

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Batna  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département de mécanique

# Mémoire

*En vue de l'obtention du diplôme de*  
**Magistère en Mécanique**  
*Option*  
**Energétique**

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN  
MINICANAL PAR LA METHODE DES VOLUMES  
FINIS

*Présenté le 24 juin 2008*

*Par*

*Lyamna Hassinet*

Devant le jury composé de :

Président	S. Bougoul	Pr., Université de Batna
Encadreur	L. Messaoudi	C.C., Université de Batna
Co-encadreur	H. Benmoussa	Pr., Université de Batna
Examineur	S. Rahal	MC., Université de Batna
Examineur	R. HadeF	Pr., Université d'Oum El Bouaghi

# Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements en premier au DIEU tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné afin de réaliser ce modeste travail.

A Monsieur Laïd Messaoudi, qu'il soit remercié d'abord pour avoir accepté de diriger ce travail, ensuite pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail et pour la liberté de recherche qu'il a bien voulu me laisser.

A Monsieur Benmoussa Hocine, qu'il soit remercié d'abord pour avoir accepté d'être co-encadreur, ensuite pour ses précieux conseils.

Le travail décrit dans ce mémoire est le fruit d'un travail de groupe et de l'aide généreuse de plusieurs personnes. Particulièrement, Dr. Samir Zidat, ses conseils avisés, son aide, son soutien permanent et son expérience, m'ont été d'un grand apport et ont conforté mon enthousiasme dans cette recherche.

Je tiens à remercier mes proches. Merci et pardon à mes enfants pour les moments difficiles. Un grand merci à toute ma famille pour m'avoir entouré de leurs affections.

Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce modeste travail, Messieurs les Docteurs Saad Bougoul, Redjem Hadeef et Samir Rahal.

# Table des matières

<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	<b>V</b>
1.1 NOMENCLATURE .....	I
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	<b>6</b>
1.1 LA MINIATURISATION ET LA MECANIQUE DES FLUIDES .....	6
1.1.1 Représentation microscopique des fluides .....	7
1.1.2 Modèles physiques en microfluidique .....	8
1.1.3 Les interactions électrostatiques liquide/paroi.....	9
1.2 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE EN MICROFLUIDIQUE.....	11
1.2.1 Etudes expérimentales .....	11
1.2.2 Etudes par modélisations et simulations numériques.....	15
CONCLUSION .....	16
<b>CHAPITRE 2 : RAPPEL THEORIQUE</b> .....	<b>18</b>
2.1 HYDRODYNAMIQUE DES ECOULEMENTS LIQUIDES DANS LES MINICANAU.....	18
2.1.1 Hypothèses.....	19
2.1.2 Ecoulement laminaire .....	19
2.1.3 Ecoulement turbulent .....	22
2.1.4 Couches limites .....	23
2.1.5 Nombre de Poiseuille .....	25
2.2 GENERATION DE GRILLES.....	27
2.2.1 Classification des techniques de génération de maillages.....	27
2.3 FORMULATION DU PROBLEME.....	30
2.3.1 Le dispositif d'étude.....	30
2.3.2 Conditions aux limites.....	30
CONCLUSION .....	31
<b>CHAPITRE 3 : METHODE NUMERIQUE</b> .....	<b>32</b>
3.1 LA METHODE DES VOLUMES FINIS.....	32
3.1.1 Equations générales de transport.....	33
▪ Intégrale de volume .....	34
▪ Intégrale de surface.....	35
3.1.2 Maillage.....	35
3.1.3 Détails de discrétisation .....	36
3.1.4 Schémas de discrétisation spatiaux .....	57
3.2 CALCUL DE L'ECOULEMENT : .....	60
3.2.1 Algorithme de SIMPLE.....	60
3.2.2 Méthode de résolution.....	62
3.2.3 Etude de convergence.....	63
3.3 STRUCTURE DU CODE DE CALCUL.....	65
CONCLUSION .....	67
<b>CHAPITRE 4 : RESULTATS ET DISCUSSIONS</b> .....	<b>68</b>
4.1 MODELISATION ET RESOLUTION EN VOLUMES FINIS.....	68
4.1.1 Génération de grilles.....	68
4.1.2 Calcul de l'écoulement .....	70
CONCLUSION .....	74
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>76</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>78</b>

<b>ANNEXES .....</b>	<b>81</b>
ANNEXE A : MODELISATION ET RESOLUTION AVEC LE PROGRAMME " EMC" .....	81
▪ <i>Maillage du modèle</i> .....	81
▪ <i>Calcul de l'écoulement</i> .....	88
ANNEXE B : MODELISATION ET RESOLUTION AVEC "ANSYS" .....	93
· <i>Maillage du modèle</i> .....	93
· <i>Calcul de l'écoulement</i> .....	94

# Liste des figures

Figure 1. Pompe en silicium permettant la délivrance contrôlée de médicaments. [Lattes 2007].....	2
Figure 2 Laboratoires miniatures « lab-on-chip » [Lattes 2007].....	3
Figure 1.1. Caractéristiques microscopiques d'un gaz diatomique dans les conditions de température et de pression normales ainsi que de l'eau liquide....	7
Figure 1.2. La Double Couche Electrique et ses effets, Mala et Li (1999).....	10
Figure 1.3. Profils de vitesses obtenus pour différents types de mise en mouvement du liquide, Kinoshita et al. (2002).....	11
Figure 1.4. Nombre de Poiseuille réduit obtenu dans différentes études, Lattes (2007).....	12
Figure 1.5. Nombre de Reynolds critique obtenu par différents auteurs.....	12
Figure 2.1. Notations utilisées pour des plaques planes parallèles.....	18
Figure 2.2. Ecoulement dans un canal à section rectangulaire.....	21
Figure 2.3. Développement du profil de vitesse et chute de pression le long d'un canal.....	24
Figure 2.4. Détail du maillage.....	24
Figure 2.5. Configuration à un espace de calcul.....	28
Figure 2.6. Géométrie du minicanal.....	30
Figure 3.1. Discrétisation du domaine de calcul.....	33
Figure 3.2. Stockage des variables scalaires et des composantes de vitesse suivant un maillage décalé.....	36
Figure 3.3. Stokage des composantes de vitesse sur les faces du volume de contrôle associé à U.....	38
Figure 3.4. Stockage des composantes de vitesse sur les faces du volume de contrôle associé à V.....	47
Figure 3.5. Les conditions d'entrées et de sorties.....	56
Figure 3.6. Conditions aux frontières horizontales inférieure et supérieure.....	57
Figure 4.1. Maillage du minicanal de diamètre hydraulique est de 0.98 mm avec zoom.....	68
Figure 4.2. Différent maillage à utiliser pour les résolutions des problèmes d'écoulement ou de transfère thermique dans les cavités.....	69
Figure 4.3 . Profils de Vitesse avant l'établissement de l'écoulement (débit 450 ml/mn).....	70

Figure 4.4. Profils de Vitesse après l'établissement de l'écoulement (débit 450 ml/mn) .....	70
Figure 4.5. Profils de Vitesse avant l'établissement de l'écoulement (débit 850 ml/mn) .....	70
Figure 4.6. Profils de Vitesse après l'établissement de l'écoulement (débit 850 ml/mn) .....	70
Figure 4.7. Variation de la vitesse axiale le long du canal (débit 450 ml/mn).....	71
Figure 4.8. Variation de la vitesse axiale le long du canal (débit 850 ml/mn).....	71
Figure 4.9. Variation de la vitesse axiale le long du minicanal (débit 450 ml/mn) ...	71
Figure 4.10. Variation de la vitesse axiale le long du canal (débit 850 ml/mn).....	71
Figure 4.11. Comparaison théorique /expérimental.....	72
Figure 4.12. Nombre de Poiseuille réduit obtenu .....	72
Figure 4.13. Comparaison entre simulation et données disponibles .....	73
Figure 4.14. Ecart en % entre les données disponibles et la simulation.....	74

# Nomenclature

## 1.1 Nomenclature

$C_{f\text{ exp}}$	Coefficient de frottement expérimental	
$C_f$	Coefficient de frottement pariétal	
$C_{f\text{ theo}}$	Coefficient de frottement théorique	
$t_p$	Contrainte à la paroi	(Pa)
$Q_v$	Débit volumique	(m <sup>3</sup> /s)
$h$	Demi hauteur du canal	(m)
$D_h$	Diamètre hydraulique	(m)
$D_E$	Distance ou longueur d'établissement de l'écoulement	(m)
$l$	Largeur du canal	(m)
$L$	Longueur du canal	(m)
$\rho$	Masse volumique	(kg/m <sup>3</sup> )
$Re_{D_h}$	Nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique	
$P$	Pression	pa
$\Delta p$	Perte de pression	(pa)
$a$	rapport d'aspect du canal	
$\nu$	Viscosité cinématique	(m <sup>2</sup> /s)
$\mu$	Viscosité dynamique	(kg/ms)
$u_{\text{max}}$	vitesse maximale	(m/s)
$Po^*$	Nombre de Poiseuille réduit	
$Po_{\text{th}}$	Nombre de Poiseuille théorique	
$u_{\text{moy}}$	vitesse moyenne	(m/s)

# Introduction générale

La nouvelle technologie en l'électronique de puissance et la course vers la miniaturisation tel que les processeurs dernière génération, les diodes laser, les gros transistors et les nouvelles générations d'appareils à rayonnement X, entraînent de sévères contraintes de fonctionnement et notamment au niveau de la température de fonctionnement.

Pour que ces appareils fonctionnent correctement et ne soient pas détruits par la chaleur qu'ils génèrent, il est impératif d'évacuer la puissance thermique très efficacement pour maintenir une température de fonctionnement optimum.

