

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

MEMOIRE

Présenté

AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
UNIVERSITE DE BATNA

Pour obtenir le titre de

MAGISTER EN GENIE MECANIQUE

Option : Science des matériaux

Par

Mr BAYARASSOU Mokhtar

*Développement d'un logiciel de calcul d'homogénéisation des
plaques stratifiées composites*

Soutenu publiquement le 2008, devant le jury composé de :

Dr Hamoudi MAZOUZ	M. Conférences, Université de Batna	Président
Dr Toufik OUTTAS	M. Conférences, Université de Batna	Encadreur
Dr Rabah MANAA	M.A. Chargé de Cours, Université de Batna	Examineur
Dr Hamid DJEBAILI	M. Conférences, C. Universitaire de Khenchela	Examineur

Je dédie ce travail à :

*L'être qui m'est le cher au monde, à celle
qui a ou donné pour que je sois ce que je suis
aujourd'hui, ma mère.*

*Celui qui à fait tout son possible pour me
voir réussir dans ma vie, mon père.*

Mes frères.

Mes amis et plus particulièrement :

TAREK, LAMINE, HAMZA et FAIK

Remerciements

Le présent travail a été effectué au sein de l'institut de Génie Mécanique de l'université de Batna.

Je tiens à remercier les membres du jury pour l'intérêt porté à cette thèse :

- Monsieur H. MAZOUZ, M. Conférences à l'université de BATNA, qui m'a honoré par sa présence en qualité de président de jury;*

- Monsieur T. OUTIAS, Maître de conférences à l'université de BATNA, mon directeur de thèse qu'il trouve ici ma sincère reconnaissance pour sa patience, sa compétence, ses remarques et suggestions pertinentes. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections ;*

- Monsieur R. SMAIL, Maître de conférences à l'université de BATNA, qu'il trouve ici ma sincère reconnaissance de bien vouloir accepter de juger le travail achevé;*

- Monsieur R. MANAA, M.A. Chargé de Cours à l'université de BATNA, pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant de participer à ce jury;*

- Monsieur H. DJEBAILI, Maître de conférences à C. Universitaire de KHENCHELA, qui m'a honoré d'accepter de juger le travail effectué ;*

SOMMAIRE

Introduction générale	1
-----------------------------	---

<i>Chapitre I</i>	<i>Généralités sur les matériaux composites</i>
-------------------	---

I.1. Introduction	3
I.1.1. Caractéristiques générales des composites	3
I.1.2. Types de matériaux composites	4
I.1.3. Avantages des matériaux composites	4
I.1.4. Inconvénients des matériaux composites	5
I.2. Les renforts et tissus	6
I.2.1. Forme de renfort	6
I.2.1.1. Formes linéiques	7
I.2.1.2. Formes surfaciques	7
1- Les mats	7
2- Les tissus et rubans	7
I.2.1.3. Structures tissées multidirectionnelles	9
I.2.2. Les principales fibres	9
I.2.2.1. Les fibres de verre, propriétés et élaboration	9
I.2.2.2. Produits industriels en verre textile	10
I.2.2.3. Les fibres de carbone, propriétés et élaboration	12
I.2.2.4. produits industriels	12
I.2.2.5. Les fibres aramides à caractéristiques élevées	13
I.2.2.3.1. Généralités	13
I.2.2.3.2. Utilisations industrielles	14
I.2.2.4. Les fibres céramiques	14
I.2.2.5. Les fibres synthétiques thermostables	14
I.2.2.6. Autres fibres	15
I.3. Les matrice	17
I.3.1. Matrice organique	18
I.3.2. Matrice métallique	18
I.3.3. Matrice en céramique	18
I.4. Les matériaux composites structuraux	20

SOMMAIRE

I.4.1. Monocouches	20
I.4.2. Stratifiés	20
I.5. Sandwichs	21
I.5.1. Généralités	21
I.5.2. Avantages des Sandwichs	22
I.5.3. Inconvénients des Sandwichs	22
I.5.4. Matériaux constitutifs	22
I.5.5. Composites sandwichs	23
I.6 Applications commerciales et industrielles des matériaux composites.....	24
I.6.1. Transport aérien	24
I.6.2. Transport ferroviaire	26
I.6.3. Transport routier	26

<i>Chapitre II</i>	<i>Homogénéisation et analyse du comportement mécanique</i>
--------------------	---

II.1 .Les caractéristiques du mélange renfort – matrice	27
II.2 .Constitution d’un matériau composite unidirectionnel	28
II.3. Calcul des caractéristiques mécaniques des composites	29
II.3.1 Module d’ Young longitudinal “ E_L ”	29
II.3.2 Module de Young transversal “ E_T ”	30
II.3.3 Module de cisaillement longitudinal “ G_{LT} ”	31
II.3.4 Coefficient de poisson longitudinal “ ν_{LT} ”	32
II.4 Matériau composite en-dehors de ses axes principaux.....	34
II.4.1.Matrice de rigidité et de souplesse	34
II.5 Etat de contraintes planes	35
II.5.1 État des contraintes à deux dimensions	35
II.5.2 Matrice de rigidité dans les axes principaux	35
II.6 Théorie classique des stratifiés (sans cisaillement transverse)	36
II.6.1 Champ des déformations	36
II.6.2 Champ des contraintes.....	37
II.6.3 Expression des Résultantes et Moments.....	37
II.6.3.1 Résultantes en membrane	37
II.6.3.2 Moments de flexion et de torsion	38

SOMMAIRE

II.7 La théorie des stratifiés (avec cisaillement transverse)	38
II.7.1 Champ des déformations	38
II.7.2 Champ des contraintes	39
II.7.3 L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse	40
II.8 Théorie des plaques sandwichs	40
II.8.1 Champ des déformations	41
II.8.2 Champ des contraintes	41
II.8.3 Équation constitutive	42

<i>Chapitre III</i>	<i>La rupture et l'endommagement des matériaux composites</i>
---------------------	---

III. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites.....	43
III.1. Introduction	43
III.2. Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel	43
III.3 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale	45
III.4. Composite unidirectionnel soumis à une traction transversale	47
III.5. Rupture des stratifiés	47
III.6 Critères de rupture	48
III.6.1.Critères de Tsai- HILL	49

<i>Chapitre IV</i>	<i>Programmation sous environnement Delphi</i>
--------------------	--

IV.1.L'interface de Delphi	51
IV.2.La fenêtre principale	53
IV.2. 1.La barre de menus	53
IV.2. 2.La barre d'outils	53
IV.2. 3.La palette de composants	53
IV.1 .4. Présentation et organigramme du code source.....	55
IV. 3.Développement du programme de calcul des stratifiés	57
IV. 3.1.Architecture générale du logiciel développé.	57

<i>Chapitre V</i>	<i>Applications numériques et validation</i>
-------------------	--

V.1- Exemple 1. Plaque stratifiée en contraintes planes – vérification à la rupture	58
---	----

SOMMAIRE

V.1.2. Résolution	59
V.1.2.1. Les déformations planes	59
V.1.2.2. Vérification de la rupture dans chaque couche	63
V.2. Exemple 2 : Flexion d'une plaque stratifiée avec cisaillement transverse	72
V.2.1. Calcul de la matrice constitutive globale	75
V.2.2. La Matrice constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse	77
V.3. Exemple 3 : Matériaux de Sandwich	85
V.3.1. Calcul de la matrice constitutive globale	87
V.3.2. La Matrice constitutive de la plaque Sandwich.....	89

Conclusion générale	97
---------------------------	----

Références bibliographiques

Annexe : 1 Relations de Base

Annexe : 2 Programme source développé en Delphi

Liste des figures

Figure. I Les constituants de base de composite	-3-
Figure. I.2 Les caractéristiques principales des matériaux composites	-5-
Figure. I.3 Les différents types des constituants de.....	-6-
Figure. I.4 chaîne et trame d'un tissu	-7-
Figure. I.5 Taffetas déséquilibré (chaîne <u>carbone T300 3K</u> , trame verre E, 160 g/m2, ici pré imprégné d'époxyde	-8-
Figure. I.6 Taffetas équilibré (roving <u>verre E</u> , 150 g/m2)	-8-
Figure. I.7 Sergé 2x2 équilibré (verre E, silionne, 295 g/m2)	-8-
Figure. I.8 Satin de 4 équilibré (carbone T300 3K, 285 g/m2	-8-
Figure I.9 Tresse plate (verre E)	-8-
Figure. I.10 tissages cylindrique et conique.....	-9-
Figure. I.11 Tissage 4D.....	-9-
Figure. I.12. Tissage 3D orthogonal	-9-
Figure. I.13 Bobines de fibre de verre, roving et silionne (Cliché Saint Gobain Vetrotex)	-10-
Figure. I.14 Stratifil bouclé : présentation.....	-10-
Figure. I.15 Vue de détail d'un mat à fils coupés.....	-10-
Figure I.16 Mat à fil coupé (25 mm)	-11-
Figure. I.17 Mat à fil continu	-11-
Figure .I.18 Exemple de trois armures toile réalisée A partir de stratifils de masses linéiques différentes (2400, 1200,320 tex)	-11-
Figure. I.19 Tissus stratifils, armures unidirectionnelles	-12-
1. Tissus unidirectionnels sens trame	
2. Tissus unidirectionnels sens chaîne	
Figure I.20 Complexe mat- tissus stratifil unidirectionnel, avec liage chimique	-12-
Figure. I.21 Principaux matériaux de renfort	-16-
Figure. I.22 Les différentes familles de matrice	-17-

Figure. I.23 pli unidirectionnel matrice	-20-
Figure. I.24 stratifié.....	-20-
Figure. I.25 Notation d'une plaque composite.....	-21-
Figure. I.26. Plaque sandwich.....	-22-
Figure. I.27 Matériaux sandwiches à âmes pleines	-23-
Figure. I.28. Matériaux sandwiches à âmes creuses.....	-23-
Figure. I.29 Coque de bateau.....	-24-
Figure. I.30 Pièce aménagement intérieur d'avion en composite tissu de fibres de verre dans une résine phénolique	-25-
Figure. I.31 Poutre ventrale composite sur avion Airbus A340-500/600. Pièce de 16 m de long en composite monolithique fibre de carbone dans une résine époxyde	-25-
Figure. I.32 utilisation des composites en transport routier.	-26-
(a) Cadre d'un vélo en composite	
(b) Habillage de portière de voiture en lin/polypropylène	
(c) Bloc avant composite et plancher composite	
Figure II.1 Composite unidirectionnel	-28-
Figure. II.2 Schéma simplifié d'une traction longitudinale	-29-
Figure. II.3 Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.....	-30-
Figure. II.4 Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal	-31-
Figure. II.5 Schéma par couches d'une traction longitudinale	-32-
Figure. II.6 Plis unidirectionnel, axes locaux (l,t,z) et axes globaux (x,y,z).	-34-
Figure .II.7 Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse	-38-
Figure II.8 Notations d'une plaque sandwich.....	-40-
Figure.III.1 Différents processus de rupture de la matrice associée à la rupture d'une fibre	-44-
Figure .III.2 Rupture transverse de la matrice	-44-
Figure. III.3: Rupture longitudinal	-45-
Figure .III.4 Décohésion fibre- matrice.....	-45-

Figure .III.5 Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre- matrice.....	-46-
Figure .III.6 Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre- matrice.....	-46-
Figure .III.7 Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale.....	-47-
Figure .III.8 Mécanisme de rupture observés dans les stratifiés.....	-48-
Figure. III.9 Traction en-dehors des axes principaux	-49-
Figure. V.1 Exemple d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite (verre/Epoxyde)	-58-
Figure. V.2 La variation des contraintes en fonction des déformations dans une plaque composites (verre/Epoxyde).	-62-
Figure. V.3 variation de coefficient α en fonction de l'orientation des fibres (θ).	-65-
Figure. V.4 exemple II d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite à 8 plis (carbone HR /Epoxyde).	-66-
Figure. V.5 La variation des contraintes en fonction des déformations dans une plaque composites (verre/Epoxyde).	-68-
Figure. V.6 variation de coefficient α en fonction de l'orientation des fibres (θ).	-71-
Figure. V.7. Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Verre/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments	-72-
Figure. V.8 variation des contraintes en fonction des déformations.....	-74-
Figure. V.9. Les contraintes de cisaillements τ_{yz}, τ_{xz} en fonction des déformations en cisaillement transverse γ_{yz}, γ_{xz}	-75-
Figure. V.10 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures	-78-
Figure. V.11 Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Carbone(HR)/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments	-79-
Figure. V.12 Variation des contraintes en fonction des déformations.....	-81-

Figure. V.13 les contraintes de cisaillements τ_{yz}, τ_{xz} en fonction des déformations en cisaillement transverse $\gamma_{yz}, \gamma_{xz} (\theta)$	-82-
Figure. V.14 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures	-85-
Figure. V.15 plaque d'un sandwich	-85-
Figure. V.16 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures.....	-90-
Figure. V.17 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures.....	-96-

Liste des tables

Tableau. I.1 : Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base.....	-17-
Tableau. I.2 : Principales caractéristiques mécaniques des résines (réf.CETIM Mallard, Rapport DPE 1991).....	-20-
Tableau II.1 : Quelques caractéristiques des fibres usuelles.....	-33-
Tableau II.2 : Quelques caractéristiques des résines usuelles	-34-

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

Introduction Générale

Le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques au besoin d'allègement dans un même matériau, qui par la suite doit s'adapter aux solutions technologiques des problèmes à résoudre.

Un matériau composite résulte de l'association de deux matériaux différents aussi bien par leur forme que par leurs propriétés mécaniques ou chimiques pour tenter d'accroître leurs performances. Les deux constituants du composite sont la matrice et le renfort, qui en se combinant donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés diffèrent suivant les directions. Les matériaux constituant le composite sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite en faire par la suite. Les critères de choix peuvent être, par exemple, les propriétés mécaniques requises, la résistance à la chaleur ou à l'eau ? ou même la méthode de mise en œuvre.

Il n'est plus à démontrer l'engouement et l'innovation créés par les matériaux composites dans les secteurs de la construction et du transport, plus résistantes, plus légères le fruit d'une course constante à l'innovation .les matériaux composites répondent parfaitement à ces critères, et le large choix des constituants nécessaires à leur élaboration ouvre un vaste spectre de propriétés mécaniques. Mais il est de nombreuses utilisations où ils ne suffisent pas. [1]

Dans cette perspective nous avons jugé utile de fournir aux ingénieurs, désireux de se consacrer à l'étude et la conception de pièces et d'éléments en matériaux composites, un outil de calcul interactif et rapide sous environnement agréable et ergonomique. Cet outil devrait leur permettre de faire les calculs et vérification nécessaires avant la phase de choix des éléments constitutifs et de conception.

L'objectif du présent travail est de développer un logiciel interactif de calcul et vérification et d'homogénéisation des plaques stratifiées et plaques sandwich, sous environnement Delphi.

Le présent mémoire sera organisé en cinq chapitres, à savoir :

- ❖ **Le premier chapitre**, sera consacré à des généralités sur les matériaux composites et leurs caractéristiques mécaniques.

- ❖ L'homogénéisation et analyse le comportement mécanique des matériaux composites seront bien détaillées dans **le deuxième chapitre**.

- ❖ **Le troisième chapitre** sera consacré à l'étude des Mécanismes de rupture et d'endommagement dans les matériaux composites

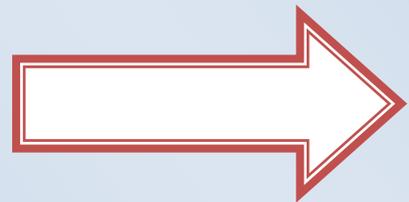
- ❖ **le quatrième chapitre**, il sera question d'un bref aperçu sur le langage Delphi et l'architecture générale du logiciel développé.

- ❖ **le dernier chapitre** sera consacré aux applications numériques et à la validation du programme développé par des exemples concrets.

Enfin une conclusion et des recommandations viendront clôturer notre mémoire.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites



I.1. Introduction :

Qu'est-ce qu'un composite?

Composite: formé d'éléments très différents, souvent disparates, dans le *domaine des matériaux*, un matériau composite peut être défini comme étant une combinaison de deux ou plusieurs matériaux distincts ayant des interfaces reconnaissables.

Un matériau composite résulte de l'association d'au moins deux matériaux *non miscibles*, dont les qualités se combinent avec synergie. C'est donc, par essence même, un produit *hétérogène*.

Renfort –Matrice

Outre ces deux constituants de base, on trouve également:

L'interface -la charge -additifs spécifiques

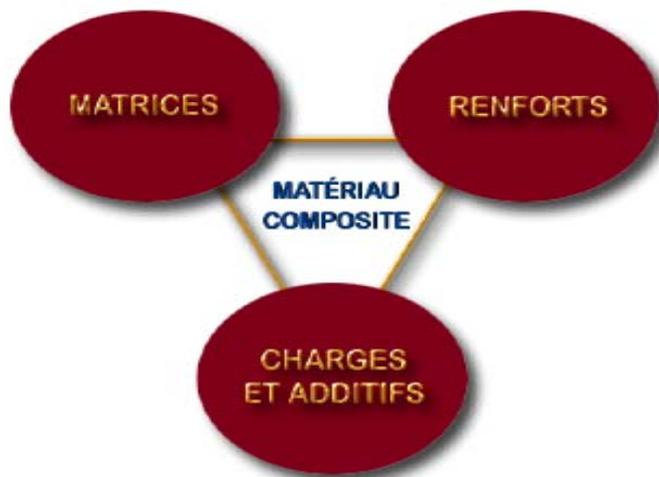


Fig. I.1 les constituants de base Des composites

I.1.1.Caractéristiques générales des composites

Sont formés d'un **renfort** de faible densité et de grande résistance et rigidité et d'une **matrice** qui lie les renforts en une masse compacte. Le renfort et la matrice ont des propriétés mécaniques et physiques très différentes. Il s'ensuit que les composites sont des matériaux très particuliers:

- Matériaux anisotropes.
- Propriétés mécaniques et physiques particulières.
- Design et conception très différents de ceux des matériaux conventionnels.

L'objet de ce chapitre est de dégager une synthèse générale mais non exhaustive des divers constituants. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se rapporter à divers ouvrages [2 à 7].

I.1.2. Types de matériaux composites:

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites, les biomatériaux, Etc. Le principal intérêt de l'utilisation des Composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique). Parmi les Composites, on distingue deux types : *les composites grandes diffusions (GD)* et *les composites hautes performances (HP)*.

- Les GD représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des Plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines Polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (+ de 99% des renforts utilisés !). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.
- Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les Renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP. Ces calculs feront l'objet de divers chapitres de ce mémoire. Il faudra toujours tenir compte du fait que l'élaboration de la structure est liée à celle du matériau, que pour les pièces travaillantes, on utilisera plutôt des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures et capotages on utilisera des plastiques renforcés.

I.1.3. Avantages des matériaux composites :

- Gain de masse
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- Grande résistance à la fatigue.

- Insensibles aux produits chimiques utilisés en "mécanique " comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole.

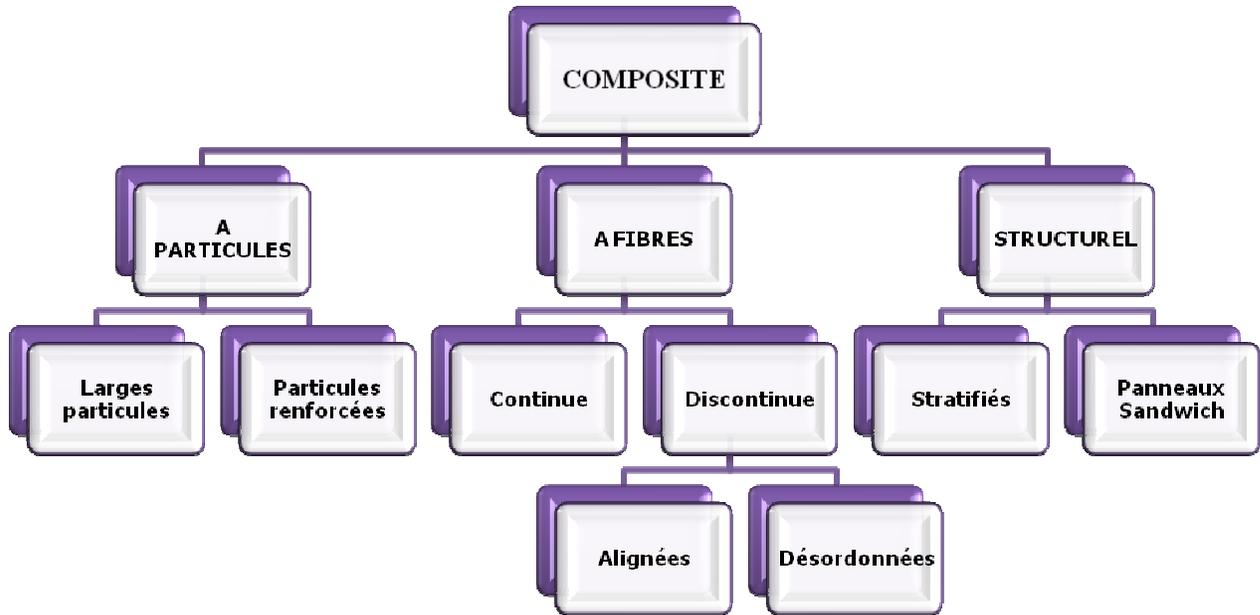


Fig. I.2 Les caractéristiques principales du matériau composite

I.1.4. Inconvénients des matériaux composites :

- Vieillessement sous l'action de l'eau et de la température (pour l'aluminium et fibre de carbone)
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- Meilleure tenue au feu (classement M) que les alliages légers mais émission de fumées (classement F) parfois toxiques pour certaines matrices.
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

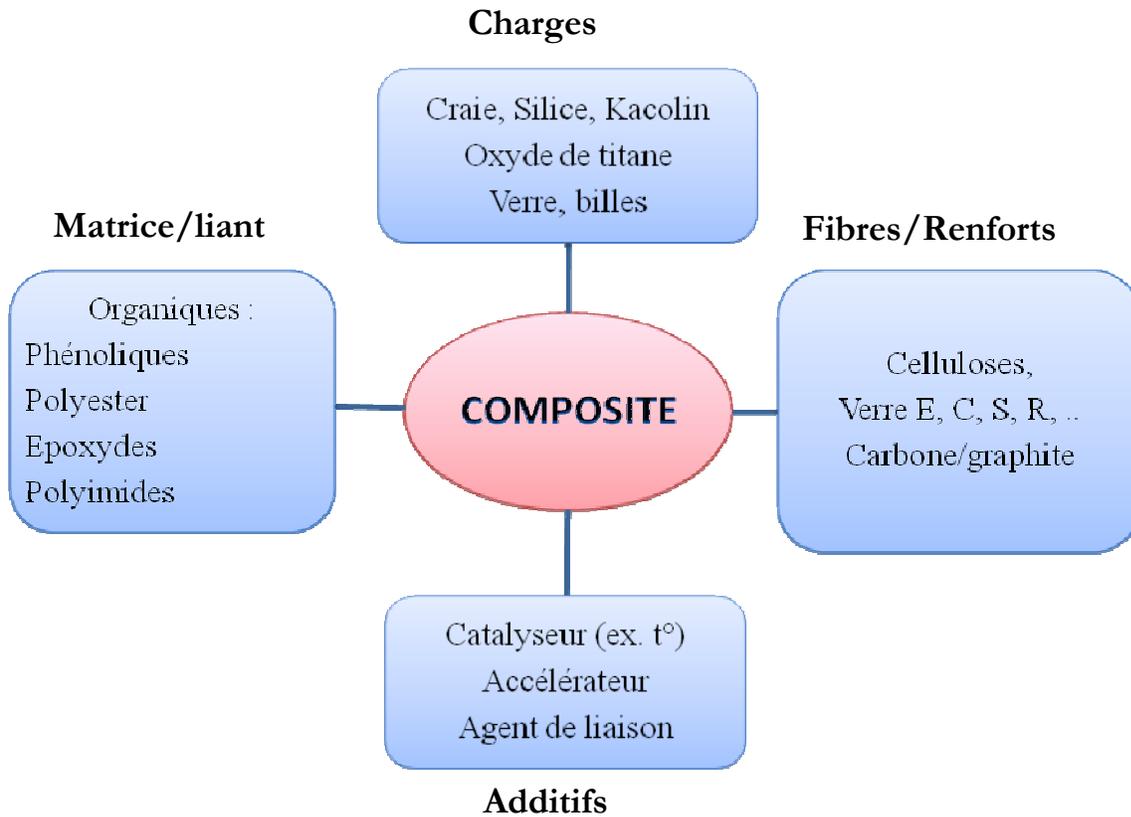


Fig I.3 Les différents types des constituants de base

I.2- Les renforts et tissus

I.2.1-Forme de renfort : les renforts sont généralement composés de filament

- Décomposés en fil de base et en mèche puis en demi-produits comme la verranne, les rovings ou stratifié (mèches de fils sans torsion, direct, assemblé, bouclé, ensimés), la sillionne (fils de 102 à 408 filaments ensimés), les fils coupés (de base, textiles, texturés, coupés, broyés, de 3 à 5 mm de long, ensimés), qui sont tous des fibres de tissage. Les particules peuvent être des billes pleines ou creuses, les fibrilles, les écailles.
- Les renforts sous forme de semi-produit tel que : les mats (feutres de "sillionnes " ou de fils continus coupés, 25 à 50 mm agglomérés par un liant, les feutres, les rubans les tissus à armature taffetas, sergé, satin, unidirectionnelle, bidirectionnelle ou les gaines les tresses et les préformé (roving + liant projetés et durcis par étuvage sur une forme, pour les grandes séries).

