REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BATNA 1

FACULTE DE SCIENCE DE LA MATIERE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de:

de Doctorat en sciences

Spécialité : Physique des Rayonnements

par

Rima REKIK

THEME

Etude de l'action d'un champ magnétique sur une particule avec spin par l'approche des intégrales de parcours

Soutenue le 26 /05 /2016 Devant le jury :

Président :	**ABDELAZIZ SID**	-**Prof**. Univ Batna
Rapporteur :	**MEKKI AOUACHRIA**	-**Prof**. Univ Batna
Examinateurs :	**YAZID DELENDA**	-**MCA**. Univ Batna
	HOURIA.TRIKI	-**Prof**. Univ Annaba
	MUSTAFA.MOUMNI	-**MCA**. Univ Biskra
	ABDEllATIF.TAHRAOUI	-**Prof**. Univ Bab Ezzouar USTHB

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont apporté une aide pour la réalisation et le bon déroulement de ce travail de recherche qui a été mené au sein du laboratoire de physique énergétique appliquée à l'université HADJ LAKHDAR BATNA.

Je cite principalement :

Ma gratitude et ma vive reconnaissance vont tout d'abord à monsieur le professeur **AOUACHRIA MEKKI** *qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa confiance en moi autant que modeste chercheure, Ses Compétences, sa rigueur scientifique, ses conseils,* ses orientations, sa patience, ses lectures et ses corrections *m'ont beaucoup appris pour la concrétisation de cette recherche universitaire.*

J'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié qu'il soit mon directeur de recherche.

Mes chaleureux remerciements vont également *aux membres du jury qui me font l'honneur de participer à la soutenance et au jugement de ce travail :*

À Monsieur le professeur **ABDELAZIZ SID** de l'université de Batna qui a bien voulu être le président de jury, à monsieur **DELENDA YAZID MCA** de l'université de Batna, à madame le professeur **TRIKI HOURIA** de l'université de Annaba**,** à monsieur **MOUMNI MUSTAFA MCA** de l'université de Biskra, et à monsieur le professeur **Abdellatif TAHRAOUI** de l'université d'Alger.

Je voudrais citer en particulier mes cousines **SOUAD REKIK** et **LINDA REKIK** pour les encouragements et l'aide judicieuse**,** merci énormément.

Je voudrais Remercier mes **chers parents** pour le soutien qu'ils m'ont accordé au cours de la réalisation de cette thèse

Je ne saurais oublier **ma famille**, **mes collègues** et toutes les personnes et qui vont m'honorer par leur présence à ma soutenance

À Ma chère petite princesse ***MIRAL***

Et à l'esprit de ma ***MERE***…

Table des matières

Introduction générale

En 1933, Dirac a considéré que la formulation lagrangienne est plus fondamentale que la formulation hamiltonienne. Il est arrivé à la conclusion que le propagateur de la mécanique quantique est analogue à $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right]$ où S est l'action classique évaluée le long du chemin classique [1]. En 1948, Feynman à développé la suggestion de Dirac et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique appelée formulation des intégrales de chemins [2]. Le coeur de cette formulation est le propagateur qui contient toutes les informations du système physique.

Depuis l'introduction des transformations spatio-temporelles dans ce formalisme $[3-42]$, et surtout les corrections purment quantiques [43], une classe de potentiels sans spin a été soulitionnée [44], cependant malgré le succés apparent de cette formulation théorique, du point de vue pratique il subsiste certaines difficultés comme l'obtention de solutions de certains problèmes solubles par l'équation de Schrödinger.

Par ailleurs en mécanique quantique, il existe d'autres phénomènes physiques qui ne peuvent être expliquées de manière acceptable qu'aprés introduction de l'entité fondamentale qui est représentée par le spin.

Cette catégorie de phénomènes peut être cependant décrite correctement par l'intermédiaire de l'équation de Pauli qui n'est qu'un prolongement de l'équation de Schrödinger par un terme additif dû au couplage du spin avec le champ. Il est ainsi utile pour la physique appliquée d'avoir une classe de problèmes solubles de cette équation de Pauli. Par exemple, la classe connue de champs en rotation, dépendante du temps et interagissant avec un atome avec deux niveaux où les probabilités de transition [45] ont des expressions analytiques sont d'un intêret particulier.

Le problème du spin dont la difficulté principale réside dans le fait que cette grandeur physique n'a pas d'analogue classique. Sa nature exclusivement discrète rend sa description difficile au moyen de chemins qui par essence sont continue.

Des modèles à cet effet, ont été élaborés, comme le modèle bosonique ou fermionique de Schwinger

$[46-48]$, et surtout l'introduction de variables anticommutantes dites de Grassmann et les variables angulaires $[49-52]$ ont permis de contourner cette difficulté. Du point de vue pédagogique, des solutions pour des interactions combinant le spin et d'autre variables par l'équation de Schrödinger peuvent être trouvées dans des livres de mécanique quantique usuels. Par le formalisme des intégrales de chemins, il n'y a que quelques interactions de ce type qui ont été traités $[53-60]$ en utilisant le modèle fermionique ou bosonique de Schwinger. Mais il est rare de trouve un calcule explicite en utlisant la représentation géométrique du spin $[61-65]$. Pour ce faire, l'espace des états cohérents angulaires peut être adéquat à cette étude (chapitre 2). Comme on va le voir à travers cette thèse, l'utilisation des états cohérents est parfois nécessaire pour le calcul du propagateur si l'on doit formuler suivant l'idée de Feynman à savoir une somme sur les chemins possibles, ces chemins étant affectés d'un poids c'est à dire $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, avec $S = \int Ldt$ c'est l'action du système.

Le présent these illustre le formalisme des intégrales de chemins dans la représentation des états cohérents angulaire en résolvant certains problèmes importants de la mécanique quantique non-relativiste. Tout d'abord, par leur variété, ils permettent d'acquérir une grande maîtrise des techniques mathématiques indispensable à l'étude de la théorie quantique, dans le cadre des notions familières de la physique classique. D'autre part, ils interviennent largement dans la solution des sujets modernes ; il arrive souvent que les représentations intégrales des problèmes complexes se réduisent à celles de ces problèmes élémentaires [66].

Dans le premier chapitre, nous présentons en premier lieu l'intégrale de chemin en representation des états cohérents bosonique et angulaires.

Le problème de la particule spinorielle et neutre à un moment magnétique en mouvement sous l'action d'une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire [67] est traités dans le chapitre 2. Celui de la particule en interaction avec la combinaison de l'oscillateur harmonique et d'un champ magnétique en rotation est traité dans le chapitre 3. Signalons que les calculs de ce chapitre et coincide avec ceux obtenue par Merdaci et all [56] en utilisant le model fermionique de schwinger.

L'interaction d'un atome très lourd de spin $\frac{1}{2}$ ou systéme à deux états en interaction avec un champs magnétiques dépendants du temps, fait l'objet du chapitre 4.

Signalons que les calculs de ce chapitre ont été realises par T. Boudjedaa et all [54] et ceux de l'article de M.J.Tahmasebi and Y.Sobouti [68] en utilisant la méthode de la classification.

L‘extenstion de ce formalisme au systeme d‘ont l‘hamiltonian et pseudo-hermitique [69] fait l‘objet du chapitre 5. Signalons aussi que les calculs de ce chapitre coincide avec l‘article de Y. Ben-Aryeh et all [70] en utilisant la méthode algébrique.

Chapitre 1

Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire

1.1 Introduction

Les états cohérents $|z\rangle$ de l'oscillateur harmonique ont été introduit pour la première fois par Schrödinger en 1926 en cherchant le minimum de la relation d'Heisenberg [71]. Ces états cohérents ont été généralisés par perelomov [72] et leurs introductions dans le formalisme des intégrales de chemins au moyen des états cohérents de type bosoniques ou fermioniques, et en fonctions des angles ont été faits par divers auteurs comme Klauder [46], Ohniki et Kashiwa, [47] et Klauder respectevemet $[49-52]$.

Les états cohérents sont utilisés dans les differents domaines de la physique particuliéremet en optique quantique [73]. Par exemple le champ produit par un laser et décrit par un états cohérent bosonique. Ils ont un nombre de propriétés intéressantes, et sont définis alternativement par :

i)états propres de l'opérateur d'annihilation a qui vérifient la relation de commutation $\left[a^{\dagger}, a\right] = 1$

ii)sont crées à partir de l'état de vide $|0\rangle$ par l'opérateur unitaire dit de déplacement D

iii)états pour lesquels l'incertitude de Heisenberg est minimale.

1.2 Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique

Considérons donc le problème aux valeurs propres de l'opérateur de destruction a

$$a\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,, \tag{1.1}$$

où z est un nomber complexe. L'adjoint de cette relation est

$$\langle z|\,a^{\dagger} = z^{*}\,\langle z|\,. \tag{1.2}$$

Nous allons montrer l'existence des états $|z\rangle$ en les construisant explicitement. Pour cela, nous multiplions (1.1) par $\langle n|$ état nombre :

$$\langle n\,|a|\,z\rangle = z\langle n\,|z\rangle\,. \tag{1.3}$$

Par ailleurs, l'adjoint de la relation $a^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ et $\langle n|\,a = \sqrt{n+1}\,\langle n+1|$. Multipliant cette égalité par $|z\rangle$ conduit à

$$\langle n\,|a|\,z\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1\,|z\rangle\,. \tag{1.4}$$

En égalant les membres de droite des deux dernière égalités, nous obtenons

$$\langle n\,|z\rangle = \frac{z}{\sqrt{n}}\langle n-1\,|z\rangle = \frac{z^{n}}{\sqrt{n!}}\langle 0\,|z\rangle\,. \tag{1.5}$$

En utilisant la décomposition de l'unité $1 = \sum_{n} |n\rangle\,\langle n|$,on trouve

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\,\langle n|\,z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,\langle 0\,|z\rangle\,, \tag{1.6}$$

ce qui conduit à

$$\langle z\,|z\rangle = \langle 0\,|z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle z\,|n\rangle = \langle 0\,|z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle z\,|0\rangle\,,$$

$$= |\langle 0\,|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = |\langle 0\,|z\rangle|^2\, e^{|z|^2}. \tag{1.7}$$

Puisque la norme est finie, sa valeur est arbitraire. Donc, nous faisons le chois

$$\langle 0\,|z\rangle = \langle z\,|0\rangle = e^{-|z|^2/2}, \tag{1.8}$$

ce qui conduit à $\langle z\,|z\rangle = 1$. De cette manière, les états propres de l'opérateur de destruction a sont univoquemet definis comme

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,. \tag{1.9}$$

On appelle *états cohérents* les états propre (1.9) . L'expression (1.9) pour les l'état cohérent $|z\rangle$ résulte de l'action d'un opérateur agissant sur le vide. Pour ce travail,nous partons de la propriété

$$e^{za^\dagger}\,|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle \tag{1.10}$$

Puisque $a\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$, on peut remplacer $|0\rangle$ par $e^{-z^*a}\,|0\rangle$ sans rien modifier .Donc

$$e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} e^{-z^*a}\,|0\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = |z\rangle\,. \tag{1.11}$$

Pour terminer cette dérivation, nous utilisons le théorème :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{1.12}$$

pour tout couple d'operateurs A et B qui commutent avec leur commutateur. Ce théorème conduit au résultat

$$|z\rangle = e^{za^\dagger - z^*a}\,|0\rangle = D\,(z)\,|0\rangle\,, \tag{1.13}$$

qui exprime d'une manière compacte la relation entre le vide et un état cohérent en terme d'un opérateur unitaire de déplacement $D(z)$. L'opérateur $D(z)$ vérifie les propreiétés suivantes

$$D(z)\, D^{\dagger}(z) = D^{\dagger}(z)\, D(z) = 1, \qquad D^{\dagger}(z) = D(-z)\,, \tag{1.14}$$

$$D(z)\, D(z') = \exp\left(\frac{zz'^{*} - z^{*}z'}{2}\right) D(z+z'), \tag{1.15}$$

d'ou

$$D(z)\, D(z') = \exp\left(zz'^{*} - z^{*}z'\right) D(z')\, D(z) \tag{1.16}$$

Il est facile de montrer que

$$\left[a, D(z)\right] = zD(z)\,, \qquad \left[a^{\dagger}, D(z)\right] = z^{*}D(z)\ \ , \tag{1.17}$$

$$D^{\dagger}(z)\, aD(z) = a + z, \qquad D^{\dagger}(z)\, a^{\dagger}D(z) = a^{\dagger} + z^{*}, \tag{1.18}$$

pour cette raison, l'operateur $D(z)$ est appelé opérateur de Déplacemet. Il reste une difficulté à sur monter,c'est celle de vérifier que les états cohérents forment une base orthonormée. Nous allons démontrer dans cette section que les états cohérents forment une base, mais d'une nature assez particulière car elle n'est pas orthogonale. Nous allons aussi voir qu'il est parfaitement possible de travailler avec une base qui ne bénéficie pas de cette propriété qui semble essentielle en mecanique quantique. Nous savons déjà que la definition (1.9) impliquent que les états cohérents sont normalisables, et nous avons fait le choix $\langle z\,|z\rangle = 1$. Considérons maintenant le produit scalaire de deux états cohérents

$$\langle z\,|z'\rangle = e^{-\left(|z|^2+|z'|^2\right)/2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\left(z'\right)^m}{\sqrt{m!}} \langle n\,|m\rangle$$

$$= e^{-\left(|z|^2+|z'|^2\right)/2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\left(z^{*}z'\right)^n}{n!} = e^{-\left(|z|^2+|z'|^2\right)/2} e^{z^{*}z'}, \tag{1.19}$$

et donc

$$\left|\langle z\left|z'\right\rangle\right|^{2}=\exp\left(-\left|z-z'\right|^{2}\right). \tag{1.20}$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux et ne peuvent donc pas former un ensemble de vecteurs linéairement idépendants. Par contre, il a une propriété essentielle qui reste vérifié, à savoir l'existence d'une relation de fermuture ou décomposition de l'unité. Pour démontrer cela, nous avons

$$\frac{1}{\pi}\int\left|z\right\rangle\left\langle z\right|d^{2}z=\frac{1}{\pi}\int e^{-\left|z\right|^{2}}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{(z)^{n}}{\sqrt{n!}}\frac{(z^{*})^{m}}{\sqrt{m!}}\left|n\right\rangle\left\langle m\right|d^{2}z$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{\left|n\right\rangle\left\langle m\right|}{\sqrt{n!m!}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\left|z\right|^{2}}\left|z\right|^{n+m}\left|z\right|d\left|z\right|\int_{0}^{2\pi}d\theta e^{i(m-n)\theta}$$

on integre sur θ on trouve

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{\left|n\right\rangle\left\langle m\right|}{\sqrt{n!m!}}2\pi\delta_{n,m}\int_{0}^{+\infty}\left|z\right|^{n+m+1}e^{-\left|z\right|^{2}}d\left|z\right|, \tag{1.21}$$

on pose $x=\left|z\right|^{2}$ d'ou

$$\frac{1}{\pi}\int\left|z\right\rangle\left\langle z\right|d^{2}z=\frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{\left|n\right\rangle\left\langle m\right|}{\sqrt{n!m!}}\pi\delta_{n,m}\int_{0}^{+\infty}x^{n}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{\left|n\right\rangle\left\langle m\right|}{\sqrt{n!m!}}\pi\delta_{n,m}n!=\sum_{n}^{\infty}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|=1, \tag{1.22}$$

cette relation représente la relation de ferméture et tout état peut s'écrire dans la base des états cohérents

$$\left|\psi\right\rangle=\sum_{n}^{\infty}c_{n}\left|n\right\rangle=\sum_{n}^{\infty}c_{n}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^{\dagger}\right)^{n}\left|0\right\rangle=\psi\left(a^{\dagger}\right)\left|0\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\left|z\right\rangle\left\langle z\right|\psi\left(a^{\dagger}\right)\left|0\right\rangle d^{2}z$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\left|z\right\rangle\left\langle z\left|0\right.\right\rangle\psi\left(z^{*}\right)d^{2}z, \tag{1.23}$$

en utilisant la relation (1.8) , ceci conduit à l'égalité

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\psi\left(z^*\right)e^{-|z|^2/2}\left|z\right\rangle . \tag{1.24}$$

En particulier, si $|\psi\rangle$ est l'état cohérent $|z'\rangle$, on a

$$c_n = e^{-|z'|^2/2}\frac{z'^n}{\sqrt{n!}}, \tag{1.25}$$

$$\psi\left(z^*\right) = \sum_n^{\infty} e^{-|z'|^2/2}\frac{\left(z'z^*\right)^n}{n!}, \tag{1.26}$$

et donc

$$|z'\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2ze^{-\left(|z|^2+|z'|^2-2z^*z'\right)/2}\left|z\right\rangle . \tag{1.27}$$

Ainsi la base des états cohérents est surcomplète puisque tout vecteur de la base peut être exprimé comme une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la base.

Etudions maintenant les propriétés physiques de ces états cohérents.

– La valeur moyenne du nombre de photons dans un états cohérent $|z\rangle$

$$\langle n\rangle = \left\langle z\left|a^{\dagger}a\right|z\right\rangle = |z|^2 . \tag{1.28}$$

– La valeur moyenne de n^2 dans ce même états

$$\langle n^2\rangle = \left\langle z\left|a^{\dagger}aa^{\dagger}a\right|z\right\rangle = \left\langle z\left|a^{\dagger}a^{\dagger}aa + a^{\dagger}a\right|z\right\rangle = |z|^4 + |z|^2 = \langle n\rangle^2 + \langle n\rangle. \tag{1.29}$$

– La variance d'un état cohérent

$$\Delta n = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle. \tag{1.30}$$

– La fluctuation du nombre de photons

$$f\left(n\right)=\frac{\langle n^{2}\rangle-\langle n\rangle^{2}}{\langle n\rangle^{2}}=\frac{1}{\langle n\rangle}. \tag{1.31}$$

Cette propriété est fondamentale : plus l'intensité associe à un état cohérent est élevée, plus les fluctuations outour de cette intensité sont petites. C'est de cette propriété que les états cohérents tirent leur nom. C'est aussi par le biais de cette propriété qu'une relation peut être établie entre les états cohérents et le champ produit par un laser qui est en bonne première approximation dans un état cohérent. La probabilité de trouver n photons dans l'état cohérent $|z\rangle$ est donnée par la distribution de poison

$$P_{n}=\left|\langle n\left|z\right\rangle\right|^{2}=\frac{\left|z\right|^{2n}}{n!}e^{-|z|^{2}}=\frac{\langle n\rangle^{n}}{n!}e^{-\langle n\rangle}. \tag{1.32}$$

Pour terminer cette section, nous allons évaluer les valeurs moyennes de la position et de l'impulstion dans l'état cohérent. Ces valeurs peuvent être obtenus en exprimant X et P en fonction de a et $a^{\dagger}$

$$X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^{\dagger}+a\right),\qquad P=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a^{\dagger}-a\right), \tag{1.33}$$

par un calcul simple en trouve

$$\langle X\rangle_{z}=\langle z\left|X\right|z\rangle=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(z+z^{*}\right),\qquad \langle P\rangle_{z}=\langle z\left|P\right|z\rangle=i\sqrt{2\hbar m\omega}\left(z-z^{*}\right), \tag{1.34}$$

$$\langle X^{2}\rangle_{z}=\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\left(z+z^{*}\right)^{2}+1\right],\qquad \langle P^{2}\rangle_{z}=\frac{\hbar m\omega}{2}\left[1-\left(z-z^{*}\right)^{2}\right], \tag{1.35}$$

et donc

$$\Delta X_{z}=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}},\qquad \Delta X_{z}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}. \tag{1.36}$$

On note que $\Delta X.\Delta P$ prend sa valeur minimale :

$$\Delta X_{z}.\Delta P_{z}=\frac{\hbar}{2}, \tag{1.37}$$

qui ce traduit par la relation

$$\langle z \left| a^{\dagger} a \right| z \rangle = \langle z \left| a^{\dagger} \right| z \rangle \langle z \left| a \right| z \rangle, \tag{1.38}$$

pour les états $|\psi\rangle \neq |z\rangle$ qui diffèrent des états cohérents l'incertitude de Heiesberg s'écrit

$$\langle \psi \left| a^{\dagger} a \right| \psi \rangle \geq \langle \psi \left| a^{\dagger} \right| \psi \rangle \langle \psi \left| a \right| \psi \rangle. \tag{1.39}$$

1.3 Propagateur dans la base des états cohérents bosonique

L'amplitude de transition de l'états initial $|z_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'états final $|z_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'operateur d'évolution du temps

$$K\left(z_f, z_i; T\right) = \langle z_f \mid \mathbf{U}\left(T, 0\right) \mid z_i \rangle, \tag{1.40}$$

où

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. En peut écrire l'operateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}). \tag{1.41}$$

Nous introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, ...t_N$

$$\frac{1}{\pi}\int \left|z_n\right\rangle \left\langle z_n\right| d^2 z_n = 1. \tag{1.42}$$

Le propagateur prend la forme

$$K\left(z_f, z_i; T\right) = \lim_{N\to\infty} \int .. \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 z_n}{\pi} \prod_{n=1}^{n=N+1} \left\langle z_n\right| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H} \left|z_{n-1}\right\rangle . \tag{1.43}$$

En evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.43) on premier ordre en ε

$$\left\langle z_n\right| e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H} \left|z_{n-1}\right\rangle \simeq \left\langle z_n\right| 1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}H \left|z_{n-1}\right\rangle$$

$$= \left\langle z_n \middle| z_{n-1}\right\rangle \left[1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle z_n\right| H \left|z_{n-1}\right\rangle}{\left\langle z_n \middle| z_{n-1}\right\rangle}\right]$$

$$\simeq \left\langle z_n \middle| z_{n-1}\right\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}(z_{n-1}, z_n^*)}, \tag{1.44}$$

avec

$$\mathcal{H}\left(z_{n-1}, z_n^*\right) = \frac{\left\langle z_n\right| H \left|z_{n-1}\right\rangle}{\left\langle z_n \middle| z_{n-1}\right\rangle}, \tag{1.45}$$

et le produit de deux états cohérents est donné par la relation (1.19) · Dans ce cas le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$K\left(z_f, z_i; T\right) = \lim_{N\to\infty} \int .. \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 z_n}{\pi} \exp\left\{ i\frac{\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{i}{2}\left(z_n^* \frac{\Delta z_n}{\varepsilon} - z_n \frac{\Delta z_n^*}{\varepsilon}\right) - \mathcal{H}\left(z_{n-1}, z_n^*\right)\right]\right\}. \tag{1.46}$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérénts bosonique

$$K\left(z_f, z_i; T\right) = \int \mathcal{D}z \exp\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\left[\frac{i}{2}\left(z^*\dot{z} - z\dot{z}^*\right) - \mathcal{H}\left(z, z^*\right)\right]\right\}, \tag{1.47}$$

avec

$$\mathcal{D}z = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 z_n}{\pi}. \tag{1.48}$$

1.4 Les états cohérents du moment angulaire

Les états cohérents du moment angulaire peuvent être considérés comme les états quantiques associés au système classique dont le moment cinétique possède une direction déterminée. Dans la représentation associée aux états cohérents, tout élément diagonal d'un observable tend vers l'observable classique associée, lorsque le moment cinétique devient grand (limite classique). Par exemple, la valeur moyenne du moment dipolaire éléctrique dans un état cohérent possède les mêmes caractéristiques que le dipôle optique classique.

