République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

Mémoire

PRÉSENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTÈRE EN ÉLECTRONIQUE

Option ***:*** Robotique

Thème

Commande Adaptative Floue Type-2 d'un Bras Manipulateur

Présenté par :

HAMIZI Abdelhakim
(Ingénieur d'état en électronique)

Jury :

Noureddine SLIMANE	(M.C.A)	Univ. Batna	Président
Kheireddine. CHAFAA	(M.C.A)	Univ. Batna	Rapporteur
Mohamed Chemachema	(M.C.A)	Univ. M'sila	Examinateur
Lamir. SAIDI	(M.C.A)	Univ. Batna	Examinateur
Yassine.ABDESSEMED	(M.C.A)	Univ. Batna	Examinateur

2011/2012

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire Monsieur Kheireddine CHAFAA, Maître de Conférences à l'Université de Batna, pour la proposition de ce sujet et pour ses conseils et son soutient tout au long de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Noureddine SLIMANE,Maître de conférences à l'Université de Batna, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner et de présider le jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Messieurs les membres de jury :

Mohamed Chemachema, maître de conférences à l'Université de M'sila,

Lamir. SAIDI, Maître de conférences à l'Université de Batna,

Yassine.ABDESSEMED, Maître de conférences à l'Université de Batna

pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Sommaire

Sommaire

Introduction Générale 1

Chapitre I: Systèmes Robotiques et Modélisation

I.1. INTRODUCTION 5
I.2 CONSTITUTION ET GEOMETRIE DES ROBOTS MANIPULATEURS 6
I.2.1 Repères et paramètres de Denavit-Hartenberg 7
I.2.2 Notions de degré de mobilité, de coordonnées généralisées et de configuration 8
I.2.3 Notions de situation 9
I.2.4 Notion de degré de liberté du terminal 9
I.2.5 Notions de redondance du robot manipulateur 9
I.3 ROBOTS SERIEL 10
I.4. PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES 10
I.5 MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS 11
I.5 1. Matrice homogène 11
I.5 2. Problème Géométrique Direct et Problème Géométrique Indirect 11
I.5 3. Cinématique du manipulateur 13
I.6. DYNAMIQUE DU MANIPULATEUR PAR LA METHODE DE LAGRANGE 20
I.6.1 Dynamique du bras manipulateur à deux degrés de liberté 21
I.6.2 Forces externes 23
I.7. CONCLUSION 23

Chapitre II: Logique Floue Type-2

II.1. INTRODUCTION 24
II.2. DEFINITIONS DE LA LOGIQUE FLOU TYPE-2 24
II. 3. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES FLOUS TYPE-2 28
II.4. SYSTEMES FLOUS TYPE-2 32
II.4.1. Système Flou Type-1 34
II.4.2. Système Flou Type-2 35
II.5. REDUCTION DE TYPE ET DEFUZZIFICATION 37
II.6. CONCLUSION 43

Chapitre III : Généralités sur la Commande Adaptative

III.1. INTRODUCTION 44
III.3. COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE 45
III.4. APPROCHE DU GRADIENT 46
III.5. FONCTIONS DE LYAPUNOV 47
III.7. CONCLUSION 54

Chapitre IV : Commande Linéarisante par Retour "Feedback Linearization"

IV.1. INTRODUCTION 55
IV.2 COMMANDE LINEARISANTE 55
IV.3 APPLICATION DE LA METHODE AU PENDULE INVERSE 58
IV.4 APPLICATION DE LA METHODE AU BRAS MANIPULATEUR 62
IV.5. CONCLUSION 71

Chapitre V : Commande Adaptative Floue

V.1. INTRODUCTION 73
V.2. REGULATEUR ADAPTATIVE FLOU 73
V.3. APPLICATION ET RESULTATS DE SIMULATION 76
V.3.1. REGULATEUR FLOU TYPE-1 78
V.3.2. REGULATEUR FLOU TYPE-2 85
V.4. CONCLUSION 92

Conclusion Générale 93

Références

Introduction Générale

Introduction Générale

La commande adaptative est un ensemble de techniques permettant de fournir une approche systématique pour l'ajustement automatique d'un régulateur en temps réel, dans le but d'achever ou de maintenir des performances désirées pour le système de commande lorsque la dynamique du procédé est inconnue et/ou change au cours du temps [1][2]. Ce type de commande est aussi caractérisé par la présence d'une boucle d'identification en temps réel [3].

L'emploi de la commande adaptative nécessite la modélisation du processus à commander. Or, cette modélisation n'est pas toujours évidente surtout lorsqu'il s'agit d'un système complexe et/ou non linéaire. D'autres problèmes dus à la complexité numérique des algorithmes d'identification et à la qualité d'informations acquises limitent les performances du système commandé. Pour résoudre ces problèmes, de nouvelles techniques de commande basées sur l'expertise de l'opérateur ont été élaborées [4][5][6][7]. Le point clef de ces nouvelles stratégies réside dans l'utilisation du calcul symbolique pour la modélisation des algorithmes de commande. Cette méthodologie ouvre une nouvelle voie par l'utilisation d'heuristique (logique heuristique), en remplaçant la modélisation du régulateur par une loi de commande sophistiquée [8].

Des études faites ont montré que dans une boucle de commande, l'homme réagit comme un régulateur robuste non linéaire dont les paramètres varient au cours du temps. Ainsi, les régulateurs flous peuvent être vus comme un cas de commande experte, elle-même caractérisée par l'utilisation d'un mécanisme représentatif des jugements de l'être humain [9][8].

La théorie de la logique floue a été établie par L. Zadeh. Cette logique permet la représentation et le traitement de connaissances imprécises ou approximatives. Le nombre d'applications basées sur la théorie de la logique floue a augmenté considérablement ces dernières années [5][6][7][10]. Ceci est dû au fait que la logique floue est exprimée usuellement par des règles linguistiques de la forme Si-Alors ; elle est utilisée pour résoudre les problèmes de décisions en contrôle ou bien pour décrire le comportement dynamique d'un système inconnu ou mal défini.

La commande est l'un des principaux domaines d'application de la logique floue. Une commande floue est caractérisée par :

- Son aptitude à appréhender des problèmes tels que les non linéarités et les retards
- La possibilité de prise en compte d'objectifs contradictoires
- L'utilisation du savoir d'un expert sur la façon de piloter le système et donc la suppression de la procédure de modélisation mathématique du processus à commander.

La logique floue classique appelée aujourd'hui logique floue type-1 a été généralisée vers une nouvelle logique floue appelée logique floue type-2. Ces dernières années, Mendel et ses collègues ont beaucoup travaillé sur cette nouvelle logique [11][12][13][14][9], ils ont bâtis son fondement théorique, et ils ont démontré son efficacité et sa supériorité par rapport à la logique floue type-1.

La logique floue type-2 est très efficace dans les circonstances où il est très difficile de déterminer des fonctions d'appartenance exactes pour un système flou, par conséquent, cette nouvelle logique va nous permettre d'incorporer des incertitudes dans les règles, ce qui va agir positivement sur la sortie du système.

Il y a au moins trois sources d'incertitudes dans les systèmes flous type-1 :

- Le sens des mots utilisés dans les règles peut être incertain, c'est-à-dire qu'un mot veut dire des choses différentes à des gens différents
- Les mesures activant un système flou type-1 peuvent être bruitées, ce qui introduit des incertitudes.
- Les données utilisées pour l'ajustement des paramètres d'un système flou type-1 peuvent être aussi bruitées.

Toutes ces incertitudes mènent à obtenir des incertitudes au niveau des fonctions d'appartenance floues. Les ensembles flous type-1 ne sont donc pas capables de modéliser directement de telles incertitudes, parce que leurs fonctions d'appartenance floues sont définies d'une manière mathématique précise. De l'autre côté, les ensembles flous type-2 sont capables de modéliser de telles incertitudes parce que leurs fonctions d'appartenance sont elles-mêmes floues.

Les fonctions d'appartenance type-1 sont bidimensionnelles, par contre, les fonctions d'appartenance floues type-2 sont tridimensionnelles. La nouvelle (troisième) dimension des ensembles flous type-2 fournie un degré de liberté supplémentaire permettant de prendre en charge la modélisation des incertitudes.

Nous devons distinguer entre deux types principaux d'incertitudes : aléatoires et linguistiques [3]. Les incertitudes aléatoires sont associées aux probabilités, tandis que les incertitudes linguistiques sont associées aux systèmes flous. Dans la théorie des probabilités nous utilisons la fonction de densité de probabilité pdf, cette fonction qui contient toutes les informations des incertitudes aléatoires. Pratiquement, cette incertitude ne peut pas être déterminée, ce qui nous mène à la caractériser par ses moments. Dans la plus part des cas, nous utilisons deux de ces moments : la moyenne et la variance. L'utilisation du moment d'ordre 1 qui est la moyenne est insuffisante parce que les incertitudes aléatoires exigent la connaissance de la dispersion autour de la moyenne, ce qui est donné par le moment d'ordre 2 qui est la variance. Donc, un modèle probabiliste exige la connaissance d'au moins deux moments de la pdf.

Si nous projetons la même philosophie sur les systèmes flous, nous allons alors considérer la sortie d'un système flou type-1 comme étant la valeur moyenne de la pdf [11], donc pour que le système flou prend en charge les incertitudes, nous aurons alors besoin d'une certaine variance (dispersion), d'où la notion de système flou type-2, où la variance est considérée comme la largeur de l'ensemble de sortie de type réduit (car la sortie d'un système flou type-2 est définie sur un intervalle possédant un centre et une largeur).

Donc, pour récapituler, nous pouvons dire que la puissance majeure de la logique floue type-2 réside dans les points suivants :

- Sa capacité de prendre en compte des processus contenant des incertitudes.
- Son utilité lorsqu'il est difficile de déterminer exactement les fonctions d'appartenance.
- Sa capacité d'insérer des incertitudes dans les règles.

Le contexte de notre mémoire est d'appliquer la commande adaptative utilisant la logique floue type-2 pour commander certain types de systèmes robotiques (pendule inversé et bras manipulateur). Afin de comparer les résultats obtenus par la logique floue type-2 avec les résultats obtenus par la logique floue type-1, une étude comparative a été effectuée pour le pendule inversé.

Notre travail est organisé en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, une modélisation dynamique d'un bras manipulateur est présentée ainsi que le modèle du pendule inversé.

Le deuxième chapitre présente la logique floue type-2, où nous présentons toutes les notions et les définitions nécessaires pour comprendre cette théorie.

Dans le troisième chapitre on donne des généralités et des notions de la commande adaptative d'une manière générale.

Le chapitre 4 présente une commande linéarisante (Feedback Linearization) pour le pendule et le bras manipulateur.

Le chapitre 5 présente la commande adaptative à base de logique floue.

Enfin, nous terminons par une conclusion, présentant le bilan de ce travail, ainsi que les perspectives envisagées.

Chapitre I

Systèmes Robotiques et Modélisation

Chapitre I

Systèmes Robotiques et Modélisation

I.1. INTRODUCTION

La robotique est un domaine de la technologie moderne, qui traverse relativement les limites d'ingénierie traditionnelle. Comprendre la complexité des robots et leurs applications nécessite des connaissances en génie électrique, génie mécanique, des systèmes et génie industriel, informatique, économie et mathématiques. Des nouvelles disciplines de l'ingénierie, tels que l'ingénierie de fabrication, l'ingénierie des applications et l'ingénierie des connaissances ont émergés pour faire face à la complexité du domaine de la robotique et l'automation d'usine.

Notre objectif est de fournir une introduction complète aux concepts les plus importants appliqués à des robots manipulateurs industriels. Un traitement complet de la discipline de la robotique, il faudrait plusieurs volumes.

Le terme robot a été introduit dans notre vocabulaire par le dramaturge tchèque [Karel Capek] dans son Rossum pièce 1920 Universal Robots, le mot «Robota» étant le mot tchèque pour travailler. Depuis lors, le terme a été appliqué à une grande variété de dispositifs mécaniques, tels que téléopérateurs, véhicules sous-marins, des Land Rovers autonomes,... etc.

Pratiquement tout ce qui fonctionne avec un certain degré d'autonomie, généralement sous le contrôle de l'ordinateur, à un moment donné a été appelé un "robot" [15].

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur exprime les forces généralisées, aux différentes liaisons, en fonctions de coordonnées vitesses et accélérations généralisées. Cette fonction non linéaire est cependant linéaire par rapport aux paramètres massiques et inertiels. A partir de cette linéarité nous proposons des solutions pour l'estimation des paramètres constants et variables (ceux du dernier corps de la chaine articulée constituant le robot manipulateur) du modèle dynamique. Nous établissons une stratégie de commande

dynamique adaptative pour des tâches qui imposent des évolutions rapides avec variations non négligeables de change (prise d'objets par exemple) [16].

I.2 CONSTITUTION ET GEOMETRIE DES ROBOTS MANIPULATEURS

Un robot manipulateur est un ensemble des corps assemblés à l'aide de liaisons munies d'actionneurs et possédant deux corps particuliers. Le premier appelé base est le socle du robot; le second appelé terminal est le support d'un préhenseur ou d'un outil.

Les robots manipulateurs auxquels on s'intéresse dans le cadre de ce travail sont dotés d'une structure de chaine cinématique simple ouverte Figure I.1.

Autrement dit, tous les corps possèdent deux liaisons. Les corps sont supposés rigides et les seules liaisons considérées sont, soit rotoïdes (notées R), soit prismatiques (notées P). Elles autorisent donc chacune un seul degré de liberté correspondant à un mouvement élémentaire, soit de rotation, soit de translation. La figure I.2 représente la schématisation usuelle de ces deux types de liaison. On nommera les chaînes cinématiques par l'énumération des liaisons qui les composent en partant de la base; par exemple RRP pour une chaine comportant trois liaisons, les deux premières étant rotoïdes et la dernière est prismatique. On se place, en outre, dans le cas des robots manipulateurs munis d'un actionneur par liaison.

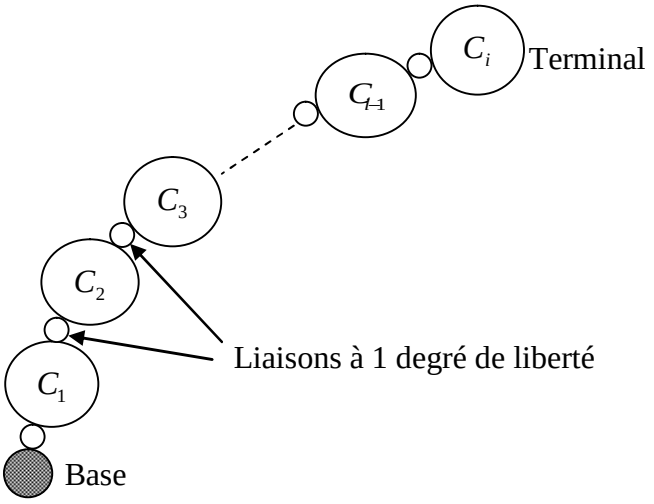


Figure I.1: Chaîne cinématique simple ouverte.

La géométrie du mécanisme est alors définie de manière systématique par l'introduction de repères affins orthonormés particuliers liés à chaque corps du mécanisme.

Ces repères particuliers et les paramètres qui les caractérisent sont exposés dans un premier temps.

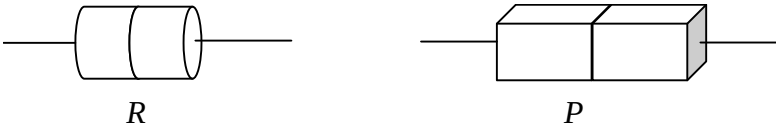


Figure I.2: Liaisons (Rotoïde) et (Prismatique) considérées en robotique.

I.2.1 Repères et paramètres de Denavit-Hartenberg

Le passage du repère R_{i-1} lié au corps C_{i-1} au repère R_i lié au corps C_i s'effectue grâce au quatre paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés: $a_{i-1}, \alpha_{i-1}, \theta_i, r_i$ Figure I.3.

La matrice de passage homogène élémentaire $T_{i-1,i}$, entre ces deux repères s'exprime ainsi:

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos\alpha_{i-1}\sin\theta_i & \cos\alpha_{i-1}\cos\theta_i & -\sin\alpha_{i-1} & -r_i\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\alpha_{i-1}\sin\theta_i & \sin\alpha_{i-1}\cos\theta_i & \cos\alpha_{i-1} & r_i\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I. 1)}$$

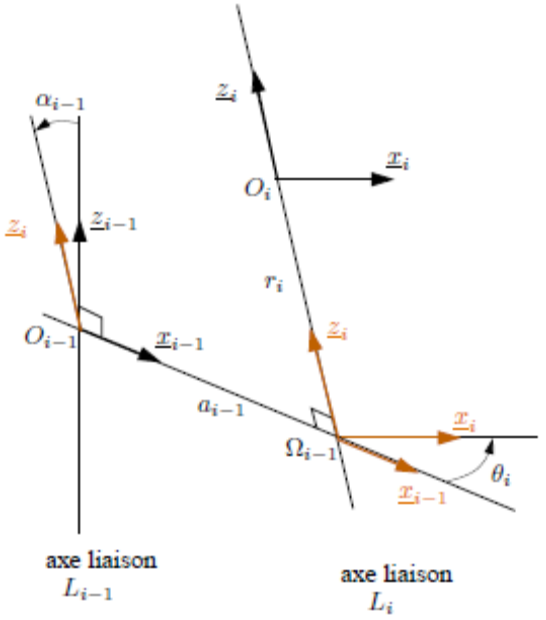


Figure I.3: Notations de forme de Denavit-Hartenberg modifiées

Il découle de ce choix particulier que le paramètre variable pour une liaison L_i donnée est selon que celle-ci est rotoïde ou prismatique, respectivement θ_i ou r_i. Par la suite, on distingue le type de la $i^{ème}$ liaison à l'aide du coefficient binaire:

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{si la liaison est rotoïde.} \\ 1 & \text{si la liaison est prismatique.} \end{cases}$$

($\overline{\sigma}_i$ désigne le coefficient binaire conjugué: $\overline{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$).

I.2.2 Notions de degré de mobilité, de coordonnées généralisées et de configuration

Le degré de mobilité M d'une chaine cinématique est le nombre de variables indépendantes, appelés coordonnées généralisées et notées q_i, que l'on doit spécifier pour positionner et/ou orienter tous les corps de la chaîne cinématique relativement à la base

Dans le cas des robots manipulateurs considérés, M est égal au nombre n de liaisons puisqu'elles ne permettent qu'un degré de liberté chacune. Selon que la liaison L_i considérée est rotoïde ou prismatique, la cordonnée généralisée q_i correspond respectivement à un débattement en translation r_i ou en rotation θ_i.Par conséquent:

$$q_i = \overline{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \qquad \text{(I. 2)}$$

La configuration d'un robot manipulateur doté de n liaisons est définie par l'ensemble des coordonnées généralisées noté $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$. La valeur des débattements étant limitée physiquement par les butées mécaniques, q appartient à l'hyper-parallélépipède D_q défini par:

$D_q = \prod_{i=1}^{n} \left(q_{i_{\min}}, q_{i_{\max}} \right)$ qui constitue le domaine de travail généralisé du robot manipulateur et qui est inclus dans l'espace généralisé ou l'espace des configurations R^n.

I.2.3 Notions de situation

La situation d'un solide par rapport à un repère de référence est la paire vectorielle constitue par la position d'un point de se solide et l'orientation d'un repère vectoriel lié à ce solide.

La situation de l'organe terminal est défini par rapport à un repère fixe lié à la base du robot manipulateur et représenté par l'ensemble des m coordonnées opérationnelles indépendantes noté $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$.

Par exemple, dans l'espace il est nécessaire d'utiliser 6 coordonnées : 3 de position et 3 d'orientation pour spécifier une situation.

X prend ses valeurs dans le domaine de travail opérationnel D_X du robot manipulateur qui est inclus dans l'espace opérationnel R^m.

I.2.4 Notion de degré de liberté du terminal

Pour une configuration particulière du robot manipulateur les m coordonnées opérationnelles peuvent être soumises par la structure du robot manipulateur à des sont à des contraintes qui imposent des relations entre elles.

Nous appelons degré de liberté local du terminal d_L le nombre de coordonnées opérationnelles indépendantes $(d_L \leq m)$. Ce nombre dépend de la configuration du robot manipulateur. Le degré de liberté du terminal, ou plus simplement degré de liberté D, est la valeur maximal de d_L lorsque q parcourt le domaine de travail généralisé D_q.

I.2.5 Notions de redondance du robot manipulateur

Pour pouvoir effectuer un mouvement quelconque et imposé dans l'espace opérationnel, le robot manipulateur doit avoir un degré de mobilité M supérieur ou égal au degré de liberté D.

Quant M est strictement supérieur à D, nous dirons que le robot manipulateur est redondant et plus précisément qu'il est redondant d'ordre $M - D$ [17].

I.3 ROBOTS SERIEL

Pour les robots sériels, le modèle géométrique direct est unique et simple à obtenir. On prend comme exemple un robot plan 2R montré dans la figure I.4.

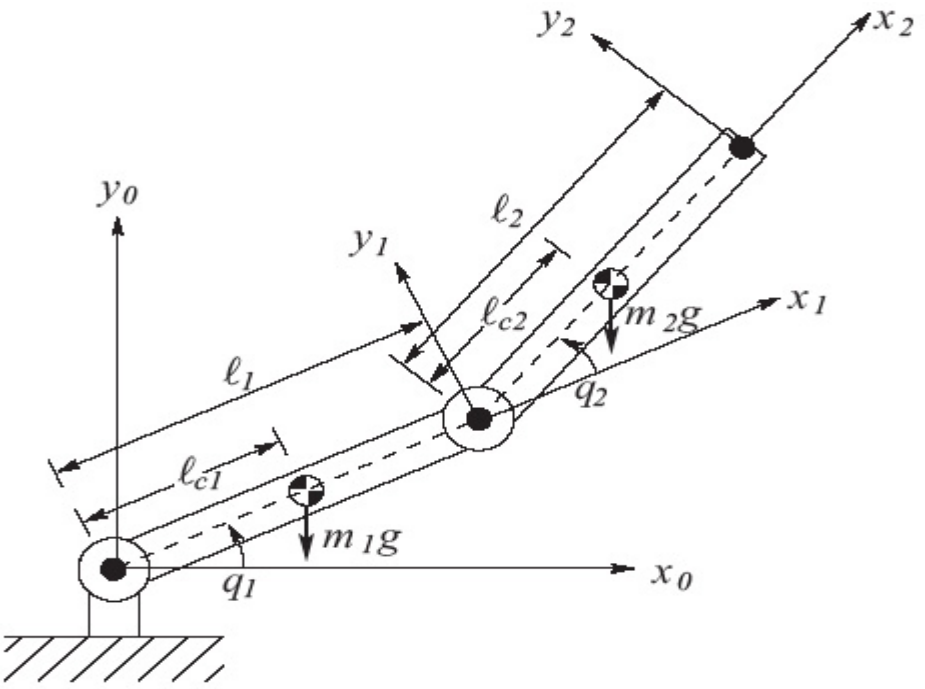


Figure I.4: Robot sériel plan RR.

On écrit le modèle géométrique direct du robot 2R de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = l_1.\cos q_1 + l_2.\cos(q_1 + q_2) \\ y = l_1.\sin q_1 + l_2.\sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad \text{(I. 3)}$$

I.4. PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES

Dans la suite, nous nous intéressons également à la planification de trajectoire des robots sériels.

La planification de trajectoire est un sujet d'étude très important en robotique. Elle se base sur trois domaines scientifiques variés. Ces domaines sont la robotique, l'intelligence artificielle et le contrôle. Le problème étudié par la planification de trajectoire, consiste à trouver un chemin « sûr » qui emmène un robot d'une position initiale à une position finale désirée pour effectuer une tâche. Par « sûr » on entend que le robot ne doit pas entrer en

collision avec les autres objets qui peuvent se trouver sur son chemin. Il ne doit pas non plus passer par des singularités qui risquent de l'endommager ou de faire perdre sa contrôlabilité.

Ce problème est très vaste et admet plusieurs variantes comme la planification de trajectoire pour les robots mobiles, la coopération de plusieurs robots, la planification sous contraintes différentielles et la planification des mécanismes à chaînes fermées. Il peut être appliqué dans d'autres domaines que la robotique, tel que la chimie par exemple pour la modélisation des molécules [18].

I.5 MODELISATION DES ROBOTS MANIPULATEURS

Nous commençons par définir quelques notions nécessaires pour la modélisation des robots.

I.5 1. Matrice homogène

La matrice homogène est une matrice 4 × 4 permettant de passer d'un repère à un repère (figure II.1). Elle s'écrit de la manière suivante :

$$ {}^{i}T_{j} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{i}A_{j} & \overrightarrow{o_i o_j} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{(I. 4)} $$

où o_i et o_j sont les origines des repères R_i et R_j respectivement. La matrice ${}^{i}A_{j}$ est une matrice orthogonale définissent l'orientation du repère R_j par rapport à R_i telle que:

$$ {}^{i}A_{j} = \begin{array}{c} \\ e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1^j & e_2^j & e_3^j \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} $$

I.5 2. Problème Géométrique Direct et Problème Géométrique Indirect

L'idée dans la résolution du problème géométrique direct (P.G.D.) ou inverse (P.G.I.) est de pouvoir passer d'un espace articulaire à un espace cartésien et vice versa.

Le P.G.D. permet, avec les équations basées sur la géométrie du robot et à partir des coordonnées articulaires, d'avoir celles de l'effecteur dans l'espace cartésien. Alors que le P.G.I. est la transformation qui permet le passage aux coordonnées dans l'espace articulaire à partir des coordonnées dans l'espace cartésien. La figure I.5 illustre ce passage.

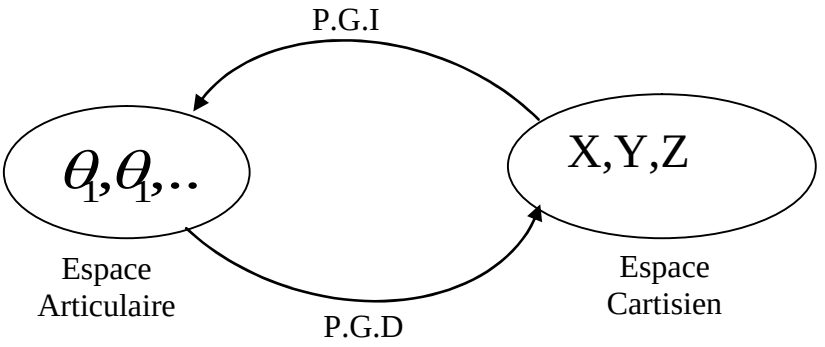


Figure I.5: Illustration du passage entre les espaces articulaire et cartésien.

Le passage d'un espace à un autre peut se faire de façon analytique ou numérique et le choix de la méthode va dépendre du type de manipulateur et du passage qu'on veut réaliser. Par exemple pour un manipulateur sériel, le P.G.D. est assez simple analytiquement, alors que si le manipulateur comporte plusieurs degrés de liberté, il est plus ardu voir impossible parfois d'avoir une solution analytique au P.G.I. Pour les manipulateurs parallèles, c'est généralement le P.G.D. qui est plus complexe à résoudre. Un avantage d'utiliser la méthode analytique consiste à obtenir toutes les solutions possibles, tandis que la méthode numérique est basée sur un processus itératif qui converge vers une solution unique.

Pour le manipulateur sériel plan à deux degrés de liberté représenté à la figure I.2, le P.G.D. se réalise facilement avec la convention Denavit & Hartenberg (D&H) et le P.G.I. analytiquement avec les équations suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{-l_1^4 - l_2^4 + 2l_1^2 l_2^2 - \left(x^2 + y^2\right)\left(2l_1^2 + 2l_1^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)^2}}{i_1 i_2} \qquad \text{(I. 5)}$$

$$B = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_1^2}{l_1 l_2} \qquad \text{(I. 6)}$$

$$\theta_2 = arctg\ 2(\pm A, b) \tag{I. 7}$$

$$\theta_1 = arctg 2\left[\frac{l_1 y - l_2\left(x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2\right)}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2\cos\theta_2}, \frac{l_1 x + l_2\left(x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2\right)}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2\cos\theta_2}\right] \tag{I. 8}$$

où l_1 et l_2 sont respectivement les longueurs des membrures (1) et (2); x, y les coordonnées cartésiennes à l'effecteur et θ_1, θ_2 les angles articulaires. Pour l'angle θ_2, le signe ± au premier argument de la fonction « arctan2 » indique les deux solutions possibles pour cet angle.

Pour la résolution numérique, elle est toujours basée sur la matrice Jacobienne J qui fait lien entre les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{\vec{p}} = J.\dot{\vec{\theta}} \tag{I. 9}$$

L'équation (I.9) est le résultat d'une suite itérative provenant d'un algorithme convergeant vers une solution. Un algorithme souvent utilisé est celui de Gauss-Newton [18], car il assure une convergence quadratique au voisinage de la solution.

I.5 3. Cinématique du manipulateur

La cinématique du manipulateur étudie les mouvements des corps sans s'intéresser aux forces, elle va permettre d'obtenir les équations qui font le lien entre les coordonnées cartésiennes de l'effecteur et les coordonnées articulaires, ainsi que les équations de vitesse de celui-ci qui servira ultimement à obtenir l'équation de l'énergie cinétique du manipulateur nécessaire au développement des équations de la dynamique selon la méthode de Lagrange.