I.2.1.1-Formes linéiques :

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres (une dizaine), et ne peuvent par conséquent être utilisées sous forme unitaire. Pour leur utilisation pratique, ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes. La nomenclature générale des diverses formes linéiques est encore mal déterminée, et généralement dérivée de celle utilisée pour les fibres de verre.

L'unité de masse linéique est le tex, masse d'un fil de longueur égale à 1000 mètre. Soit :

$$1 \text{ tex} = 1 \text{ g/Km}$$

En fait, on devrait plutôt écrire :

$$1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ Kg/m}$$

Conformément au système S.I .d'unités.

I.2.1.2- Formes surfaciques :

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

1. Les mats

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

2. Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser il constitué : de chaîne + trame.

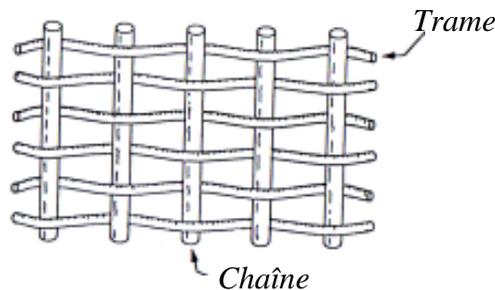


Fig. I.4 chaîne et trame d'un tissu

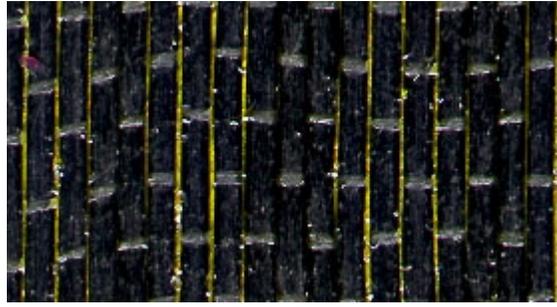


Fig. I.5 Taffetas déséquilibré (chaîne carbone T300 3K, trame verre E, 160 g/m², ici pré imprégné d'époxy

- La chaîne, ensemble de fils parallèle répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.
- La trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne. Les tissus différent par le type de fils utilisés (fils simples, mèches, etc.), donc par la masse linéique des fils, et le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et de fils de tram.

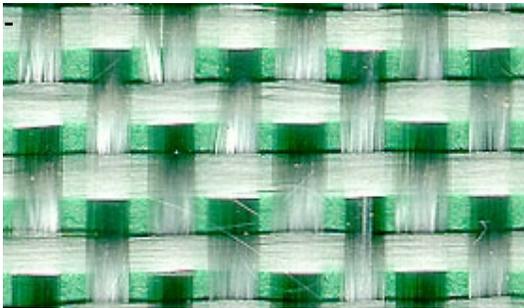


Fig. I.6 Taffetas équilibré (roving verre E, 150 g/m²)

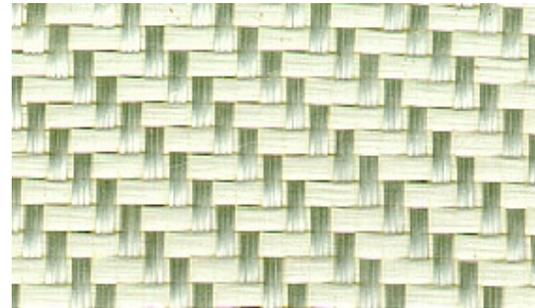


Fig. I.7 Sergé 2x2 équilibré (verre E, silionne, 295 g/m²)

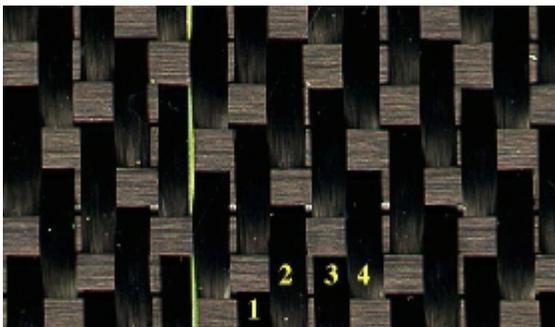


Fig. I.8 Satin de 4 équilibré (carbone T300 3K, 285 g/m²)



Fig. I.9 Tresse plate (verre E)

I.2.1.3. Structures tissées multidirectionnelles :

➤ Tresses et préformes

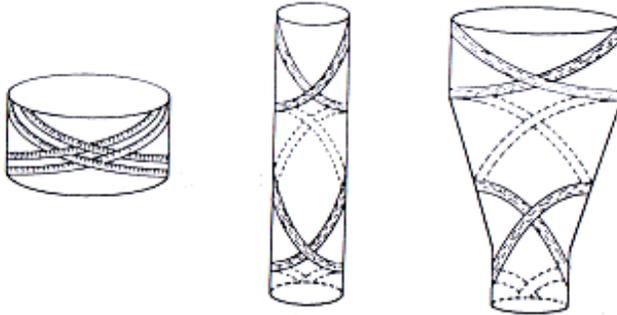


Fig. I.10 .tissages cylindrique et conique

➤ Tissus multidirectionnels

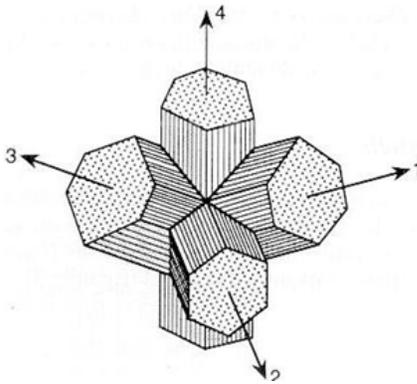


Fig. I.11 Tissage 4D

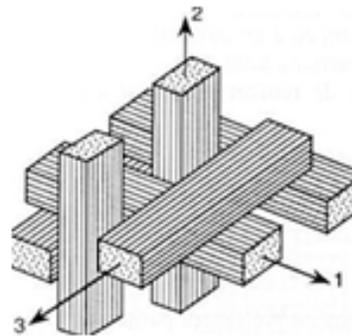


Fig. I.12 Tissage 3D orthogonal

I.2.2. Les principales fibres

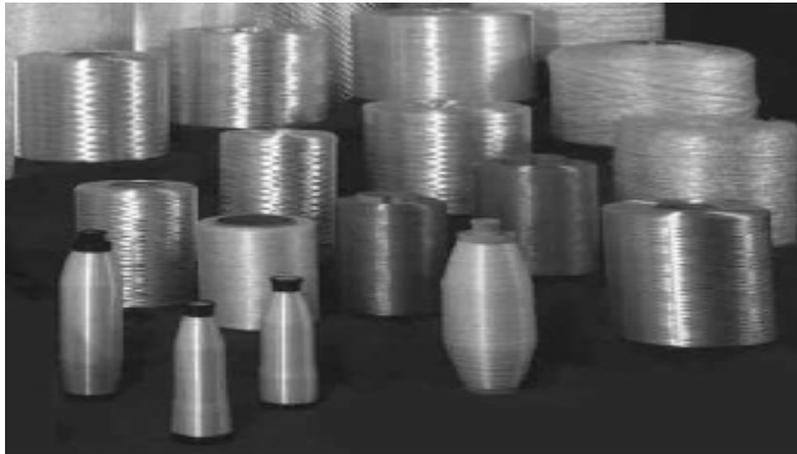
I.2.2.1. Les fibres de verre, propriétés et élaboration

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques dizaines de micromètres), le verre perd ce caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. ces produit peu coûteux, associés de procédés assez simple d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport

performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

I.2.2.2. Produits industriels en verre textile

- a. Les fils de base
- b. Fibres broyées
- c. Fils de base coupés
- d. Stratifil



*Fig. I.13 Bobines de fibre de verre, roving et silionne
(cliché Saint Gobain Vetrotex)*

- e. Stratifil bouclé

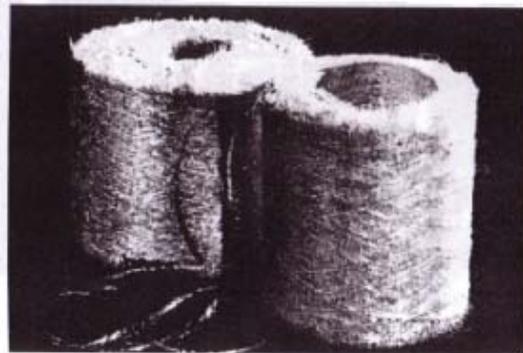


Fig. I.14. Stratifil bouclé : présentation commerciale

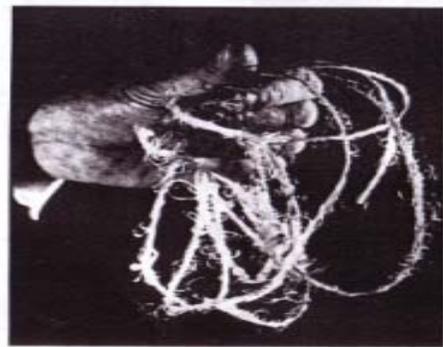


Fig. I.15 Stratifil bouclé : vue de détail

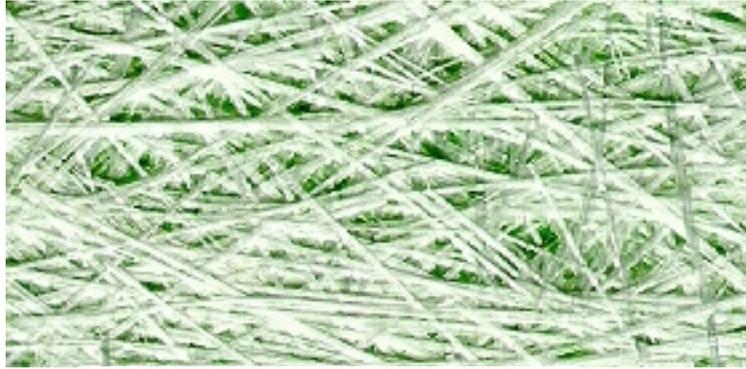
f. Mats à fils coupés :

Fig. I.16 Mat à fil coupé (25 mm)

g. Mats à fils continus :

Fig. I.17. Mat à fil continu

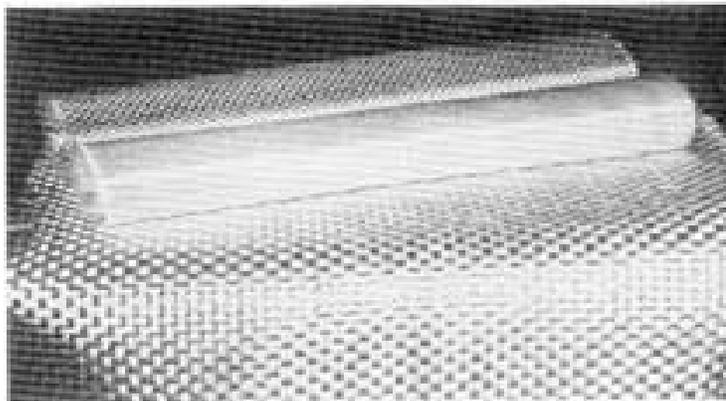
h. Tissus

Fig. I.18 Exemple de trois armures toile réalisée A partir de stratifils de masses linéiques différentes (2400, 1200,320 tex)

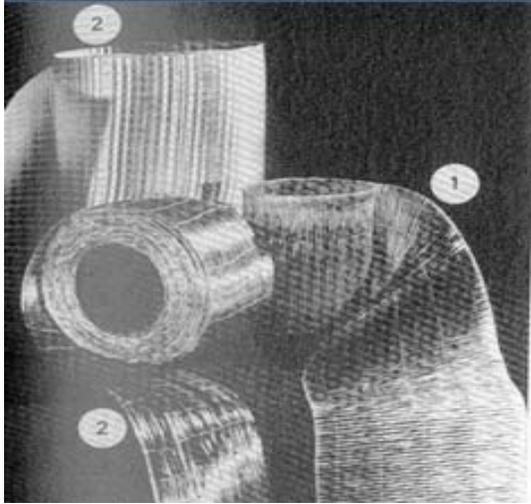


Fig. I.19 Tissus stratifiés, armures unidirectionnelles

1. Tissus unidirectionnels sens trame
2. Tissus unidirectionnels sens chaîne

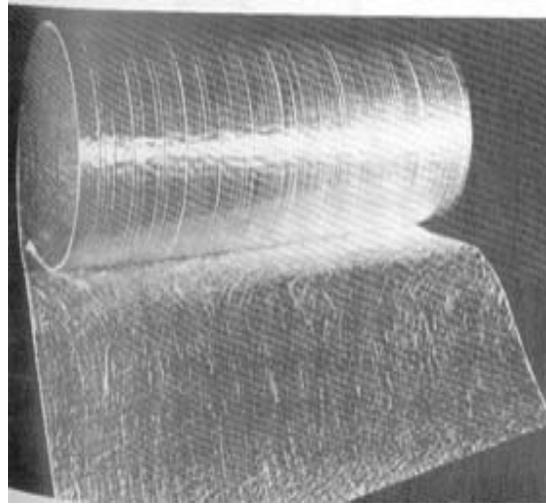


Fig. I.20 Complexe mat-tissu stratifié unidirectionnel, avec liage chimique

I.2.2.3. Les fibres de carbone, propriétés et élaboration

Les fibres de carbone sont élaborées à partir d'un polymère de base appelé *précurseur*, se présentant lui-même sous forme de fibres orientées et réticulées. Actuellement, les fibres utilisées sont les fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). Ces fibres acryliques élaborées sont connues sous divers noms commerciaux : crylor, courtelle, dralon, orlon, etc. la qualité des fibres de carbone finales dépend des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique, sans fusion des fibres, aboutissant à une graphitisation dans laquelle on retrouve la structure initiale des fibres. Les procédés actuels utilisent les mèches de filament acryliques assemblés sans torsion (généralement 500, 1000, 10 000, etc. filaments), et leur font subir quatre traitements successifs : une oxydation, une carbonisation, une graphitisation et un traitement de surface .

I.2.2.4. Produits industriels

Le produit de base est le fil continu ou stratifié carbone, constitué de mono filaments de carbone (Par exemple : 500, 1000, 3000, 6000, 10 000, etc. filaments) assemblés sans torsion. Ces

stratifils peuvent être utilisés directement pour les procédés de fabrication de composite par pultrusion ou par enroulement filamentaire. Les stratifils peuvent être également tissés pour obtenir :

- Des rubans,
- Des tresses,
- Des tissus unidirectionnels ou multidirectionnels,
- Des tissés hybrides (verre- carbone, Kevlar- carbone)

Ces diverses formes peuvent éventuellement être pré imprégnées.

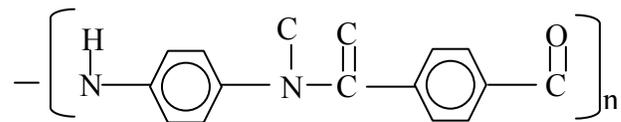
Les stratifils peuvent également être coupés à des longueurs de quelques millimètres et utilisés pour l'élaboration de résines chargées.

I.2.2.5 Les fibres aramides à caractéristiques élevées

I.2.2.5.1. Généralités

Les fibres aramides à caractéristiques élevées sont généralement connues sous le nom de « Kevlar », nom, commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA), et commercialisée en 1972. D'autres groupes élaborent également des fibres aramides, en particulier le groupe AKZO (Allemagne- Hollande) qui produit des fibres aramides sous la désignation de fibres « Twaron », et le groupe japonais Teijin Ltd des fibres « Tehnora ».

Les fibres aramides sont des fibres polyamides ou polyamides aromatiques de synthèse dont la structure est constituée de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO HN :



L'élaboration des fibres est effectuée par synthèse à basse température (-10°C), puis par filage en solution. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

I.2.2.5.2. Utilisations industrielles

Les fibres aramides sont disponibles sous forme de stratifils, de tissus, de tresses et de rubans. L'une de leurs premières utilisations grand public a été de remplacer les armatures d'acier dans les pneumatiques, les courroies et les tuyaux. Compte tenu de leur légèreté et de leur bonne résistance au choc, à l'impact et l'abrasion, les fibres aramides sont utilisées pour la fabrication de certains articles de sports (skis, raquettes de tennis, etc.), et pour la fabrication de protections contre les projectiles (blindages, gilets pare-balles, casques, gants, etc.), de produits de friction et de joints, de renforcement de câbles, etc.

I.2.2.6. Les fibres céramiques

Généralités

Divers fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborés par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production sont :

- les fibres de bore (B),
- les fibres de bore (B)- carbure de bore (B_4C),
- les fibres de carbure de silicium (SiC),
- les fibres bore- carbure de silicium, appelées Borsic,

Les fibres sont en réalité de gros filaments (diamètre de l'ordre de $100\mu m$), formés dans une âme (le fil support) en tungstène ou en carbone d'un diamètre d'environ $10\mu m$, recouverts :

- d'une couche de bore d'épaisseur environ $40\mu m$ (fibres de bore),
- d'une couche de bore d'épaisseur $40\mu m$ et d'une couche de carbure de bore de $4\mu m$ d'épaisseur (fibres B- B_4C),
- d'une couche de carbure de silicium (fibres SiC),
- d'une couche de bore et d'une couche de carbure de silicium (fibres BorSiC).

I.2.2.7. Les fibres synthétiques thermostables

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse, et qui conservent leurs caractéristiques mécaniques à températures élevées. Associées à des résines thermostables, elles permettent d'obtenir des matériaux dont les caractéristiques mécaniques de

ces fibres sont toutefois nettement plus faibles que celles des fibres usuelles. Elles sont utilisées dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles, cônes de rentrée de véhicule spatial, etc. Parmi ces fibres, nous avons :

- Le Kermel élaboré par Rhône- Poulenc,
- Le Nomex développé par Dupont de Nemours,
- Le Kynol fabriqué par Nippon Kynol,
- La fibre PBI (polybenzimidazole) élaborée par Hoechst- Célanèse,
- La fibre Apyeil de Unitika Ltd.

I.2.2.8. Autres fibres

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières, ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à l rupture, excepté les fibres métalliques.

Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de :

- Produits à bas prix de revient,
- Prix à haute isolation thermique,
- Produits à bonne conductibilité thermique ou électrique,
- Produits à haute absorption acoustique.

Parmi ces fibres nous avons :

a. Les fibres d'origine végétale :

- Le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc.
- Le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

b. Les fibres d'origine minérale :

- L'amiante (interdite dans certaines utilisations),
- La silice.

c. Les fibres synthétiques :

- Fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.),
- Fibres polyamides,

- Fibres polyéthylène (spectra, dyneema),
- Fibres polypropylène.

d. Les fibres métalliques

- Acier,
- Cuivre,
- Aluminium,

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour :

- Leurs bonnes conductibilités thermiques et électriques,
- Leurs caractéristiques thermo- mécaniques.

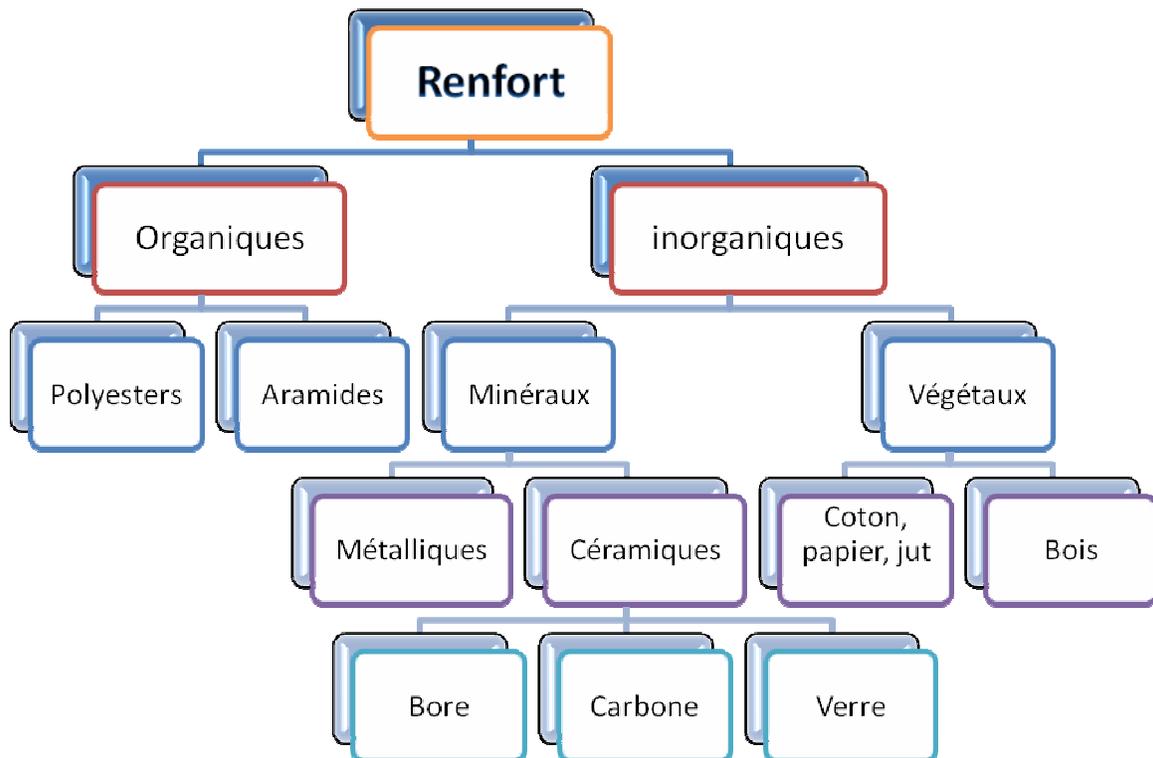


Fig. I.21 Principaux matériaux de renfort

	Densité	Charge de rupture en traction (Mpa)	Charge de rupture en comp (Mpa)	Allongement à la rupture (%)	Module d'élasticité longi (Mpa)	Diamètre du filament élémentaire en (mm).	Prix
Verre (E)	2.54	3400	1200	4.8	73000	3-30	12
Verre (R)	2.48	4400	1300	5.4	86000	3-30	50
Aramide (BM)	1.45	3100	500	2	70000	12	150
Aramide (HM)	1.45	3100	500	1	130000	12	200
Carbone (HT) Haute ténacité	1.78	2800	1800	0.5	200000	8	300/ 1000
Carbone (HM) Haute module	1.8	2200	1300	0.8	400000	8	300/ 1000
Bore	2.63	3500	3500		400000	100-200	3000
Acier Xc 10	7.85	1000			210000		

Tableau I.1 Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base

I.3. Les matrices

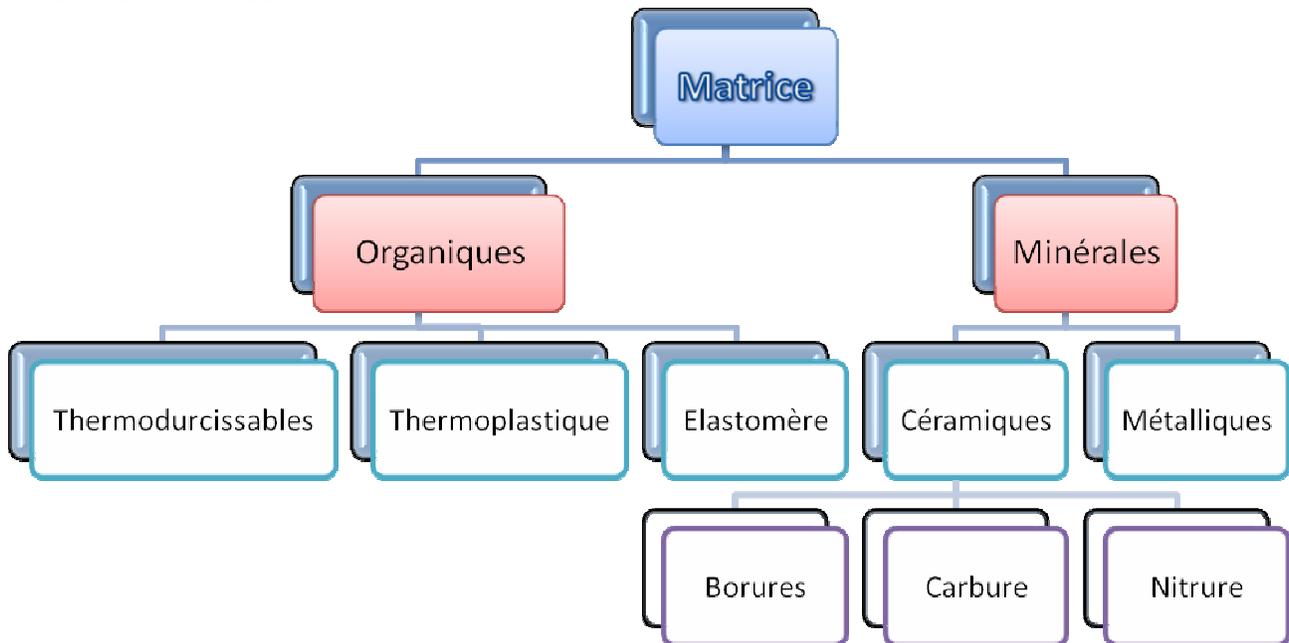


Fig. I.22 Les différentes familles de matrice

I.3.1. Matrice organique : elle se caractérise par deux familles de résines : thermodurcissable et thermoplastique. Les Résine thermodurcissable sont les produits les plus employés actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites à cause de leurs propriétés mécaniques élevées, et comme leur nom l'indique, ces produits durcissent après un cycle de chauffage, appelé, cycle de polymérisation ou cycle de réticulation.