Ces états cohérents de moment angulaire minimsent les inégalités appropriée de même que les états cohérents bosonique faire pour les inégalités de Heisenberg. Ceux-ci concernent les inégalités du triplet d'opérateurs S_x ; S_y, S_z, à partir de $[S_x, S_y] = iS_z$ on obtient les inégalités pour le produit des variances calculées dans un état arbitraire $|\psi\rangle$.

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle(\Delta S_y)^2\rangle^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left|\langle S_z\rangle\right|, \tag{1.49}$$

avec

$$\Delta S_x = S_x - \langle S_x\rangle, \quad \Delta S_y = S_y - \langle S_y\rangle \text{ et } \langle S_z\rangle = \langle\psi\left|S_z\right|\psi\rangle. \tag{1.50}$$

Lorsque $|\psi\rangle = |s, m\rangle$, avec $S_z\ |s, m\rangle = m\,|s, m\rangle$ on peut voir que :

$$|m| \leq s(s+1) - m^2. \tag{1.51}$$

L'égalité est atteinte lorsque la projection de S_z suivant le vecteur $\mathbf{k}$: $m = \pm s$ c'est-a-dire pour les états $|\mathbf{k}\rangle = |s, \pm s\rangle$.

L'état $|s, s\rangle$ sera considéré comme l'état quantique associé au système classique dont le moment angulaire pointe dans la direction Oz. Par la suite, l'état quantique associé à un moment angulaire classique pointant dans la direction $\mathbf{n}$ repérée par les angles (θ, φ) sera obtenu à l'aide de la rotation amenant Oz sur $\mathbf{n}$. On définira donc *l'état cohérent du moment angulaire* $|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle$, associé au vecteur unitaire **n** par :

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |s, s\rangle \tag{1.52}$$

cet état est le résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $|\mathbf{k}\rangle = |s, s\rangle$.

Les états cohérents ne forment pas un ensemble orthonormé. Le produit scalaire de deux états cohérents angulaires

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \left[\cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \right]^{2s} \tag{1.53}$$

Les états $|\Omega\rangle$ forment un ensemble complétif. On peut en effet montrer la relation de ferméture

$$\frac{2s+1}{4\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbf{I}. \tag{1.54}$$

Nous considérons maintenant un spin $s = 1/2$ décrit par les opérateurs de spin $S_i, i = (x, y, z)$ avec l'espace de Hilbert à deux dimensions engendré par exemple par les vecteur propre $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ de S_z. Pour chaque orientation dans l'espace réel caractérisé par un angle polaire θ et un angle azimutal φ on peut introduire un état cohérent de spin.

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle \tag{1.55}$$

Ces états ne sont pas orthogonales, mais constituent une base surcomplèt dans l'espace de Hilbert. Le produit scalaire de deux états cohérents de spin et le projection sont respectivement

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \tag{1.56}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbf{I}. \tag{1.57}$$

En outre, les éléments de matrice des opérateurs de spin prennent la forme suivante :

$$\langle\Omega|\, S_z\, |\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}\right], \tag{1.58}$$

$$\langle\Omega|\, S_x\, |\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right], \tag{1.59}$$

$$\langle\Omega|\, S_y\, |\Omega'\rangle = \frac{1}{2i}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right]. \tag{1.60}$$

1.5 Propagateur dans la base des états cohérents angulaires

L'amplitude de tansition de l'état initial $|\Omega_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'état final $|\Omega_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution du temps

$$K\left(\Omega_f, \Omega_i; T\right) = \langle\Omega_f\left|\mathbf{U}\left(T, 0\right)\right|\Omega_i\rangle, \tag{1.61}$$

où

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \mathbf{T}_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt\right),$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N + 1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. En peut écrire l'opérateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n; t_{n-1}). \tag{1.62}$$

Introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, ...t_N$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_n d\cos(\theta_n)\, |\Omega_n\rangle\, \langle\Omega_n| = \mathbf{I}. \tag{1.63}$$

Le propagateur prend la forme

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=\lim_{N\to\infty}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t_n)}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle. \tag{1.64}$$

Evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.64) on premier ordre en ε

$$\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle=\left\langle\Omega_n\right|1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle+O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$=\left\langle\Omega_n\right|\left.\Omega_{n-1}\right\rangle\left[1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\left.\Omega_{n-1}\right\rangle}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$\simeq\left\langle\Omega_n\right|\left.\Omega_{n-1}\right\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}(\Omega_{n-1},\Omega_n)}, \tag{1.65}$$

avec

$$\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1},\Omega_n\right)=\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\left.\Omega_{n-1}\right\rangle}. \tag{1.66}$$

le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\exp\left\{\sum_{n=1}^{N+1}\left[\log\left\langle\Omega_n\right|\left.\Omega_{n-1}\right\rangle-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1},\Omega_n\right)\right]\right\} \tag{1.67}$$

Chapitre 2

Traitement de l'interaction d'une particule neutre à un moment magnétique avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons illustrer la téchinque des intégrales de chemins dans le calcul du propagateur d'une paticule neutre de spin 1/2 en intéraction avec une onde éléctromagnétique polarisée circulairement, se propagant le long de l'axe z positif et dont le vecteur d'onde est k et la fréquence angulaire est ω. Cette onde éléctromagnétique est définie par :

$$\mathbf{B} = (B_0 \cos(\omega t - kz), \epsilon B_0 \sin(\omega t - kz), B), \tag{2.1}$$

B_0 repésentant l'amplitude du champ magnetique $\mathbf{B}$,et $\epsilon = \pm 1$ avec $+1\,(-1)$ correspond aux positive (negative) helicité. Cette particule, de spin 1/2, a un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$. La dynamique de la particule en intéraction avec cette onde en générale est décrite par l'hamiltonien [67] :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x, y) + \mathbf{V} \tag{2.2}$$

avec $\mathbf{V}$ est l'interaction entre le moment magnetique de la particule et le champs magnétique de l'onde qui s'ecrit sous la forme suivante

$$\mathbf{V} = -\mu\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} = -\mu\hbar B\boldsymbol{\sigma}_z - \mu\hbar B_0 e^{-i\epsilon(\omega t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_+ - \mu\hbar B_0 e^{i\epsilon(\omega t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_-. \tag{2.3}$$

$V(x, y)$ c'est un potentiel dans le cas générale [67] .

L'hamiltonien relatif au probléme de ce chapitre (2.2) a la forme suivante

$$H = H_0 + H_{int}, \tag{2.4}$$

avec

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x, y), \tag{2.5}$$

et

$$H_{int} = -\mu\hbar B\boldsymbol{\sigma}_z - \mu\hbar B_0 e^{-i\epsilon(\omega t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_+ - \mu\hbar B_0 e^{i\epsilon(\omega t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_-, , \tag{2.6}$$

avec

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

2.2 Formalisme intégrale de chemin en représentation des états cohérents angulaire

Parmis plusieurs façons pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales du chemins.Nous utilisons la façon la plus simple qui consiste à :

$-$remplacer σ par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté suivant (θ, φ)

$-$associer un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$,

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle \tag{2.8}$$

résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $|\uparrow\rangle$ et dont le produit scalaire et le projecteur sont respectivement :

$$\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle = \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| = \mathbf{I}. \tag{2.10}$$

- (x, y, z) les variables reél pour décrire la position de la particule.
- le projecteur est le suivant :

$$\int |x_n, y_n, z_n\rangle \langle x_n, y_n, z_n| \, dx_n dy_n dz_n = \mathbf{I}. \tag{2.11}$$

Pour la déscription du système, nous allons considérer l'état quantique $|x, y, z; \theta, \varphi\rangle$, reliant le mouvement extérieur et de spin de la particule qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par les variables réelle x, y, z tandis que les variables angulaire (θ, φ) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initiale $|x_i, y_i, z_i; \theta_i, \varphi_i\rangle$ à $t_i = 0$ à l'état final $\left|x_f, y_f, z_f; \theta_f, \varphi_f\right\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les élément de la matrice de l'opérateur d'évolution du temps :

$$K(f, i; T) = \langle x_f, y_f, z_f, \theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{U}(T) \mid x_i, y_i, z_i, \theta_i, \varphi_i \rangle \tag{2.12}$$

où

$$\mathbf{U}(T)=\mathbf{T}_D\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(t)dt\right) \tag{2.13}$$

où $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation des intégrales du chemins, subdivisons l'intervalle du temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$\mathbf{U}(T)=\lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\right]^{N+1}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\mathbf{U}(t_n;t_{n-1}) \ . \tag{2.14}$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_n dy_n dz_n\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ &\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle x_n,y_{n,}z_n,\theta_n,\varphi_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\left|x_{n-1},y_{n-1,}z_{n-1},\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle , \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aprés l'action de H_{int} sur les états $\left|z_n\right\rangle$, on note que

$$\left\langle x_n,y_{n,}z_n,\theta_n,\varphi_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\left|x_{n-1},y_{n-1,}z_{n-1},\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle =$$

$$=\left\langle x_n,y_{n,}z_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}\left|x_{n-1},y_{n-1,}z_{n-1}\right\rangle\left\langle\theta_n,\varphi_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle , \tag{2.16}$$

et le propagateur devient séparable

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_n dy_n dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle x_n,y_{n,}z_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}\left|x_{n-1},y_{n-1,}z_{n-1}\right\rangle \\ &\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\theta_n,\varphi_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle , \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec

$$z_{N+1}=z_f \quad , \quad z_0=z_i \quad \text{et} \quad \Omega_{N+1}=\Omega_f, \quad , \quad \Omega_0=\Omega_i. \tag{2.18}$$

$$x_{N+1}=x_f \quad , \quad x_0=x_i \quad , \quad \text{et} \quad y_{N+1}=y_f \ , \quad y_0=y_i \tag{2.19}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle z_n \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p_z^2} \right| z_{n-1}\rangle = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(z_n - z_{n-1}\right)^2), \tag{2.20}$$

$$\langle x_n \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p_x^2} \right| x_{n-1}\rangle = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2) \tag{2.21}$$

$$\langle y_n \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p_y^2} \right| y_{n-1}\rangle = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(y_n - y_{n-1}\right)^2) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle\Omega|\,\sigma_z\,|\Omega'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, &(2.23)\\
\langle\Omega|\,\sigma_+\,|\Omega'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, &(2.24)\\
\langle\Omega|\,\sigma_-\,|\Omega'\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. &(2.25)
\end{aligned}$$

Le propagateur prend la forme discréte suivante

$$\begin{aligned}
K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N \int\prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V\left(x,y\right)\right]\\
\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2\\
\left\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} + \sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right.\\
- i\varepsilon\mu B\left[\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} - \sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right]\\
+ i\varepsilon\mu B_0\exp -i\epsilon(\omega t_n - kz_n)\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\\
\left.+i\varepsilon\mu B_0\exp\left[+i\epsilon(\omega t_{n-1} - kz_{n-1})\right]\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressons. Procédons alors au calcul de $K\left(f,i,;T\right)$.

2.3 Calcul du propagateur

Pour intégrer il faut d'abord diagonaliser l'Hamiltonien. Pour cela Nous éliminons les termes $\exp\left[-i\epsilon(\omega t_n - kz_n)\right]$ et $\exp\left[i\epsilon(\omega t_n - kz_n)\right]$ à l'aide du changement des variables polaires suivants

$$\varphi_n = \varphi'_n - \epsilon k z_n + \epsilon\omega t_n. \tag{2.27}$$

Il est clair que la mesure reste inchangé

$$d\varphi_n d\cos(\theta_n) = d\varphi'_n d\cos(\theta_n), \tag{2.28}$$

et le propagateur prend la forme suivante

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = {} & \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x,y)\right] \\ & \times \lim_{N\longrightarrow\infty}\int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi'_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1} \\ & \times\left\{(1 - i\varepsilon\Delta\omega)\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})}\exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 - k\Delta z_n\right)\right. \\ & + (1 + i\varepsilon\Delta\omega)\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})}\exp\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 + k\Delta z_n\right) \\ & + i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})} \\ & \left. + i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}\right\}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

avec

$$\Delta\omega = \mu B - \epsilon\omega, \tag{2.30}$$

on tenant compte du faite

$$\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \pm \frac{ik}{2}\Delta z_n = \frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n \pm \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon^2 k^2}{4m^2}\right], \tag{2.31}$$

Alors le propagateur devient

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_ndy_n\exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+V\left(x,y\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_nd\cos(\theta_n)\lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}\\ \Big\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp+\frac{i}{2}(\varphi'_n-\varphi'_{n-1})(1-i\varepsilon\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n-\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\\ +\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n-\varphi'_{n-1})}(1+i\varepsilon\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n+\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\\ +i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n+\varphi'_{n-1})}\\ +i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n+\varphi'_{n-1})}\Big\},\end{aligned}\tag{2.32}$$

qui l'on peut écrire sous forme matricielle

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_ndy_n\exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+V\left(x,y\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_nd\cos(\theta_n)\lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}\\ \times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{\frac{i\varphi'_n}{2}} & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i\varphi'_n}{2}}\end{pmatrix}R(z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{\frac{i\varphi'_{n-1}}{2}}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.33}$$

avec

$$R(z_n,t_n)=\begin{pmatrix}(1-i\varepsilon\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n-\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 & i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\\ i\varepsilon\mu B_0\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 & (1+i\varepsilon\Delta\omega)\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n+\frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\end{pmatrix}.\tag{2.34}$$

On intègre sur tous les angles (φ'_n,θ_n) utilisant.

$$\int_0^\pi d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=\int_0^\pi d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=-1\quad\text{et}\quad\int_0^{2\pi}d\varphi e^{+im\varphi}=2\pi\delta_{m,0}.$$

On trouve

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x,y)\right]$$

$$\times \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} (-1)^N \prod_{\overleftarrow{n=1}}^{n=N+1} R(z_n,t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

Introduisons maintenant l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2 + \frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n \pm \frac{i\varepsilon k}{2m}p_n\right] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}} \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n \pm \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2, \tag{2.36}$$

d'ou le porpagateur devient

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x,y)\right]$$

$$\times \lim_{N\longrightarrow\infty}(\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2 + \frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n\right] e^{-\frac{i\hbar Tk^2}{8m}} \tag{2.37}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} \prod_{\overleftarrow{n=1}}^{n=N+1} (-1)^N R(p_n,t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

la matrice R_n devient

$$R(p_n,t_n) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)e^{-\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n} & i\varepsilon\mu B_0 \\ i\varepsilon\mu B_0 & (1 + \frac{i\varepsilon}{2}\Delta\omega)e^{+\frac{i\varepsilon k}{2m}p_n} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

Intégrons sur les N varibles z_n . Le propagateur devient

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x,y)\right]$$

$$\times \lim_{N\longrightarrow\infty} \prod_{n=1}^{n=N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \prod_{n=1}^{n=N} (2\pi\hbar\delta(p_n - p_{n-1}))$$

$$\times e^{-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}\sum\limits_{n=1}^{n=N+1} p_n^2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_{n+1}z_{n+1} - p_1 z_0) - \frac{i\hbar T k^2}{8m}\right]$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} \prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1} (-1)^N R(p_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

La présence de la distribution de Dirac dans (2.40) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement i. e :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{N+1} = p. \tag{2.41}$$

Alors le propagateur (2.40) prend la forme suivante :

$$K(f, i; T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x, y)\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left[\sum_{n=1}^{n=N+1} (-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2) + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_0)\right] \exp\left(-\frac{i\hbar T k^2}{8m}\right)$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} R(p, T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

avec

$$R(p, T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (-1)^N \prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1} R(p, t_n), \tag{2.43}$$

tel que

$$R(p, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon(\frac{\Delta\omega}{2} + \frac{kp}{2m}) & i\varepsilon\mu B_0 \\ i\varepsilon\mu B_0 & 1 + i\varepsilon(\frac{\Delta\omega}{2} + \frac{kp}{2m}) \end{pmatrix} = e^{-i\varepsilon\omega(j)\sigma_z} + i\varepsilon K(n), \tag{2.44}$$

avec

$$K(p,t_n)=\left(\begin{array}{cc} 0 & u(p,t_n) \\ u(p,t_n) & 0 \end{array}\right), \tag{2.45}$$

avec

$$\omega(p,t_n)=\frac{\Delta\omega}{2}+\frac{kp}{2m}\ et \quad u(p,t_n)=\mu B_0 \tag{2.46}$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrices suivantes.

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n)) &= e^{-i\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum\limits_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum\limits_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\ &+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}+... \\ &+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}...\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^Ne^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\ &K(l_3)...e^{-i\sum\limits_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum\limits_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}. \end{aligned}\tag{2.47}$$

A la limite $N\longrightarrow+\infty$:le produit devient

$$\begin{aligned}R(p,T) &= e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z}+i\int_0^T ds_1e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z} \\ &+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2}ds\omega(p,s)\sigma_z} \\ &+...(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3...\int_0^{s_{N-1}}ds_Ne^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z} \\ &K(s_2)e^{-i\int_{s_3}^{s_2}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_3)...K(s_{N-1})e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_N)e^{-i\int_0^{s_N}ds\omega(p,s)\sigma_z}+... \end{aligned}\tag{2.48}$$

Un calcul simple nous montrons que les termes impaires respectivemet paires sont les éléments diagonaux respectevement antidiagonaux de R

$$\begin{aligned}R_{11}(p,T) &= e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)}+\sum_{n=1}^{\infty}i^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3...\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n}\times \\ &e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u(p(s_1),s_1)e^{+i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)}u(p(s_2),s_2)...e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}ds\omega(p,s)}u(p(s_{2n}),s_{2n})e^{-i\int_0^{s_{2n}}ds\omega(p,s)}, \end{aligned}\tag{2.49}$$

et

$$R_{12}(p,T) = i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)} u(p(s_1),s_1)R_{22}(p(s_1),s_1), \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} R_{22}(p,T) &= R_{11}^*(p,T), \\ R_{21}(p,T) &= -R_{12}^*(p,T), \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$R_{11}(p,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(i\mu B_0)^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}} \tag{2.52}$$

avec

$$\Delta = 2\omega(p,s). \tag{2.53}$$

2.4 Sommation des séries de perturabtion

Nous Evaluons $R_{11}(p,T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T. Soit

$$R_{11}(q,T) = \int_0^{+\infty} dTe^{-qT}R_{11}(p,T), \tag{2.54}$$

où $R_{11}(p,T)$ s'écrit sous la forme

$$R_{11}(q,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(i\mu B_0)^{2n}F(0,T)\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \tag{2.55}$$

Avec

$$F(0,T) = \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1}F_1(0,s_1), \tag{2.56}$$

$$F_1(0,s_1) = \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2 F_2(0,s_2), \tag{2.57}$$

et on obtient par itération

$$F_{2n-1}(0, s_{2n-1}) = \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}} ds_{2n}. \tag{2.58}$$

La tronsformation de Laplace de $F(0,T)$ est :

$$\widetilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} e^{-qT} F(0,T)dT = \int_0^{+\infty} dT e^{-qT} \int_0^T e^{i\Delta s_1} F_1(0,s_1)ds_1, \tag{2.59}$$

qui peut être réécrite comme

$$\widetilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} dT e^{-(q-i\Delta)T} \int_0^T e^{-i\Delta(T-s_1)} F_1(0,s_1)ds_1. \tag{2.60}$$

En utilisant le théorème de convolution, on obtient

$$\widetilde{F}(0,q) = \frac{1}{q}\widetilde{F}_1(0,q-i\Delta), \tag{2.61}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_1(0,q-i\Delta) &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} F_1(0,T)dT \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} dT \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 F_2(0,s_2) = \frac{1}{q-i\Delta}\widetilde{F}_2(0,q). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Effectuant le même calcul pour tous les autres termes , on obtient

$$\widetilde{F}(0,q) = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{q(q-i\Delta)}\right]^n, \tag{2.63}$$

$$\widetilde{F}(0,T) = \int_0^{+\infty} e^{+qT} F(0,q)dq. \tag{2.64}$$

Insérant ce résultat dans $R_{11}(p,T)$ et effectuant la somme, on obtient

$$R_{11}(p,T) = \left[1 + \int_0^{+\infty}\left[\frac{q-i\Delta}{q(q-i\Delta)+(\mu B_0)^2} - \frac{1}{q}\right]e^{+qT}dq\right]e^{-i\frac{T\Delta}{2}}. \tag{2.65}$$

Ce résultat est valable pour $\mid \frac{(\mu B_0)^2}{q(q-i\Delta)} \mid < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour ou cette condition est vérifiée [56].

