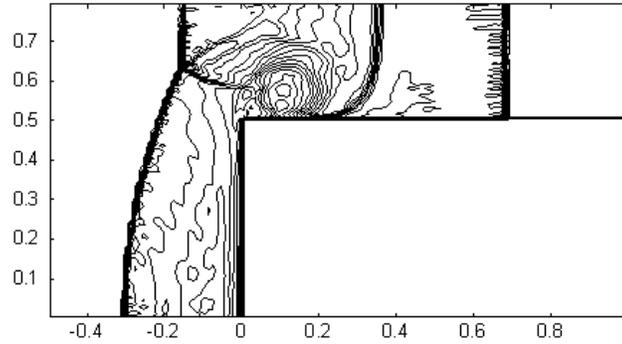


Fig. 6.5: Intéraction écoulements confluent-marche ascendante, contours de densité. Les conditions initiales correspondant au problème de Riemann à 4 ondes sont données par (4.14) dans [3]. Les contours de densité obtenus de la résolution des équations d'Euler 2D sont montrés à l'instant $1.19ms$. Les résultats 2D seront moyennés par section et utilisés comme résultats de référence pour les modèles réduits 1D.

solution non-unique. Ce problème de multiplicité de la solution a fait l'objet de plusieurs études comme celles [3, 34, 38, 40]. Nous considérons la solution choisie dans [3].

La Figure 6.5 montre les contours de densité, obtenus en résolvant les équations d'Euler 2D, à l'instant $1.19ms$. La Figure 6.6 montre la comparaison des résultats 2D moyennés avec ceux des modèles 1D conventionnel et turbulent, au même instant. Deux différences sont visibles sur les graphes. La première porte sur la création de la turbulence. La chute de la densité et de la pression, qui apparaît juste à droite de la marche sur les résultats 2D moyennés, n'est pas prise en compte par le modèle Euler 1D. La seconde qui est une conséquence de cette création de turbulence, concerne les vitesses de propagation des chocs. Le nouveau modèle 1D est plus proche des résultats 2D moyennés que le modèle conventionnel. Le nouveau modèle améliore clairement la précision par rapport au modèle conventionnel.

Chambre de gauche	Chambre de droite
1.0 unité de hauteur	0.98 unités de hauteur
$u = 948.68 m/s$	$u = 948.68 m/s$
$\rho = 1.4 kg/m^3$	$\rho = 1.4 kg/m^3$
$p = 1.0 10^5 Pa$	$p = 1.0 10^5 Pa$
$P_t = 0$	$P_t = 0$

Tab. 6.5: Géométrie et conditions initiales pour l'écoulement dans le tunnel d'une soufflerie à Mach 3 avec marche ascendante modifiée.

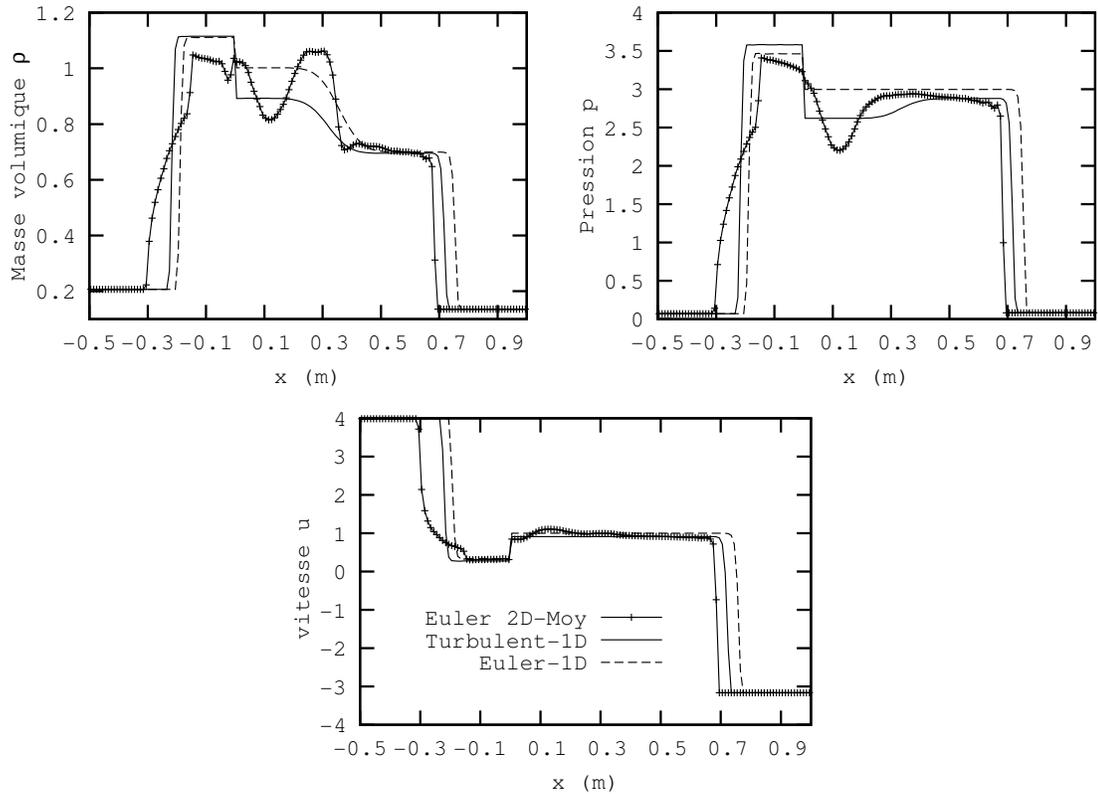


Fig. 6.6: Intéraction écoulements confluent-marche ascendante. Les évolutions de la densité, de la pression et de la vitesse en fonction de x sont montrées à l'instant 1.19 ms. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme références pour évaluer la précision du modèle 1D conventionnel en traits discontinus et du nouveau modèle 1D turbulent en traits continus. Les chutes locales de la densité et de la pression, dues à la production de la turbulence, qui apparaissent sur les résultats 2D moyennés à droite de la discontinuité géométrique sont capturées par le modèle 1D turbulent. Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D en particulier concernant la création de la turbulence et la propagation des chocs.

Le cinquième test traite de l'écoulement dans le tunnel avec marche ascendante d'une soufflerie supersonique à Mach 3 étudié dans [3, 50]. Les conditions initiales et la géométrie sont données par le Tableau 6.5. Comparée à la configuration d'origine [3, 50], la hauteur de la marche ascendante a été réduite de 0.2 à 0.02 unités. La chambre de gauche est longue de 0.6 unités et celle de droite de 9,4 unités. À gauche (resp. droite) des conditions aux limites d'entrée (resp. sortie) sont imposées. Partout ailleurs, pour les calculs 2D, des conditions de paroi sont utilisées. La solution 2D consiste en un choc oblique, qui est réfléchi plusieurs fois par les parois supérieure et inférieure du tunnel comme le montre la figure 6.7. La moyenne par section de la solution 2D à l'instant $6.87ms$ résulte en un choc stationnaire au bord de la marche, confondu avec une onde stationnaire, suivi d'une détente, puis d'une discontinuité de contact et enfin d'un très faible choc transmis; voir la Figure 6.8. Une comparaison des résultats des différents modèles au même instant est donnée par la même figure pour la densité en haut à gauche, le nombre de Mach en haut à droite et la pression en bas à gauche. La dernière variable en bas est l'entropie turbulente. À l'exception de l'onde stationnaire le modèle turbulent 1D est en bon accord avec les calculs 2D et améliore clairement la précision par rapport au modèle 1D conventionnel.

Dans le sixième et dernier test de la série interaction choc-marche, des calculs et comparaisons sont faits pour l'interaction d'un choc avec une abrupte contraction étudiée auparavant par Falco-*vit* *et al.* [11], avec les mêmes conditions initiales à savoir de l'air ambiant inerte ($\rho_0 = 1,29 kg/m^3$ et $p_0 = 0,1MPa$).

Un choc se propageant dans un conduit de 100 mm de hauteur interagit avec une contraction brusque jusqu'à une hauteur de 10 mm, correspondant à un taux de réduction de 100 :10. Un choc réfléchi apparaît dans le conduit large et un autre est transmis dans le conduit étroit. Une dis-

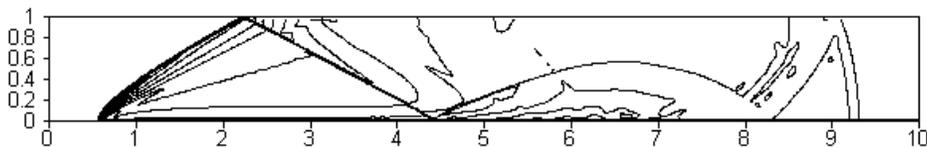


Fig. 6.7: Soufflerie à Mach 3 avec marche ascendante du tunnel modifiée, contours de densité. Les contours de densité obtenus en résolvant les équations d'Euler 2D sont montrés à l'instant $6.87ms$. Les résultats 2D seront moyennés par section et utilisés comme références pour les modèles réduits 1D.