Les matrices de ce type sont le plus souvent des résines polyesters, époxydes, phénoliques, silicones, élastomères et caoutchoucs.

I.3.2. Matrice métalliques : parmi les matériaux métalliques utilisés pour constituer la matrice des matériaux composites, l'aluminium et ses alliages, le Nickel, le titane et le Magnésium. Un avantage essentiel apporté par une matrice métallique réside dans la possibilité d'utiliser le composite à des températures élevées, de plus de bonne conductibilité électrique et thermique et les bonnes caractéristiques mécaniques transverses, ce qui n'est pas le cas pour les composites à matrice organique.

I.3.3. Matrice en céramique : les céramiques sont utilisées pour la réalisation de pièces en matériaux composites et qui doivent supporter des températures excessivement hautes. Ainsi ils sont utilisés pour la fabrication d'éléments de machines à combustions sophistiquées, des organes d'engins spatiaux très exposés aux contraintes d'origines thermiques. La matrice de ce type est très difficile puisque elle nécessite des manipulations à des températures très élevées d'où l'intervention de main d'œuvre très qualifiée.

- Résine thermodurcissable : polymère transformé en un produit essentiellement infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physicochimique (catalyse, durcisseur).
- Résine thermoplastique : polymère pouvant être alternativement ramolli par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité.
- Résine thermostable : polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue. Cette

propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques.

- Elastomère thermoplastique : polymère fortement élastique.

Résines	nom	ρ (kg/m ³)	E(MPa)	ν	R(MPa)	α ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{c}$)	Prix
TD	Polyester	1300	3800	0.37	88	100	15
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	65	58
	époxyde	1220	5200	0.38	121	40	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	30	200
	polyimide	1217	3450	0.35	80	36	150
	phénolique	1350	3000	0.36	70	80	10
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	85	25
TP	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	70	30
	Polyester Saturé	1310	2800	0.33	55	90	
Métaux	aluminium	2630	69000	0.33	358	23	13
	Acier Xc 10	7850	210000	0.29	1000	1000	10
	cuiivre	8940	119000	0.30	350	17	11
	Magnésium	1660	42000	0.30	280	25	27

Tableau. I.2. Principales caractéristiques mécaniques des résines (réf. CETIM Mallard, Rapport DPE 1991).

Avec

ρ (kg/m³) : Masse volumique

E (MPa) : Module d'Young

ν : Coefficient de Poisson

R (MPa) : Limite élastique en traction

α ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{c}$): Dilatation thermique

I.4. Les matériaux composites structuraux

I.4.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (Unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

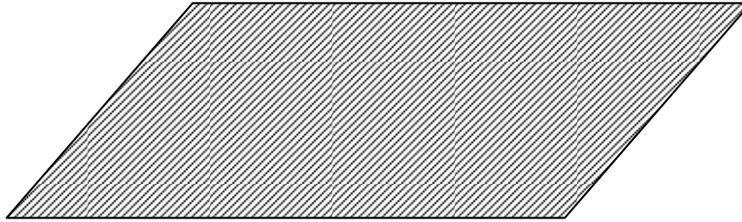


Fig. I.23 pli unidirectionnel.

I.4.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

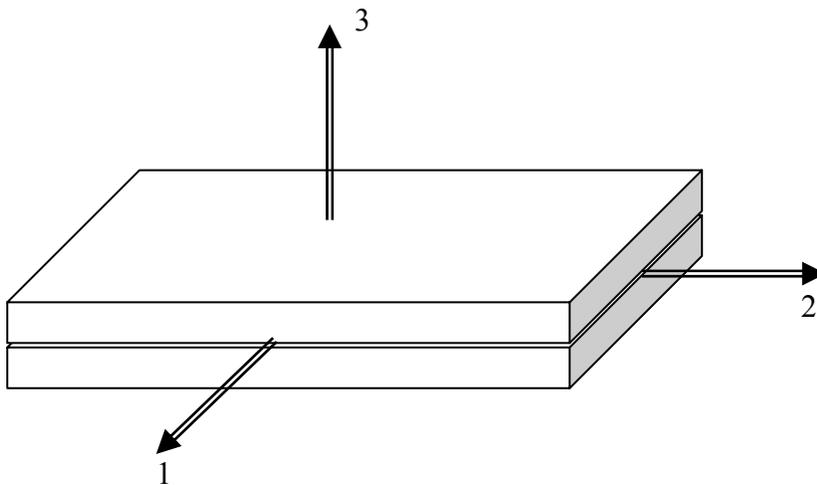


Fig. I.24 stratifié

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

Notation " composite " : Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)_2s$ est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , -45° , 90° et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

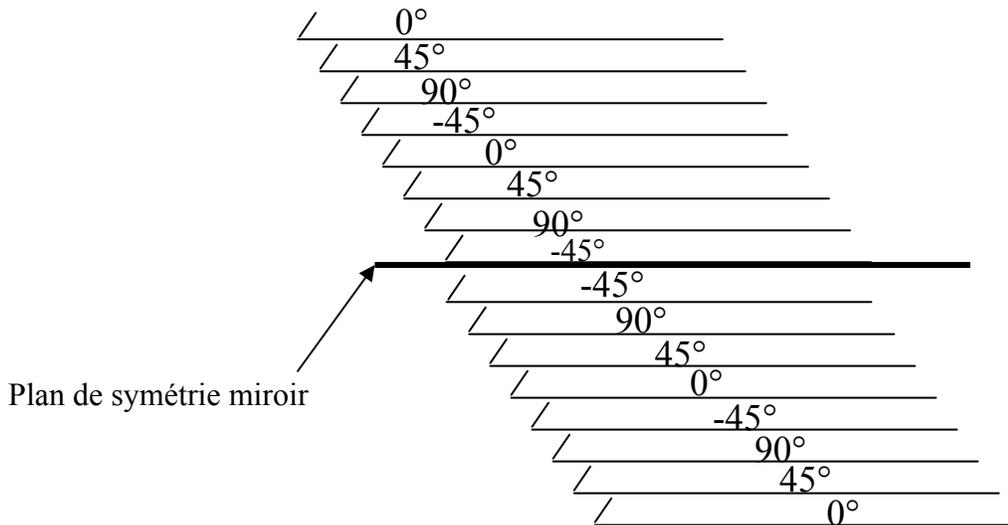


Fig. I.25 Notation d'une plaque composite

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ qui de couches orientée suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport un plan moyen.
3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

I.5. Sandwiches

I.5.1. Généralités

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une

structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

I.5.2. Avantages des Sandwiches

- Grande légèreté
- Grande rigidité flexionnelle (rapport E_I/ρ)
- Excellentes caractéristiques d'isolation

I.5.3. Inconvénients des Sandwiches

- mauvais amortissement et isolation acoustique (problème lié à la densité relativement basse)
- Tenue au feu moyenne pour certaines catégories d'âme
- Risques de flambement plus élevé que sur les autres structures
- Problème de décollement peaux/âme

I.5.4. Matériaux constitutifs

- Peaux : métal, stratifiés, contre-plaqués, thermoplastiques, amiante / ciment
- Ames : matériaux expansés, balsa, Nid d'abeilles aluminium ou carton imprégné, pontages, plaques nervurées en métal ou stratifié, etc.
- Assemblage des peaux avec l'âme : collage, soudure ou en cours de polymérisation pour les sandwichs en composites dans un moule.

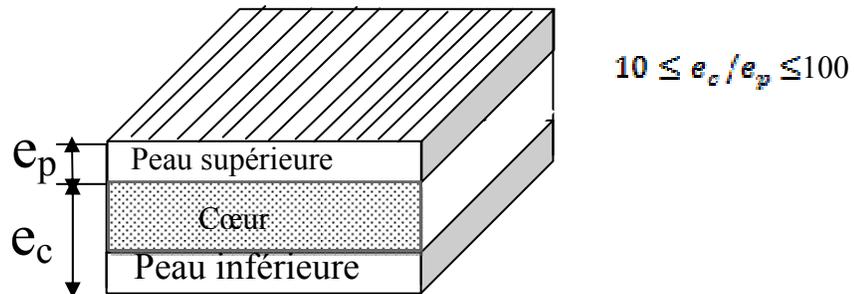


Fig. I.26 Plaque sandwich

I.5.5. Composites sandwiches

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

-Pour les âmes pleines (figure I.27) :

- Le balsa ou bois cellulaire ;
- Diverses mousses cellulaires ;
- Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques ;
- Etc. ;

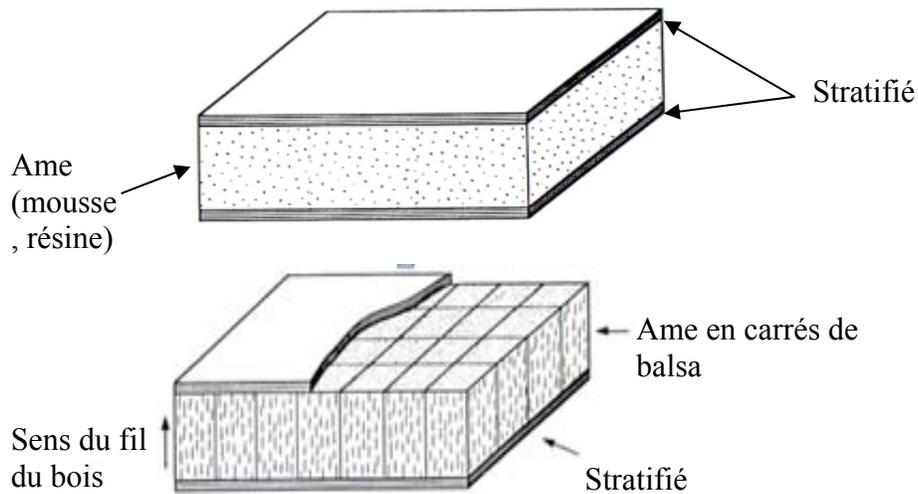


Fig. I.27 Matériaux sandwiches à âmes pleines

-Pour les âmes creuses (figure I.28), essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- Des alliages métalliques légers ;
- Du papier Kraft (enduit ou non de résine) ;
- Du papier polyamide, type papier Nomex ;
- Etc.



Fig. I.28 Matériaux sandwiches à âmes creuses

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.

Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à voir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme- peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

I.6 Applications commerciales et industrielles des matériaux composites

- L'industrie aéronautique, aérospatiale, automobile
- La construction navale
- Les transports utilitaires
- Les industries mécaniques
- Les industries électrique et électronique
- Articles de sport

Industries diverses: ameublement, armement, médecine

I.6.1. Transport aérien

Avions de tourisme –tout composite,

Planeurs – tout composites,

Avantage :

Augmentation de la performance et diminution des coûts

- Gain de masse:



Fig. I.29 Coque de bateau

- économie de carburant
- accroissement de la charge utile
- Bonne tenue à la fatigue
- durée de vie augmentée
 - Absence de corrosion
- moins d'inspection
- économie de la maintenance



Fig. I.30 Pièce aménagement intérieur d'avion en composite tissu de fibres de **verre** dans une résine **phénolique**



Fig. I.31 Poutre ventrale composite sur avion Airbus A340-500/600. Pièce de 16 m de long en composite monolithique fibre de **carbone** dans une **résine époxyde**

I.6.2. Transport ferroviaire

Avants de motrices, voitures, wagons, portes, sièges, panneaux intérieurs, gaines de ventilation.....

Les matériaux composites jouent un rôle très important en construction navale: vedettes rapides, bateaux de course, multicoques et transports rapides de passagers. Ils ont repoussé les limites structurelles et apporté de très fortes améliorations en termes de **robustesse, fiabilité, poids, vitesse et sécurité.**

I.6.3. Transport routier

- Caravanes
- Camion isotherme
- Arbre de transmission, Ressort de suspension
- Poutre de châssis

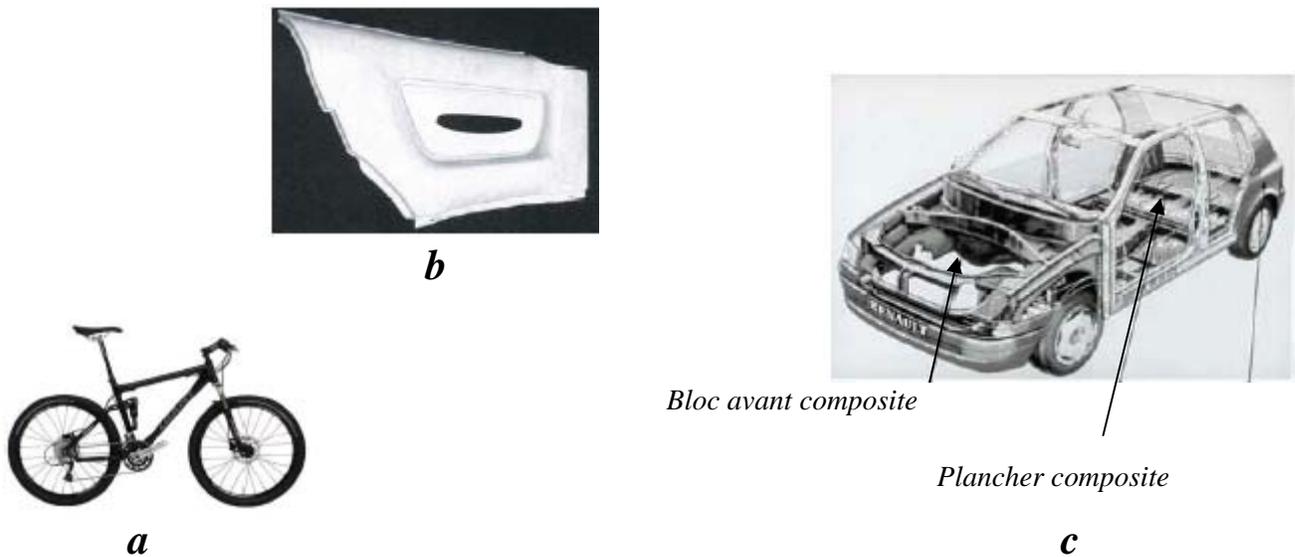


Fig. I.32 utilisation des composites en transport routier.

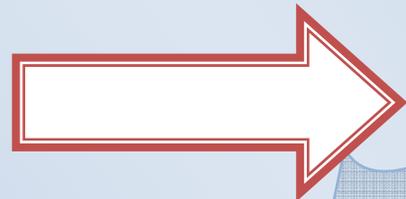
(a) Cadre d'un vélo en composite

(b) Habillage de portière de voiture en lin/polypropylène

(c) Bloc avant composite et plancher composite

Chapitre II

Homogénéisation et analyse du comportement mécanique



Introduction

Il est fondamental pour le concepteur de prévoir et de connaître aussi précisément que possible les caractéristiques géométriques d'un mélange « renfort + matrice » qui est la structure de base des pièces composites, [8].

II.1 Les caractéristiques du mélange renfort – matrice

On qualifie couramment le nom de pli le demi – produit « renfort + matrice » présenté sous forme quasi bidimensionnelle

- un unidirectionnel + matrice
- un tissu (chaîne + trame) +matrice.
- un mat + matrice.

- La teneur en masse de renfort

On appelle ainsi le rapport :

$$M_f = \frac{\text{Masse de renfort}}{\text{Masse totale}} \quad (\text{II.1})$$

En conséquence

- la teneur en masse de matrice est telle que :

$$M_m = \frac{\text{Masse de matrice}}{\text{Masse totale}} \quad (\text{II.2})$$

Ou encore :

$$M_m = 1 - M_f \quad (\text{II.3})$$

- La teneur en volume de renfort :

On appelle ainsi le rapport

$$V_f = \frac{\text{Volume de renfort}}{\text{Volume total}} \quad (\text{II.4})$$

En conséquence

- la teneur en volume de matrice telle que :

$$V_f = \frac{\text{Volume de matrice}}{\text{Volume total}} \quad (\text{II.5})$$

Ou encore :

$$V_m = 1 - V_f \quad (\text{II.6})$$

II.2 Constitution d'un matériau composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibre paires disposé dans une matrice. Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres. D'où l'importance de son étude. La cellule élémentaire d'un peut être considérée. En première approximation comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice

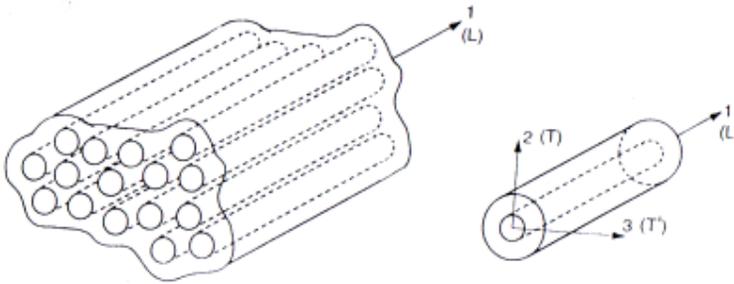


Fig. II.1 composite unidirectionnel [9].

- Matrice de rigidité et de souplesse :

La loi de Hooke s'écrit suivant l'une des deux formes matricielles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22} - c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad \sigma = C\varepsilon \quad (\text{II.7})$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66} \quad S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{66}$$

II.3 Calcul des caractéristiques mécaniques de composite :

II.3.1 Module d'Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (**figure. II.2**).

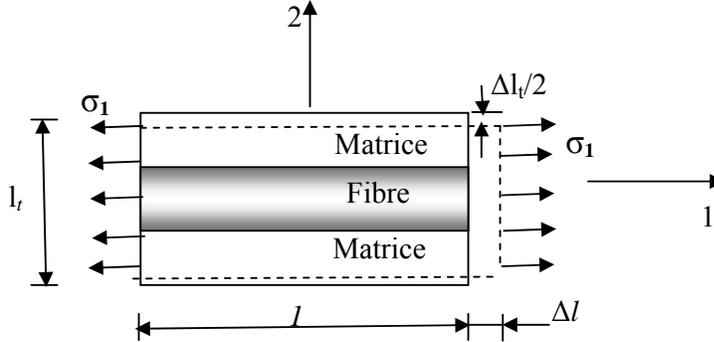


Fig. II.2 schéma simplifié d'une traction longitudinale [9].

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$

Où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \quad (\text{II.8})$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_l \quad (\text{II.9})$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad (\text{II.10})$$

Où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_l = \frac{F_1}{S}$ s'écrit :

$$\sigma_l = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (\text{II.11})$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_l = E_l \varepsilon_l \quad (\text{II.12})$$

La combinaison des relations (II.9) et (II.12) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_l = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (\text{II.13})$$

Cette expression est connue sous le nom de loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres.

II.3.2 Module d'Young transversal :

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversal ou le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres (**figure II.3**).

La hauteur des couches doit simplement vérifier

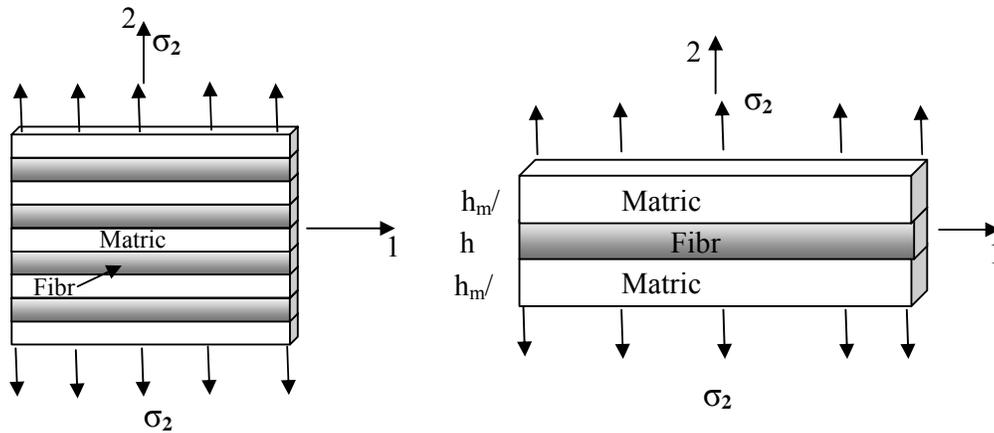


Fig. II.3 schématisation par couches d'un composite unidirectionnel [9].

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{Et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (\text{II.14})$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transversale est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transversale s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (\text{II.15})$$

L'allongement transversal d'une cellule élémentaire est :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m$$

Et la déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (\text{II.16})$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transversale :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (\text{II.17})$$

La combinaison des expressions 8 et 10 conduit à l'expression du module transversal :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad (\text{II.18})$$

L'expression du module d'Young transversal est :

$$E_T = E_m \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{E_m}{E_f} - 1 \right] V_f} \right] \quad (\text{II.19})$$

II.3.3 Module de cisaillement longitudinal :

Le module de cisaillement longitudinal G_{lt} est déterminé dans essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la (**figure II.4**).

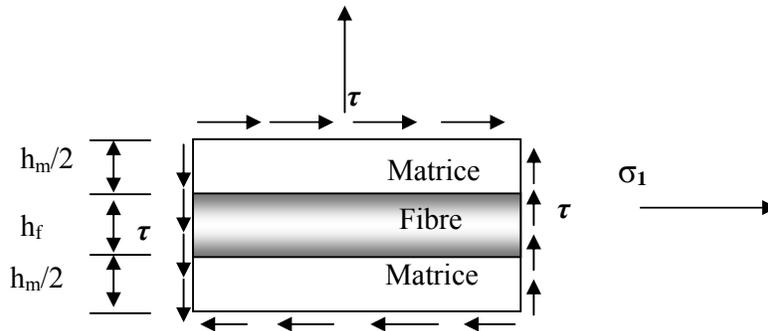


Fig. II.4. Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal [9].

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f \frac{\tau}{G_f} \quad \text{Et} \quad \gamma_m \frac{\tau}{G_m} \quad (\text{II.20})$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \delta_m = h_m \gamma_m$$

La déformation totale de la cellule est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (\text{II.21})$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad (\text{II.22})$$

En combinant les expressions II.20 et II.22, nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \quad (\text{II.23})$$

L'expression du module de cisaillement longitudinal est :

$$G_{LT} = G_m \left[\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{G}{G_{f_t}} V_f} \right] \quad (\text{II.24})$$

II.3.3 Coefficient de poisson longitudinal :

Le coefficient de poisson est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur (la figure II.5).

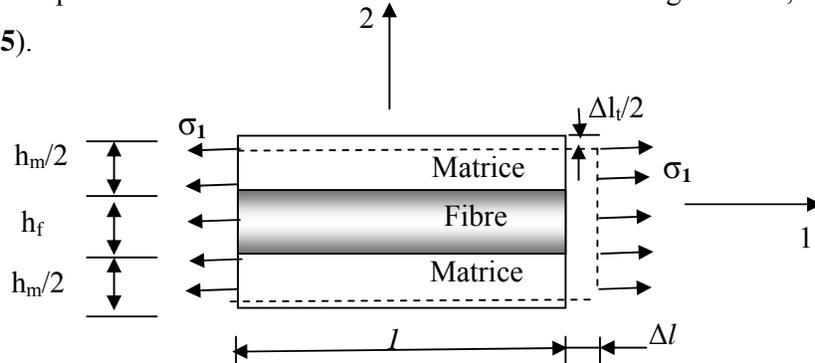


Fig. II.5. Schéma par couches d'une traction [9].

Les déformations transversales dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad \text{Et} \quad \varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad (\text{II.25})$$

L'allongement transversal de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon h_m - \nu_f \varepsilon h_f$$

Et la déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_m - h_f} = -[\nu_m(1 - V_f) + \nu_f V_f] \varepsilon_1 \quad (\text{II.26})$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m(1 - V_f) \quad (\text{II.27})$$

	Verre « E »	kevlar	Carbone « H.R »	Carbone « H.M »
Module d'élasticité longitudinal dans le sens l E_{f_l} (Mpa)	7 4000	130 000	230 000	390 000
Module d'élasticité longitudinal dans le sens t E_{f_t} (Mpa)	7 4000	5 400	15 000	6 000
Module de cisaillement $G_{f_{lt}}$ (Mpa)	30 000	12 000	50 000	20 000
Coefficient de poisson $\nu_{f_{lt}}$	0.25	0.4	0.3	0.35
Coefficient de poisson $\nu_{f_{tl}}$	0.25	0.0166	0.0195	0.0054
Contrainte à la rupture (Mpa)	3600	2800	3500	2100

Tableau II.1. Quelques caractéristiques des fibres usuelles [8].

	époxyde	polyester	polyimide	phénolique
E (Mpa)	4 500	4 000	4 000 à 19 000	3 000
G (Mpa)	1 600	1 400	1 100	1 100
ν	0.4	0.4	0.35	0.4
Contrainte de rupture en traction	130	80	70	70

Tableau II.2. Quelques caractéristiques des résines usuelles

II.4 Matériau composite en-dehors de ses axes principaux :

II.4.1-Matrice de rigidité et de souplesse :

Les matrices de rigidité C' et de souplesse S' , exprimées dans la base $(1',2',3')$, sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base $(1, 2,3)$.