Tout d'abord, nous devons passer du domaine articulaire au domaine cartésien en utilisant la convention D&H . Il faut d'abord définir les paramètres qui vont décrire de façon unique son architecture. Ces paramètres vont ensuite donner une suite de vecteurs $\vec{a}_i$. Qui feront le lien entre l'origine du repère de la base avec celui de l'effecteur et des matrices de rotation Q_i qui vont permettront de ramener les vecteurs obtenus dans le même repère pour en faire l'addition. Alors d'après la figure I.4, on obtient le tableau suivant des paramètres D&H du manipulateur sériel.

i	1	2
a_i	l_1	l_1
b_i	0	0
θ_i	θ_1	θ_2
α_i	0	0

Tableau : Paramètres Denavit-Hartenberg

L'équation $\sum_{i=1}^{n}[\vec{a}_i]_1 = \vec{p}$ est donnée par:

$$\vec{a}_i + Q_1\vec{a}_2 + Q_1Q_2\vec{a}_3 + ... + Q_1Q_2...Q_{n-1}\vec{a}_n = \vec{p} \qquad \text{(I. 10)}$$

Où

$$[\vec{a}_i] = \begin{bmatrix} a_i.\cos\theta_i \\ a_i.\sin\theta_i \\ b_i \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 11)}$$

L'équation (I.10) est exprimée dans son propre repère indiqué par l'indice placé en accolade «$[\ ]$», avec

$$Q_i = Q_{z,\theta}Q_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 12)}$$

Il en résulte l'équation du P.G.D qui donne les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées articulaires θ_1 et θ_2.

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{1.}.\cos\theta_1 \\ l_{1.}.\sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_1}.\underbrace{\begin{bmatrix} l_{2.}.\cos\theta_1 \\ l_{2.}.\sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} \qquad \text{(I. 13)}$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1.}.\cos\theta_1 + l_{2.}.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2) \\ l_{1.}.\sin\theta_1 + l_{2.}.(\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.\sin\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(I. 14)}$$

Il est possible de remarquer dans l'équation (I.14) que la valeur en Z reste toujours la même, puisque le manipulateur sériel est à deux degrés de liberté sur le plan XY, ce qui diminue le nombre d'équations à résoudre lors du P.G.I.

Maintenant, pour obtenir le terme d'énergie cinétique nécessaire à la méthode de Lagrange, il faut connaître les vitesses de chacun des centres de masse des membrures obtenues par la dérivée de leur position respective. En faisant la supposition que les membrures sont de section uniforme et constante sur toute leur longueur, le centre de masse se trouve à mi-distance comme l'illustre la figure I.6.

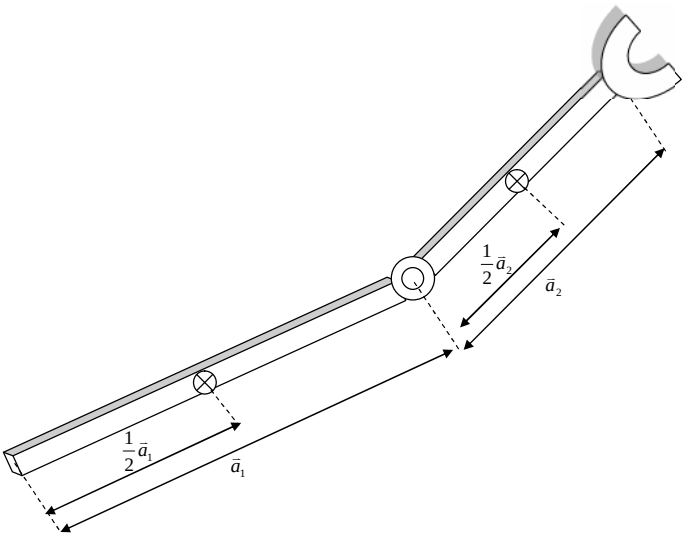


Figure I.6: Position des centres de masse des membrures

Il est alors facile d'utiliser l'équation (I.13) et de la modifier légèrement pour connaître les positions des centres de masse. La position pour la première membrure devient :

$$\vec{p}_{c.m1} = \begin{bmatrix} x_{c.m1} \\ y_{c.m1} \\ z_{c.m1} \end{bmatrix} = \frac{\vec{a}_1}{2} \quad \text{(I. 15)}$$

$$\vec{p}_{c.m1} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2}.\cos\theta_1 \\ \frac{l_1}{2}.\sin\theta_1 \\ 0 \\ \end{bmatrix} \quad \text{(I. 16)}$$

Celle de la deuxième est alors

$$\vec{p}_{c.m2} = \begin{bmatrix} x_{c.m2} \\ y_{c.m2} \\ z_{c.m2} \end{bmatrix} = \vec{a}_1 + Q_1.\frac{\vec{a}_2}{2} \quad \text{(I. 17)}$$

$$\vec{p}_{c.m2} = \begin{bmatrix} l_{1.}.\cos\theta_1 + \frac{l_{2.}}{2}.(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2) \\ l_{1.}.\sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}.(\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.\sin\theta_2) \\ 0 \\ \end{bmatrix} \quad \text{(I. 18)}$$

qu'il est possible de simplifier avec les identités trigonométriques suivantes :

$$\cos a.\cos b - \sin a.\sin b = \cos(a+b)$$

$$\sin a.\cos b + \cos a.\sin b = \sin(a+b)$$

L'équation (I.18) devient alors

$$\vec{p}_{c.m2} = \begin{bmatrix} l_{1.}.\cos\theta_1 + \frac{l_{2.}}{2}.\cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_{1.}.\sin\theta_1 + \frac{l_2}{2}.\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \\ \end{bmatrix} \quad \text{(I. 19)}$$

Maintenant, pour avoir les vitesses il suffit de dériver les équations des centres de masse (I.16) et (I.19), ce qui donne respectivement :

$$\dot{\vec{p}}_{c.m1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c.m2} \\ \dot{y}_{c.m2} \\ \dot{z}_{c.m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2}.\dot{\theta}_1.\sin\theta_1 \\ \frac{l_1}{2}.\dot{\theta}_1.\cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(I. 20)}$$

et

$$\dot{\vec{p}}_{c.m2} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c.m2} \\ \dot{y}_{c.m2} \\ \dot{z}_{c.m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1.\dot{\theta}_1.\sin\theta_1 - \frac{l_{2.}}{2}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right).\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ l_1.\dot{\theta}_1.\cos\theta_1 + \frac{l_{2.}}{2}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right).\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(I. 21)}$$

Connaissant ces équations de vitesse, il faut maintenant les insérer dans celle de l'équation d'énergie cinétique en translation suivante :

$$K_{trans.i} = \frac{1}{2} m_i v_{c.mi}^2 \quad \text{(I. 22)}$$

où m_i est la masse de la $i^{ième}$ membrure et $v_{c.mi}^2$ la vitesse au carré du centre de masse qui se trouve avec l'équation :

$$v_{c.mi}^2 = \dot{\vec{p}}_{c.mi}^T . \dot{\vec{p}}_{c.mi} \quad \text{(I. 23)}$$

L'énergie cinétique en translation pour chacune des membrures est respectivement et après simplification :

$$K_{trans.1} = \frac{1}{8} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad \text{(I. 24)}$$

$$K_{trans.2} = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\frac{1}{4} l_2^2 + l_1^2 + l_1 l_2 . \cos\theta_2 \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} l_2^2 + l_1 l_2 . \cos\theta_2 \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{4} l_2^2 \dot{\theta}_2 \right] \quad \text{(I. 25)}$$

Il ne s'agit là que de l'énergie cinétique en translation des centres de masse, mais puisqu'il s'agit de corps rigides, toute la masse ne se situe pas en ce point. Il est également important de considérer l'énergie cinétique en rotation du corps rigide qui se calcule avec l'équation :

$$K_{rot.i} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_i^T.[I_i].\vec{\Omega}_i \qquad \text{(I. 26)}$$

où I_i est le tenseur d'inertie du corps et $\vec{\Omega}_i$ est le vecteur vitesse de rotation. Il est important pour que cette équation soit valide que le tenseur d'inertie I_i et le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_i$ soient exprimés dans le même repère et pour des raisons pratiques c'est le repère inertiel attaché à la base qui est choisi.

Cependant, puisque les membrures changent d'orientation, les tenseurs d'inertie par rapport au repère attaché à la base changent également constamment avec les mouvements du manipulateur. Pour simplifier le problème, le tenseur d'inertie de chaque membrure est exprimé par une multiplication de deux termes.

$$[I_i]_0 = Q_i.I_i.Q_i^T \qquad \text{(I. 27)}$$

Où l'indice 0 sur « [ ] » sert à indiquer que le terme entre crochets est exprimé par rapport au repère inertiel de la base, l'indice i dans le cas du tenseur d'inertie I_i qu'il s'agit de celui de la $i^{ième}$ membrure et sous la matrice Q, qu'il s'agit de la matrice de rotation qui amène du $i^{ième}$ repère à celui de la base 0. De cette façon, c'est la matrice Q_i qui change tandis que le tenseur d'inertie I_i reste inchangé puisqu'il est toujours exprimé par rapport à un repère attaché à la membrure et situé au centre de masse qui est également aligné avec les axes principaux d'inertie de la membrure de sorte que le tenseur soit diagonal de la forme suivante :

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{i,X} & 0 & 0 \\ 0 & I_{i,Y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{i,Z} \end{bmatrix} \qquad \text{(I. 28)}$$

et aligné comme sur la figure I.7 avec les repères

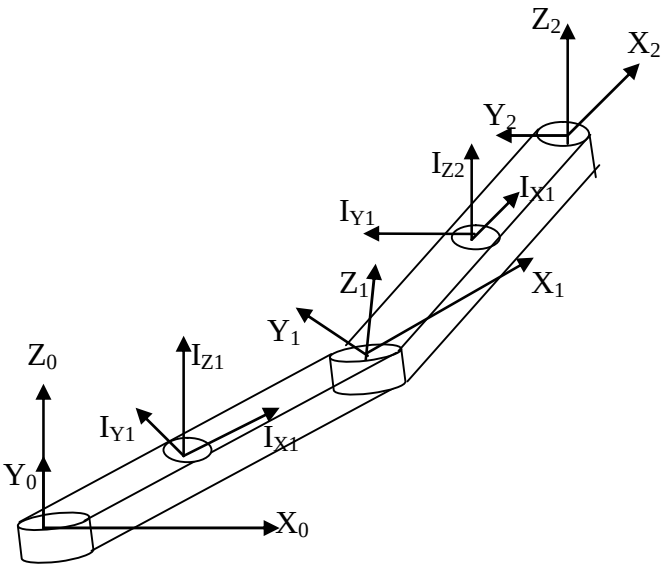


Figure I.7: Alignement des axes d'inerties principaux.

Etant donné que les axes Z des différents repères sont tous parallèles et que le mouvement en rotation des articulations ne se fait que sur cet axe, les vecteurs vitesses de rotation subis par les membrures 1 et 2 restent les mêmes d'un repère à l'autre et sont respectivement :

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{I. 29}$$

$$\vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{I. 30}$$

Il s'en suit qu'en insérant ces équations de $\vec{\Omega}_1$,(I.29) et $\vec{\Omega}_2$ (I.30), avec celle du tenseur d'inertie (équations (I.26)) dans l'équation (I.25), il en résulte les équations d'énergie cinétique en rotation des membrures suivantes :

$$K_{rot.2} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^T.\left[Q_1.I_1.Q_1^T\right].\vec{\Omega}_1 \tag{I. 31}$$

$$K_{rot.1} = \frac{1}{2}I_{1,Z}.\dot{\theta}_1^2 \tag{I. 32}$$

$$K_{rot.2} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^T.\left[Q_2.I_2.Q_2^T\right].\vec{\Omega}_2 \tag{I. 33}$$

$$K_{rot.2} = \frac{1}{2} I_{2,Z} . \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \tag{I. 34}$$

Maintenant que tous les éléments d'énergie cinétique sont calculés, il est possible de les additionner pour obtenir le terme de l'énergie cinétique totale du manipulateur en fonction de ses coordonnées articulaires θ_1 et θ_2.

$$K_T = K_{trans.1} + K_{trans.2} + K_{rot.1} + K_{rot.2} \tag{I. 35}$$

$$\begin{aligned} K_T = & \left[\frac{1}{2}\left(m_1 \frac{1}{4} l_1^2 + m_2\left(l_1 l_2 \cos\theta_2 + \frac{1}{4} l_2^2 + l_1^2\right) + I_{1,Z} + I_{2,Z}\right)\right]\dot{\theta}_1^2 \\ & + \left[m_2\left(\frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 . \cos\theta_2\right) + I_{2,Z}\right]\dot{\theta}_1 . \dot{\theta}_2 + \left[m_2 \frac{1}{8} l_2^2 + \frac{1}{2} I_{2,Z}\right]\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{I. 36}$$

Dans cette équation, la plupart des termes comme les longueurs, masses et moments d'inertie restent sous forme de variable pour que l'équation reste sous la forme la plus générale possible. Par exemple les termes de moment d'inertie $I_{i,Z}$ peuvent être exprimés en fonction de leurs dimensions et masse. Il est maintenant possible d'appliquer la méthode de Lagrange pour obtenir les équations dynamiques du mouvement.

I.6. DYNAMIQUE DU MANIPULATEUR PAR LA METHODE DE LAGRANGE

La méthode de Lagrange est souvent utilisée afin d'obtenir les équations différentielles du mouvement de manipulateurs. Comme toute méthode, elle repose sur les lois de la mécanique et de l'énergie. Pour des problèmes simples, il peut être plus facile d'utiliser directement la loi de Newton. Cependant, lorsqu'un problème se complexifie, Lagrange s'avère une méthode puissante et relativement facile à appliquer. Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que la mécanique et l'électromécanique.

La méthode produit, pour un système de n degrés de liberté autant d'équations couplées associées à une coordonnée généralisée. L'équation de Lagrange [4] se formule ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_{q_i} \tag{I. 37}$$

où T représente l'énergie cinétique totale du système défini en fonction des coordonnées généralisées, q_i est la $i^{ième}$ coordonnée généralisée et finalement F_{q_i} est la force généralisée

pour la coordonnée q_i. Les forces généralisées produites par cette méthode ne représentent pas nécessairement des forces physiques réelles qui peuvent être identifiées et ne sont pas constituées de forces contraintes qui n'effectuent aucun travail, car ces forces sont éliminées. L'équation pour les forces généralisées s'écrit :

$$F_{q_i} = \sum \vec{F} . \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{q}} = \sum \left(F_x . \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y . \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z . \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \tag{I. 38}$$

Où F_x, F_y, F_z sont les composantes des forces et x, y, z sont les coordonnées des points d'application de ces forces définies en fonction des coordonnées généralisées pour permettre leurs dérivées.

I.6.1 Dynamique du bras manipulateur à deux degrés de liberté

Dans cette section nous développons les équations différentielles couplées qui définiront la dynamique du manipulateur. En utilisant la méthode de Lagrange sur le manipulateur sériel plan à deux degrés de liberté, il y aura donc un système de deux équations et les coordonnées généralisées seront celles des articulations, soit θ_1 et θ_2.

Avec l'énergie cinétique totale du système déjà définie à la section précédente avec l'équation (I.34), il reste à l'insérer dans l'équation de Lagrange définie par l'équation (I.36) qui est définie par des dérivés du terme d'énergie cinétique. D'abord il faut trouver chacun des termes par rapport aux deux coordonnées généralisées. Les premières dérivées calculées sont celles par rapport aux vitesses :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_T}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left[m_1 \frac{1}{4} l_1^2 + m_2 \left(l_1 l_2 \cos\theta_2 + \frac{1}{4} l_2^2 + l_1^2 \right) + I_{1,Z} + I_{2,Z} \right] \dot{\theta}_1 \\ &+ \left[m_2 \left(\frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 . \cos\theta_2 \right) + I_{2,Z} \right] \dot{\theta}_2 \end{aligned} \tag{I. 39}$$

$$\frac{\partial K_T}{\partial \dot{\theta}_2} = \left[m_2 \left(\frac{1}{4} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 . \cos\theta_2 \right) + I_{2,Z} \right] \dot{\theta}_1 + \left[m_2 \frac{1}{4} l_2^2 + I_{2,Z} \right] \dot{\theta}_2 \tag{I. 40}$$

En dérivant ces deux dernières équations par rapport au temps on obtient le premier terme de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = -\left[m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\right]\dot{\theta}_1.\dot{\theta}_2 - \left[\frac{m_2 l_1 l_2}{2}\sin\theta_2\right]\dot{\theta}_2^2 + \left[m_1\frac{1}{4}l_1^2 + m_2\left(l_1 l_2\cos\theta_2 + \frac{1}{4}l_2^2 + l_1^2\right) + I_{1,Z} + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_1 + {}_1+\left[m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2.\cos\theta_2\right) + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_2 \quad \text{(I. 41)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = -\left[\frac{m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2}{2}\right]\dot{\theta}_1.\dot{\theta}_2 - \left[m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2.\cos\theta_2\right) + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_1 \left[m_2\frac{1}{4}l_2^2 + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_2 \quad \text{(I. 42)}$$

Maintenant pour le deuxième terme, le terme d'énergie cinétique est dérivé par rapport aux coordonnées généralisées :

$$\frac{\partial K_T}{\partial \theta_1} = 0 \quad \text{(I. 43)}$$

$$\frac{\partial K_T}{\partial \theta_2} = -\left[m_2 l_1 l_2 \sin\theta_2\right]\dot{\theta}_1^2 - \left[\frac{m_2 l_1 l_2}{2}\sin\theta_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad \text{(I. 44)}$$

Avec tous les termes calculés, les équations (I.39), (I.41) et (I.40),(I.42) sont successivement insérées dans l'équation de Lagrange (I.37) pour obtenir, après simplification, respectivement les deux équations définissant la dynamique du système pour chacune des coordonnées généralisées θ_1 et θ_2.

$$\left[\frac{1}{4}m_1 l_1^2 + m_2\left(l_1 l_2\cos\theta_2 + l_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\right) + I_{1,Z} + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2.\cos\theta_2\right) + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_2 - \left(m_2 l_1 l_2\sin\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 = F_{\theta_1} \quad \text{(I. 45)}$$

$$\left[m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1 l_2.\cos\theta_2\right) + I_{2,Z}\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{4}m_2 l_2^2 + I_{2,Z}\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin\theta_2\right)\dot{\theta}_1^2 = F_{\theta 2} \quad \text{(I. 46)}$$

Avec les termes de forces généralisées F_{θ_i} provenant uniquement de la gravité, ce système d'équations décrirait le mouvement d'un simple pendule double. C'est la définition des forces généralisées issues de la combinaison de la gravité, des forces hydrodynamiques et celles des actionneurs qui vont faire qu'elles deviendront un modèle pour la dynamique d'un manipulateur submergé sous l'eau.

I.6.2 Forces externes

Pour compléter le modèle dynamique de la section précédente, nous devons définir les forces qui sont appliquées sur le manipulateur et qui vont effectuer un travail. Pour chacune des forces qui sont considérées ici, soit gravitationnelles, et celles des actionneurs, on appliquera l'équation (I.36) pour obtenir la forme de force généralisée et ainsi obtenir leur contribution. La force généralisée totale étant la somme de chacune des contributions :

$$F_{\theta_i} = F_{grav,\theta_i} + F_{act,\theta_i} \tag{I. 47}$$

où F_{grav,θ_i} est la contribution des forces gravitationnelles, et finalement F_{act,θ_i} est la contribution des actionneurs qui sont directement les couples appliqués aux articulations.

$$F_{act,\theta_i} = C_i \tag{I. 48}$$

Les couples aux articulations sont ainsi obtenus, car nous voulons commander le manipulateur sur la trajectoire désirée. Il est nécessaire d'obtenir les autres termes des équations de Lagrange [17].

I.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre une étude détaillée sur les robots manipulateurs a été présentée, où nous avons parlé de la géométrie, de la constitution, de la cinématique, et de la dynamique de ce type de robots.

Ce chapitre est une base pour le développent ultérieur du modèle dynamique du robot que nous allons utiliser pour la commande.

Chapitre II

Logique Floue Type-2

Chapitre II

Logique Floue Type-2

II.1. INTRODUCTION

La notion des ensembles flous de type-2 a été proposée par Lotfi Zadeh [19] comme extension aux ensembles flous types-1. Un ensemble flou type-2 est caractérisé par une fonction d'appartenance, c.-à-d. la valeur d'appartenance de chaque élément de l'ensemble est un nombre flou dans [0,1]. Les ensembles flous type-2 est utilisés dans les situations où l'incertitude se présente (par exemple l'incertitude sur la forme des fonctions d'appartenance) [20].

Ce chapitre sera consacré à la présentation des principes de base et le fondement théorique de la théorie de la logique floue type-2.

II.2. DEFINITIONS DE LA LOGIQUE FLOU TYPE-2

Un ensemble flou type-2, noté $\tilde{A}$ est caractérisé par une fonction d'appartenance tridimensionnelle, $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$, c.-à-d.:

$$\tilde{A} = \int_{x\in X} \int_{u\in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x,u)/(x,u) \qquad J_x \subseteq [0,1] \tag{II. 1}$$

avec $\int\int$ dénote l'union de tous les éléments du produit cartésien sur x et u avec $0 \le \mu_{\tilde{A}}(x,u) \le 1$.

À chaque point fixe x de X, J_x est l'appartenance primaire de x, et x est appelé variable primaire.

A chaque valeur de x, notée $x = x'$, le plan 2 dimensionnel dont les axes sont u et $\mu_{\tilde{A}}(x',u)$ est appelé tranche verticale (vertical slice) de $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$. Une fonction d'appartenance secondaire est une tranche verticale de $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$.

Donc pour $x' \in X$ et $\forall u \in J_{x'} \subseteq [0,1]$, on a:

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \triangleq \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u) / u \qquad J_{x'} \subseteq [0,1] \tag{II. 2}$$

avec $0 \leq f_{x'}(u) \leq 1$. Puisque $\forall x'$, ce x' va appartenir à X, c.-à-d. $x' \in X$, alors nous notons la fonction d'appartenance secondaire par $\mu_{\tilde{A}}(x)$ qui est un fonction d'appartenance flou type-1.

En se basant sur le concept des ensembles secondaires, on peut réinterpréter un ensemble

flou type-2 comme l'union de tous les ensembles secondaire, c.-à-d. , en utilisant l'équation (II.2), on peut écrire $\tilde{A}$ sous la forme suivante :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / \ \forall x \in X\} \tag{II. 3}$$

ou comme

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / \ x \qquad J_x \subseteq [0,1] \tag{II. 4}$$

On représente sur la Fig.II.1 les grandeurs floues déjà expliqués, voir [11][12][13].

Le domaine de la fonction d'appartenance secondaire est appelé appartenance primaire de x noté J_x telle que $J_x \subseteq [0,1] \quad \forall x \in X$

L'amplitude de la fonction d'appartenance secondaire est appelle degré d'appartenance secondaire noté $f_x(u)$.

Un ensemble flou type-2 intervalle est un ensemble flou type-2 dont tous les fonctions d'appartenance secondaires sont des ensembles type-1 de formes intervalles, c.-à-d. $f_x(u) = 1, \quad \forall u \in J_x \subseteq [0,1], \ \forall x \in X$.

Les ensembles flous type-2 intervalle reflètent l'uniformité de l'incertitude au niveau de la fonction d'appartenance primaire, ce type de fonctions d'appartenance est le plus souvent utilisé dans les systèmes flous type-2. Notons que ce type de fonctions d'appartenance est représenté seulement par ses domaines (intervalles), qui peuvent être exprimés en terme des

bornes gauches et droites $[l, r]$ ou par leurs centres et largeurs $[\text{c-s}, \text{c+s}]$ où $c = (l+r)/2$ et $s = (r-l)/2$.

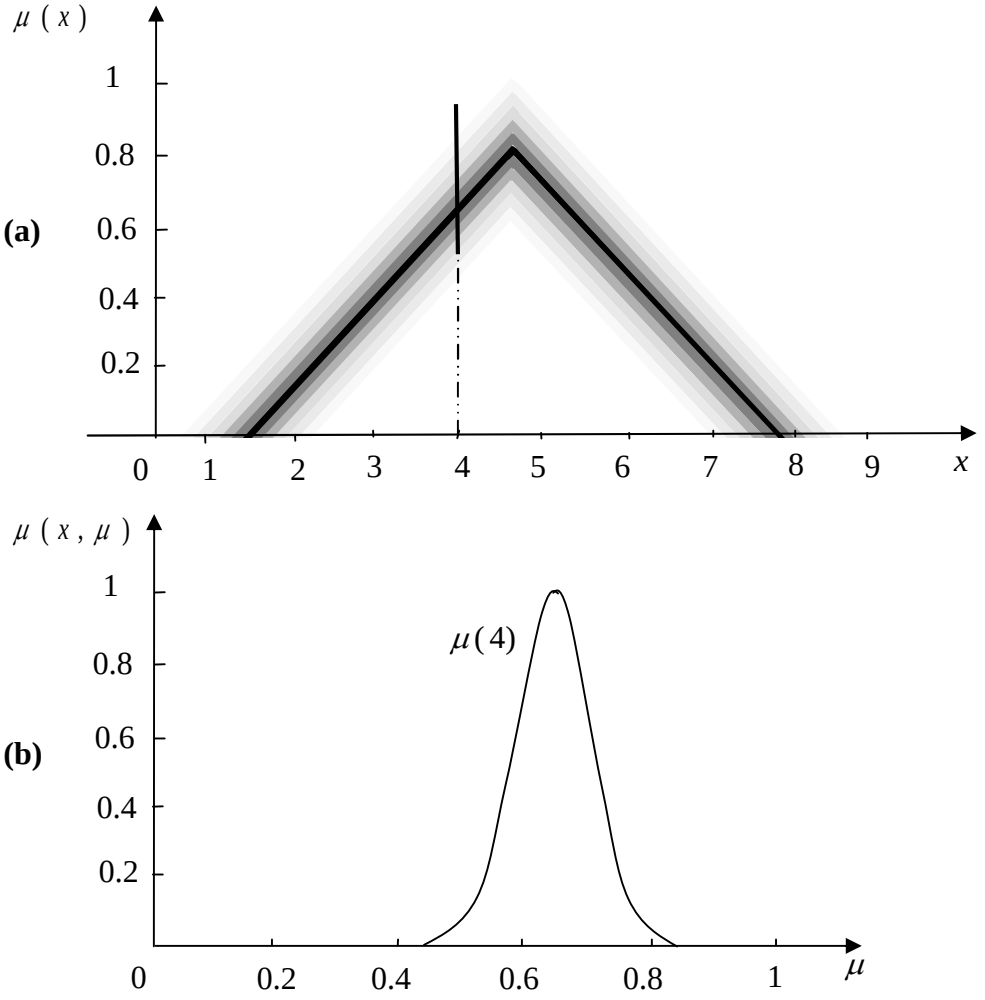


Figure II. 1 : (a) Représentation schématique d'un ensemble flou type-2 gaussien. Les appartenances secondaires sont représentées dans (b), où on remarque qu'ils sont gaussiennes.

Supposons que chaque fonction d'appartenance secondaire d'un ensemble flou type-2 possède un seul degré d'appartenance unitaire. On définit alors une fonction d'appartenance principale comme l'union de tous ces points :

$$u_{principale}(x) = \int_{x \in X} u / x \qquad où \quad f_x(u) = 1 \tag{II. 5}$$

Pour un ensemble flou type-2 intervalle, nous définissons la fonction d'appartenance principale comme étant l'union de toutes les valeurs d'appartenance moyennes de la fonction d'appartenance primaire. Notons que lorsque l'incertitude des fonctions d'appartenance disparaît, la fonction d'appartenance d'un ensemble flou type-2 se réduit à la fonction d'appartenance principale.

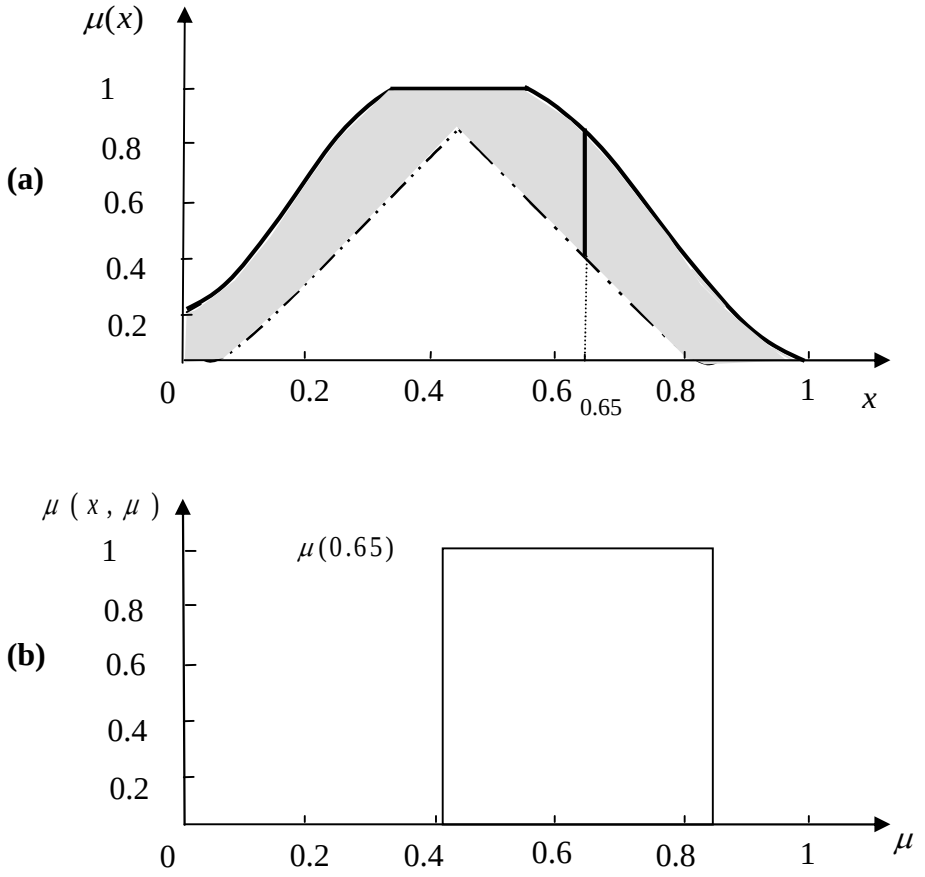


Figure II. 2: (a) Représentation schématique d'un ensemble flou type-2 intervalle. Les appartenances secondaires sont représentées dans (b), où on remarque qu'ils sont des ensembles flous intervalle type-1.