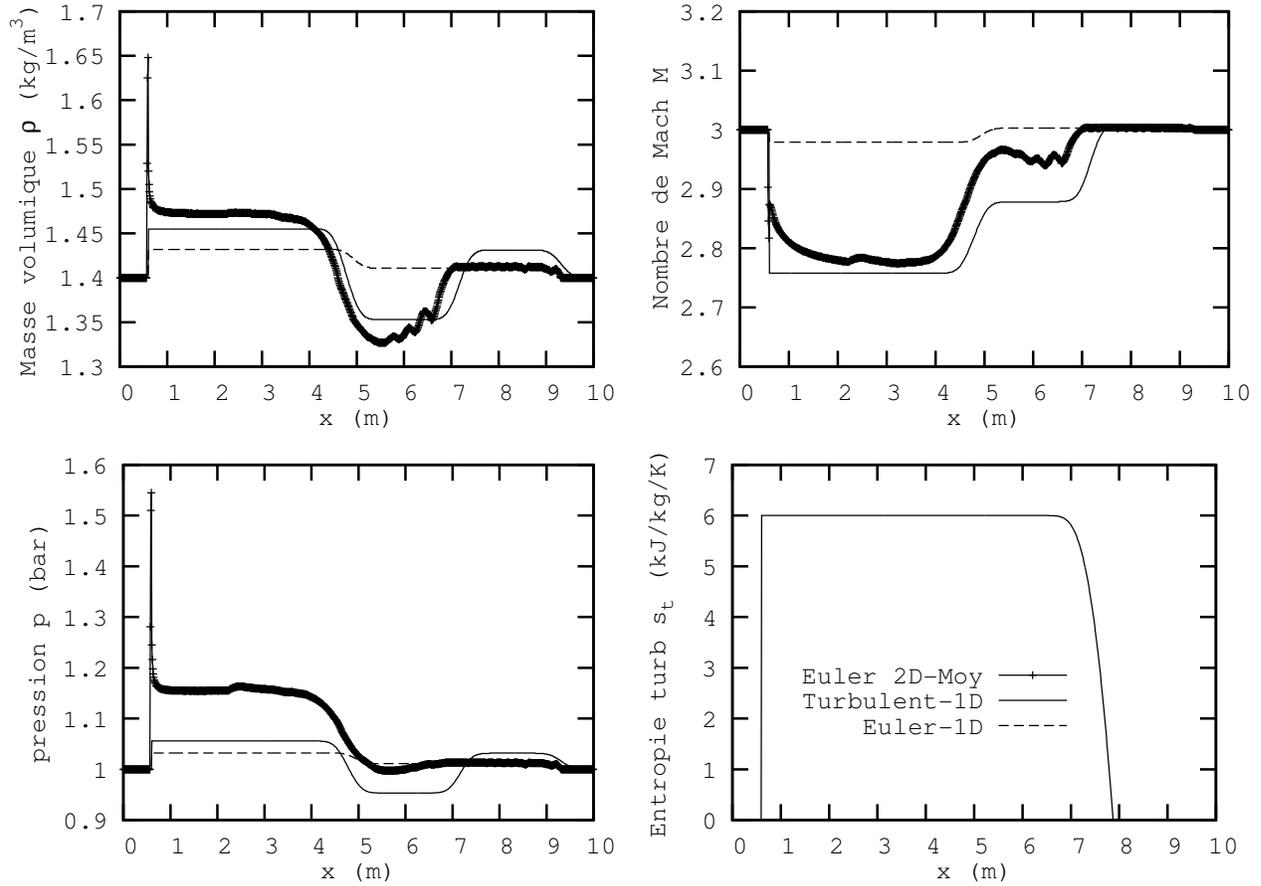


Fig. 6.8: Soufflerie à Mach 3 avec la marche ascendante du tunnel modifiée, évolutions de ρ , M , p et s_t en fonction de x . Les évolutions de la densité ρ , du nombre de Mach M , de la pression p et de l'entropie turbulente s_t en fonction de x sont montrées à l'instant $6.87ms$. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du nouveau modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D.

continuité de contact se propage dans le conduit étroit derrière le choc transmis et un écoulement complexe se produit à l'entrée de ce dernier. Comme il a été mentionné dans [11] un blocage sonique peut apparaître. Mais de la turbulence apparaît également, comme nous le verrons plus loin.

Des calculs numériques 2D pour un choc incident de nombre de Mach $M_{CI} = 3$ sont réalisés. La méthode décrite en 3.2.1 est utilisée et les moyennes par section sont déterminées, comme le montre la figure 6.9. Ces résultats, comparés à ceux de [11] (Figure 3 de cette référence), montrent un excellent accord. La méthode de la sous Section 3.2.1 et le schéma GRP [5] utilisé par Falcovitz *et al.* [11] sont de précisions comparables, et dans tous les cas, assez précis pour les comparaisons avec les différents modèles 1D.

Les mêmes notations que dans [11] sont utilisées : l'indice 0 correspond à l'état initial, l'indice 1 à l'état derrière le choc incident, l'indice 2 à l'état derrière le choc réfléchi, l'indice 3 à l'état à l'entrée du conduit étroit et les indices 4 et 5 aux états à gauche et à droite de la discontinuité de contact qui se propage derrière le choc transmis, comme le montre la figure 6.10.

La précision des modèles 1D est maintenant évaluée en comparant les courbes du taux d'amplification de la pression $\left(\frac{p - p_0}{p_1 - p_0}\right)$ en fonction de la distance réduite (L/H) avec celle obtenue par les calculs 2D. Deux régimes d'écoulements sont considérés, le premier à $M_{CI} = 1.5$ et le second à $M_{CI} = 3$. Les résultats correspondants sont montrés par la figure 6.11 aux instants $181\mu s$ pour le cas subsonique et $196\mu s$ pour le cas supersonique.

Pour le même taux de réduction 100 :10 et une large gamme d'intensité du choc incident $\left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right)$, le facteur d'amplification $\left(\frac{p_5 - p_0}{p_1 - p_0}\right)$ est calculé et le modèle Euler 1D, le modèle turbulent 1D et le modèle auto similaire de Falcovitz *et al.* [11] sont comparés aux résultats 2D moyennés. Le résultat est donné sur la Figure 6.12. Le modèle de Falcovitz *et al.* [11] surestime le facteur d'amplification de 9% pour les chocs forts à 14% pour les chocs faibles. Cette erreur est divisée par 2 pour le modèle Euler 1D et tend à disparaître pour le modèle turbulent 1D pour les chocs faibles. Cependant, les deux modèles réduits 1D sous-estiment le facteur d'amplification de 9% pour les chocs forts. En résumé, bien que l'effet de la production turbulente n'est pas significatif pour les chocs forts, dans l'ensemble le modèle 1D turbulent est plus proche des résultats 2D moyennés.