Les relations à utiliser sont :

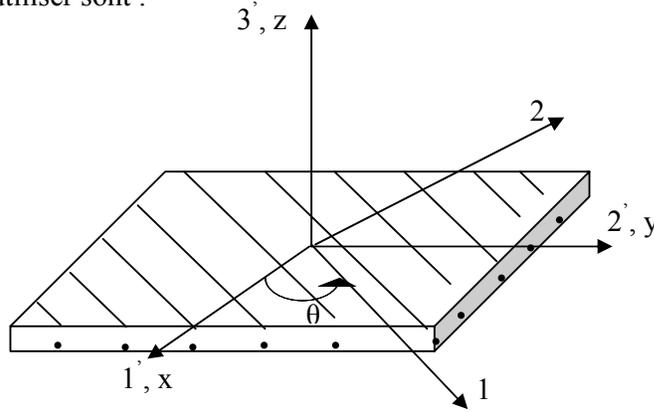


Fig. II.6. Plis unidirectionnel, axes locaux $(1',2',3')$ et axes globaux (x,y,z) .

$$C' = T_{\sigma}^{-1} C T_{\varepsilon}$$

$$S' = T_{\varepsilon}^{-1} S T_{\sigma}$$

Ces matrices s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \text{ Avec } A_{ij} = C'_{ij} \quad (\text{II.28})$$

II.5 Etat de contraintes planes

II.5.1 État des contraintes à deux dimensions :

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

II.5.2 Matrice de rigidité dans les axes principaux :

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, s'écrit donc :

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

Les contraintes dans les axes principaux

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

II.6 Théorie classique des stratifiés (sans cisaillement transverse) :

II.6.1 Champ des déformations

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Le champ des déformations est la superposition :

- *des déformations en membrane :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0 , v_0) dans le plan (oxy) des points ce plan :

- *Des déformations en flexion et torsion :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z k(x, y) \quad (\text{II.37})$$

$k(x, y)$: est appelée (matrice des courbures) de la plaque stratifiée en flexion

Le champ des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(M) + \boldsymbol{\varepsilon}_f(M) \quad (\text{II.38})$$

Tel que :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

II.6.2 Champ des contraintes

Les contraintes dans les couches k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{16} \\ E'_{12} & E'_{22} & E'_{26} \\ E'_{16} & E'_{26} & E'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{16} \\ E'_{12} & E'_{22} & E'_{26} \\ E'_{16} & E'_{26} & E'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = E'_k \varepsilon_m(x, y) + z E'_k k(x, y)$$

$\sigma_k(M)$ Représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$.

II.6.3 Expression des Résultantes et Moments

II.6.3.1 Résultantes en membrane :

L'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés,

Nous donne :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [E'_k \varepsilon_m(x, y) + z E'_k k(x, y)] dz \quad (\text{II.41})$$

Soit :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y)$$

Ceci en introduisant les matrices :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) E'_k$$

$$A = [A_{ij}] : \text{La matrice de rigidité en membrane}$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) E'_k$$

$$B = [B_{ij}] : \text{La matrice de couplage membrane- flexion- torsion}$$

II.6.3.2 Moments de flexion et de torsion

$$M_f(x, y) \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [zE'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 E'_k k(x, y)] dz \quad (\text{II.42})$$

Soit :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y)$$

Ceci en introduisant la matrice suivante :

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) E'_k \quad D = [D_{ij}] : \text{La matrice de rigidité en flexion}$$

II.7 La théorie des stratifiés (avec cisaillement transverse)

II.7.1 Champ des déformations :

Le tenseur des déformations en point M du stratifié est donc :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

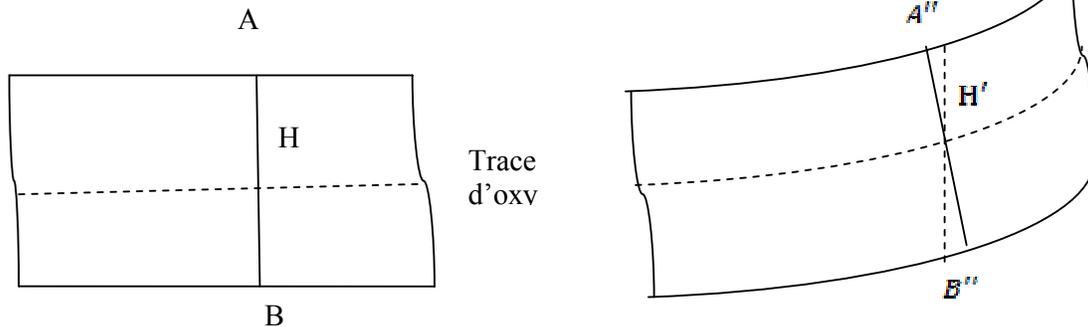


Fig. II.7 déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse [9].

Et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles : [14] et [15]

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Le champ des déformations peut être sous- divisé en deux champs :

- *Le champ des déformations en membrane- flexion :*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mf}(M) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{mf}(M) &= \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \\ \varepsilon_{mf}(M) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

- *Le champ des déformations en cisaillement transverse :*

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

II.7.2 Champ des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation générale :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \dots \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{16} & \vdots & 0 & 0 \\ E'_{12} & E'_{22} & E'_{26} & \vdots & 0 & 0 \\ E'_{16} & E'_{26} & E'_{66} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}_k \quad (\text{II.47})$$

Module de cisaillement transversal, d'après [10]

$$G_{TT'} = G_m \left[1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + 7G_m/3}{2k_m + 8G_m/3} (1 - V_f)} \right] \quad (II.49)$$

$$k_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad (II.50)$$

II.7.3 L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (II.51)$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (C'_{ij})_k e_k \quad (II.52)$$

II.8 Théorie des plaques sandwichs:

Dans le cas général, les peaux sont des stratifiés d'épaisseur h1 (peau inférieure) et d'épaisseur h2 (peau supérieure) (figure III.7). L'épaisseur de l'âme sera notée h.

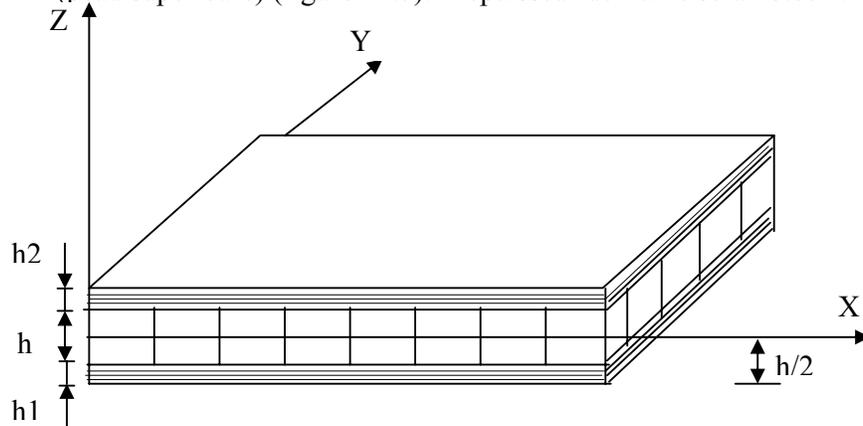


Fig. II.8 Notations d'une plaque sandwich

II.8.1 Champ des déformations

Le champ des déformations dans la peau inférieure s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \zeta_x^1 \\ \zeta_x^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_x^0 \\ \zeta_x^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \zeta_x^2 \\ \zeta_x^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_x^0 \\ \zeta_x^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Le champ des déformations dans l'âme :

- *champ des déformations en membrane-flexion :*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \varepsilon_{xy}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

- *champ des déformations en cisaillement transverse :*

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

II.8.2 Champ des contraintes :

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^{\prime a} & C_{45}^{\prime a} \\ C_{45}^{\prime a} & C_{55}^{\prime a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

Les contraintes dans les peaux inférieure et supérieure sont exprimées par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{13} \\ E'_{21} & E'_{22} & E'_{23} \\ E'_{31} & E'_{32} & E'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \zeta_x^i \\ \zeta_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

$i=1,2$

Note :

$i=1$: peau inférieure $i=2$: peau supérieure

II.8.3 Équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

Avec :

$$A_{ij} = A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \quad A_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n_1} (E'_{ij})_k e_k \quad A_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n_2} (E'_{ij})_k e_k$$

$$B_{ij} = \frac{h}{2} (A_{ij}^1 - A_{ij}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1)$$

$$C_{ij} = C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \quad C_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n_1} (E'_{ij})_k e_k z_k \quad C_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n_2} (E'_{ij})_k e_k z_k$$

$$F_{ij} = h C_{ij}'^a$$

$$c_{44}^{a'} = c_{44}^a \cos^2 \theta + c_{55}^a \sin^2 \theta$$

$$c_{45}^{a'} = (c_{55}^a - c_{44}^a) \sin \theta \cos \theta$$

$$c_{55}^{a'} = c_{44}^a \sin^2 \theta + c_{55}^a \cos^2 \theta$$

$$C_{44}^a = G_{23}^a = G_{TT'}$$

$$C_{55}^a = G_{13}^a = G_{LT'}$$

$$c_{44}^{a'} = c_{44}^a \cos^2 \theta + c_{55}^a \sin^2 \theta$$

$$c_{45}^{a'} = (c_{55}^a - c_{44}^a) \sin \theta \cos \theta$$

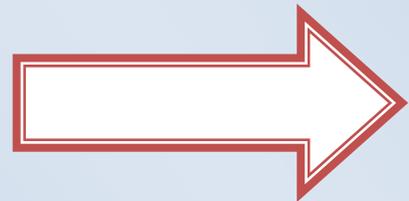
$$c_{55}^{a'} = c_{44}^a \sin^2 \theta + c_{55}^a \cos^2 \theta$$

$$C_{44}^a = G_{23}^a = G_{TT'}$$

$$C_{55}^a = G_{13}^a = G_{LT'}$$

Chapitre III

La rupture et l'endommagement des matériaux composites



III. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

III.1. Introduction

Par mécanisme de rupture, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une « discontinuité » locale de matière appelée *fissure*. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de microfissure à l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut. On parlera de *microfissuration*. La propagation de la rupture est le résultat de la création de nouvelles surfaces de rupture à l'échelle macroscopique plusieurs fois celle des constituants). A partir de microfissures existantes. On parlera également de *macro fissuration*. Dans le cas des matériaux composites l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation des changements du comportement macroscopique [9].

III.2. Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- La rupture des fibres,
- La rupture transverse de la matrice,
- La rupture longitudinale de la matrice,
- La rupture de l'interface fibre- matrice,

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

La (**figure III.1**) montre les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.

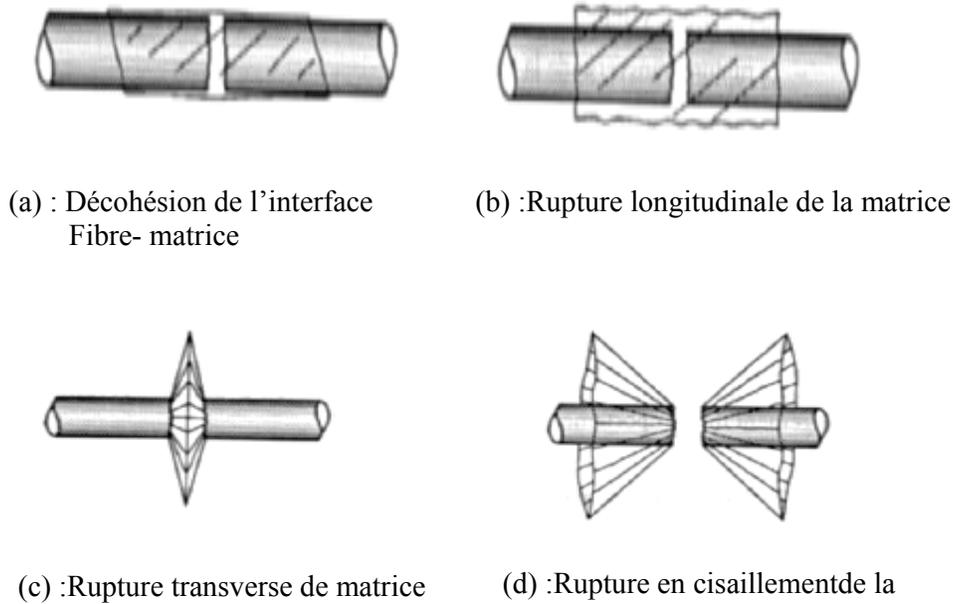


Fig.III.1. Différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre [9].

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par *fissuration transverse* (**figure III.2**), soit par *fissuration longitudinale* (**figure III.3**), et dans le cas où la contrainte de décohésion est inférieure à la contrainte en cisaillement à la rupture il se produit une *rupture par décohésion* de l'interface fibre- matrice (**figure III.4**).

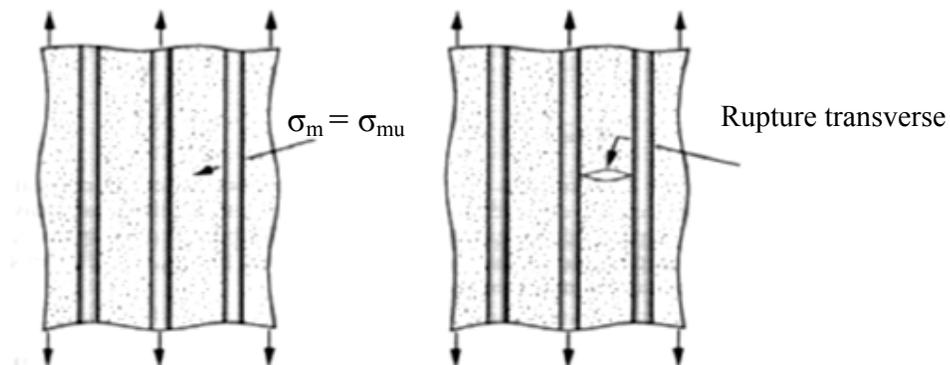


Fig. III.2 .rupture transverse de la matrice [9].

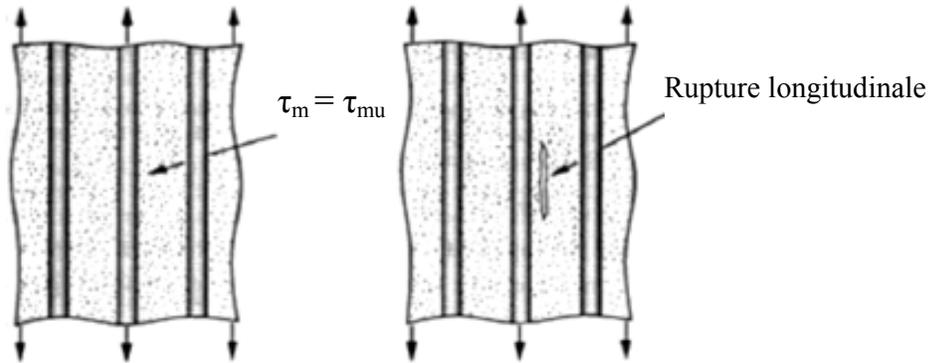


Fig. III.3 .rupture longitudinale [9].

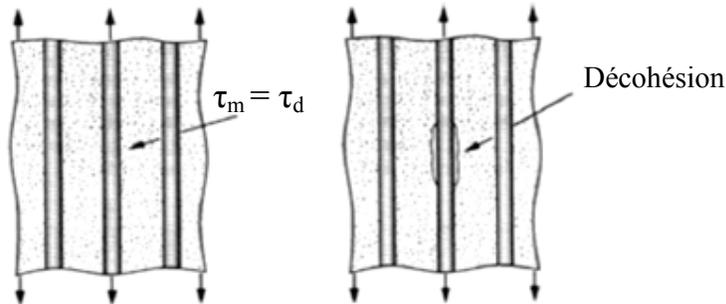


Fig.III.4. Décohésion fibre- matrice [9].

III.3 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice ($\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$), soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire.

Dans l'utilisation industrielle, les résines sont assez fortement chargées, conduisant à une diminution notable de la déformation à la rupture de la matrice. Ces chiffres montrent donc que les performances à la rupture des composites à hautes performances (composites à fibres de carbone) sont gouvernées par les propriétés à la rupture des fibres. Par contre, dans le cas de composites industriels à fibres de verre, les performances à la rupture peuvent être limitées par une déformabilité trop faible de la matrice. Il apparaît donc nécessaire d'adapter au mieux les propriétés de la matrice à celles de fibres pour optimiser les performances à la rupture des matériaux composites.

Après initiation, la propagation de la rupture diffère suivant la nature de l'interface fibre – matrice. Dans le cas d'une adhérence fibre- matrice élevée, la rupture initiée, soit par rupture des fibres, soit par rupture de la matrice, induit en front de fissure des concentrations de contraintes conduisant à une propagation de la rupture successivement dans les fibres et dans la matrice (**figure III.5**)

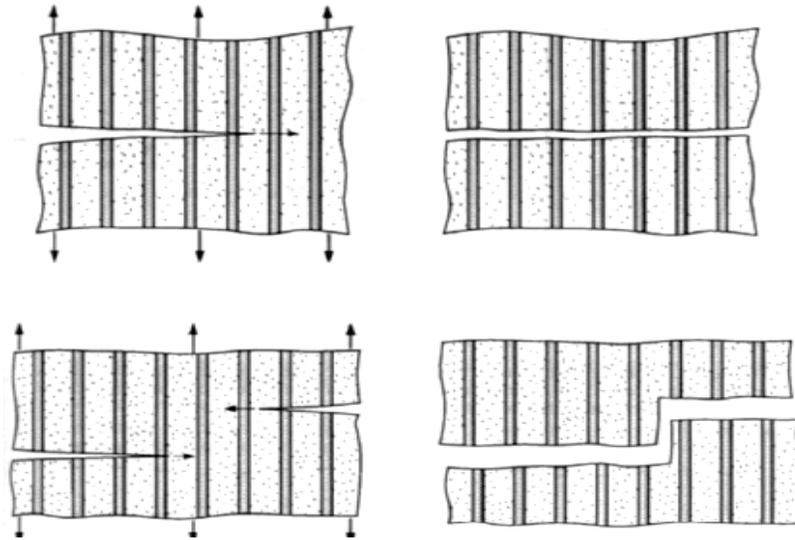


Fig.III.5 Propagation de la rupture dans le cas d'une forte adhérence fibre- matrice [9].

Dans le cas d'une faible adhérence fibre- matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée **figure III.6**, de façon à ce que, en tête de fissure, la rupture de la matrice traverse les fibres sans qu'il y ait rupture des fibres, mais avec décohesion de l'interface fibre- matrice.

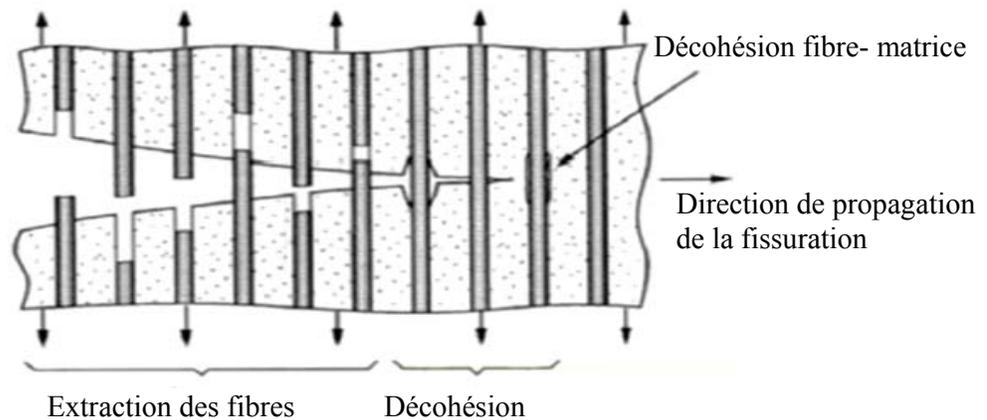


Fig.III.6 Propagation de la rupture dans le cas d'une faible adhérence fibre- matrice [9].

III.4. Composite unidirectionnel soumis à une traction transversale

Dans le cas du composite unidirectionnel soumis à une traction transversale, la rupture se produit soit par rupture de la matrice, soit par décohésion de l'interface fibre- matrice. La rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice (**figure III.7**). Ce processus intervient lorsque la contrainte à la rupture de la matrice est inférieure à la contrainte de décohésion σ_d en traction de l'interface fibre- matrice. Dans le cas contraire ($\sigma_{mu} > \sigma_d$), la rupture du composite se produit par rupture de l'interface fibre- matrice.

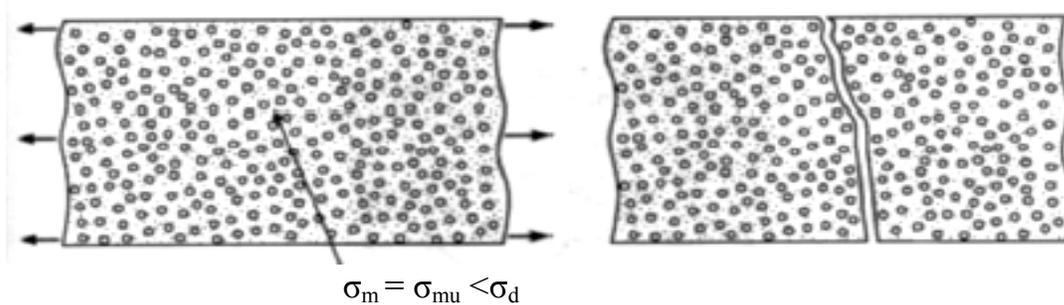


Fig.III.7 Rupture d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transversale [9].

III.5. Rupture des stratifiés

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes élémentaires décrits précédemment (décohésion fibre- matrice, rupture longitudinale de la matrice, rupture transversale de la matrice, rupture des fibres), s'ajoute (**figure III.8**) un mécanisme de rupture entre couches, appelé rupture par délaminage. Les mécanismes de rupture induits dépendent de la nature des constituants, de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé.

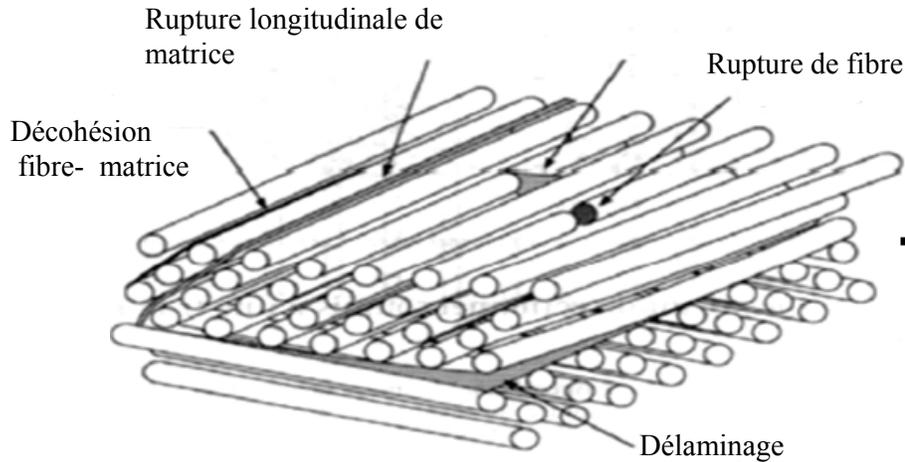


Fig.III.8. Mécanisme de rupture observés dans les stratifié [9].

III.6 Critères de rupture

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche et peuvent être classés suivant :

- Le critère de la contrainte maximale,
- Le critère de la déformation maximale,
- Les critères interactifs ou critère énergétiques.

Les critères de la contrainte maximale et de déformation maximale ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations principales: les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

Des critères interactifs ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de **Von Mises**, utilisé pour les matériaux isotropes. Le critère de **Von Mises** est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés critères énergétiques. Toutefois dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

Dans notre programme de calcul, on a utilisés le critère de Tsai- Hill, ce critère découle de celui de HILL pour les matériaux composites unidirectionnels. Le critère interactif de HILL applicable aux matériaux anisotropes est formulé en disant que l'état limite de contraintes n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée [9] :

$$F(\sigma_T - \sigma_T')^2 + G(\sigma_T' - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{TT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 < 1 \quad \text{III.1}$$

III.6 .1 Critère de Tsai –HILL

Le critère de rupture de HILL simplifié est donné par :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T + \left(\frac{\sigma_{lt}}{S_{LT}}\right)^2 = 1 \quad \text{III.2}$$

Le critère (III.2) établis en contraintes planes a été simplifié par **V.D. azzi** et **S. W. Tsai** [13] dans le cas de matériaux composites unidirectionnels. En effet, dans ce cas : $Z=Y$, et le critère (III.2) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{lt}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_l\sigma_t}{X^2} = 1 \quad \text{III.3}$$

Avec :

X : contrainte de rupture en traction suivant **l**

Y : contrainte de rupture en compression suivant **t**

S : contrainte de rupture en cisaillement suivant **lt**

Ce critère est généralement connu sous le nom de critère de **Tsai- Hill**.