- L'incertitude dans un ensemble flou type-2 $\tilde{A}$ est représentée par une région bornée appelée «Footprint Of Uncertainty » *FOU* . C'est l'union de toutes les appartenances primaires:

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \qquad \text{(II. 6)}$$

- Fonction d'appartenance supérieur et fonction d'appartenance inférieur sont des fonctions d'appartenances de type-1 et sont les frontières du *FOU* d'un ensemble flou $\tilde{A}$ type-2.

La fonction d'appartenance supérieure sera notée par $\overline{u}_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X$, et la fonction d'appartenance inférieure sera notée par $\underline{u}_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X$, alors nous avons :

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \overline{FOU(\tilde{A})} \qquad \forall x \in X \tag{II. 7}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \underline{FOU(\tilde{A})} \qquad \forall x \in X \tag{II. 8}$$

II. 3. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES FLOUS TYPE-2

Les degrés d'appartenance des ensembles flous type-2 sont des ensembles type-1 ; par conséquent, pour effectuer des opérations telles que l'union et l'intersection sur les ensembles type- 2, nous devons faire appel aux opérations t-conorm et t-norm sur des ensembles de type-1. Cela est réalisable en utilisant le principe d'extension de Zadeh [9] [6] [7] [5].

Une opération * entre deux nombres ordinaires peut être étendue à deux ensembles type-1:

$$F = \int_v f(v)/v \tag{II. 9}$$

$$G = \int_w g(w)/w \tag{II. 10}$$

de la façon suivante:

$$F * G = \int_v \int_w [f(v) \bullet g(w)] \ / \ (v * w) \tag{II. 11}$$

où $\bullet$ est une t-norm, généralement c'est une opération produit ou opération min [12] ; par exemple, l'extension de la t-conorm aux ensembles de type-1 est donnée par:

$$F \cup G = \int_v \int_w [f(v) \bullet g(w)] \ / \ (v \vee w) \tag{II. 12}$$

Similairement, l'extension de la t-norm aux ensembles type-1 sera donnée par:

$$F \cap G = \int_{v} \int_{w} [f(v) \bullet g(v)] \ / \ (v \wedge w) \qquad \text{(II. 13)}$$

Exemple 1

Soit F et G deux ensembles type-1 intervalle sur les domaines $[l_f, r_f]$ et $[l_g, r_g]$, respectivement.

En utilisant (II.13), l'intersection entre F et G est obtenue comme suite :

$$F \cap G = \int_{v \in F} \int_{w \in G} (1 \times 1) \ / \ (vw) \qquad \text{(II. 14)}$$

De cette équation nous observons:

- chaque terme de $F \cap G$ est égale au produit vw, avec le plus petit terme $l_f \ l_g$ et le plus grand $r_f \ r_g$
- puisque F et G possèdent des intervalles continus, alors $F \cap G$ possède aussi un domaine continu, par conséquent $F \cap G$ est un ensemble type-1 intervalle avec le domaine $[l_f l_g, r_f r_g]$, c.-à-d. :

$$F \cap G = \int_{u \in [l_f l_g, r_f r_g]} 1/u \qquad \text{(II. 15)}$$

D'une façon plus générale, l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ de n ensembles type-1 intervalle $F_1, ..., F_n$ ayant les domaines $[l_1, r_1], \ldots, [l_n, r_n]$, respectivement, est un ensemble intervalle sur le domaine $\left[\prod_{i=1}^{n} l_i, \prod_{i=1}^{n} r_i\right]$.

Des opérations algébriques entre les ensembles type-1 peuvent aussi être définies en utilisant (II.2), comme par exemple la somme de F et G :

$$F + G = \int_{v} \int_{w} [f(v) \bullet g(w)] \ / \ (v + w) \qquad \text{(II. 16)}$$

En utilisant le même raisonnement vu dans l'exemple précédent, on peut démontrer que lorsque F et G sont des ensembles type-1 intervalle, alors leur somme est aussi un ensemble type-1 intervalle sur le domaine $[l_f + l_g, r_f + r_g]$ [14] [11].

En utilisant le principe d'extension [8] (voir le chapitre I), une opération sur n valeurs ordinaires $f(\theta_1,...,\theta_n)$ peut être étendue à une opération sur n ensembles flous type-1 $F_1,...,F_n$:

$$f(F_1,...,F_n) = \int_{\theta_1} ... \int_{\theta_n} \mu_{F_1}(\theta_1) * ... * \mu_{F_n}(\theta_n) / f(\theta_1,...,\theta_n) \qquad \text{(II. 17)}$$

où tous les intégrales dénotes des unions logiques, et $\theta_i \in F_i$ pour $i = 1,...,n$.

Nous allons dans la suite définir le concept de centroïde d'un ensemble flou type-2 en utilisant la formule (II.17), cette notion est très importante dans les systèmes à logique floue type-2.

Rappelons qu'un centroïde d'un ensemble flou A type-1, dont le domaine est discrétisé en N valeurs set donné par:

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)} \qquad \text{(II. 18)}$$

Similairement, le centroïde d'un ensemble flou $\tilde{A}$ type-2 dont le domaine est discrétisé en N points, peut être défini en utilisant l'équation (II.17) comme suit. Si on pose $D_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$, alors :

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1} \cdots \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) * \cdots * \mu_{D_N}(\theta_N)] / \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{N} \theta_i} \qquad \text{(II. 19)}$$

où $\theta_i \in D_i$.

L'équation (II.19) veut dire : chaque point x_i de $\tilde{A}$ possède un degré d'appartenance de type-1 (c-a-d son degré d'appartenance est une fonction d'appartenance de type-1) noté $D_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$. Pour trouver le centroïde, nous considérons chaque combinaison possible $\{\theta_1,...,\theta_N\}$ tel que $\theta_i \in D_i$. Pour chaque telle combinaison, nous calculons un centroïde de type-1 en utilisant la formule (II.18) en remplaçant chaque $\mu_A(x_i)$ par θ_i, et à chaque point centroïde, nous allons associer un degré d'appartenance égale à la t-norm des degrés d'appartenances des θ_i aux D_i. Si plus d'une combinaison des θ_i nous donne le même point dans le centroïde, on garde le point possédant le plus grand degré d'appartenance. Chaque combinaison $\{\theta_1,...,\theta_N\}$, $(\theta_i \in D_i)$, considérée lorsque nous calculons $C_{\tilde{A}}$, peut être vue comme une fonction d'appartenance d'un certain ensemble flou A' de type-1 possédant le même domaine que $\tilde{A}$. Nous appelons A' un ensemble flou type-1 encastré dans $\tilde{A}$ (voir Fig.II.3) [20] [21].

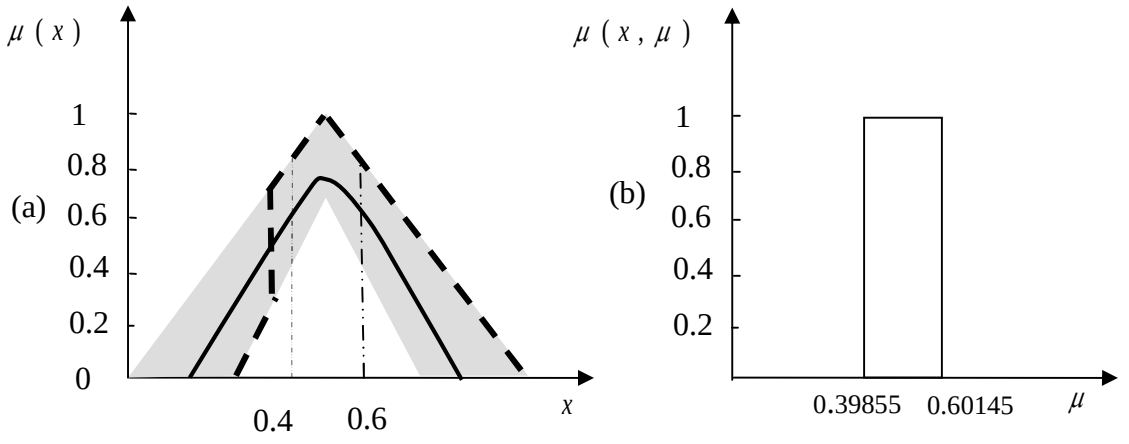


Figure II. 3: (a) Ensemble flou type-2 intervalle dans lequel on représente deux ensembles flous type-1 encastrés, l'un avec une ligne gras discontinue et l'autre avec une ligne en gras continue. (b) Centroïde de l'ensemble flou type-2 représenté dans (a).

Chaque ensemble type-1 encastré possède aussi un point qui est calculé comme la t-norm des degrés d'appartenance secondaires correspondant à $\{\theta_1,...,\theta_N\}$.

Alors, un ensemble flou type-2 peut être vu comme une large collection d'ensembles type-1 encastrés, dont chacun possède son poids associé. Le centroïde de cet ensemble flou type-2, $C_{\tilde{A}}$ est par conséquent un ensemble type-1 dont les éléments sont les centroïdes de tous les ensembles encastrés de type-1 dans $\tilde{A}$, leurs degrés d'appartenance sont les poids

associés aux ensembles encastrés correspondants. Le calcul du centroïde se simplifie beaucoup lorsque $\tilde{A}$ est un ensemble type-2 intervalle.

Dans ce cas, si $\tilde{A}$ est un ensemble type-2 intervalle, alors (II.19) sera simplifiée à:

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1} \ldots \int_{\theta_N} 1 \Big/ \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{N} \theta_i} \qquad \text{(II. 20)}$$

où chaque θ_i appartient à un certain intervalle dans [0,1].

Observons que si le domaine de $\tilde{A}$ ou de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ($x \in \tilde{A}$) est continu, alors le domaine de $C_{\tilde{A}}$ est aussi continu. Le nombre de tous les ensembles type-1 encastrés dans $\tilde{A}$ est infini, par conséquent, les domaines de $\tilde{A}$ et chaque $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ($x \in \tilde{A}$) doivent être discrétisés pour le calcul de $C_{\tilde{A}}$. Nous remarquons de (II.19) que si le domaine de chaque D_l est discrétisé en M points, le nombre des combinaisons $\{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$ possibles sera M^N, qui est un nombre très grand même pour M et N petits. Si, par conséquent les fonctions des D_l ont une structure régulière (exp: ensemble type-1 intervalle, gaussiennes, triangulaires), on peut obtenir avec exactitude ou approximativement le centroïde sans réaliser tous les calculs.

L'ensemble type-1 réduit d'un ensemble flou type-2 est le centroïde de l'ensemble flou type-2 du FLS ; par conséquent, chaque élément de l'ensemble de type réduit est un centroïde d'un certain ensemble encastré type-1[21] [20].

II.4. SYSTEMES FLOUS TYPE-2

La figure II.4 montre la structure de base d'un système flou de type-2. Elle est très similaire à la structure d'un système flou de type-1[1].

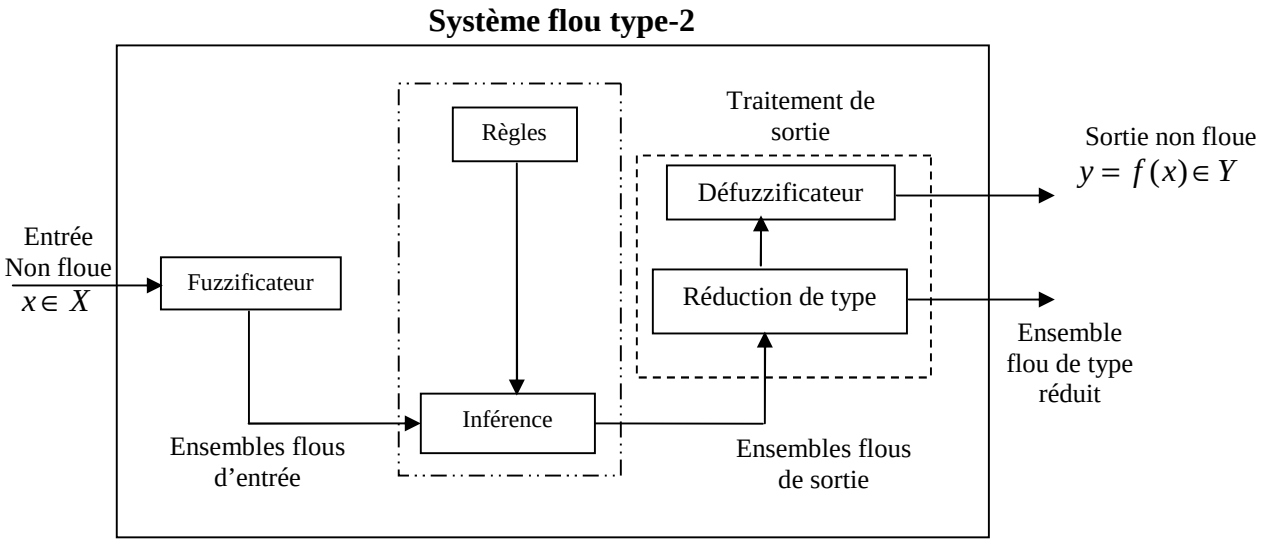


Figure II. 4: Structure d'un système flou type-2. A cause de l'importance de l'ensemble flou de type réduit, nous avons représenté les deux sorties du système, l'ensemble de type réduit et la sortie défuzzifiée.

Pour un système FLS de type-1, le block traitement de sortie se réduit seulement à la défuzzification. Quand une entrée est appliquée à un FLS de type-1, le mécanisme d'inférence calcul un ensemble flou de sortie type-1 correspondant à chaque règle. La défuzzification calcul alors une sortie réelle à partir de ces ensembles flous délivrés par chaque règle [8]. Pour un système flou type-2, chaque ensemble de sortie d'une règle est de type-2 (Fig.II.5(a)). Dans ce contexte, on trouve des versions généralisées des méthodes de défuzzification qui peuvent nous fournir un ensemble de type-1 à partir des ensembles de sorties de type-2. On appelle cette opération «Réduction de type » au lieu de défuzzification [20] [11] [13], et on appelle l'ensemble résultant de type-1 « Ensemble réduit » (Fig.II.5 (b)). Le défuzzificateur dans un système flou type-2 peut alors défuzzifier l'ensemble réduit pour obtenir une sortie ordinaire non floue (Fig.II.5 (c)) pour le système flou type-2. Ce traitement de sortie est clairement illustré dans la Fig.II.5.

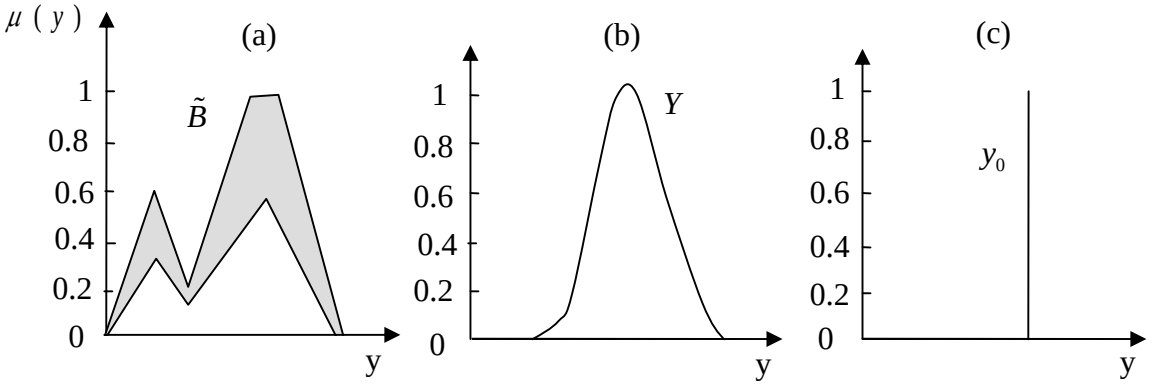


Figure II. 5: Opérations du traitement de sortie d'un système flou type-2.

Un fuzzificateur projette une entrée ordinaire non floue en des ensembles flous. Ces ensembles flous peuvent en général être de type-2, par conséquent, nous allons considérer dans notre mémoire une fuzzification de type singleton pour la quelle l'entrée floue à un seul point dont la valeur d'appartenance est non nulle.

Pour illustrer la différence entre un système flou de type-1 et un autre de type-2, nous allons d'abord rappeler quelques notations :

II.4.1. Système Flou Type-1

Soit un système flou type-1 à p-entrées et une seule sortie utilisant une fuzzification de type singleton et une défuzzification de type centre de masses et des règles de type

IF-THEN de la forme:

$$R^l : IF\ x_1\ is\ F_1^l\ and\ x_2\ is\ F_2^l\ and \ldots x_p\ is\ F_p^l, THEN\ y\ is\ G^l \qquad \text{(II. 21)}$$

Quand une entrée singleton $x' = \{x_1', x_2', ..., x_p'\}$ se présente, le degré d'activation correspondant à une règle l sera calculé comme suit:

$$\mu_{F_1^l}(x_1') * \mu_{F_2^l}(x_2') * \ldots * \mu_{F_p^l}(x_p') = \Im_{i=1}^{p} \mu_{F_i^l}(x_i') \qquad \text{(II. 22)}$$

où $*$ et $\Im$ indiquent la t-norm choisie. Dans la littérature il existe plusieurs types de défuzzifications. Dans ce mémoire nous allons se contenter d'utiliser la défuzzification de

type centre de gravité [8]. Elle concerne à calculer une sortie réelle en calculant d'abord le centroïde C_{G^l} de chaque ensemble de sortie G^l, ensuite calculer la moyenne pondérée de ces centroïdes. Le poids correspondant à la $l^{ième}$ conséquence d'une règle est le degré d'activation associé avec cette règle, $\Im_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i')$, donc :

$$y_{\cos}(x') = \frac{\sum_{l=1}^{M} c_{G^l}\,\Im_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i')}{\sum_{l=1}^{M}\Im_{i=1}^{p}\mu_{F_i^l}(x_i')} \qquad \text{(II. 23)}$$

où M est le nombre de règle dans le système flou.

II.4.2. Système Flou Type-2

Considérons maintenant un système flou de type-2 utilisant une fuzzification de type singleton, une réduction de type centre de gravité [11] [12] et des règles de la forme:

$$R^l : IF\ x_1\ is\ \tilde{F}_1^l\ and\ x_2\ is\ \tilde{F}_2^l\ and ... x_p\ is\ \tilde{F}_p^l,\ THEN\ y\ is\ \tilde{G}^l \qquad \text{(II. 24)}$$

Notons que ce n'est pas nécessaire que tous les ensembles flous des antécédents et des conséquences de (II.24) soient de type-2, pour que le système flou soit de type-2. Donc, il suffit qu'un seul ensemble de l'antécédent ou de la conséquence soit de type-2, alors tout le système flou soit de type-2. Quand une entrée $x' = \{x_1', x_2', ..., x_p'\}$ se présente, le mécanisme d'inférence calcule le degré d'activation de chaque règle en utilisant l'opération d'intersection définie dans (II.13) entre les degrés d'appartenance de l'antécédent de chaque règle. Le degré d'activation correspondant à la *lème* règle est alors :

$$\mu_{\tilde{F}_1^l}(x_1') \cap \mu_{\tilde{F}_2^l}(x_2') \cap ... \cap \mu_{\tilde{F}_p^l}(x_p') = \prod_{i=1}^{p}\mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i') \qquad \text{(II. 25)}$$

Le centre de gravité de type-réduit, a besoin du centroïde de la conséquence de chaque règle. Une fois tous les centroïdes des conséquences sont calculés, le centre de gravité de type réduit sera calculé en utilisant la version étendu de (II.23):

$$Y_{COS}(x') = \int_{y^1}...\int_{y^M}\int_{f_1}...\int_{f_M} \Im_{l=1}^{M}\mu_{C^1}(y^l) * \Im_{l=1}^{M}\mu_{F^1}(f_l) \Big/ \frac{\sum_{l=1}^{M} y^l f_l}{\sum_{l=1}^{M} f_l} \qquad \text{(II. 26)}$$

où $\Im$ et $*$ indiquent la t-norm choisie ; $y^l \in C^l = C_{\tilde{G}^l}$ le centroïde du $l^{ième}$ ensemble conséquence ; et $f_l \in F^l = \prod_{i=1}^{p} \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i')$ le degré d'activation associé au $l^{ième}$ ensemble conséquence, pour $l = 1, 2, ..., M$.

Une valeur réelle de sortie est obtenue en calculant le centroïde de $Y_{\cos}(x')$.

L'ensemble de type réduit d'un système flou type-2 montre la variation possible de la valeur réelle de sortie due à la nature incertaine des fonctions d'appartenance antécédentes ou conséquences. Il établit une bande de valeurs autour d'une valeur de sortie réelle. Un système flou de type-2 est très difficile à réaliser, mais les choses se simplifient beaucoup quand les fonctions d'appartenance secondaires sont de type intervalles [22] [21] [23].

Théorème

Dans un système flou type-2 intervalle, avec une t-norm min ou prod, l'intervalle d'activation $F^l \in \left[\overline{f}^l, \underline{f}^l\right]$ de la $l^{ième}$ règle est:

$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) * \underline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x_2) * ... * \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \qquad \text{(II. 27)}$$

$$\overline{f}^l = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^l}(x_1) * \overline{\mu}_{\tilde{F}_2^l}(x_2) * ... * \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p) \qquad \text{(II. 28)}$$

Ceci est clairement représenté sur la Fig.II.6, où le nombre d'antécédents est p=2. Dans ce cas, le degré d'activation est un ensemble type-1 intervalle, $\left[\underline{f}^l, \overline{f}^l\right]$, où:

$$\underline{f}^l = \underline{f}_1^l * \underline{f}_2^l \qquad \text{II. 29}$$

$$\overline{f}^l = \overline{f}_1^l * \overline{f}_2^l \qquad \text{II. 30}$$

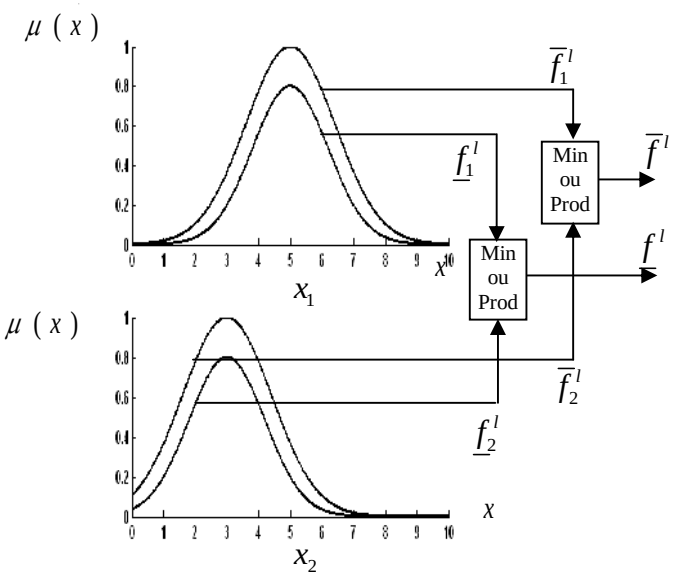


Figure II. 6: Opérations d'entrée d'un système flou type-2 avec fuzzification type singleton

II.5. REDUCTION DE TYPE ET DEFUZZIFICATION

Un système flou type-2 est très compliqué à cause de la réduction de type. La formule générale du calcul de cet ensemble de type réduit est la suivante:

$$Y(Z_1,...,Z_M,W_1,...,W_M)=\int_{z^1}...\int_{z^M}\int_{w_1}...\int_{w_M}\Im_{l=1}^{M}\mu_{Z_l}(z_l)*\Im_{l=1}^{M}\mu_{W_l}(w_l)\Big/\frac{\sum_{l=1}^{M}w_l z_l}{\sum_{l=1}^{M}w_l} \qquad \text{II. 31}$$

où $\Im$ et $*$ indiquent les t-norms utilisées (prod ou min), $w_l \in W_l$ et $z_l \in Z_l$ pour $l=1,2,...,M$

Les choses se simplifient beaucoup lorsque les fonctions d'appartenance secondaires sont de type intervalle [11] [22]. Dans notre mémoire nous allons s'intéresser à la réduction de type pour les systèmes flous type-2 intervalle, dans ce cas nous n'allons pas considérer toutes les combinaisons de z_l et de w_l.

Pour un système type-2 intervalle, chaque z_l et w_l ($l = 1, 2, ..., M$) dans (II.31) est un ensemble type-1 intervalle, par conséquent nous avons $\mu_{Z_l}(z_l) = \mu_{W_l}(w_l) = 1$, donc (II.31) devient :

$$Y(Z_1, ..., Z_M, W_1, ..., W_M) = \int_{z^1} ... \int_{z^M} \int_{w_1} ... \int_{w_M} 1 \Big/ \frac{\sum_{l=1}^{M} w_l z_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l} = [y_l, y_r] \qquad \text{(II. 32)}$$

Alors, dans ce cas il nous suffit de calculer seulement l'expression $\frac{\sum_{l=1}^{M} w_l z_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l}$, puisque tous les degrés d'appartenance dans un ensemble type-1 intervalle sont ordinaires, alors nous allons dans la suite représenter un intervalle seulement par ses limites gauche et droite $[l, r]$ ou par son centre et largeur $c = \frac{l+r}{2}$ et $s = \frac{r-l}{2}$ respectivement.

Dans un système flou type-2, chaque z_l dans (II.32) est un ensemble type-1 intervalle de centre c_l et de largeur s_l ($s_l \geq 0$) et chaque W_l est un ensemble type-1 intervalle de centre h_l et de largeur Δ_l, ($\Delta_l \geq 0$) (on suppose que $h_l \geq \Delta_l$, par conséquence $w_l \geq 0$ pour $l = 1, 2, ..., M$). Y est aussi un ensemble type-1 intervalle, donc nous avons seulement besoin de calculer les deux points extrêmes y_l et y_r. Comme il est montré dans [20], y_l dépend seulement de $c_l - s_l$ et sur l'un des deux points extrêmes de W_l. y_r dépend seulement de $c_l + s_l$ et sur l'un des deux points extrêmes de W_l. Dans ce qui suit, nous allons citer une procédure itérative pour calculer y_l et y_r [11][13][22].

Posons :

$$S(W_1, ..., W_M) = \frac{\sum_{l=1}^{M} z_l w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l} \qquad \text{(II. 33)}$$

où $w_l \in [h_l - \Delta_l, h_l + \Delta_l]$ et $h_l \geq \Delta_l$ pour $l = 1, 2, ..., M$ et $z_l \in [c_l - s_l, c_l + s_l]$. Le maximum de S, y_r est obtenu comme suit. On pose $z_l = c_l + s_l$ ($l = 1, 2, ..., M$) et en supposant que les z_l sont arrangés dans l'ordre croissant, c-a-d , $z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_M$. Alors :

posons $w_l = h_l$ pour $l = 1, 2, ..., M$ et calculons $S' = S(h_1, ..., h_M)$ en utilisant (II.33).

trouver K $(1 \leq K \leq M - 1)$ tel que $z_K \leq S' \leq z_{K+1}$

poser $w_l = h_l - \Delta_l$ pour $l \leq K$ et $w_l = h_l + \Delta_l$ pour $l \geq K + 1$ et calculer

$S'' = S(h_1 - \Delta_1, ..., h_K - \Delta_K, h_{K+1} + \Delta_{K+1}, ..., h_M + \Delta_M)$ en utilisant (II.33).

vérifier si $S'' = S'$; si oui, arrêter. S'' est la valeur maximale de $S(W_1, ..., W_M)$; si non,

aller à l'étape 5.

poser $S' = S''$; aller à l'étape 2.

Il a été démontré que cette procédure itérative converge dans M itérations au maximum, où une itération est le passage de l'étape 2 à l'étape 5.

Le minimum de $S(W_1, ..., W_M$ peut être obtenu en utilisant la même procédure juste citée. Seulement deux changements doivent être faits :

nous devons mettre $z_l = c_l - s_l$ pour $l = 1, 2, ..., M$.

dans l'étape 3 nous devons poser $w_l = h_l + \Delta_l$ pour $l \leq K$ et $w_l = h_l - \Delta_l$ pour $l \geq K + 1$ et calculer $S'' = S(h_1 + \Delta_1, ..., h_K + \Delta_K, h_{K+1} - \Delta_{K+1}, ..., h_M - \Delta_M)$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter deux exemples expliquant comment cet algorithme va être utilisé dans la réduction de type d'un centroïde de type-2 (centre de gravité type-2) et comment il va être utilisé dans un système flou type-2.