On integre sur q on trouve l'expression de

$$R_{11}(p,T) = \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \qquad \text{avec} \qquad \Omega' = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + (2\mu B_0)^2}. \tag{2.66}$$

Par un calcul identique, on touve les autre éléments de la matrice les resultats suivants.

$$R_{12}(p,T) = \frac{i\mu B_0}{\Omega'}\sin\Omega' T, \tag{2.67}$$

$$R_{21}(p,T) = \frac{i\mu B_0}{\Omega'}\sin\Omega' T, \tag{2.68}$$

$$R_{22}(p,T) = \cos\Omega' T + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega' T. \tag{2.69}$$

Substituant ce résultat dans l'équation (2.42) le propagateur prend finalement la forme

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N \int \prod_{n=1}^{n=N} dx_n dy_n \exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 + V(x,y)\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right]$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}} \end{pmatrix} R(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i'}{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.70}$$

avec

$$R(p,T)=\begin{pmatrix} \cos(\Omega' T)-\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & -\frac{i\mu B_0}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \\ -\frac{i\mu B_0}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & \cos(\Omega' T)+\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

Retournons aux anciennes variables angulaires (θ,φ) , nous obtenons

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_n dy_n\exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+V(x,y)\right]$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f}{2}}\end{pmatrix}\mathbf{S}(p,T)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi_i}{2}}\end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

ou les éléments de la matrice $\mathbf{S}$ est donné par

$$\mathbf{S}_{11}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T)-\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp\frac{i}{2}(\epsilon kz_f-\epsilon\omega T-\epsilon kz_i), \tag{2.73}$$
$$\mathbf{S}_{22}(p,T) = \left[\cos(\Omega' T)+\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T)\right]\exp-\frac{i}{2}(\epsilon kz_f-\epsilon\omega T-\epsilon kz_i), \tag{2.74}$$
$$\mathbf{S}_{12}(p,T) = -\frac{i\mu B_0}{\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp\frac{i}{2}(\epsilon kz_f-\epsilon\omega T+\epsilon kz_i), \tag{2.75}$$
$$\mathbf{S}_{21}(p,T) = -\frac{i\mu B_0}{\Omega'}\sin(\Omega' T)\exp-\frac{i}{2}(\epsilon kz_f-\epsilon\omega T+\epsilon kz_i). \tag{2.76}$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0,2\pi]$ et $[0,4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K\left(\mathbf{r}_f,\Omega_f,\mathbf{r}_i,\Omega_i;T\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}K\left(r_f,\theta_f+2n\pi,\mathbf{r}_i,\varphi_f+4n\pi,\ \theta_i,\varphi_i;T\right) \\ &= K(f,i;T), \end{aligned}$$

Qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

2.5 Fonctions d'onde

Calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, en prenant a titre d'exmple le calcul de l'élement de la matrice $K_{11}\left(z_f, z_i, T\right)$ où

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \left\langle \uparrow \right| K(f, i; T) \left| \uparrow \right\rangle . \tag{2.77}$$

Introduisant ici les relations de fermetures suivantes

$$\int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle \Omega_f\right| = 1, \quad \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) \left|\Omega_i\right\rangle \Omega_i \,| = 1, \tag{2.78}$$

$$K_{11}\left(z_f, z_i, T\right) = \int \frac{1}{2\pi} d\varphi_f d\cos(\theta_f) \frac{1}{2\pi} d\varphi_i d\cos(\theta_i) <\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle \left\langle \Omega_f\right| K(f, i; T) \left|\Omega_i\right\rangle \left\langle \Omega_i \right|\uparrow\rangle , \tag{2.79}$$

avec

$$<\uparrow \left|\Omega_f\right\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \left\langle \Omega_i\right| \uparrow >= \cos\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{2.80}$$

On intégre sur (θ, φ) :

$$K_{11}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{11}(p, T), \tag{2.81}$$

De même on trouve pour les autres éléments des formules analogues :

$$K_{12}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{12}(p, T), \tag{2.82}$$

$$K_{21}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{21}(p, T), \tag{2.83}$$

$$K_{22}(f, i, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i)\right] \mathbf{S}_{22}(p, T). \tag{2.84}$$

Le résultat se met sous la forme matricielle suivante :

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\epsilon)^N\int\prod_{n=1}^{n=N}dx_ndy_n\exp\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+V(x,y)\right]$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]\mathbf{S}(p,T). \qquad (2.85)$$

qui prend la forme suivante

$$K(f,i,T)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-i\frac{E_n^{xy}}{\hbar}T}\varphi_n(x_f,y_f)\,\varphi_n^*(x_i,y_i)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]\mathbf{S}(p,T)$$

Déduisant la fonction d'onde à l'instant T à partir de l'état initial par l'intermédiaire de l'équation d'évolution :

$$\Psi(\mathbf{r}_f,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(\mathbf{r}_f;\mathbf{r}_i;T)\Psi(\mathbf{r}_i,0)d\mathbf{r}_i. \qquad (2.86)$$

Ce résultat sont en accord avec ceux obtenus dans la référence [67] .

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié dans le formalisme intégrale de chemins en represetation des états cohérents de spin le problème d'une particule neutre à un moment magnétique avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire. L'amplitude de transition a été exprimeé dans l'espace élargi relatif au mouvement extérieur et interieur. Par conséquent, le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs aux spin. Par le biais d'une première rotation sur l'angle azimutal nous avons pus intégrer sur les varaibles extériure (y,p). De ce fait, l'expression explicite et exacte de l'amplitude de transition a été obtenue suivant la méthode des perturbations sous forme de série, qui dans ce cas, ont put être sommées exactement. De ce fait ,l'expression explicite et exacte de l'amplitude de transition a été obtenue. Les fonctions d'ondes et le spectre correspondants ont été déduits en appliquant les principes de la mécanique quantique. Les résultats concordent exactement avec ceux de la litterature [67] .

Chapitre 3

Etude de l'interaction d'une particule neutre par un champ magnétique statique et d'un potentiel scalaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'étudier le mouvement d'une particule neutre de spin 1/2 soumise à l'action d'un champ magnétique variable $\mathbf{B}(y)$ statique et un potentiel scalaire sont mouvement est régie par l'hamiltonien, de la forme suivante $[56 - 74]$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - \mu_0 \alpha y(\boldsymbol{\sigma}_z \sin 2\kappa y + \sigma_x \cos 2\kappa y) \tag{3.1}$$

où μ_0 est le rapport gyromagnétique, B_0 et κ sont deux constantes arbitraires où $\omega = \mu_0 \alpha / \kappa$.

Notons que ce problème a été étudié en utilisant les intégrales du chemin en representation des états cohérents fermionic [56]. La différence entre les deux approches est simplement liee aux différence entre les deux états cohérents utiliser.

3.2 Calcul du propagateur

Nous designe par y la variable réelle qui décrite la position de la paticule, avec le projecteur correspondant

$$\int |y\rangle \langle y| \, dy = 1, \tag{3.2}$$

– Pour la déscription du système, nous allons considérer l'état quantique $|y;\theta,\varphi\rangle$, reliant le mouvement extérieur et de spin de la particule qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par le variable réelle y tandis que les variables angulaire (θ,φ) décrivent la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état initial $|y_i;\theta_i,\varphi_i\rangle$ à $t_i = 0$ vers l'état final $\left|y_f;\theta_f,\varphi_f\right\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit :

$$K\left(f,i,;T\right) = \langle y_f,\theta_f,\varphi_f \mid \mathbf{U}\left(T,0\right) \mid y_i,\theta_i,\varphi_i\rangle, \tag{3.3}$$

avec

$$\mathbf{U}\left(T,0\right) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt), \tag{3.4}$$

et $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson . Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$\mathbf{U}(T,0) = \lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\right]^{N+1} = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}\mathbf{U}(t_n;t_{n-1}) \tag{3.5}$$

Introduisons les relations de fermeture entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dy_n\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{N}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ &\quad\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\langle y_n,\theta_n,\varphi_n|\, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0}e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}}\left|y_{n-1},\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aprés l'action de H_{int} sur les états $|y_n\rangle$, on note que

$$\begin{aligned} & \langle y_n, \theta_n, \varphi_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} \left| y_{n-1}, \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \right\rangle \\ = & \langle y_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} \, |y_{n-1}\rangle \, \langle \theta_n, \varphi_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} \left| \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \right\rangle , \end{aligned} \tag{3.7}$$

et le propagateur devient séparable

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle y_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_0} \, |y_{n-1}\rangle \\ & \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi} \int \prod_{n=1}^{N} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\ & \times \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle \theta_n, \varphi_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}} \left| \theta_{n-1}, \varphi_{n-1} \right\rangle , \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec

$$y_{N+1} = y_f \quad , \quad y_0 = y_i \quad \text{et} \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f \;\; , \;\; \Omega_0 = \Omega_i. \tag{3.9}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle y_n \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}p^2} \right| y_{n-1}\rangle = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}\, \exp(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\,(y_n - y_{n-1})^2), \tag{3.10}$$

avec

$$\langle\Omega| \, \sigma_y \, |\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{3.11}$$

$$\langle\Omega| \, \sigma_+ \, |\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{3.12}$$

$$\langle\Omega| \, \sigma_- \, |\Omega'\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. \tag{3.13}$$

Le propagateur prend la forme discréte suivante

$$K(f,i;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n$$

$$\times \prod_{n=1}^{n=N+1} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2\varepsilon} \left(y_n - y_{n-1} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon m \omega^2 y_n^2 \right]$$

$$\times \left\{ \cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} + \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right.$$

$$- i\varepsilon \mu_0 \alpha y \cos 2\kappa y \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} - \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \right]$$

$$\left. + i\varepsilon \mu_0 \alpha y \sin 2\kappa y \left[\cos \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1})} + \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1})} \right] \right\}. \tag{3.14}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressons. Procédons alors au calcul de $K(f, i, ; T)$.

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N \longrightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dy_n \prod_{n=1}^{N+1} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2\varepsilon} \left(y_n - y_{n-1} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon m \omega^2 y_n^2 \right] \\ & \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\varphi_n d\cos(\theta_n)}{2\pi} \prod_{n=1}^{N+1} \left[\langle \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle - i\varepsilon \langle \Omega_n | H_1 | \Omega_{n-1} \rangle \right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec

$$H_1 = -\mu_0 \alpha y (\boldsymbol{\sigma}_z \sin 2\kappa y + \boldsymbol{\sigma}_x \cos 2\kappa y) \tag{3.16}$$

et

$$y_{n+1} = y_f, \quad \Omega_{n+1} = \Omega_f, \; et \;\; y_0 = y_i, \Omega_0 = \Omega_i$$

Notons que (3.14) s'écrit sous forme suivante

$$\begin{aligned}
K\left(y_f,\Omega_f,y_i,\Omega_i;T\right) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{N}dy_n \\
&\times\prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(y_n-y_{n-1}\right)^2-\frac{1}{2}\varepsilon m\omega^2y_n^2\right] \\
&\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1} \\
&\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}R\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{3.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
R &= 1-i\varepsilon H_1 \\
&= 1+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n(\boldsymbol{\sigma}_z\sin 2\kappa y_n+\boldsymbol{\sigma}_x\cos 2\kappa y_n)
\end{aligned}\tag{3.18}$$

Faisons d'abord une transformation unitaire sur les variables angulaires, afin d'éliminer le terme $2\kappa y_n$ du champs magnétique dans le propagareur (3.17)

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\\ \sin\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}=e^{-i\kappa y_n\boldsymbol{\sigma}_y}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n'}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'}\\ \sin\frac{\theta_n'}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'}\end{pmatrix}\tag{3.19}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n'}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'}, & \sin\frac{\theta_n'}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'}\end{pmatrix}e^{+i\kappa y_n\boldsymbol{\sigma}_y}\tag{3.20}$$

Le propagateur (3.17) devient

$$K\left(y_f,\Omega_f^{'},y_i,\Omega_i^{'};T\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{N}dy_n\prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(y_n-y_{n-1}\right)^2-\frac{1}{2}\varepsilon m\omega^2y_n^2\right]\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n^{'})d\varphi_n^{'}}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n^{'}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}}, & \sin\frac{\theta_n^{'}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'}}\end{pmatrix}R_1(y_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}}\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

où

$$R_1=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\varepsilon\hbar}{2m}k^2} & -k\Delta y_n+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n\\ k\Delta y_n+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n & e^{-i\frac{\varepsilon\hbar}{2m}k^2}\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

On intéger sur tous les angels on trouve

$$K(f,i,T)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{pmatrix}\mathbf{S}(T)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

ou

$$\mathbf{S}(T)=e^{-i\frac{k^2}{2m}T}e^{i\sigma_yky_f}\begin{pmatrix}\widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12}\\ \widetilde{K}_{21} & \widetilde{K}_{22}\end{pmatrix}e^{-i\sigma_yky_f} \tag{3.24}$$

Avec $\widetilde{K}_{ij}(y_b,y_a;T)$ et donner par [56]

$$\widetilde{K}_{11}(y_b,y_a;T)=e^{-\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-i\omega(n+1/2)T}\Psi_n\left(\sqrt{m\omega}y_b\right)\Psi_n^*\left(\sqrt{m\omega}y_a\right)\left(\cos\Omega T+\frac{i\omega}{2\Omega}\sin\Omega T\right). \tag{3.25}$$

$$\widetilde{K}_{12}(y_b,y_a;T)=e^{-\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-i\omega(n+1/2)T}\Psi_n\left(\sqrt{m\omega}y_b\right)\Psi_{n+1}^*\left(\sqrt{m\omega}y_a\right)\left(\frac{2i\omega\kappa^2\left(n+1\right)}{m\Omega}\sin\Omega T\right), \tag{3.26}$$

$$\widetilde{K}_{21}(y_b,y_a;T)=e^{\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-i\omega(n+3/2)T}\Psi_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}y_b\right)\Psi_n^*\left(\sqrt{m\omega}y_a\right)\left(\frac{2i\omega\kappa^2\left(n+1\right)}{m\Omega}\sin\Omega T\right), \tag{3.27}$$

$$\widetilde{K}_{22}(y_b,y_a;T)=e^{-\frac{i\omega T}{2}}\Psi_0\left(\sqrt{m\omega}y_b\right)\Psi_0^*\left(\sqrt{m\omega}y_a\right)$$

$$+e^{\frac{i\omega T}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-i\omega(n+3/2)T}\Psi_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}y_b\right)\Psi_{n+1}^{*}\left(\sqrt{m\omega}y_a\right)\left(\cos\Omega T-\frac{i\omega}{2\Omega}\sin\Omega T\right). \tag{3.28}$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0,2\pi]$ et $[0,4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}K\left(y_f,\theta_f+2n\pi,y_i,\varphi_i+4n\pi,\ \theta_i,\varphi_i;T\right) \\ &= K(f,i;T), \end{aligned} \tag{3.29}$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

3.3 Les fonctions d'onde

Calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, en prenant a titre d'exmple le calcul de l'élement de la matrice $K_{11}(z_f,z_i,T)$ où

$$K_{11}(z_f,z_i,T)=\langle\uparrow|\,K(f,i;T)\,|\uparrow\rangle. \tag{3.30}$$

Introduisant ici les relations de fermetures suivantes

$$\int\frac{1}{2\pi}d\varphi_f d\cos(\theta_f)\left|\Omega_f\right\rangle\left\langle\Omega_f\right|=1,\quad\int\ \frac{1}{2\pi}d\varphi_i d\cos(\theta_i)\left|\Omega_i\right\rangle\Omega_i\ |=1, \tag{3.31}$$

$$K_{11}(z_f,z_i,T)=\int\frac{1}{2\pi}d\varphi_f d\cos(\theta_f)\frac{1}{2\pi}d\varphi_i d\cos(\theta_i)<\uparrow|\Omega_f\rangle\left\langle\Omega_f\right|K(f,i;T)\left|\Omega_i\right\rangle\left\langle\Omega_i\right|\uparrow\rangle, \tag{3.32}$$

avec

$$<\uparrow|\Omega_f\rangle=\cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f},\qquad\text{et}\qquad\langle\Omega_i|\uparrow>=\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{3.33}$$

on a donc :

$$K_{11}(f,i,T)=\mathbf{S}_{11}(p,T), \tag{3.34}$$

De même on trouve pour les autres éléments des formules analogues :

$$K_{12}(f,i,T)=\mathbf{S}_{12}(p,T), \tag{3.35}$$

$$K_{21}(f,i,T)=\mathbf{S}_{21}(p,T), \tag{3.36}$$

$$K_{22}(f,i,T)=\mathbf{S}_{22}(p,T). \tag{3.37}$$

Le résultat se met sous la forme matricielle suivante : $K(f,i;T)=\mathbf{S}(p,T)$.

Ayant déterminé le propagateur, nous pouvons extraire le spectre d'énergie ainsi que les fonctions d'onde pour le système que nous avons considéré.

Le propagateur peut être d'abord écrit sous la forme suivante

$$K(y_f,y_i;T)=e^{-iE_0T}\Phi_0(y_f)\Phi_0^{\dagger}(y_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-iE_n^{+}T}\Phi_n^{(+)}(y_f)\Phi_n^{(+)\dagger}(y_i)+e^{-iE_n^{-}T}\Phi_n^{(-)}(y_f)\Phi_n^{(-)\dagger}(y_i)\right] \tag{3.38}$$

Nous pouvons alors tirer le spectre d'énergie :

$$\mathcal{E}_0=\frac{\kappa^2}{2m}+\frac{\omega}{2}\text{ et }\mathcal{E}_n^{\pm}=\omega\left(n+1\right)+\frac{\kappa^2}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2+\frac{2\omega\kappa^2\left(n+1\right)}{m}} \tag{3.39}$$

Ainsi que les fonctions d'onde correspondantes à ces énergies.

$$\Phi_0\left(y\right)=\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}m\omega y^2}e^{-i\sigma_2(\kappa y)}\eta_- \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(\pm)}\left(y\right) &= \left[\left(\cos\alpha_n^{\pm}\Psi_n\left(y\right)\right)^2+\left(\sin\alpha_n^{\pm}\Psi_{n+1}\left(y\right)\right)^2\right]^{1/2}\\ &\quad\times e^{-i\sigma_2(\kappa y)}e^{-i\sigma_2\Theta_n^{\pm}(y)}\eta_{\pm}\end{aligned} \tag{3.41}$$

avec

$$\tan\Theta_n^{\pm}(y) = \tan\left(\alpha_n^{\pm}\frac{\Psi_{n+1}(y)}{\Psi_n(y)}\right) = \frac{\tan\alpha_n^{\pm}}{\sqrt{2(n+1)}}\frac{H_{n+1}(\sqrt{m\omega}y)}{H_n(\sqrt{m\omega}y)} \tag{3.42}$$

où

$$\tan\alpha_n^{+} = \frac{\sqrt{\frac{2\omega\kappa^2(n+1)}{m}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{2\omega\kappa^2(n+1)}{m}} - \frac{\omega}{2}} = -\cot\alpha_n^{-} \tag{3.43}$$

et

$$\eta_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \eta_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

qui sont convenablement normalisées.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'action d'un champs magéntique statique plus un potentiel scalaire sur une particule neutre de spin 1/2. L'utilisation de l'espace des phases a simplifié énormément le calcul et grace a certaines rotations dans l'espace des états cohérents angulaires. En passant à la base naturelle $|sm_s\rangle$ du spin, le spectre et les fonctions d'onde relatives sont déduits à partir de la décomposition spectrale du propagateur. Les résultats obtenus sont par comparaison avec ceux obtenus par résolution directe de l'équation de Schrödinger tout à fait conformes [74] et par les intégrales de chemins dans la representations des états cohérents fermionique [56] .

Chapitre 4

Atome à deux niveaux en interaction avec un champs magnétique variable dans le temps

4.1 Introduction

Considérons une particule de spin 1/2 en interaction avec un champ magnétique dépendant du temps $\mathbf{B}(t)$, et proposons nous dans ce chapitre de calculer la probabilité de transition dans le formalisme intégrale de chemins en representation des états cohérents angulaire. Physiquement cela correspond à un atome assez lourd (l'énergie cinétique étant absente sa masse $m \gg$) de spin 1/2 soumis à l'action d'un champ variable $\mathbf{B}(t)$. L'équation de Schrödinger décrivant l'évolution du système est :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H_{int}(t)\psi(t) \tag{4.1}$$

avec

$$H_{int}(t) = -\frac{1}{2}g\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(t) = -\frac{1}{2}g(\sigma_x B_x(t) + \sigma_y B_y(t) + \sigma_z B_z(t)) \tag{4.2}$$

qui l'on peut l'ècrire sous la forme

$$H = -u\,(t)\,\boldsymbol{\sigma}_{+} - u^{*}\,(t)\,\boldsymbol{\sigma}_{-} - \Omega\,(t)\,\boldsymbol{\sigma}_{z} \tag{4.3}$$

avec

$$u\,(t) = \frac{\gamma}{2}\left(B_x(t) - iB_y(t)\right) \quad , \qquad \Omega\,(t) = \frac{\gamma}{2}B_z(t), \tag{4.4}$$

les matrices de pauli sont défini par :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{\sigma}_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{\sigma}_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

g le rapport gyromagnétique et $B_i(t)$, $(i = x, y, z$) les composantes du champ magnétique. L'equation (4.1) admet une solution analytique qui s'obtient naturellement dans le formalisme intégrale de chemins dans la représentation des états cohérents angulaire. Le but de ce chapitre est de résoudre l'équation (4.1) dans le formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents angulaire, et de déterminer la probabilité de transition dans chaque cas.

Passons d'abord à la construction du formalisme intégrale de chemins.

4.2 Formalisme intégrale de chemins en représentation des états cohérents angularie

Il existe plusieurs façons pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales du chemins. Nous utilisons la plus simple qui consiste à .