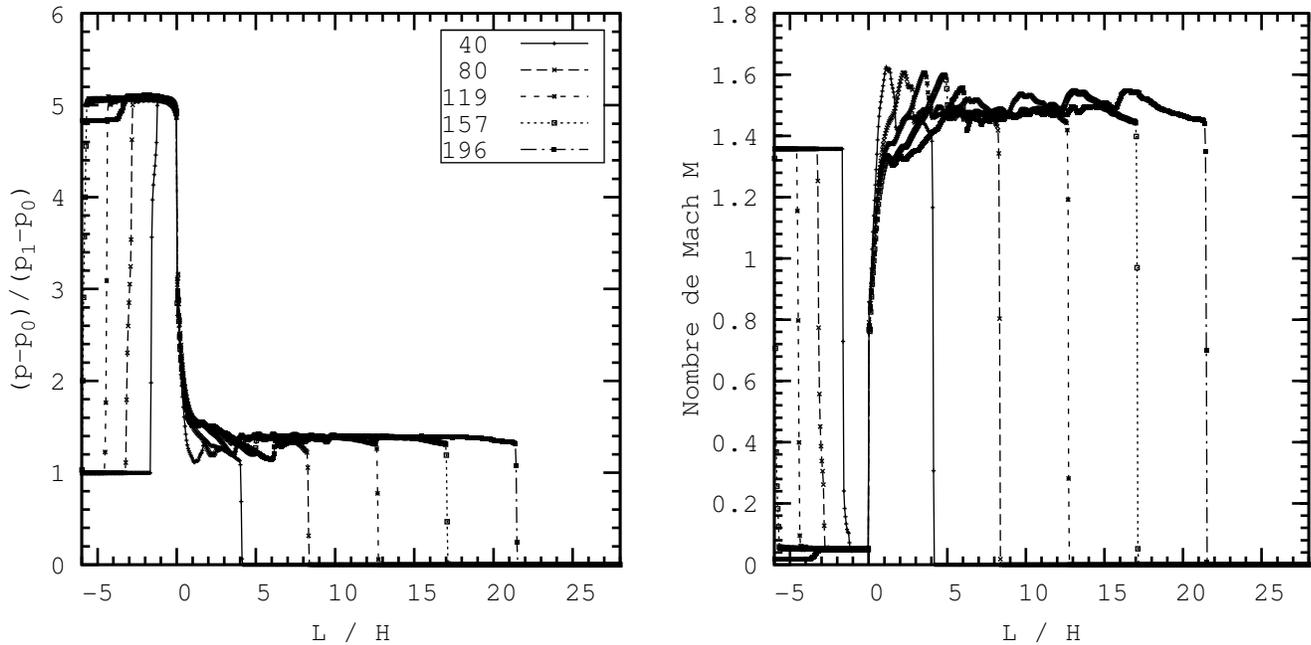


Fig. 6.9: Interaction d'un choc avec une forte abrupte réduction de section. $(p - p_0)/(p_1 - p_0)$ et M en fonction de (L/H) Le taux d'amplification de la pression $(p - p_0)/(p_1 - p_0)$ et le nombre de Mach M en fonction de la distance de l'entrée du conduit étroit (L/H) sont montrés à plusieurs instants en μs , pour un choc incident $M_{ci} = 3$ et une contraction de section de 100 :10. H est la hauteur du conduit étroit. Ces résultats 2D moyennés sont très proches de ceux de [11] obtenus par la méthode GRP.

6.2 Interactions détente-discontinuité géométrique

Le septième test, premier dans le cas de l'interaction détente-discontinuité géométrique, consiste en l'étude de l'interaction d'une onde de détente faisant face à gauche avec une marche descendante. Comme l'onde fait face à gauche, elle interagit avec une abrupte contraction. L'interaction avec un segment de réduction continue dans un conduit a été étudiée analytiquement et numériquement par Gottlieb *et al.* [15, 15] et Igra *et al.* [20] se basant sur le modèle 1D conventionnel. Un tube à choc long de 4 m est utilisé dans l'étude avec le diaphragme séparant les chambres haute et basse pression localisé à 3 m du fond de la chambre haute pression et la discontinuité géométrique localisée à 2,5 m. Les conditions initiales sont celles du Tableau 6.1. Les résultats 2D moyennés par section sont montrés sur la Figure 6.13 avec l'évolution temporelle du bas en haut. L'intervalle de temps entre deux courbes est de 0.615ms. La propagation de la détente de droite à gauche est visible sur chaque variable de l'écoulement. Elle interagit avec la singularité géométrique au troisième instant

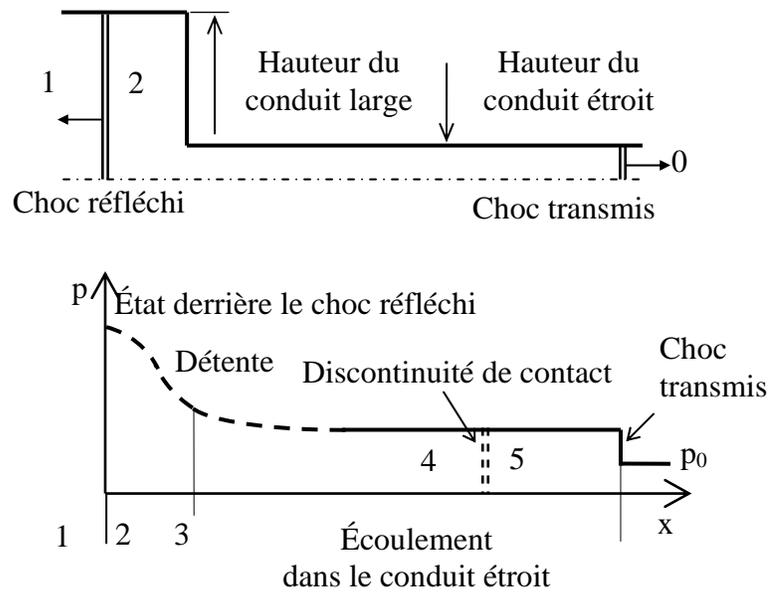


Fig. 6.10: Écoulement en aval de l'entrée du conduit étroit.

représenté. L'interaction résulte en deux ondes de détente, l'une transmise et l'autre réfléchie. Les deux sont observables sur la quatrième courbe à partir du bas. L'onde de détente réfléchie se propage dans la direction opposée à celle de l'onde incidente, i.e. dans la direction de l'écoulement et est visible sur les quatrième et cinquième courbes. Elle sort du domaine représenté sur les sixième et septième courbes. L'interaction de la détente avec la marche résulte aussi en l'apparition d'un vortex qui induit une chute locale dans la pression et la densité à droite de la discontinuité.

Nous comparons, maintenant, les prédictions des modèles 1D par rapport aux calculs 2D. Les résultats correspondants sont montrés sur la Figure 6.14. La pression et la densité sont normalisées (adimensionnalisées) avec les valeurs initiales de la chambre haute pression. Le nombre de Mach, la pression normalisée et la densité normalisée sont montrés comme fonction de l'espace à deux instants différents $t_0 + \Delta t$ et $t_0 + 5\Delta T$ ($\Delta t = 0.615ms$) où t_0 correspond à la première courbe à partir du bas de Figure 6.13. L'évolution dans le temps d'une variable donnée de l'écoulement est à observer de gauche à droite. Des différences importantes sont visibles, de part et d'autre de la discontinuité géométrique, sur la colonne de droite où le nombre de Mach est montré en haut, puis la pression normalisée, suivie de la densité en bas. Les résultats 2D et 1D turbulent sont presque

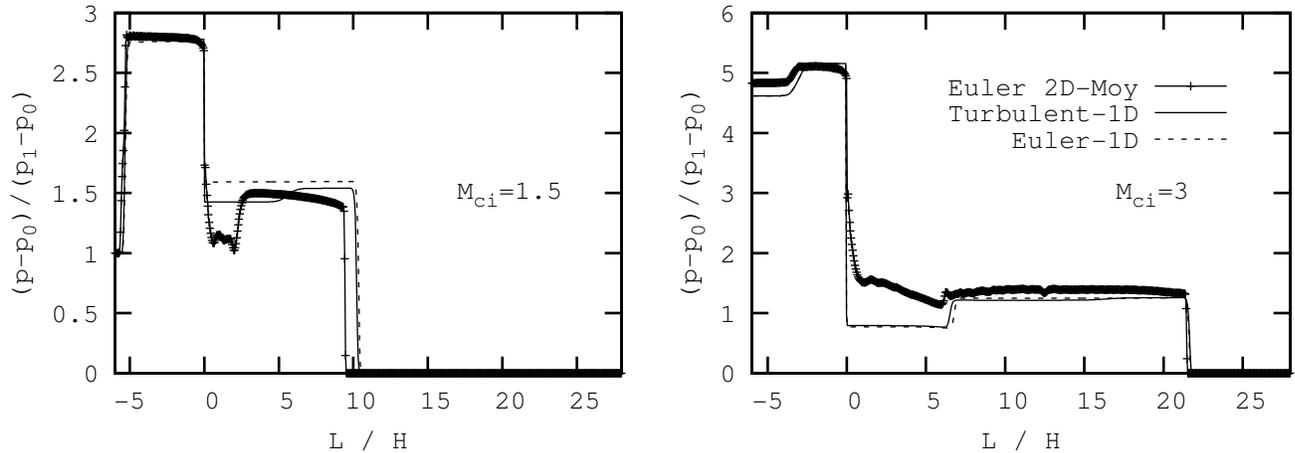


Fig. 6.11: Interaction choc-forte abrupte réduction. Comparaison du taux d'amplification de la pression $(p-p_0)/(p_1-p_0)$ versus la distance réduite (L/H) pour une contraction 100 :10 produit par les différents modèles. Pour un choc incident de $M_{ci} = 1.5$ à l'instant $181\mu s$ (à gauche), les différents modèles ont des prédictions rapprochées, le modèle turbulent étant légèrement en meilleur accord avec les calculs 2D. Pour le nombre de Mach $M_{ci} = 3$ et l'instant $196\mu s$ (à droite), les modèles 1D produisent pratiquement les mêmes résultats mais s'accordent bien avec les calculs 2D sauf pour la détente qui caractérise l'écoulement supersonique, à la sortie de la singularité géométrique.

indiscernables.