Exemple 2

Dans cet exemple, nous allons calculer la réduction de type pour les trois ensembles flous type-2 intervalle, notés par $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ et $\tilde{A}_3$, représentés dans la Fig.II.7 et donnés par :

$$\underline{A}_1 = 0.75\exp\left(-0.5\left(\frac{x-2}{1.2}\right)^2\right) \qquad \overline{A}_1 = \exp\left(-0.5\left(\frac{x-2}{1.2}\right)^2\right)$$

$$\underline{A}_2 = 0.75\exp\left(-0.5(x-6)^2\right) \qquad \overline{A}_2 = e\exp\left(-0.5(x-6)^2\right)$$

$$\underline{A}_3 = 0.75\exp\left(-0.5(x-9)^2\right) \qquad \overline{A}_3 = \exp\left(-0.5(x-9)^2\right)$$

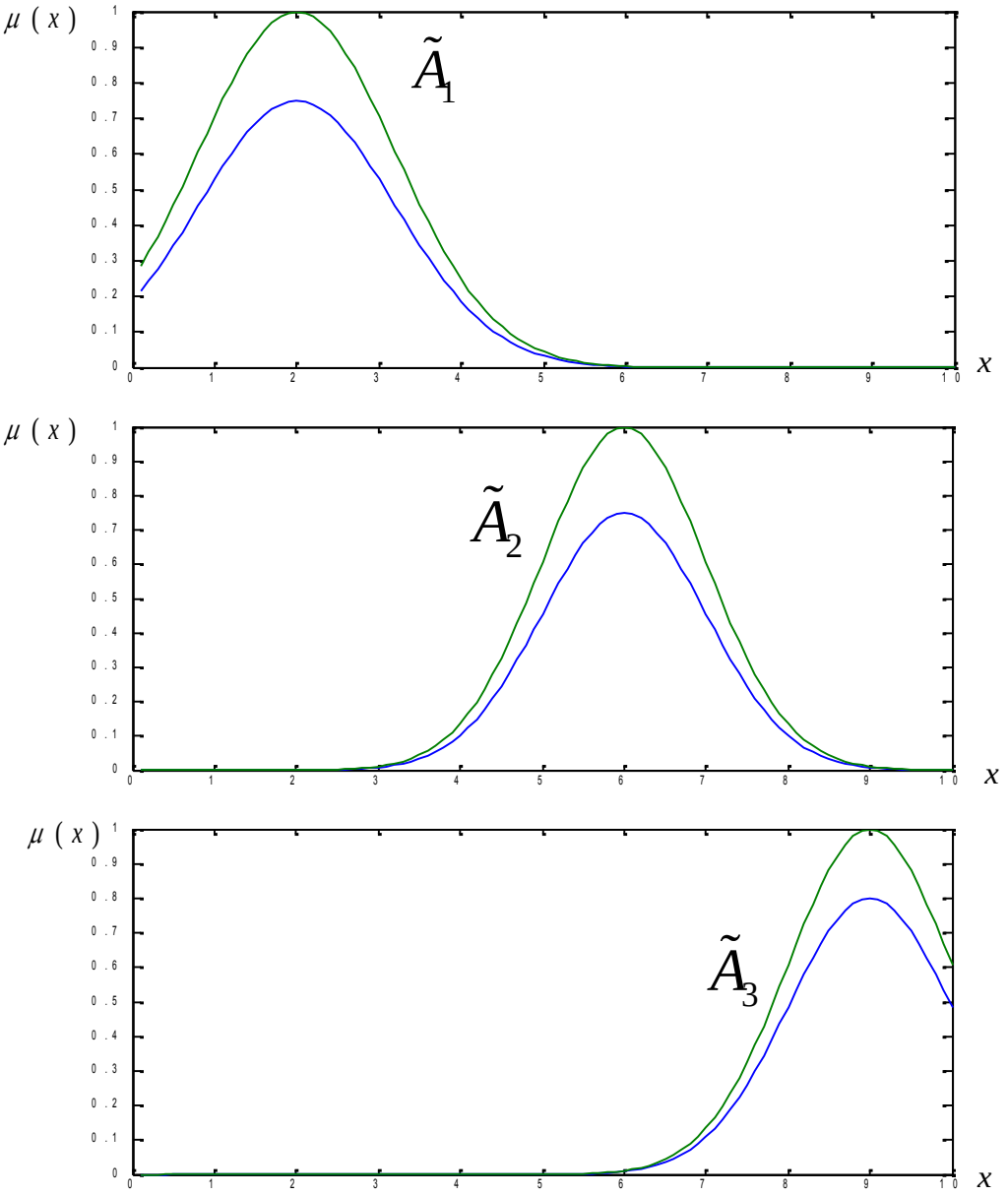


Figure II. 7: Fonctions d'appartenance floue type-2 définies dans l'exemple 2

Les résultats sont présentés dans le tableau 1 où chaque ensemble intervalle de type réduit est représenté par son centre et sa largeur [13].

Table 1. Résultats de réduction de type de l'exemple 2

	Centre	Largeur
Ensemble $\tilde{A}_1$	2.1356	[2.0099 2.2612]
Ensemble $\tilde{A}_2$	6.0000	[5.8853 6.1147]
Ensemble $\tilde{A}_3$	9	[8.8853 9.1147]

Exemple 3

Dans cet exemple nous allons présenter l'utilisation da la méthode de réduction de type pour un système flou type-2 intervalle. Nous considérons un système flou type-2 mono variable dont les règles ont la forme suivante : $R^{(l)}: IF\ x\ is\ \tilde{F}^{(l)}, THEN\ y\ is\ \tilde{G}^{(l)}$ où x et $y \in [0,\ 10]$. On représente dans la Fig.II.8 (a) et (b) les ensembles flous antécédents et conséquences. Le FOU est uniformément hachuré ce qui veut dire que ces ensembles flous sont de type-2 intervalle. Chacun de ces ensembles peut être décrit par deux gaussiens possédants la même valeur moyenne et le même écart, par contre ils ont des amplitudes différentes. La valeur maximale atteinte par la gaussienne la plus élevée est l'unité, tandis que la valeur minimale atteinte par les gaussiennes est s. Si la valeur minimale et l'écart d'une gaussienne sont m et σ, respectivement, alors la valeur d'appartenance correspondante à une entrée x' est un intervalle $\left[s\exp\left(-0.5\left(\frac{x'-m}{\sigma}\right)^2\right)\ \ \exp\left(-0.5\left(\frac{x'-m}{\sigma}\right)^2\right)\right]$. Les valeurs m pour chaque ensemble flou antécédent $\tilde{F}^1, \tilde{F}^2$ et $\tilde{F}^3$ sont 2, 5 et 8, respectivement. Les valeurs σ sont 1, 1, et 1, respectivement. Les valeurs s sont 0.8, 0.6 et 0.9, respectivement. Pour les trois ensembles flous des conséquences $\tilde{G}^1, \tilde{G}^2$ et $\tilde{G}^3$ les valeurs m sont 6, 2 et 9, respectivement. Les valeurs σ sont 1, 1.2, et 1, respectivement. Les valeurs s sont 0.75, 0.75 et 0.8, respectivement.

L'entrée $x = 4$ appliquée est représentée sur la Fig.II.8. Elle a des appartenances non nulles dans les deux antécédents $\tilde{F}^1 et \tilde{F}^2$, par conséquent, deux règles sont activées. Le

résultat de réduction de type de cet exemple est donné par les deux bornes de l'intervalle type-1 suivant : [2.5996 3.3097] dont la valeur moyenne est 2.9546.

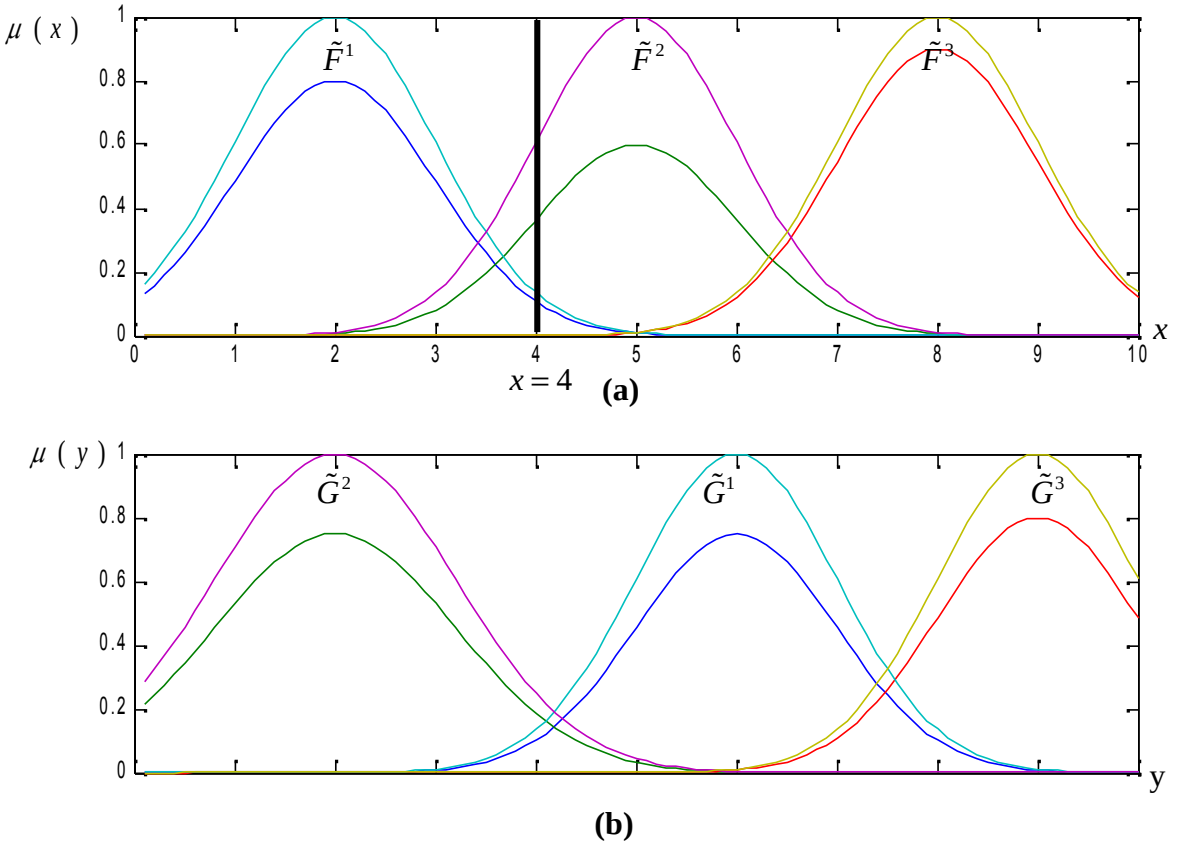


Figure II. 8: Fonctions d'appartenance floue type-2 définies dans l'exemple 3.
(a) Fonctions antécédentes, (b) Fonctions conséquences.

II.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons exposé la théorie de la logique floue type-2. Comme il a été présenté, cette technique est une extension de la logique floue type-1. La nouveauté dans cette logique c'est que les fonctions d'appartenance ne sont pas définies d'une manière unique, mais d'une manière incertaine. Concernant les systèmes flous type-2, nous avons vu qu'ils sont doté d'un nouveau module appelé réducteur de type, permettant de réduire des ensembles flous de type-2 à des ensembles flous de type-1.

Chapitre III

Généralités sur la Commande Adaptative

Chapitre III

Généralités sur la Commande Adaptative

III.1. INTRODUCTION

La commande adaptative a débutée principalement dans les années 50s, comme solution pour contrôler les processus fonctionnant sous des conditions et environnements variables dans le temps. Dans les années 60s, plusieurs contributions de la théorie de commande ont été introduites dans le développement de la commande adaptative, comme par exemple l'analyse dans l'espace d'état, théorie de stabilité, théorie de la commande stochastique et programmation dynamique. Au début des années 70s, les différentes méthodes d'estimation ont été introduites dans la commande adaptative.

La théorie de stabilité de la commande adaptative a commencé au début des années 80s en parallèle avec une rapide évolution en micro électronique qui a permet d'implémenter des régulateurs adaptatifs sur des systèmes à microprocesseurs.

Dans ce chapitre nous allons essayer de donner l'essentielle, et les principes généraux de la commande adaptative. Nous allons parler du gradient et de la règle MIT et en fin la stabilité par la méthode de Lyapunov.

III.2. CONCEPT DE COMMANDE ADAPTATIVE

Dans plusieurs cas de la théorie de commande, le système à contrôler possède des paramètres incertains au début de l'opération de commande. Malgré que cette incertitude paramétrique disparaisse en temps réel par un certain mécanisme d'ajustement, elle peut causer une incertitude ou une instabilité du système de commande. Dans d'autres cas, un phénomène inverse se produit, où on démarre avec des paramètres connus et certains, mais au cours de fonctionnement, ces paramètres perds leurs valeurs et deviennent incertains. Donc sans une préconception continuelle du régulateur, le régulateur initial s'avère inefficace. Généralement, l'objectif principal de la commande adaptative est de maintenir des performances désirées d'un système en présence d'incertitudes ou variation paramétrique du procédé.

Un régulateur adaptatif diffère d'un régulateur ordinaire dans le fait que les paramètres du premier sont variables et qu'il existe un certain mécanisme d'ajustement de ces paramètres [1]. Dans le présent travail nous allons utilisé la commande adaptative à modèle de référence (MRAC)[1][3][2][24].

III.3. COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE

Généralement, une commande adaptative à modèle de référence est donnée comme le montre la Fig.III.1. Elle est composée de 4 parties :

1. Le procédé contenant les paramètres inconnus.
2. Un modèle de référence spécifiant les performances désirées de sortie.
3. Une loi de commande contenant les paramètres ajustables.
4. Un mécanisme d'ajustement pour l'adaptation des paramètres ajustables.

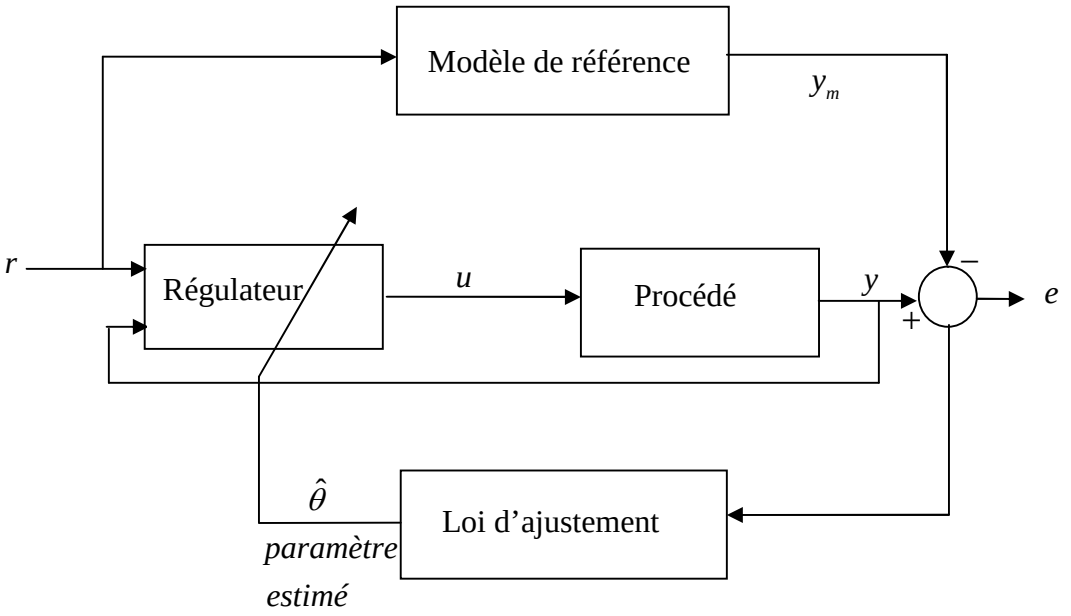


Figure III. 1: Commande adaptative à modèle de référence.

- Le procédé est supposé avoir une structure à paramètres inconnus.
- Le modèle de référence est utilisé pour spécifier la réponse idéale de notre système.
- Le régulateur est décrit généralement par un certain nombre de paramètres ajustables, qui seront ajustés par le mécanisme d'ajustement.

- Le mécanisme d'ajustement est utilisé pour ajuster les paramètres dans la loi de commande. La loi d'ajustement va chercher les valeurs des paramètres pour les quelles la réponse du système sous la commande adaptative devient la même que la réponse du modèle de référence, c-a-d, imposer à l'erreur de poursuite de converger vers zéro.

Dans la commande adaptative à modèle de référence, on rencontre deux structures : la commande adaptative directe et la commande adaptative indirecte [1][3][2][24].

Dans la commande adaptative indirecte (voir Fig.III.2), on estime d'abord les paramètres du procédé en suite on calcule les paramètres du régulateur. L'appellation indirecte vient du fait que les paramètres estimés du procédé sont envoyés vers les paramètres du régulateur.

Dans la commande adaptative directe (voir Fig.III.1), les paramètres du procédé et ceux du régulateur seront reliés les uns aux autres pour former une seule structure paramétrique qui sera ajustée par le mécanisme d'ajustement. Donc, dans ce type de commande, la loi de commande est générée directement sans estimation propre aux paramètres du procédé.

Pour analyser et concevoir un système à commande adaptative, on trouve essentiellement deux approches :

1. Approche du gradient
2. Fonctions de Lyapunov

III.4. APPROCHE DU GRADIENT

Cette approche est basée sur l'hypothèse que les paramètres du procédé changent d'une manière très lente par rapport aux autres variables dans le système. L'approche du gradient ne fournit pas nécessairement un système stable en boucle fermée. Le mécanisme d'ajustement des paramètres est appelé généralement règle MIT.

Règle MIT

Supposons que nous allons ajuster les paramètres du régulateur de telle sorte que l'erreur entre les sorties du procédé et du modèle de référence soit amenée à zéro. Soit e l'erreur de poursuite, θ le paramètre à ajuster et soit le critère d'optimisation suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \qquad \text{(III. 1)}$$

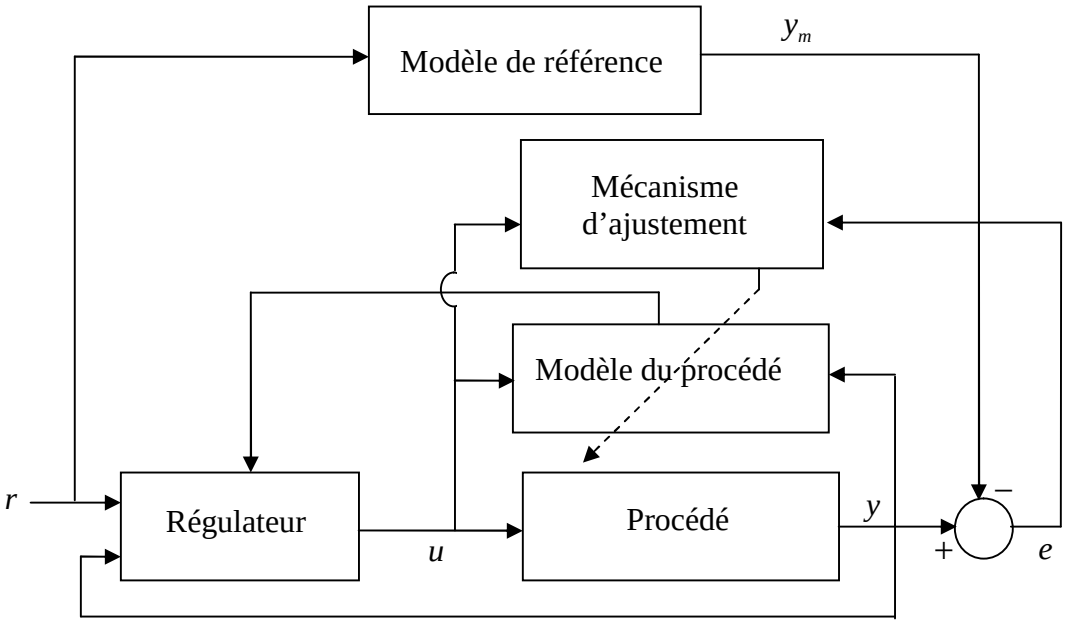


Figure III. 2: Structure d'une commande adaptative indirecte.

Pour obtenir le min de J, il est raisonnable de changer les paramètres dans la direction négative du gradient de J, i. e.,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma\, e \frac{\partial e}{\partial \theta} \qquad \text{(III. 2)}$$

Cette règle MIT fonctionnera bien si le gain d'adaptation γ est faible. La grandeur permise de γ dépendra alors de l'amplitude du signal de référence et du gain du procédé. Par conséquent, il n'est pas possible de donner des limites fixées qui peuvent garantir la stabilité, donc la règle MIT peut donner un système instable en boucle fermée. Une loi d'ajustement modifiée utilisant la théorie de stabilité peut alors être introduite.

III.5. FONCTIONS DE LYAPUNOV

Dans cette approche nous allons essayer de trouver des lois d'ajustements de telle sorte que la convergence de l'erreur vers zéro soit garantie.

Lyapunov [25][26] a introduit sa méthode directe pour étudier la stabilité d'une solution à une équation différentielle non linéaire. La philosophie de base de cette méthode est l'extension d'une observation physique fondamentale : si l'énergie totale d'un système mécanique (ou électrique) est continuellement dissipée, alors le système convergera vers un état d'équilibre. Donc, on peut conclure la stabilité d'un système donné par simple examen d'une certaine fonction scalaire.

Soit l'équation différentielle

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t) \qquad f(0,t) = 0 \tag{III. 3}$$

où $\underline{x}$ est le vecteur d'état de dimension n. Le point d'équilibre est supposé être l'origine.

Théorème de Stabilité de Lyapunov

Soit la fonction $V : \Re^{n+1} \to \Re$ satisfaisant les conditions :

1. $V(0,t) = 0 \qquad \forall t \in \Re$.
2. V est différentiable en $\underline{x}$ et en t.
3. V est définie positive, c'est à dire, $V(\underline{x}, t) \geq g(\underline{x}) > 0$ où $g : \Re \to \Re$ est une fonction continue et croissante avec $\lim_{x \to \infty} g(\underline{x}) = \infty$

Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique uniforme du système 3 est que la fonction :

$$\dot{V}(\underline{x}, t) = f^{\mathrm{T}}(\underline{x}, t) grad V + \frac{\partial V}{\partial t} < 0 \text{ pour } \underline{x} \neq 0 \tag{III. 4}$$

ce qui veut dire que $\dot{V}(x,t)$ est définie négative.

La théorie de stabilité de Lyapunov [25][26] peut être utilisée pour concevoir une loi de commande adaptative qui peut garantir la stabilité du système en boucle fermée. Dans ce qui suit nous allons illustrer l'application de ce théorème sur un système linéaire du premier ordre.

Exemple 1

Soit la commande adaptative d'un système linéaire du premier ordre décrit par :

$$\dot{y} = -a_p y + b_p u \tag{III. 5}$$

Les paramètres a_p et b_p sont supposés être inconnus. Les performances désirées sont données par un modèle de référence du premier ordre suivant :

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r(t) \tag{III. 6}$$

où $r(t)$ est une entrée externe bornée.

La loi de commande et de la forme :

$$u = \hat{a}_r(t)\, r + \hat{a}_y(t)\, y \tag{III. 7}$$

où $\hat{a}_r$ et $\hat{a}_y$ sont des gains variables de retour. Alors la dynamique en boucle fermée devient :

$$\dot{y} = -(a_p - \hat{a}_y\, b_p)\, y + \hat{a}_r\, b_p\, r(t) \tag{III. 8}$$

La raison de choisir une telle forme pour la loi de commande est la suivante : pour permettre une très bonne poursuite du modèle de référence, parce que si les paramètres du procédé étaient connus, alors les paramètres suivants de la commande :

$$a_r^* = \frac{b_m}{b_p} \tag{III. 9}$$

$$a_y^* = \frac{a_p - a_m}{b_p} \tag{III. 10}$$

nous donnerons la dynamique suivante en boucle fermée :

$$\dot{y} = -a_m y + b_m r(t) \tag{III. 11}$$

qui est identique à la dynamique du modèle de référence et qui nous donne une erreur de poursuite nulle.

Choix de la loi d'adaptation

Soit l'erreur de poursuite :

$$e = y - y_m \tag{III. 12}$$

et soit l'erreur paramétrique :

$$\tilde{a}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_r \\ \tilde{a}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_r - a_r^* \\ \hat{a}_y - a_y^* \end{bmatrix} \tag{III. 13}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m &= -a_m(y - y_m) + (a_m - a_p + b_p\hat{a}_y)y + (b_p\hat{a}_r - b_m)r \\
&= -a_m e + \left(a_m - a_p + b_p(\tilde{a}_y + a_y^*)\right)y + \left(b_p(\tilde{a}_r + a_r^*) - b_m\right)r \\
&= -a_m e + \left(a_m - a_p + b_p\left(\tilde{a}_y + \frac{a_p - a_m}{b_p}\right)\right)y + \left(b_p\left(\tilde{a}_r + \frac{b_m}{b_p}\right) - b_m\right)r \\
&= -a_m e + (a_m - a_p + b_p\tilde{a}_y - a_m + a_p)y + (b_p\tilde{a}_r + b_m - b_m)r \\
&= -a_m e + b_p\tilde{a}_y y + b_p\tilde{a}_r r
\end{aligned}$$

$$\dot{e} = -a_m e + b_p(\tilde{a}_y y + \tilde{a}_r r) \tag{III. 14}$$

$$V(e, \tilde{a}_y, \tilde{a}_r) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma}(\tilde{a}_y{}^2 + \tilde{a}_r{}^2) \tag{III. 15}$$

Calcul de la loi d'ajustement

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}(\tilde{a}_r\dot{\tilde{a}}_r + \tilde{a}_y\dot{\tilde{a}}_y) \\
&= e\left(-a_m e + b_p(\tilde{a}_y y + \tilde{a}_r r)\right) + \frac{1}{\gamma}\left(\tilde{a}_r\dot{\tilde{a}}_r + \tilde{a}_y\dot{\tilde{a}}_y\right) \\
&= -a_m e^2 + e b_p\tilde{a}_y y + e b_p\tilde{a}_r r + \frac{1}{\gamma}\tilde{a}_r\dot{\tilde{a}}_r + \frac{1}{\gamma}\tilde{a}_y\dot{\tilde{a}}_y \\
&= -a_m e^2 + \tilde{a}_r\left(\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{a}}_r + b_p e r\right) + \tilde{a}_y\left(\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{a}}_y + b_p e y\right)
\end{aligned} \tag{III. 16}$$

$\dot{V}$ définie négative.

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{a}}_r + b_p e\, r = 0 \\ \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{a}}_y + b_p e\, y = 0 \end{cases} \qquad \text{(III. 17)}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_r &= -\text{sgn}(b_p)\gamma e\, r = \dot{\hat{a}}_r \\ \dot{\tilde{a}}_y &= -\text{sgn}(b_p)\gamma e\, y = \dot{\hat{a}}_y \end{aligned} \qquad \text{(III. 18)}$$

Par conséquent avec cette loi d'ajustement nous obtenons :

$$\dot{V} = -a_m e^2 \qquad \text{(III. 19)}$$

Donc la loi adaptative est globalement stable, c.-à-d., les signaux $e, \tilde{a}_y$ et $\tilde{a}_y$ sont bornés.

Pour visualiser cette commande nous allons maintenant considérer les valeurs numériques suivantes : $a_p = -1,\ b_p = 3,\ a_m = 4, et\ b_m = 4$. Le gain d'adaptation γ est choisi égale à 2.

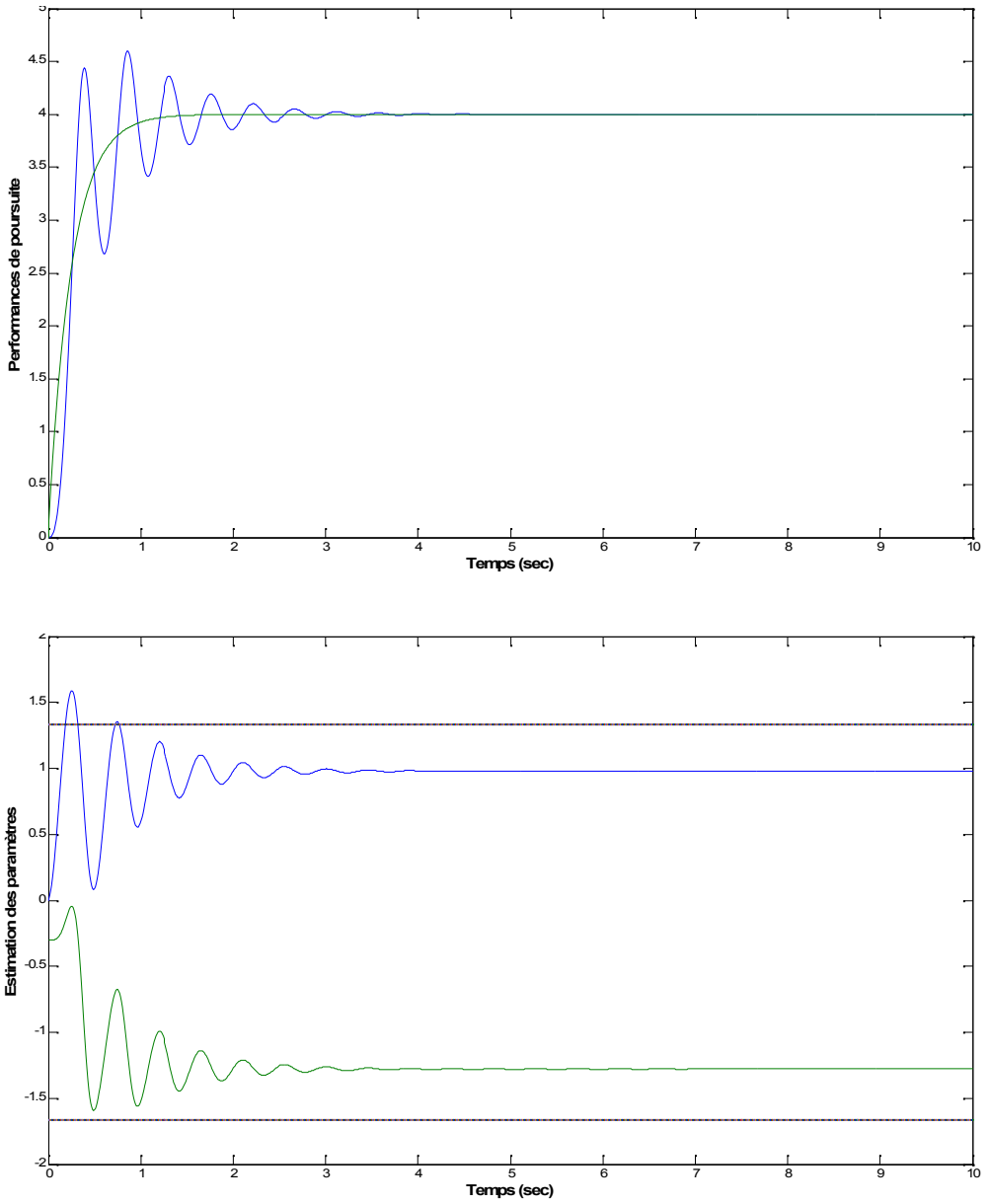


Figure III. 3: Performances de poursuite et Estimation des paramètres, $r(t) = 4$.