Cela nécessite des systèmes de refroidissement adaptés à des flux de chaleur très intenses. On doit donc dissiper de plus en plus de puissance sur une surface qui ne varie pas énormément, et qui a tendance à diminuer. La problématique qui se pose aujourd'hui est alors de savoir comment dissiper de si grosses densités de flux de chaleur dans un si petit espace, ce que les microstructures seront en mesure d'apporter, puisqu'elles vont créer un environnement très favorable au transfert de la puissance vers le fluide.

L'une des approches les plus rassurantes étant le refroidissement au moyen des minicanaux et microcanaux par un écoulement simple ou diphasique. Ils offrent de hautes performances en transfert de chaleur.

Cependant, pour concevoir et fabriquer de tels systèmes, il est nécessaire de bien comprendre et caractériser les écoulements à l'échelle inférieure au millimètre (en microconduites), qui restent mal compris.

En se dirigeant notamment vers la miniaturisation, deux termes sont apparus dans les publications spécialisées "Microfluidique" et Microthermique, Ce sont de nouvelles disciplines qui sont survenues en microtechnologie. Elles s'intéressent aux transferts de chaleur et aux écoulements dans les microstructures.

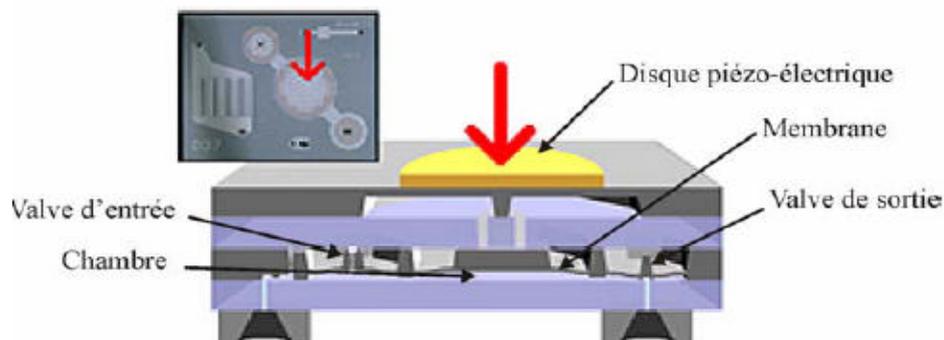
Les échangeurs à minicanaux/microstructures constituent donc une méthode innovante pour le transfert de grosses puissances thermiques de l'ordre de 20 KW

issues de petites surfaces vers un fluide caloporteur Bricard (1995). L'échangeur est couramment fabriqué dans un matériau à haute conductivité thermique comme l'aluminium, le cuivre ou le silicium. Ces canaux sont réalisés par des techniques complexes de microfabrication tel que l'ablation laser, le plasma, l'épitaxie, la gravure chimique, l'érosion, le dépôt de vapeur, etc.

Ils ont des dimensions de passage qui varient de 1mm à 0.001mm dans lesquels circulera un fluide chargé d'évacuer la puissance absorbée vers un radiateur ou un condenseur. Ces échangeurs combinent à la fois une énorme surface d'échange par rapport à leurs dimensions générales (rapport surface /volume important), un très grand coefficient d'échange convectif, un faible encombrement, une faible masse et enfin un faible besoin en débit.

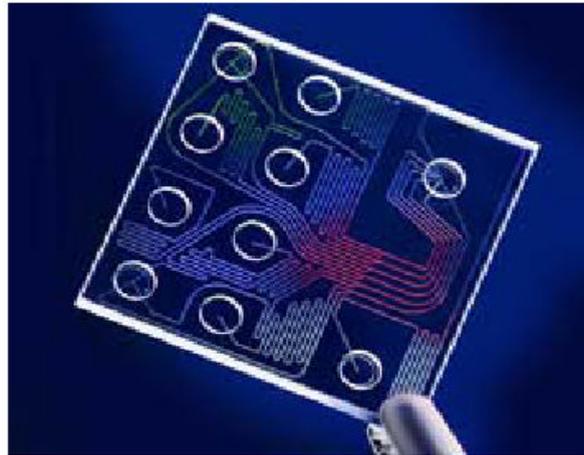
En plus de l'utilisation des minicanaux en électronique pour le refroidissement de composants; on peut citer d'autres applications comme dans le secteur médical, par exemple :

- Les microvalves sont apparues dans les années 1990, ces systèmes sont des microsystèmes à vocation biomédicale pouvant s'implanter dans le corps humain et permettront d'administrer la dose de médicament nécessaire après une analyse sur le patient. Des pompes implantables, la « Implatable Nanopump » développées actuellement permettant de délivrer des médicaments à un débit allant de 0 à 100 $\mu$ l.h<sup>-1</sup>. (Figure 1).



**Figure 1.** Pompe en silicium permettant la délivrance contrôlée de médicaments.

- Les micropompes à insuline deviennent de plus en plus courantes et compactes afin de permettre aux usagers d'être autonomes. Un injecteur d'insuline implantable sur le corps humain pour réguler automatiquement le taux de glycémie
- Laboratoires miniatures, Les « lab-on-chip », permettent d'analyser, séparer, détecter ou répliquer. Ces systèmes permettent, par exemple, de diviser une petite goutte de sang en mille microgouttes pour faire mille analyses biologiques en parallèle. Ceci remplacerait les méthodes actuelles qui demandent des quantités beaucoup plus grandes et des temps de réaction plus longs, figure 2.



**Figure 2** Laboratoires miniatures « lab-on-chip »

Les différentes microstructures sont classées par Kandlikar (2002) en fonction du diamètre  $D$  des canaux :

- Canaux conventionnels ?  $D_h > 3 \text{ mm}$ .
- Minicanaux ?  $200 \mu\text{m} = D_h = 3 \text{ mm}$
- Microcanaux ?  $10 \mu\text{m} = D_h = 200 \mu\text{m}$ .

L'écoulement dans les minicanaux a été largement étudié ces dernières années. Toutefois, la communauté scientifique reste très intéressée par le comportement de ces écoulements.

Le but de notre travail sera de simuler l'écoulement de l'eau à travers un minicanal rectangulaire dont le diamètre hydraulique est de 0.98 mm. La simulation sera effectuée par la mise au point d'un programme utilisant la méthode des Volumes Finis (MVF) et basé sur un maillage structuré avec possibilité de raffinement. Ce programme sera réalisé en utilisant le langage Delphi. Ceci nous permettra de maîtriser la discrétisation et la programmation de la MVF ainsi que les techniques de maillage. Les résultats numériques obtenus, concernant les caractéristiques de l'écoulement, seront confrontés d'une part, à une autre simulation réalisée par le code de calcul "ANSYS", d'autre part avec les données expérimentales (Hamami 2003), ainsi qu'avec les résultats numériques du même auteur obtenus par "Fluent" (Hamami 2005).

Les motivations principales étant la bonne compréhension de la méthode des Volumes Finis et la maîtrise de la programmation avec le langage Delphi ainsi qu'avec le logiciel "ANSYS" en tant qu'outil de simulation numérique puissant.

Le présent travail comprend quatre chapitres : Dans le premier chapitre, on présente, une étude sur l'influence de la miniaturisation sur la mécanique des fluides et l'état des recherches les plus récentes sur les écoulements dans les minicanaux.

Le deuxième chapitre est dédié à quelques rappels théoriques sur les écoulements laminaires et turbulents, dans les canaux rectangulaires, et une initiation sur les techniques de génération de maillage, et à la modélisation mathématique du problème physique par introduction des équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions aux limites.

Le troisième chapitre comprend, la méthode numérique adoptée dans notre étude qui est la méthode des volumes finis conçue par S.V Patankar (1988), qui consiste à transformer les équations non linéaires gouvernant l'écoulement à des équations algébriques linéaires, l'algorithme de couplage vitesse-pression, la

méthode de résolution des systèmes résultants de la discrétisation et l'organigramme de notre programme EMC (Ecoulement dans un MiniCanal) réalisé.

Dans le dernier chapitre, on présente les résultats obtenus avec le programme EMC en Delphi, comparés à ceux obtenus avec le code de calcul Ansys, leurs interprétations et conclusions.

# Chapitre 1 : Etude bibliographique

## Introduction

Les microstructures, posent des problèmes d'analyse pour les modéliser et les optimiser à cause de leurs tailles réduites. Même après 28 ans de recherche, il subsiste des ignorances dans la compréhension de certaines anomalies qui apparaissent dans les expérimentations. Les caractéristiques des microécoulements, appelées microfluidique, dans les échelles micrométriques sont très légèrement différentes des écoulements macroscopiques.

Ce chapitre fixe le cadre de notre étude sur la microfluidique. Nous nous attacherons dans un premier temps à décrire la physique adaptée à l'étude des phénomènes de transport dans les fluides en microconduite. Ensuite, nous présenterons un bilan des principales études relatives à l'écoulement de liquides dans des mini et microcanaux que nous avons pu identifier en menant une étude bibliographique.

## 1.1 La miniaturisation et la mécanique des fluides

La théorie de la mécanique des fluides s'appuie sur des modèles qui ont été élaborés pour la description d'écoulements à l'échelle macroscopique. Afin de pouvoir éventuellement étendre le domaine d'utilisation de ces modèles à la microfluidique, il est important de cerner les limites de validité de ces derniers.

L'objectif de la première partie du chapitre consiste à répondre aux questions suivantes : Dans quelles conditions pouvons nous parler de milieux continus dans des microconduites, d'adhérence à la paroi, de fluide newtonien ? Nous montrerons que cette démarche conduit à la validité des équations de Navier-Stokes en microécoulements. La spécificité de l'échelle microscopique vient de l'augmentation du rapport surface/volume lorsque la dimension d'un objet diminue. Ce nombre vaut respectivement  $6 \text{ m}^{-1}$  puis  $6 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$  pour des cubes de 1 m et de  $1 \mu\text{m}$  d'arête. En conséquence, les phénomènes de surface prennent de l'importance relativement aux

phénomènes volumiques à mesure que la taille d'un objet diminue. En microconduite, l'influence des effets de surface devient prépondérante.