Le huitième test consiste en l'interaction d'une onde de détente faisant face à gauche avec une marche ascendante vis à vis de la direction de l'écoulement. Comme l'onde fait face à gauche, elle interagit avec un abrupt élargissement de la section transversale du conduit. Une telle interaction, en présence d'un segment d'élargissement continu dans un conduit, a été étudiée analytiquement et numériquement par Igra *et al.* [19–21] et se basant sur le modèle 1D conventionnel. La géométrie et les conditions initiales correspondent au test précédent sauf que le rapport de section (S_L/S_R) est pris égal à 2. Les résultats 2D moyennés par section sont montrés sur la Figure 6.15 avec une évolution temporaire du bas en haut. L'intervalle de temps entre deux courbes est de $0.582ms$. La propagation de la détente est clairement visible sur chaque variable de l'écoulement. Elle interagit avec la singularité géométrique au troisième instant représenté. L'interaction avec la marche localisée à 2.5 m du fond de la chambre haute pression résulte en une détente transmise et un choc réfléchi faisant face à droite. Les deux ondes sont observables sur la quatrième courbe à partir du bas. L'intensité de l'onde transmise est légèrement plus grande que la moitié de celle de l'onde principale incidente. L'onde réfléchie se propage dans la direction opposée à celle des deux ondes incidente et

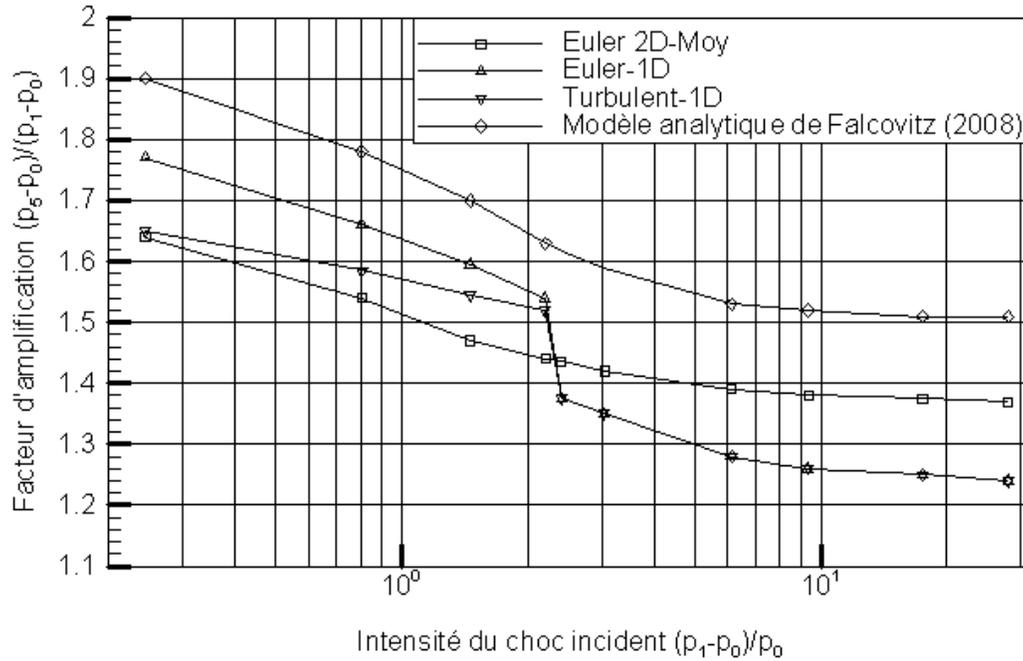


Fig. 6.12: Évolution du facteur d'amplification $(p_5 - p_0)/(p_1 - p_0)$ en fonction de $(p_1 - p_0)/p_0$, intensité du choc incident, pour un taux de contraction de section de 100 :10. Les modèles 1D sont comparés aux références numériques 2D. Le meilleur accord est obtenu avec le nouveau modèle.

transmise, i.e. dans la direction de l'écoulement généré, et est à peine perceptible sur les quatrième et cinquième courbes. Cette onde de compression est très faible à cause de la faiblesse de la détente principale et du taux d'élargissement élevé. Elle sort du domaine représenté sur les sixième et septième courbes. Comme pour le test précédent l'interaction de l'onde de détente incidente avec la marche résulte là aussi en l'apparence d'un vortex qui induit une chute locale de pression et de densité à droite de la marche ascendante (relativement à l'écoulement).

Nous comparons, maintenant, les prédictions des modèles 1D par rapport aux calculs 2D. Les résultats correspondants sont montrés sur la Figure 6.16. La pression et la densité sont normalisées avec les valeurs initiales de la chambre haute pression. Le nombre de Mach, la pression normalisée et la densité normalisée sont montrés comme fonction de l'espace à deux instants différents $t_0 + \Delta t$ et $t_0 + 5\Delta t$ ($\Delta t = 0.582ms$) où t_0 correspond à la première courbe à partir du bas de figure 6.15. L'évolution dans le temps d'une variable donnée de l'écoulement est à observer de gauche à droite. Des différences importantes sont visibles, juste à droite de la discontinuité géométrique, sur la colonne de droite où le nombre de Mach est montré en haut, puis la pression normalisée, suivie de

la densité en bas. En revanche, les résultats 2D et turbulents 1D sont relativement en bon accord concernant les graphiques de la pression et la densité.