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes principaux (**figure III.14**), les contraintes principales sont données par les expressions (III.4).En reportant ces expressions dans la relation (III.3), le critère de Tsai – HILL :

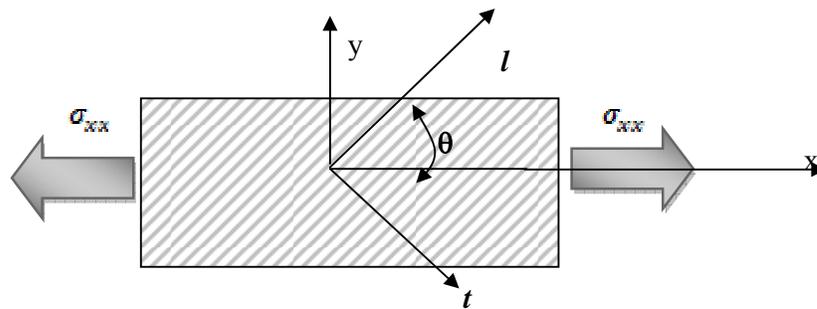


Fig. III.9. Traction en-dehors des axes principaux

$$\sigma_l = \sigma_{xx} \cos^2 \theta$$

$$\sigma_t = \sigma_{xx} \sin^2 \theta$$

$$\tau_{lt} = \sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta$$

III.4

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S_{LT}^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2}$$

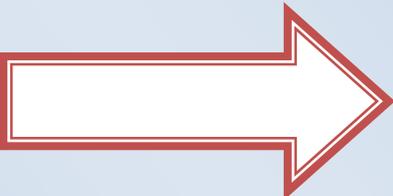
III.5

Chapitre IV

Programmation

sous

environnement

Delphi 

Introduction

Delphi est un environnement de développement de type RAD (*Rapid Application Development*) basé sur le langage Pascal. Il permet de réaliser rapidement et simplement des applications Windows.

Cette rapidité et cette simplicité de développement sont dues à une conception visuelle de l'application. Delphi propose un ensemble très complet de *composants visuels* prêts à l'emploi incluant la quasi-totalité des composants Windows (boutons, boîtes de dialogue, menus, barres d'outils...) ainsi que des experts permettant de créer facilement divers types d'applications et de bibliothèques.

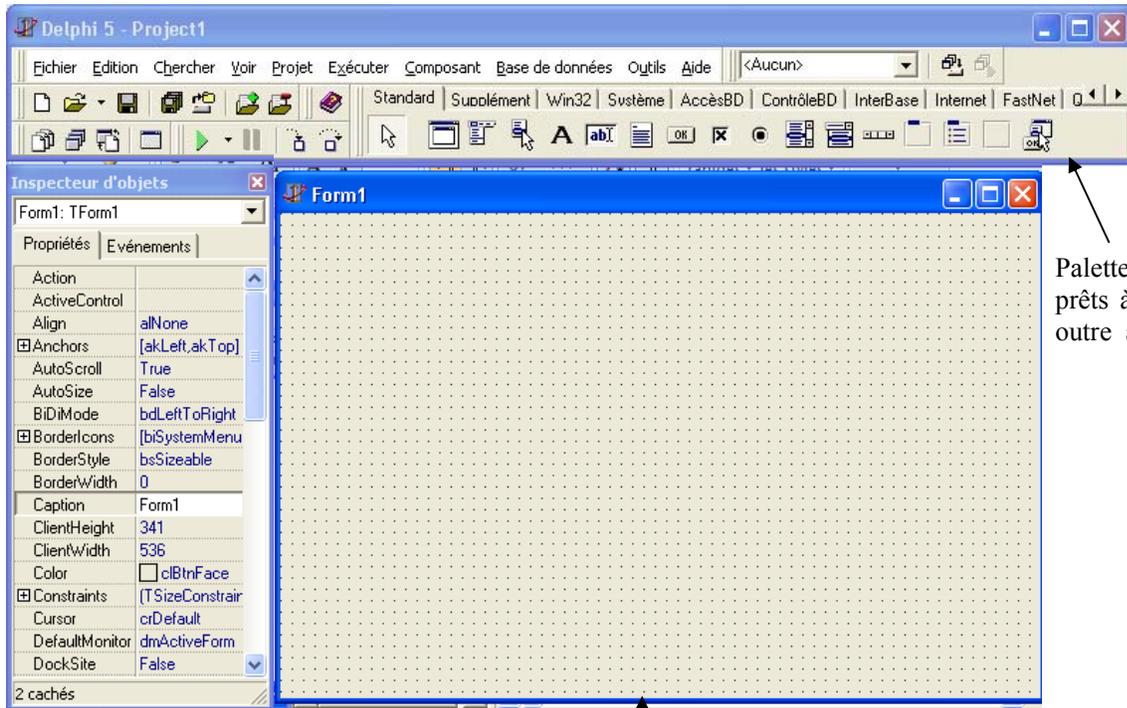
Pour maîtriser le développement d'une application sous Delphi, il est indispensable d'aborder les trois sujets suivants : [11].

- le langage Pascal et la programmation orientée objet ;
- l'*Environnement de Développement Intégré* (EDI) de Delphi ;
- les objets de Delphi et la hiérarchie de classe de sa bibliothèque.

IV.1. L'interface de Delphi

La figure ci-dessous représente l'interface typique de Delphi. Elle est composée de : [12]

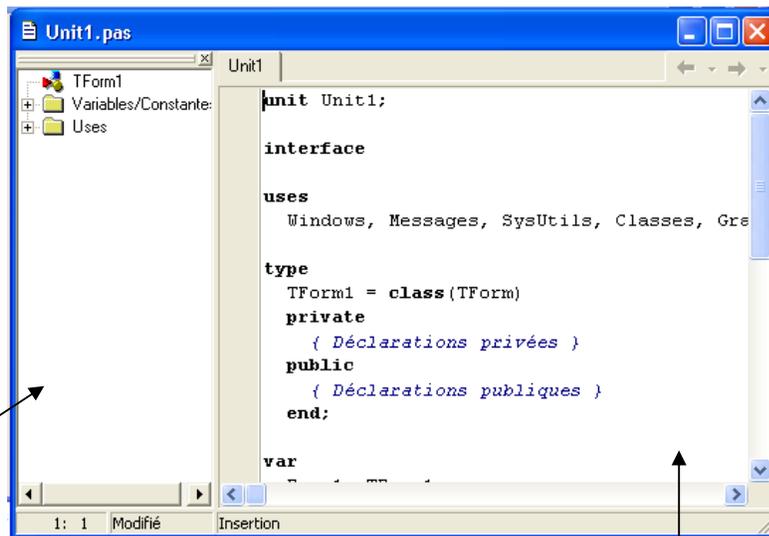
- la barre de menus (en haut),
- la barre d'icônes (à gauche sous la barre de menus),
- la palette de composants (à droite sous la barre de menus),
- le concepteur de fiche (au centre),
- l'éditeur de code (au centre sous le concepteur de fiche),
- l'inspecteur d'objets (à gauche).



Palette de composants prêts à être utilisés dans outre application.

Concepteur de fiche contenant une fiche vierge pour démarrer la conception de l'interface utilisateur de votre application. Une application peut inclure plusieurs fiches.

Inspecteur d'objets permettant de changer les propriétés et de sélectionner des gestionnaires d'événements.



Editeur de code Permettant de visualiser et de modifier le code.

Explorateur de code montrant les classes, variables et routines de votre unité, et permettant de le parcourir rapidement.

IV.2. La fenêtre principale

Cette partie est elle-même divisée en trois parties :

IV.2. 1 La barre de menus : dans laquelle les noms sont en général bien explicite et il y a l'aide en cas de besoin.

IV.2. 2. La barre d'outils

Des boutons permettent d'accéder aux commandes les plus fréquemment utilisées, plus rapidement.

IV.2. 3. La palette de composants

Les composants sont des bouts de programme qui ont déjà été fait pour l'utilisateur. Exemple... Si on veut mettre un bouton dans une fenêtre, on a juste à prendre un bouton, et le poser sur la fenêtre sans avoir besoin d'expliquer à l'ordinateur ce qu'est un bouton, comment on clique dessus, ce qu'il se passe graphiquement quand on clique dessus, bref, c'est déjà fait, [12].

Les plus couramment utilisés sont ceux de la palette de composants "Standard" : dans l'ordre, on peut y voir un menu déroulant, une liste, un label (de l'écriture, etc...), une ligne d'édition ("edit box"), une zone de texte ("menu"), un bouton, une case à cocher, etc... Tous les composants de base d'une fenêtre classique. Il existe des tonnes de composants, et ils sont souvent compatibles entre Delphi et C++ Builder. On en trouve beaucoup de gratuit sur Internet.

L'éditeur de code

Il écrit directement le minimum requis pour une application et crée seul les fichiers associés. Par contre, le revers de la médaille, il n'est pas conseillé de modifier ce qu'il écrit. Si on veut supprimer un bouton par exemple, on ne doit pas l'effacer directement dans le code, mais l'effacer graphiquement : le compilateur s'occupera du reste.

Nous verrons plus tard comment rajouter son programme...

Le concepteur de fiches (ou de « forms »)

C'est la fenêtre que va voir l'utilisateur lorsqu'il lance le programme. Pour l'instant, elle est vide, mais c'est là qu'on peut rajouter les menus, les boutons et tout le reste...

L'inspecteur d'objets

C'est dans cette partie qu'on donne **les caractéristiques des composants** que l'on place sur sa fenêtre ou les caractéristiques de la fenêtre générale. Ici, on peut voir qu'il s'agit des caractéristiques générales de la fenêtre car on voit "**Form1** :

TForm1". "Form1" signifie qu'on regarde les caractéristiques d'un composant de la fenêtre "Form1" et "TForm1" désigne la fenêtre en général. Même s'il est possible de changer le nom des composants ou des fenêtres, il est conseillé de **laisser les noms par défaut** si on n'a pas l'intention de faire un programme énorme avec 15 fenêtres différentes.

L'aide Delphi

Il ne faut pas hésiter à consulter l'aide Delphi pour obtenir tous les compléments nécessaires : en particulier les fonctions qui ne sont pas décrites et on ne donne pas la liste des paramètres à employer, car ceux-ci sont décrits dans l'aide en utilisant la touche F1 ou l'index ou rechercher, [12].

Les fichiers utilisés en Delphi

Les fichiers d'un projet:

.DPR	fichier projet	<i>Delphi Project File</i>
.DFM	fichier fiche	<i>Delphi Form File</i>
.PAS	fichier unité - code source	
.EXE	fichier exécutable (le programme développé)	
.DCU	fichier unité - code compilé	<i>Delphi Compiled Unit</i>
.RES	fichier ressource (icônes, bitmaps, curseurs, . . .)	
.DPL	fichier paquet compilé	<i>Delphi Package Library</i>
.DPK	fichier paquet source	<i>Delphi Package</i>

Les fichiers .DPR,.DFM et .PAS sont les fichiers nécessaires à la programmation et doivent être copiés pour continuer le développement sur une autre machine.

Autres fichiers:

.DOF	options du projet	<i>Delphi Options File</i>
.DSK	paramètres du bureau	<i>Delphi Desktop File</i>
	Fichiers de sauvegarde	

IV.2 .4. Présentation et organigramme du code source

L'environnement Delphi utilise la programmation orientée objet, l'organisation du programme se fait à travers un programme principale qui fait appel à des unités formées ou même de procédures, dont les détails et les intitulés se présentent comme suit :

U_log_composite : unité principale contenant l'interface principale du logiciel. Cette unité fait appel aux unités secondaires suivantes :

UDef_plane : une bibliothèque qui concerne tout les matériaux composites homogénéisés et les caractéristiques mécaniques avec détermination de la matrice de rigidité réduite E_{ij}

UFdef_plane2: il y a dans cette unité le nombre de couche (n), l'orientation θ , l'épaisseur (e) de chaque couche et l'épaisseur de stratifié (H). Elle permet le Calcul les matrices A_{ij} , A_{ij}^{-1} (de rigidités et de souplesse exprimées dans les axes du stratifié).

UFdeformations: Calcule les déformations $[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]$ rapportées aux axes(x, y) et les déformations dans les axes principaux.

UFFlexion C: en donnant le nombre de couche (n), l'orientation θ et l'épaisseur (e).l'unité permet le Calcul du champ des déformations sans prise en compte du cisaillement transverse

UFFlexion M : permette le calcul de la matrice constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse

UFFlexion M1 : donnent le résultat final de la matrice constitutive (Les déformations et les courbures)

FChoix : cette unité permet de faire le choix du composite, par la nature de la matrice et des fibres et le taux volumique.

UFmoment1 : cette unité donne la matrice globale (La matrice de rigidité en flexion (D_{ij}), La matrice de rigidité en membrane (A_{ij}), La matrice de couplage membrane - flexion-torsion (B_{ij}), La matrice des constantes de rigidité réduites (E_{ij})).

UFAide comp: donne la signification de quelques mots concernant les matériaux composites

UFSandwich : cette unité donne Les caractéristiques mécaniques de peau inférieure, supérieure et l'âme

UFSandwich1: en donnant le nombre de couche (n), l'orientation (θ) et l'épaisseur (e) de chaque couche des pour les deux peaux supérieure et inférieure , on calcul les matrices de rigidité réduite A_{ij}^1 , A_{ij}^2 pour les deux peaux.

UFSandwich2: donne les matrices de rigidité des deux peaux inférieure et supérieure.

UFSandwich3 : permet le calcul les Matrices de rigidité A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , A_{ij} , F_{ij} .

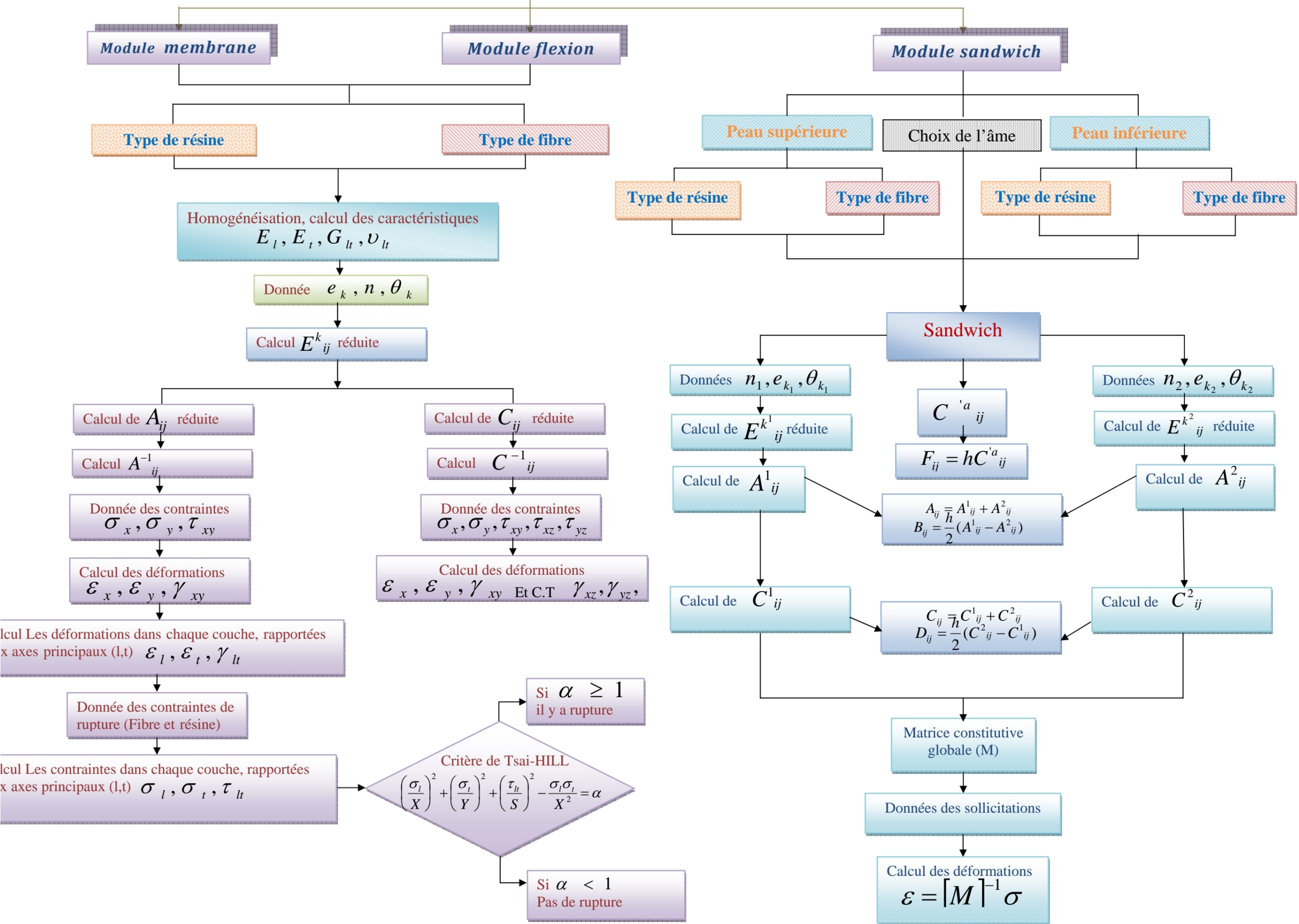
UFSandwich4 : permet d'obtenir la matrice constitutive d'une plaque sandwich.

UFSandwich5 : donne l'équation constitutive d'une plaque sandwich et calcul les déformations et les courbures.

UFVeri rupture: permet d'obtenir les contraintes de rupture suivants les directions (l, t, t') et la vérification à la rupture dans la plaque de stratifié.

UFVeri rupture1 : dans cette unité, on représente deux courbes (alpha (α) en fonction de l'orientation des couches) et (les contraintes en fonction de déformations).

Composite



Chapitre V

Applications numériques et validation

Introduction.

En vue de vérifier et valider le processus de calcul global du logiciel développé, il est nécessaire de passer par des exemples types d'applications qu'on peut trouver dans la littérature spécialisée.

V.1- Exemple 1. Plaque stratifiée en contraintes planes – vérification à la rupture.

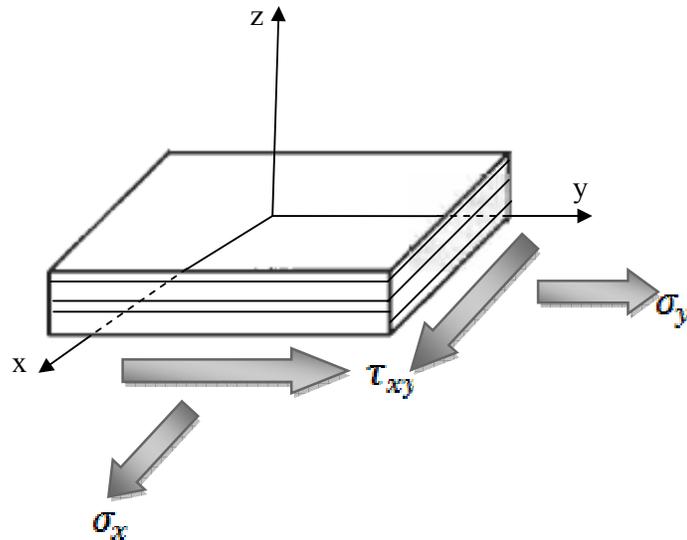


Fig. V.1 exemple d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite (verre/Epoxyde).

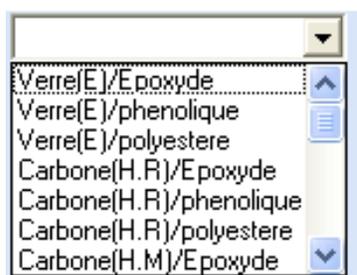
- a) On considère le cas d'un plaque de matériau composite forme d'un matrice en époxyde et des fibres de verre, de quatre(4) plis de même épaisseur (=2mm) orientés tel que : [30, 15,-15,-30].

V.1.2- Résolution.

V.1.2.1- Les déformations planes



➤ La bibliothèque des matériaux composites disponibles.



D'après les données du problème, on peut choisir directement le composite Verre(E)/Epoxyde, ses données sont disponibles dans un fichier centrale, tel que :

Verre(E)/Epoxyde
 Verre(E)/Epoxyde
 Verre(E)/phenolique
 Verre(E)/polyestere
 Carbone(H.R)/Epoxyde
 Carbone(H.R)/phenolique
 Carbone(H.R)/polyestere
 Carbone(H.M)/Epoxyde

➤ Les caractéristiques mécaniques homogénéisés du composite, après introduction du taux volumique en fibres.

Vf 0,6

EI	46200	Mpa	NIt	0,31
Et	10309,60	Mpa	Ntl	0,07
GI	3703,7	Mpa		

➤ Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

E11	47224,7	E22	10538,2
E12	3266,86	E33	3703,7

➤ On peut aussi faire le choix du composite, par la nature de la matrice et des fibres et le taux volumique en fibres tel que :

- Choix de la fibre :

- Choix de matrice :

Fibre		Matrice	
Verre		Epoxyde	
Ef	74000	Em	4500
Eft	74000	Gm	1600
Gf	30000	Nm	0,4
Nf	0,25		
Vf		0,6	
Annuler		Calculer	

Nm : coefficient de poisson de la matrice (ν_m)

Nf : coefficient de poisson des fibres (ν_f)

- Caractéristique mécanique de composite (Verre(E)/Epoxyde) donné par la loi des mélanges (homogénéisé) est donné par :

EI	46200	Mpa	Nlt	0,31
Et	10309,60	Mpa	Ntl	0,07
Gl	3703,7	Mpa		

- Le nombre des couches :

Nombres descouches

- L'orientation et l'épaisseur de chaque couche

	Théta(°)	e(mm)
tétha1 e1	30	2
tétha2 e2	15	2
tétha3 e3	-15	2
tétha4 e4	-30	2

- L'épaisseur totale de stratifié

h(mm)

- La matrice des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en-dehors de ses axes principaux :

	A[j,1]	A[j,2]	A[j,3]
A[1,i]	4932,4	1613,5	-672,3
A[2,i]	1613,5	13179,0	-2489,0
A[3,i]	-672,3	-2489,0	27,4

- La matrice inverse des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en-dehors de ses axes principaux :

$A_{inv}[ij] =$		$A'[:,1]$	$A'[:,2]$	$A'[:,3]$
	$A'[1,i]$	0,0002	-0,0001	-0,0002
	$A'[2,i]$	-0,0001	0,0000	-0,0004
	$A'[3,i]$	-0,0003	-0,0004	-0,0021

- Calcul les déformations $[\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ rapportées aux axes(x,y):

On a trois contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Sigma x	<input type="text" value="450"/>	(MPa)	Epsilon x	<input type="text" value="0,105"/>	(mm)
Sigma y	<input type="text" value="-250"/>	(MPa)	Epsilon y	<input type="text" value="-0,065"/>	(mm)
Sigma xy	<input type="text" value="50"/>	(MPa)	Epsilon xy	<input type="text" value="-0,14"/>	(mm)

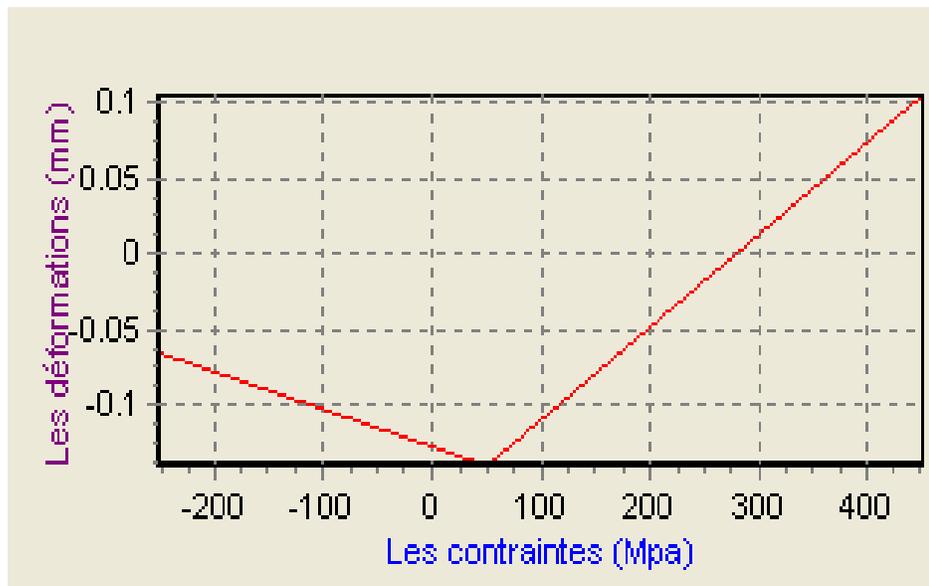


Fig. V.2 La variation des contraintes en fonction des déformations dans une plaque composites (verre/Epoxyde).