– remplacer $\boldsymbol{\sigma}$ par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté suivant (θ, φ) :

– associer un état coherent $|\theta, \varphi\rangle$,

$$|\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} \left|\uparrow\right\rangle \tag{4.6}$$

résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et ϕ autour des axes z et y de l'état $|\uparrow\rangle$ et dont le produit scalaire et le projecteur sont respectivement (Apendice A) :

$$\langle\theta,\varphi|\,\theta',\varphi'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi d\cos(\theta)\,|\theta,\varphi\rangle\,\langle\theta,\varphi| = \mathbf{I}. \tag{4.8}$$

– Pour décrire le mouvement de la particule nous considérons l'état quantique $|\theta,\varphi\rangle$ où (θ,φ) sont les variables angulaire générant la dynamique du spin. L'amplitude de transition de l'état $|\theta_i,\varphi_i\rangle$ à $t=0$ à l'état final $\left|\theta_f,\varphi_f\right\rangle$ à $t=T$ est définie par les élément de la matrice de l'opérateur d'évolution du temps :

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T) = \langle\theta_f,\varphi_f \mid U(T) \mid \theta_i,\varphi_i\rangle \tag{4.9}$$

où

$$U(T) = \mathbf{T}_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H_{int}(t)dt\right) \tag{4.10}$$

Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ϵ pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T. Utilisons d'abord la formule de Trotter.

$$U(T) = \lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H_{int}(t)}\right]^{N+1} \quad avec \qquad T=(N+1)\epsilon \tag{4.11}$$

$$U(T) = U(t_{N+1}-t_N)U(t_N-t_{N-1})...U(t_{n+1}-t_n)...U(t_1-t_0) \tag{4.12}$$

où $t_{N+1}=t_f=T$, et $t_0=t_i=0$, $t_n=t_0+n\epsilon$, $n=0,...,N+1$.

Introduisons les relations de fermetures (4.8) entre chaque paire de $U(\epsilon)$. Alors l'expression (4.4) prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T) = \left\langle \theta_{N+1},\varphi_{N+1}\right| U(t_{N+1}-t_N)\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_N d\cos(\theta_N)\left|\theta_N,\varphi_N\right\rangle \left\langle \theta_N,\varphi_N\right| U(t_N-t_{N-1})$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_{N-1} d\cos(\theta_{N-1})\left|\theta_{N-1},\varphi_{N-1}\right\rangle \left\langle \theta_{N-1},\varphi_{N-1}\right| ...$$

$$...\times\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_n d\cos(\theta_n)\left|\theta_n,\varphi_n\right\rangle \left\langle \theta_n,\varphi_n\right| U(t_{n+1}-t_n)\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_{n-1} d\cos(\theta_{n-1})\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle \left\langle \theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right| ...$$

$$...\times\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_1 d\cos(\theta_1)\left|\theta_1,\varphi_1\right\rangle \left\langle \theta_1,\varphi_1\right| U(t_1-t_0)\left|\theta_i,\varphi_i\right\rangle . \tag{4.13}$$

avec

$$\left\langle \theta_n,\varphi_n\right| U(t_{n+1}-t_n)\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle = \left\langle \theta_n,\varphi_n\right| e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H_{int}(t)}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle , \tag{4.14}$$

et

$$\left(\theta_{N+1},\varphi_{N+1}\right) = \left(\theta_f,\varphi_f\right), \quad , \quad (\theta_0,\varphi_0) = (\theta_i,\varphi_i)\,, \tag{4.15}$$

qui s'écrit sous forme compacte

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int ...\int \prod_{n=1}^{N} d\varphi_n d\cos(\theta_n)\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle \theta_n,\varphi_n\right| e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H_{int}}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle \tag{4.16}$$

Evaluent l'élément de matrice figurant dans (4.16) on premier order en ε :

$$\left\langle \theta_n,\varphi_n\right|^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H_{int}}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle = \left\langle \theta_n,\varphi_n\right| 1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H_{int}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$= \left\langle \theta_n,\varphi_n\right|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle\left[1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle \theta_n,\varphi_n\right| H_{int}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle}{\left\langle \theta_n,\varphi_n\right|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle}\right] + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$\simeq \left\langle \theta_n,\varphi_n\right|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}_{int}\left(\theta_{n-1},\varphi_{n-1},\theta_n,\varphi_n\right)} \tag{4.17}$$

avec

$$\mathcal{H}_{int}\left(\theta_{n-1},\varphi_{n-1},\theta_n,\varphi_n\right)=\frac{\left\langle\theta_n,\varphi_n\right|H_{int}\left|\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\theta_n,\varphi_n\right|\left.\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle} \tag{4.18}$$

le propagateur s'écrit sous la forme discrete suivante

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int\ldots\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)$$

$$\times\exp\left\{\sum_{n=1}^{N+1}\left[\log\left\langle\theta_n,\varphi_n\right|\left.\theta_{n-1},\varphi_{n-1}\right\rangle-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}_{int}\left(\theta_{n-1},\varphi_{n-1},\theta_n,\varphi_n\right)\right]\right\} \tag{4.19}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle de Feynamn

$$K=\int\mathcal{D}path\exp\left(iAction\left(path\right)\right), \tag{4.20}$$

En tenant compte du fait que :

$$\left\langle\theta,\varphi\right|\sigma_z\left|\theta_n,\varphi'\right\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{4.21}$$

$$\left\langle\theta,\varphi\right|\sigma_+\left|\theta_n,\varphi'\right\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{4.22}$$

$$\left\langle\theta,\varphi\right|\sigma_-\left|\theta,\varphi'\right\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. \tag{4.23}$$

Le propagateur prend la forme discrete suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=&\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\ldots\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\\ &\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\{\cos(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})+\sin(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\right.\\ &+i\varepsilon\Omega\left(t\right)\left[\cos(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})-\sin(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\right]\\ &\left.+i\varepsilon u\left(t\right)\cos(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})+i\varepsilon u^*\left(t\right)\sin(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})\right\}\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéresessent. Procédons alors au calcul de $\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)$.

4.3 Calcul du propagateur pour le champ de Rabi

Les formes du champ magnétique étudiées dans ce chapitre appartiennent à une classe de champs solubles exactement, dite classe de Rabi. On va calculer le propagateur dans chaque cas, suivant le formalisme intégrale de chemins dans la représentation états cohérents de spin est en va déduire la probabilité de transition dans chaque cas.

4.4 Premier cas :

$$\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, \quad B_1 \sin \omega t,\ B_0) \tag{4.25}$$

Dans ce cas

$$u\,(t) = \frac{\gamma}{2}\,(B_x(t) - iB_y(t)) = \omega_1 e^{-i\omega t}, \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\gamma}{2}B_1 \ \text{ et } \qquad \Omega\,(t) = \frac{\gamma}{2}B_0 = \omega_0 \tag{4.26}$$

Le propagateur (4.24) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int ... \int \prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n) \\
&\prod_{n=1}^{n=N+1}\Bigg\{\cos(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1}) + \sin(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1}) \\
&+ i\varepsilon\omega_0\left[\cos(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1}) - \sin(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\right] \\
&+ i\varepsilon\omega_1 e^{-i\omega t}\cos(\frac{\theta_n}{2})\sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1}) + \\
&+ i\varepsilon\omega_1 e^{+i\omega t}\sin(\frac{\theta_n}{2})\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Notons que (4.27) s'écrit sous la forme adéquate suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int...\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\\ &\times\prod_{n=1}^{N+1}\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{array}\right)R(t_n)\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{array}\right),\end{aligned}\tag{4.28}$$

avec

$$R(t_n)=e^{i\varepsilon\omega_0\boldsymbol{\sigma}_z}+i\varepsilon\left(\begin{array}{cc}0 & \omega_1e^{-i\omega t}\\ \omega_1e^{+i\omega t} & 0\end{array}\right),\tag{4.29}$$

On intègre sur tous les angles (φ_n',θ_n) utilisant.

$$\int_0^{\pi}d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=\int_0^{\pi}d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=-1\ \text{ et }\ \int_0^{2\pi}d\varphi e^{+im\varphi}=2\pi\delta_{m,0}.\tag{4.30}$$

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{array}\right)\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\underset{\leftarrow}{n=1}}^{N+1}R(t_n)\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_i}\end{array}\right)\tag{4.31}$$

Maintenant passons au calcule du produis des matrice suivant [56].

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega_0(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n)) &= e^{-i\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon\omega_0(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum\limits_{l+1}^{N}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum\limits_{1}^{l-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}\\ &+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}+...\\ &+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}...\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^Ne^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}\\ &K(l_3)...e^{-i\sum\limits_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum\limits_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_{N}-1}\varepsilon\omega_0(k)\sigma_z}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

A la limite $N \longrightarrow +\infty$:le produit devient

$$
\begin{aligned}
R(p,T) = e^{-i\int_0^T ds\omega_0(q,s)\sigma_z} + i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega_0\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_0^{s_1} ds\omega_0\sigma_z} \\
+ (i)^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega_0\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega_0\sigma_z} K(s_2) e^{-i\int_0^{s_2} ds\omega_0\sigma_z} \\
+ ...(i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 ... \int_0^{s_{N-1}} ds_N e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega_0\sigma_z} K(s_1) e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega_0\sigma_z} \\
K(s_2) e^{-i\int_{s_3}^{s_2} ds\omega_0\sigma_z} K(s_3)...K(s_{N-1}) e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}} ds\omega_0\sigma_z} K(s_N) e^{-i\int_0^{s_N} ds\omega_0\sigma_z} + ... \quad (4.33)
\end{aligned}
$$

Un calcul simple nous montre que les termes impaires respectivemet paires sont les élément diagonaux respectevement antidiagonaux de de R

$$
\begin{aligned}
R_{11}(T) = e^{-i\int_0^T ds\omega_0} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} \times \\
e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega_0} u(s_1) e^{+i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega_0} u(s_2) ... e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\omega_0} u(s_{2n}) e^{-i\int_0^{s_{2n}} ds\omega_0} \quad (4.34)
\end{aligned}
$$

et

$$
R_{12}(T) = i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega_0} u(s_1) R_{22}(s_1) \quad (4.35)
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22}(T) &= R_{11}^*(T) \quad (4.36) \\
R_{21}(T) &= -R_{12}^*(T)
\end{aligned}
$$

le propagateur prend la forme suivante

$$
\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}(T) & R_{12}(T) \\ R_{21}(T) & R_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix}, \quad (4.37)
$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(\theta_f + 2n\pi, \varphi_f + 4n\pi,\ \theta_i, \varphi_i; T\right) \\ &= \mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) \end{aligned} \tag{4.38}$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

4.5 La probabilité de transition

Calculons la probabilité de transition entre les deux états propre de σ_z

$$P_{\downarrow\uparrow} = \left|\langle\downarrow|U(T)|\uparrow\rangle\right|^2 \tag{4.39}$$

En introduit les relations de fermetures

$$\int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\left|\theta_f, \varphi_f\right\rangle\left\langle\theta_f, \varphi_f\right| = 1, \qquad \int \frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\left|\theta_i, \varphi_i\right\rangle\left\langle\theta_i, \varphi_i\right| = 1 \tag{4.40}$$

on trouve

$$P_{\downarrow\uparrow} = \left|\int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\left\langle\downarrow\left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f,i;T\right)\left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\uparrow\rangle\right|^2$$

avec

$$\left\langle\uparrow\left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\downarrow\rangle = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}$$

On intègre sur les variables angulaires la probabilité de transition prend la forme suivante

$$P_{\downarrow\uparrow} = \left|R_{12}(T)\right|^2$$

Evaluons maintenant $R_{11}(T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T. Soit

$$R_{12}(p,T) = \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} R_{12}(T) \tag{4.41}$$

où $R_{12}(p,T)$ s'écrit sous la forme

$$R_{12}(p,T) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega_1)^{2n+1} F(0,T) e^{-i\frac{T\Delta}{2}} \tag{4.42}$$

Avec

$$F(0,T) = \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(0,s_1) \tag{4.43}$$

$$F_1(0,s_1) = \int_0^{s_1} e^{i\Delta s_2} ds_2 F_2(0,s_2) \tag{4.44}$$

et on obtient par itération

$$F_{2n}(0,s_{2n}) = \int_0^{s_{2n}} e^{-i\Delta s_{2n+1}} ds_{2n+1} \tag{4.45}$$

La tronsformée de Laplace de $F(0,T)$ est :

$$\widetilde{F}(0,p) = \int_0^{+\infty} e^{-pT} F(0,T) dT = \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} \int_0^T e^{-i\Delta s_1} F_1(0,s_1) ds_1 \tag{4.46}$$

qui peut être réécrite comme

$$\widetilde{F}(0,p) = \int_0^{+\infty} dT e^{-(p+i\Delta)T} \int_0^T e^{i\Delta(T-s_1)} F_1(0,s_1) ds_1 \tag{4.47}$$

En utilisant le théorème de convolution, on obtient

$$\widetilde{F}(0,p) = \frac{1}{p} \widetilde{F}_1(0,p+i\Delta) \tag{4.48}$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1(0,p+i\Delta) &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta)T} F_1(0,T)dT \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta)T} dT \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 F_2(0,s_2) = \frac{1}{p+i\Delta}\widetilde{F}_2(0,p)\end{aligned} \tag{4.49}$$

Effectuons le même calcul pour tous les autres termes , on obtient

$$\widetilde{F}(0,p) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p+i\Delta)}\right]^{n+1} \tag{4.50}$$

Insérons ce résultat dans $R_{12}(p,T)$ et effectuons la somme, on obtient

$$R_{12}(p,T) = \frac{i\omega_1}{p(p+i\Delta)-\omega_1^2} \tag{4.51}$$

Ce résultat est valabable pour $\mid \frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{p(p-i\Delta)} \mid < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour ou cette condition est vérifiée.

Prenons l'inverse de la transformatée de Laplace

$$K\left(\uparrow,\downarrow;T\right) = \int_C dT e^{-pT}\frac{i\omega_1}{p(p+i\Delta)-\omega_1^2} \tag{4.52}$$

Avec $\Delta = \omega - \omega_0$.

En utilisant la continuation analytique, le resultat de l'inversion est

$$K\left(\uparrow,\downarrow;T\right) = \frac{i\omega_1 e^{i(\omega-\Delta/2)T}}{\lambda}\sin\lambda T, \tag{4.53}$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2}$.

La probabilité de transition est alors donnée par

$$P_{-1/2,1/2} = \left|K\left(\uparrow,\downarrow;T\right)\right|^2 = \frac{4\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2}\sin^2\frac{T}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2} \tag{4.54}$$

Cette formule est exactement la formule bien connue de Rabi donnée dans la littérature [14].

4.6 Deuxième cas

$$B(t)=\left(B_1e^{-\lambda t}\sin\omega t,\left(\frac{\omega}{g}-B_0\right)e^{-\lambda t}-\frac{\omega}{g},B_1e^{-\lambda t}\cos\omega t\right) \tag{4.55}$$

Avec : $B_1=2\frac{\omega_1}{g}$ et $B_0=\frac{\omega_0}{g}$, dans ce cas

$$u(t)=\omega_1e^{-\lambda t}\sin\omega t-\frac{i}{2}[(\omega-\omega_0)\,e^{-\lambda t}-\omega],\quad \Omega(t)=\omega_1e^{-\lambda t_n}\cos\omega t \tag{4.56}$$

Le propagateur sera donné comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=&\lim_{N\longrightarrow\infty}\int...\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\\ &\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\{\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})+\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\right.\\ &+i\varepsilon\omega_1e^{-\lambda t_n}\cos\omega t\left[\cos\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})-\sin\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\right]\\ &+i\varepsilon\left(\omega_1e^{-\lambda t}\sin\omega t-\frac{i}{2}[(\omega-\omega_0)\,e^{-\lambda t}-\omega]\right)\cos\frac{\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})+\\ &\left.+i\varepsilon\left(\omega_1e^{-\lambda t}\sin\omega t-\frac{i}{2}[(\omega-\omega_0)\,e^{-\lambda t}-\omega]\right)\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}\exp-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})\right\}\end{aligned} \tag{4.57}$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int...\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}R_1(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix} \tag{4.58}$$

avec la matrice $R_1(t_n)$ est donné par :

$$R_1(t_n) = 1 + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \sin\omega t_n \sigma_x + i\varepsilon\frac{1}{2}\left[(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t_n} - \omega\right]\sigma_y + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n}\cos\omega t_n \sigma_z \tag{4.59}$$

Faisons d'abord une transformation unitaire sur les variables angulaires, afin d'éliminer le terme ωt du champs magnétique dans le propagareur (4.58).

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\omega t_{n-1}}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_n}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin\frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \tag{4.61}$$

Le propagateur en fonction des nouvelles variables angulaires θ' et φ', s'écrit :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \ldots \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta'_n) d\varphi'_n}{2\pi}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_n}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin\frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_1(t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{4.62}$$

avec

$$R_2(t_n) = e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} R_1(t_n) e^{-i\frac{\omega t_{n-1}}{2}\boldsymbol{\sigma}_y}$$

$$= e^{+i\frac{\omega\varepsilon}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \sin\omega t_n e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \sigma_x e^{-i\frac{\omega t_{n-1}}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} +$$

$$+\frac{1}{2} i\varepsilon\left[(\omega - \omega_0) e^{-\lambda t} - \omega\right]\sigma_y + i\varepsilon\omega_1 e^{-\lambda t_n} \cos\omega t_n e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \sigma_z e^{-i\frac{\omega t_{n-1}}{2}\boldsymbol{\sigma}_y}. \tag{4.63}$$

Le deusième terme se transforme comme suit

$$e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y}\sigma_x e^{-i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} = \left(\cos\frac{\omega t_n}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_y \sin\frac{\omega t_n}{2}\right)\sigma_x\left(\cos\frac{\omega t_n}{2} - i\boldsymbol{\sigma}_y \sin\frac{\omega t_n}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\omega t_n & \cos\omega t_n \\ \cos\omega t_n & -\sin\omega t_n \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

et le quatrième se tansforme comme suit

$$e^{+i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y}\sigma_z e^{-i\frac{\omega t_n}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} = \left(\cos\frac{\omega t_n}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_y \sin\frac{\omega t_n}{2}\right)\sigma_z\left(\cos\frac{\omega t_n}{2} - i\boldsymbol{\sigma}_y \sin\frac{\omega t_n}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega t_n & -\sin\omega t_n \\ -\sin\omega t_n & -\cos\omega t_n \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

En conséquence l'expression de $R'(t_n)$ est simplifiée à la forme suivante :

$$R_2(t_n) = 1 + i\varepsilon e^{-\lambda t_n}\left[\omega_1\sigma_z + \frac{1}{2}\left(\omega - \omega_0\right)\sigma_y\right] \tag{4.66}$$

Insérant ce résultat dans l'équation (4.62) le propagateur $K\left(f, i; T\right)$ devient :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int ... \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n^{'})d\varphi_n^{'}}{2\pi}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n^{'}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}}, & \sin\frac{\theta_n^{'}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \end{pmatrix} R_2(t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

avec

$$R'(t_n) = 1 + i\varepsilon e^{-\lambda t_n}\left[\omega_1\sigma_z + \frac{1}{2}\left(\omega - \omega_0\right)\sigma_y\right] \tag{4.68}$$

Utilisant la transformation temporelle suivante :

$$\tau = \varepsilon e^{-\lambda t_n}, \qquad \tau = s_n - s_{n-1}, \quad s_n = \frac{1 - e^{-\lambda t_n}}{\lambda} \tag{4.69}$$

Le propagateur $K(f, i; T)$ devient

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int ... \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n^{'}) d\varphi_n^{'}}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos\frac{\theta_n^{'}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}}, \quad \sin\frac{\theta_n^{'}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \right) R_3(t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

$$R_3(t_n) = 1 + i\tau \left[\omega_1 \sigma_z + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \sigma_y \right] \tag{4.71}$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme suivante

$$R_3(t_n) = 1 + i\tau \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \left[\sigma_y \sin\gamma + \sigma_z \cos\gamma \right] \tag{4.72}$$

avec

$$\cos\gamma = \frac{2\omega_1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{(\omega - \omega_0)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\omega_1^2}} \tag{4.73}$$

A ce stade il est préférable d'introduire une deuxième rotation d'un angle γ dans l'espace de spin afin de pouvoir intégrer sur les variables angulaires

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{'}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}^{''}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{''}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{''}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{''}} \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

$$\left(\cos\frac{\theta_n^{'}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}}, \quad \sin\frac{\theta_n^{'}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \right) = \left(\cos\frac{\theta_n^{''}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}, \quad \sin\frac{\theta_n^{''}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{''}} \right) e^{-i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} \tag{4.75}$$

En insérant cette transformation dans l'expression (4.70), le propagateur $K(f, i; T)$ devient :

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int...\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n^{''})d\varphi_n^{''}}{2\pi}$$

$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\left(\ \cos\frac{\theta_n^{''}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}},\quad \sin\frac{\theta_n^{''}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\ \right)R_4(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}^{''}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{''}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}^{''}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{''}}\end{pmatrix}\tag{4.76}$$

l'expression du matrice $R_4(t_n)$ est simplifiée comme suit :

$$R_4(t_n)=e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\left[1+i\tau\sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega-\omega_0\right)^2+\omega_1^2}\,(\ \sin\gamma\sigma_y+\cos\gamma\sigma_z)\right]e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}$$

$$=1+i\tau\sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega-\omega_0\right)^2+\omega_1^2}e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\ \left(\sin\gamma\sigma_y+\cos\gamma\sigma_z\right)e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\tag{4.77}$$

telque :

$$e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\ \sigma_z e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}=\left(\cos\frac{\gamma}{2}-i\boldsymbol{\sigma}_x\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_z\left(\cos\frac{\gamma}{2}+i\boldsymbol{\sigma}_x\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\gamma & i\sin\gamma\\ -i\sin\gamma & -\cos\gamma\end{pmatrix}\tag{4.78}$$

et

$$e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\ \sigma_y e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}=\left(\cos\frac{\gamma}{2}-i\boldsymbol{\sigma}_x\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_y\left(\cos\frac{\gamma}{2}+i\boldsymbol{\sigma}_x\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\sin\gamma & -i\cos\gamma\\ i\cos\gamma & -\sin\gamma\end{pmatrix}\tag{4.79}$$

donc :

$$e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}\ \left[\sin\gamma\sigma_y+\cos\gamma\sigma_z\right]e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\sigma_z \tag{4.80}$$

d'où

$$R_4(t_n)=1+\frac{i\tau}{2}\sqrt{\left(\omega-\omega_0\right)^2+4\omega_1^2}\sigma_z=e^{\frac{i\tau}{2}\sqrt{\left(\omega-\omega_0\right)^2+4\omega_1^2}\sigma_z}$$

Alors le propagateur $K\left(f,i;T\right)$ prend la forme diagonale suivante :

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\ldots\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n'')d\varphi_n''}{2\pi}$$

$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n''}, & \sin\frac{\theta_n''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n''}\end{pmatrix}R_4(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}''}\end{pmatrix} \tag{4.81}$$

On intègre sur tous les angles (φ_n,θ_n) utilisant.

$$\int_0^{\pi}d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}=\int_0^{\pi}d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=-1\quad\text{et}\quad\int_0^{2\pi}d\varphi e^{+im\varphi}=2\pi\delta_{m,0}. \tag{4.82}$$

On trouve

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{pmatrix}\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\underset{\leftarrow}{n=1}}^{N+1}R_4(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix}. \tag{4.83}$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrices figurant dans (4.83) on obtient

$$\mathbf{K}(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, & \sin\frac{\theta_f''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''}\end{pmatrix}e^{i\frac{S}{2}\sqrt{\left(\omega-\omega_0\right)^2+4\omega_1^2}\sigma_z}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''}\\ \sin\frac{\theta_i''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i''}\end{pmatrix}. \tag{4.84}$$

Retournons aux anciennes variables angulaire,

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i''} \\ \sin\frac{\theta_i''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i''} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} e^{+i\frac{\omega T}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f''}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_f''}, & \sin\frac{\theta_f''}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f''} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\omega T}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} e^{+i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

nous obtenons que le propagateur prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} M(T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix} \tag{4.87}$$

la matrice $M(T)$ et donnée par l'expression

$$M(T) = e^{-i\frac{\omega T}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} e^{+i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} e^{i\frac{S}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+4\omega_1^2}\sigma_z} e^{-i\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}_x} e^{+i\frac{\omega T}{2}\boldsymbol{\sigma}_y} \tag{4.88}$$

Les angles θ et φ sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0, 2\pi]$ et $[0, 4\pi]$ respectivement. Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(\theta_f + 2n\pi, \varphi_f + 4n\pi,\ \theta_i, \varphi_i; T\right) \\ &= \mathbf{K}(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T), \end{aligned} \tag{4.89}$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire.