Nous verrons en effet que certains phénomènes traditionnellement négligés aux échelles conventionnelles, peuvent prendre de l'importance en microfluidique. C'est le cas des phénomènes électrostatiques aux interfaces liquide/solide ou encore du glissement sur nano bulle de gaz à la paroi.

### 1.1.1 Représentation microscopique des fluides

Nous ne connaissons pas encore les limites d'application des modèles continus classiques. On pourrait s'attendre à ce que les limites d'application des modèles classiques soient repoussées à de plus petites échelles dans les liquides. Pour cela nous proposons de comparer les échelles internes (échelles moléculaires) des liquides simples, aux échelles caractéristiques des dispositifs microfluidiques. Ces grandeurs sont rappelées sur la figure (1.1), qui met en évidence pour les liquides comme pour les gaz, que les diamètres moléculaires ainsi que les distances intermoléculaires restent faibles par rapport aux dimensions d'une microconduite (Diamètre hydraulique  $D_h$  compris entre 1 mm et 1  $\mu\text{m}$ ).

	GAZ (TPN)	LIQUIDE
Diamètre moléculaire:	0.3 nm	0.3 nm
Densité moléculaire	$3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$
Distance intermoléculaire	3 nm	0.4 nm
Distance d'interaction	100 nm	0,3 nm
Vitesse moléculaire	$500 \text{ m s}^{-1}$	$1000 \text{ m s}^{-1}$

**Figure 1.1.** Caractéristiques microscopiques d'un gaz diatomique dans les conditions de température et de pression normales ainsi que de l'eau liquide

Les molécules d'un liquide pur sont perpétuellement en mouvement tout en restant piégées dans une cage formée par leurs plus proches voisins. Cette

disposition connaît des réarrangements au cours desquels une molécule s'extirpe de sa cage pour remplir un trou adjacent, ce qui est cohérent avec la faible valeur de la distance d'interaction présentée, Figure (1.1).

Dans ce qui suit, nous cherchons à cerner les limites de validité des modèles qui sont à la base de la mécanique des fluides et en particulier, à décider de leur applicabilité en microfluidique.

### 1.1.2 Modèles physiques en microfluidique

#### *A. Hypothèse du milieu continu*

Le domaine d'application de la mécanique des fluides repose sur la mécanique des milieux continus. Un ensemble fluide/expérience peut être traité selon le formalisme simple des milieux continus, s'il propose une échelle intermédiaire à partir de laquelle on peut définir une particule fluide. Cette échelle doit répondre à deux critères, Piau (1991) :

- Une particule fluide doit être suffisamment étendue par rapport à l'échelle moléculaire de la matière, pour que les propriétés physiques (Pression, Masse volumique,...) puissent y être définies en ayant recours à des moyennes statistiques, Baviere (2005).
- La particule doit rester ponctuelle par rapport à la taille de l'expérience.

Si ces deux critères sont respectés, le domaine fluide trouve naturellement une représentation mathématique, et les équations de la mécanique des fluides peuvent s'y appliquer.

Nous pouvons estimer l'arête  $a$  d'une particule fluide à partir des valeurs données dans la Figure (1.1) en admettant que les grandeurs physiques puissent être définies statistiquement à partir d'un ensemble de  $10^4$  molécules, Piau (1991), pour un liquide tel que l'eau :  $a \sim 7$  nm, Piau (1991).

Pour cela le modèle du milieu continu peut être conservé en microconduite d'eau. Cette conclusion s'étend à l'ensemble des liquides à faible masse atomique. Les solutions contenant des éléments de masse atomique élevée (polymères, brin

d'ADN) ne pourraient quant à elles, pas être considérées comme des milieux continus dans des microconduites de diamètre inférieur à une dizaine de microns.

### *B. Validité des équations de transport en microfluidique*

Il est intéressant de traiter en parallèle les propriétés de transport de la quantité de mouvement, de la chaleur et de la masse, qui font respectivement intervenir les coefficients de viscosité dynamique, de conductivité thermique et de diffusion.

Pour connaître la limite de validité des équations de transport classiques, nous pouvons avoir recours à un critère comparant le temps caractéristique de sollicitation mécanique au temps de réponse moléculaire. D'après des considérations rapportées dans Gad (1999), le comportement newtonien d'un liquide doit être remis en cause pour des gradients de vitesse supérieurs à deux fois la fréquence caractéristique moléculaire des liquides :  $|\bar{V}(u)| > 2(t_{\text{moléculaire}})$

Pour l'eau, ce temps moléculaire caractéristique est extrêmement petit. Il est de l'ordre de  $10^{-12}$  s. d'après Gad (1999). Ces échelles de temps ne seront pas atteintes en microconduite.

Il est admis et vérifié que pour les fluides les plus simples comme l'eau ou l'air, les équations de transport sont linéaires. Ces équations traduisent alors respectivement le comportement newtonien des fluides Baviere (2005).

La théorie moléculaire des liquides n'a pas pu apporter de réponses claires aux différences de comportement dans les études expérimentales des écoulements en microstructure.

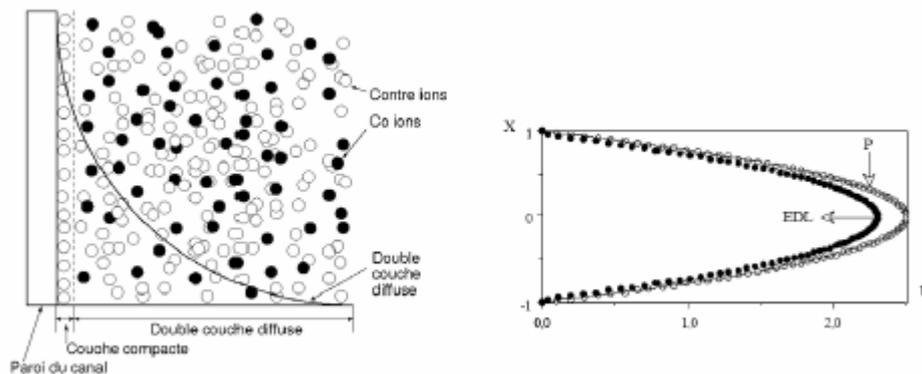
Une autre source de déviations éventuelles par rapport aux lois classiques de la mécanique des fluides et des transferts vient de la présence d'interactions électrostatiques entre un liquide et une paroi.

#### 1.1.3 Les interactions électrostatiques liquide/paroi

Lorsqu'un liquide ionique est mis en contact avec un solide conducteur polarisé ou un solide non conducteur, des effets électrostatiques apparaissent aux interfaces. Ces effets sont généralement négligés en mécanique des fluides à macro-échelle, telle

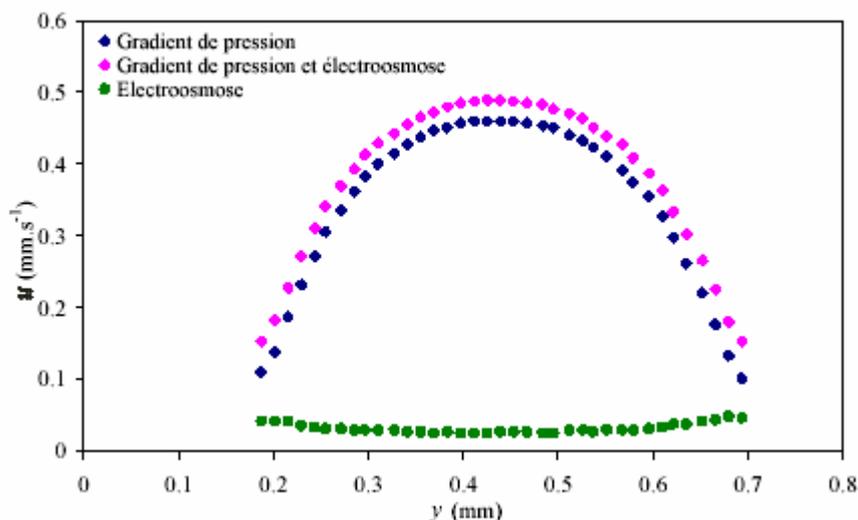
la double couche électrique (EDL: Electric Double Layer). La plupart des surfaces solides ont des charges électrostatiques qui attirent les ions, même peu nombreux, se trouvant dans le liquide. Cette concentration d'ions près de la paroi crée un champ électrique. Les ions très proches de la paroi restent immobiles dans une couche de près de quelques nanomètres jusqu'à environ  $1 \mu\text{m}$  pour de l'eau. Compte tenu des dimensions mises en jeu, ces effets peuvent significativement influencer les microécoulements liquides.

L'interaction entre l'hydrodynamique et ces effets électriques d'interface forme le champ d'études des écoulements électrocinétiques. Mala et al (1998), ont mis en évidence que celle-ci perturbe l'écoulement et provoque une diminution du débit, Figure (1.2). Se basant sur les travaux de ces derniers, Tardu (2004) démontre analytiquement, l'existence d'un point d'inflexion très proche de la paroi du profil de vitesse dans les microcanaux sous l'effet de la double couche électrique. Ce point d'inflexion rend l'écoulement instable, ajouter à cela le deuxième effet de la DCE, qui est la diminution de la vitesse au centre du canal, ce qui induit une transition plus reculée et expliquerait en partie la diminution du débit constatée par certains auteurs.