➤ Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux (l,t) ;

Les déformations dans les axes principaux :

nbre de pl	Epsilon l	Epsilon t	Epsilon lt
pli1	-0,03962	0,07962	0,18516
pli2	0,10227	-0,06227	0,14637
pli3	-0,03605	0,07605	-0,18956

V.1.2.2 .Vérification la rupture dans chaque couche :

Critère de Tsai-Hill

❖ Les contraintes de rupture de fibre de matrice

Cont_rupF	<input type="text" value="3600"/>	MPa
Cont_rupM	<input type="text" value="130"/>	MPa

X : contrainte de rupture en traction suivant **l**

Y_c : contrainte de rupture en compression suivant **t**

Y_t : contrainte de rupture en traction suivant **t**

S : contrainte de rupture en cisaillement suivant **lt**

X	<input type="text" value="2160"/>	MPa	Y _c	<input type="text" value="125"/>	MPa
S	<input type="text" value="130"/>	MPa	Y _t	<input type="text" value="40"/>	MPa

$$X = \sigma_{\text{trup}} = \sigma_{\text{frup}} * V_f (1500-2000) \text{Mpa}$$

$$Y_{\text{traction}} = \sigma_{\text{trup(traction)}} = (20-60) \text{Mpa}$$

$$Y_{\text{compression}} = \sigma_{\text{trup(compression)}} = (100-150) \text{Mpa}$$

$$S = \tau_{\text{lt}} = \tau_{\text{lt(matrice)}}$$

❖ Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux (l,t) ;

$$\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{lt}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_l \sigma_t}{X^2} = \alpha$$

- 1^{ère} couche ($\theta = 30^\circ$)

Composite		nbre de pli	Sigma l	Sigma t	Sigma lt	Alpha
pas de rupture		pli1	10,707	439,293	68,582	12,628

- 2^{ème} couche ($\theta = 15^\circ$)

Composite		nbre de pli	Sigma l	Sigma t	Sigma lt	Alpha
pas de rupture		pli2	259,707	190,293	222,307	5,246

- 3^{ème} couche ($\theta = -15^\circ$)

Composite		nbre de pli	Sigma l	Sigma t	Sigma lt	Alpha
pas de rupture		pli3	259,707	190,293	-222,307	5,246

- 4^{ème} couche ($\theta = -30^\circ$)

Composite		nbre de pli	Sigma l	Sigma t	Sigma lt	Alpha
pas de rupture		pli4	10,707	439,293	-68,582	12,628

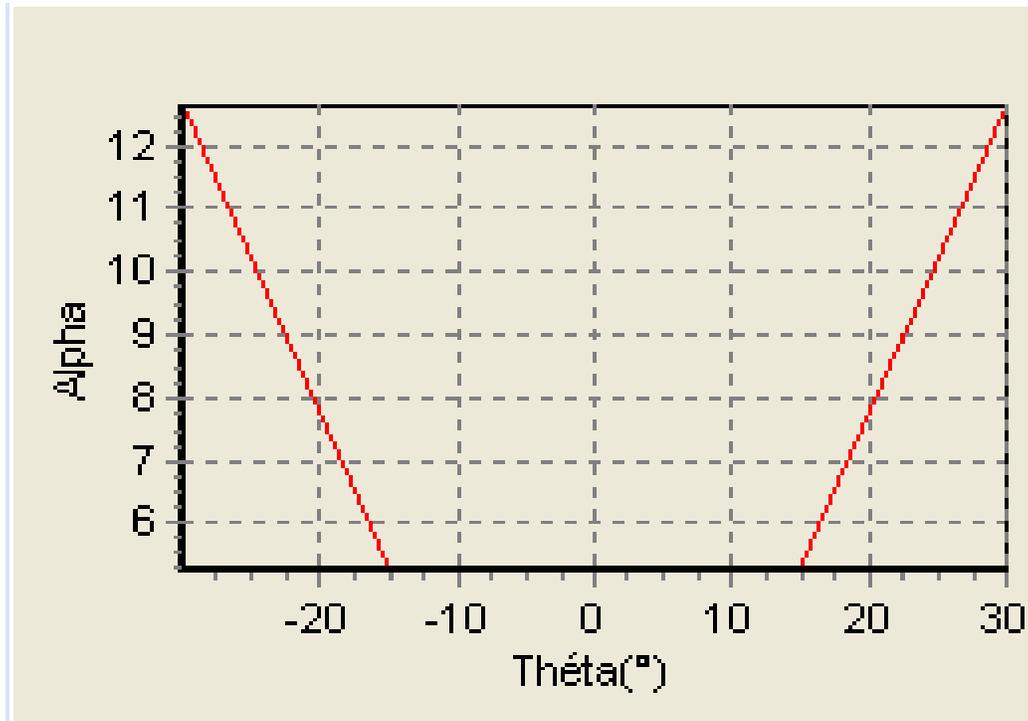


Fig. V.3 variation de l'orientation des fibres (θ) en fonction de coefficient de la rupture (α)

- b) Considère le cas d'une plaque de matériau composite formée d'une matrice en époxyde et des fibres de carbone(H.R), de huit(8) plis de même épaisseur (=2mm) orientés tel que : $[0/45/-45/90/90/-45/45/0]$.

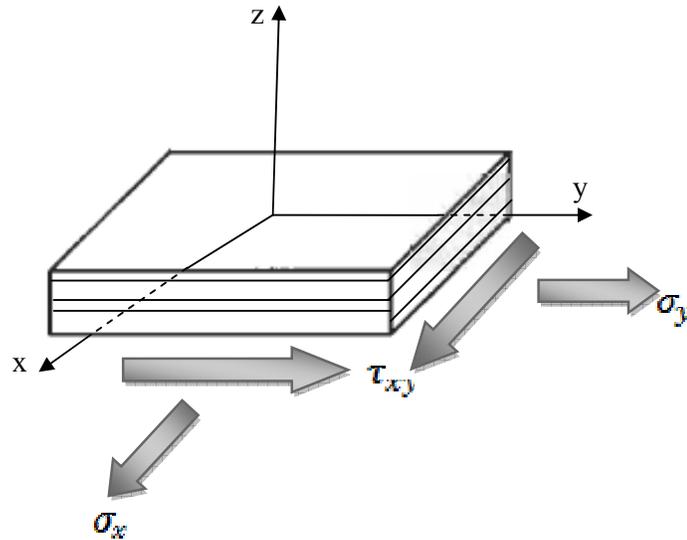


Fig. V.4 exemple II d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite à 8 plis (carbone HR /Epoxyde).

D'après les données du problème, on peut choisir directement le composite carbone(H.R)/Epoxyde, ses données sont disponibles dans un fichier centrale et

- Les caractéristiques mécaniques homogénéisés du composite, après introduction du taux volumique en fibres.

Carbone(H.R)/Epoxyde			
EI	139800	Mpa	Nlt 0,34
Et	7758,62	Mpa	Nlt 0,02
Glt	3816,8	Mpa	
		Vf	0,6

- Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

E11	140757,14861	E22	7811,7398308
E12	2655,9915424	E33	3816,8

- Le nombre des couches :

Nombres descouches

n

- L'orientation et l'épaisseur de chaque couche

	Théta(°)	e(mm)
téthaa1 e1	0	2
téthaa2 e2	45	2
téthaa3 e3	-45	2
téthaa4 e4	90	2
téthaa5 e5	90	2

- L'épaisseur totale de stratifié

h(mm)

- La matrice des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en-dehors de ses axes principaux :

$A[i,j] =$		A[j,1]	A[j,2]	A[j,3]
	A[1,i]	18129,1	6598,8	-243,5
	A[2,i]	6598,8	2685,9	-637,8
	A[3,i]	-243,5	-637,8	678,1

- La matrice inverse des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en-dehors de ses axes principaux :

	A'[:,1]	A'[:,2]	A'[:,3]
A'[1,i]	-0,0007	0,0022	0,0018
A'[2,i]	0,0022	-0,0061	-0,0050
A'[3,i]	0,0005	-0,0050	-0,0026

➤ Calcul les déformations $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$ rapportées aux axes(x,y):

On a trois contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Sigma x	450	(MPa)	Epsilon x	-0,647	(mm)
Sigma y	-200	(MPa)	Epsilon y	1,91	(mm)
Sigma xy	60	(MPa)	Epsilon xy	1,069	(mm)

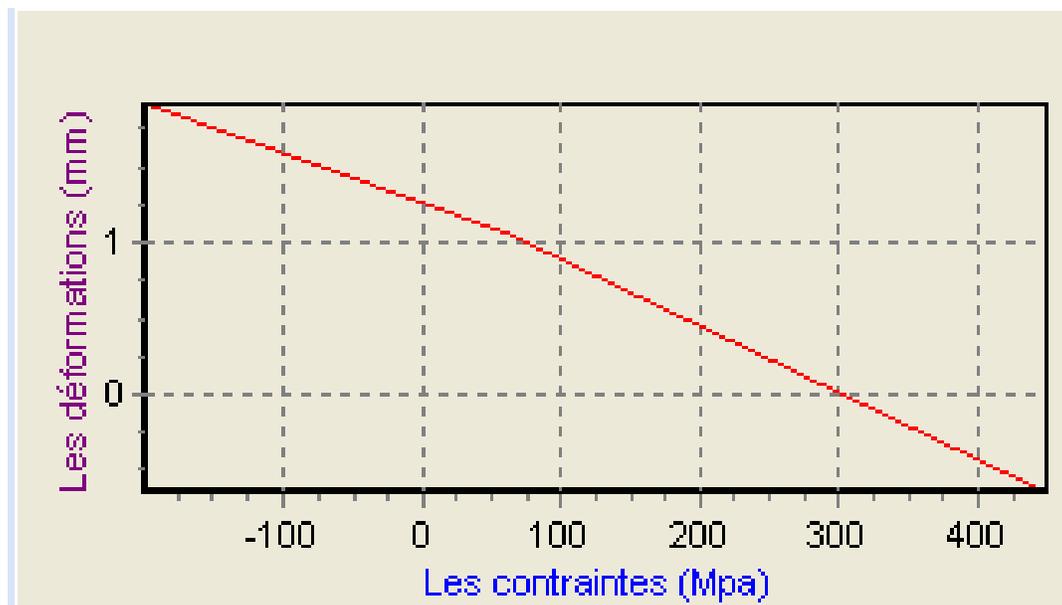


Fig. V.5 La variation des contraintes en fonction des déformations dans une plaque composites (verre/Epoxyde).

➤ Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux (l,t) ;

Les déformations dans les axes principaux :

nbre de pli	Epsilon l	Epsilon t	Epsilon lt
pli1	-0,64700	1,91000	1,06900
pli2	1,68220	-0,41920	1,80696
pli3	0,72652	0,53648	-2,76494

Vérification la rupture dans chaque couche :

❖ Les contraintes de rupture de fibre de matrice

Cont_rupF MPa
 Cont_rupM MPa

X MPa Yc
 S MPa Yt

- 1^{er} couche ($\theta = 0^\circ$)

nbre de pli	Sigma l	Sigma t	Sigma lt	Alpha
pli1	450,000	0,000	0,000	0,072

Composite ✖

il y a rupture

OK

- 2^{ème} couche ($\theta = 45^\circ$)

pli2	124,183	325,817	-201,149	9,179
------	---------	---------	----------	-------

Composite ✖

pas de rupture

OK

- 3^{ème} couche ($\theta = -45^\circ$)

pli3	124,183	325,817	201,149	9,179
------	---------	---------	---------	-------



- 4^{ème} couche ($\theta = 90^\circ$)

pli4	90,346	359,654	180,259	10,193
------	--------	---------	---------	--------



- 5^{ème} couche ($\theta = 90^\circ$)

pli5	90,346	359,654	180,259	10,193
------	--------	---------	---------	--------



- 6^{ème} couche ($\theta = -45^\circ$)

pli6	124,183	325,817	201,149	9,179
------	---------	---------	---------	-------



- 7^{ème} couche ($\theta = 45^\circ$)

pli7	124,183	325,817	-201,149	9,179
------	---------	---------	----------	-------



- 8^{ème} couche ($\theta = 0^\circ$)

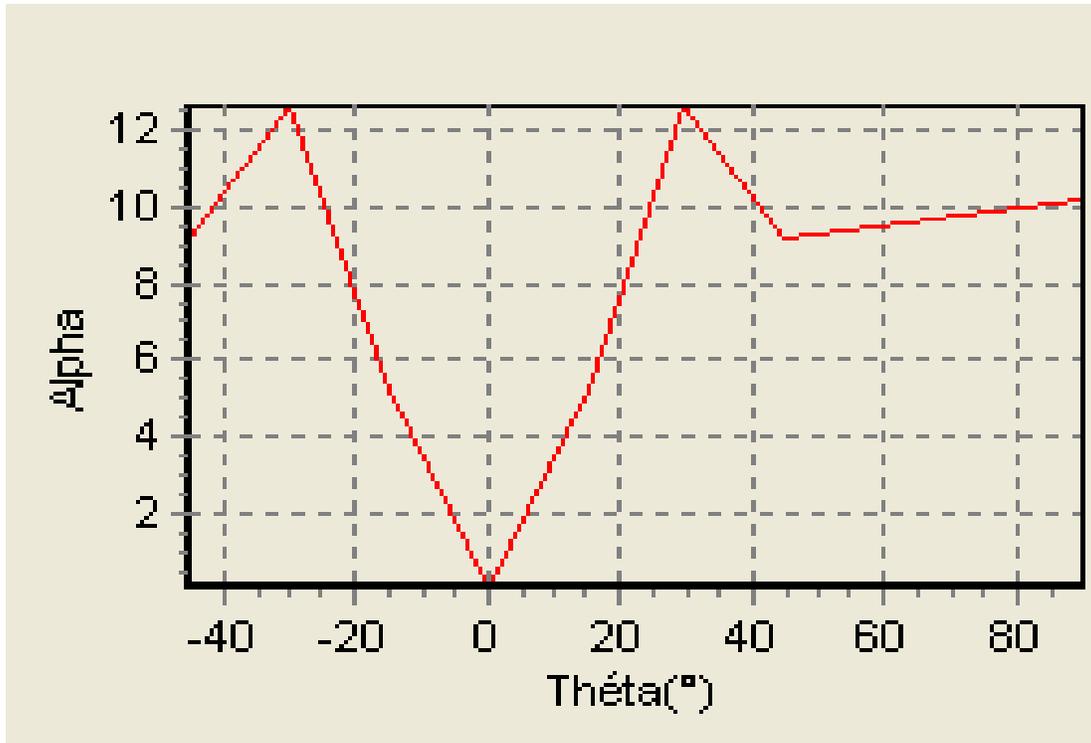
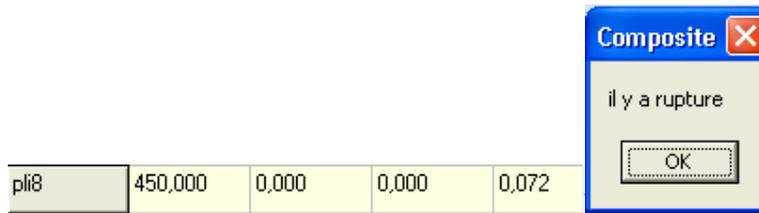


Fig. V.6. Variation de l'orientation des fibres (θ) en fonction de coefficient de la rupture (α).

V.2-Exemple 2 : Flexion d'une plaque stratifiée avec cisaillement transverse :

- a) Considère le cas d'un plaque de matériau composite forme d'un matrice en époxyde et des fibres de Verre, quatre(4) plis de même épaisseur ($e=2\text{mm}$) orientés tel que : $[30^\circ/15^\circ/-15^\circ/-30^\circ]$.

Sollicitée par des contraintes : σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} et les contraintes de cisaillement transverse τ_{yz} , τ_{xz} .

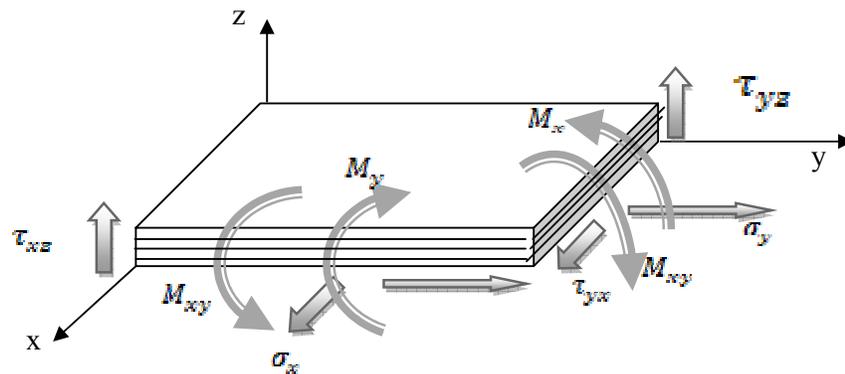


Fig. V.7. Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Verre/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments

- Choix de composite :

Verre(E)/Epoxyde			
EI	46200	Mpa	Nlt 0,31
Et	10309,60	Mpa	Nlt 0,07
Glt	3703,7	Mpa	
		Vf	0,6

- Nombre des couches :

nombre des couches	
n	4

➤ L'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche

	théta	e(mm)
téthaa1 e1	30	2
téthaa2 e2	15	2
téthaa3 e3	-15	2

➤ La matrice de rigidité réduite E'_{ij} :

	$E'_{[i,1]}$	$E'_{[i,2]}$	$E'_{[i,3]}$
$E'_{[1,j]}$	77398,5000	35450,7000	0,0000
$E'_{[2,j]}$	35450,7000	134689,0000	0,0000
$E'_{[3,j]}$	0,0000	0,0000	15636,2000

➤ les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Sigma x	350	Mpa
Sigma y	150	Mpa
Sigma xy	50	Mpa

➤ La matrice inverse de $E' [i,j]$:

	$E^{-1}_{[i,1]}$	$E^{-1}_{[i,2]}$	$E^{-1}_{[i,3]}$
$E^{-1}_{[1,j]}$	0,000015	-0,000004	0,000000
$E^{-1}_{[2,j]}$	-0,000004	0,000008	0,000000
$E^{-1}_{[3,j]}$	0,000000	0,000000	0,000064

➤ les déformations $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$ rapportées aux axes(x,y):

Epsilon x	0,00465	mm
Epsilon y	-0,0002	mm
Epsilon xy	0,0032	mm

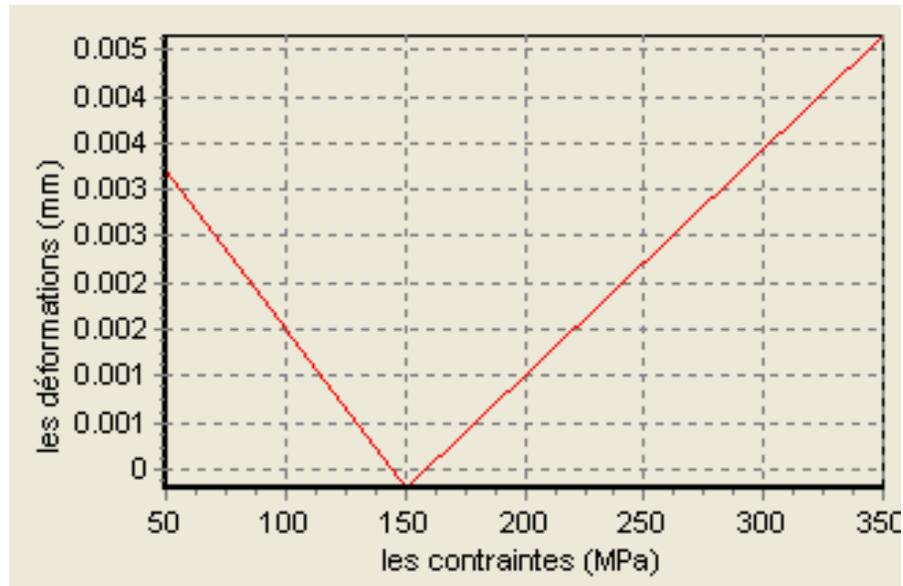


Fig. V.8 variation des contraintes en fonction des déformations

➤ Les modules de cisaillement dans les directions (TT'), (LT') :

Gtt'	1600,090	MPa
Glt'	3703,700	MPa

➤ La matrice de rigidité réduite rapportée aux axes du stratifié

	C[i,1]	C[i,2]
C[1,i]	12286,600	1124,500
C[2,i]	1124,500	14814,800

➤ les contraintes de cisaillements τ_{yz}, τ_{xz} :

Sigma.yz	170
Sigma.xz	-60

➤ La matrice inverse de $C[i,j]$:

	$C^*[i,1]$	$C^*[i,2]$
$C^*[1,j]$	0,0000675	-0,0000062
$C^*[2,j]$	-0,0000062	0,0000814

➤ Les déformations en cisaillement transverse γ_{yz}, γ_{xz} :

Epsilon yz	0,011847
Epsilon xz	-0,005938

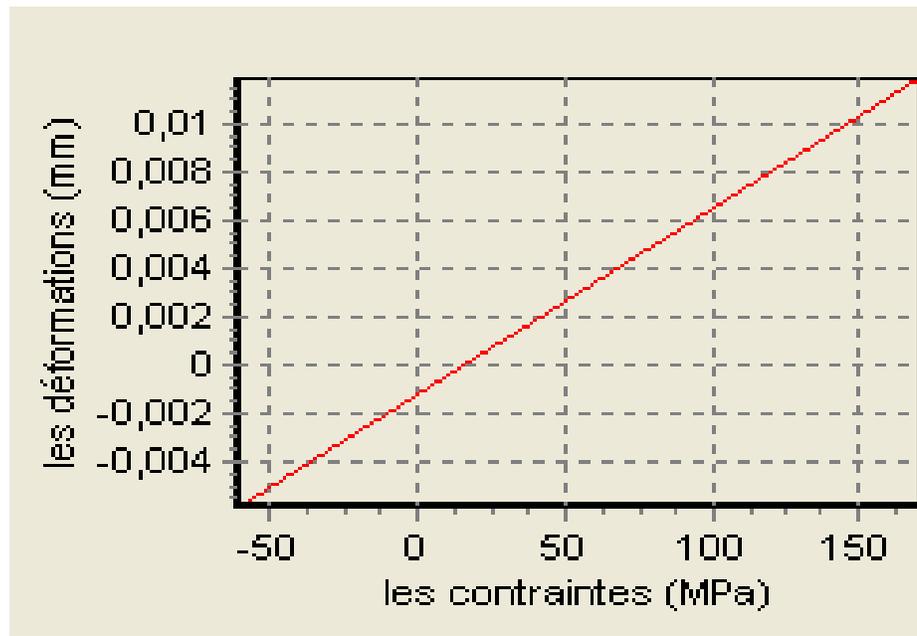


Fig. V.9. Les contraintes de cisaillements τ_{yz}, τ_{xz} en fonction des déformations en cisaillement transverse γ_{yz}, γ_{xz}

V.2.1. Calcul de la matrice constitutive globale :

➤ Un tableau pour indiquer les valeurs de (z)

z0	0
z1	2
z2	4

➤ La matrice de rigidité rapportée aux axes du stratifié

	$E''_{[i,1]}$	$E''_{[i,2]}$	$E''_{[i,3]}$
$E''_{[1,j]}$	77396,5	35450,7	0,0
$E''_{[2,j]}$	35450,7	134689,0	0,0
$E''_{[3,j]}$	0,0	0,0	15636,2

➤ La matrice de couplage membrane- flexion- torsion :

	$F'_{[i,1]}$	$F'_{[i,2]}$	$B'_{[i,3]}$
$F'_{[1,j]}$	2,1671E6	992620,00	0,00
$F'_{[2,j]}$	992620,00	3,77129E6	0,00
$B'_{[3,j]}$	0,00	0,00	437814,00

➤ La matrice de rigidité en membrane

	$A'_{[i,1]}$	$A'_{[i,2]}$	$A'_{[i,3]}$
$A'_{[1,j]}$	154793,00	70901,40	0,00
$A'_{[2,j]}$	70901,40	269378,00	0,00
$A'_{[3,j]}$	0,00	0,00	31272,40

➤ La matrice rigidité en flexion :

	$D'_{[i,1]}$	$D'_{[i,2]}$	$D'_{[i,3]}$
$D'_{[1,j]}$	2,29094E7	1,04934E7	0,00
$D'_{[2,j]}$	1,04934E7	3,98679E7	0,00
$D'_{[3,j]}$	0,00	0,00	4,62832E6

Les coefficients de la matrice F_{ij} ont même forme que les coefficients de la matrice A_{ij} . Ils ont diffèrent par l'utilisation des coefficients C'_{ij} de rigidité au lieu des coefficients E'_{ij} de rigidité réduite.

$F_{[i,j]}$			
		24573,20	2249,00
		2249,00	29629,60

V.2.2. La matrice constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse :

	A[i,1] B[i,1]	A[i,2] B[i,2]	A[i,3] B[i,3]	B[i,1] D[i,1]	B[i,2] D[i,2]	B[i,3] D[i,3]	F[i,1]	F[i,2]
A[1,i] B[1,i]	154793,0	70901,40	0,00	2,1671E6	992620,0	0,00	0,00	0,00
A[2,i] B[2,i]	70901,40	269378,0	0,00	992620,0	3,77129E6	0,00	0,00	0,00
A[3,i] B[3,i]	0,00	0,00	31272,40	0,00	0,00	437814,00	0,00	0,00
B[1,i] D[1,i]	2,1671E6	992620,0	0,00	2,29094E6	1,04934E6	0,00	0,00	0,00
B[2,i] D[2,i]	992620,0	3,77129E6	0,00	1,04934E6	3,98679E6	0,00	0,00	0,00
B[3,i] D[3,i]	0,00	0,00	437814,00	0,00	0,00	4,62832E6	0,00	0,00
F[1,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	24573,20	2249,00
F[2,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2249,00	29629,60

➤ On donne les résultantes et les moments de chargement .