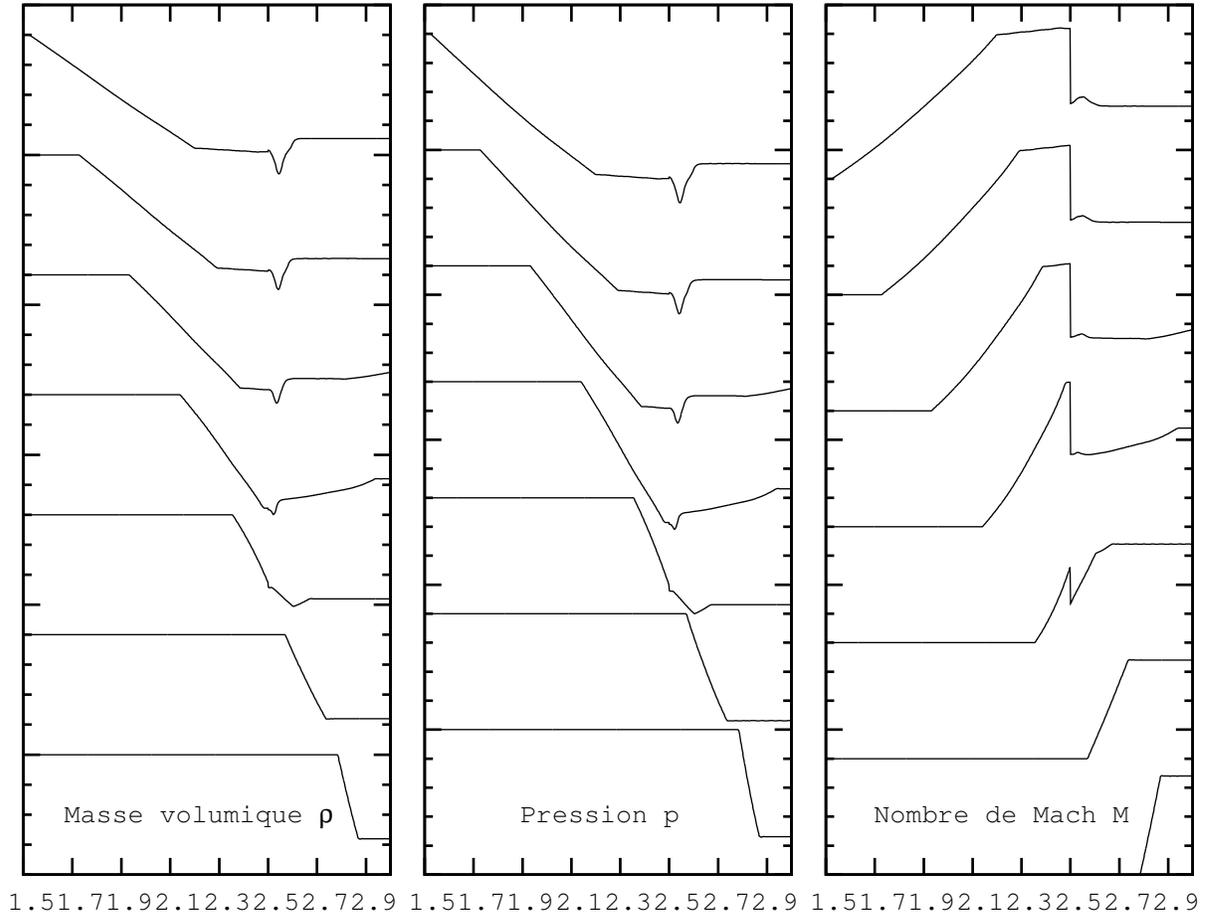


Fig. 6.13: Interaction onde de détente-marche descendante. Évolution de la densité, de la pression et du nombre de Mach en fonction de x à différents instants. Les résultats 2D moyennés sont montrés à sept instants différents avec un intervalle régulier de temps $\Delta t = 0.615ms$ du bas en haut. Les évolutions de la densité normalisée (adimensionnelle) en fonction de x sont montrées aux différents instants dans la colonne de gauche. La pression normalisée est montrée dans la colonne du milieu et le nombre de Mach dans la colonne de droite. L'onde de détente incidente se propageant vers la gauche est bien visible. Durant l'interaction avec la marche localisée à l'abscisse 2.5 m, qui a lieu au troisième instant à partir du bas, l'onde incidente se fractionne en une détente transmise face à gauche et une autre réfléchie face à droite visible sur les quatrième et cinquième courbes. Les chutes locales de densité et de pression qui sont visibles sur la quatrième à la septième courbes à partir du bas, à droite de la discontinuité géométrique sont dues à la création de la turbulence.

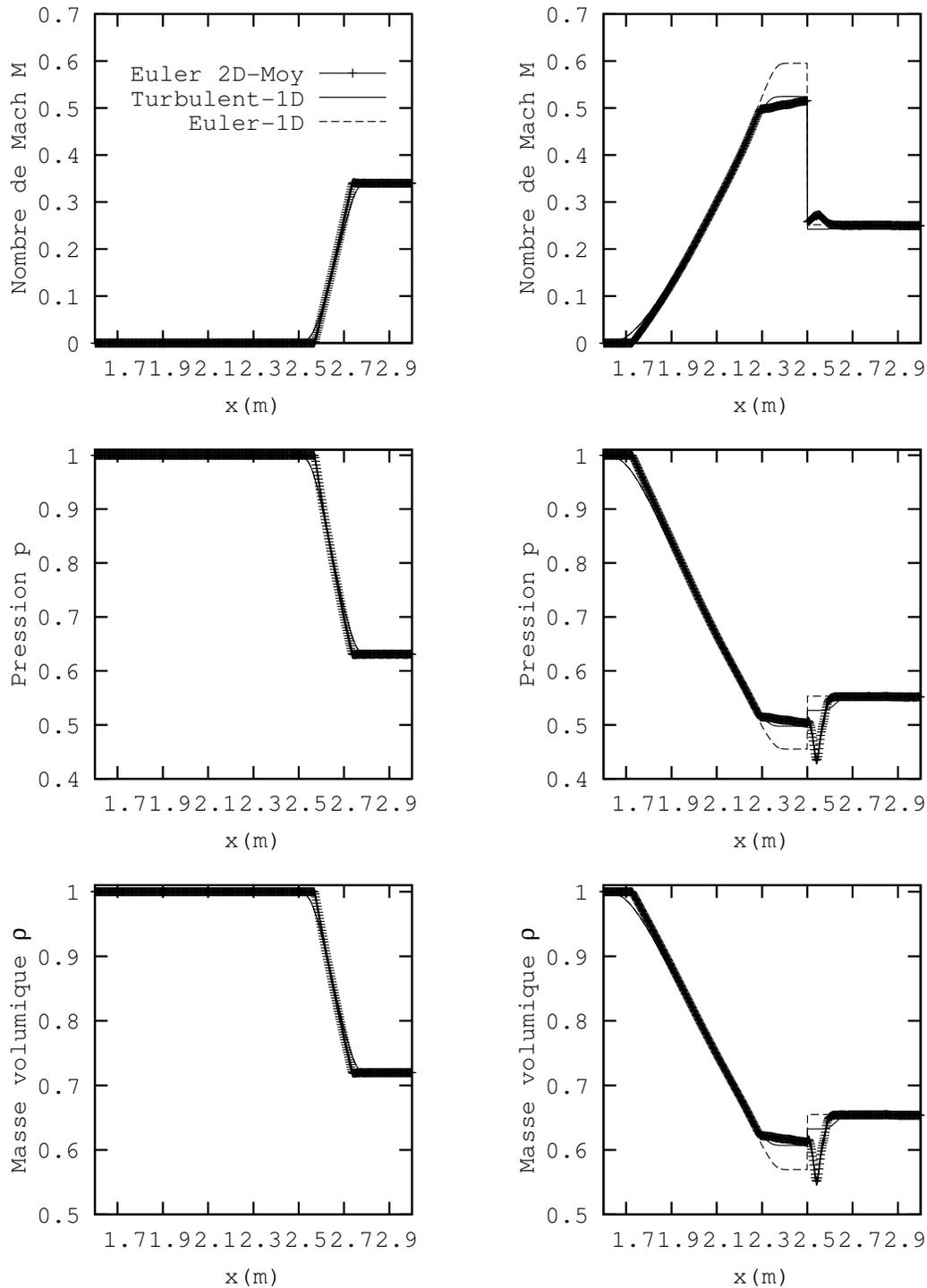


Fig. 6.14: Interaction onde de détente-marche descendante. Évolution de la densité, de la pression et du nombre de Mach en fonction de x aux instants 1.25 ms et 3.71 ms. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du nouveau modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D.