4.7 La probabilité de transition

L'amplitude de transition de l'état initiale $|m_i\rangle = |\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)$ à l'état finale $|m_f\rangle = |\downarrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i\,|\downarrow\rangle)$ est liée à $K(f, i; T)$ par

$$P_{\downarrow\uparrow} = \left| K\left(m_f, m_i; T\right)\right|^2 \tag{4.90}$$

avec

$$K\left(m_f, m_i; T\right) =_y \left\langle \downarrow \right| U(T) \left| \uparrow \right\rangle_y \tag{4.91}$$

En introduit les relations de fermutures

$$\int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi} \left|\theta_f, \varphi_f\right\rangle \left\langle\theta_f, \varphi_f\right| = 1, \qquad \int \frac{d\cos(\theta i)d\varphi_i}{2\pi} \left|\theta_i, \varphi_i\right\rangle \left\langle\theta_i, \varphi_i\right| = 1 \tag{4.92}$$

on trouve

$$K\left(m_f, m_i; T\right) = \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi} \left\langle m_f \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right) \left\langle\theta_i, \varphi_i\right| \left. m_i\right\rangle$$

$$= \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\frac{1}{2} \left\langle\left[\left\langle\uparrow + i\left|\downarrow\right\rangle\right] \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right) \left\langle\theta_i, \varphi_i\right| \left[\left|\uparrow\right\rangle + i\left|\downarrow\right\rangle\right]\right\rangle \tag{4.93}$$

qui s'écrit sous la forme

$$K\left(m_f, m_i; T\right) = \frac{1}{2}\int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}$$

$$\times \left\{ \left\langle\uparrow \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right) \left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\left.\uparrow\right\rangle + i\left\langle\uparrow \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right)\ \left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\left.\downarrow\right\rangle + \right.$$

$$\left. i\left\langle\downarrow \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right) \left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\left.\uparrow\right\rangle - \left\langle\downarrow \left|\theta_f, \varphi_f\right.\right\rangle K\left(f, i; T\right)\ \left\langle\theta_i, \varphi_i\right|\left.\downarrow\right\rangle \right\} \tag{4.94}$$

Avec

$$\begin{aligned}\langle\uparrow|\theta_f,\varphi_f\rangle &= \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \langle\theta_i,\varphi_i|\downarrow\rangle = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}. &(4.95)\\ \langle\downarrow|\theta_f,\varphi_f\rangle &= \sin\left(\frac{\theta_f}{2}\right)e^{\frac{i}{2}\varphi_f} \qquad \text{et} \qquad \langle\theta_i,\varphi_i|\uparrow\rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)e^{\frac{i}{2}\varphi_i} &(4.96)\end{aligned}$$

(4.94) devient :

$$K\left(m_f,m_i;T\right) = K_{11}(T)+K_{12}(T)+K_{21}(T)+K_{22}(T) \tag{4.97}$$

Avec

$$K_{11}(T) = \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\frac{1}{2}\langle\uparrow|\theta_f,\varphi_f\rangle K\left(f,i;T\right)\langle\theta_i,\varphi_i|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}M_{11}(T) \tag{4.98}$$

$$K_{12}(T) = \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\frac{1}{2}\langle\uparrow|\theta_f,\varphi_f\rangle K\left(f,i;T\right)\ \langle\theta_i,\varphi_i|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}M_{12}(T) \tag{4.99}$$

$$K_{21}(T) = \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\frac{1}{2}\langle\downarrow|\theta_f,\varphi_f\rangle K\left(f,i;T\right)\langle\theta_i,\varphi_i|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}M_{21}(T) \tag{4.100}$$

$$K_{22}(T) = \int \frac{d\cos(\theta_f)d\varphi_f}{2\pi}\frac{d\cos(\theta_i)d\varphi_i}{2\pi}\frac{1}{2}\langle\downarrow|\theta_f,\varphi_f\rangle K\left(f,i;T\right)\ \langle\theta_i,\varphi_i|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}M_{22}(T) \tag{4.101}$$

d'où

$$K\left(m_f, m_i; T\right) = K\left(\downarrow, \uparrow; T\right) = \frac{1}{2}\left[M_{11}(T) - M_{22}\left(T\right) + i\left(M_{12}\left(T\right) + M_{21}\left(T\right)\right)\right] \tag{4.102}$$

En substituant les éléments de la matrice $M(T)$ dans l'expression (4.102) la probabilité de transition dans ce cas s'ecrit :

$$P_{\downarrow\uparrow} = \frac{1}{4}\left|\left(M_{11}(T) - M_{22}(T)\right) + i\left(M_{12}(T) + M_{21}(T)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|2i\cos\gamma\sin\frac{\Omega S}{2}e^{\frac{i}{2}\omega T}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 4\cos^2\gamma\sin^2\frac{\Omega S}{2} \tag{4.103}$$

$$\begin{aligned} P_{\downarrow\uparrow} &= \frac{4\omega_1^2}{4\omega_1^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2}\sin^2\left[\frac{S(T)}{2}\sqrt{4\omega_1^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2}\right] \\ &= \frac{4\omega_1^2}{4\omega_1^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2}\sin^2\left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{2\lambda}\sqrt{4\omega_1^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{4.104}$$

Cette formule est exactement la formule bien connue de Rabi donnée dans la littérature [68].

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité via le formalisme des intégrales de chemins le problème d'un atome très lourd de spin $\frac{1}{2}$ interagissant avec un champ magnétique dépendant du temps. La forme du champ magnétique étudié appartienent à une classe du champ soluble exactement, dite classe de Rabi. Au cours du traitement, en utiliasnt le model angulaire du spin . Par conséquent, nous avons introduit des états cohérents angulaires relatif à ce modèle. Le calcul explicite du propagateur a nécessité l'introduction des rotations dans l'espace du spin suivi de quelques transformations temporelles. Ainsi, la probabilité de transition est donnée explicitement dans ce cas. Les résultats concordent exactement avec ceux de la littérature [68] .

Chapitre 5

Les oscillations de Rabi pour un système atomique à deux niveaux avec un hamiltonien pseudo-hermitique

5.1 Introduction

Dans la formulation de Schrôdinger pour les systemens quantique ayant un hamiltoinan non-hermitique un operatreur metrique définie positive η doit être introduit afin d'assurer l'interprétation probabiliste $[75-79]$. De plus cet opérateur donne une théorie hermitienne équivalent au moyen d'une transformation similarie . Toutefois, si la mécanique quantique est formulé en termes des intégrles du chemins, l'opérateur métrique ne fait qu'une apparition implicite et les fonctions de Green sont calculé comme intégrales fonctionnelles d'une manière habituel. Cette approche a été principalement initié par $[80]$. Dans cet chapitre, nous utilisons les intégrales du chemins habituel en representation des états cohérent angulaire pour résoudre explicitement le problème d'un atome a deux niveaux soumise a un champ éléctromgnétique.

Dans l'image d'interaction, et dans l'approximation d'onde tournante, l'évolution du système est décrit par l'équation [71].

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

où

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma_a & V \\ V^* & -i\gamma_b \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

Et V est l'élément de matrice d'interaction entre l'atome et le rayonnement. L'amortissement des deux niveaux d'atomes est décrit par les constantes de désintégration phénoménologique γ_a et γ_b.

Dans ce chapitre, nous allons examiner la solution de ce problème par le formalisme des intégrales du chemins dans la représentation des états cohérents de spin . A cet effet, une autre forme de l'hamiltonien approprié pour nos calculs est :

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma & V \\ V^* & i\gamma \end{pmatrix} = -i\gamma\boldsymbol{\sigma}_z + V\boldsymbol{\sigma}_+ + V^*\boldsymbol{\sigma}_- \tag{5.3}$$

avec $\gamma = \frac{1}{2}\left(\gamma_a - \gamma_b\right)$ .et $\boldsymbol{\sigma}_z$, $\boldsymbol{\sigma}_+$, $\boldsymbol{\sigma}_-$ sont les matrices de Pauli et le propagateur lié à notre problème prend la forme de Feynman

$$K = \int Dpath \exp(iAction), \tag{5.4}$$

ce qui signifie dans notre cas :

$$K\left(f, i; T\right) = \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \exp\left\{\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[\log < \Omega_n \left|\Omega_{n-1}\right\rangle - i\varepsilon\frac{\left\langle\Omega_n\right| H \left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{< \Omega_n \left|\Omega_{n-1}\right\rangle}\right]\right\}. \tag{5.5}$$

5.2 Calcul le propagateur

Nous notons que (5.5) est écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi} \\ &\times\prod_{n=1}^{N+1}\left(\cos\tfrac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n},\;\;\sin\tfrac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\right)R(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec

$$R(t_n) = \left[e^{-\varepsilon\gamma\boldsymbol{\sigma}_z} + i\varepsilon K(t_n)\right], \tag{5.7}$$

où

$$K(t_n) = \begin{pmatrix} 0 & -V) \\ -V^* & 0\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Nous intégrons sur toutes les variables angulaires θ_n et φ_n

Alors (5.6) devient

$$K(f,i;T) = \left(\cos\tfrac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f},\;\;\sin\tfrac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\right)\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\substack{n=1\\ \leftarrow}}^{N+1}R(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Nous développons le produit (de matrice 2×2) selon lesquels apparaître dans l'expression (5.9), nous obtenons la série suivante :

$$R(T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{\substack{n=1\\ \leftarrow}}^{N+1}\left[(-1)^n R(t_n)\right]$$

$$= \lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^{N+1}\left[e^{-\int_0^T ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V} + i\int_0^T ds_1 e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_1)e^{-\int_0^{s_1}ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}\right.$$

$$+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2}ds\omega\boldsymbol{\sigma}_V}+\cdots+$$

$$+i^{N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_N} ds_{N+1}e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_1)e^{-\int_{s_2}^{s_1} ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}$$

$$\times K(s_2)e^{-\int_{s_2}^{s_3} ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_3)\times\cdots\times K(s_N)e^{-\int_{s_{N+1}}^{s_N} ds\gamma\boldsymbol{\sigma}_V}K(s_{N+1})+\cdots\Big] \quad (5.10)$$

Ces éléments de matrice sont respectivement les suivants :

$$\mathcal{R}_{11}(T)=e^{-\int_0^T \gamma ds}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-|V|^2\right)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$

$$\left.\times e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{-\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\right]=\mathcal{R}_{22}^*(T) \quad (5.11)$$

$$\mathcal{R}_{12}\left(T\right)=-i\int_0^T ds_1e^{-\frac{1}{2}\int_{s_1}^T\gamma dt}V\mathcal{R}_{11}^*\left(s_1\right)=-\mathcal{R}_{21}^*\left(T\right) \quad (5.12)$$

Par conséquent l'équation (5.9) peut être réécrite comme une série

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=$$

$$\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left[e^{-\int_0^T ds\gamma}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-|V|^2\right)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$

$$\left.\times\ e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{-\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\right]$$

$$+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left[e^{+\int_0^T ds\gamma}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-|V|\right)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\right.$$

$$\left.\times e^{\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{-\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{-\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{+\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\right]$$

$$-\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\left|V\right|)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1}\right.$$

$$\left.\times e^{-\int_{s_1}^T\gamma ds}e^{+\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_0^{s_{2n+1}}\gamma ds}\right]$$

$$-\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\left|V\right|)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}} ds_{2n+1}\right.$$

$$\left.\times e^{\int_{s_1}^T\gamma ds}e^{-\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{-\int_0^{s_{2n+1}}\gamma ds}\right] \tag{5.13}$$

qui peut être réarrangé pour être exprimé sous la forme d'une somme de quatre termes

$$K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=K_{11}\left(f,i;T\right)+K_{22}\left(f,i;T\right)+K_{12}\left(f,i;T\right)+K_{21}\left(f,i;T\right) \tag{5.14}$$

Le premier terme s'écrite comme :

$$K_{11}\left(f,i;T\right)=\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}$$

$$\times\exp\left(-\gamma T\right)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left|V\right|^2\right]^n\int_0^T ds_1e^{2\gamma s_1}\int_0^{s_1}ds_2e^{-2\gamma s_2}\cdots\int_0^{s_{2n-1}}e^{-2\gamma s_{2n}}ds_n\right] \tag{5.15}$$

Cette dernière expression peut être écrite sous une forme plus commode. En effet nous mettons d'abord

$$F(0,T)=\exp\left(-\gamma T\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left|V\right|^2\right]^n\int_0^T ds_1e^{2\gamma s_1}\int_0^{s_1}ds_2e^{-2\gamma s_2}\cdots\int_0^{s_{2n-1}}e^{-2\gamma s_{2n}}ds_n\right] \tag{5.16}$$

et nous passons à sa transformation de Laplace et d'appliquer le théorème de convolution on trouve

$$\widetilde{F}(0,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pT}F(0,T)dT=\frac{p-2\gamma}{(p)\left(p-2\gamma\right)+\left|V\right|^2}-\frac{1}{p}. \tag{5.17}$$

Prenant la transformée de Laplace inverse de (5.17) , nous trouvons que sous la condition $\left(\left|V\right|^2>\gamma^2\right)$.

$$K_{11}\left(f,i;T\right)=\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET-\frac{\gamma}{E}\sin ET\right). \tag{5.18}$$

avec

$$E = \sqrt{|V|^2 - \gamma^2}. \tag{5.19}$$

Par la meme mèthode on trouve que sous la condition $|V|^2 < \gamma^2$ la transformation de l'inverse de Laplace (5.18) donné

$$K_{11}(f,i;T) = \cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cosh\sqrt{\gamma^2-|V|^2}T - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-|V|^2}}\sinh\sqrt{\gamma^2-|V|^2}T\right) \tag{5.20}$$

et pour le cas $|V|^2 = \gamma^2$ la transformation de l'inverse de Laplace (5.18) est donné par :

$$K_{11}(f,i;T) = \cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}(1-\gamma T) \tag{5.21}$$

Nous traitont notre système sous la condition $|V|^2 > \gamma^2$.

Un calcul semblable nous permet d'obtenir les autres éléments

$$K_{12}(f,i;T) = -i\frac{V\sin ET}{E}\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)} \tag{5.22}$$

$$K_{21}(f,i;T) = -i\frac{V^*\sin ET}{E}\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)} \tag{5.23}$$

$$K_{22}(f,i;T) = \sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET - i\frac{\gamma}{E}\sin ET\right) \tag{5.24}$$

Le propagateur relativement à notre cas particulier est finalement :

$$K(\Omega_f,\Omega_i;T) =$$

$$\left\{\left[\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET - \frac{\gamma}{E}\sin ET\right)\right.\right.$$

$$+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET+\frac{\gamma}{E}\sin ET\right)$$

$$-i\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\frac{V\sin ET}{E}$$

$$-i\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\frac{V^*\sin ET}{E}\Bigg]\Bigg\}. \tag{5.25}$$

Les angles (θ,φ) sont autorisés à varier que dans les domaines limités $[0,2\pi]$ et $[0,4\pi]$. Notre propagateur est la suivant :

$$\begin{aligned} K\left(f,i;T\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(\theta_f+2n\pi,\varphi_f+4n\pi;\ \theta_i,\varphi_i;T\right) \\ &= K\left(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T\right). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Notre problème est alors résolu. Nous pouvons calculer la fonction d'onde et l'énergie.

5.3 Les fonctions d'onde et les énergies

Pour cela, passons à la représentation habituelle pour le spin avec les projections sur l'axe oz étant m_f et m_i.

$$K_s\left(m_f,m_i;T\right)=\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i$$

$$< m_f\left|\Omega_f\right\rangle K\left(\Omega_f;\Omega_i;T\right)\left\langle\Omega_i\right| m_i > . \tag{5.27}$$

où

$$< m_f\left|\theta_f,\varphi_f\right\rangle=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_f)!\,(s-m_f)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_f}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_f}e^{-(im_f\varphi_f)}, \tag{5.28}$$

et

$$\left\langle\theta_i,\varphi_i\right| m_i >=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!\,(s-m_i)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_i}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_i}e^{+i(m_i)\varphi_i}, \tag{5.29}$$

Si nous fixons l'état initial de l'atome comme $|m_i\rangle = |\downarrow\rangle$; et l'état final $|m_f\rangle = |\uparrow\rangle$; nous obtenons :

$$<\uparrow|\Omega_f\rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{et} \qquad \langle\Omega_i|\uparrow>= \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\ , \tag{5.30}$$

En substituant et intégrer sur les coordonnées polaires $\left(\theta_f, \varphi_f\right)$ et (θ_i, φ_i) . Ainsi

$$K_{\uparrow\uparrow} = \cos ET - \frac{\gamma}{E}\sin ET \tag{5.31}$$

Les éléments restants du propagateur obtenus avec les calculs analogues

$$K_{\uparrow\downarrow} = -i\frac{V\sin ET}{E}, \tag{5.32}$$

$$K_{\downarrow\uparrow} = -i\frac{V^*\sin ET}{E}, \tag{5.33}$$

$$K_{\downarrow\downarrow} = \cos ET + \frac{\gamma}{E}\sin ET \tag{5.34}$$

L'opérateur d'évolution s'écrire sous la forme suivante :

$$U(T) = e^{-iHT} = \begin{pmatrix} \cos ET - \frac{\gamma}{E}\sin ET & -i\frac{V\sin ET}{E} \\ -i\frac{V^*\sin ET}{E} & \cos ET + \frac{\gamma}{E}\sin ET \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

donc on a :

$$U = e^{-iTE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\frac{i\gamma}{E}\right) & \frac{1}{2}\frac{V}{E} \\ \frac{1}{2}\frac{V^*}{E} & \frac{1}{2}\left(1+\frac{i\gamma}{E}\right) \end{pmatrix} + e^{+iTE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{i\gamma}{E}\right) & -\frac{1}{2}\frac{V}{E} \\ -\frac{1}{2}\frac{V^*}{E} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{i\gamma}{E}\right) \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
U &= e^{-iTE}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\frac{i\gamma}{V^{*}}+\frac{E}{2V^{*}} \end{pmatrix} \\
&\quad +e^{+iTE}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} -E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\frac{i\gamma}{V^{*}}+\frac{E}{2V^{*}} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

Par une comparaison avec la décomposition spectrale habituelle (CPT)

$$
U = e^{-iHT} = e^{-iTE}\left|\psi_1\right\rangle\left\langle\Gamma_1\right| + e^{+iTE}\left|\psi_2\right\rangle\left\langle\Gamma_2\right|
\tag{5.38}
$$

la base bi-orthonormale des états peut être déduite. Ils deviennent égaux à

$$
\left|\psi_1\right\rangle = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}. \qquad \left|\Gamma_1\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i\gamma}{2V}+\frac{E}{2V} \end{pmatrix}
\tag{5.39}
$$

$$
\left|\psi_2\right\rangle = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} -E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}. \qquad \left|\Gamma_2\right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i\gamma}{2V}+\frac{E}{2V} \end{pmatrix}
\tag{5.40}
$$

et la metrique est donné par la définition

$$
\left|\Gamma_1\right\rangle = \eta_+\left|\psi_1\right\rangle\ , \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i\gamma}{2V}+\frac{E}{2V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^{*} & b \end{pmatrix}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}
\tag{5.41}
$$

$$
\left|\Gamma_2\right\rangle = \eta_+\left|\psi_2\right\rangle\ , \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i\gamma}{2V}+\frac{E}{2V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c^{*} & b \end{pmatrix}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} -E-i\gamma \\ V^{*} \end{pmatrix}
\tag{5.42}
$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a\left(E-i\gamma\right)+cV^{*}=\frac{E}{2} \\ c^{*}\left(E-i\gamma\right)+bV^{*}=-\frac{i\gamma E}{2V}+\frac{E^{2}}{2V} \\ a\left(-E-i\gamma\right)+cV^{*}=-\frac{E}{2} \\ c^{*}\left(-E-i\gamma\right)+bV^{*}=\frac{i\gamma E}{2V}+\frac{E^{2}}{2V} \end{cases} \tag{5.43}$$

D'ou

$$c^{*}=-\frac{i\gamma}{2V}. \qquad a=\frac{1}{2}=b \tag{5.44}$$

et la metriquee est donné par :

$$\eta_{+}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & +\frac{i\gamma}{V^{*}} \\ -\frac{i\gamma}{V} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.45}$$

Ceci est la même métrique du hamiltonien pseudo- hermitique et sa base bi- orthonormale d'états obtenu par la solution de l'équation de Schrodinger [71]. Les relations entre le présent pseudo- hermitienne hamiltonien et certaines symétries (connu sous le nom P, PT et CPT - symétries) peuvent ainsi être obtenus comme a été fait par [71] .