**Figure 1.2.** La Double Couche Electrique et ses effets, Mala et Li (1999)

Kinoshita et al. (2002) étudient un écoulement soumis à la fois à un gradient de pression et un champ électrique dans des microcanaux de sections rectangulaires de  $400 \mu\text{m}$  de large et de  $130 \mu\text{m}$  de profondeur. Le champ électrique appliqué est de  $30 \text{ V.cm}^{-1}$ . Les zones d'interrogation sont de  $32 \text{ pixels} \times 32 \text{ pixels}$ . Les profils de vitesses obtenus sont présentés sur la figure (1.3).



**Figure 1.3.** Profils de vitesses obtenus pour différents types de mise en mouvement du liquide, Kinoshita et al. (2002)

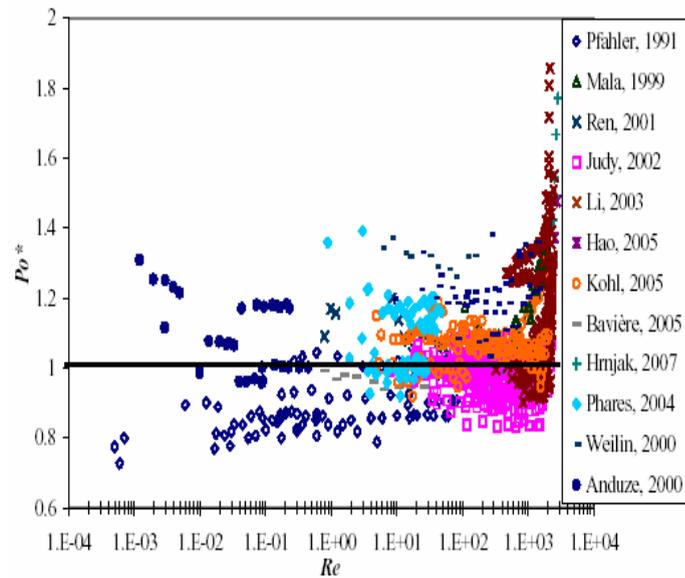
Dans la suite de ce chapitre, nous analyserons et présenterons les résultats bibliographiques. Nous verrons en outre, que ces résultats sont très dispersés en ce qui concerne la valeur du nombre de Poiseuille réduit  $Po^*$  lié au coefficient de frottement détaillé au chapitre 2 et du nombre de Reynolds critique de transition à la turbulence.

## 1.2 Etude bibliographique en microfluidique

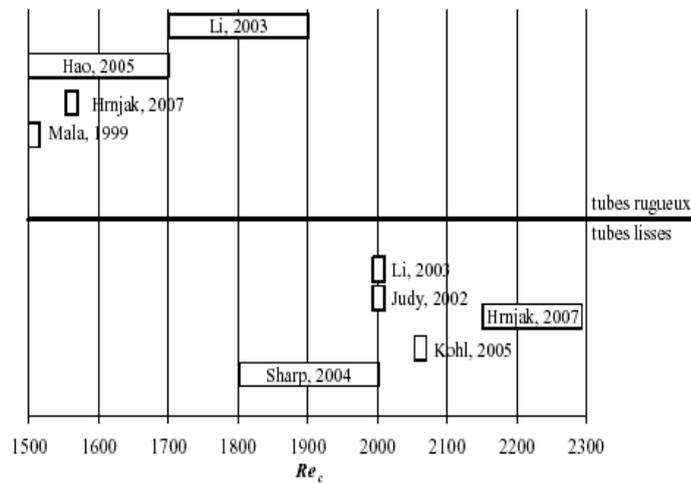
### 1.2.1 Etudes expérimentales

La littérature concernant l'étude expérimentale d'écoulements de liquides, montre que les résultats et les conclusions divergent considérablement suivant les auteurs. Les valeurs du nombre de Poiseuille réduit  $Po^*$  sont très dispersées, Figure (1.4) et la variation de ce nombre est le sujet de la plupart des auteurs qui cherchent à voir si les équations de Navier-Stokes doivent être modifiées, à partir d'une certaine échelle de longueur, et comment elles doivent l'être. Pour ce faire, des comparaisons sont menées entre écoulements de différents liquides, dans des canaux de différentes formes, de différents diamètres et de différentes rugosités.

Le nombre de Reynolds critique de transition à la turbulence, donne également lieu à de nombreux résultats contradictoires, Figure (1.5).



**Figure 1.4.** Nombre de Poiseuille réduit obtenu dans différentes études, Lattes (2007)



**Figure 1.5.** Nombre de Reynolds critique obtenu par différents auteurs

### 1.2.1.1 Variation du nombre de Poiseuille réduit $Po^*$

#### A. Influence du liquide

En utilisant des liquides de concentrations ioniques différentes, Ren *et al.* (2001) et Brutin (2003), obtiennent des nombres de Poiseuille réduits supérieurs à 1. La valeur est d'autant plus grande que la concentration ionique est faible, Ren *et al.* (2001) et le diamètre des canalisations est petit, Brutin (2003).

Ils ont montré par leurs essais que les écarts observés avec la théorie conventionnelle sont dus aux effets de la double couche électrique. Par contre Phares et Smedley (2004), ne notent aucune influence de la concentration en ions et de la viscosité du liquide dans des tubes de diamètres supérieurs à 100  $\mu\text{m}$ . Pfahler *et al.* (1991) mènent des expériences dans des canaux de diamètre hydraulique de 1  $\mu\text{m}$  à 40  $\mu\text{m}$  avec deux liquides différents et ne trouvent aucune différence flagrante entre le liquide polaire (iso-propanol) et le liquide non polaire (huile de silicone). Judy *et al.* (2002) mènent des expériences similaires et comparent l'écoulement de liquides de différentes polarités (eau, iso-propanol, méthanol), dans des canaux de dimensions variées et fabriqués dans différents matériaux pour un nombre de Reynolds allant de 80 à 2300. Aucun écart avec la théorie classique n'apparaît de manière significative dans la gamme de diamètres étudiés. De même, le passage à la transition ne se fait pas à un nombre de Reynolds critique inférieur à 2000. Kohl *et al.* (2005) trouvent une bonne corrélation entre expérience et théorie et expliquent les variations trouvées dans la littérature par une différence entre les conditions expérimentales des différents auteurs. Baviere *et al.* (2005) testent de l'eau de différentes conductivités électriques mais ne notent aucune différence de comportement entre les liquides et avec la théorie de Poiseuille. Par contre d'autres auteurs tels que Ren *et al.* (2001) et Brutin et Tadriss (2003) trouvent la différence qui est expliquée par la différence entre les moyens de mesures expérimentaux.

## B. Influence du diamètre hydraulique

Hamami A. (2003) a étudié le comportement de l'écoulement dans des canaux à section rectangulaire de diamètres hydrauliques allant de 50  $\mu\text{m}$  à 1 mm. Il s'intéresse particulièrement à l'influence des dimensions caractéristiques des canaux sur le coefficient de frottement. Le canal est de 150 mm de longueur et de 25 mm de largeur et il est constitué de deux plaques en polycarbonate qui serrent un joint métallique en acier inoxydable dont l'épaisseur matérialise la hauteur du canal. Une pompe est utilisée pour assurer la circulation de l'eau, en aspirant la quantité voulue à partir du réservoir et refoulant celle-ci directement vers le canal d'essai à la sortie

du canal, l'eau retourne au réservoir qui est à son tour travaille avec un bain thermostatique pour maintenir la température de l'eau du réservoir à 20°C.

En ce qui concerne le coefficient de frottement, les mesures sont systématiquement inférieures par rapport à la théorie,

Pfahler *et al.* (1991) et Mala et Li (1999) montrent une diminution significative du nombre de Poiseuille avec le diamètre du canal et indiquent un écart par rapport à la théorie de Poiseuille en microcanal de plus petit diamètre hydraulique. Un nombre de Poiseuille réduit  $Po^*$  supérieur à 1 obtenu par Anduze (2000) dans des canaux de section trapézoïdale. Ce résultat est différent à celui trouvé dans des canaux de section rectangulaire.

Il explique cet écart par la différence du mode d'usinage permettant d'obtenir ces deux types de section.

### C. Influence d'états de surface

Li *et al.* (2003), Phares et Smedley (2004) ont effectué des mesures dans des microtubes rugueux et comparant les écoulements d'eau dans des canalisations de section circulaire de rugosités différentes (verre, silicium, et acier inoxydable). Le nombre de Poiseuille réduit  $Po^*$  obtenu à partir de mesures dans les tubes rugueux (acier inoxydable pour lequel la rugosité relative) est nettement supérieur à celui obtenu pour des tubes lisses (verre, et silicium)

Weilin *et al.* (2000) effectuent des tests sur des canaux de différentes rugosités et obtiennent un nombre de Poiseuille réduit supérieur à l'unité. Ils introduisent un modèle d'écoulement prenant en compte la rugosité et qui se trouve en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus.

Judy *et al.* (2002) ont également fait des mesures dans des microtubes rugueux en inox avec des diamètres compris entre 75  $\mu\text{m}$  et 125  $\mu\text{m}$ . Dans cette référence, il n'y a pas d'indication précise sur les hauteurs des rugosités. Les nombres de Poiseuille mesurés dans ces tubes étaient constants en fonction de  $Re$  et leurs valeurs n'indiquaient pas d'augmentation des frottements par rapport au cas lisse. Ce

dernier résultat est en contradiction par rapport aux conclusions des études précédemment citées.

Enfin, Hrnjak et Tu (2007) étudient l'écoulement de liquide R134 dans des canaux de section rectangulaire de différentes rugosités. Le coefficient de frottement est en accord avec la théorie.