Les efforts	
Nx	2000
Ny	1500
Nxy	500
Mx	200
My	150
Mxy	50
Qyz	350
Qxz	-80

- Et avec la méthode de l'élimination de gauss on obtient la matrice globale suivante et on détermine les déformations et les courbures

	A[i,1] B[i,1]	A[i,2] B[i,2]	A[i,3] B[i,3]	B[i,1] D[i,1]	B[i,2] D[i,2]	B[i,3] D[i,3]	F[i,1]	F[i,2]
A[1,i] B[1,i]	154793,0	70901,40	0,00	2,1671E6	992620,0	0,00	0,00	0,00
A[2,i] B[2,i]	0,00	236902,00	0,00	1,3E6	3,3166E6	0,00	0,00	0,00
A[3,i] B[3,i]	0,00	0,00	31272,40	0,00	0,00	437814,00	0,00	0,00
C[1,i] D[1,i]	0,00	0,00	0,00	-7,4299E6	-3,4032E6	0,00	0,00	0,00
C[2,i] D[2,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	3,5061E6	0,00	0,00	0,00
C[3,i] D[3,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,5011E6	0,00	0,00
F[1,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	24573,20	2249,00
F[2,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	29423,60

Les déformations	
Epsilon x	-0,0382
Epsilon y	-0,0029
Epsilonxy	-0,0488
kx	0,0038
ky	-0,0002
kxy	0,0046
Epsilon yz	0,0146
Epsilon xz	-0,0038

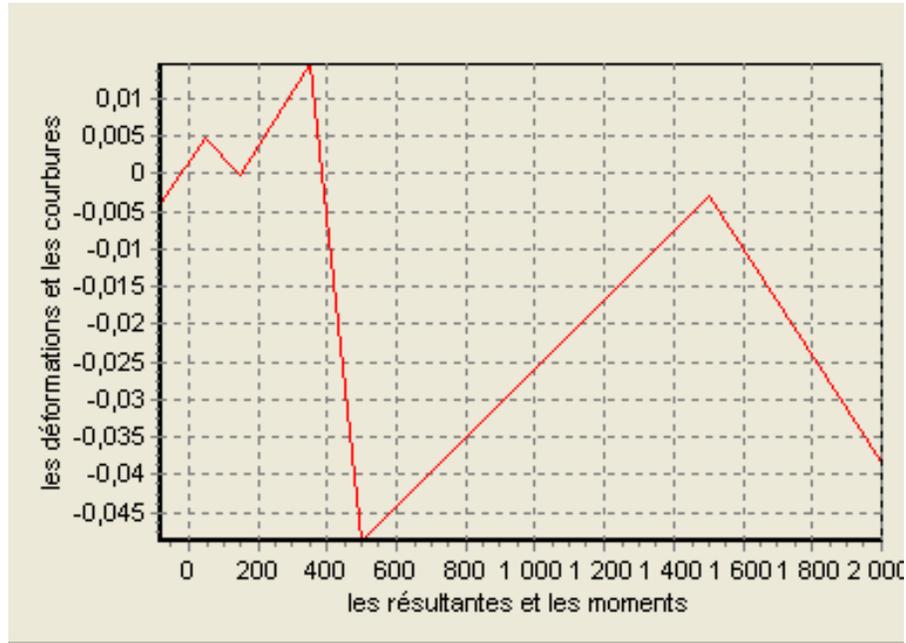


Fig.V.10 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures

b) Considère le cas d'un plaque de matériau composite forme d'un matrice en époxyde et des fibres de carbone(H.R), de huit(8) plis de même épaisseur (=2mm) orientés tel que : [0/45/-45/90/90/-45/45/0].

Sollicitée par des contraintes : σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} et les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} , τ_{xz} .

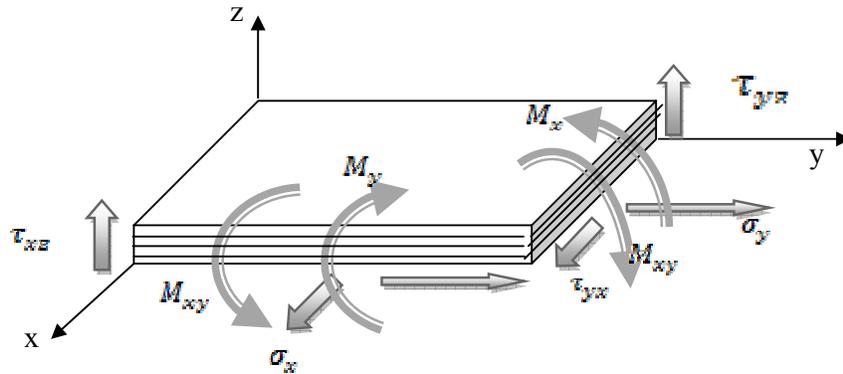


Fig. V.11. Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Carbone(HR)/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments

• Choix de composite :

Carbone(H.R)/polyestere

EI 162200 Mpa Nit 0,33

Et 8219,18 Mpa Ntl 0,02

Glt 4380,5 Mpa

Vf 0,7

➤ Nombre des couches :

nombre des couches

n 8

➤ L'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche

	théta	e(mm)
téthaa1 e1	0	2
téthaa2 e2	45	2
téthaa3 e3	-45	2

➤ La matrice de rigidité réduite E'_{ij} :

	$E'_{[i,1]}$	$E'_{[i,2]}$	$E'_{[i,3]}$
$E'_{[1,i]}$	554163,0000	343643,0000	28172,9000
$E'_{[2,i]}$	343643,0000	706483,0000	109882,0000
$E'_{[3,i]}$	28173,5000	109882,0000	84317,7000

➤ les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Sigma x	560	Mpa
Sigma y	-320	Mpa
Sigma xy	50	Mpa

➤ La matrice inverse de $E' [i,j]$:

	$E^{-1}_{[i,1]}$	$E^{-1}_{[i,2]}$	$E^{-1}_{[i,3]}$
$E^{-1}_{[1,i]}$	0,000003	-0,000001	0,000001
$E^{-1}_{[2,i]}$	-0,000001	0,000003	-0,000003
$E^{-1}_{[3,i]}$	-0,000001	-0,000003	0,000015

➤ les déformations $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$ rapportées aux axes(x,y):

Epsilon x	0,00205	mm
Epsilon y	-0,00167	mm
Epsilon xy	0,00115	mm

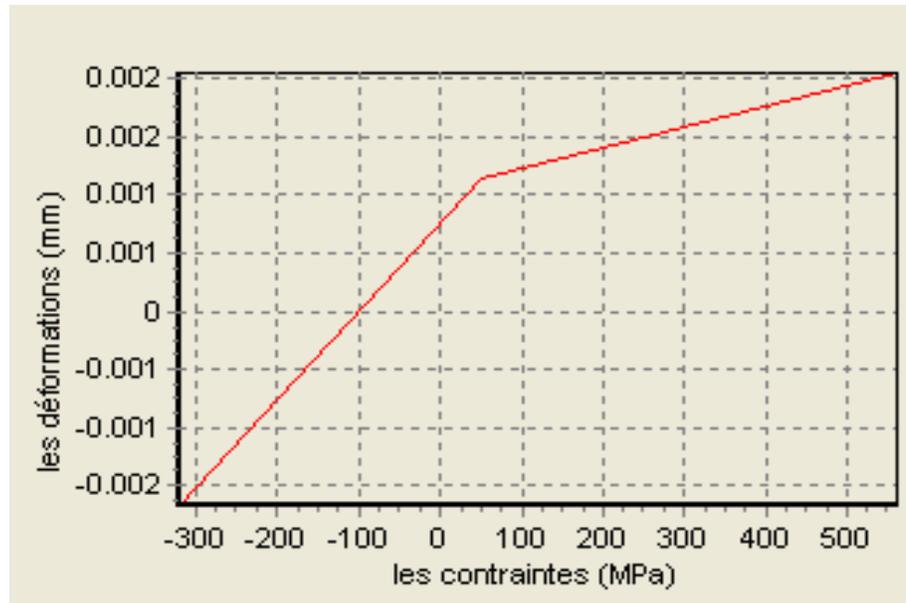


Fig. V.12 variation des contraintes en fonction des déformations

➤ Les modules de cisaillement dans les directions (TT'), (LT') :

$G_{tt'}$	1400,080	MPa
$G_{lt'}$	4380,480	MPa

➤ La matrice de rigidité réduite rapportée aux axes du stratifié

	$C_{[i,1]}$	$C_{[i,2]}$
$C_{[1,i]}$	24596,500	3338,500
$C_{[2,i]}$	3338,500	35044,000

➤ les contraintes de cisaillements τ_{yz}, τ_{xz} :

σ_{yz}	250
σ_{xz}	-150

➤ La matrice inverse de $C[i,j]$:

	$C'[i,1]$	$C'[i,2]$
$C'[1,i]$	0,0000285	-0,0000039
$C'[2,i]$	-0,0000039	0,0000407

➤ Les déformations en cisaillement transverse γ_{yz} , γ_{xz} :

Epsilon yz	0,00771
Epsilon xz	-0,00708

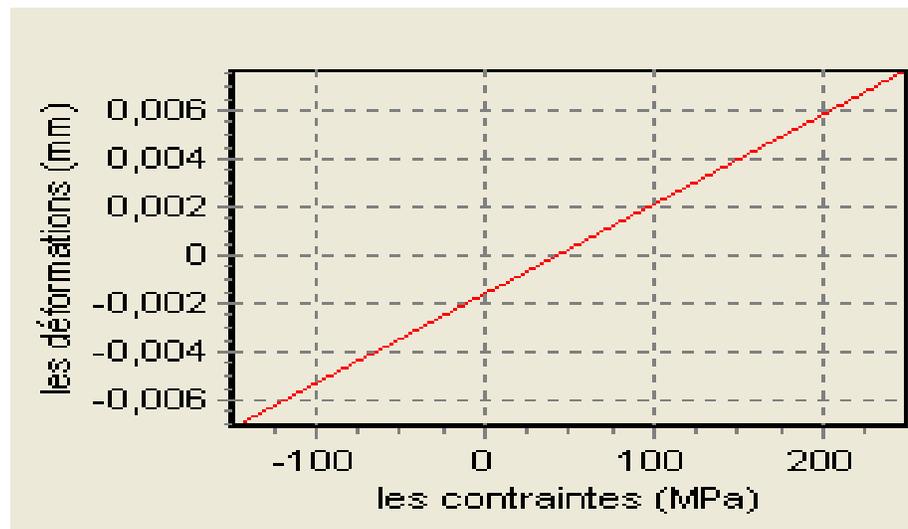


Fig. V.13 les contraintes de cisaillements τ_{yz} , τ_{xz} en fonction des déformations en cisaillement transverse γ_{yz} , γ_{xz} (θ)

Calcul de la matrice constitutive globale :

➤ Un tableau pour indiquer les valeurs de (z)

z0	0
z1	2
z2	4
z3	6

➤ La matrice de rigidité rapportée aux axes du stratifié

	$E''[i,1]$	$E''[i,2]$	$E''[i,3]$
$E''[1,i]$	554163,0	343643,0	28172,9
$E''[2,i]$	343643,0	706483,0	109882,0
$E''[3,i]$	28172,9	109882,0	84317,7

➤ La matrice de couplage membrane- flexion- torsion :

		F'[i,1]	F'[i,2]	B'[i,3]
B'[i,j] =	F'[1,j]	3,32498E7	2,06186E7	1,69037E6
	F'[2,j]	2,06186E7	4,2389E7	6,59292E6
	B'[3,j]	1,69037E6	6,59292E6	5,05906E6

➤ La matrice de rigidité en membrane

		A'[i,1]	A'[i,2]	A'[i,3]
A'[i,j] =	A'[1,j]	1,10833E6	687286,00	56345,80
	A'[2,j]	687286,00	1,41297E6	219764,00
	A'[3,j]	56345,80	219764,00	168635,00

➤ La matrice rigidité en flexion :

		D'[i,1]	D'[i,2]	D'[i,3]
D'[i,j] =	D'[1,j]	7,49228E8	4,64605E8	3,80898E7
	D'[2,j]	4,64605E8	9,55165E8	1,4856E8
	D'[3,j]	3,80898E7	1,4856E8	1,13998E8

Les coefficients de la matrice F_{ij} ont même forme que les coefficients de la matrice A_{ij} . Ils ont diffèrent par l'utilisation des coefficients C'_{ij} de rigidité au lieu des coefficients E'_{ij} de rigidité réduite.

F'[i,j] =		49193,00	6677,00
		6677,00	70088,00

La matrice constitutive

	A[1,1] B[1,1]	A[1,2] B[1,2]	A[1,3] B[1,3]	B[1,1] D[1,1]	B[1,2] D[1,2]	B[1,3] D[1,3]	F[1,1]	F[1,2]
A[1,i] B[1,i]	1,10833E	687286,0	56345,8	3,32498E	2,06186E	1,69037E	0,00	0,00
A[2,i] B[2,i]	687286,0	1,41297E	219764,0	2,06186E	4,2389E7	6,59292E	0,00	0,00
A[3,i] B[3,i]	56345,8	219764,0	1,68635E	1,69037E	6,59292E	5,05906E	0,00	0,00
B[1,i] D[1,i]	3,32498E	2,06186E	1,69037E	7,49228E	4,64605E	3,80898E7	0,00	0,00
B[2,i] D[2,i]	2,06186E	4,2389E7	6,59292E	4,64605E	9,55165E	1,4856E8	0,00	0,00
B[3,i] D[3,i]	1,69037E	6,59292E	5,05906E	3,80898E	1,4856E8	1,13998E8	0,00	0,00
F[1,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	49192,80	6677,00
F[2,i]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6677,00	70087,60

➤ On donne des résultantes et des moments

Les efforts	
N _x	2000
N _y	1500
N _{xy}	300
M _x	-250
M _y	150
M _{xy}	-50
Q _{yz}	200
Q _{xz}	80

- Et avec la méthode de l'élimination de Gauss on obtient la matrice suivante et on détermine les déformations et les courbures

	A[1,1]	A[1,2]	A[1,3]	B[1,1]	B[1,2]	B[1,3]	F[1,1]	F[1,2]	Les déformations	
A[1,i] B[1,i]	1,1083	687286	56345	3,3249	2,0618	1,6903	0,0	0,0	Epsilon x	-0,0055
A[2,i] B[2,i]	0,0	986777	18482	2,0618	2,9603	5,5447	0,0	0,0	Epsilon y	0,0004
A[3,i] B[3,i]	0,0	0,0	16577	1,1	5,5447	4,9731	0,0	0,0	Epsilon _{xy}	-0,0043
C[1,i] D[1,i]	0,0	0,0	0,0	-2,482E	-1,539E	-1,262	0,0	0,0	k _x	0,0002
C[2,i] D[2,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8159	-4,140	0,0	0,0	k _y	0,0000
C[3,i] D[3,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-5,200	0,0	0,0	k _{xy}	0,0002
F[1,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	49192	6677,0	Epsilon yz	0,0040
F[2,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	69181	Epsilon xz	0,0008



Fig. V.14 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures

V.3- Exemple 3 : Matériaux de Sandwich

a) Matériau utilisé est un sandwich constitué (figure V.5) d'une âme en mousse d'air et de deux peaux (verre/époxyde) et (carbone/époxyde).

Peau supérieure :

2 couches avec orientation et l'épaisseur de chaque couche [30/60],(3,3)mm.

Peau inférieure :

3 couches avec orientation et l'épaisseur de chaque couche [30/0/-30],(2,3,4)mm.

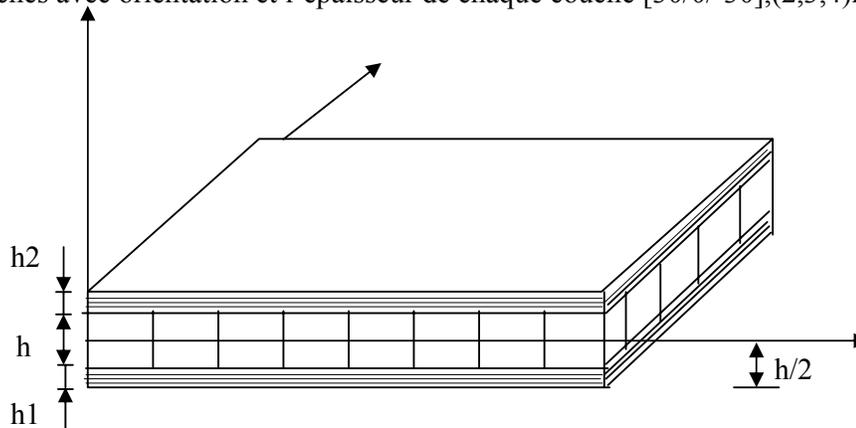


Fig. V.15 plaque d'un sandwich

-Les caractéristiques mécaniques de la peau inférieure

Verre(E)/Epoxyde

EI 46200 Mpa 0,6

Et 10309,5 Mpa

Glt 3703,703 Mpa

Nlt 0,31

Ntl 0,076

-Les caractéristiques mécaniques de la peau supérieure

Carbone(H.R)/Epoxyde

EI 139800 Mpa 0,6

Et 7758,62 Mpa

Glt 3816,793 Mpa

Nlt 0,34

Ntl 0,029

- Les caractéristiques mécaniques de l'âme

l'âme

mousse Aire

nidaplast

Ea 70 Mpa

Ga 25 Mpa

L'épaisseur de l'âme

h 20 mm

Peau inférieure

- Le nombre des couches, l'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche :

Nombre de couches 3

	Théta(°)	e1(mm)
tétha1 e1	30	2
tétha2 e2	0	3
tétha3 e3	-30	4

❖ La matrice de rigidité de la peau inférieure :

$A1[i,j]=$		A1[i,1]	A1[i,2]	A1[i,3]
	A1[1,i]	203762,000	50773,900	-422,497
	A1[2,i]	50773,900	301186,000	-16827,500
	A1[3,i]	-422,497	-16827,500	10176,200

Peau supérieure

- Le nombre des couches, l'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche :

Nombre de couches <input type="text" value="2"/>		Théta(°)	e2(mm)
	téta1 e1	30	3
	téta2 e2	60	3

❖ La matrice de rigidité de la peau supérieure :

$A2[i,j]=$		A2[i,1]	A2[i,2]	A2[i,3]
	A2[1,i]	403291,000	164426,000	-108002,000
	A2[2,i]	164426,000	458048,000	60884,900
	A2[3,i]	-108002,000	60884,900	33645,200

V.3.1. Calcul de la matrice constitutive globale :

➤ Un tableau pour indiquer le nombre (z) :

z0	0
z1	2
z2	5
z3	9

➤ La matrice de rigidité en couplage de la peau inférieure

$C1ij =$		C1[i,1]	C1[i,2]	C1[i,3]
	C1[1,i]	7,33543E6	1,82786E6	-15209,90
	C1[2,i]	1,82786E6	1,08427E7	-605790,00
	C1[3,i]	-15209,90	-605790,00	366343,00

- Un tableau pour indiquer le nombre (z) :

z0	0
z1	3
z2	6

- La matrice de rigidité en couplage de la peau supérieure

C2ij =		C2[i,1]	C2[i,2]	C2[i,3]
	C2[1,i]	7,25924E6	2,95967E6	-1,94404E6
	C2[2,i]	2,95967E6	8,24486E6	1,09593E6
	C2[3,i]	-1,94404E6	1,09593E6	605614,00

- La matrice de rigidité en membrane de sandwich

Aij =		A'[i,1]	A'[i,2]	A'[i,3]
	A'[1,i]	607053,00	215200,00	-108425,00
	A'[2,i]	215200,00	759234,00	44057,40
	A'[3,i]	-108425,00	44057,40	43821,40

- La matrice de rigidité en couplage

Bij =		B'[i,1]	B'[i,2]	B'[i,3]
	B'[1,i]	-3,99058E6	-2,27304E6	2,15159E6
	B'[2,i]	-2,27304E6	-3,13724E6	-1,55425E6
	B'[3,i]	2,15159E6	-1,55425E6	-469380,00

- La matrice de rigidité en couplage

Cij =		C'[i,1]	C'[i,2]	C'[i,3]
	C'[1,i]	1,45947E7	4,78753E6	-1,95925E6
	C'[2,i]	4,78753E6	1,90876E7	490140,00
	C'[3,i]	-1,95925E6	490140,00	971957,00

➤ La matrice de rigidité en flexion de sandwich

D_{ij} =		D'[i,1]	D'[i,2]	D'[i,3]
	D'[1,j]	-1,5238E6	2,26362E7	-3,85766E7
	D'[2,j]	2,26362E7	-5,19568E7	3,40344E7
	D'[3,j]	-3,85766E7	3,40344E7	4,78542E6

Les coefficients de la matrice F_{ij} ont même forme que les coefficients de la matrice A_{ij}. Ils ont diffèrent par l'utilisation des coefficients C'ij de rigidité au lieu des coefficients E'ij de rigidité réduite

F_{ij} =		F'[i,1]	F'[i,2]
	F'[1,j]	500	0
	F'[2,j]	0	500

V.3.2-La matrice constitutive

	A[i,1]	C[i]	A[i,2]	C[i]	A[i,3]	C[i]	B[i,1]	D[i]	B[i,2]	D[i]	B[i,3]	D[i]	F[i,1]	F[i,2]
A[1,j] B[1,j]	607053,0		215200,0		-108425,0		-3990580		-2273040		2151590		0	0
A[2,j] B[2,j]	215200,0		759234,0		44057,40		-2273040		-3137240		-1554250		0	0
A[3,j] B[3,j]	-108425,0		44057,40		43821,40		2151590		-1554250		-469380		0	0
C[1,j] D[1,j]	14594700		4787530		-1959250		-1523800		22636200		-3857660		0	0
C[2,j] D[2,j]	4787530		1908760		490140		22636200		-5195680		34034400		0	0
C[3,j] D[3,j]	-1959250		490140		971957		-3857660		34034400		4785420		0	0
F[1,j]	0		0		0		0		0		0		500	0
F[2,j]	0		0		0		0		0		0		0	500

➤ On donne les résultantes et des moment

Nx	2000
Ny	1200
Nxy	600
Mx	220
My	-180
Mxy	60
Qyz	320
Qxz	150

- Et avec la méthode de l'élimination de gauss on obtient la matrice suivante et on détermine les déformations et les courbures

	A[<i>i</i> ,1] C	A[<i>i</i> ,2] C	A[<i>i</i> ,3] C	B[<i>i</i> ,1] C	B[<i>i</i> ,2] C	B[<i>i</i> ,3] C	F[<i>i</i> ,1]	F[<i>i</i> ,2]	les déformations	
A[1, <i>i</i>] B[1, <i>i</i>]	607053	215200	-108425	-3,9905	-2,2730	2,1515	0,0	0,0	Epsilon x	0,0016
A[2, <i>i</i>] B[2, <i>i</i>]	0,0	682946	82494,0	-85838	-2,3314	-2,3169	0,0	0,0	Epsilon y	-0,0057
A[3, <i>i</i>] B[3, <i>i</i>]	0,0	0,0	24455,7	1,4388	-1,9602	-85087	0,0	0,0	Epsilon xy	0,0122
C[1, <i>i</i>] D[1, <i>i</i>]	0,0	0,0	0,0	5,6322	1,2918	-8,8052	0,0	0,0	kx	-0,0010
C[2, <i>i</i>] D[2, <i>i</i>]	0,0	0,0	0,0	0,0	1,3122	-1,7397	0,0	0,0	ky	-0,0010
C[3, <i>i</i>] D[3, <i>i</i>]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-7,1825	0,0	0,0	kxy	-0,0013
F[1, <i>i</i>]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	500,0	0,0	Epsilon yz	0,6400
F[2, <i>i</i>]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	500,0	Epsilon xz	0,3000

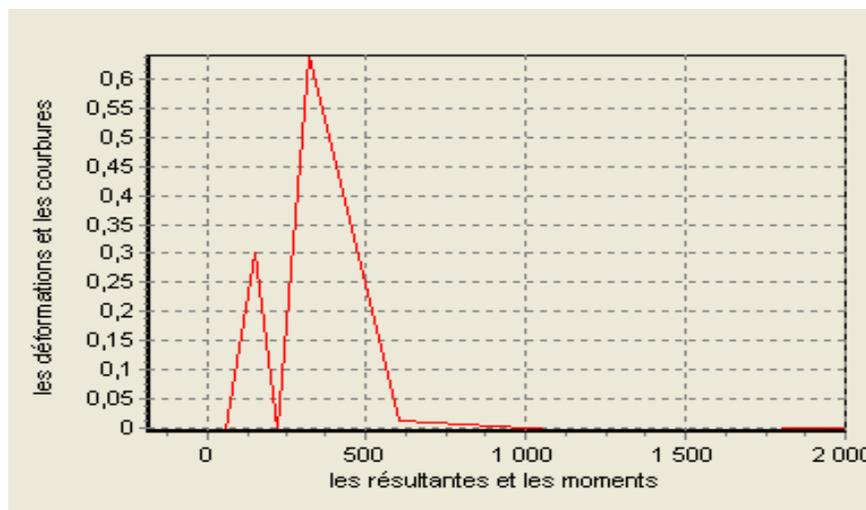


Fig. V.16 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures

b) Matériau utilisé est un sandwich constitué d'une âme en nidaplast et de deux peaux (verre/époxyde) et (verre/phénolique).

Peau supérieure :

8 couches avec orientation et l'épaisseur de chaque couche [0/45/-45/90/90/-45/45/0], (2) mm.