5.4 Conclusion

En utilisant le formalisme des intégrales du chemins dans la representation des états cohérents de spin, le propagateur a été donné sous forme des séries, que nous avons pu sommer en utilisant la transformée de Laplace. La métrique du hamiltonien et sa base bi-orthonormale d'états sont déduites, le calcule coincide avec [71].

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes interessé à l'étude de l'interaction du spin ou en général au systèmes à deux niveaux avec un champ extérieur. Les matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ représentants les deux niveaux de l'atome ont été remplacées par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté suivant les angels polaires (θ, φ) via la représentation géometrique du spin et le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs aux spin, nous avont pu élaboré un formalisme intégrale de chemins en représentation états cohérents du spin.

Dans le chapitre2 nous avons étudié dans le formalisme intégrale du chemins en represetation des états cohérents de spin le problème d'une particule neutre à un moment magnétique avec une onde éléctromagnétique de polarisation circulaire. L'utilisation des rotations dans l'espace des états cohérents angulaires ont été nécessaires pour simplifier l'étude.

Dans le chapitre3 nous avons étudié l'action d'un champs magéntique statique sur une particule neutre de spin 1/2. L'utilisation de l'espace des phases a simplifié énormément le calcul et grace a certaines rotations dans l'espace des états cohérents angulaires. Le spectre et les fonctions d'onde correspondentes on été trouvées exactement.

Dans le chapitre4 nous avons étudié le spin en interaction avec une classe de champs magéntiques dependant du temps, dite classe de Rabi pour l'obtention, des probabilités de transition. L'utilisation des rotations dans l'espace des états cohérents angulaires et des transformtions temporelles ont été nécessaires pour simplifier l'étude, dans chacun des cas. L'amplitude de transition a été déduite pour chacun des cas.

L'extension du formalisme au systeme d'ont l'hamiltonian et pseudo-hermitique fait l'objet du chapitre5 .

L'étude de ces quatre cas simples a demontré encore une fois la puissance et l'élégance par lesquelles la technique de l'intégrale de chemins traite un systéme tel un systéme à deux niveaux. Les fonctions d'onde, les spectre des énergies ainsi que la metrique du systeme ont pu être alors extraits des propagateurs. Il a été trouvé qu'ils sont exactement les mêmes que ceux trouvés en résolvant l'équation de Schrödinger.

En conclusion nous pouvons affirmer qu'à travèrs cette étude, malgré quelques difficultés, que l'intégrale de chemins put être un outil de travail trés puissant et élégant une fois maitrisé et par lequel on pourrait franchir les domaines de la physique les plus ardus.

Bibliographie

[1] P.M.A. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics. (Oxford Clarendon Press, 1958).

[2] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path integrals, (McGraw-Hill, New York 1965).

[3] Duru, I.H., Kleinert, H. : Solution of the Path Integral for the H-Atom. Phys. Left. B 84 (1979) 185-188

[4] Duru, I.H., Kleinert, H. : Quantum Mechanics of H-Atoms from Path Integrals. Fortschr. Phys. 30 (1982) 401-435.

[5] Knstaanheimo, P., Stiefel, E. : Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization. J. Rein. Angew. Math. 218 (1965) 204-219.

[6] Grosche C., Steiner, F. : Path Integrals on Curved Manifolds. Zeitschr. Phys. C 36 (1987) 699-714.

[7] Grosche, C., Steiner, F. : How to Solve Path Integrals in Quantum Mechanics. J. Math. Phys. 36 (1995) 2354-2385.

[8] Inomata, A. : Exact Path-Integration for the Two Dimensional Coulomb Prob- lem. Phys. Lett. A 87 (1982) 387-390

[9] Inomata, A. : Remarks on the Experiment of Winding Number Dependence of the Aharonov-Bohm Effect. Phys. Left. A 95 (1983) 176-178

[10] Duru, I.H., Kleinert, H. : Quantum Mechanics of H-Atoms from Path Integrals. Fortschr. Phys. 30 (1982) 401-435.

[11] Steiner, F. : Space-Time Transformations in Radial Path Integrals. Phys. Lett. A 106 (1984) 356-362

[12] Steiner, F. : Path Integrals in Polar Coordinates from eV to GeV. In Path Integrals from me V to Me V, Biele[eld, 1985. Edited by M. C. GutzwiUer et al. World Scientific, Singapore, 1986, pp. 335-359

[13] Steiner, F. : Exact Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom. Phys. Lett. A 106 (1984) 363-367

[14] Carpio-Bemido, M.V., Bernido, C.C., Inomata, A. : Exact Path Integral Treat- ment of Two Classes of Axially Symmetric Potentials. In Path Integrals from meV to MeV, Bangkok, 1989. Edited by V. Sa-yakanit et al. World Scientific, Singapore, 1989, pp. 442-459

[15] Carpio-Bernido, M.V., Inomata, A. : Path Integral Treatment of the Hartmann Potential. In Path Integrals from meV to MeV, Biele]eld, 1985. Edited by M. C. Gutzwiller et al. World Scientific, Singapore, 1986, pp. 261-270

[16] Cai, J.M., Inomata, A. : Path Integral Treatment of an Anisotropic Non- quadratic Potential. Phys. Lett. A 141 (1989) 315-320

[17] Castrigiano, D.P.L., Stärk, F. : New Aspects of the Path Integrational Treat- ment of the Coulomb Potential. J. Math. Phys. 30 (1989) 2785-2788.

[18] Chetouani, L., Guechi, L., Hammann, T.F. : Exact Path Integral for the Ring Potential. Phys. Lett. A 125 (1987) 277-281.

[19] Chetouani, L., Guechi, L., Hammann, T.F. : Path Integral of a Particle Moving Inside a Sector. Nuovo Cimento B 101 (1988) 547-556.

[20] Chetouani, L., Guechi, L., Hammann, T.F. : Exact Path Integral Solution of the Coulomb Plus Aharonov-Bohm Potential. Y. Math. Phys. 30 (1989) 655- 658

[21] Chetouani, L., Hammann, T.F. : Coulomb Green's Function, in a n-Dimensional Euclidean Space. Math. Phys. 27 (1986) 2944-2948.

[22] Chetouani, L., Hammann, T.F. : Treatment of the Hydrogen Atom in an Electric Field by the Path-Integral Formalism. Phys. Rev. A 34 (1986) 4737-4742.

[23] Chetouani, L., Hammann, T.F. : Traitement exact des systtme Coulombiens, dans le formalisme des integrales de Feynman, en coordonnees parabolique (in French). Nuovo Cimento B 98 (1987) 1-24.

[24] Fischer, W., Leschke, H., Miiller, P. : Changing Dimension and Time : Two Well-Founded and Practical Techniques for Path Integration in Quantum Physics. J. Phys. A : Math. Gen. 25 (1992) 3835-3853.

[25] Grosche, C. : Coulomb Potentials by Path-Integration. Fortschr. Phys. 40 (1992) 695-737.

[26] Grosche, C. : Path Integral Solution of a Non-Isotropic Coulomb-Like Poten- tial. Phys. Lett. A 165 (1992) 185-190.

[27] Grosche, C. : Path Integral Solution of Two Potentials Related to the SO(2, 1) Dynamical Algebra. J. Phys. A : Math. Gen. 26 (1993) L279-L28

[28] Grosche C., Steiner, F. : Path Integrals on Curved Manifolds. Zeitschr. Phys. C 36 (1987) 699-714.

[29] Grosche C., Steiner, F. : The Path Integral on the Poincar6 Upper Half Plane and for Liouville Quantum Mechanics. Phys. Lett. A 123 (1987) 319-328.

[30] Grosche C., Steiner, F. : The Path Integral on the Pseudosphere. Ann. Phys. (N.]i.) 182 (1988) 120-156.

[31] Grosche, C., Steiner, F. : How to Solve Path Integrals in Quantum Mechanics. J. Math. Phys. 36 (1995) 2354-2385.

[32] Ho, R., Inomata, A. : Exact Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom. Phys. Rev. Left. 48 (1982) 231-234

[33] Inomata, A. : Alternative Exact-Path-Integral-Treatment of the Hydrogen Atom. Phys. Lett. A 101 (1984) 253-257.

[34] Inomata, A., Kayed, M.A. : Exact Path-Integral Solution of the Dirac-Coulomb Problem. Phys. Rev. Left. 53 (1984) 107-110.

[35] Junker, G. : Remarks on the Local Time Rescaling in Path Integration. J. Phys.A : Math. Gen. 23 (1990) L881-L884

[36] Kleinert. H. : How to do the Time Sliced Path Integral for the H Atom. Phys. Lett. A 120 (1987) 361-366.

[37] Kubo, R. : Remarks on the Time Transformation of Path-Integral Measures. Prog. Theor. Phys. 77 (1987) 201-205

[38] Lawande, S.V., Bhagwat, K.V. : Derivation of Exact Propagators by Summa- tion of Perturbations Series. In Path Integrals from me V to Me V, Bangkok, 1989. Edited by V. Sa-yakanit et al. World Scientific, Singapore, 1989, pp. 309- 329.

[39] Pak, N.K., Sokmen, I. : General New-Time Formalism in the Path Integral. Phys. Rev. A 30 (1984) 1629-1635.

[40] Sokmen, I. : Exact Path-Integral Solution of the Ring-Shaped Potential. Phys. Lett. A 115 (1986) 249-252.

[41] Sokmen, I. : Exact Path-Integral Solution for a Charged Particle in a Coulomb Plus Aharonov-Bohm Potential.Phys. Lett. A 132 (1988) 65-68.

[42] Young, A., DeWitt-Morette, C. : Time Substitution in Stochastic Processes as a Tool in Path Integration. Ann. Phys. (N. Y.) 169 (1986) 140-116. 944

[43] D. McLaughlin and L.S. Schulman, Path integrals in curved spaces J. Math. Phys. 12 (1971) 2520. New York.

[44] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, (Springer-Verlag Berlin 1998).

[45] I.I.Rabi, Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field Phys.Rev.**51**, (1937) 652.

[46] J. Schwinger, Quantum Theory of angular Momentum,edited by L.Biedenharn and H.von Dam (Academic Press, New York, 1965).

[47] Klauder, J.R., Skagerstam, B.S. : Coherent States Application in Physics and Mathematical Physics. World Scientific, Singapore (1985)

[48] J. Klauder, The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers , Ann. Phys. (NY)11, 123 (1960).

[49] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, : Coherent States of Fermi Operators and the Path Integral, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).

[50] J. R. Klauder,Path integrals and stationary-phase approximations, Phys. Rev. D 19, 2349 (1979).

[51] A. Alscher, H. Grabert, Semiclassical dynamics of a spin-$\frac{1}{2}$ in an arbitrary magnetic field, J. Phys. A. 32, 4907 (1999).

[52] Alscher, A., Grabert, Semiclassical dynamics of the Jaynes-Cummings mode, H. : Eur. Phys. J. D 14, 127 (2001)

[53] T. Boudjedaa, A..Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann, Path integral for spinning particle in magnetic field via bosonic coherent states, J. Math.Phys.36,1602 (1995).

[54] Boudjedaa, T., Bounames, A., Nouicer, Kh., Chetouani, L., Hammann, T.F. :, Path integral for the generalized Jaynes-Cummings model Phys. Scr. 54, 225 (1996)

[55] Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L. : Exact path Integral for neutral spinning particle in interaction with helical magnetic field, Phys. Scr. 64, 15 (2001)

[56] Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L. : Path integral for a neutral spinning particle in interaction with a rotating magnetic field and a scalar potential, Czechoslov. J. Phys. 51, 865 (2001)

[57] Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L. :A neutral spinning particle in interaction with a magnetic field and Poschl–Teller potential, Eur. Phys. J. C 22, 585 (2001)

[58] Nouicer, Kh., Chetouani, L. :Path integral approach to the supersymmetric generalized Jaynes–Cummings model Phys. Lett. A 281, 218 (2001)

[59] M. Aouachria and L. Chetouani, Rabi oscillations in gravitational fields : Exact solution via path integral, Eur. Phys. J. C 25, 333 (2002).

[60] M. Aouachria, L. Chetouani, Treatment of a damped two-level atom in an electromagnetic wave by the path integral formalism, Chinese. J. Phys. 40, 496 (2002)

[61] M. Aouachria, L. Chetouani, Pancharatnam phase for the generalized Jaynes-Cummings model with a nonlinear Kerr cavity, Can. J. Phys. 87, 389 (2009).

[62] M. Aouachria, J. Korean Phys. Soc. 58, 689 (2011)

[63] M. Aouachria, Spin coherent state path integral for a two-level atom in an electromagnetic wave of circular polarization, Chin. J. Phys. 49, 689-698 (2011).

[64] M. Aouachria. Exact spin coherent state path integral for a two-level atom in gravitational fields , Can. J. Phys., 89, 1141-1148 (2011).

[65] M. Aouachria and R. Rekik, Exact spin coherent state path integral for a neutral spinning particle interacting with a rotating magnetic field and a scalar potential, AIP Conf. Proc. 1444 265-269 (2013).

[66] BOUDEBZA LYDIA SUPER-INTEGRABILITE SUR UNE HYPERBOLOÏDE A DEUX DIMENSIONS MEMOIRE de magister 2007.

[67] L. Qiong-Gui, Exact solutions for neutral particles in the field of a circularly polarized plane electromagnetic wave, Phys. Lett. A 342, 67 (2005)

[68] M. J. Tahmasebi and Y. Soboti Mod. phys.Let B 20, 1255 (1992).

[69] Rima Rekik, Farida Halimi, and Mekki Aouachria, Rabi Oscillations in a Two-Level Atomic System with a Pseudo-Hermitian Hamiltonian : A Path Integral Approach. Chin. J. Phys. 53, NO. 3, pp 60001 2015 .

[70] Y. Ben-Aryeh, A. Mann, and I. Yaakov, Rabi Oscillations in a Two-Level Atomic System with a Pseudo-Hermitian Hamiltonian, J. Phys. A 37, 12059 (2004).

[71] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, Naturwissenschaften 14 (1926) 664-666.

[72] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986),

[73] A. Inomata, H. Kuratsuji, C.C. Gerry Path Integrals Mathodes and their Applications (Wor Scientic, Singapore, 1992).

[74] MCalvo S.Codriansky, J.Math.Phys. 24,553(1983).

[75] Mostafazadeh, A. : Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. 43, 205 (2002)

[76] Mostafazadeh, A. : Pseudo-Hermiticity versus PT-symmetry : II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum J. Math. Phys. 43, 2814 (2002)

[77] Mostafazadeh, A. :Pseudo-hermiticity versus pt-symmetry iii : Equivalence of pseudo-her miticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. 43, 3944 (2002)

[78] Mostafazadeh, A. :Pseudo-Hermiticity and generalized PT-and CPT-symmetries, J. Math. Phys. 44, 974 (2003)

[79] Mostafazadeh, A. : Hilbert space structures on the solution space of Klein–Gordon-type evolution equations, Class. Quantum. Grav. 20, 155 (2003)

[80] Jones, H.F, Rivers, R.J. : Disappearing Q operator, Phys. Rev. D 75, 025023 (2007)

.

CHINESE JOURNAL OF PHYSICS VOL. 53, NO. 3 June 2015

Rabi Oscillations in a Two-Level Atomic System with a Pseudo-Hermitian Hamiltonian: A Path Integral Approach

Rima Rekik, Farida Halimi, and Mekki Aouachria*

Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA),
Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences,
Université Hadj Lakhdar, Batna, Algeria
(Received April 9, 2013; Revised August 11, 2013)

The time development of a two-level system with a pseudo-Hermitian Hamiltonian is studied using the spin coherent state path integral. The propagator is first written in the standard form by replacing the spin by a unit vector aligned along the polar and azimuthal directions (θ, φ). Then it is determined exactly using perturbation methods. The metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of system states are deduced.

DOI: PACS numbers: 31.15.xk, 03.65.Ca, 03.65.Ta

I. INTRODUCTION

In conventional quantum mechanics observables are represented by Hermitian operators acting on a Hilbert space, and their time evolutions are given by unitary operators. However, non-Hermitian operators and Hamiltonian are very efficient for treating scattering phenomena in atomic and molecular physics [1].

A linear operator A that acts in a Hilbert space is called pseudo-Hermitian if one can find an invertible Hermitian operator η satisfying [2, 3]

$$A^{\dagger} = \eta A \eta^{-1}. \tag{1}$$

This notion of pseudo-Hermiticity arises naturally in the study of non-Hermitian Hamiltonian operators, which leads sometimes to real eigenvalues of the non-Hermitian Hamiltonian. It also has interesting applications in many different areas.

In this paper we use the spin coherent state path integral to calculate the metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states for a two-level atom interacting with an electromagnetic field. In the interaction picture, and in the rotating wave approximation, the evolution of the system is described by the equation [4]

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} C_a(t) \\ C_b(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma_a & V \\ V^* & -i\gamma_b \end{pmatrix},$$

*Electronic address: mekkiaouachria@yahoo.fr

and V is the radiation–atom interaction matrix element between the two levels. The damping of the atoms from the upper and lower level is described by the phenomenological decay constants γ_a and γ_b, respectively. This problem was solved recently by [4] using the metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states. In this paper we shall examine the solution of this problem via the path integral formalism in the spin coherent state representation [5–11]. For this purpose another form of the Hamiltonian suitable for our calculations is

$$\widehat{H} = -i\gamma\sigma_z + V\sigma_+ + V^*\sigma_- - \frac{i}{2}\left(\gamma_a + \gamma_b\right)\mathbf{1}, \tag{3}$$

with $\gamma = \frac{1}{2}\left(\gamma_a - \gamma_b\right)$, and σ_z, σ_+, σ_- are the Pauli matrices.

Considering this problem by the path integral approach, our motivation is the following. We show that for interactions with the coupling of spin-field type, the propagator is first, by construction, written in the standard form $\sum_{\text{path}} \exp\left(iS\left(path\right)/\hbar\right)$, where S is the action that describes the system. The discrete variable relative to spin being inserted as the (continuous) path using coherent states. With this approach, the formulation that uses the concept of trajectory is more suitable for a discussion of the semiclassical case which is based on the determination of classical paths [11].

The paper is organized as follows. In Section II we give some notation and the spin coherent state path integral for a spin $\frac{1}{2}$ system for our further computations. In Section III, after setting up a path integral formalism for the propagator, we perform the direct calculations. The integration over the spin variables is easy to carry out, and the result is given as a perturbation series. These are summed up exactly, the explicit result of the propagator is directly computed, and the metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states are deduced. Finally, in Section IV, we present our conclusions.

II. PATH-INTEGRAL FORMULATION

There are several ways to represent the spin in the path integral formalism ([12–15]). We use the simplest way ([11, 16]), which consists of: replacing σ by a unit vector $\mathbf{n}$ directed according to (θ, φ); associating a coherent state $|\Omega\rangle$,

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} \left|\uparrow\right\rangle, \tag{4}$$

obtained from two rotations of the angles θ and φ around the z and y axes over the state $|\uparrow\rangle$, and whose scalar product and projector are, respectively,

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi d\cos(\theta)\left|\Omega\right\rangle\left\langle\Omega\right| = \mathbf{I}. \tag{6}$$

Now we move to the description of the system via the path integral. For this we consider the quantum state $|\theta,\varphi\rangle$, where the polar angles (θ,φ) are the spin-related variables. The transition amplitude from the initial state $|\theta_i,\varphi_i\rangle$ at $t_i=0$ to the final state $|\theta_f,\varphi_f\rangle$ at $t_f=T$ is defined with the matrix elements of the evolution operator:

$$K\left(f,i;T\right)=\langle\theta_f,\varphi_f\mid \mathbf{T}_D\exp(-i\int_0^T Hdt)\mid\theta_i,\varphi_i\rangle. \tag{7}$$

Thus the propagator takes the discrete form:

$$K\left(f,i;T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left[\langle\Omega_n\mid\Omega_{n-1}\rangle-i\varepsilon\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle\right], \tag{8}$$

where $\Omega_{N+1}=\Omega_f$ and $\Omega_0=\Omega_i$.

It is easy to find that the following matrix elements can be calculated:

$$\begin{aligned}\left\langle\Omega\right|\sigma_z\left|\Omega'\right\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, &(9)\\ \left\langle\Omega\right|\sigma_+\left|\Omega'\right\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, &(10)\\ \left\langle\Omega\right|\sigma_-\left|\Omega'\right\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, &(11)\end{aligned}$$

and the propagator related to our problem (10) takes the form of a Feynman path integral

$$K=\int Dpath\exp(iAction), \tag{12}$$

which means in our case:

$$K\left(f,i;T\right)=\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\exp\left\{\sum_{n=1}^{n=N+1}\log\langle\Omega_n\left|\Omega_{n-1}\right\rangle-i\varepsilon\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\left|\Omega_{n-1}\right\rangle\right.}\right\}. \tag{13}$$

After having obtained the conventional form, it remains to integrate it, in order to extract the interesting physical properties. We thus proceed to the calculation of $K\left(f,i;T\right)$.