### **1.2.1.2 Transition à la turbulence**

Bien que des transitions anticipées à la turbulence aient été évoquées par certains expérimentateurs pour des microécoulements liquides, peu d'études expérimentales ont été spécifiquement consacrées à ce phénomène. Certains auteurs Sharp et Adrian (2004) ont monté un dispositif destiné à la transition en microconduite. Leur travail a porté sur des microtubes lisses en verre de diamètre compris entre 50  $\mu\text{m}$  et 247  $\mu\text{m}$ , parcourus par des liquides de différentes polarités. La transition à la turbulence a été détectée à des nombres de Reynolds voisins de 2300 quels que soient le diamètre des tubes et la polarité du fluide utilisé.

Judy *et al.* (2002) et Kohl *et al.* (2005) observent que le passage au régime turbulent a lieu pour des nombres de Reynolds inférieurs à 2000.

D'autres enfin observent une influence de la rugosité de la paroi sur le passage à la transition : si dans le cas de tubes lisses, le nombre de Reynolds critique est de 2000, il devient inférieur à 2000 dans le cas de tubes rugueux.

### **1.2.2 Etudes par modélisations et simulations numériques**

Dans un premier temps, la modélisation concernant les écoulements incompressibles était souvent rudimentaire, Zengerle et Richter (1994). Depuis 1994, un important effort de modélisation est lancé dans le but d'intégrer la simulation de l'écoulement dans la simulation du microsystème complet. Dans cette optique, des logiciels adaptés à chaque discipline concernée (résistance des matériaux, mécanique des fluides, thermique, électronique) sont utilisés. C'est le cas par exemple, de codes classiques en mécanique des fluides (FIDAP, FLUENT, PHOENICS), de solveurs comme ANSYS auquel s'est adjoint FLOTRAN, Schomburg *et al.* (1994), de simulateurs basés sur une analogie électrique comme SPICE, Bourouina et

Grandchamp (1996) et PSPICE, Carmona *et al.* (1996). Toutefois, pour les écoulements de gaz, ces différentes études ne prennent pas en compte certaines particularités engendrées par les dimensions des microsystemes.

Ho et Tai (1998) et Gad El Hak (1998) ont publié deux articles qui ciblent de manière claire l'état actuel des connaissances et par conséquent des lacunes sur la compréhension des phénomènes physiques inhérents aux écoulements de fluides dans les microsystemes. La différence fondamentale entre les systemes de taille usuelle et les microsystemes est évidemment issue du confinement très poussé de ces derniers.

## Conclusion

La théorie des écoulements de liquides simples dans les mini et microcanaux s'appuie classiquement sur des modèles issus d'écoulements macroscopiques et rien ne laisse présager un comportement différent entre macro et microécoulement. En effet, les distances intermoléculaires restent toujours nettement inférieures aux dimensions caractéristiques du microsysteme et on reste dans le domaine des milieux continus. Par contre, les résultats expérimentaux correspondants à des écoulements du même type sont souvent incohérents et contradictoires.

Lorsque l'échelle diminue, les effets surfaciques prennent de plus en plus d'importance devant les effets volumiques. Ainsi certaines hypothèses négligées pour la modélisation de macroécoulements peuvent dans certains cas devoir être pris en compte lors d'étude à échelle inférieur au millimètre. Pour caractériser ces écoulements et pour cerner les limites de validité des modèles classiques certains phénomènes sont à étudier. D'après l'étude bibliographique menée dans le paragraphe précédent, la rugosité, la double couche électrique et la dissipation visqueuse peuvent être parmi ces phénomènes Lattes (2007).

D'autres études ont été effectuées ces dernières années pour déterminer les corrélations de frottement  $C_f$  et de pertes de charge dans les microconduites. Shah et London (1975) présentent différentes méthodes approchées de résolution de l'équation de Poisson (2.4), dont une basée sur les moindres carrés (méthode Golub),

qui leur permet de déterminer le champs de vitesse et le débit dans la section. Le nombre de Poiseuille théorique est ensuite déduit du produit du facteur de frottement  $C_f$  et du nombre de Reynolds  $Re$ . Ces études montrent des dispersions importantes des résultats suivant la géométrie (canaux circulaires, rectangulaires, trapézoïdaux...) sur le coefficient de perte de pression,  $C_f$ , et sur l'échange de chaleur (nombre de Nusselt) Hamami(2005).

Cette étude présente une méthode numérique, de résolution et de caractérisation des écoulements dans un mini canal, basée sur la méthode des volumes finis. Elle détermine les champs de vitesses et les pertes de charge ainsi que les coefficients de frottement. Ce dernier est comparé aux résultats obtenus, par la théorie admise aux échelles conventionnelles (Shah et London (1975)) et à ceux donnés par les études, expérimentale et numérique Hamami (2003), (2005)

Puisque l'eau étant un des fluides les plus utilisés parmi les applications de la microfluidique (biologique, thermique, chimique), elle a été choisie comme fluide de travail. D'autre part, la géométrie du canal rectangulaire à fort rapport d'aspect a été retenue, car elle présente l'intérêt d'être facilement usinable à toutes les échelles et d'avoir été étudiée à de très nombreuses reprises aux échelles conventionnelles.

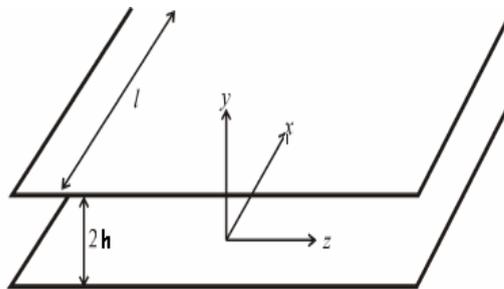
# Chapitre 2 : Rappel théorique

## Introduction

On commence par un rappel sur quelques résultats classiques en écoulement laminaire et en écoulement turbulent qui serviront de base à l'interprétation des résultats numériques obtenus et à la compréhension des différents phénomènes rencontrés dans l'étude bibliographique.

Toute simulation numérique d'un champ de flux commence par une discrétisation du domaine de calcul, un autre rappel succinct sur les techniques de génération de maillage structuré a été effectué.

Dans ce travail, on considère essentiellement le cas de l'écoulement entre deux plaques planes dont la distance est suffisamment petite pour que l'on puisse les assimiler à deux plans quasi infinis, figure (2.1).



**Figure 2.1.** Notations utilisées pour des plaques planes parallèles

## 2.1 Hydrodynamique des écoulements liquides dans les minicanaux

Que ce soit à une échelle macroscopique ou microscopique, l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite peut être décrit en traduisant la conservation de la masse (2.1) et un bilan de la quantité de mouvement (2.2).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \rho (\vec{q} \cdot \text{grad}) \vec{q} = -\text{grad}P + \rho \vec{f} + \mu \rho \vec{q} + \left( \frac{\mu}{3} + \rho \right) \text{grad}(\text{div} \vec{q}) \quad (2.2)$$

Avec  $\rho$  représentant la masse volumique,  $\vec{q}$  la vitesse locale,  $p$  la pression,  $f$  la résultante des forces massiques s'exerçant sur le fluide,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\nu$  la viscosité de volume

### 2.1.1 Hypothèses

Les hypothèses classiques posées pour la modélisation d'écoulements de liquides dans des microconduites plan sont les suivantes :

- La section du canal étudié est constante.
- L'écoulement engendré par le gradient de pression est isotherme, unidirectionnel et pleinement développé, la miniaturisation conduisant à de faibles nombres de Reynolds.
- Le fluide étudié est incompressible : la masse volumique  $\rho$  est constante.

### 2.1.2 Ecoulement laminaire

Avec les hypothèses l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

Où  $u$  est la composante de la vitesse suivant l'axe  $x$ .

Et l'équation de bilan de quantité de mouvement se réduit alors à l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 \vec{q} \quad (2.4)$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Dans l'écoulement entre plaques planes parallèles (Figure 2.1), la vitesse a une seule composante.

$$\vec{q} = u(y) \vec{x} \quad (2.6)$$

L'équation (2.4) se réduit à :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{d^2 u(y)}{dy^2} \right) \quad (2.7)$$

Cette équation menant à :

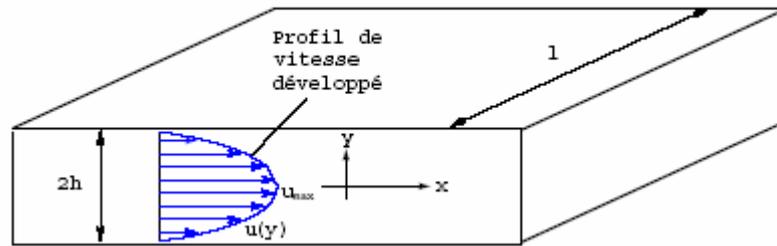
$$u(y) = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

En considérant les conditions limites suivantes :

$$\begin{aligned} u|_{y=\pm h} &= 0 \\ \frac{du(y)}{dy} \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Où  $h$  représente la demi distance entre les plaques.

Cette distribution laminaire est parabolique (figure 2.2), elle est connue sous le nom de "Profil de Poiseuille".



**Figure 2.2.** Écoulement dans un canal à section rectangulaire

A  $y=0$ , on retrouve la vitesse maximale de l'écoulement :

$$u_{\max} = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} \quad (2.10)$$

Avec  $A = 2 h.l$  (surface de la section du canal) et sachant que le débit  $Q_v$  :

$$Q_v = u_{\text{moy}} \cdot A \quad (2.11)$$

$$Q_v = \int_{-h}^{+h} u(y) \cdot dA \quad (2.12)$$

La relation entre la vitesse maximale de l'écoulement et sa vitesse moyenne est :

$$u_{\text{moy}} = \frac{2}{3} u_{\max} \quad (2.13)$$

La chute de pression entre deux points  $x_1$  et  $x_2$  est :

$$\Delta p = u_{\text{moy}} \frac{3\mu}{h^2} \Delta x \quad (2.14)$$

En faisant un bilan des forces appliquées à un volume élémentaire d'un fluide en écoulement de type Poiseuille, il apparaît que la force tangentielle suivant le sens de l'écoulement qui s'exerce entre les couches du fluide est constante. On appelle  $t$  la contrainte visqueuse correspondante.