Les deux paramètres initiaux du régulateur sont choisis nuls. Les conditions initiales du procédé et du modèle sont supposées égales à zéro. Deux différents signaux de référence sont utilisés :

$r(t) = 4$: Dans ce cas on remarque à partir de la figure III.3 que l'erreur de poursuite converge vers zéro, tandis que l'erreur paramétrique ne converge pas.

$r(t) = 4\sin(3t$: Dans ce cas on remarque à partir de la figure III.4 que l'erreur de poursuite ainsi que l'erreur paramétrique convergent toutes les deux vers zéros.

Extension à un système nonlinéaire

La même méthode peut être appliquée au système nonlinéaire suivant :

$$\dot{y} = -a_p y - c_p f[y] + b_p u \qquad \text{(III. 20)}$$

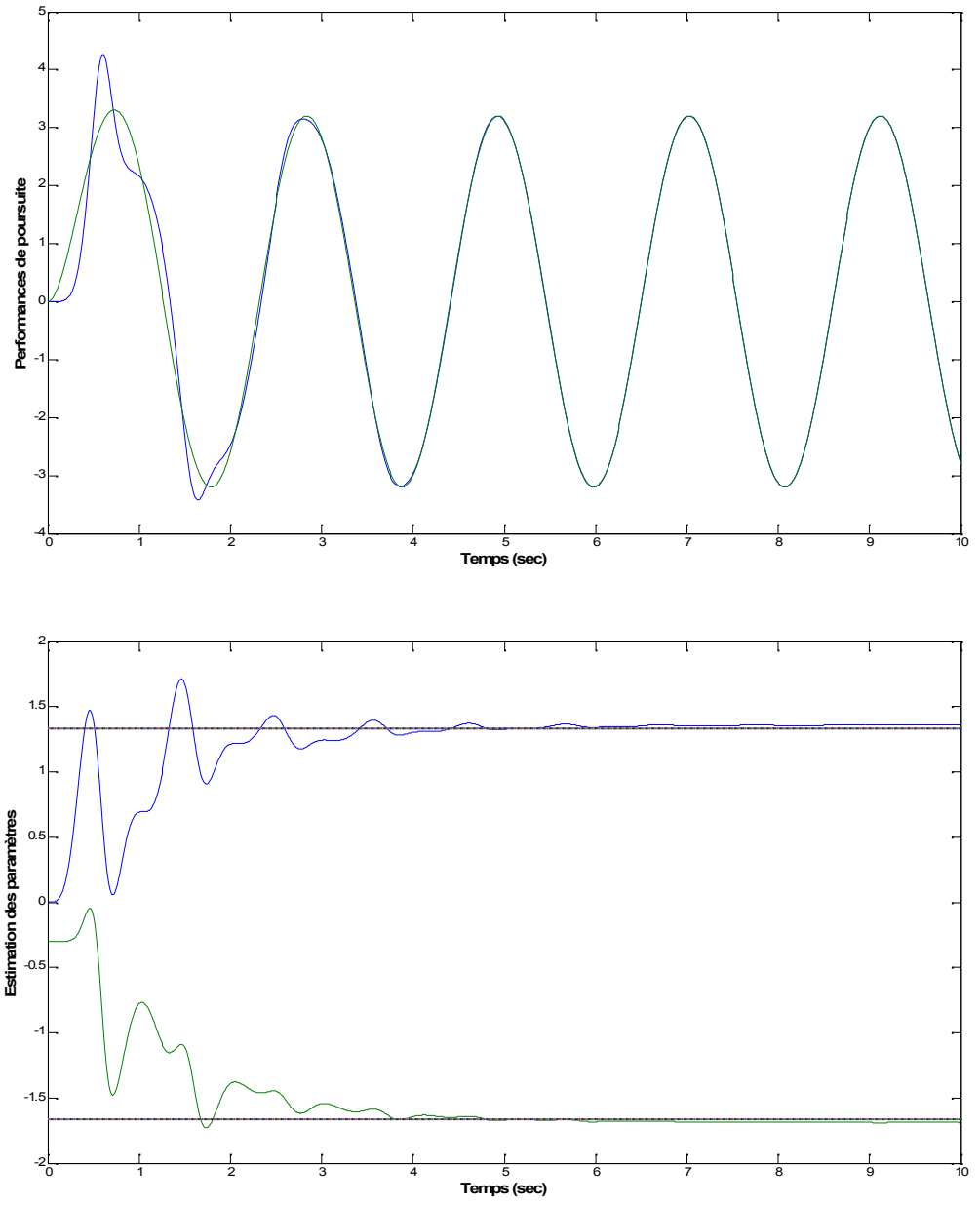


Figure III. 4: Performances de poursuite et Estimation des paramètres, $r(t) = 4\sin(3t)$.

La non linéarité est exprimée par la constante non connue c_p, donc :

$$u = \hat{a}_y\, y + \hat{a}_r\, r + \hat{a}_f\, f \qquad \text{(III. 21)}$$

donc la dynamique en boucle fermée devient :

$$\dot{y} = -(a_p - b_p \hat{a}_y)\, y + b_p \hat{a}_r\, r - (c_p - b_p \hat{a}_f)\, f \tag{III. 22}$$

Les paramètres optimaux du régulateur sont :

$$a_r^* = \frac{b_m}{b_p} \tag{III. 23}$$

$$a_y^* = \frac{a_p - a_m}{b_p} \tag{III. 24}$$

$$a_f^* = \frac{c_p}{b_p} \tag{III. 25}$$

$$\begin{aligned} e &= y - y_m \\ \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= -a_m (y - y_m) + (a_m - a_p + b_p \hat{a}_y) y + (b_p \hat{a}_r - b_m) r + (b_p \hat{a}_f - c_p) f \\ &= -a_m e + b_p (\tilde{a}_y y + \tilde{a}_r r + \tilde{a}_f f) \end{aligned}$$

$$V(e, \tilde{a}_y, \tilde{a}_r, \tilde{a}_f) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma} (\tilde{a}_y{}^2 + \tilde{a}_r{}^2, \tilde{a}_f{}^2) \tag{III. 26}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_r &= -\mathrm{sgn}(b_p) \gamma e\, r \\ \dot{\hat{a}}_y &= -\mathrm{sgn}(b_p) \gamma e\, y \\ \dot{\hat{a}}_f &= -\mathrm{sgn}(b_p) \gamma e\, f \end{aligned} \tag{III. 27}$$

III.6. CONCLUSION

Ce chapitre est considéré comme une introduction à la commande adaptative d'une façon générale. Les principaux points traités par ce chapitre sont :La commande adaptative à modèle de référence, l'approche du gradient et règle MIT, et la théorie de Lyapunov.

Chapitre IV

Commande Linéarisante par Retour "Feedback Linearization"

Chapitre IV

Commande Linéarisante par Retour "Feedback Linearization"

IV.1. INTRODUCTION

Ce type de commande a fait son apparition dans les années 80s avec les travaux d'*Isidori* et les apports de la géométrie différentielle. Un grand nombre de systèmes non linéaires peuvent être partiellement ou complètement transformés en systèmes possédant un comportement entrée-sortie linéaire ou entrée-état linéaire à travers un choix approprié d'une loi de commande par retour d'état non linéaire. Lorsque la dynamique des zéros est stable, il est possible de transformer le système non linéaire en une chaîne d'intégrateurs.

Après linéarisation, les techniques classiques du linéaire peuvent être appliquées. Cette approche a souvent été employée pour résoudre des problèmes pratiques de commande mais elle impose que le vecteur d'état soit mesuré et demande un modèle précis du procédé à commander. De plus, les propriétés de robustesse ne sont pas garanties face aux incertitudes paramétriques du modèle. En effet, cette technique est basée sur l'annulation exacte des termes non linéaires. Par conséquent, la présence d'incertitudes de modélisation sur les termes non linéaires rend l'annulation inexacte et l'équation entrée-sortie résultante non linéaire [27].

Dans ce chapitre nous allons essayer d'appliquer la technique de Feedback linearization. Pour commander un pendule inversé ainsi qu'un bras un bras manipulateur à deux degrés de liberté.

IV.2 COMMANDE LINEARISANTE

Dans sa forme la plus simple, Feedback linéarisation concerne à simplifier les non linéarités dans un système non linéaire de telle façon la dynamique en boucle fermée soit linéaire.

Nous allons essayer de montrer cette idée sur l'exemple suivant:

soit un système non linéaire décrite par la dynamique suivante:

$$a\dot{x} = u - b\sqrt{2gx} \tag{IV. 1}$$

où a, b et g sont des constantes.

u la commande du système.

x l'état de sortie du système et soit x_d la sortie désirée du système.

Si $u(t)$ est choisie comme:

$$u(t) = b\sqrt{2gx} + av \tag{IV. 2}$$

avec v est une nouvelle entrée appelée dans la littérature "entrée équivalente" que nous devons définir, alors la nouvelle dynamique sera linéaire de la forme

$$\dot{x} = v \tag{IV. 3}$$

Choisissant v tel que:

$$v = x_d - k_p\left[x - x_d\right] \tag{IV. 4}$$

Donc l'équation (IV.14) devient:

$$\dot{x} - x_d - k_p\left[x - x_d\right] = 0 \tag{IV. 5}$$

Posant $x - x_d = e$ qui est l'erreur, donc la dynamique résultante en boucle fermée sera:

$$\dot{e} + k_p e = 0 \tag{IV. 6}$$

k_p doit être une constante strictement positive pour que l'erreur $e(t)$ converge vers zéro, donc $e(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

En basant sur cette analyse, la loi de commande non linéaire est donnée par:

$$u(t) = b\sqrt{2gx} + a\left[x_d - \alpha e\right] \tag{IV. 7}$$

Notons que dans la loi de commande (IV.7) le premier terme est utilisé pour compenser la non linéarité $b\sqrt{2gx}$, tandis que le deuxième terme est utilisé pour assurer la poursuit de la trajectoire désirée [23].

L'idée de la commande linéarisante est d'éliminer les non linéarités et d'imposer une dynamique linéaire désirée. Elle peut être appliquée simplement à une classe de systèmes non linéaires décrits par ce qu'on appelle la forme compagne si sa dynamique est représentée par:

$$x^{(n)} = f(x) + g(x).u \tag{IV. 8}$$

où u est l'entrée de commande $u \in R$ et $x \in R^n$ est la sortie considérée, $x = \left[x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}\right]^T$ est le vecteur d'état, et $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions non linéaires dans l'espace d'état, l'équation considérée (8) peut être réécrite par:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(x) + g(x).u \end{bmatrix} \tag{IV. 9}$$

pour ce type de système, on suppose que $g(x)$ est différente de zéro.

Si nous choisissons la commande suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)}\left[v - f(x)\right] \tag{IV. 10}$$

Alors, la dynamique du système sera comme suit

$$x^{(n)} = v \tag{IV. 11}$$

Et pour que la dynamique soit linéaire et stable, l'entrée équivalente v doit être

$$v = x_d^{(n)} - k_0.e - k_1.\dot{e} - ... - k_{n-1}.e^{(n-1)} \tag{IV. 12}$$

avec les k_i sont choisis tel que le polynôme $e^{(n)} + k_{n-1}e^{(n-1)} + ... + k_0 e = 0$ soit stable, $x_d(t)$ la trajectoire désirée et $e(t) = x(t) - x_d(t)$ est l'erreur de poursuite [3].

Remarque

Des résultats similaires peuvent être obtenus si le scalaire x est remplacé par un vecteur et le scalaire par b par une matrice carrée inversible.

D'une manière générale, si le système est d'ordre n sa dynamique est donnée par:

$$u = \frac{1}{g(x)}\left[-f(x) + x_d^{(n)} + K^T \underline{e}\right] \qquad \text{(IV. 13)}$$

avec $K = [k_n \quad k_{n-1} \quad \dots \quad k_1]^T$ et $\underline{e} = [e \quad \dot{e} \quad \dots \quad e^{(n-1)}]^T$

Cela nous permet d'obtenir la dynamique stable de l'erreur suivante :

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \qquad \text{(IV. 14)}$$

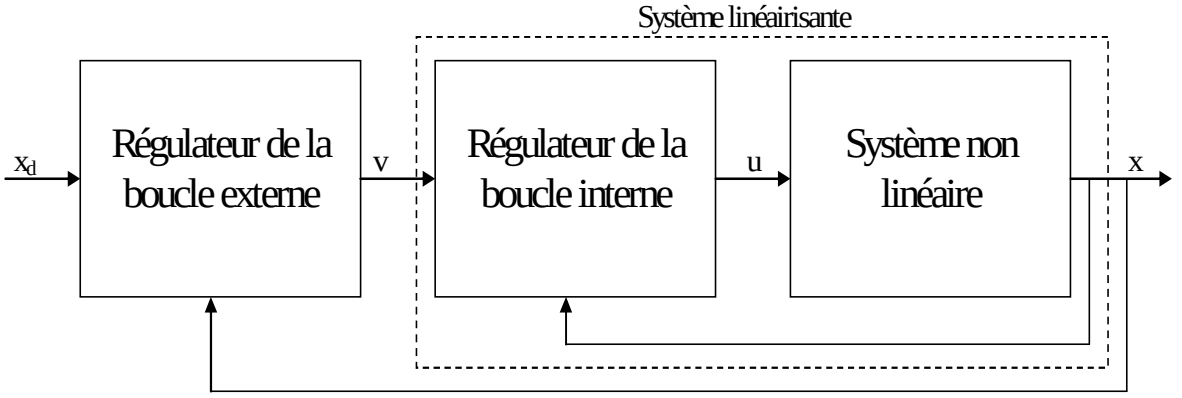


Figure IV. 1 : Architecture de la commande linéarisante.

IV.3 APPLICATION DE LA METHODE AU PENDULE INVERSE

Dans la suite de ce mémoire, nous allons essayer d'appliquer l'approche proposée pour commander un pendule inversé montré dans la Fig.IV.2.

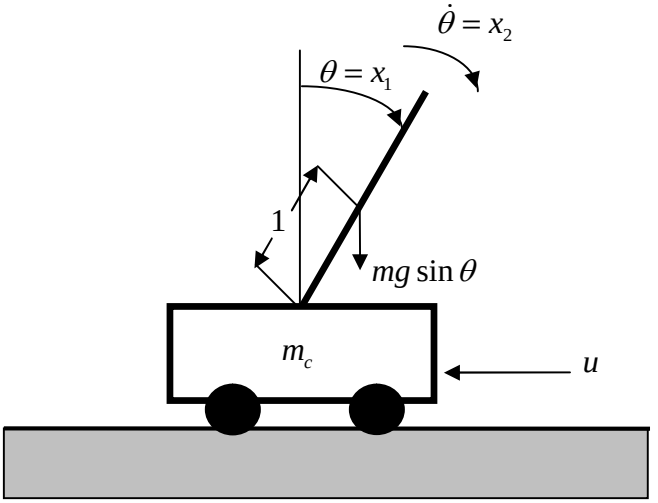


Figure IV. 2: Pendule inversé.

Pour le pendule inversé, les variables d'état sont choisies comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \end{aligned} \tag{IV. 15}$$

et après dérivations, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} \end{aligned} \tag{IV. 16}$$

le modèle dynamique sera alors [29]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \dfrac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m\cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} + \frac{\dfrac{\cos x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m\cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} u \end{aligned} \tag{IV. 17}$$

Avec, $g = 9.8 m/s^2$ est l'accélération due à la gravité, m_c est la masse du chariot, m est la masse du pôle, l la demi longueur du pôle, et u est la force de commande appliquée. Nous choisissons $m_c = 1kg$, $m = 0.1kg$, et $l = 0.5m$.

La forme compagne de ce modèle est alors :

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin x_1 - \dfrac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} + \frac{\dfrac{\cos x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} u = f(x) + g(x) u \qquad \text{(IV. 18)}$$

avec

$$f(x) = \frac{g \sin x_1 - \dfrac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} \text{ et } g(x) = \frac{\dfrac{\cos x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} \qquad \text{(IV. 19)}$$

Par application de la technique de commande linéarisante, la loi de commande u sera donnée par:

$$u = \frac{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)}{\dfrac{\cos x_1}{m_c + m}} \left[\ddot{\theta}_d + K_d\left(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}\right) + K_p\left(\theta_d - \theta\right) - \frac{g \sin x_1 - \dfrac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} \right] \qquad \text{(IV. 20)}$$

Les résultats de simulations sont présentés dans les figures (Fig.3) et (Fig.4). Dans la figure (Fig.3) nous trouvons les réponses du pendule inversé à une entrée échelon d'amplitude 2. Nous constatons que la position (Fig.3.a) converge très bien vers la valeur d'entée, et évidemment la réponse en vitesse (Fig.3.b) converge vers la valeur zéro. La commande correspondante est présentée dans la figure (Fig.3.c) et l'erreur qui converge elle aussi vers zéro dans la figure (Fig..3.d).

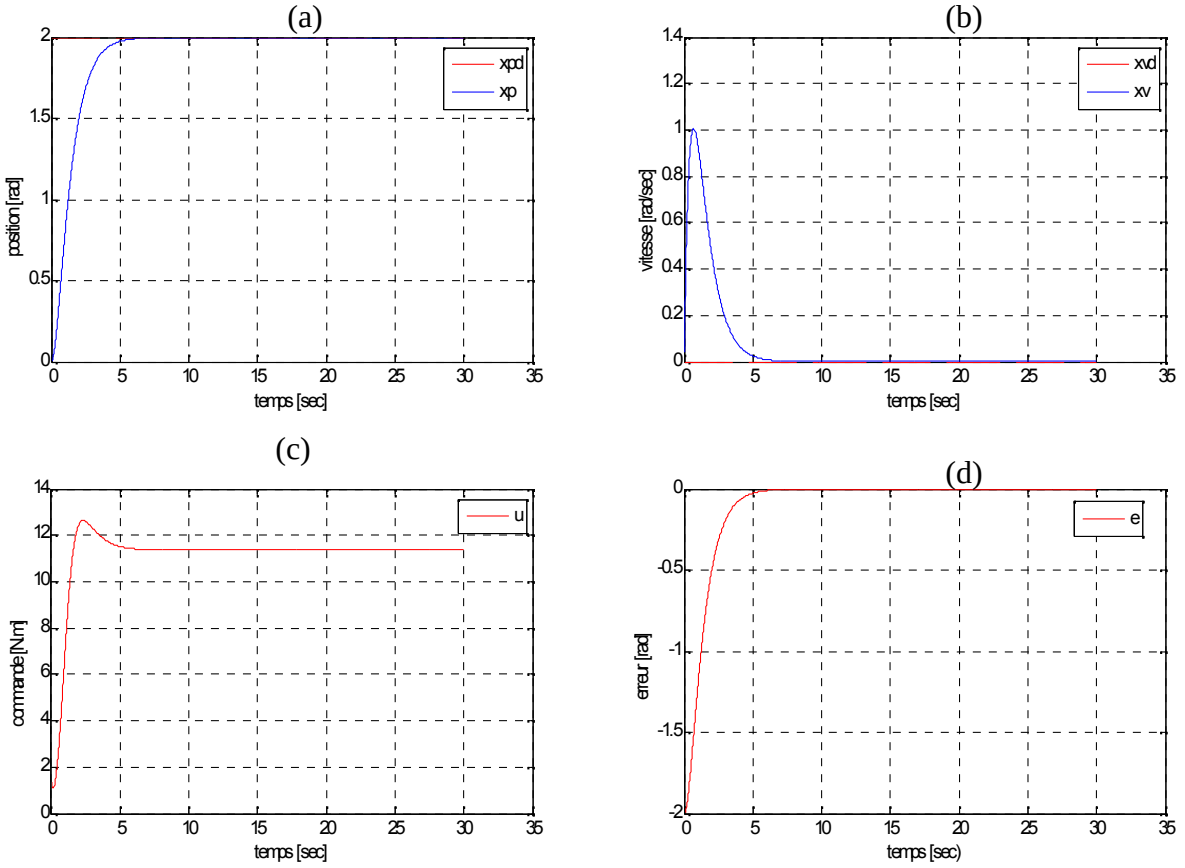


Figure IV. 3 : Réponse du pendule à un échelon sous l'action de la commande linéarisante.

Les réponses du système pendule inversé à une entrée sinusoïdale $x_d(t) = \sin(2 * pi * 0.1 * t)$ avec la commande linéarisante sont données dans la figure (Fig.4). La réponse en position (Fig.4.a) converge pratiquement bien vers la sinusoïde d'entrée, et bien sûr on remarque que la réponse en vitesse (Fig.4.b) converge vers une cosinusoïde (dérivée de la sinusoïde). La commande correspondante est présentée dans la figure (Fig.4.c) et l'erreur est représentée dans (Fig.4.d).

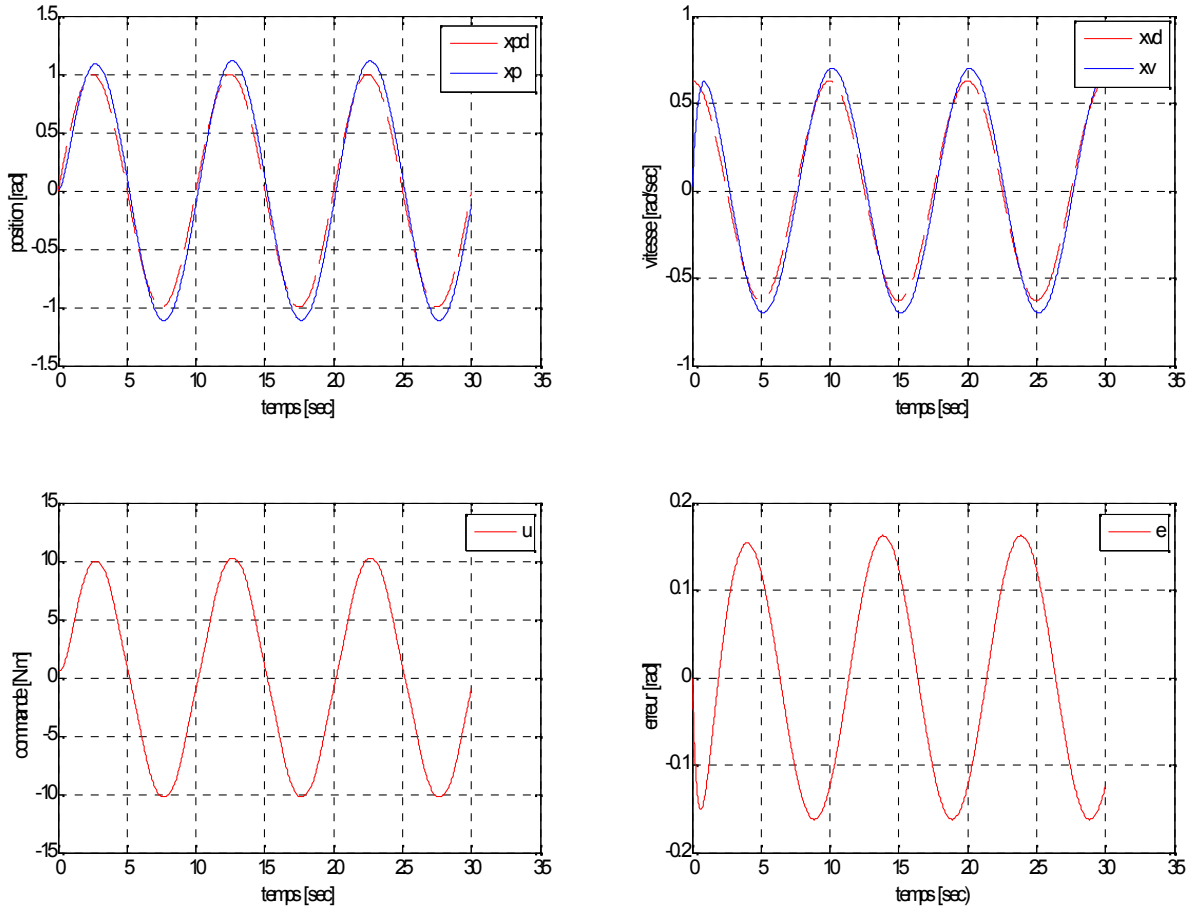


Figure IV. 4 : Réponse du pendule à une entrée sinusoïdale sous l'action de la commande linéarisante.

IV.4 APPLICATION DE LA METHODE AU BRAS MANIPULATEUR

La dynamique d'un bras manipulateur à deux articulations est déterminée par les angles des articulations suivants (Fig.4):

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \qquad \text{(IV. 21)}$$

La commande sera assurée par des moteurs délivrant les couples suivants (Fig.4):

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \qquad \text{(IV. 22)}$$

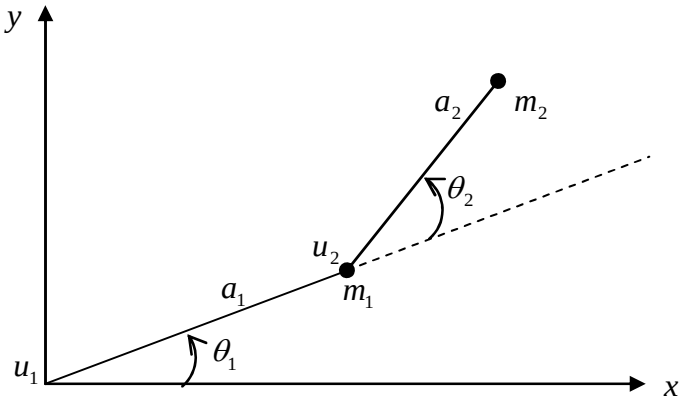


Figure IV. 5: Bras manipulateur.

La déduction du modèle dynamique repose sur l'utilisation des formules des énergies potentielles et cinétiques. Alors, pour chaque articulation nous allons avoir une énergie cinétique (K) et une énergie potentielle (P).

Donc, pour l'articulation 1

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ P_1 &= m_1 g a_1 \sin\theta_1 \end{aligned} \tag{IV. 23}$$

Pour l'articulation 2 on a:

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 &= a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{IV. 24}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -a_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - a_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \\ \dot{y}_2 &= a_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + a_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \tag{IV. 25}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ &= a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + a_2^2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + 2 a_1 a_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right) \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{IV. 26}$$

L'énergie cinétique pour l'articulation 2 est:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_1 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 a_1 a_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right) \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{IV. 27}$$

L'énergie potentielle pour l'articulation 2 est:

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g \left[a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \right] \tag{IV. 28}$$

Alors, en appliquant l'équation de Lagrange, on a

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= K_1 + K_1 - P_1 - P_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) a_1^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2^2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ &+ m_2 a_1 a_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right) \cos\theta_2 - \left(m_1 + m_2\right) g a_1 \sin\theta_1 - m_2 g a_2 \sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) \end{aligned} \tag{IV. 29}$$

Les dérivées nécessaires pour le Lagrangien sont

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 + m_2\right) a_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_2 a_1 a_2 \left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \cos\theta_2 \tag{IV. 30}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(m_1 + m_2\right) a_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 a_1 a_2 \left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \cos\theta_2 \\ &- m_2 a_1 a_2 \left(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{IV. 31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\left(m_1 + m_2\right) g a_1 \cos\theta_1 - m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) \tag{IV. 32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 a_2^2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \tag{IV. 33}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 a_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_2 - m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \tag{IV. 34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 a_1 a_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\sin\theta_2 - m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \qquad \text{(IV. 35)}$$

Finalement, à partir de l'équation de Lagrange, la dynamique du bras sera donnée par les deux équations différentielles non linéaires couplées suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 = &\left(\left(m_1+m_2\right)a_1^2 + m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 \\ &-m_2 a_1 a_2 \left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2\right)\sin\theta_2 + \left(m_1+m_2\right) g a_1 \cos\theta_1 + m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV. 36)}$$

$$\begin{aligned} u_2 = &\left(m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ &+m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 + m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV. 37)}$$

La forme matricielle des équations (37) et (38) seront alors

$$\begin{aligned} &M(q)\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 a_1 a_2 \left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right)\sin\theta_2 \\ m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\ &+\begin{bmatrix} \left(m_1+m_2\right) g a_1 \cos\theta_1 + m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ m_2 g a_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(IV. 38)}$$

avec

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} \left(m_1+m_2\right)a_1^2 + m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2 & m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2 \\ m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos\theta_2 & m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(IV. 39)}$$

matrice d'inertie de dimension $(n \times n)$ symétrique et définie positive

$$\begin{aligned} C(q,\dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_2 a_1 a_2 \left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right)\sin\theta_2 \\ m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(IV. 40)}$$

vecteur de dimension $(n \times 1)$ spécifiant l'effet des forces centrifuges et de Coriolis

et

$$G(q)=\begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1\cos\theta_1+m_2ga_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ m_2ga_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix} \quad \text{(IV. 41)}$$

vecteur de dimension (n×1) exprimant l'effet gravitationnel.[27]

Pour appliquer la méthode de la commande linéarisante au bras manipulateur, soit le vecteur d'état $\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^T$, tel que:

$$\begin{cases}x_1=\theta_1\\ x_2=\dot{\theta}_1\\ x_3=\theta_2\\ x_4=\dot{q}_2\end{cases} \quad \text{(IV. 42)}$$

$$\underline{\dot{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} \quad \text{(IV. 43)}$$

avec cette représentation d'état, la dynamique du bras devient :

$$\begin{aligned}m_{11}&=(m_1+m_2)a_1^2+m_2a_2^2+2m_2a_1a_2\cos x_3\\ m_{12}&=m_2a_2^2+m_2a_1a_2\cos x_3\\ m_{21}&=m_2a_2^2+m_2a_1a_2\cos x_3\\ m_{22}&=m_2a_2^2\end{aligned} \quad \text{(IV. 44)}$$

$$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-m_2a_1a_2\left(2x_2x_4+x_4^2\right)\sin x_3\\ m_2a_1a_2x_2^2\sin x_3\end{bmatrix} \quad \text{(IV. 45)}$$

$$\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1\cos x_1+m_2ga_2\cos(x_1+x_3)\\ m_2ga_2\cos(x_1+x_3)\end{bmatrix} \quad \text{(IV. 46)}$$

Ce qui nous mène à la forme compagne de la dynamique du bars suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_3\end{bmatrix}}_{\ddot{q}} = \underbrace{[M]^{-1}\begin{bmatrix}-c_1-g_1\\ -c_2-g_2\end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{[M]^{-1}}_{g(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}}_{u} \tag{IV. 47}$$

Donc la commande linéarisante sera comme suit:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g(x)}\left[-f(x)+\ddot{q}_d+\underline{k}^T\underline{e}\right] \\ &= \frac{1}{[M]^{-1}}\left([M]^{-1}\begin{bmatrix}c_1+g_1\\ c_2+g_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\ddot{x}_{d1}\\ \ddot{x}_{d2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[k_{21} \quad k_{11}]\begin{bmatrix}e_1\\ \dot{e}_1\end{bmatrix}\\ [k_{22} \quad k_{12}]\begin{bmatrix}e_2\\ \dot{e}_2\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{IV. 48}$$

avec $q_d = \begin{bmatrix}x_{d1} & x_{d2}\end{bmatrix}^T$ le vecteur trajectoire désirée.