III. THE PROPAGATOR CALCULATION

We note that (8) is written in the following form:

$$\begin{aligned}K\left(f,i;T\right) &= e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\\ &\quad\times\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}R(t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

with

$$R(t_n) = \left[e^{-\varepsilon\gamma\sigma_z} + i\varepsilon K(t_n)\right], \tag{15}$$

where

$$K(t_n) = \begin{pmatrix} 0 & -V) \\ -V^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

We integrate over all angular variables θ_n and φ_n using

$$\int_0^\pi d\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2} = \int_0^\pi d\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2} = -1, \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{+im\varphi} = 2\pi\delta_{m,0}\,. \tag{18}$$

Then (14) becomes

$$K\left(f,i;T\right) = e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \end{pmatrix} R(T)\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

with

$$R(T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\substack{n=1\\ \leftarrow}}^{N+1} R(t_n). \tag{20}$$

The arrow under the product symbol indicates the time ordering operation.

We develop the product (of matrix 2×2) according to [8, 15], we obtain the following series:

$$\begin{aligned} R(T) \;=\; & \lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^{N+1}\Bigg[e^{-\int_0^T ds\gamma\sigma_V} + i\int_0^T ds_1 e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma\sigma_V}K(s_1)e^{-\int_0^{s_1} ds\gamma\sigma_V} \\ & + (i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\sigma_V}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega\sigma_V}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2} ds\omega\sigma_V} + \\ & + \cdots + i^{N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_N} ds_{N+1}e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma\sigma_V}K(s_1)e^{-\int_{s_2}^{s_1} ds\gamma\sigma_V} \\ & K(s_2)e^{-\int_{s_2}^{s_3} ds\gamma\sigma_V}\times\cdots\times K(s_N)e^{-\int_{s_{N+1}}^{s_N} ds\gamma\sigma_V}K(s_{N+1}) + \cdots\Bigg]. \end{aligned} \tag{21}$$

A simple calculation shows that the even and odd terms in the above expression are, respectively, the diagonal and antidiagonal elements $\mathcal{R}ij$. These matrix elements are respectively the following:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11}(T) \;=\; & \Bigg[e^{-\int_0^T \gamma ds} + +\sum_{n=1}^{\infty}\left(-|V|^2\right)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\,, \\ & \times e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{-\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\Bigg] = \mathcal{R}_{22}^*(T) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\mathcal{R}_{12}(T) = -i\int_0^T ds_1 e^{-\frac{1}{2}\int_{s_1}^T \gamma dt} V\mathcal{R}_{11}^*(s_1) = -\mathcal{R}_{21}^*(T). \tag{23}$$

Therefore Equation (19) can be rewritten as a series:

$$\begin{aligned}
K(f,i;T) \; = \; & e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\Big[e^{-\int_0^T ds\gamma} \\
& +\sum_{n=1}^{\infty}\left(-|V|^2\right)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n} \\
& \times e^{-\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{-\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\Big] \\
& +e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\Big[e^{+\int_0^T ds\gamma}+ \\
& +\sum_{n=1}^{\infty}(-|V|)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n} \\
& \times e^{\int_{s_1}^T ds\gamma}e^{-\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{-\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}\gamma ds}e^{+\int_0^{s_{2n}}\gamma ds_{2s}}\Big] \\
& -e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\times \\
& \times\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-i|V|)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}}ds_{2n+1} \\
& \times e^{-\int_{s_1}^T\gamma ds}e^{+\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{+\int_0^{s_{2n+1}}\gamma ds}\Big] \\
& -e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\times \\
& \times\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-i|V|)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}}ds_{2n+1} \\
& \times e^{\int_{s_1}^T\gamma ds}e^{-\int_{s_2}^{s_1}\gamma ds}\times\cdots\times e^{-\int_0^{s_{2n+1}}\gamma ds}\Big],
\end{aligned} \tag{24}$$

which can be rearranged to be expressed in the form of a sum of four terms:

$$K(f,i;T) = K_{11}+K_{22}+K_{12}+K_{21}. \tag{25}$$

The first term for example will be written as:

$$\begin{aligned}
K_{11} \; = \; & e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\times \\
& \times\exp(-\gamma T)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-|V|^2\right]^n\int_0^T ds_1 e^{2\gamma s_1}\int_0^{s_1}ds_2\right. \\
& \left. e^{-2\gamma s_2}\cdots\int_0^{s_{2n-1}}e^{-2\gamma s_{2n}}ds_n\right].
\end{aligned} \tag{26}$$

This last expression can be written in a more convenient form. In effect we put first

$$\begin{aligned} F(0,T) \;=\; & \left[\exp\left(-\gamma T\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left|V\right|^{2}\right]^{n}\int_{0}^{T}ds_{1}e^{2\gamma s_{1}}\int_{0}^{s_{1}}ds_{2}\right. \\ & \left.\times\, e^{-2\gamma s_{2}}\cdots\int_{0}^{s_{2n-1}}e^{-2\gamma s_{2n}}ds_{n}\right], \end{aligned} \tag{27}$$

and we pass to its Laplace transformation and apply the convolution theorem

$$\widetilde{F}(0,p)=\int_{0}^{\infty}dTe^{-\gamma T}e^{-pT}F(0,T)=\frac{1}{(p+\gamma)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\left|V\right|^{2}}{(p+\gamma)\,(p-\gamma)}\right]^{n}. \tag{28}$$

The result is again a series which is here simply equal to

$$\widetilde{F}(p)=\frac{p-\gamma}{(p+\gamma)\,(p-\gamma)+\left|V\right|^{2}}-\frac{1}{p+\gamma}. \tag{29}$$

This result is valid for $\left|(iV)^{2}/\,(p+\gamma)\,(p-\gamma)\right|<1$. We notice that it is possible to get a contour of the inverse Laplace integration where this condition is always verified. Taking the inverse Laplace transform of (29 we find that under the condition $\left|V\right|^{2}>\gamma^{2}$,

$$K_{11}=e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\cos\frac{\theta_{f}}{2}\cos\frac{\theta_{i}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{f}-\varphi_{i})}\left(\cos ET-\frac{\gamma}{E}\sin ET\right), \tag{30}$$

where $E=\sqrt{\left|V\right|^{2}-\gamma^{2}}$. With the same methods we find that under the condition $\left|V\right|^{2}<\gamma^{2}$ and $\left|V\right|^{2}=\gamma^{2}$ the results are the same as [4]. For the condition $\left|V\right|^{2}<\gamma^{2}$ the inverse Laplace transform of (29) gives

$$\begin{aligned} K_{11}\left(f,i;T\right) \;=\; & e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\cos\frac{\theta_{f}}{2}\cos\frac{\theta_{i}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{f}-\varphi_{i})}\times \\ & \left(\cosh\sqrt{\gamma^{2}-\left|V\right|^{2}}T-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^{2}-\left|V\right|^{2}}}\sinh\sqrt{\gamma^{2}-\left|V\right|^{2}}T\right), \end{aligned} \tag{31}$$

and for the case $\left|V\right|^{2}=\gamma^{2}$ the inverse Laplace transform of (29) gives

$$K_{11}\left(f,i;T\right)=e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\cos\frac{\theta_{f}}{2}\cos\frac{\theta_{i}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{f}-\varphi_{i})}\left(1-\gamma T\right). \tag{32}$$

We analyze our system under the condition $\left|V\right|^{2}>\gamma^{2}$.

Similar calculations permit us to obtain the other elements. There are the following:

$$K_{12} \;=\; -i\frac{V\sin ET}{E}e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\cos\frac{\theta_{f}}{2}\sin\frac{\theta_{i}}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{f}+\varphi_{i})}, \tag{33}$$

$$K_{21} \;=\; -i\frac{V^{*}\sin ET}{E}e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\sin\frac{\theta_{f}}{2}\cos\frac{\theta_{i}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_{f}+\varphi_{i})}, \tag{34}$$

$$K_{22} \;=\; e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{a}+\gamma_{b})T}\sin\frac{\theta_{f}}{2}\sin\frac{\theta_{i}}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_{f}-\varphi_{i})}\left(\cos ET+\frac{\gamma}{E}\sin ET\right). \tag{35}$$

The propagator relative to our particular case is, finally,

$$\begin{aligned} K\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right) &= e^{-\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)T}\times \\ &\left\{\left[\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET-\frac{\gamma}{E}\sin ET\right)\right.\right. \\ &+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos ET+\frac{\gamma}{E}\sin ET\right) \\ &-i\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\frac{V\sin ET}{E} \\ &\left.\left.-i\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\frac{V^*\sin ET}{E}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

The angles θ, φ are allowed to vary only in the limited domains $[0,2\pi]$ and $[0,4\pi]$. Our propagator is the following:

$$\begin{aligned} K\left(f,i;T\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}K\left(\theta_f+2n\pi,\varphi_f+4n\pi;\ \theta_i,\varphi_i;T\right) \\ &= K\left(\theta_f,\varphi_f;\theta_i,\varphi_i;T\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Our problem is then resolved. We can calculate the metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states.

IV. THE METRIC OF THE PSEUDO-HERMITIAN HAMILTONIAN AND ITS BI-ORTHONORMAL BASIS OF STATES

For this, we pass to the usually representation for the spin with the projections along the axis oz being m_f and m_i.

$$K_s\left(m_f,m_i;T\right)=\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i\langle m_f\left|\Omega_f\right\rangle K\left(\Omega_f;\Omega_i;T\right)\left\langle\Omega_i\right|m_i\rangle \tag{38}$$

where

$$\langle m_f\left|\theta_f,\varphi_f\right\rangle=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_f)!\,(s-m_f)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_f}\times\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_f}e^{-\frac{i}{2}(s+m_f)\varphi_f} \tag{39}$$

and

$$\left\langle\theta_i,\varphi_i\right|m_i\rangle=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!\,(s-m_i)!}}\left(-\sin\frac{\theta_i}{2}\right)^{s+m_i}\times\left(\cos\frac{\theta_i}{2}\right)^{s-m_i}e^{+\frac{i}{2}(s+m_i)\varphi_i}. \tag{40}$$

If we fix it that the initial state of the atom is $|m_i\rangle=|\uparrow\rangle$, and the final state is $|m_f\rangle=|\uparrow\rangle$, thus we obtain

$$\langle\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \tag{41}$$

$$\left\langle\Omega_i\right|\uparrow\rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{42}$$

Substitute (41) and (42) in (38) and integrate over polar coordinates. Thus

$$K_{\uparrow\uparrow} = \cos ET - \frac{\gamma}{E}\sin ET. \tag{43}$$

The remaining elements of the propagator are obtained with analogous calculations:

$$K_{\uparrow\downarrow} = -i\frac{V\sin ET}{E}, \tag{44}$$

$$K_{\downarrow\uparrow} = -i\frac{V^*\sin ET}{E}, \tag{45}$$

$$K_{\downarrow\downarrow} = \cos ET + \frac{\gamma}{E}\sin ET. \tag{46}$$

Then the evolution operator takes the form

$$U(T) = e^{-i\widehat{H}T} = \begin{pmatrix} \cos ET - \frac{\gamma}{E}\sin ET & -i\frac{V\sin ET}{E} \\ -i\frac{V^*\sin ET}{E} & \cos ET + \frac{\gamma}{E}\sin ET \end{pmatrix}, \tag{47}$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned} U &= e^{-iTE}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} E - i\gamma \\ V^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\frac{i\gamma}{V^*} + \frac{E}{2V^*} \end{pmatrix} \\ &\quad + e^{+iTE}\frac{1}{E}\begin{pmatrix} -E - i\gamma \\ V^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\frac{i\gamma}{V^*} + \frac{E}{2V^*} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{48}$$

by comparison with the spectral decomposition CPT,

$$U = e^{-iHT} = e^{-iTE}\left|\psi_1\right\rangle\left\langle\Gamma_1\right| + e^{+iTE}\left|\psi_2\right\rangle\left\langle\Gamma_2\right|, \tag{49}$$

then the bi-orthonormal basis of states can be deduced. They become equal to

$$\left|\psi_1\right\rangle = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} E - i\gamma \\ V^* \end{pmatrix}, \quad \left|\Gamma_1\right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{i\gamma}{2V} + \frac{E}{2V} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$\left|\psi_2\right\rangle = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} -E - i\gamma \\ V^* \end{pmatrix}, \quad \left|\Gamma_2\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i\gamma}{2V} + \frac{E}{2V} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

And the metric is given by the definition

$$\left|\Gamma_1\right\rangle = \eta\left|\psi_1\right\rangle\ ,\ \left|\Gamma_2\right\rangle = \eta\left|\psi_2\right\rangle, \tag{52}$$

hence

$$\eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & +\frac{i\gamma}{V^*} \\ -\frac{i\gamma}{V} & 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

This is the same metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states as obtained by solution of the Schrodinger equation [4]. The relations between the present pseudo-Hermitian Hamiltonian and certain symmetries (known as P, PT, and CPT-symmetries) can thus be obtained as has been done by [4].

V. CONCLUSION

By using the formalism of the path integral and the spin coherent states approach, the propagator relative to a system has been given in a series form, which for this case, these series are summed up exactly. The metric of the pseudo-Hermitian Hamiltonian and its bi-orthonormal basis of states are deduced.

References

[1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley, New York, 1992).
[2] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002). doi: 10.1063/1.1418246
[3] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. **43**, 6343 (2002). doi: 10.1063/1.1514834
[4] Y. Ben-Aryeh, A. Mann, and I. Yaakov, J. Phys. A **37**, 12059 (2004). doi: 10.1088/0305-4470/37/50/008
[5] M. Aouachria, J. Korean Phys. Soc. **58**, 689 (2011). doi: 10.3938/jkps.58.689
[6] M. Aouachria, Chinese J. Phys. **49**, 689 (2011).
[7] M. Aouachria, Can. J. Phys. **89**, 1141 (2011). doi: 10.1139/p11-108
[8] M. Aouachria and L. Chetouani, Can. J. Phys. **87**, 389 (2009). doi: 10.1139/P08-117
[9] M. Aouachria and R. Rekik, AIP Conf. Proc. **1444**, 265 (2012).
[10] M. Aouachria and F. Halimi, J. Phys. Conf. Ser. **435**, 012025 (2013). doi: 10.1088/1742-6596/435/1/012025
[11] A. Alscher and H. Grabert, J. Phys. A. **32**, 4907 (1999). doi: 10.1088/0305-4470/32/26/309
[12] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent states and Their Application* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
[13] J. R. Klauder, Ann. Phys. **11**, 123 (1960). doi: 10.1016/0003-4916(60)90131-7
[14] Y. Ohnuk and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. **60**, 548 (1978). doi: 10.1143/PTP.60.548
[15] T. Boudjedaa, A. Bounames, L. Chetouani, and T. F. Hammann, J. Math. Phys. **36**, 1602 (1995). doi: 10.1063/1.531072
[16] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 222 (1972). doi: 10.1007/BF01645091

World Academy of Science, Engineering and Technology
International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering Vol:8 No:3, 2014

Spin Coherent State Path Integral for the Interaction of Two-Level System with Time Dependent Non-Uniform Magnetic Field

Rekik Rima, Aouachria Mekki

Abstract—We study the movement of a two-level atom in interaction with time dependent nonuniform magnetic filed using the path integral formalism. The propagator is first written in the standard form by replacing the spin by a unit vector aligned along the polar and azimuthal directions. Then it is determined exactly using perturbation methods. Thus the Rabi formula of the system are deduced.

Keywords—Path integral, Formalism, Propagator, Transition probability.

I. Introduction

Up to now, a whole class of potentials have been treated successfully within the path-integral formalism, thanks to the use of certain transformations [1]. However, it is known that the most relativistic interactions are those where the spin is taken into account which is a very useful and very important notion in physics. From a practical point of view, the explicit calculus of propagators for such interactions by the path-integral formalism, are very scarce([2], [3], [4]).

For this reason we are devoted to this type of interaction; by considering a problem treats according to usual quantum mechanics [5]. It acts of an atom which has two levels and which interacts with a time dependent nonuniform magnetic filed.

$$\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos\omega t, \quad B_1 \sin\omega t,\ B_0), \tag{1}$$

Its dynamics is described by the Hamiltonian

$$H = -\gamma \mathbf{SB} \tag{2}$$

where γ is the gyromagnetic ratio. In the above Hamiltonian we have neglected the exterior motion.

Another form of the Hamiltonian suitable for our calculations is

$$H = -u(t)\,\sigma_+ - u^*(t)\,\sigma_- - \Omega(t)\,\sigma_z \tag{3}$$

where

$$u(t) = \frac{\gamma}{2}\left(B_x(t) - iB_y(t)\right) = \omega_1 e^{-i\omega t}, \tag{4}$$

with

$$\omega_1 = \frac{\gamma}{2} B_1 \quad \text{and} \qquad \Omega(t) = \frac{\gamma}{2} B_0 = \omega_0 \tag{5}$$

The Pauli matrices are the following:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA), Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences, Université Hadj Lakhdar, Batna, Algeria. (e-mail:mekkiaouachria@yahoo.fr).

Considering this problem by the path integral approach, our motivation is the following. We show that for interaction with the coupling of spin-field type, the propagator is first, by construction, written in the standard form $\sum_{\text{path}} \exp\left(iS\,(path)\,/\hbar\right)$, where S is the action that describes the system. The discrete variable relative to spin being inserted as the (continuous) path using coherent states. With this approach, the formulation that uses the concept of trajectory is more suitable for a discussion of the semiclassical case which is based on the determination of classical paths [6].

The paper is organized as follows. In Section II we give some notation and the spin coherent state path integral for spin $\frac{1}{2}$ system for our further computations. In Section III, after setting up a path integral formalism for the propagator, we perform the direct calculations. The integration over the spin variables is easy to carry out and the result is given as a perturbation series. These are summed up exactly and the explicit result of the propagator is directly computed and the Rabi formula is then deduced. Finally, in Section IV, we present our conclusions.

II. Path-integral formulation

There are several ways to represent the spin in the path integral formalism ([2], [7], [8], [9]). We use the simplest way ([4], [10], [6]), which consists of:

- replacing σ by a unit vector $\mathbf{n}$ directed according to (θ, φ) ;
- associating a coherent state $|\Omega\rangle$

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle, \tag{7}$$

obtained from two rotations of the angles θ and ϕ around z and y axes over the state $|\uparrow\rangle$, and whose scalar product and projector are respectively:

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi d\cos(\theta)\,|\Omega\rangle\,\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{9}$$

Now we move to the description of the system via path integral. For this we consider the quantum state $|\theta, \varphi\rangle$, where the polar angles (θ, φ) are the spin-related variables.

The transition amplitude from the initial state $|\theta_i, \varphi_i\rangle$ at $t_i = 0$ to the final state $|\theta_f, \varphi_f\rangle$ at $t_f = T$ is defined with the matrix elements of the evolution operator:

$$K(f, i; T) = \langle\theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{T}_D \exp(-i\int_0^T H dt) \mid \theta_i, \varphi_i\rangle, \tag{10}$$

where $\mathbf{T}_D$is the Dyson chronological operator.

To move to path integral representation, we first subdivide the time interval $[0, T]$ into $N+1$ intervals of length ε, intermediate moments, by using the Trotter's formula and we then introduce the projectors according to these intermediate instants N regularly divided distributes between 0 and T in (9).

Thus the propagator takes the following form:

$$K(f, i; T) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \tag{11}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \left[\langle \Omega_n \mid \Omega_{n-1} \rangle - i\varepsilon \langle \Omega_n | H | \Omega_{n-1} \rangle \right].$$

where

$$\Omega_{N+1} = \Omega_f \quad \text{and} \qquad \Omega_0 = \Omega_i. \tag{12}$$

It is easy to find that the following matrix elements can be calculated:

$$\langle \Omega | \sigma_z | \Omega' \rangle =$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{13}$$

$$\langle \Omega | \sigma_+ | \Omega' \rangle = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{14}$$

$$\langle \Omega | \sigma_- | \Omega' \rangle = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}. \tag{15}$$

and the propagator related to our problem (10) takes the form of Feynman path integral

$$K = \int Dpath \exp(iAction), \tag{16}$$

which means in our case:

$$K(f, i; T) = \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\exp\left\{ \sum_{n=1}^{n=N+1} \left[\log < \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle - i\varepsilon \frac{\langle \Omega_n | H | \Omega_{n-1} \rangle}{< \Omega_n | \Omega_{n-1} \rangle} \right] \right\} \tag{17}$$

After having obtained the conventional form, it remains to integrate it, in order to extract the interesting physical properties. We thus proceed to the calculation of $K(f, i; T)$.

III. The Propagator Calculation

We note that (16) is written in the following form

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{N+1} \left(\cos\tfrac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, \quad \sin\tfrac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \right) \\ &\quad \times R(t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{18}$$

with

$$R(t_n) = \left[e^{i\varepsilon\Omega\sigma_z} + i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & u(t_n) \\ u^*(t_n) & 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{19}$$

Let us integrate over all angular variables θ_n and φ_n according to [4] then (17) becomes

$$K(f, i; T) = \left(\cos\tfrac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \sin\tfrac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \right)$$

$$\times \lim_{N \longrightarrow \infty} (-1)^N \prod_{\underset{\leftarrow}{n=1}}^{N+1} R(t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

We develop the product (of 2×2 matrix) which appear in the expression (19) according to [9] we can see that the propagator takes the following form

$$K(f, i; T) = \left(\cos\tfrac{\theta_f}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \sin\tfrac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} R_{11}(T) & -R_{12}(T) \\ -R_{21}(T) & R_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_i} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

where R_{ij} are the elements of the matrix R. These are numbers which are represent the possible propagators between two given spin states.