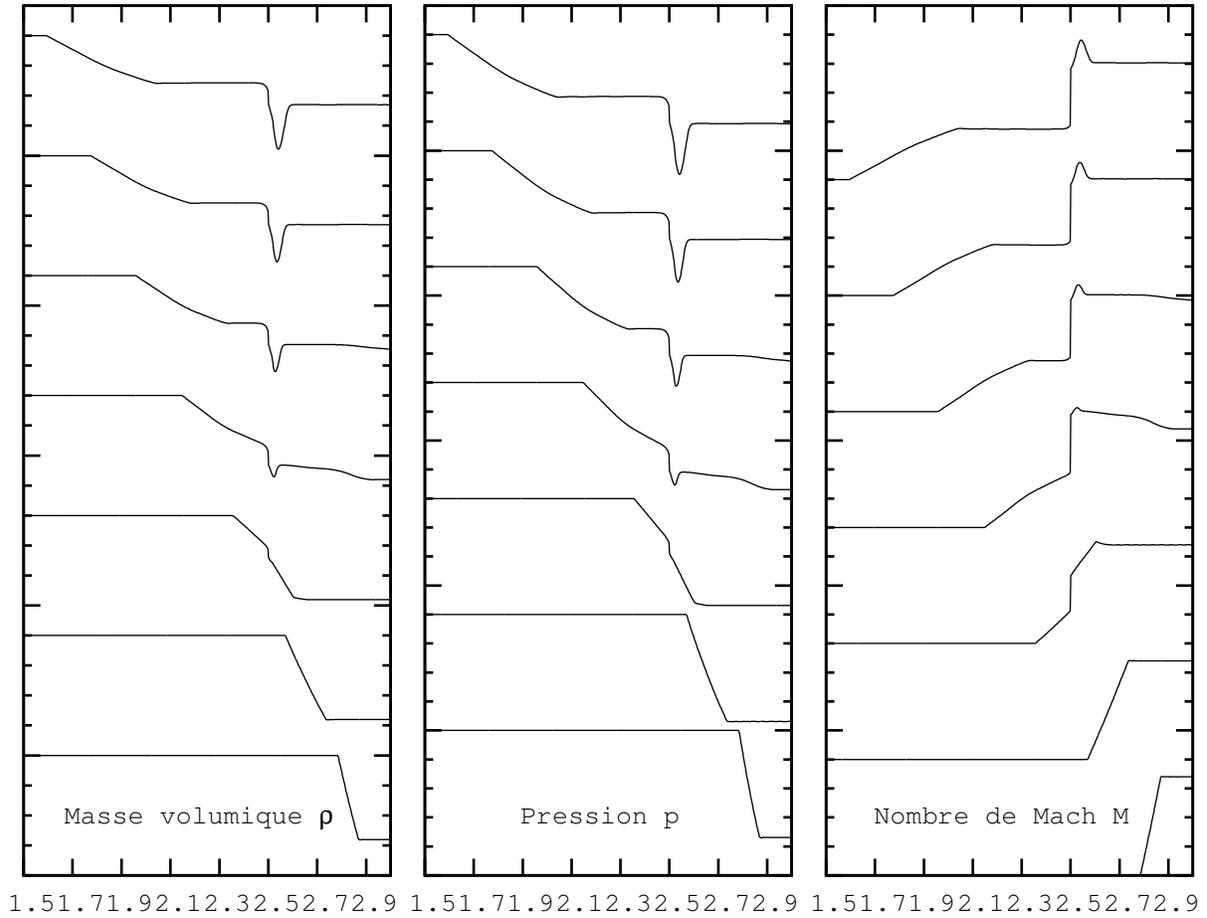


Fig. 6.15: Interaction onde de détente-marche ascendante. Évolution de la densité, de la pression et du nombre de Mach en fonction de x à différents instants. Les résultats 2D moyennés sont montrés à sept instants différents avec un intervalle régulier de temps $\Delta t = 0.582$ du bas en haut. Les évolutions de la densité normalisée (adimensionnelle) en fonction de x sont montrées aux différents instants dans la colonne de gauche. La pression normalisée est montrée dans la colonne du milieu et le nombre de Mach dans la colonne de droite. L'onde de détente incidente se propageant vers la gauche est bien visible. Durant l'interaction avec la marche localisée à l'abscisse 2.5 m, qui a lieu au troisième instant à partir du bas, l'onde incidente se fractionne en une détente transmise faisant face à gauche et un choc réfléchi faisant face à droite à peine visible sur les quatrième et cinquième courbes. L'onde de compression réfléchi est bien faible à cause de la faiblesse de l'onde de détente principale. Comme dans le cas de l'interaction avec une marche descendante, les chutes locales de densité et de pression qui sont visibles sur la quatrième à la septième courbes à partir du bas, à droite de la discontinuité géométrique sont dues à la création de la turbulence.

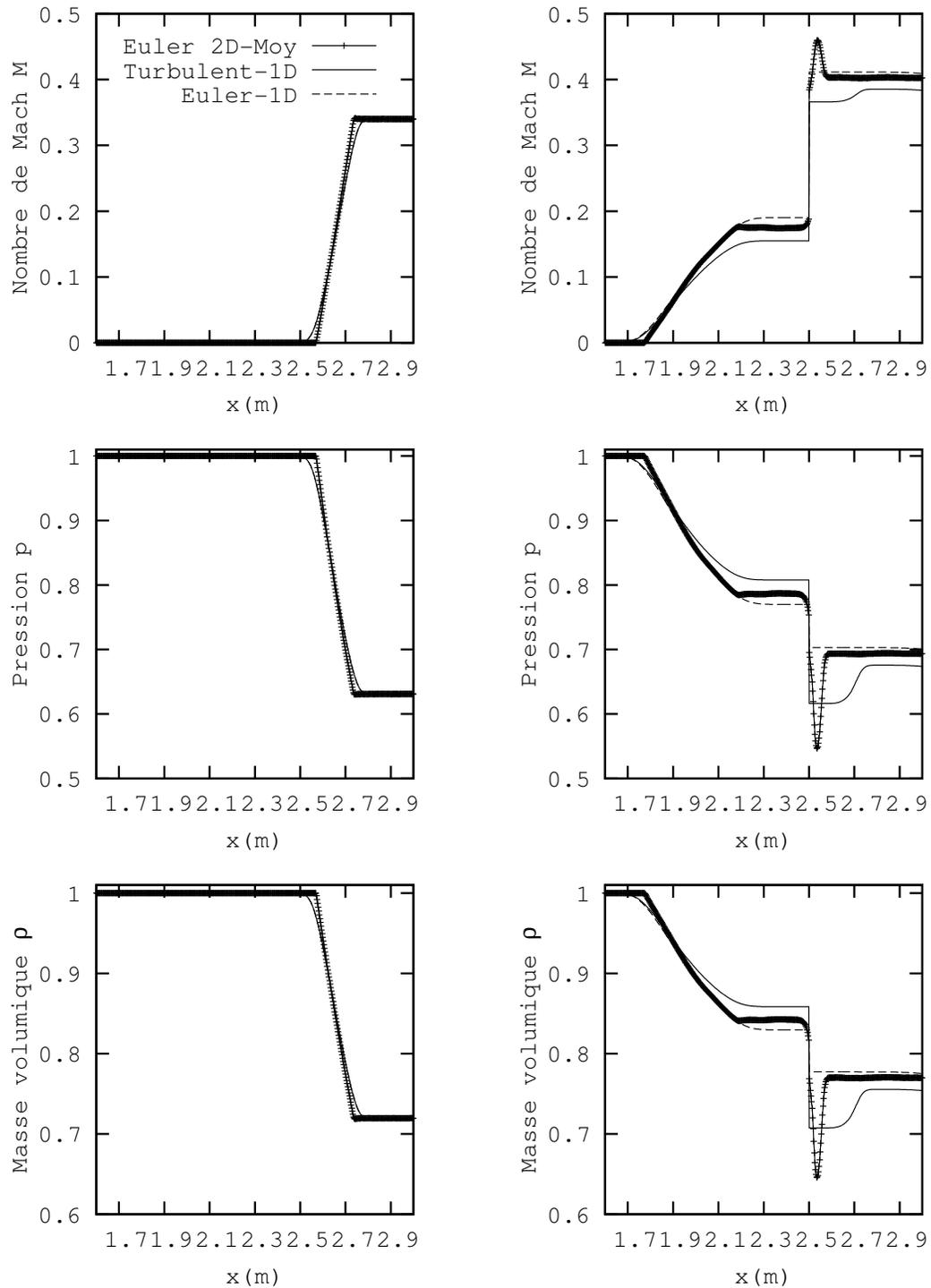


Fig. 6.16: Interaction onde de détente-marche ascendante. Évolution de la densité, de la pression et du nombre de Mach en fonction de x aux instants 1.25 ms et 3.58 ms. Les résultats 2D moyennés en traits continus avec symboles sont utilisés comme résultats de référence pour évaluer la précision du modèle conventionnel 1D (en traits discontinus) et du nouveau modèle turbulent 1D (en traits continus). Le nouveau modèle 1D est en meilleur accord avec les calculs 2D que le modèle Euler 1D en considérant la production de la turbulence.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Un modèle turbulent monodimensionnel pour les écoulements compressibles dans les conduits à sections variables a été construit. Il est capable de traiter la propagation des ondes de choc et de détente à travers les singularités géométriques, aussi bien en régime subsonique que supersonique. Il a été validé par des résultats numériques, moyennés par section, obtenus à l'aide des équations d'Euler 2D. Les prédictions du modèle turbulent 1D sont souvent proches des résultats de référence 2D et dans tous les cas sont en meilleur accord que ceux du modèle Euler 1D. En effet, le modèle classique 1D ne considère pas les effets multi-D tels que les tourbillons. Le présent modèle est une tentative de prise en compte de ces effets par une modélisation monodimensionnelle basée sur une approche thermodynamique.