On a :

$$t = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.15)$$

Elle apparaît comme une fonction linéaire de  $y$ , et atteint sa valeur maximale à la paroi.

La contrainte pariétale  $t_p$  est liée au gradient de pression longitudinal par :

$$t_p = \mu_p \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = \frac{? p \cdot D_h}{4L} \quad (2.16)$$

On rappelle que le diamètre hydraulique dans notre cas est donné par :

$$D_h = \frac{4 \cdot h \cdot l}{2h + l} \quad (2.17)$$

Où  $h$  représente toujours la demi hauteur du canal.

Le coefficient de frottement pariétal est le nombre sans dimension suivant :

$$C_f = \frac{t_p}{\frac{1}{2} ? \cdot u_{moy}^2} \quad (2.18)$$

Où  $?$  et  $u_{moy}$  sont respectivement, les valeurs de la masse volumique et de la vitesse moyenne de l'écoulement.

### 2.1.3 Ecoulement turbulent

Pour le régime turbulent la relation entre la vitesse moyenne de l'écoulement et la vitesse maximale suit une loi logarithmique, et passe par la détermination d'un paramètre de l'écoulement,  $u_t$  appelé "vitesse turbulente" :

$$u_t = \frac{V_{max}}{\left[ \frac{1}{0,41} \ln \left( \frac{e \cdot u_t}{2n} \right) + 5 \right]} \quad (2.19)$$

$$V_{moy} = u_t \left[ \frac{1}{0,41} \ln \left( \frac{e \cdot u_t}{2u} \right) + 5 - \frac{1}{0,41} \right] \quad (2.20)$$

Pour le cas d'un écoulement turbulent établi à travers un canal à section rectangulaire, il n'y a pas de solution analytique établie et on a recours à des corrélations empiriques. Ici, la perte de pression pour une longueur du canal est déterminée comme pour le régime laminaire par la relation (2.14).

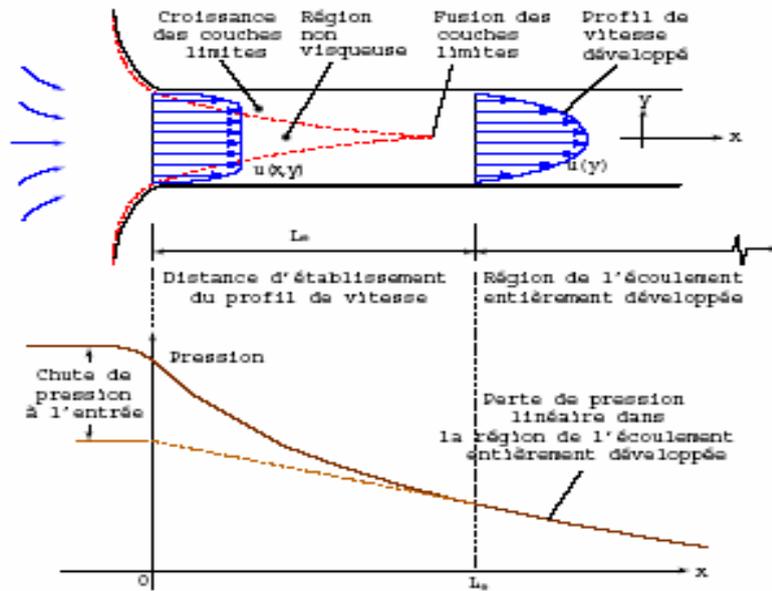
A l'aide de résultats expérimentaux, Blasius a montré que le coefficient de frottement en écoulement établi est correctement représenté en fonction du nombre de Reynolds par la relation, White (2001) :

$$C_f = \frac{0,079}{\text{Re}_{Dh}^{0,25}} \quad (2.21)$$

#### 2.1.4 Couches limites

Dans un écoulement, ce terme désigne la zone proche d'une paroi où la vitesse est très faible. En effet, la vitesse à la paroi est nulle à cause de la viscosité du fluide et au milieu du canal elle est maximale en général. Cette vitesse ne va pas passer de zéro à son maximum instantanément mais de manière continue en formant un profil de vitesse, figure (2.3)

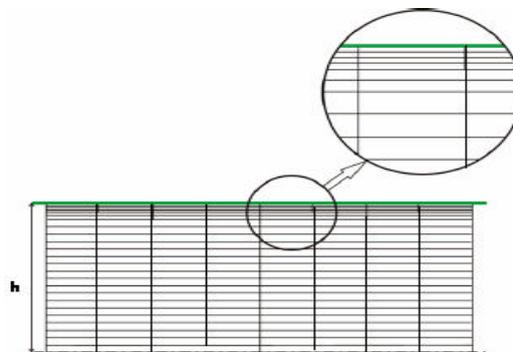
C'est dans cette couche limite qu'interviennent la majorité des frottements. Donc, il est important que le maillage près de la paroi soit bien traité, Figure (2.4). En effet, un maillage grossier près de la paroi ne pourra pas capturer le développement de la couche limite et peut conduire à une sous estimation de la longueur d'établissement de l'écoulement.



**Figure 2.3.** Développement du profil de vitesse et chute de pression le long d'un canal.

Pour une grande valeur de  $y$  (loin de la paroi) les forces d'inertie sont prédominantes, alors qu'en s'approchant de la paroi et avant d'atteindre une valeur nulle  $Re_y$  sera égal à l'unité et ce pour une certaine valeur de  $y$ . C'est dans cette région que les forces visqueuses équilibrent les forces d'inerties puisque  $Re$  est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

La région, qui reste en dessous, est le siège de fortes contraintes visqueuses où les forces d'inerties sont pratiquement sans effet.



**Figure 2.4.** Détail du maillage

## 2.1.5 Nombre de Poiseuille

### 2.1.5.1 Nombre de Poiseuille expérimental

Les grandeurs facilement mesurables d'un écoulement sont la pression et le débit. A partir du débit mesuré, la vitesse débitante dans la section  $S$ ,  $u_{moy} = Q_v / S$  peut être déterminée et le nombre de Reynolds calculé à partir de l'équation suivante :

$$Re_{Dh} = \frac{\rho \cdot U_{moy} \cdot D_h}{\mu} \quad (2.22)$$

$Re_{Dh}$  désigne le nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique du canal.

La mesure de la pression permet d'obtenir le facteur de frottement  $C_f$  donné par l'équation :

$$C_f = \frac{t_p}{\frac{1}{2} \rho \cdot u_{moy}^2} = \frac{D_h}{2 \rho u_{moy}^2} \frac{dP}{dx} \quad (2.23)$$

Il représente la forme adimensionnel de la contrainte tangentielle moyenne à la paroi  $t_p$ , laquelle s'exprime en fonction du gradient local de pression  $dP/dx$  à partir d'un bilan des forces sur un élément de conduite de largeur  $dx$  par :

$$\overline{t_p} P_s dx = -S dP \quad (2.24)$$

Le nombre de Poiseuille expérimental est alors défini comme étant le produit entre le nombre de Reynolds et le facteur de frottement  $Po_{exp} = C_f \cdot Re_{Dh}$

Il peut être directement déduit des relevés expérimentaux et des dimensions des canaux par l'expression suivante :

$$Po_{exp} = \frac{SD_h^2 \rho P}{2\mu Q_v l} \quad (2.25)$$

### 2.1.5.2 Nombre de Poiseuille théorique

Pour un écoulement laminaire, en régime établi, d'un fluide newtonien incompressible, le nombre de Poiseuille théorique  $Po_{th}$ , produit du nombre de Reynolds et du facteur de frottement, est constant. Il dépend seulement de la géométrie du canal. Ainsi pour un écoulement entre deux plaques planes qui est notre cas, ce nombre vaut 24.

Le coefficient de frottement et le nombre de Poiseuille théorique pour l'écoulement laminaire à travers les canaux rectangulaires peuvent être obtenu en utilisant les équations polynomiaux de Shah et London (1970) et (1978) suivantes :

$$C_f \cdot Re_{Dh} = 24(1 - 1,3553a + 1,9467a^2 - 1,7012a^3 + 0,9564a^4 - 0,2537a^5) \quad (2.26)$$

$$P_{o_{th}} = 24(1 - 1,3553a + 1,9467a^2 - 1,7012a^3 + 0,9564a^4 - 0,2537a^5) \quad (2.27)$$

Où  $a$  représente le rapport d'aspect défini comme étant la valeur de la hauteur divisée par la largeur de la section transversale du canal.

### 2.1.5.3 Forme réduite du nombre de Poiseuille

On définit fréquemment le coefficient  $Po^*$ , forme réduite du nombre de Poiseuille, comme étant le rapport entre nombre de Poiseuille expérimental et nombre de Poiseuille théorique.

$$Po^* = \frac{Po_{exp}}{Po_{th}} \quad (2.28)$$

Un nombre de Poiseuille réduit supérieur à 1 rend compte d'une expérience où la chute de pression mesurée est sous-estimée par la théorie classique. Pour les nombres de Poiseuille réduits inférieurs à 1, il s'agit d'une surestimation de cette chute de pression.