The angles θ, φ are allowed to vary only in the limited domains $[0, 2\pi]$ and $[0, 4\pi]$. Our propagator is the following:

$$\begin{aligned} K(f, i; T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(\theta_f + 2n\pi, \varphi_f + 4n\pi;\ \theta_i, \varphi_i; T) \\ &= K(\theta_f, \varphi_f; \theta_i, \varphi_i; T). \end{aligned} \tag{22}$$

A simple calculation shows that the expression of the elements R_{ij} are the following [9]:

$$\begin{aligned} R_{11}(T) &= e^{i\int_0^T \Omega(s)ds} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^{2n} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \right. \\ & \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{i\int_{s_1}^T \Omega(s)ds} u(s_1) e^{-i\int_{s_2}^{s_1} \Omega(s)ds} \\ & \left. \ldots e^{-i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} \Omega(s)ds} u^*(s_{2n}) e^{i\int_0^{s_{2n}} \Omega(s)ds} \right] \end{aligned} \tag{23}$$

and

$$R_{12}(T) = i\int_0^T ds_1 e^{i\int_{s_1}^T \Omega(s)ds} u(s_1) R_{22}(s_1) \tag{24}$$

From the above expressions we can see that the elements R_{ij} verify

$$R_{22}(T) = R_{11}^*(T), \qquad R_{21}(T) = -R_{12}^*(T) \tag{25}$$

Thus the transition amplitude of the system between an initial state of spin m_i and a final state of spin m_f is related to $K(f, i; T)$ by

$$K(m_f,, m_i; T) = \int \frac{d\cos(\theta_f) d\varphi_f}{2\pi} \frac{d\cos(\theta_i) d\varphi_i}{2\pi}$$

$$\times \langle m_f | \Omega_f \rangle K(f, i; T) \langle \Omega_i | m_i \rangle, \tag{26}$$

where

$$\langle m | \theta, \varphi \rangle = \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m)!(s-m)!}} \left(\sin\frac{\theta}{2} \right)^{s-m}$$

$$\times \left(\cos\frac{\theta}{2} \right)^{s+m} e^{-im\varphi}. \tag{27}$$

IV. The transition probability

If we fix the initial state of the atom to be $|m_i\rangle = |\downarrow\rangle$, and the finale state to be $|m_f\rangle = |\uparrow\rangle$, thus from (26) we obtain

$$\langle\uparrow|\Omega_f\rangle = \cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \text{ and } \quad \langle\Omega_i|\downarrow\rangle = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{28}$$

After integration over polar coordinates we obtain for instance the propagator $K(\uparrow,,\downarrow;T)$ between an up-state and a down-state of spin which coincides with element $R_{12}(T)$

$$\begin{aligned} &K(\uparrow,,\downarrow;T) = R_{12}(T) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(i\omega_1)^{2n+1}\int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{+i\Delta s_2}\cdots \right. \\ &\left. \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n+1} e^{-i\Delta s_{2n+1}}\right] e^{i\omega T} \end{aligned} \tag{29}$$

where $\Delta = \omega - \omega_0$.

Now we pass to its Laplace's transformation and apply the convolution theorem we obtain the result

$$K(\uparrow,,\downarrow;p) = \int_0^{\infty} dT e^{-pT} K(\uparrow,,\downarrow;T) = \frac{i\omega_1}{p(p+i\Delta)-\omega_1^2} \tag{30}$$

Taking the inverse Laplace transform we have

$$K(\uparrow,,\downarrow;T) = \frac{i\omega_1 e^{i(\omega-\Delta/2)T}}{\lambda}\sin\lambda T, \tag{31}$$

with $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + 4\omega_1^2}$. The transition probability is then given by

$$\begin{aligned} &P_{-1/2,1/2} = |K(\uparrow,,\downarrow;T)|^2 \\ &= \frac{4\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2 + 4\omega_1^2}\sin^2\frac{T}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + 4\omega_1^2} \end{aligned} \tag{32}$$

This formula is exactly the well-known Rabi formula given in the literature [5].

V. Conclusion

By using the formalism of the path integral and the spin coherent states approach, we showed how to determine the Rabi formula. The propagator relative to a system have been given in the series form, which for this case, these series are summed up exactly. The Rabi formula, relative to our model in this case were exactly deduced.

References

[1] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer-Verlag (1998).
[2] M. Aouachria, L. Chetouani, Eur. Phys. J. **C 25,** 333 (2002).
[3] M. Aouachria, L. Chetouani, Chinese. J. Phys. **40,** 496 (2002).
[4] M. Aouachria, L. Chetouani, Can. J. Phys. **87**, 389 (2009).
[5] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986). I. I. Rabi, Phys. Rev. **51**, 652 (1937).
[6] A. Alscher, H. Grabert, J. Phys. A. **32,** 4907 (1999).
[7] J. R. Klauder, Ann. Phys. (NY) **11**, 123 (1960).
[8] Y. Ohnuki, T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. **60**, 548 (1978).
[9] T. Boudjedaa, A. Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann, J. Math. Phys. **36**, 1602 (1995).
[10] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 22 (1972).

Exact spin coherent state path integral for a neutral spinning particle interacting with a rotating magnetic field and a scalar potential

Mekki Aouachria and Rima Rekik

Citation: AIP Conf. Proc. **1444**, 265 (2012); doi: 10.1063/1.4715431
View online: http://dx.doi.org/10.1063/1.4715431
View Table of Contents: http://proceedings.aip.org/dbt/dbt.jsp?KEY=APCPCS&Volume=1444&Issue=1
Published by the American Institute of Physics.

Exact Spin Coherent State Path Integral for a Neutral Spinning Particle Interacting with a Rotating Magnetic Field and a Scalar Potential

Mekki Aouachria and Rima Rekik

Département des Sciences de la matière, Faculté des Sciences, Université Hadj Lakhdar – Batna, Algeria.

Abstract. Exact solutions of the neutral spinning particle in interaction with rotating magnetic field and a scalar potential using path integral formalism have been found. The propagator is first written in the standard Feynman form by replacing the spin by a unit vector aligned along the polar and azimuthal directions (θ, φ). Then we use the phase-space and rotations in the space of spin coherent states to simplify the calculations. Thus the exact energy spectrum with a corresponding wave functions are deduced.

Keywords: Formalism, Functional analytical methods, Relativistic wave equations, Solutions of wave equations, Bound states
PACS: 03.65.Ca, 03.65.Db, 03.6.5Pm, 03.65.Ge

INTRODUCTION

In this paper, which is a continuation of previous works $[1-4]$our aim is to give an explicit spin coherent state path integral for the problem of the neutral spinning particle in interaction with rotating magnetic field and a scalar potential which has been treated according to the usual quantum mechanics[5]. The Hamiltonian related to our problem has the following form:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - \mu_0 \alpha y (\sigma_z \sin 2\kappa y + \sigma_x \cos 2\kappa y), \tag{1}$$

where μ_0 is the gyromagnetic ratio, κ is an arbitrary constant and $\omega = \mu_0\alpha/\ \kappa$, and σ_x, σ_y, σ_z are the usual Pauli matrices.

With this approach, the formulation that uses the concept of trajectory is more suitable for a discussion of the semiclassical case which is based on the determination of classical paths. We show that for this interaction, the propagator is exactly calculable and the wave functions and the energy spectrum can be extracted.

We note that this problem has been recently studied using fermionic coherent state path integral [6]. The difference between the two approaches stems simply from the difference between the two distinct coherent states.

The 8th International Conference on Progress in Theoretical Physics (ICPTP 2011)
AIP Conf. Proc. 1444, 265-269 (2012); doi: 10.1063/1.4715431

PATH-INTEGRAL FORMULATION

There are several ways to represent the spin in the path integral formalism $[7-9]$. We use the simplest way $[10,11]$ which consists of:

- replacing σ by a unit vector n directed along (θ,φ),
- associating a coherent state $|\Omega\rangle$ $|\Omega\rangle = |\theta,\varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z}e^{-i\theta S_y}|\uparrow\rangle$, and whose scalar product and projector are respectively:

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta)d\varphi\,|\Omega\rangle\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{3}$$

We label by y the real variable that describes the atom position, with the corresponding projector

$$\int |y_n\rangle\langle y_n|\,dy_n = 1, \tag{4}$$

and (θ,φ) the polar variables generating the dynamics of the spin.

The transition amplitude from the initial state $|y_i,\theta_i,\varphi_i\rangle$ at $t_i = 0$ to the final state $\left|y_f,\theta_f,\varphi_f\right\rangle$ at $t_f = T$ is given by the matrix elements of the time evolution operator

$$K(f,i;T) = \langle y_f,\theta_f,\varphi_f \mid \mathbf{T}_D\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt) \mid y_i,\theta_i,\varphi_i\rangle, \tag{5}$$

where $\mathbf{T}_D$ is the Dyson chronological operator. To move to path integral representation, we first subdivide the time interval $[0,T]$ into $N+1$ intermediate moments of a length $\varepsilon = T/N+1$, using the Trotter formula. We introduce the projectors according to the intermediate instants N in eq. (5) to obtain the discret path integral form of the propagator

$$\begin{aligned}K(f,i;T) = {}& \lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dy_n\prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(y_n-y_{n-1})^2-\frac{1}{2}\varepsilon m\omega^2y_n^2\right]\\ &\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left[\langle\Omega_n\mid\Omega_{n-1}\rangle - i\varepsilon\langle\Omega_n|H_1|\Omega_{n-1}\rangle\right],\end{aligned} \tag{6}$$

where

$$H_1 = -\mu_0\alpha y(\sigma_z\sin 2\kappa y + \sigma_x\cos 2\kappa y),$$

and

$$y_{N+1} = y_f,\quad \Omega_{N+1} = \Omega_f \quad\text{and}\qquad y_0 = y_i,\;\; \Omega_0 = \Omega_i. \tag{7}$$

THE CALCULATION OF THE PROPAGATOR

We note that (6) can be rewritten in the form

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dy_n\prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(y_n-y_{n-1})^2-\frac{1}{2}\varepsilon m\omega^2y_n^2\right]\times$$
$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{array}\right)R\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{array}\right),\tag{8}$$

with

$$R=1+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n(\sigma_z\sin 2\kappa y_n+\sigma_x\cos 2\kappa y_n).\tag{9}$$

With the help of the following change of variables:

$$\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\\ \sin\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}\end{array}\right)=e^{-i\kappa y_n\sigma_y}\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\\ \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{array}\right)\tag{10}$$

$$\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_n}, & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{array}\right)e^{i\kappa y_n\sigma_y}.\tag{11}$$

And as usually done in path integral techniques, we estimate the term $(\Delta y_n)^2$ present in the action by $i\hbar\varepsilon/m$ following the standard technique. This shall contribute to an effective potential. Thus, the propagator (8) becomes

$$K(f,i;T)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dy_n\prod_{n=1}^{N+1}\exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}(y_n-y_{n-1})^2-\frac{1}{2}\varepsilon m\omega^2y_n^2\right]\times$$
$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta'_n)d\varphi'_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}, & \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{array}\right)R_1\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\end{array}\right),\tag{12}$$

where

$$R_1=\left(\begin{array}{cc}e^{-i\frac{\varepsilon\hbar}{2m}\kappa^2} & -\kappa\Delta y_n+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n\\ \kappa\Delta y_n+i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mu_0\alpha y_n & e^{-i\frac{\varepsilon\hbar}{2m}\kappa^2}\end{array}\right)\tag{13}$$

At this stage, let us not that the computation of the propagator (12) is readly done by [6] but now we integrate over all agulare variables wich is simple to carry it rather then grassmmans one, and the results is given by

$$K(f,i;T)=\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_f}, & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{array}\right)\mathbf{S}(\mathbf{T})\left(\begin{array}{c}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}\varphi_i}\end{array}\right),\tag{14}$$

where

$$\mathbf{S}(\mathbf{T})=e^{-i\frac{\kappa^2}{2m}T}e^{i\sigma_y\kappa y_f}\tilde{K}\left(y_f,y_i;T\right)e^{-i\sigma_y\kappa y_i}\quad\text{and}\quad\tilde{K}=\left(\begin{array}{cc}\tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12}\\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22}\end{array}\right)\tag{15}$$

with the exprtessions of $\tilde{K}_{11}\left(y_f,y_i;T\right)$, $\tilde{K}_{12}\left(y_f,y_i;T\right)$, $\tilde{K}_{21}\left(y_f,y_i;T\right)$, $\tilde{K}_{22}\left(y_f,y_i;T\right)$ are given in [6].

The angles θ, φ are allowed to vary only in the limited domains $[0,2\pi]$ and $[0,4\pi]$. Our propagator is the following:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(y_f,\theta_f+2n\pi,y_i,\varphi_f+4n\pi,\ \theta_i,\varphi_i;T\right) \\ &= K\left(y_f,\Omega_f,y_i,\Omega_i;T\right). \end{aligned} \tag{16}$$

It is an expression for the propagator in the spin coherent state representation.

THE WAVE FUNCTIONS

Let us now eliminate the coherent states by computing the transition amplitude between the proper states of the spin. We take an example of the matrix element

$$K_{\uparrow\uparrow}(y_f,y_i;T) = \langle\uparrow\left|K(y_f,y_i;T)\right|\uparrow\rangle. \tag{17}$$

With the help of the completeness relations, this amplitude becomes

$$K_{\uparrow\uparrow}(y_f,y_i;T) = \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i\left\langle\uparrow\left|\Omega_f\right.\right\rangle K(f,i;T)\left\langle\Omega_i\right|\uparrow\rangle. \tag{18}$$

If we fix the initial state of the atom as $|m_i\rangle = |\uparrow\rangle$, and the final state as $\left|m_f\right\rangle = |\uparrow\rangle$, we obtain

$$\langle\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{and} \qquad \langle\Omega_i|\uparrow\rangle = \cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{19}$$

Substituting (19) in (18) and integrating over polar coordinates, (18) takes the following form

$$K_{\uparrow\uparrow}(y_f,y_i;T) = \mathbf{S}_{11}. \tag{20}$$

In the same manner, we proceed for the remaining elements. The result takes the following matrix form

$$K\left(y_f,y_i;T\right) = \mathbf{S}(T), \tag{21}$$

which coincide with those obtained in [6] using fermionic coherent states path integral.

We deduce the spectrum and the corresponding wave function from this expression rewriting it in the following form:

$$\begin{aligned} K(y_f,y_i;T) = e^{-iE_0T}\Phi_0\left(y_f\right)\Phi_0^{\dagger}(y_i) + \sum_{n=0}^{\infty}\Big[& e^{-iE_n^+T}\Phi_n^{(+)}\left(y_f\right)\Phi_n^{(+)\dagger}(y_i) + \\ & + e^{-iE_n^-T}\Phi_n^{(-)}\left(y_f\right)\Phi_n^{(-)\dagger}(y_i)\Big] \end{aligned} \tag{22}$$

where

$$E_0 = \frac{\kappa^2}{2m}+\frac{\omega}{2} \qquad \text{and} \qquad E_n^{\pm} = \omega(n+1)+\frac{\kappa^2}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2+\frac{2\omega\kappa^2}{m}(n+1)} \tag{23}$$

and

$$\Phi_0(y) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}m\omega y^2\right) \exp(-i\sigma_y \kappa y)\,\eta_- \tag{24}$$

$$\Phi_n^{(\pm)}(y) = \left\{\left[\cos\alpha^{\pm}\Psi_n(y)\right]^2 + \left[\sin\alpha^{\pm}\Psi_{n+1}(y)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp(-i\sigma_y \kappa y)\exp\left(-i\sigma_y \Theta^{\pm}(y)\right)\eta_{\pm}, \tag{25}$$

with

$$\tan\Theta^{\pm}(y) = \tan\alpha^{\pm}\frac{\Psi_{n+1}(y)}{\Psi_n(y)} = \frac{\tan\alpha^{\pm}}{\sqrt{2(n+1)}}\frac{H_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}y\right)}{H_n\left(\sqrt{m\omega}y\right)} \tag{26}$$

$$\tan\alpha^{+} = \frac{\sqrt{\frac{2\omega\kappa^2}{m}(n+1)}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{2\omega\kappa^2}{m}(n+1)} - \frac{\omega}{2}} - \tan\alpha^{-}\ ,\ \ \eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ \eta_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

These results agree exactly with those given in [5, 6]

CONCLUSION

We have been able to calculate the explicit expression of the propagator relative to a neutral spinning particle interacting with a rotating magnetic field and a scalar potential with an exact and a simple treatment by using a spin coherent state path integral formalism. Thanks to two variables (θ, φ) replacing the spin, the propagator has been, first of all, written in a conventional form, then determined exactly. Our results are in perfect agreement with that obtained using algebraic method by [5] and that obtained using fermionic coherent state path integral formalism by [6].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors wishes to thank Yazid Delenda for his help in english and latex.

REFERENCES

1. M. Aouachria, *Can. J. Phys.* **89**, 1141-1148 (2011).
2. M. Aouachria, *Chin. J. Phys.* **49**, 689-698 (2011).
3. M. Aouachria, *J. Korean. Phys. Soc.* **58**, 689-695 (2011).
4. M. Aouachria, L. Chetouani, *Can. J. Phys.* **87**, 389-398 (2009).
5. M. Calvo and S. Codriansky, *J. Math. Phys.* **24**, 553-559 (1983).
6. A. Merdaci, T. Boudjedaa, and L. Chetouani, *Czech. J. Phys.* **51**, 865-881 (2001).
7. J. R. Klauder, *Ann. Phys.***11**, 123-168 (1960).
8. J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, *Coherent states application in physics and mathematical physics*, Word Scientific, Singapore, (1985).
9. Y. Ohnuki and T. Kashiwa, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 548-564 (1978).
10. A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.* **26**, 222-236 (1972).
11. A. Alscher and H. Grabert, *J. Phys.* A **32**, 4907-4919 (1999).

الملخص:

في هذه الرسالة أربع مسائل تخص التفاعلات سبين- حقل تم علاجه في إطار نظرية تكامل مسالك Feynman :
يتعلق الأمر بذرة ذات مستويين من الطاقة في حالة حركة والخاضعة لـ:

1. فعل موجهة كهرومغناطيسية كلاسيكية مستقطبة دائريا.
2. دراسة تفاعل جسيم محايد مع حقل مغناطيسي ستاتيكي وحقل سلمي.
3. ذرة ذات مستويين في تفاعل مع حقل مغناطيسي مرتبط بالزمن.

وفي الأخير دراسة نظام ذو مستويين في هاملتوني شبه هرميتي

الحساب يعتمد أساسا على سعة الانتقال التي قمنا بكتابة عبارتها أولا على الشكل النظامي $\int(path)\exp\frac{i}{\hbar}s(path)$

حيث $S=\int Ldt$ الفعل الذي يصف الحركة الخارجية (مركز الثقل) والداخلية للذرة.

لدراسة هذه الحالات قمنا بتعريض الشعاع $\vec{\sigma}$ الموافق للف الذاتي بشعاع وحدة $\vec{n}$ اتجاهه معرف بالزوايا (θ,φ).

باستعمال طريقة نظرية الاضطرابات في تقريب التكامل على المسالك قمنا بحساب المنتشرات على شكل سلاسل من الحدود هذه السلاسل في هذه الحالات تمكننا من جمعها بدقة.

الخصائص الفيزيائية مثل الدوال الموجية ومستويات الطاقة وكذلك احتمال الانتقال حسبت بدقة في جميع المسائل المعتبرة.
نتائجنا هي أيضا في اتفاق جيد مع تلك التي تعطي من قبل مؤلفين آخرين من خلال حل المعادلة Schrödinger.

الكلمات المفتاحية: التكاملات على المسالك - الحالات المتلاحمة – الدوال الموجية

Résumé

Dans cette thése, quatres problémes d'interaction de type spin-champ ont été considérés dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins de Feynman.

Il s'agit d'un atome 'a 2 niveaux en mouvement soumis

1-Traitement d'une particule neutre soumis à un champ de polarisation circulaire d'une onde electromagnetique plane par l'approche des intégrales de parcours.

2- Etude de l'interaction d'une particule neutre par un champ magnetique statique et un potentiel scalaire.

3-Atome à deux niveaux en interaction avec un champ magnétique variable dans le temps.

Finalement un cas pour Traitement d'un systéme à deux niveaux dont l'hamiltonien est Pseudo-hermitique par l'approche des intégrales de Chemins.Le calcul est basé sur l'amplitude de transition qui a été exprimée

d'abord sous la forme standard $\int D(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$,ou $S = \int L dt$ est l'action décrivant les mouvements extérieurs intérieur de l'atome.

Pour le traitement, le vecteur $\overrightarrow{\sigma}$ relative au spin a été remplacé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ dont l'orientation est definie par les angles (θ, φ) .

A l'aide du formalisme des intégrales de chemins, le propagateur relatif aux quatres problémes on été déterminé suivant la méthode des perturbations sous forme de série, qui dans ces cas, ont put etre sommées exactement. Les propriétés physiques telles que les fonctions d'ondes, les niveaux d'énergies ainsi que la probabilité de transition, ont été alors déterminés exactement pour tous les problémes considérés. Les résultats trouvés sont aussi en bon accord avec ceux donnés par d'autres auteurs en résollvant l'équation de Schr0dinger.

Mots clés: Intégral de chemins, les états cohérents, les fonctions d'onde.

Abstract

In this thesis, four problems of spin - field type interaction have been considered in the context of the formalism of the path integral of Fynman.

It is about a two-level atom in movement

1-Exact spin coherent stat path integral for neutral particles in the .field of circularly polarized plane electromagnetic wave.

2- Exact spin coherent state path integral for a neutral spinning particle interacting with a rotating magnetic .field and a scalar potential.

3-Spin Coherent State Path Integral for the Interaction of Two-Level System with Time Dependent Non-Uniform Magnetic Field.

Finally Treatment of a Two-level System With a Pseudo-hermitian Hamiltonian by The Spin Coherent State Path Integral Approach.

The calculation is based on the amplitude of transition that has first been expressed in a standard where form$\int D(path) \exp \frac{i}{\hbar} s(path)$; where $S = \int Ldt$ is the action describing the exterior movement's (centre of masse) and interior of the atom.

For the treatment, the relative vector to the spin $\vec{\sigma}$ has been replaced by a unit vector $\vec{n}$ whose orientation is defined by the angles (θ, φ) .

Following the technique of path integral, the propagators for three problems has been determined according to the perturbation methods in the form of a series, that in these cases can be added precisely.

The physical properties as the wave functions, energy levels as well as the probabilty transition have been determined for all considered problems. Our results are also in good agreement with those given by other authors by solving the equation Schrodinger.

Key words: Path-integral, the coherents states, the wave functions

.