Les vecteurs erreurs sont définis par

$$\underline{e} = \begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 - x_{d1}\\ x_3 - x_{d2}\end{bmatrix} \tag{IV. 49}$$

$$\underline{\dot{e}} = \begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 - \dot{x}_{d1}\\ x_4 - \dot{x}_{d2}\end{bmatrix} \tag{IV. 50}$$

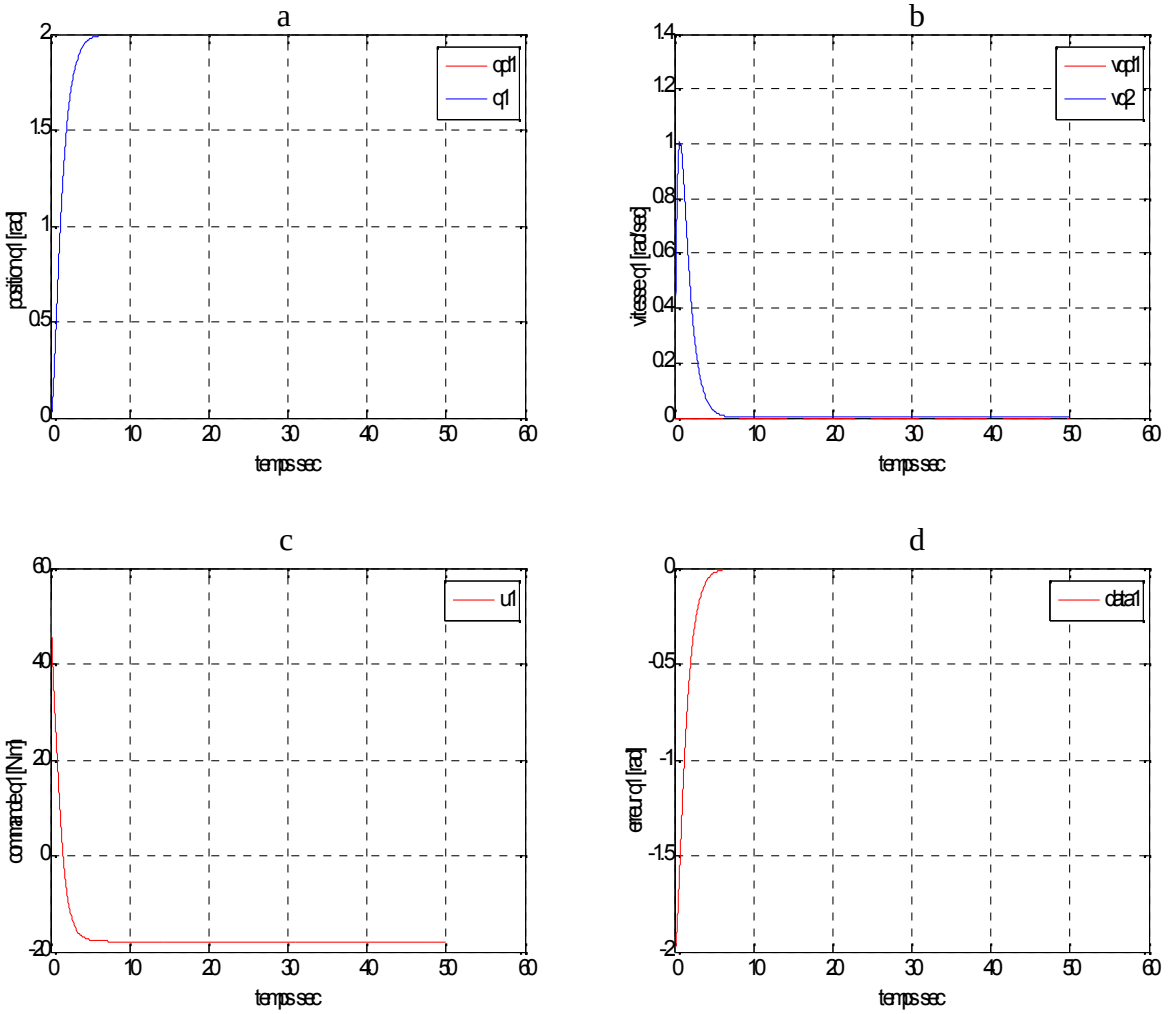


Figure IV. 6 :Réponse d'articulation (1) du bras à un échelon sous l'action de la commande linéarisante.

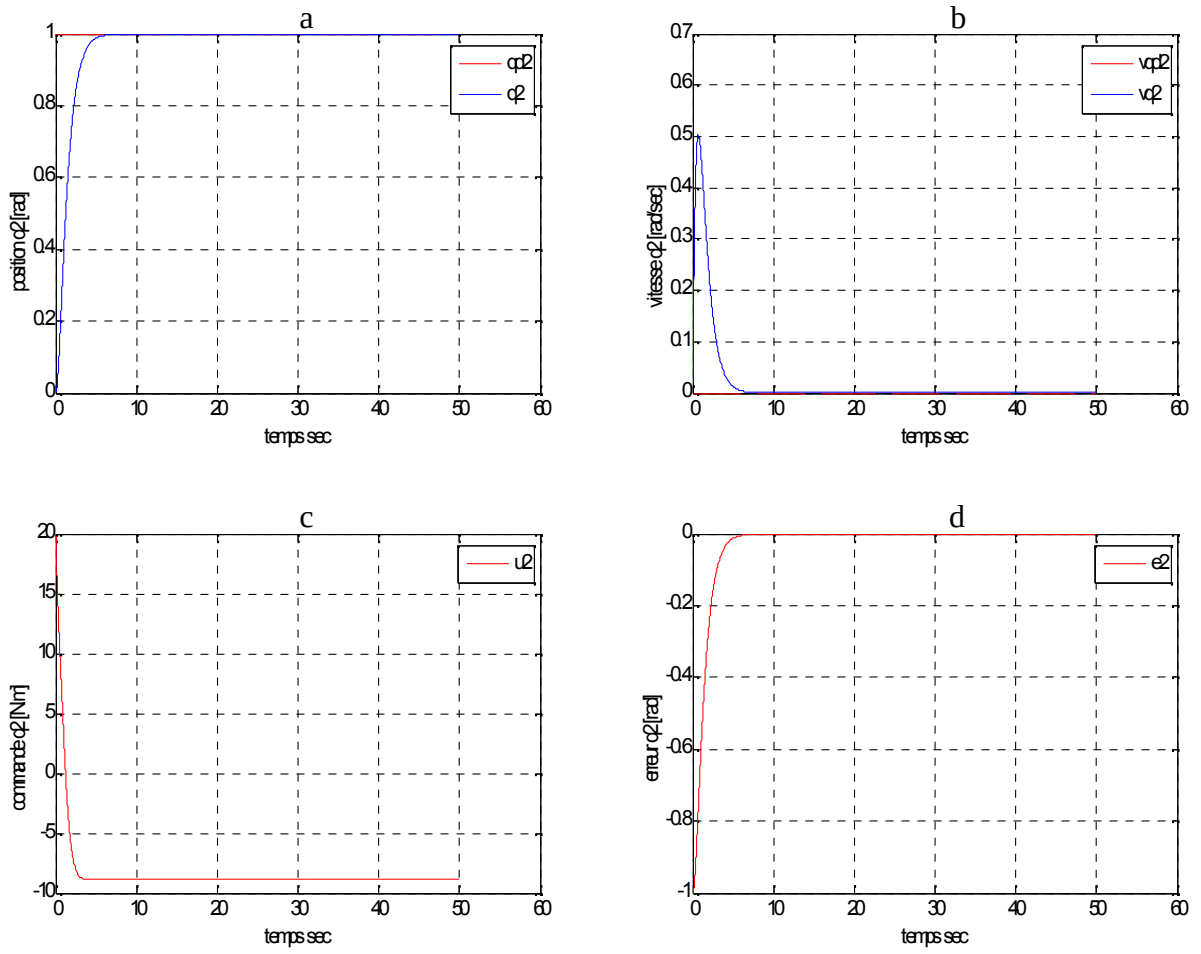


Figure IV. 7 : Réponse d'articulation (2) du bras à un échelon sous l'action de la commande linéarisante.

Les résultats de simulations sont présentés dans les figures (Fig..6), (Fig.7), (Fig.8) et (Fig.. 9). Dans les figures (Fig.6) et (Fig.7) on présente les réponses des articulations (1) et (2) du bras à des entrées échelon d'amplitudes 2 et 1, respectivement. Nous constatons que les positions (Fig.6.a) et (Fig.7.a) convergent très bien vers les valeurs d'entrées, et évidemment les réponses en vitesses (Fig. 6.b et Fig.7.b) convergent vers la valeur zéro. Les commandes correspondantes sont présentées dans les figures (Fig.6.c) et (Fig.7.c) et les erreurs qui convergent elles aussi vers zéro dans les figures (Fig.6.d) et (Fig7.d).

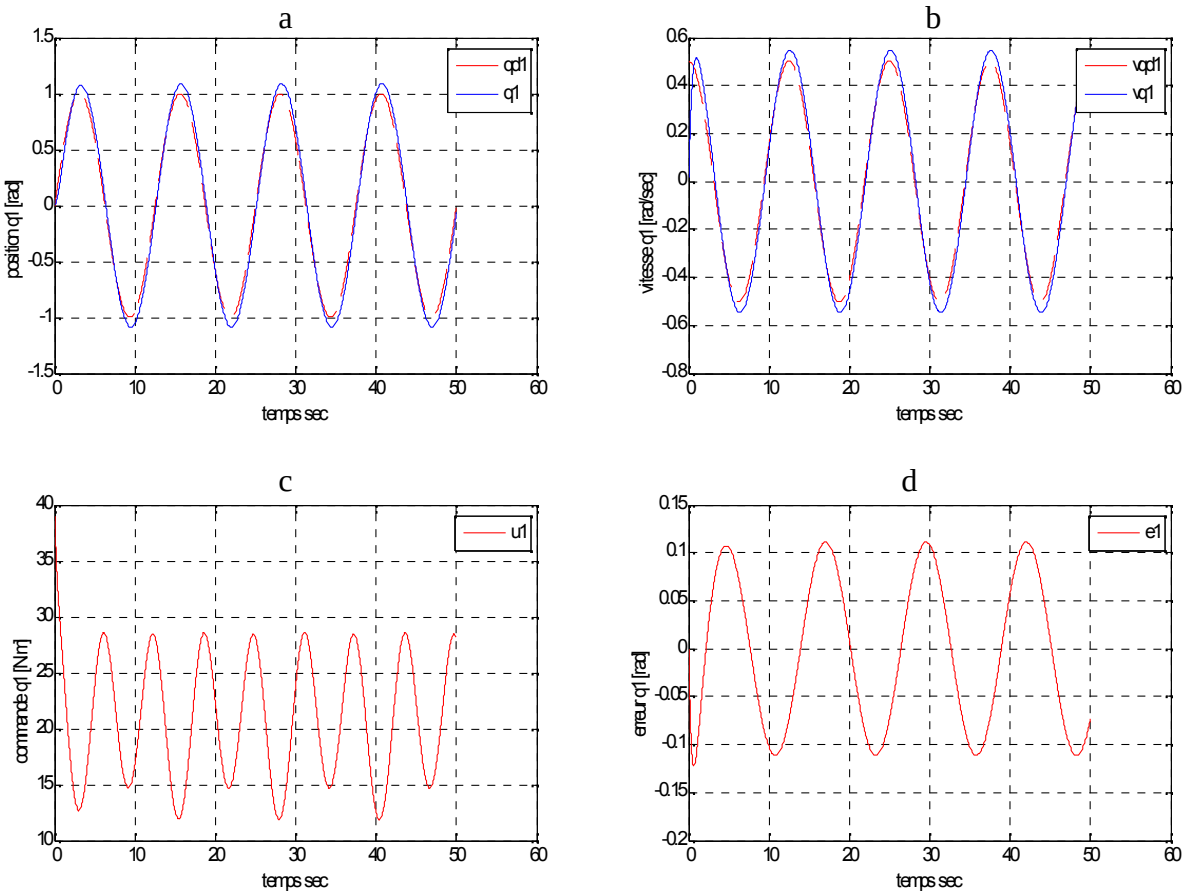


Figure IV. 8 : Réponse d'articulation (1) du bras à une entrée sinusoïdale sous l'action de la commande linéarisante.

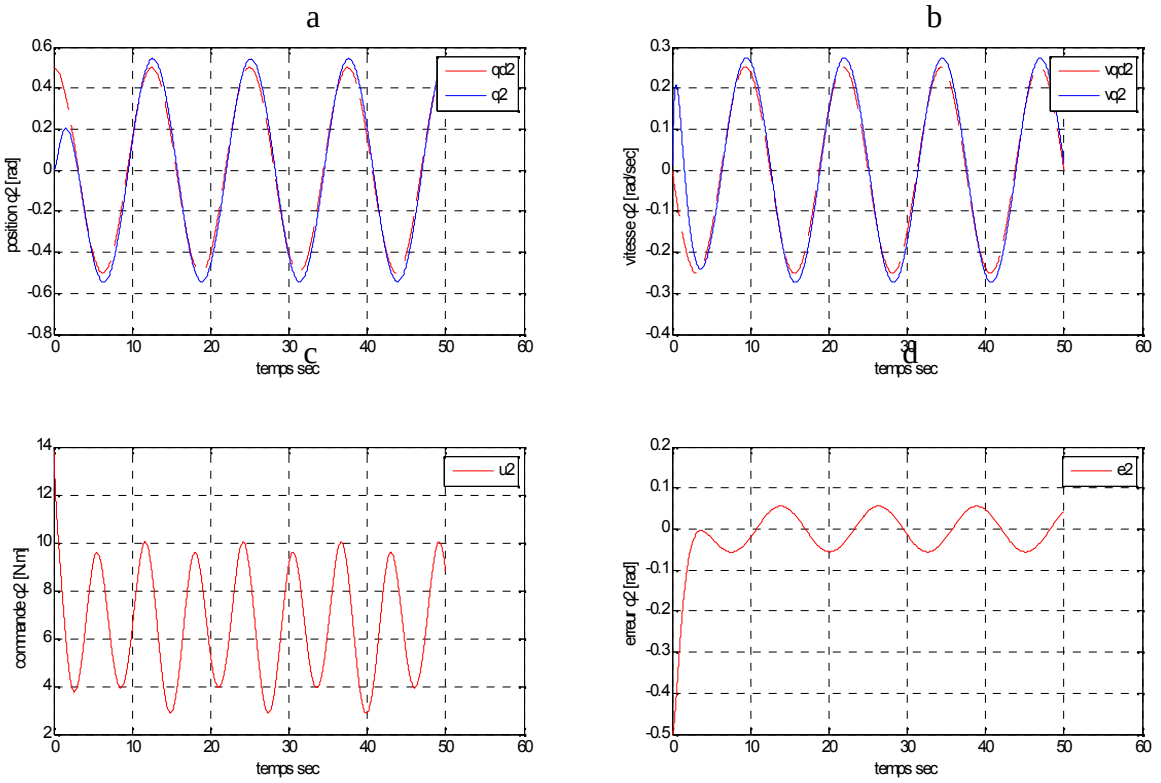


Figure IV. 9 : Réponse d'articulation (2) du bras à une entrée sinusoïdale sous l'action de la commande linéarisante.

Dans les figures (Fig.8) et (Fig.9) on présente les réponses des articulations (1) et (2) du bras à des entrées sinusoïdales : $x_{d1}(t) = \sin(2 * pi * 0.1 * t)$ *et* $x_{d2}(t) = 0.5 * \cos(2 * pi * 0.1 * t)$. Nous constatons que les positions (Fig. IV.8.a et IV.9.a) convergent très bien vers les signaux d'entrées, et évidemment les réponses en vitesses (Fig. IV.8.b et IV.9.b) convergent vers leurs dérivées. Les commandes correspondantes sont présentées dans les figures (Fig.IV.8.c) et (Fig.9.c) et les erreurs dans les figures (Fig.8.d) et (Fig.9.d).

IV.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, La méthode de commande linéarisante (Feedback Linearization) a été présentée avec tous ses détails théoriques. Ensuite, elle a été appliquée à des systèmes non linéaires (pendule inversé et Bras manipulateur à deux degrés de liberté).

Les résultats ont montré l'efficacité de cette méthode, soit pour des entrées constantes ou pour des entrées variables (sinusoïdales).

L’inconvénient de cette méthode est que les paramètres du système sont généralement inconnus, ce qui la rend pratiquement insuffisante. Pour remédier à ce problème, l’utilisation de la commande adaptative devient nécessaire.

Chapitre V

Commande Adaptative floue

Chapitre V

Commande Adaptative Floue

V.1. INTRODUCTION

L'avantage principal d'un régulateur flou par rapport à un régulateur traditionnel (conventionnel) est que les régulateurs flous sont capables d'incorporer des informations linguistiques floues fournies par un certain opérateur, ce qui est n'est pas faisable par un régulateur conventionnel.

Un régulateur flou adaptatif direct utilise les systèmes flous comme des régulateurs. Par conséquent, un régulateur flou adaptatif indirect utilise les systèmes flous pour modéliser le procédé.

Dans ce chapitre nous allons essayer d'appliquer la théorie de la logique floue type 1 et type 2 pour la commande adaptative indirecte d'un pendule inversé (demi bras manipulateur).

V.2. REGULATEUR ADAPTATIVE FLOU

Dans la réalité, f et g ne sont pas connues, donc nous devons les remplacer par leurs estimations $\hat{f}$ et $\hat{g}$ qui vont être des systèmes flous. Par conséquent, la nouvelle loi de commande va prendre la forme suivante :

$$u_c = \frac{1}{\hat{g}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_g)}\left[-\hat{f}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_f) + y_m^{(n)} + \underline{k}^{\mathrm{T}}\underline{e}\right] \qquad \text{(V. 1)}$$

en appliquant (IV.1), et après quelques manipulations, on obtient l'équation d'erreur suivants :

$$e^{(n)} = -\underline{k}^{\mathrm{T}}\underline{e} + \left[\hat{f}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_f) - f(\underline{x})\right] + \left[\hat{g}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_g) - g(\underline{x})\right]u_c \qquad \text{(V. 2)}$$

ce qui est équivalent dans l'espace d'état à :

$$\dot{\underline{e}} = A_C\underline{e} + \underline{b}_C\left[\left(\hat{f}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_f) - f(\underline{x})\right) + \left(\hat{g}(\underline{x}\,|\,\underline{\theta}_g) - g(\underline{x})\right)u_c\right] \qquad \text{(V. 3)}$$

où

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & -k_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{V. 4}$$

puisque A_C est une matrice stable ($\left|s\mathrm{I} - A_C\right| = s^n + k_1 s^{(n-1)} + \ldots + k_n$ est stable), on sait qu'il existe une matrice P définie positive symétrique d'ordre $n \times n$ qui satisfait l'équation de Lyapunov :

$$A_C{}^{\mathrm{T}} P + P A_C = -Q \tag{V. 5}$$

où Q est une matrice arbitraire définie positive d'ordre $n \times n$. Soit $V_e = \frac{1}{2} \underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{e}$ [25][26], donc en utilisant (IV.3) et (IV.5) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \frac{1}{2} \dot{\underline{e}}^{\mathrm{T}} P \underline{e} + \frac{1}{2} \underline{e}^{\mathrm{T}} P \dot{\underline{e}} \\ &= -\frac{1}{2} \underline{e}^{\mathrm{T}} Q \underline{e} + \underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{b}_C \left[\left(\hat{f}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_f) - f(\underline{x}) \right) + \left(\hat{g}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_g) - g(\underline{x}) \right) u_c \right] \end{aligned} \tag{V. 6}$$

Pour que $x_i = y_m{}^{(i-1)} - e^{(i-1)}$ soit borné, nous exigeons que V_e doit être bornée, qui est équivalent à que $\dot{V}_e \le 0$ lorsque V_e est supérieure d'une certaine constante $\tilde{V}$. De (V.6) nous remarquons qu'il est vraiment difficile de concevoir u_c tel que le dernier terme de (V.6) soit inférieur à zéro. Pour résoudre ce problème, nous allons faire appelle à une commande de supervision u_s, ce qui nous donne :

$$u = u_c + u_s \tag{V. 7}$$

L'objectif de u_s est de forcer $\dot{V}_e \le 0$ lorsque $V_e > \tilde{V}$.

Soit les fonctions $f^U(\underline{x})$, $g^U(\underline{x})$ et $g_L(\underline{x})$ tel que $\left|f(\underline{x})\right| \le f^U(\underline{x})$ et $g_L(\underline{x}) \le g(\underline{x}) \le g^U(\underline{x})$ où $f^U(\underline{x}) < \infty$, $g^U(\underline{x}) < \infty$ et $g_L(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in Uc$.

En se basant sur f^U, g^U et g_L, et suivante [16], on a :

$$u_s = \mathrm{I}^* \operatorname{sgn}\left(\underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{b}_C\right) \frac{1}{g_L(\underline{x})} \left[\left| \hat{f}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_f) \right| + f^U(\underline{x}) + \left| \hat{g}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_g) u_c \right| + \left| g^U(\underline{x}) u_c \right| \right] \qquad \text{(V. 8)}$$

avec $\mathrm{I}^* = 1$ si $V_e > \tilde{V}$ et $\mathrm{I}^* = 0$ si $V_e \leq \tilde{V}$.

Pour l'adaptation des paramètres des régulateurs flous, définissons les deux vecteurs paramétriques suivants :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg\min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in Uc} \left| \hat{f}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_f) - f(\underline{x}) \right| \right] \qquad \text{(V. 9)}$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg\min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} \left[\sup_{x \in Uc} \left| \hat{g}(\underline{x} \mid \underline{\theta}_g) - g(\underline{x}) \right| \right] \qquad \text{(V. 10)}$$

où Ω_f et Ω_g sont des intervalles de contraintes pour $\underline{\theta}_f$ et $\underline{\theta}_g$, respectivement, spécifiées par le concepteur.

Selon [24], l'adaptation des paramètres sera assurée suivant les lois :

$$\dot{\underline{\theta}}_f = -\gamma_1 \underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{b}_C \underline{\xi}(\underline{x}) \qquad \text{(V. 11)}$$

$$\dot{\underline{\theta}}_g = -\gamma_2 \underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{b}_C \underline{\xi}(\underline{x}) u_c \qquad \text{(V. 12)}$$

avec γ_i sont des constantes de pondération.

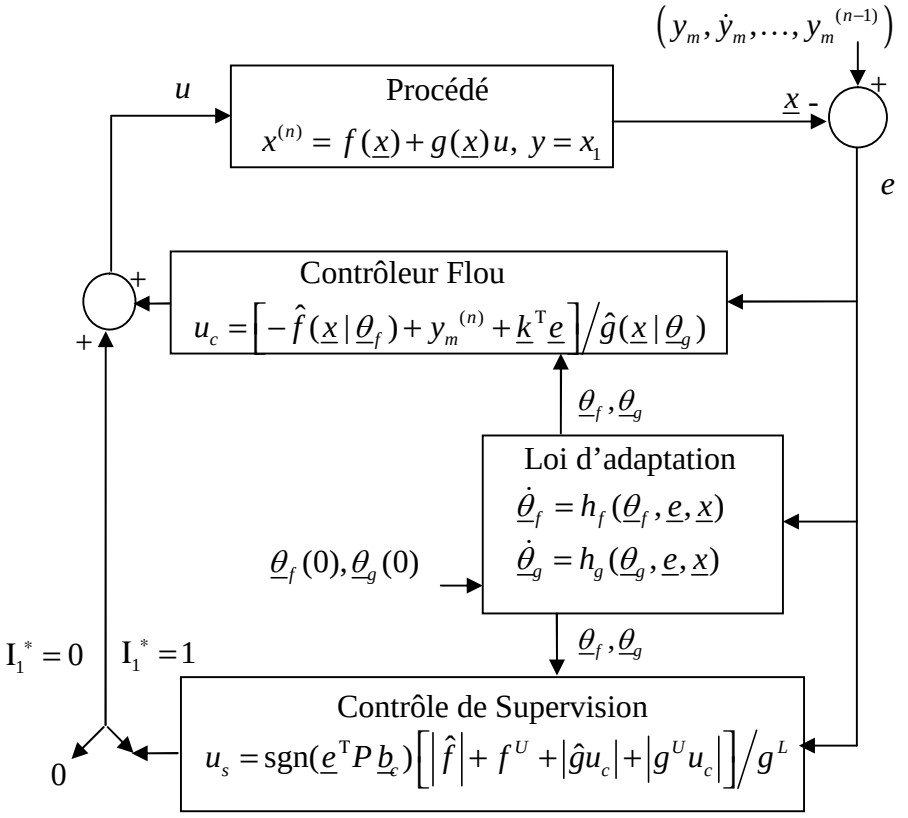


Figure V. 1 : Structure de la commande adaptative.

V.3. APPLICATION ET RESULTATS DE SIMULATION

Dans la suite de ce mémoire, nous allons essayer d'appliquer l'approche proposée pour commander le pendule inversé cité dans le chapitre IV.

Nous choisissons comme signal de référence $y_m(t) = \frac{\pi}{30}\sin(t)$.

Pour appliquer cette méthode, nous avons d'abord besoin de déterminer les limites f^U, g^U et g_L, pour ce système nous avons :

$$\left| f(x_1, x_2) \right| = \left| \frac{g \sin x_1 - \dfrac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \right| \leq \frac{9.8 + \dfrac{0.025}{1.1} x_2^2}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{0.05}{1.1}} \qquad \text{(V. 13)}$$

$$= 15.78 + 0.0366 x_2^2 \equiv f^U(x_1, x_2)$$

$$\left| g(x_1, x_2) \right| = \left| \frac{\dfrac{\cos x_1}{m_c + m}}{l\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \right| \leq \frac{1}{1.1\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{0.05}{1.1} \right)} = 1.46 \equiv g^U(x_1, x_2) \qquad \text{(V. 14)}$$

si nous imposons que $|x_1| \leq \frac{\pi}{6}$, alors :

$$\left| g(x_1, x_2) \right| \geq \frac{\cos \dfrac{\pi}{6}}{1.1\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{0.05}{1.1} \cos^2 \dfrac{\pi}{6} \right)} = 1.12 \equiv g_L(x_1, x_2) \qquad \text{(V. 15)}$$

Maintenant supposons aussi que :

$$|x_1| \leq \frac{\pi}{6} \text{ et } |u| \leq 180 \qquad \text{(V. 16)}$$

puisque $|x_1| \leq \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 \right)^{1/2} = |\underline{x}|$, si nous pouvons imposer $|\underline{x}| \leq \frac{\pi}{6}$, alors $|x_1| \leq \frac{\pi}{6}$. Dans ce cas nous avons aussi $|x_2| \leq \frac{\pi}{6}$.

Le choix des paramètres du régulateur : $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$, et $Q = diag(10,10)$ par conséquent :

$$p = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(V. 17)}$$

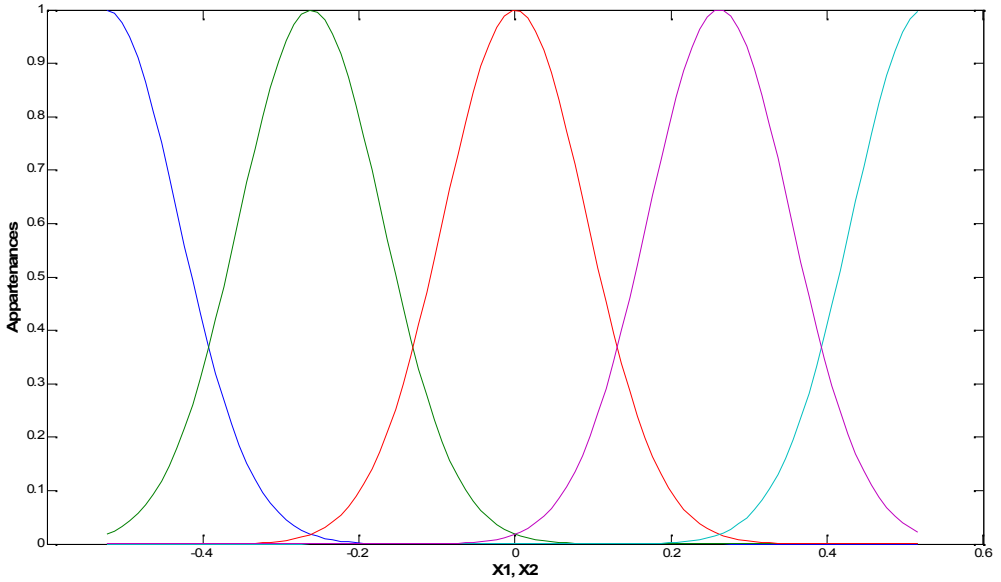


Figure V. 2: Fonctions d'appartenances floues.