Cependant, dans le cas des interactions choc-divergent, les simulations numériques montrent que le passage d'un écoulement subsonique, dans lequel une onde de détente réfléchie se propage vers l'amont, à un écoulement où un état sonique est produit juste à l'entrée du divergent n'est pas bien localisé par l'analyse des frontières à l'aide de la théorie des écoulements stationnaires 1D, relativement aux prédictions 2D. Le modèle turbulent prévoit une amélioration qui n'est pas négligeable. Il serait donc intéressant de reprendre cette analyse dans le contexte du modèle turbulent. Les simulations numériques 2D ont montré aussi que dans le même cas des interactions choc-divergent les tourbillons entraînés en aval tendent à disparaître. Il y a forcément transfert de l'énergie turbulente en énergie interne. Cette dissipation de l'énergie turbulente n'est pas due à la viscosité, le modèle 2D étant non visqueux. Il serait là aussi intéressant de se pencher sur ce problème pour le comprendre et munir par la suite le modèle turbulent 1D de ce mécanisme de transfert.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abate G., Experimental investigations of shock waves undergoing sudden expansion in a confined chamber, PhD Dissertation, University of Florida, Gainesville (1999)
- [2] Abate G. and Shyy W., Dynamic structure of confined shocks undergoing sudden expansion, *Progress in Aerospace Sciences*, 38, 23-42 (2002)
- [3] Andrianov N. and Warnecke G., On the Solution to the Riemann Problem for the Compressible Duct Flow, *SIAM J. Appl. Math.*, 64(3), 878-901 (2004)
- [4] Baer M. R. and Nunziato J. W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 12, 6, 861-889 (1986)
- [5] Ben Artzi M. and Falcovitz J., A Second Order Godunov-type scheme for Compressible Fluid Dynamics, *J. Comput. Phys.*, 55, 1-32 (1984)
- [6] Chester W., The propagation of Shock Waves in a Channel of Non-Uniform Width, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 6, 440-452 (1953)
- [7] Chester W., The propagation of Shock Waves Along Ducts of Varying Cross Section, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, 6, 119-152 (1960)
- [8] Chisnell R. F., The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves, *J. Fluid Mech.*, 2, 286-298 (1957)
- [9] Dal Maso G., Le Floch P. G. and Murat F., Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pure Appl.*, 74, 483-548 (1995)

-
- [10] Emanuel G., Satyanand U. S. and Lu F. K., Performance of a Shock Tube with a Large-Area Contraction, *AIAA J.*, 43, 1995-1999 (2005)
- [11] Falcovitz J. and Igra O., Model for shock interaction with sharp area reduction, *Proc. IMechE Part G : J. Aerospace Engineering*, 222, 789-800 (2008)
- [12] Glimm J., solution in the Large for Nonlinear Hyperbolic System of Equations, *Communications of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 18, 697-715 (1965)
- [13] Greatrix D. R. and Gottlieb J. J., An Analytical and Numerical Study of Shock Wave Interaction with an Area Change, UTIAS Report No 268, University of Toronto Institute for Aerospace Studies (1982)
- [14] Godounov S. K., Zabrodine A., Ivanov M, Kraïko A. and Prokopov G., *Resolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz (en Français)*, Editions Mir (1979)
- [15] Gottlieb J. J. and Igra O., Interaction of rarefaction waves with area reductions in ducts, *J. Fluid Mech.*, 137, 285-305 (1983)
- [16] Gottlieb J. J. and Saito T., An Analytical and Numerical Study of the Interaction of rarefaction waves with area Changes in ducts Part 1 : Area Reductions, UTIAS Report No 272, University of Toronto Institute for Aerospace Studies (1983)
- [17] Guderley G., Non-stationary gas flow in thin pipes of variable cross-section, *NACA TM No 1196* (1948)
- [18] Heuydong K. and Toshiaki S., Interaction of Unsteady Expansion Wave with the Change of Cross-Sectional Area in Tube, *KSME J.*, Vol. 10 ,No. 4, 489-497 (1996)
- [19] Igra O., Gottlieb J. J. and Saito T., An Analytical and Numerical Study of the Interaction of rarefaction waves with area Changes in ducts Part 1 : Area Enlargements, UTIAS Report No 273, University of Toronto Institute for Aerospace Studies (1984)
- [20] Igra O. and Falcovitz J., Numerical solution to rarefaction or shock wave/duct area change interaction, *AIAA J.*, 24, 1390-1394 (1986)

-
- [21] Igra O. and Gottlieb J. J., Interaction of rarefaction waves with area enlargements in ducts, *AIAA J.*, 23, 1014-1020 (1985)
- [22] Igra O., Wang L. and Falcovitz J., Non-stationary compressible flow in ducts with varying cross-section, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G-Journal of Aerospace Engineering*, Vol 212, G4, 225-243 (1998)
- [23] Jiang J., Takayama K., Babinsky H. and Meguro T., Transient shock wave flows in tubes with sudden change in cross section, *Shock Waves*, 7(3), 151-162 (1997)
- [24] Jourdan G., Houas L., Schwaederle L., Layes G., Carrey R. and Diaz F., A new variable inclination shock tube for multiple investigations, *Shock Waves*, 13(7), 501-504 (2004)
- [25] Kahane A., Warren W. R., Griffith W. C. and Marino A. A., A Theoretical and Experimental Study of Finite Amplitude Wave Interactions with Channels of Varying Area, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol. 21, No 8, 505-525 (1954)
- [26] Kröner D. and Thanh M. D., Numerical solutions to compressible flows in a nozzle with variable cross-section, *SIAM J. Num. Analysis*, 43(2), 796-824 (2006)
- [27] Laporte O., On the Interaction of Shock with a Constriction, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-1740 (1954)
- [28] LeFloch P. G. and Thanh M. D., The Riemann problem for fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section, *Comm. Math. Sci.*, 1, 763-796 (2003)
- [29] LeFloch P. G. and Tzavaras A. E., Representation of weak limits and definition of nonconservative products, *SIAM J. Math Anal.*, 30(6), 1309-1342 (1999)
- [30] Louis X., Numerical simulation of compressible turbulent modelling, PhD Thesis, Univ., Paris 06 (1995)
- [31] Menina R., Saurel R., Zereg M. and Houas L., Modelling gas dynamics in 1D ducts with abrupt area change, *Shock Waves*, 21(5), 451-466 (2011)

-
- [32] Meyer R. E., On Waves of Finite Amplitude in Ducts : Part I-Wave Fronts and Part II-Waves of Moderate Amplitude. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, Vol. 5, Part 3, 257-291, (1952)
- [33] Oppenheim A. K. and Urtiew, P. A., Vector Polar Method for Shock Interaction with Area Disturbances, AFOSR TN 59-701, Tech. Note DR-4, University of California, Berkeley (1959)
- [34] Oppenheim A. K., Urtiew, P. A. and Stern, R. A., Peculiarity of Shock Impingement on Area Convergence, *Phys. of Fluids*, Vol. 2, No. 4, 427-431 (1959)
- [35] Roe P. L., Some contributions to the modelling of discontinuous flows, In *Applied Mathematics* (ed. B. Engquist), Vol. 22, 163-193 (1985)
- [36] Rosciszewski J., Calculation of the Motion of Non-Uniform Shock Waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 8, Part 3, 337-367 (1960)
- [37] Rudinger G., *Wave Diagrams for Nonsteady Flow in Ducts*, D. van Nostrand Co., Inc., (1955)
- [38] Rudinger G., Passage of Shock Waves Through Ducts of Variable Cross Section, *Physics of Fluids*, 3, 449-455 (1960)
- [39] Russell D. A. , Shock-Wave Strengthening by Area Convergence, *J. Fluid Mech.*, 27, 305-314 (1967)
- [40] Salas M. D., Shock Wave Interaction With Abrupt Area Change, Tech. Rep. NASA, 3113 (1991)
- [41] Saurel R., Chinnaya A. and Renaud F., Thermodynamic analysis and numerical resolution of a turbulent-fully ionized plasma flow model, *Shock Waves*, 13(4), 283-297 (2003)
- [42] Saurel R., Gavriluk S. and Renaud F., A multiphase model with internal degrees of freedom : application to shock-bubble interaction, *J. Fluid Mech.*, 495, 283-321 (2003)
- [43] Schultz-Grunow, F., *Gas-Dynamic Investigation of the Pulse-Jet Tube*, NACA TM 1131, National Advisory Committee for Aeronautics (1947)

-
- [44] Sloan S. A. and Nettleton M. A., A model for the axial decay of a shock in a large abrupt area change, *J. Fluid Mech.*, 71, 769-784 (1975)
- [45] Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag (1997)
- [46] Van Albada G. D., Leer B. Van and Roberts W. W., A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics, *Astronomy and Astrophysics*, 108(1), 76-84 (1982)
- [47] Van Leer B., Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Methods, *J. Comput. Phys*, 32, 101-136 (1979)
- [48] Volpert A. I. and Hudjaev S. I., *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Martinus Nijhoff Publishers, also Kluwer Academic Publisher (1985)
- [49] Whitham G. B., On the Propagation of Shock Waves Through Regions of Non-uniform Area or Flow, *J. Fluid Mech.*, 4, 337-360 (1958)
- [50] Woodward P. and Colella P., The numerical simulations of two-dimensional fluid with strong shocks, *J. Comput. Phys.*, 54, 115-173 (1984)