Peau inférieure :

8 couches avec orientation et l'épaisseur de chaque couche [0/45/-45/90/90/-45/45/0], (2) mm

❖ Les caractéristiques mécaniques de la peau inférieure

Verre(E)/Epoxyde	
EI	46200 Mpa <input type="checkbox"/> 0,6
Et	10309,5 Mpa
Glt	3703,703 Mpa
Nlt	0,31
Ntl	0,075

❖ Les caractéristiques mécaniques de la peau supérieure

Verre(E)/phenolique	
EI	45600 Mpa <input type="checkbox"/> 0,6
Et	7070,06 Mpa
Glt	2606,635 Mpa
Nlt	0,31
Ntl	0,050

❖ Les caractéristiques mécaniques de l'âme

l'âme	
<input type="text" value="mousse Aire"/> <input type="text" value="nidaplast"/>	
Ea	15 Mpa
Ga	8 Mpa
L'épaisseur de l'âme	
h	25

Peau inférieure

- Le nombre des couches, l'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche :

Nombre de couches

8

	Théta(°)	e1(mm)
téth1 e1	0	2
téth2 e2	45	2
téth3 e3	-45	2

- ❖ La matrice de rigidité de la peau inférieure :

	A1[i,1]	A1[i,2]	A1[i,3]
A1[1,j]	387335,000	185654,000	15238,300
A1[2,j]	185654,000	458342,000	69426,100
A1[3,j]	15238,300	69426,100	84979,600

Peau supérieure

- Le nombre des couches, l'orientation (θ) et l'épaisseur (e) dans chaque couche :

Nombre de couches

8

	Théta(°)	e1(mm)
téth1 e1	0	2
téth2 e2	45	2
téth3 e3	-45	2

- ❖ La matrice de rigidité de la peau supérieure :

	A2[i,1]	A2[i,2]	A2[i,3]
A2[1,j]	351946,000	185686,000	15097,900
A2[2,j]	185686,000	428174,000	65604,000
A2[3,j]	15097,900	65604,000	70531,300

Calcul de la matrice constitutive globale :

- Un tableau pour indiquer le nombre (z) :

z0	0
z1	2
z2	4
z3	6

- La matrice de rigidité en couplage de la peau inférieure

	C1[i,1]	C1[i,2]	C1[i,3]
C1[1,i]	1,23947E7	5,94093E6	487626,00
C1[2,i]	5,94093E6	1,46669E7	2,22164E6
C1[3,i]	487626,00	2,22164E6	2,71935E6

- Un tableau pour indiquer le nombre (z) :

z0	0
z1	2
z2	4
z3	6

- La matrice de rigidité en couplage de la peau supérieure

	C2[i,1]	C2[i,2]	C2[i,3]
C2[1,i]	1,12623E7	5,94195E6	483133,00
C2[2,i]	5,94195E6	1,37016E7	2,09933E6
C2[3,i]	483133,00	2,09933E6	2,257E6

- La matrice de rigidité en membrane de sandwich

	A'[i,1]	A'[i,2]	A'[i,3]
A'[1,i]	739281,00	371340,00	30336,20
A'[2,i]	371340,00	886516,00	135030,00
A'[3,i]	30336,20	135030,00	155511,00

➤ La matrice de rigidité en couplage

B_{ij} =		B'[i,1]	B'[i,2]	B'[i,3]
	B'[1,j]	884725,00	-800,00	3510,00
	B'[2,j]	-800,00	754200,00	95552,50
	B'[3,j]	3510,00	95552,50	361208,00

➤ La matrice de rigidité en couplage

C_{ij} =		C'[i,1]	C'[i,2]	C'[i,3]
	C'[1,j]	2,3657E7	1,18829E7	970759,00
	C'[2,j]	1,18829E7	2,83685E7	4,32097E6
	C'[3,j]	970759,00	4,32097E6	4,97635E6

➤ La matrice de rigidité en flexion de sandwich

D_{ij} =		D'[i,1]	D'[i,2]	D'[i,3]
	D'[1,j]	-2,831E7	25500,00	-112325,00
	D'[2,j]	25500,00	-2,41325E7	-3,05775E6
	D'[3,j]	-112325,00	-3,05775E6	-1,15588E7

Les coefficients de la matrice F_{ij} ont même forme que les coefficients de la matrice A_{ij}. Ils ont différent par l'utilisation des coefficients C'ij de rigidité au lieu des coefficients E'ij de rigidité réduite

F_{ij} =		F'[i,1]	F'[i,2]
	F'[1,j]	200	0
	F'[2,j]	0	200

La matrice constitutive

	A[i,1]	C[i,1]	A[i,2]	C[i,2]	A[i,3]	C[i,3]	B[i,1]	D[i,1]	B[i,2]	D[i,2]	B[i,3]	D[i,3]	F[i,1]	F[i,2]
A[1,j] B[1,j]	739281,0	371340,0	30336,20	884725	-800	3510	0	0						
A[2,j] B[2,j]	371340,0	886516,0	135030,00	-800	754200	95552,5	0	0						
A[3,j] B[3,j]	30336,20	135030,0	155511,00	3510	95552,5	361208	0	0						
C[1,j] D[1,j]	23657000	11882900	970759	-2831000	25500	-112325	0	0						
C[2,j] D[2,j]	11882900	28368500	4320970	25500	-2413250	-3057750	0	0						
C[3,j] D[3,j]	970759	4320970	4976350	-112325	-3057750	-1155880	0	0						
F[1,j]	0	0	0	0	0	0	200	0						
F[2,j]	0	0	0	0	0	0	0	200						

➤ On donne des résultantes et des moments

Les efforts	
Nx	2000
Ny	1300
Nxy	450
Mx	260
My	180
Mxy	-80
Qyz	250
Qxz	120

- Et avec la méthode de l'élimination de gauss on obtient la matrice suivante et on détermine les déformations et les courbures

	A[i,1] C	A[i,2] C	A[i,3] C	B[i,1] C	B[i,2] C	B[i,3] C	F[i,1]	F[i,2]
A[1,i] B[1,i]	739281	371340	30336,2	884725	-800,0	3510,0	0,0	0,0
A[2,i] B[2,i]	0,0	699992	119792	-44519	754602	93789	0,0	0,0
A[3,i] B[3,i]	0,0	0,0	154266	-32794	95585	361064	0,0	0,0
C[1,i] D[1,i]	0,0	0,0	0,0	-5,6621	51099	-22464	0,0	0,0
C[2,i] D[2,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	-2,6506	-1,2033	0,0	0,0
C[3,i] D[3,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,7637	0,0	0,0
F[1,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	200,0	0,0
F[2,i]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	200,0

les déformations	
Epsilon x	0,0015
Epsilon y	-0,0005
Epsilon xy	0,0012
kx	0,0011
ky	0,0012
kxy	0,0002
Epsilon yz	1,2500
Epsilon xz	0,6000

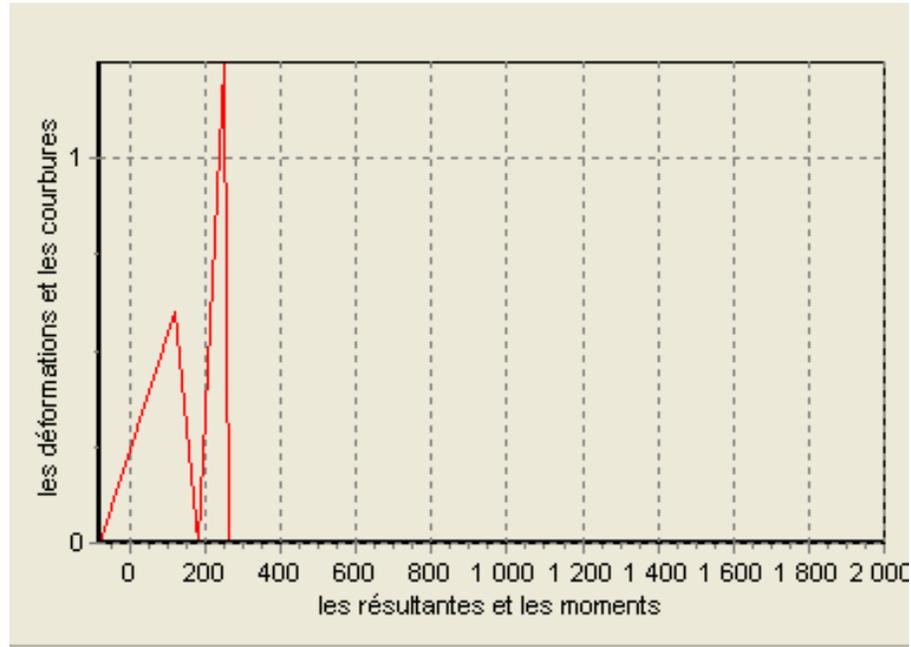


Fig. V.17 variation des résultantes et les moments en fonction des déformations et les courbures

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale et recommandations

L'engouement créés par les matériaux composites dans les secteurs de la construction et du transport n'est plus à démontrer, ces derniers permettent l'obtention de structures moins onéreuses, plus résistantes, plus légères. C'est pour cette raison qu'une course constante à l'innovation et la recherche dans ce domaine à été lancée depuis presque deux décennies. Les matériaux composites actuels répondent parfaitement aux critères demandés, et le large choix des constituants nécessaires à leur élaboration ouvre un vaste spectre de propriétés mécaniques.

L'objectif principal de notre travail était de développer un programme de calcul d'homogénéisation des plaques stratifiées composites. Le programme a été développé sous environnement DELPHI afin de donner à ce dernier un caractère interactif.

Le programme développé nous a permis, à travers une série d'exemples d'applications, de valider les résultats numériques obtenus et décrivant les lois de comportement en élasticité plane, en flexion et pour les plaques sandwich. Les résultats concernant la vérification à la rupture des stratifiées a également donné grande satisfaction.

A la lumière du travail accompli ainsi que les résultats très satisfaisants obtenus, nous considérons que nous disposons actuellement d'un outil de calcul interactif et performant, ainsi que de son programme source en langage DELPHI, qui pourra cependant constituer une base non négligeable pour être amélioré et étendu à d'autres théories du comportement des matériaux composites, par exemple le délaminage, la propagation des fissures, les déformations de fluage etc..

ANNEX

A

Relations de Base

Annexe –B-
*******Programme principale*******

Unit ULog_composite;

Interface

Uses

Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs,
Menus, ToolWin, ComCtrls, jpeg, ExtCtrls, StdCtrls, Buttons;

Type

TFLog_composite = class(TForm)
 MainMenu1: TMainMenu;
 Maires1: TMenuItem;
 Fibres1: TMenuItem;
 Matrices1: TMenuItem;
 N1: TMenuItem;
 N2: TMenuItem;
 Quiter1: TMenuItem;
 outils1: TMenuItem;
 Aide1: TMenuItem;
 Image1: TImage;
 StatusBar1: TStatusBar;
 ToolBar1: TToolBar;
 ToolBar2: TToolBar;
 ToolButton1: TToolButton;
 ToolButton2: TToolButton;
 ToolButton3: TToolButton;
 ToolButton5: TToolButton;
 ToolButton6: TToolButton;
 FApropos: TMenuItem;
 ToolButton4: TToolButton;
 ToolButton7: TToolButton;
 Apropos2: TMenuItem;
 Changerlefont1: TMenuItem;
 Changerlacouleur1: TMenuItem;
 FontDialog1: TFontDialog;
 OpenDialog1: TOpenDialog;
 ColorDialog1: TColorDialog;
 SaveDialog1: TSaveDialog;
 Im1: TMenuItem;
 Procedure consulter1Click (Sender: TObject);
 Procedure Nouveau1Click (Sender: TObject);
 Procedure Consulter2Click (Sender: TObject);
 Procedure N4Click (Sender: TObject);
 Procedure Quiter1Click (Sender: TObject);
 Procedure Champdescontraintes1Click (Sender: TObject);
 Procedure FAproposClick(Sender: TObject);
 Procedure Apropos1Click (Sender: TObject);
 Procedure ToolButton1Click (Sender: TObject);
 Procedure ToolButton2Click (Sender: TObject);
 Procedure ToolButton5Click (Sender: TObject);
 Procedure ToolButton3Click (Sender: TObject);
 Procedure ToolButton6Click (Sender: TObject);
 Procedure Apropos2Click (Sender: TObject);
 Procedure Changerlefont1Click (Sender: TObject);

```

Private
  {Déclarations privées}
Public
  {Déclarations publiques}
End;

var
  FLog_composite: TFLog_composite;

Implementation

Uses UDef_plane, UVeri_rupture , UFlexion, UFlexion_C, USandwich,
  UAide_comp, UPropos, UDM, UChoix, USandwich1, UFdef_plane2, Udeformations,
  UFlexion_M1, Umoment1, USandwich2, USandwich3, USandwich4, USandwich5,
  UVeri_rupture1, UC_trans;

{$R *.DFM}

Procedure TFLog_composite.consulter1Click (Sender: TObject);
Begin
  Fdef_plane.Show;
  Fdef_plane.BitBtn3.Visible:=false;
  Fdef_plane.Panel2.Visible:=true;
  Fdef_plane.GroupBox2.Visible:=true;

End;

Procedure TFLog_composite.Nouveau1Click (Sender: TObject);
Begin
  FVeri_rupture.show;

End;

Procedure TFLog_composite.Consulter2Click (Sender: TObject);
Begin
  FFlexion_C.show;

End;

Procedure TFLog_composite.N4Click (Sender: TObject);
Begin
  FFlexion_M.show;

End;

Procedure TFLog_composite.Quiter1Click (Sender: TObject);
Begin
  If MessageDlg('voulez- vous quitter l"application ?',mtConfirmation,[mbyes,mbno],0)=mryes then
    FLog_composite.Close;
End;

Procedure TFLog_composite.Champdescontraintes1Click (Sender: TObject);
Begin

```

```
FSandwich.show;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.FAproposClick(Sender: TObject);  
Begin  
Faide_comp.ShowModal;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.Apropos1Click (Sender: TObject);  
Begin  
Fpropos.ShowModal;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.ToolButton1Click (Sender: TObject);  
Begin  
Fdef_plane.Show;  
Fdef_plane.BitBtn3.Visible:=false;  
Fdef_plane.Panel2.Visible:=true;  
Fdef_plane.GroupBox2.Visible:=true;  
  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.ToolButton2Click (Sender: TObject);  
Begin  
FVeri_rupture.show;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.ToolButton5Click (Sender: TObject);  
Begin  
FFlexion_C.show;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.ToolButton3Click (Sender: TObject);  
begin  
FFlexion_M.show;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.ToolButton6Click (Sender: TObject);  
Begin  
FSandwich.Show;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.Apropos2Click (Sender: TObject);  
Begin  
FPropos.ShowModal;  
End;
```

```
Procedure TFLog_composite.Changerlefont1Click (Sender: TObject);  
Begin  
If Fontdialog1.Execute then  
FDef_plane.DBLookupComboBox1.font:= fontdialog1.Font;  
FDef_plane.MaskEdit6.Font:= fontdialog1.Font;  
FDef_plane.MaskEdit7.Font := fontdialog1.Font ;  
FDef_plane.MaskEdit8.Font := fontdialog1.Font ;  
FDef_plane.MaskEdit9.Font := fontdialog1.Font ;  
FDef_plane.MaskEdit10.Font := fontdialog1.Font ;
```

FDef_plane.Edit1.Font := fontdialog1.Font ;
FDef_plane.MaskEdit1.Font := fontdialog1.Font ;
FDef_plane.MaskEdit2.Font := fontdialog1.Font ;
FDef_plane.MaskEdit3.Font := fontdialog1.Font ;
FDef_plane.MaskEdit4.Font := fontdialog1.Font ;

FChoix.Edit3.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.Edit4.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit1.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit2.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit3.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit4.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit5.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit6.Font := fontdialog1.Font ;
FChoix.MaskEdit7.Font := fontdialog1.Font ;

FDef_plane2.maskedit15.font:=FontDialog1.Font;
FDef_plane2.StringGrid2.Font:=FontDialog1.Font;
Fdef_plane2.MaskEdit13.Font:=FontDialog1.Font;
Fdef_plane2.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;
Fdef_plane2.StringGrid3.Font:=FontDialog1.Font;

fdeformations.edit10.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.Edit11.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.Edit12.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.MaskEdit1.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.MaskEdit2.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.MaskEdit3.font:=fontdialog1.font;
fdeformations.StringGrid1.font:=fontdialog1.font;

FFlexion_C.StringGrid1.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.StringGrid2.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit1.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.StringGrid3.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit2.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit3.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit4.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit5.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit6.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_C.MaskEdit7.font:=fontdialog1.font;

FFlexion_M.StringGrid1.font:=fontdialog1.font;

FFlexion_M1.StringGrid1.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_M1.StringGrid2.font:=fontdialog1.font;
FFlexion_M1.StringGrid3.font:=fontdialog1.font;

Fmoment1.StringGrid3.font:=fontdialog1.font;
Fmoment1.StringGrid1.font:=fontdialog1.font;
Fmoment1.StringGrid5.font:=fontdialog1.font;
Fmoment1.StringGrid6.font:=fontdialog1.font;
Fmoment1.StringGrid2.font:=fontdialog1.font;
Fmoment1.StringGrid4.font:=fontdialog1.font;

FSandwich.DBLookupListBox1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit6.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit7.Font:=FontDialog1.Font;

FSandwich.MaskEdit8.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit9.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit10.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit3.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit4.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit5.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit11.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit12.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.MaskEdit13.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.DBLookupComboBox2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.DBLookupComboBox1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.Edit1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich.Edit2.Font:=FontDialog1.Font;

FSandwich1.MaskEdit1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich1.MaskEdit2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich1.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich1.StringGrid2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich1.StringGrid3.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich1.StringGrid4.Font:=FontDialog1.Font;

FSandwich2.StringGrid3.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich2.StringGrid5.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich2.StringGrid2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich2.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;

FSandwich3.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich3.StringGrid2.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich3.StringGrid3.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich3.StringGrid4.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich3.StringGrid5.Font:=FontDialog1.Font;

Fsandwich4.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;

FSandwich5.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich5.StringGrid3.Font:=FontDialog1.Font;
FSandwich5.StringGrid2.Font:=FontDialog1.Font;

FVeri_rupture.StringGrid1.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.MaskEdit1.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.MaskEdit2.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.MaskEdit3.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.MaskEdit4.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.DBEdit1.Font:=FontDialog1.Font;
FVeri_rupture.DBEdit2.Font:=FontDialog1.Font;

End;

End.

ANNEX

B

**Programme source
développé en
Delphi**

Annexe –A-

La masse volumique du pli

C'est, pour le mélange « renfort + matrice », le rapport [8] :

$$\rho = \frac{\text{Masse totale}}{\text{Volume total}} \quad (1)$$

$$\rho = \frac{\text{Volume de fibre}}{\text{Volume total}} \rho_f + \frac{\text{Volume de matrice}}{\text{Volume total}} \rho_m \quad (2)$$

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (3)$$

L'épaisseur du pli

On définit sous le terme de **grammage** la masse m_{0f} de renfort par mètre **carré**. L'épaisseur d'un pli, notée **h**, est alors telle que [8] :

$$h \cdot 1(\text{m}^2) = \text{volume total} \frac{m_{0f}}{\text{Volume fibres} \cdot \rho_f} \quad (4)$$

$$h = \frac{m_{0f}}{V_f \cdot \rho_f} \quad (5)$$

On peut également exprimer l'épaisseur à partir de la teneur en masse M_f de renfort au lieu de la teneur en volume V_f . on obtient :

$$h = m_{0f} \left[\frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{1 - M_f}{M_f} \right) \right] \quad (6)$$

	M_f	h
Verre « E »	34%	0.125
Verre « R »	68%	0.175
Kevlar	65%	0.13
Carbone « H.R »	68%	0.13

Tableau : Exemple : plis unidirectionnels, [8]

Loi de comportement en souplesse pour un matériau orthotrope

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{23} & s_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{22} - s_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \underline{\varepsilon} = [S] \cdot \underline{\sigma} \quad (7)$$

En chaque M du matériau. La direction z est la direction principale avec un vecteur propre nul. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de *contraintes planes*.

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

$$E_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \quad (9)$$

$$E_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{E_L} E_{11} \quad (10)$$

$$E_{12} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT}E_{22} \quad (11)$$

$$E_{66} = G_{LT} \quad (12)$$

Les Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en-dehors de ses axes principaux :

$$\begin{aligned}
E'_{11}(\theta) &= c^4 E'_l + s^4 E'_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} E'_l + 2G_{lt}) \\
E'_{22}(\theta) &= s^4 E'_l + c^4 E'_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} E'_l + 2G_{lt}) \\
E'_{33}(\theta) &= c^2 s^2 (E'_l + E'_t - 2\nu_{tl} E'_l) + (c^2 - s^2)^2 G_{lt} \\
E'_{12}(\theta) &= c^2 s^2 (E'_l + E'_t - 4G_{lt}) + (c^4 + s^4) \nu_{tl} E'_l \\
E'_{13}(\theta) &= -cs \left\{ c^2 E'_l - s^2 E'_t - (c^2 - s^2) (\nu_{tl} E'_l + 2G_{lt}) \right\} \\
E'_{23}(\theta) &= -cs \left\{ s^2 E'_l - c^2 E'_t + (c^2 - s^2) (\nu_{tl} E'_l + 2G_{lt}) \right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Les déformations dans les axes principaux :

$$\begin{bmatrix} \zeta_l \\ \zeta_t \\ \gamma_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Coefficients de rigidité rapportés aux axes du stratifié en fonction des coefficients rapportés aux axes principaux des couches :

$$\begin{aligned}
c'_{44} &= c_{44} \cos^2 \theta + c_{55} \sin^2 \theta \\
c'_{45} &= (c_{55} - c_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
c'_{55} &= c_{44} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{15}$$

Tel que :

$$C_{44} = G_{23} = G_{TT'}$$

$$C_{55} = G_{13} = G_{LT'} = G_{LT} \quad (\text{Dans le cas des composites unidirectionnel})$$

θ = angle d'orientation des fibres.

Bibliographie

- [1] **CARLSON J. D., JOLLY M.R.**, « MR fluid, foam and elastomer devices », Mechatronics,
- [2] **Nadia Bahlouli**, Cours Composites sur le site Internet « <http://www-ipst.ustrasbg.fr/nadia/courcomp/> »
- [3] **R.G.Weatherhead**. *F.R.P. Technology. Fiber reinforced resin systems*. Applied science publishers Ltd (1980).
- [4] **J.Weiss et C.bord**. *Les matériaux composites* (tomes 1 et 2). Editions de l'usine (1983).
- [5] **M.Geier et D. Duedal**. *Gide pratique de matériaux composites*. Technique et documentation (1985).
- [6] **G.chrétien**. *Matériaux composites à matrice organique*. Technique et Documentation (1986).
- [7] *Advanced composites*. Edité par **I.K. Ptridge**. Elsevier Applied science (1989).
- [8] *Matériaux composites* **DANIEL Gray** édition Eyrolles 3, pp. 51-61 (2001)
- [9] **J.-M. Berthelot** 3^e édition. *Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des structures »*. Technique & Documentation (1999).
- [10] **J.J. Harmans**. « The elastic proprieties of fiber reinforced materials when the fibers aligned » *Proc.K.ned. Akad. Wet.* Vol. B70, 1 (1967).
- [11] *Guide de l'utilisateur Delphi 3*, Borland, 1997.
- [12] *Guide du développeur Delphi 3*, Borland, 1997. Chapitre IV programme Delphi 10, (2000) 555-569
- [13] **V.D.AZZI et S.W.Tsai** « anisotropic strength of components » *Experimental Mechanics*, vol, 5, pp. 286-288(1965).
- [14] **E. Reissner**. «The effecte of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ». *Journal of applied Mechanics*, 12, pp. 69-77(1945).
- [15] **R.D. Mandlin**. « influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates » . *Journal of applied Mechanics*, 18, pp. 336-343(195).

Résumé.

L'objectif principal de ce travail est de développer un programme de calcul d'homogénéisation des plaques stratifiés composites. Le programme a été développé sous environnement **DELPHI** afin de donner à ce dernier un caractère interactif.

Le programme développé nous a permis, à travers une série d'exemples d'applications, de valider les résultats numériques obtenus et décrivant les lois de comportement en élasticité plane, en flexion et pour les plaques sandwich. Les résultats concernant la vérification à la rupture des stratifiés a également donné grande satisfaction.

On considère que nous disposons actuellement d'un outil de calcul interactif et performant, ainsi que de son programme source en langage **DELPHI** pouvant faire l'objet d'amélioration ou d'extension.

Aabstract

The main objective of this work is to develop a program that calculates homogenization plates laminated composites. The program was developed under **DELPHI** environment in order to give it a character interactive.

The program developed helped us, through a series of examples of applications to validate the numerical results obtained and describing the laws of behavior plane elasticity, bending and sandwich plates. The findings regarding the audit to the failure of laminates also gave great satisfaction.

We consider that we have at present an interactive tool for calculating and efficient, as well as its program **DELPHI** language source can be improved or extended.

ملخص :

الهدف الأساسي من هذا العمل هو إنجاز برنامج حسابي للتجانس الخاص بالصفائح المتعددة الأطباق المتكونة من مواد مركبة. البرنامج أنجز بواسطة لغة البرمجة **DELPHI** لأعطاء البرنامج صيغة تفاعلية مع المستعمل.

البرنامج المنجز اعطى لنا وذلك من خلال سلسلة الامثلة التطبيقية من تجسيد النتائج العددية المعطيات وكتابة قوانين سلوك الليونة علي السطوح المستوية, بالانحناء و كذلك بالنسبة لصفائح الصاندويش. بخصوص النتائج السابقة قمنا بمعاينة انكسار الرقائق فاعطت رضاء كبير.

نعتبر باننا لدينا في الوقت الحاضر اداة حساب تفاعلية و كفوءة ,بالاضافة الي ان مصدر لغة برنامج **DELPHI** يمكن ان يحسن و يمدد.