Nous allons choisir $m_1 = m_2 = 5$. Puisque $|x_i| \leq \frac{\pi}{6}$, $i = 1, 2$,

V.3.1. REGULATEUR FLOU TYPE-1

Pour ce régulateur, nous allons choisir les fonctions d'appartenance suivantes :

$$\mu_{F_i^1}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \quad \text{(V. 18)}$$

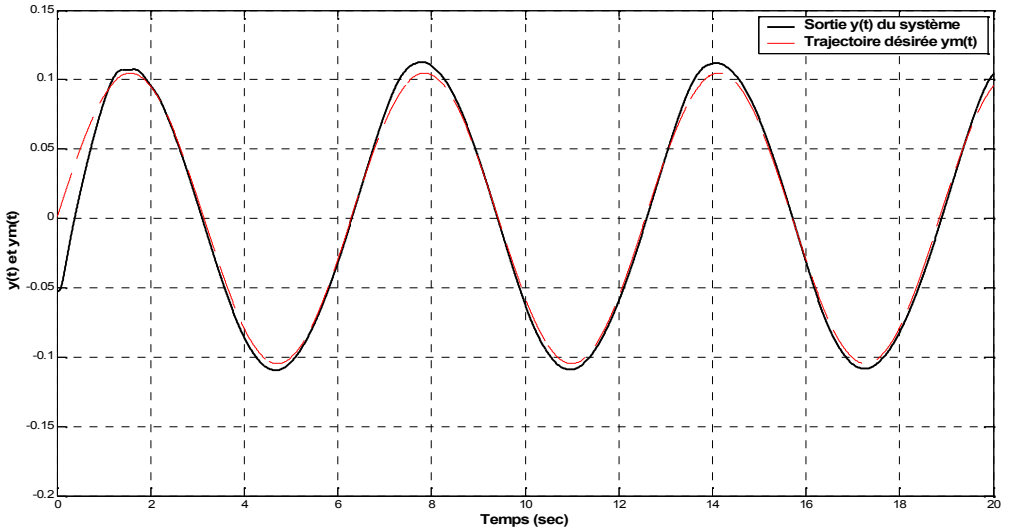
$$\mu_{F_i^2}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \quad \text{(V. 19)}$$

$$\mu_{F_i^3}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right] \quad \text{(V. 20)}$$

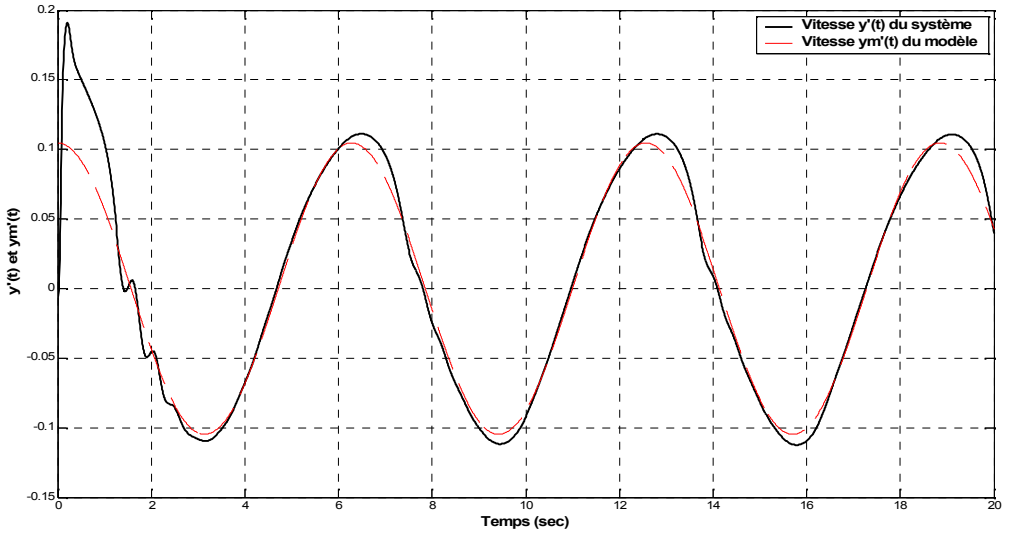
$$\mu_{F_i^4}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \quad \text{(V. 21)}$$

$$\mu_{F_i^5}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \quad \text{(V. 22)}$$

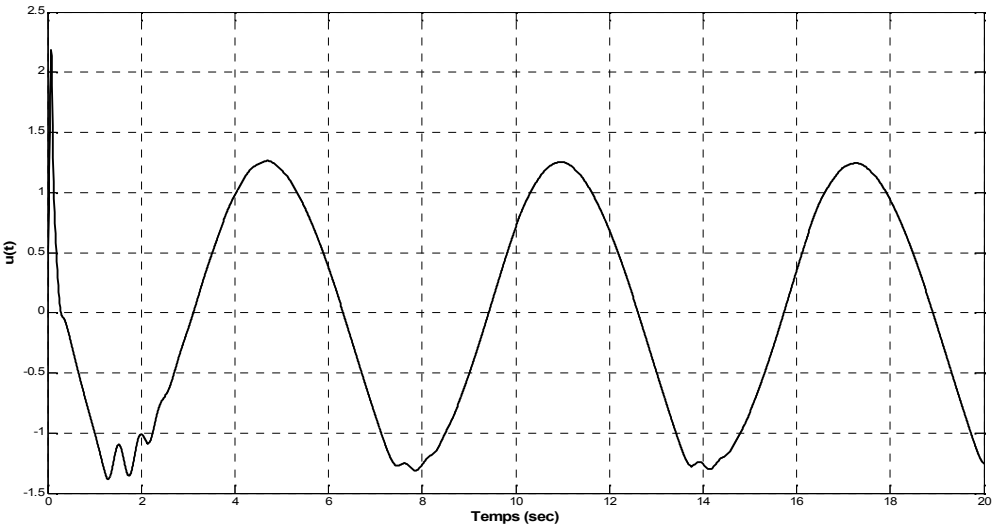
On remarque que ces fonctions d'appartenance couvrent bien l'intervalle $[-\pi/6, \pi/6]$ comme le montre la figure V. 2. Concernant γ_1 et γ_2, nous avons pris les valeurs suivant : $\gamma_1 = 50$, $\gamma_2 = 1$



(a)



(b)

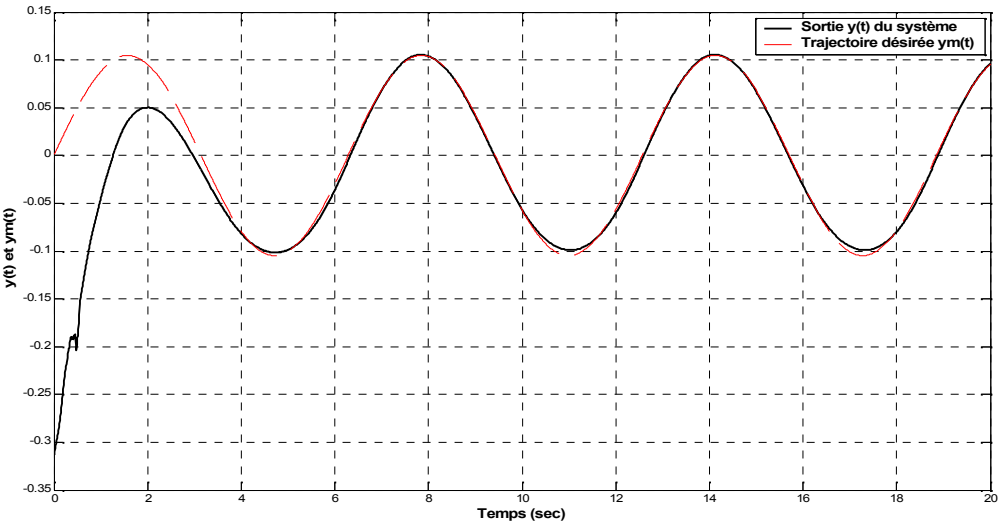


(c)

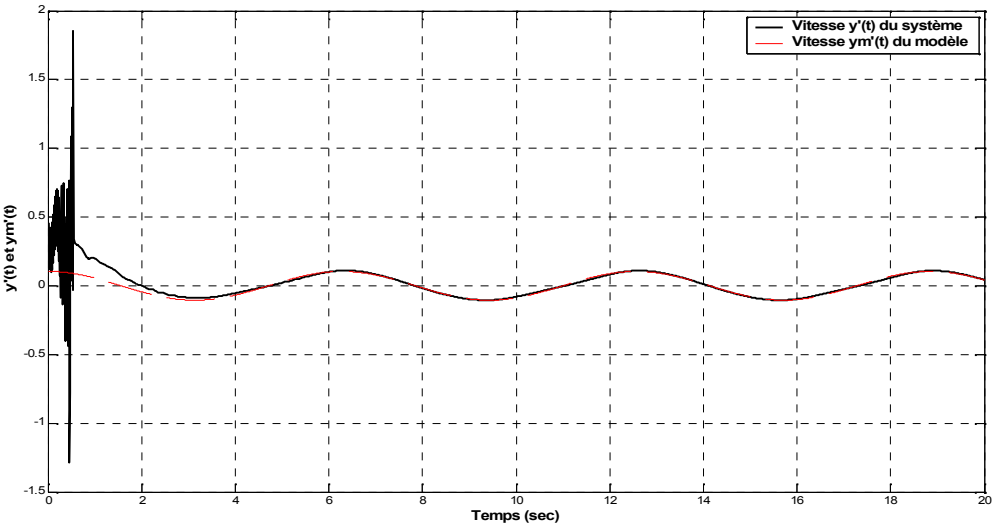
Figure V. 3: Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse (c) Action de commande globale $u(t)$.

La figure V.3 représente les résultats de la réponse de notre système en position, en vitesse et en commande à une entrée de référence $\underline{y}_m(t) = \left(\pi/30\sin(t),\ \pi/30\cos(t)\right)^T$ et une condition initiale $\underline{x}(0) = (-\pi/60,\ 0)^T$. Nous devons noter dans ce cas que la commande de supervision $u_s(t)$ n'est pas activée, c-a-d, que $u(t) = u_c(t)$.

Pour illustrer l'activation de la commande de supervision $u_s(t)$, nous allons maintenant changer la condition initiale à $\underline{x}(0) = (-\pi/10,\ 0)^T$, ce qui veut dire que l'état du système au démarrage est très agité (le système tend à être instable), cela provoquera l'activation de $u_s(t)$ en but de stabiliser le pendule. La figure V.4 illustre la réponse en position et en vitesse.



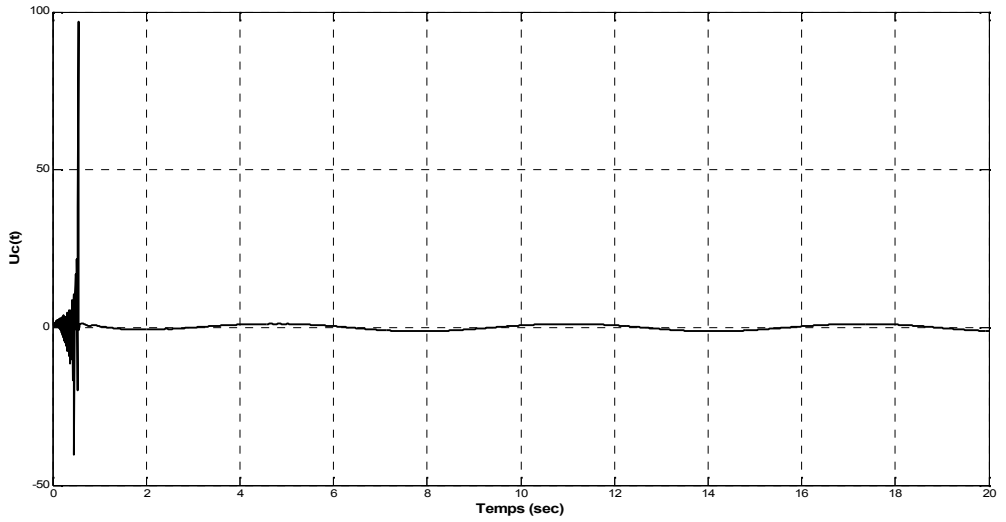
(a)



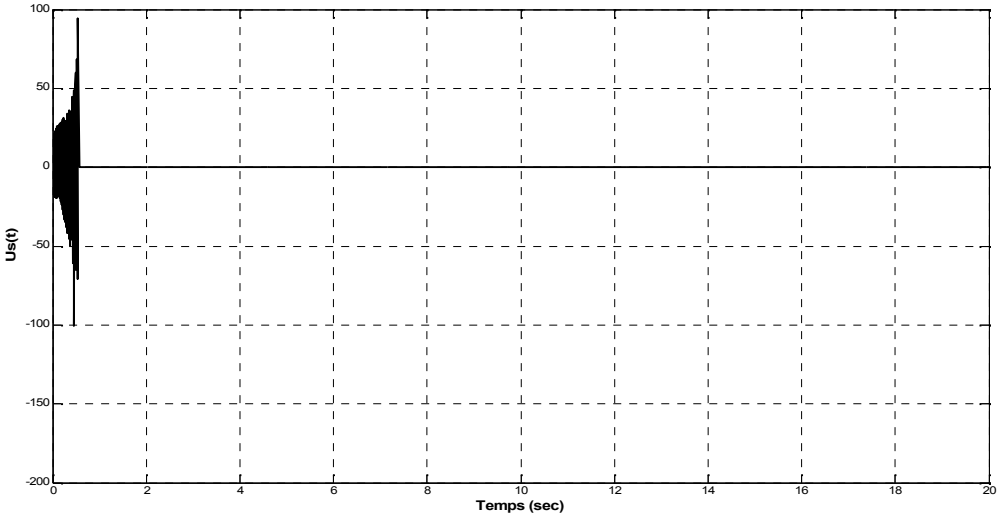
(b)

Figure V. 4: Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse.

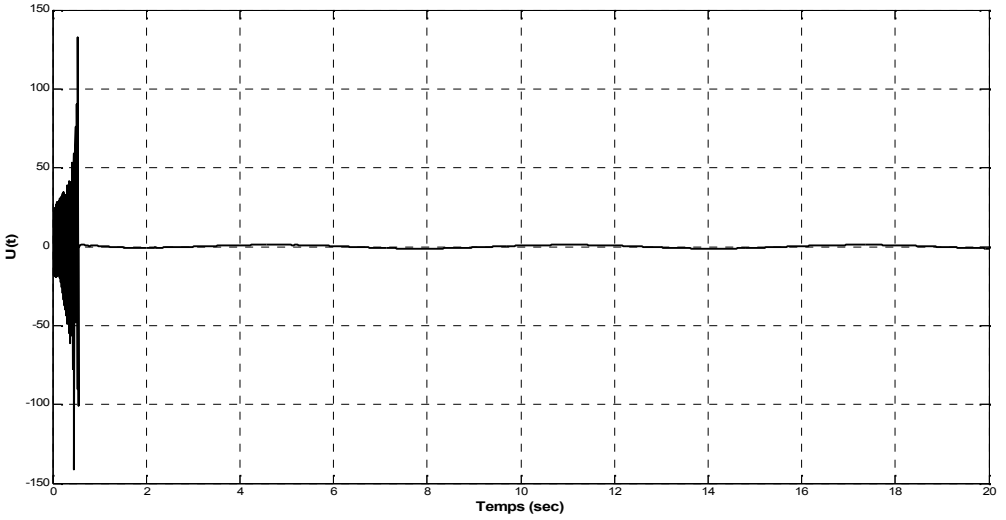
Tandis que la figure V.5 illustre les commandes correspondantes. La figure V.6 représente les mêmes commandes mais dans l'intervalle $t \in [0, 2]$.



(a)

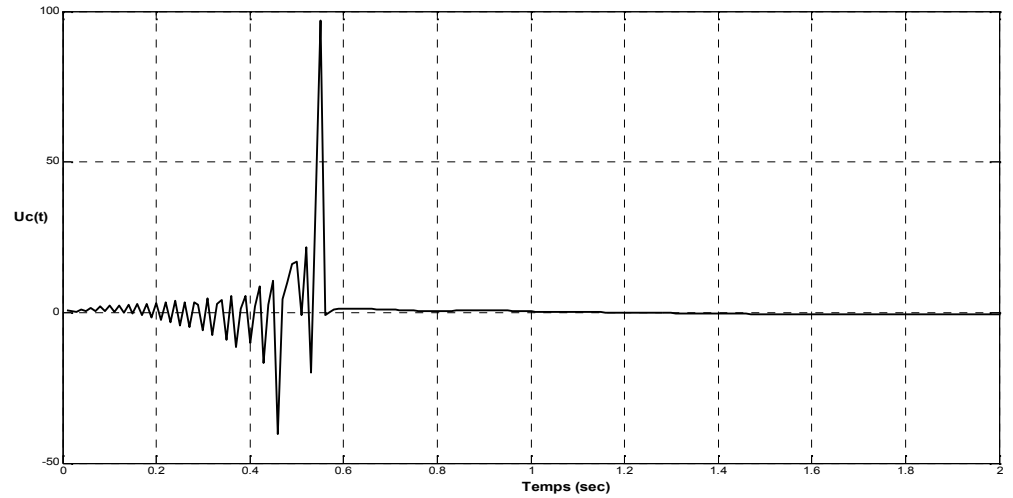


(b)

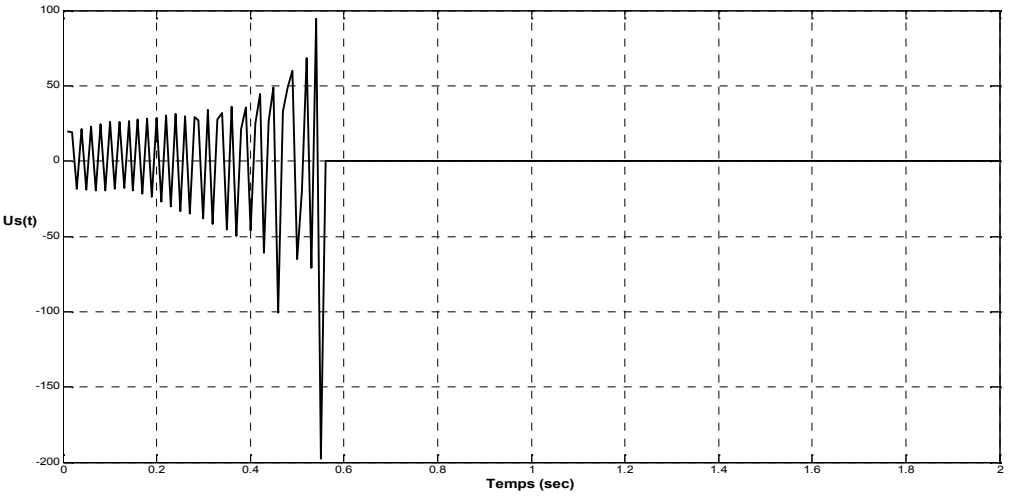


(c)

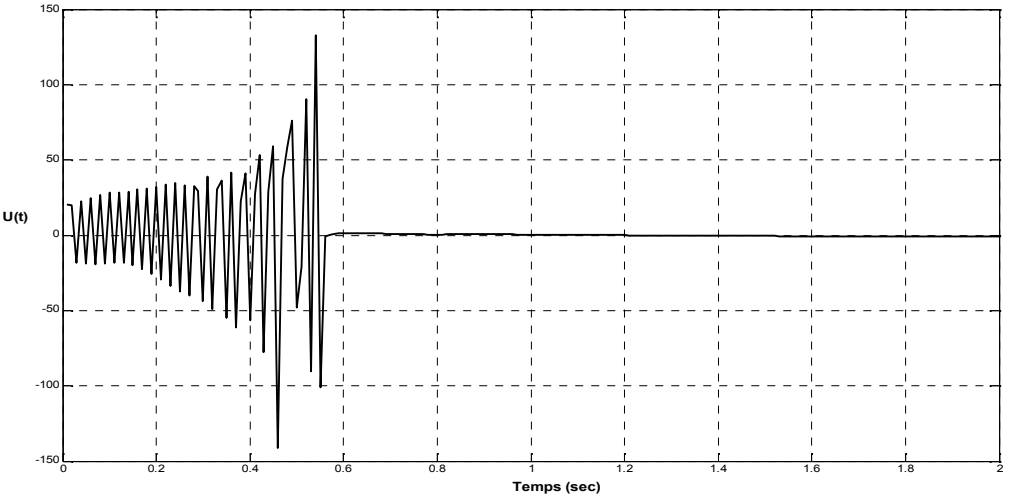
Figure V. 5: (a) Commande $u_c(t)$ (b) Commande $u_s(t)$ (c) Commande globale $u(t)$



(a)

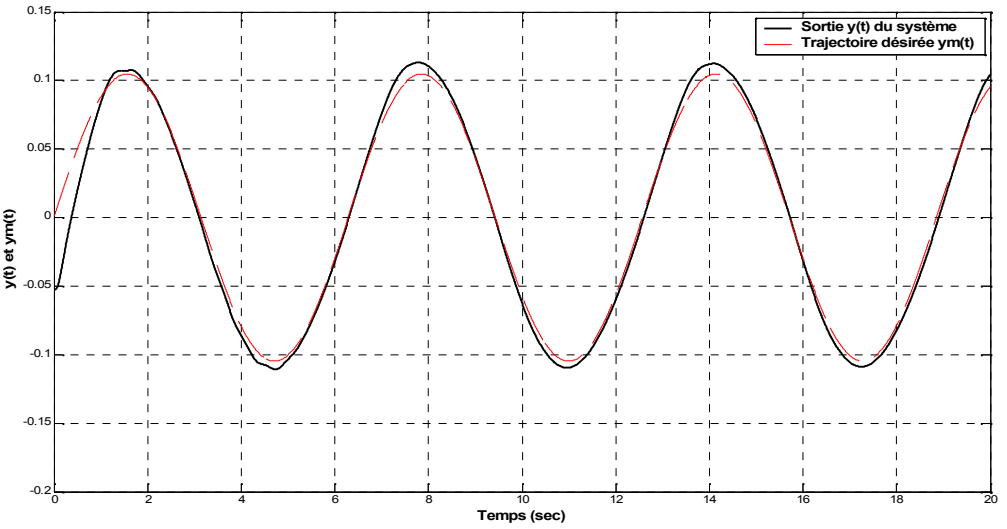


(b)

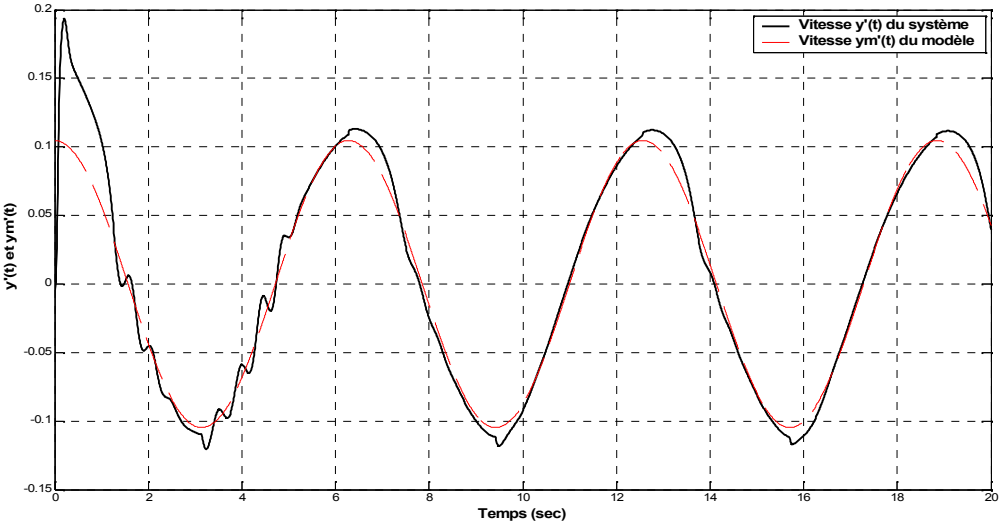


(c)

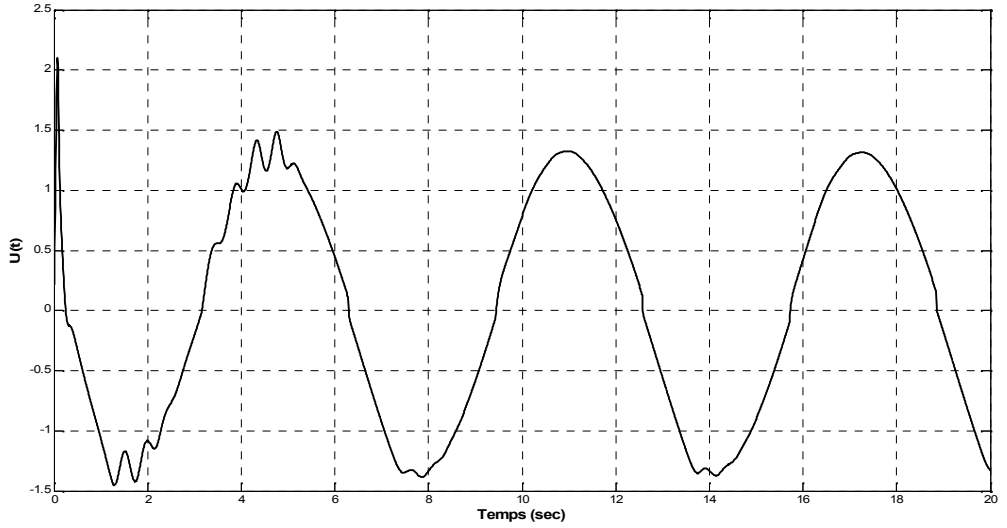
Figure V. 6: (a) Commande $u_c(t)$ (b) Commande $u_s(t)$ (c) Commande globale $u(t)$ sur l'intervalle $t \in [0,\ 2]$



(a)



(b)



(c)

Figure V. 7: Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse (c) Action de commande globale.

La figure V.7 représente les réponses du système lorsqu'il est soumis à une perturbation rectangulaire d'amplitude 0.1∂ et de période 2π .

V.3.2. REGULATEUR FLOU TYPE-2 .

L'innovation qui sera apportée à ce type de régulateurs est que les fonctions d'appartenance de type-2 seront choisies comme (voir Fig. V.8).