## 2.2 Génération de grilles

La simulation numérique des problèmes physiques modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles puis par des méthodes de volumes finis ou d'éléments finis, nécessite au préalable la construction d'un recouvrement conforme du domaine d'étude (un maillage). Pour des raisons pratiques essentiellement, les premières techniques employées construisaient des maillages structurés. Rapidement, le besoin de disposer de techniques de maillage automatiques, robustes et capables de traiter des géométries complexes a conduit les numériciens à s'intéresser aux maillages non structurés et aux maillages en blocs.

La spécification du maillage dépend généralement de la complexité de la géométrie. Si cette dernière est rectangulaire, on opte pour une grille rectangulaire et impose la taille des pas d'espace dans les deux directions du domaine. Ces pas peuvent varier uniquement dans leur propre direction suivant la relation :  $X_i = X_{i-1} + A \times G^{(i-1)}$ , (Thompson et al (1999)). Où  $X_i$  est l'une des composantes du nœuds,  $A$  est le pas d'espace et  $G$  est le facteur d'extension.

En revanche, si la géométrie n'est pas rectangulaire la génération de grilles structurées peut être vue comme étant composé de trois catégories Tannehill (1978), Farrashkhalvat (2003) :

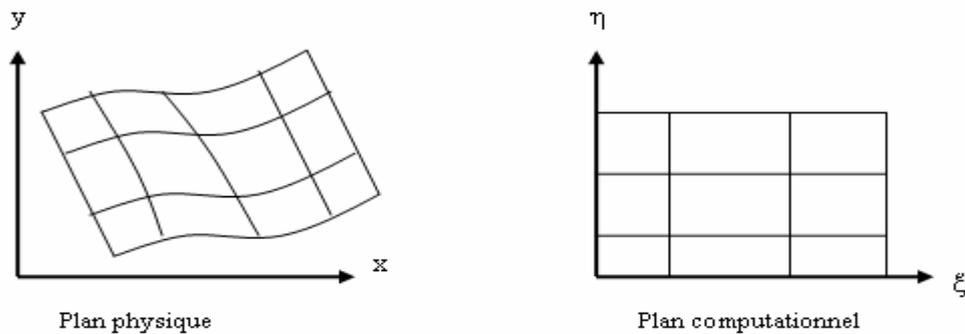
- Techniques des variables complexes.
- Méthodes algébriques.
- Techniques d'équation différentielles

### 2.2.1 Classification des techniques de génération de maillages

#### 2.2.1.1 Méthodes des variables complexes

Les transformations employées dans les techniques des variables complexes sont analytiques ou partiellement analytiques, par contre les deux autres sont entièrement numériques. Parmi les travaux sur ces techniques on trouve ceux de Churchill (1948), Moretti (1979), Davis (1979) et Ives (1982). Essentiellement, elles sont limitées à deux dimensions. Pour cette raison, les techniques sont restreintes à des applications

limitées et généralement utilisées afin d'obtenir des solutions d'écoulement potentiels bidimensionnel autour des configurations relativement complexes. Elles utilisent les fonctions élémentaires dans le plan complexe, et il est possible d'écrire la relation entre le domaine physique  $(x, y)$  et le domaine de calcul  $(\xi, \eta)$ , figure (2.5).



**Figure 2.5.** Configuration à un espace de calcul

Toutes les techniques de génération de maillage, Thompson et al. (1985) consistent à :

1. La construction d'un schéma seul ou des schémas séquentiels pour obtenir la relation entre les points des frontières dans les plans physique et computationnel.
2. La génération des points intérieurs dans le domaine physique.

### **2.2.1.2 Méthodes algébriques**

Les méthodes algébriques de génération de maillage produisent une description fonctionnelle directe de la transformation entre les domaines computationnel et physique. La méthode algébrique classique est une transformation conforme dans laquelle la forme des expressions analytiques est simple et le maillage est orthogonal Tannehill (1978).

Cependant ces propriétés avantageuses sont contrebalancées par l'incapacité à spécifier les points et la nature bidimensionnelle inhérente de la méthode.

Afin de lever ces restrictions, une classe de techniques de génération de maillage ont été développées et sont basées sur une interpolation linéaire explicite entre les frontières et/ou les surfaces intermédiaires dans le champ physique (plan ou espace).

Ces techniques sont généralement appelées techniques de génération de maillages algébriques.

### **2.2.1.3 Méthodes numériques**

Dans un problème de génération de maillages, à partir des valeurs des coordonnées et/ou de leurs dérivées aux frontières, différentes méthodes autres que celles basées sur l'interpolation algébriques peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes, nous retrouvons les méthodes numériques qui constituent un thème d'études à part Farrashkhalvat (2003). Les équations sont de type elliptique avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou Newman. Elles sont hyperboliques ou paraboliques lorsque cette spécification est seulement sur une portion des frontières.

Les modèles hyperboliques sont rapides et génèrent des maillages orthogonaux mais présentent l'inconvénient de s'appliquer à des configurations plus complexes et de propager des discontinuités des frontières vers l'intérieur du champ d'étude.

Les modèles paraboliques sont aussi rapides que les modèles hyperboliques. Les maillages qu'ils génèrent sont plus réguliers que ceux des systèmes hyperboliques mais moins que ceux des systèmes elliptiques.

Quant aux modèles elliptiques, ils nécessitent généralement la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, souvent non linéaire, avec des conditions aux limites spécifiées sur toutes les frontières. Ces modèles sont également plus lents que les modèles paraboliques ou hyperboliques mais d'un autre côté, ils présentent l'avantage non négligeable de s'appliquer à des configurations de frontières un peu plus complexes. Par ailleurs, les maillages générés par ces modèles sont très réguliers même si les domaines considérés présentent des irrégularités sur les frontières ou une distribution des points aux frontières non uniforme. De plus, ces systèmes elliptiques ne propagent pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié et génèrent des maillages dont l'orthogonalité est beaucoup mieux vérifiée que dans le cas des méthodes algébriques. En outre, la conformité des maillages est souvent requise avec des systèmes elliptiques, en particulier le système de Laplace.

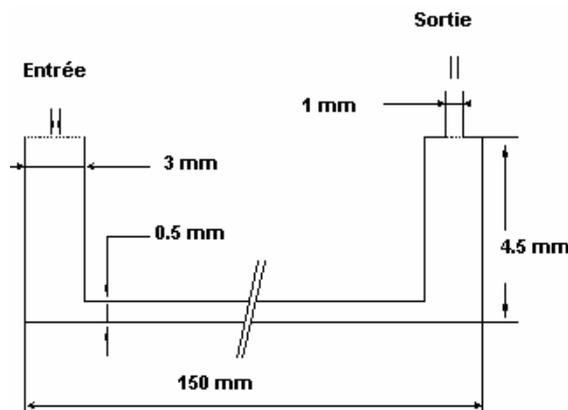
Dans le cas d'une géométrie régulière (rectangulaire ou circulaire) le choix de la grille est simple : la géométrie est engendrée par un assemblage de blocs rectangulaires positionnés dans les directions du système de coordonnées.

## 2.3 Formulation du problème

Nous étudierons l'écoulement de l'eau par la méthode des volumes finis à travers un minicanal plan dont le diamètre hydraulique est de 0.98mm, et avec différents nombres de Reynolds (en modifiant le débit volumique à l'entrée du minicanal). Nous présenterons les différents profils de vitesse de l'écoulement, de pertes de charges et des coefficients de frottement, et nous les comparerons aux résultats numériques obtenus par le logiciel Ansys, aux résultats théoriques et aux résultats expérimentaux.

### 2.3.1 Le dispositif d'étude

La figure (2.6) présente la géométrie du minicanal de section rectangulaire. Le minicanal a une hauteur de 0.5, une largeur de 25,4 et une longueur de 150 mm. L'entrée et la sortie du canal ont une longueur de 3 et une hauteur de 4.5 mm.



**Figure 2.6.** Géométrie du minicanal

### 2.3.2 Conditions aux limites

L'écoulement est délimité par des parois imperméables et le fluide d'essai est de l'eau, donc un fluide visqueux, ce qui nous conduit à une condition aux limites de non glissement sur les parois.

A partir des débits testés expérimentalement, Hamami (2003), nous avons déduit les vitesses de l'écoulement qui seront imposées à l'entrée puisque le fluide est incompressible.

La condition aux limites imposée à la sortie est la pression atmosphérique.

## Conclusion

La théorie des écoulements dans les minicanaux s'appuie classiquement sur des modèles issus d'écoulements macroscopiques. Un bref rappel théorique, sur les écoulements dans les canaux à section rectangulaire, a été effectué que ce soit pour les écoulements laminaires ou turbulents.

La spécification du maillage dépend généralement de la complexité de la géométrie. Un autre rappel succinct sur les techniques de génération de maillage structuré a été donné vu son importance en simulation numérique des écoulements.

# Chapitre 3 : Méthode numérique

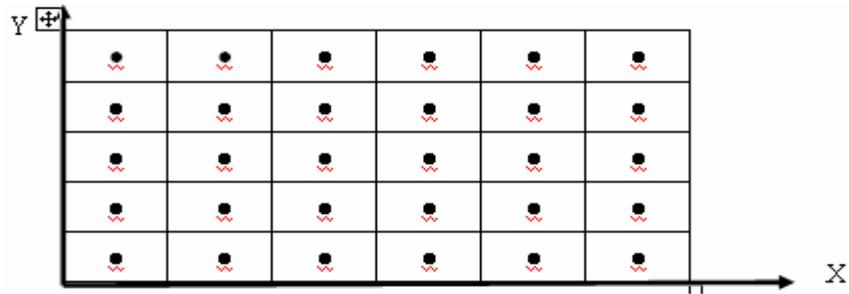
## Introduction

La simulation numérique de tout problème formulé par des équations aux dérivées partielles (EDP) est de plus en plus répandue au niveau industriel. Tout se simule, tout se calcule et ce pour toutes sortes de problèmes.