ANNEXES

A. THÉORIE DE CHISNELL

Chester [6], en linéarisant les équations de l'écoulement en régime stationnaire pour tenir compte des faibles variations des paramètres de ce dernier à travers de faibles changements de section, obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{-2M_{CI}\delta M_{CI}}{(M_{CI}^2 - 1)K(M_{CI})} \quad (\text{A.1})$$

où la fonction $K(M_{CI})$ est donnée par :

$$K(M_{CI}) = 2 \left[\left(1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1-\mu^2}{\mu} \right) \left(2\mu + 1 + \frac{1}{M_{CI}^2} \right) \right]^{-1} \text{ avec}$$

$$\mu^2 = \frac{(\gamma-1)M_{CI}^2 + 2}{2\gamma M_{CI}^2 - (\gamma-1)}.$$

L'équation (A.1) qui relie le nombre de Mach du choc incident M_{CI} à la section S a été obtenue un peu plus tard, d'une manière plus simple, par Whitham [49]. En l'intégrant, Chisnell [8] obtient une relation approchée exprimant le nombre de Mach du choc incident ou le rapport des pressions à travers le choc en fonction de la section,

$$Sf(z) = \text{constante}, \quad (\text{A.2})$$

z , le rapport des pressions à travers le choc incident, s'exprime en fonction du nombre de Mach M_{CI} par :

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(M_{CI}^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz et la fonction $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = z^{1/\gamma}(z-1) \left[z + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{-1/2} \left[\frac{1+\phi}{1-\phi} \right]^{\sqrt{\gamma/2(\gamma-1)}} \left[\frac{\phi - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{1/2}}{\phi + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{1/2}} \right] \times \\ \exp \left[\left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2} \tan^{-1} \left(\frac{2\phi\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \right) \right]$$

où

$$\phi = \left[1 + \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)z} \right]^{-1/2} .$$

Connaissant le nombre de Mach du choc incident ou le rapport des pressions à travers ce dernier, pour une section donnée, l'intensité du choc peut être déterminée pour une autre section en appliquant une méthode itérative à la relation de Chisnell (A.2).

B. MODÈLE DE TRANSPORT TURBULENT DANS LES CONDUITS À SECTIONS VARIABLES

Écrivons le Système (4.5) sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(U) = 0 \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$U = (\rho, \rho \vec{u}, \rho E, \rho s_t)^T \quad \text{et}$$

$$F(U) = (\rho \vec{u}, (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + P), (\rho E + P) \vec{u}, \rho s_t \vec{u})^T$$

où $\vec{u} = u \vec{i}$, \vec{i} étant le vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement.

La forme intégrale du Système (B.1) dans un volume de contrôle V délimité par une surface de contrôle S s'écrit :

$$\int_V \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(U) \right) dV = 0$$

qui devient à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_S \vec{F}(U) \cdot \vec{n} dS = 0$$

où \vec{n} est le vecteur directeur de la normale à S .

Faisons évoluer, pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t^{j+1} - t^j$, la solution dans la $i^{\text{ème}}$ cellule de la Figure B.1 qui montre un maillage 1D au niveau de la discontinuité de la conduite. Nous obtenons :

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}} \int_{V_i} \frac{\partial U}{\partial t} dV dt + \int_{t^j}^{t^{j+1}} \int_{S_i} \vec{F}(U) \cdot \vec{n} dS dt = 0 \quad (\text{B.2})$$

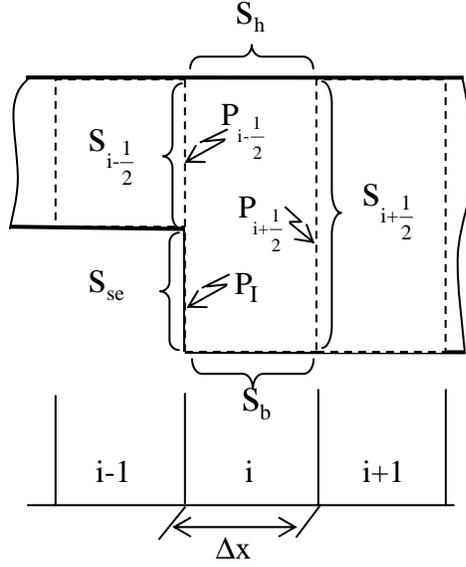


Fig. B.1: Maillage 1D d'un conduit à section discontinue

La cellule étant fixe dans le temps et les flux étant supposés constants pendant Δt , l'équation B.2 devient après développement de l'intégrale de volume :

$$\bar{U}_i^{j+1} - \bar{U}_i^j + \frac{\Delta t}{V_i} \int_{S_i} \vec{F}(U) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{B.3})$$

\bar{U}_i est le vecteur, des variables conservatives, moyen dans la cellule i , i.e. $\bar{U}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} U dV$; le symbole de la moyenne sera omis dans ce qui suit.

La surface de contrôle S (Figure B.1) se compose des surfaces fluides $S_{i\pm 1/2}$ et des surfaces ou interfaces solides (parois) d'entrée $S_{se} = S_{i+1/2} - S_{i-1/2}$, du haut de la cellule S_h et du bas S_b .

Les intégrales de surface du troisième terme de l'équation B.3 associées aux flux de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'entropie turbulente s'expriment en fonction du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{n}$ qui s'annule sur les surfaces solides. Leurs développements ne posent aucune difficulté.

Reste donc le terme des forces de pression sur la surface de contrôle S_i de l'équation de l'impulsion, i.e. $\int_{S_i} P \vec{n} ds$. Compte tenu de la décomposition de la surface de contrôle et de la répartition de la

pression sur celle-ci comme le montre la figure B.1, nous aurons :

$$\int_{S_i} P \vec{n} dS = \int_{S_{se}} P \vec{n} dS + \left[P_{i+1/2} S_{i+1/2} - P_{i-1/2} S_{i-1/2} \right] \vec{i}$$

avec :

$$\int_{S_{se}} P \vec{n} dS = -P_I S_{se} \vec{i} = -P_I \left[S_{i+1/2} - S_{i-1/2} \right] \vec{i}$$

$P_{i\pm 1/2}$ étant les pressions d'interfaces fluides $S_{i\pm 1/2}$ et P_I la pression d'interface S_{se} -fluide. La décomposition ne fait pas apparaître d'intégrales sur S_h et S_b car les forces de pression sur ces deux surfaces s'annulent mutuellement.

La section S étant constante dans chaque cellule i , nous écrivons : $V = S \Delta x$ et nous obtenons :

- pour la conservation de la masse :

$$(\rho S)_i^{j+1} - (\rho S)_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho u)_{i+1/2}^* S_{i+1/2} - (\rho u)_{i-1/2}^* S_{i-1/2} \right] = 0,$$

- pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} (\rho u S)_i^{j+1} - (\rho u S)_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho u^2 + P)_{i+1/2}^* S_{i+1/2} - (\rho u^2 + P)_{i-1/2}^* S_{i-1/2} \right] = \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} P_I \left[S_{i+1/2} - S_{i-1/2} \right], \end{aligned}$$

- pour la conservation de l'énergie :

$$(\rho E S)_i^{j+1} - (\rho E S)_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[((\rho E + P)u)_{i+1/2}^* S_{i+1/2} - ((\rho E + P)u)_{i-1/2}^* S_{i-1/2} \right] = 0 \text{ et}$$

- pour la conservation ou le transport de l'entropie turbulente :

$$(\rho s_t S)_i^{j+1} - (\rho s_t S)_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho s_t u)_{i+1/2}^* S_{i+1/2} - (\rho s_t u)_{i-1/2}^* S_{i-1/2} \right] = 0.$$

L'exposant * représente l'état solution du problème de Riemann à l'interface $S_{i\pm 1/2}$.

Les quatre équations obtenues représentent une discrétisation du système recherché, i.e. :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P) S}{\partial x} &= P_I \frac{\partial S}{\partial x} \\
 \frac{\partial \rho E S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + P) u S}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho s_t S}{\partial t} + \frac{\partial \rho s_t u S}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Remarquons que le choix d'une marche descendante dans le domaine de calcul est purement arbitraire ; l'utilisation d'une marche ascendante conduirait aux mêmes résultats. La différence de section ($S_{i+1/2} - S_{i-1/2}$) serait négative mais la pression P_I serait dans le même sens que le vecteur \vec{i} . Ceci permet de retrouver la même expression pour la force de pression sur la surface S_{se} .