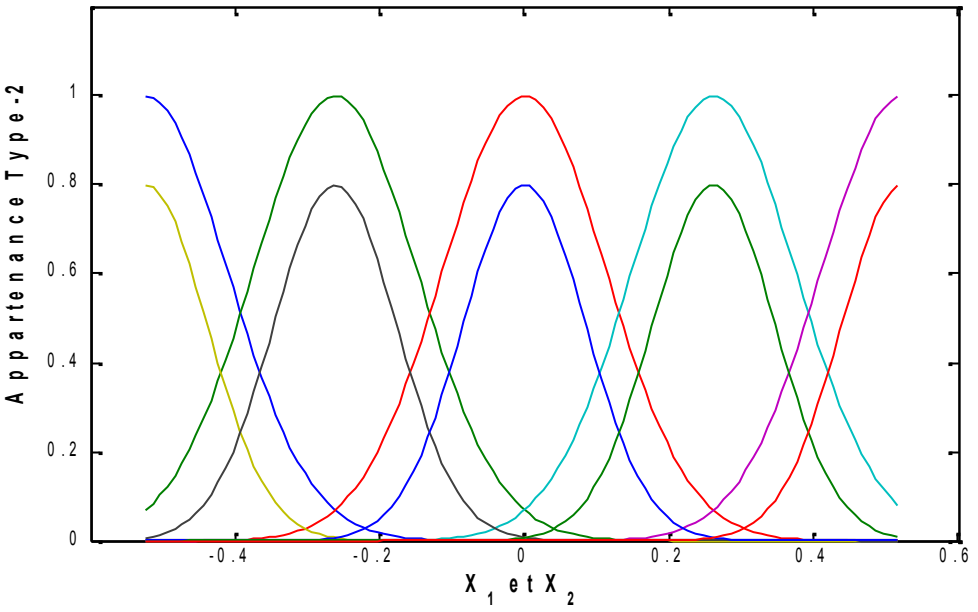


Figure V. 8: Fonctions d'appartenance type-2

Les fonctions d'appartenance sont données mathématiquement par :

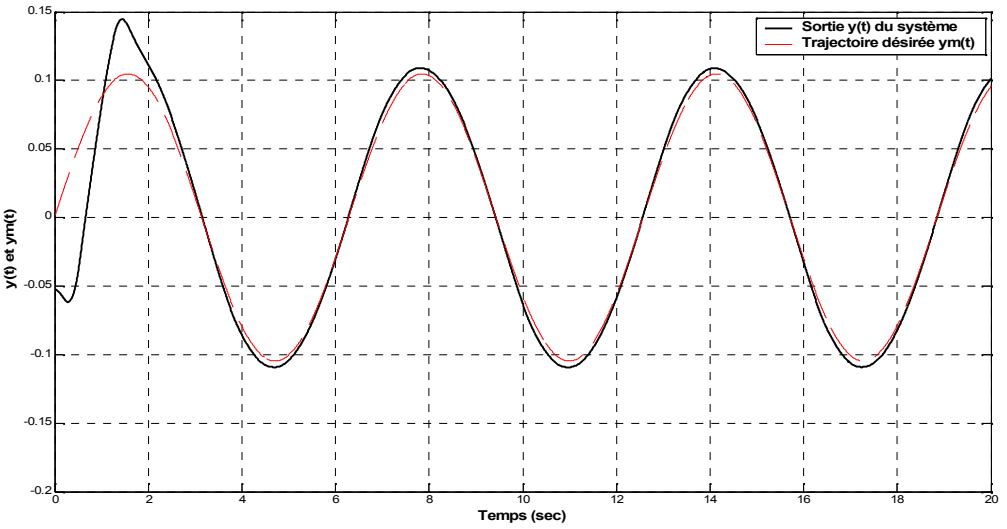
$$\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^1}(x_i)=\exp\left[-\left(\frac{x_i+\pi/6}{\pi/20}\right)^2\right],\ \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^1}(x_i)=0.8\exp\left[-\left(\frac{x_i+\pi/6}{\pi/30}\right)^2\right] \qquad \text{(V. 23)}$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^2}(x_i)=\exp\left[-\left(\frac{x_i+\pi/12}{\pi/20}\right)^2\right],\ \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^2}(x_i)=0.8\exp\left[-\left(\frac{x_i+\pi/12}{\pi/30}\right)^2\right] \qquad \text{(V. 24)}$$

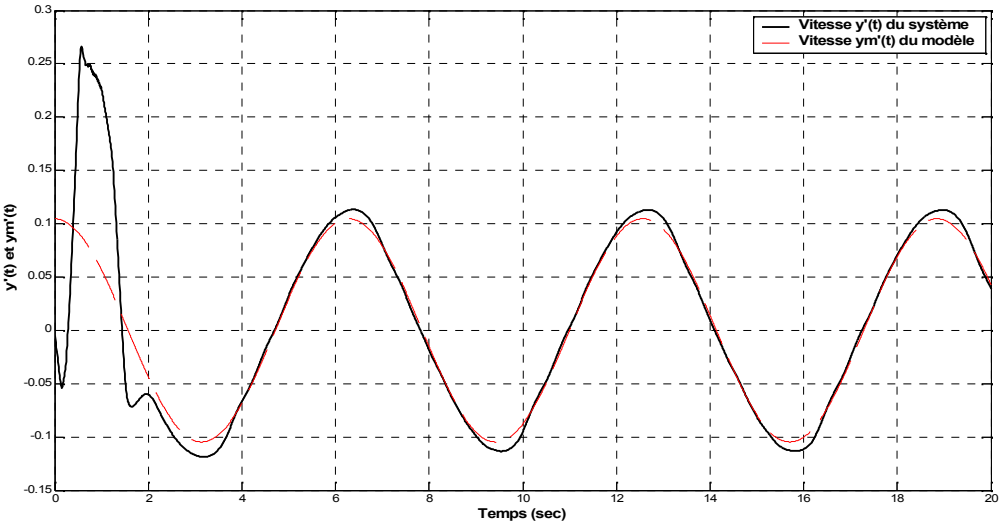
$$\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^3}(x_i)=\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/20}\right)^2\right],\ \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^3}(x_i)=0.8\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/30}\right)^2\right] \qquad \text{(V. 25)}$$

$$\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^4}(x_i)=\exp\left[-\left(\frac{x_i-\pi/12}{\pi/20}\right)^2\right],\ \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^4}(x_i)=0.8\exp\left[-\left(\frac{x_i-\pi/12}{\pi/30}\right)^2\right] \qquad \text{(V. 26)}$$

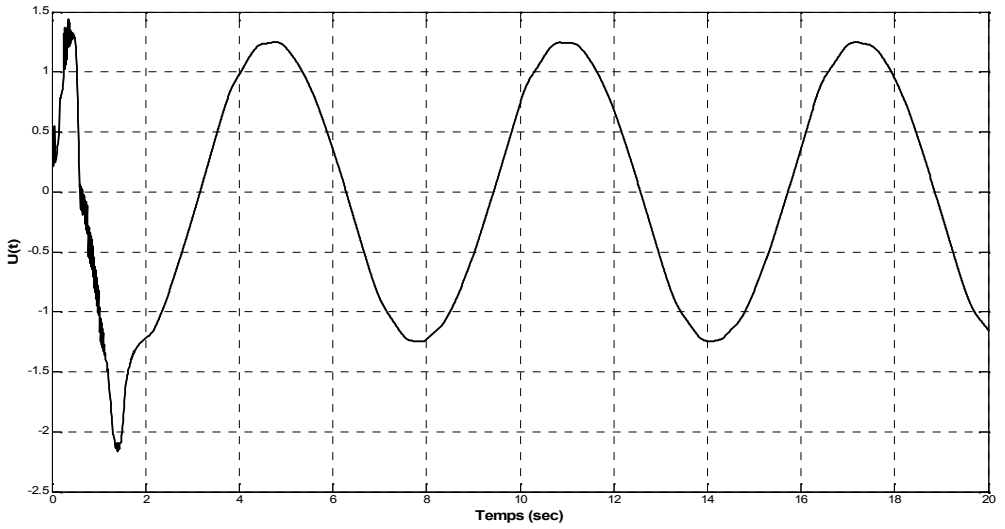
$$\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^5}(x_i)=\exp\left[-\left(\frac{x_i-\pi/6}{\pi/20}\right)^2\right],\ \underline{\mu}_{\tilde{F}_i^5}(x_i)=0.8\exp\left[-\left(\frac{x_i-\pi/6}{\pi/30}\right)^2\right] \qquad \text{(V. 27)}$$



(a)



(b)

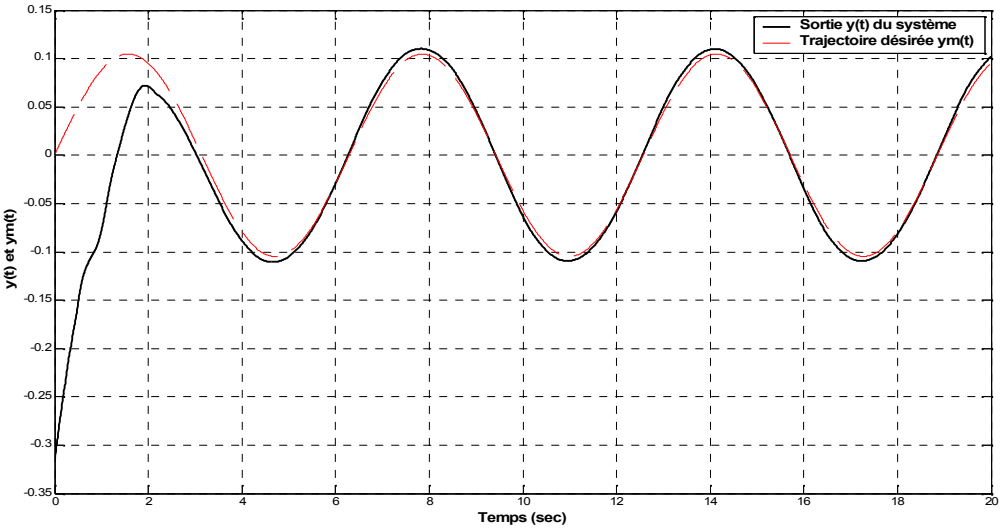


(c)

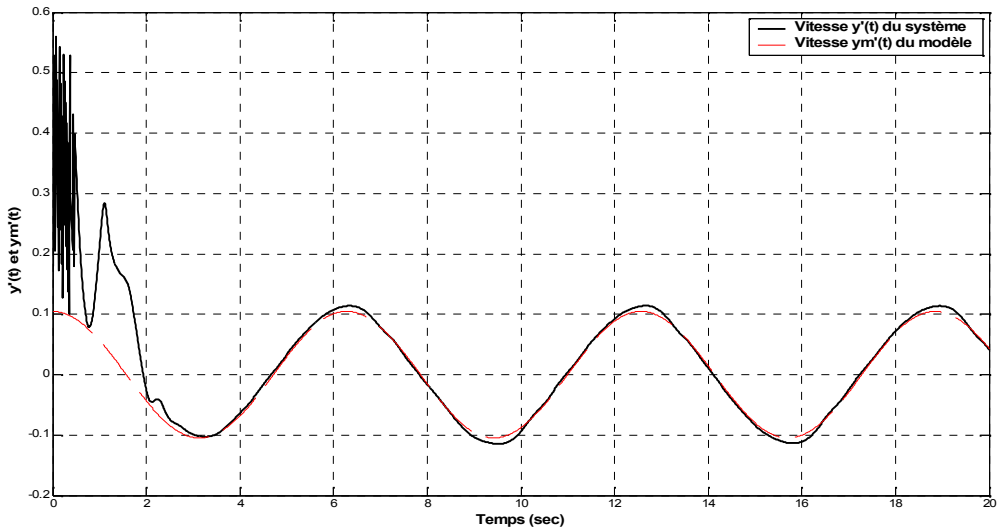
Figure V. 9: Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse (c) Action de la commande globale $u(t)$.

La figure V.9 représente les résultats de la réponse de notre système en position, en vitesse et en commande à une entrée de référence $\underline{y}_m(t) = \left(\pi/30\sin(t),\ \pi/30\cos(t)\right)^T$ et une condition initiale $\underline{x}(0) = (-\pi/60,\ 0)^T$. Nous devons noter dans ce cas que la commande de supervision $u_s(t)$ n'est pas activée, c.-à-d., que $u(t) = u_c(t)$.

Pour illustrer l'activation de la commande de supervision $u_s(t)$, nous allons maintenant changer la condition initiale à $\underline{x}(0) = (-\pi/10,\ 0)^T$, ce qui veut dire que l'état du système au démarrage est très agité (le système tend à être instable), cela provoquera l'activation de $u_s(t)$ en but de stabiliser le pendule. La figure V.10 illustre la réponse en position et en vitesse.



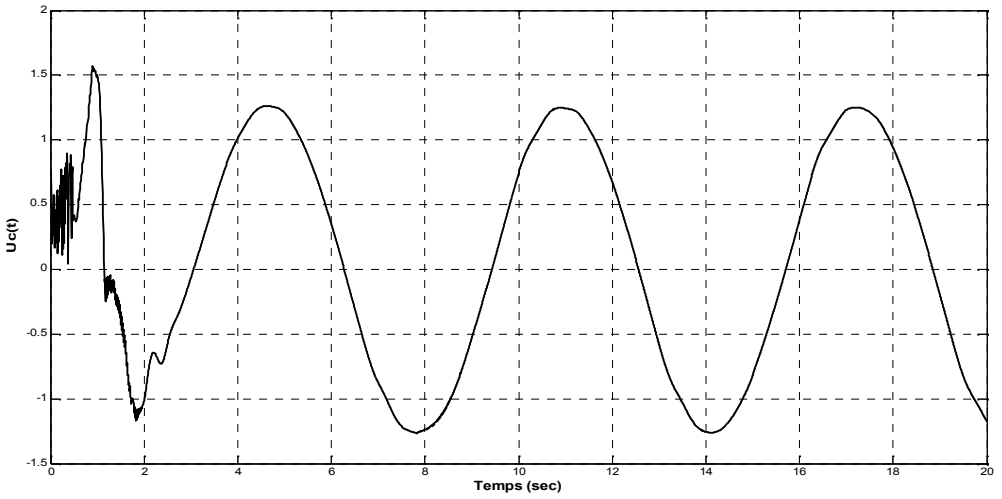
(a)



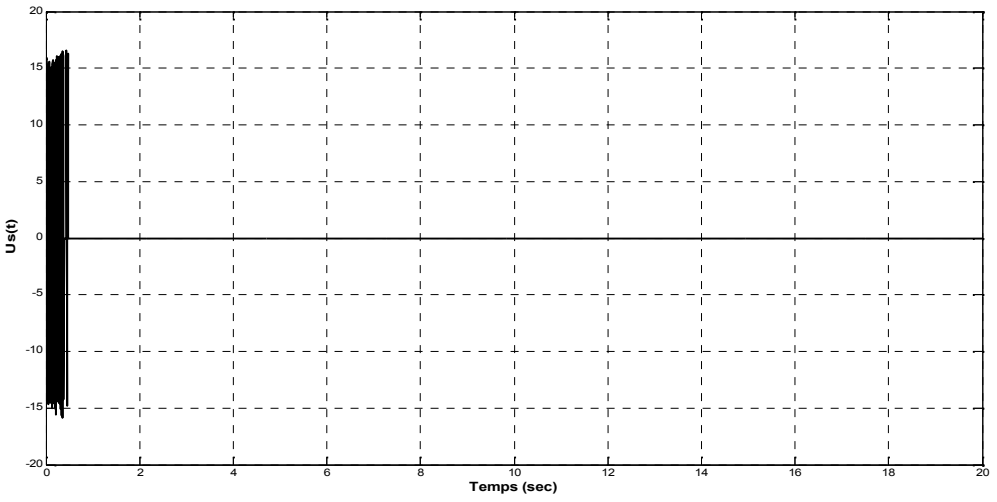
(b)

Figure V. 10 : Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse.

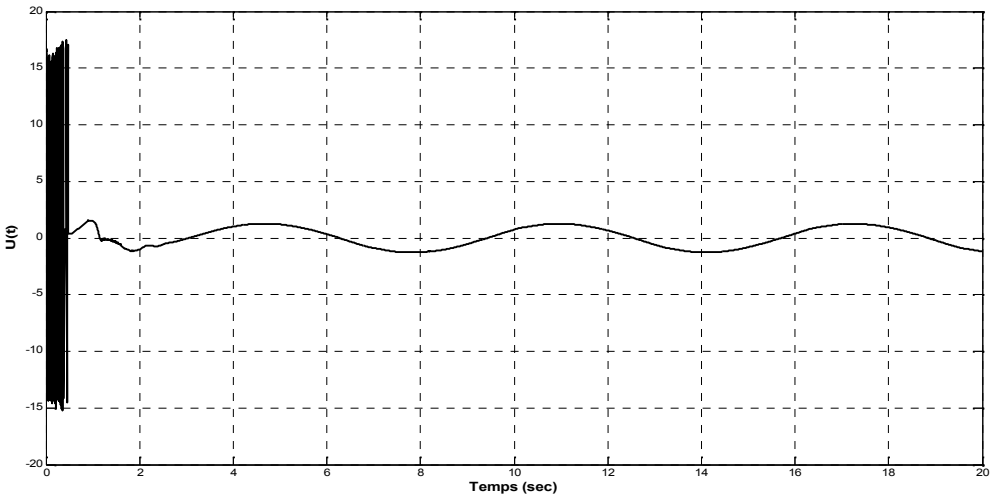
Tandis que la figure V.11 illustre les commandes correspondantes. La figure V.12 représente les commandes et $u(t)$ dans l'intervalle $t \in [0, 2]$.



(a)

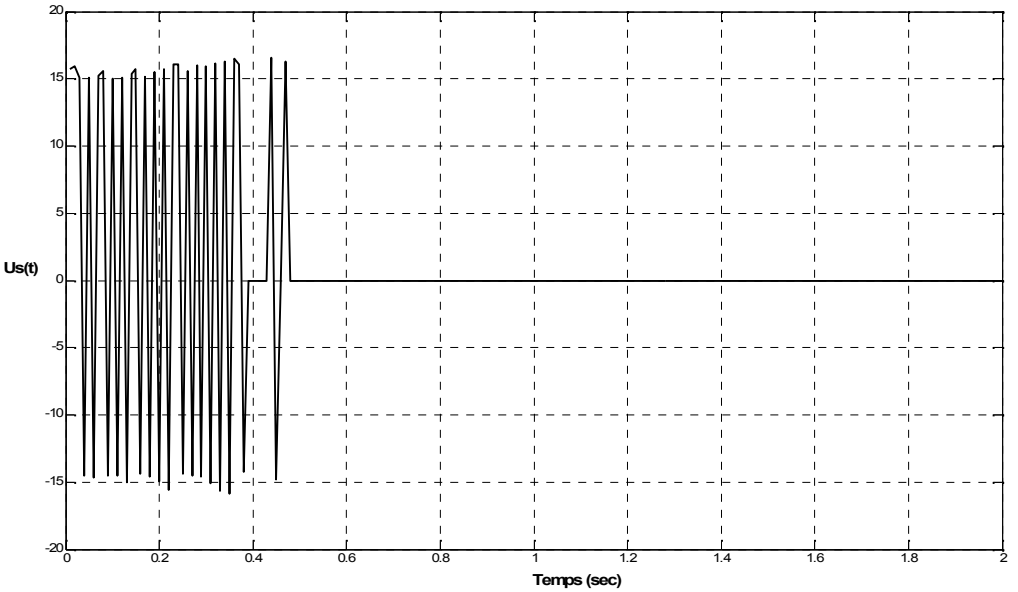


(b)

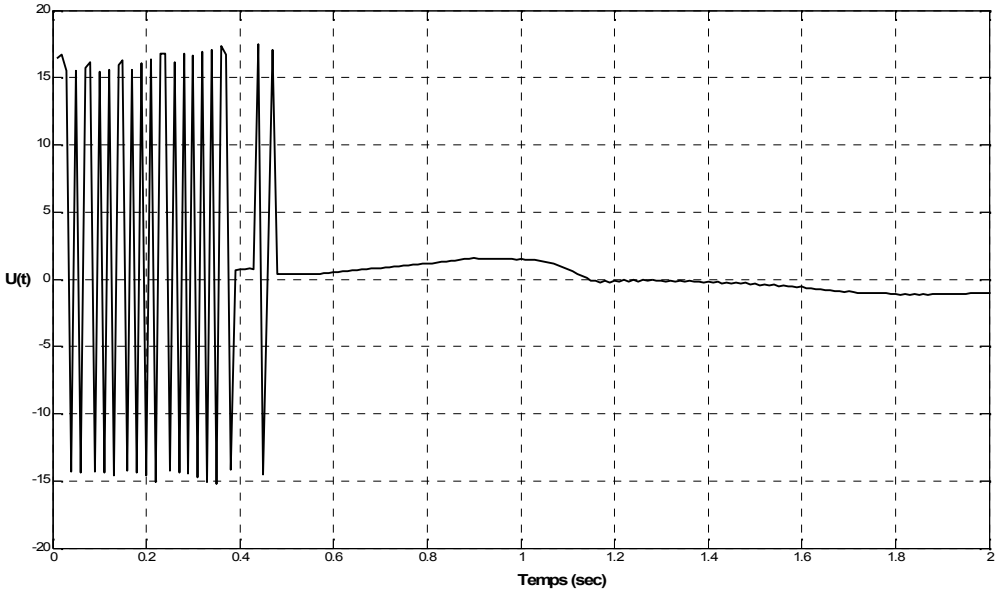


(c)

Figure V. 11: (a) Commande $u_c(t)$ (b) Commande $u_s(t)$ (c) Commande globale $u(t)$



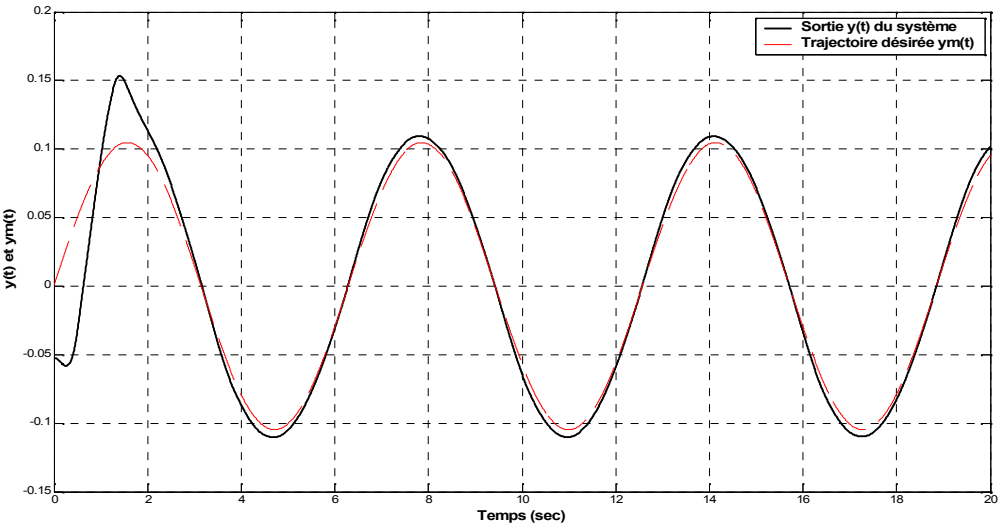
(a)



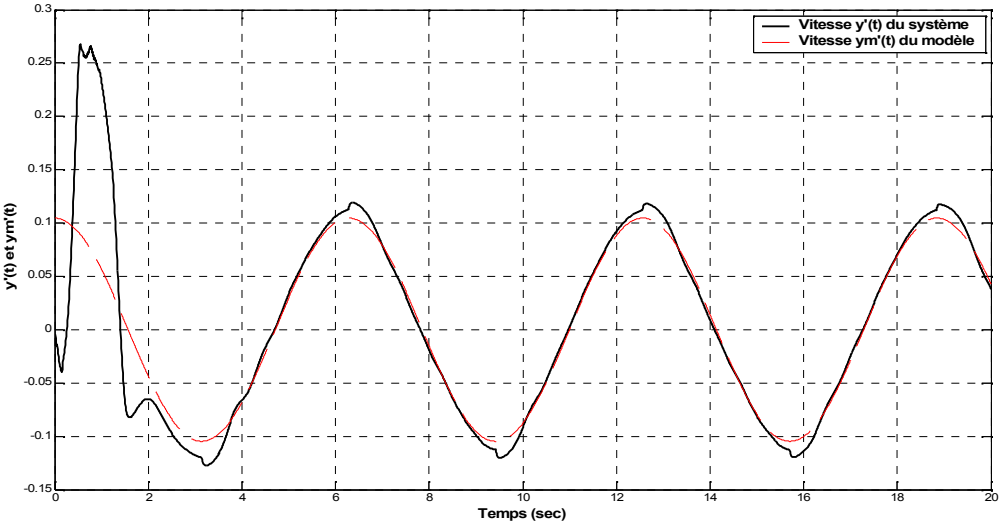
(b)

Figure V. 12 : (a)Commande $u_s(t)\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (c) Commande globale $u(t)$ sur l'intervalle $t \in [0,\ 2]$

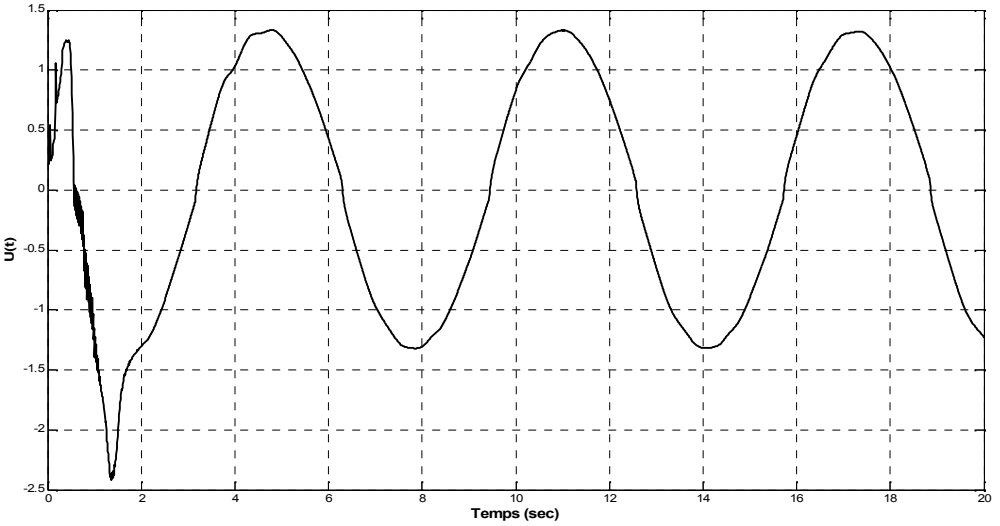
La figure V.13 présente les réponses du système lorsqu'il est soumis à une perturbation rectangulaire d'amplitude 0.1 et de période 2π .



(a)



(b)



(c)

Figure V. 13: Réponse du système (a) Réponse en position (b) Réponse en vitesse (c) Action de commande globale.

V.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une structure de commande adaptative indirecte à laquelle une commande de supervision est ajoutée pour stabiliser le système une fois qu'il tend à être instable.

Cette structure de commande a été appliquée avec les deux types de logiques floues (type-1 et type-2). Les résultats ont été satisfaisants et ont montré la robustesse des régulateurs adaptatifs flous vis-à-vis les perturbations externes.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Le travail élaboré dans ce modeste travail touche le domaine de la robotique ainsi que la théorie de commande des systèmes non linéaires.

Le domaine de la robotique est un axe très important pour le test des algorithmes de commande. Le bras manipulateur à deux degrés de libertés reste toujours un benchmark, utilisé par les automaticiens vu sa dynamique hautement non linéaire et couplée. La base d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté est le pendule inversé, qu'on peut considérer comme un bras à un seul degré de liberté.

Dans ce mémoire, nous avons donné des généralités sur les bras manipulateurs, où nous avons parlé un peu sur leurs modèles géométrique et cinématique. Une grande partie du mémoire a été consacrée à la dynamique de ces bras qui a été déduite par ce qu'on appelle le Lagrangien.

On peut diviser nos travaux dans ce mémoire en deux principales parties :

- Dans la première partie nous avons effectué une commande linéarisante pour les pendules inversés et les bras manipulateurs à deux degrés de libertés.
- Dans la deuxième partie des commandes floues type-1 et type-2 ont été appliquée au pendule inversé.

Comme perspectives, nous proposons les directions de recherches suivantes :

- Réaliser une commande adaptative directe en utilisant cette nouvelle logique floue.
- Adapter les fonctions d'appartenance floues type-2 des prémisses. Dans ce cas nous proposons d'adapter les paramètres suivants : centres, largeurs, amplitudes des fonctions d'appartenances inférieures.
- Réaliser le même type de commande mais en utilisant des fonctions d'appartenance floues gaussiennes type-2 (gaussian Type-2 Fuzzy logic).

Références

REFERENCES

[1] K. J. Aström, et B. Wittenmark, “Adaptive Control,” Addisson-Wesley, 1989.

[2] I. D. Landau, R. Lozano et M. M’Saad, “Adaptive Control,” Springer, 1998.

[3] J. Jacques, et E. Slotine, “Applied Nonlinear Control,” Prentice Hall, 1991.

[4] Samer RIACHY, " Contribution à l’estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés " l’Ecole Centrale de Lille, 2008.

[5] C. H. Wang, T. C. Lin, T. T. Lee, et H. L. Liu, “Adaptive hybrid intelligent control for uncertain nonlinear dynamical systems,” IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., P. B : Cybern., vol. 32, no. 5, pp. 583-597, Oct. 2002.

[6] C. H. Wang, H. L. Liu, etT. C. Lin, “Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical systems,” IEEE Trans. vol. 10, no. 1, pp. 39-49, Feb. 2002.

[7] M. Hojati, et S. Gazor, “Hybrid adaptive fuzzy identification and control of nonlinear systems,” IEEE Trans. vol. 10, no. 2, pp. 198-210, Apr. 2002.

[8] H. Bühler, “Réglage par la logique floue,” Collection électricité

[9] J. M. Mendel, “Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial,” IEEE proceedings, vol. 83, no. 3, pp. 345-377, Mar 1995.

[10] A. Hamzaoui, N. Essounbouli, K. Benmahammed, et J. Zaytoon, “State observer based robust adaptive fuzzy conntroller for nonlinear uncertain and perturbed systems,” IEEE Trans. vol. 34, no. 2, pp. 942-950, Apr. 2004.

[11] N. N. Karnik, et J. M. Mendel, “An introduction to type-2 fuzzy logic systems,” Univ. Southern California, Rep., Oct. 1998.

[12] Q. Liang, N. N. Karnik et J. M. Mendel, “Connection admission control in ATM networks using survey-based type-2 fuzzy logic systems,” IEEE Trans. Syst., vol. 30, no. 3, pp. 329-339, Aug. 2000.

[13] N. N. Karnik, J. M. Mendel et Q. Liang, “Type-2 fuzzy logic systems,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 7, no. 6, pp. 643-658, Dec. 1999.

[14] N. N. Karnik, et J. M. Mendel, “Operation on type-2 fuzzy sets” Int. J. Fuzzy Sets Syst., vol. 122, pp. 327-348, 2001.

[15] DIEGO TREPANIER, “ Modélisation de la dynamique d'un manipulateur sériel plan à 2 ddl submergé dans un fluide ”, Thèse Maître ès sciences (M.Sc.) université Laval Québec, 2010.

[16] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar, "Robot Modeling and Control" JOHN WILEY & SONS, INC.

[17] CM. Gosselin, "Éléments de Robotique GMC-17693 (Notes de cours)" Département de Génie Mécanique Université Laval, hiver 2005.

[18] M.J. Richard, "Dynamique des solides GMC-63727 (Notes de cours)", Département de génie mécanique Université Laval, automne 2006.

[19] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets, fuzzy loqic and fuzzy systems,” World Scientific Publishing 1996.

[20] N. N. Karnik, et J. M. Mendel, “Type-2 fuzzy logic systems: Type- reduction,” Proc. IEEE conference on Systems, Man and Cybernetics, pp. 2046-2051, Oct. 1998.

[21] J. M. Mendel, “On the Importance of Interval Sets in Type-2 Fuzzy Logic Systems,” IEEE, pp. 1647-1652, Mar 2001.

[22] Q. Liang, et J. M. Mendel, “Interval type-2 fuzzy logic systems: Theory and design,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 8, no. 5, pp. 535-550, Oct. 2000.

[23] Q. Liang, et J. M. Mendel, “Interval type-2 fuzzy logic systems,”Proc. FUZZ-IEEE, May. 2000.

[24] R. Isermann, K. H. Lachmann et D. Matko, “Adaptive Control Systems,” Prentice Hall 1992.

[25] H. K. Khalil, “Nonlinear systems,” Prentice Hall, 1996.

[26] M. Vidyasagar, “Nonlinear systems analysis,” Prentice Hall, 1993.

[27] AHMED BELHANI, "Conception des Contrôleurs Flous Multivariables ", UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE, 2007.

[28] Slotine et Li, “Applied non linear control”, Prentice Hall,1991.

[29] Li-Xin Wang, "adaptive fuzzy systems and control Design and Stability Analysis", Prentice Hal , 1994.