En mécanique des fluides, on procède généralement lors de la simulation numérique, par la substitution des termes différentiels de transport dans les équations gouvernant l'écoulement, par des approximations conduisant à des équations algébriques. Ces équations décrivent les propriétés discrètes du fluide aux nœuds dans le domaine de solution. En plus de la méthode des volumes finis qui est adoptée dans cette étude, les éléments finis et les méthodes spectrales sont largement utilisées dans la simulation numérique des écoulements.

### 3.1 La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis comme Suhas V. Patankar (1988) la introduit, consiste à diviser le domaine d'étude en un nombre fini de volumes jointifs à faces rectangulaires, et chaque volume entoure un nœud dont celui-ci est entouré par quatre nœuds voisins figure (3.1). Les termes de transports sont intégrés tel qu'ils sont dans le modèle original sur chaque volume de contrôle, et cela en utilisant un schéma d'approximation convenable. Les équations algébriques produites, satisfont les principes de conservation. L'analyse mathématique impliquée dans cette méthode est simple et interprétable physiquement.



**Figure 3.1.** Discretisation du domaine de calcul.

### 3.1.1 Equations générales de transport

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement d'un fluide newtonien sont les équations de Navier-Stokes. Elles s'écrivent comme suit :

Equation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{q} = 0 \quad (3.1)$$

Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \vec{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{q} \otimes \vec{q} = -\nabla p + 2\nabla \cdot \underline{\underline{mD}} + \rho \vec{F} \quad (3.2)$$

$\underline{\underline{D}}$  est le tenseur de déformation :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{q} + \nabla \vec{q})$$

L'équation de transport généralisée dans sa forme bidimensionnelle en régime permanent s'écrit :

$$\underbrace{\text{div}(\rho \vec{q} \Phi)}_{\text{I}} - \underbrace{\text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad} \Phi)}_{\text{II}} = \underbrace{S_{\Phi}}_{\text{III}} \quad (3.3)$$

Où  $\Phi$  est une variable générale de l'écoulement considéré.  $\rho$  et  $\Gamma_{\Phi}$  sont respectivement la masse volumique et la diffusivité du fluide considéré.

**I:** Terme convectif.

**II:** Terme diffusif.

**III:** Terme source.

Alors toutes les équations conservatives d'écoulement de fluide peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable  $F$  qui représente tour à tour :  $1$  pour l'équation de continuité ;  $u$ ,  $v$  pour l'équation de quantité de mouvement ; et  $h$  l'enthalpie pour l'équation de l'énergie.

Dans le but de résoudre l'équation différentielle (3.3), cette équation est intégrée sur chaque volume de contrôle  $V_C$  de frontières  $A$ .

$$\int_V \left[ \text{div}(\bar{q}\Phi) - \text{div}(\Gamma_f \text{grad} \Phi) \right] dV = \int_V S_f dV \quad (3.4)$$

Cette équation est le point de départ de la méthode des volumes finis.

En utilisant le théorème de Green–Ostrogratsky, les intégrales sur le volume des termes convectifs et diffusifs dans l'équation (3.4) sont convertis en des intégrales de surfaces, l'équation (3.4) s'écrit :

$$\int_A (\bar{q}\Phi - \Gamma_f \text{grad} \Phi) \cdot d\bar{A} = \int_{V_C} S_\phi dV \quad (3.5)$$

Deux types d'intégrales sont présentés dans (3.5) : Intégrale sur le volume  $V$  (termes sources) et intégrale sur la surface fermée  $A$  entourant le volume  $V$  (termes convectifs et diffusifs).

#### ▪ Intégrale de volume

Les intégrales des volumes sont approximées par la règle de centre (mid-point rule) qui est de second ordre d'exactitude, où la valeur moyenne de la variable intégrée est approximée par la valeur de la fonction dans le centre du volume de contrôle.

$$\int_{V_C} S dv \cong \bar{S} \Delta V_p \cong S_p \Delta V_p$$

### ▪ Intégrale de surface

L'intégrale de surface dans l'équation (3.5) est la somme des intégrales sur toutes les surfaces du volume de contrôle.

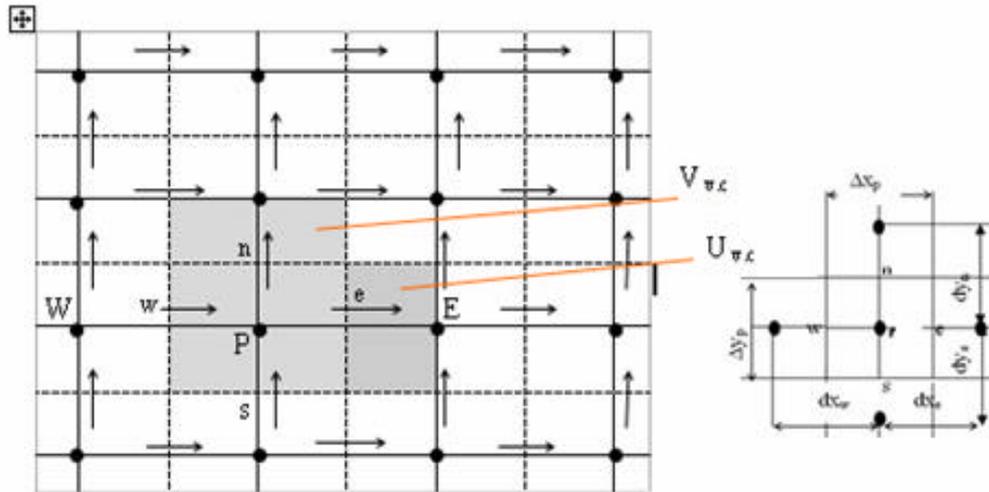
$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \sum_n \int_{A_n} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \sum_n F_n$$

Où  $\vec{F}$  représente le vecteur densité de flux convectif ( $\rho \vec{q} \Phi$ ) ou diffusif ( $\Gamma_f \text{grad} \Phi$ ).

### 3.1.2 Maillage

Le domaine physique est discrétisé en un domaine de calcul suivant un maillage uniforme ou non uniforme dans les deux directions, horizontale et verticale, figure (3.2).

Le maillage dit intercalé (staggered grid) consiste à stocker les variables dépendantes scalaires ( $P$ ) aux nœuds du maillage, et les variables dépendantes vectorielles ( $U, V$ ) aux faces des volumes de contrôle, c'est à dire aux milieux des segments reliant les nœuds figure (3.2). L'équation générale du transport est intégrée sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantité de mouvement sont intégrées sur les volumes associés aux composantes de vitesse  $U, V$ . Ce type de maillage permet une meilleure estimation des flux convectifs, et une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement. Les frontières du domaine coïncident avec les faces des volumes de contrôle, ce qui facilite l'incorporation des conditions aux limites.



**Figure 3.2.** Stockage des variables scalaires et des composantes de vitesse suivant un maillage décalé.

- ? La variable scalaire P Stockée aux nœuds du maillage.
- ? La vitesse U Stockée sur la face est du volume de contrôle associé à la variable scalaire.
- La vitesse V Stockée sur la face nord du volume de contrôle associé à la variable.
- ? scalaire

### 3.1.3 Détails de discrétisation

Afin d'aboutir à une formulation détaillée des équations discrétisés, il est nécessaire de développer l'expression des vitesses et des termes de sources, sur les faces des volumes de contrôle associés à chaque variable d'écoulement en terme des paramètres donnés ou calculés aux nœuds du maillage.

Les équations gouvernant l'écoulement laminaire en régime stationnaire en deux dimensions sont :

Suivant la direction x :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y}}_I = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{II} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{III} \quad (3.6)$$

Suivant la direction y :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{II}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{III}} \quad (3.7)$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

**I:** Flux convectif  $F_i^c$  .

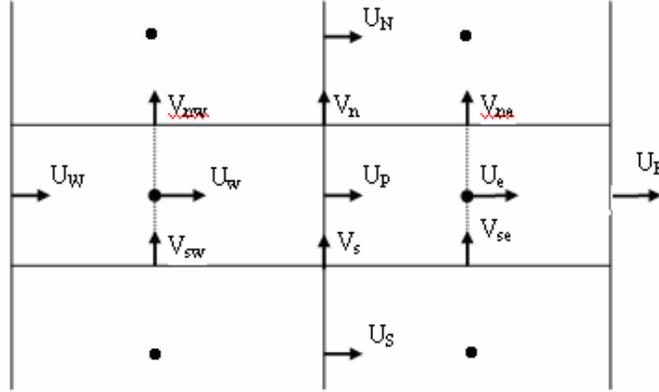
**II:** Flux diffusif  $F_i^d$  .

**III:** Force de pression  $Q_i^p$  .

Avec  $i = u$  ou  $v$

### 3.1.3.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction X

Considérons le volume de contrôle décalé associé à  $U$  présenté sur la figure (3.3) :



**Figure 3.3.** Stockages des composantes de vitesse sur les faces du volume de contrôle associé à  $U$ .

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \left( \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy \quad (3.9)$$

Pour le terme convectif On adopte le schéma de différence Upwind (UDS) et le schéma des différences centrés (CDS).

#### 1. Par le schéma CDS :

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dx dy = \left( (\rho u u)_{e_u} - (\rho u u)_{w_u} \right) \Delta y_P$$

$$f_e = \rho u_{e_u} \Delta y_P$$

$$f_w = \rho u_{w_u} \Delta y_P$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dx dy = f_e \frac{(u_{P_u} + u_{E_u})}{2} - f_w \frac{(u_{P_u} + u_{W_u})}{2}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\gamma v u)}{\partial y} dx dy = \left( (\gamma v u)_{n_u} - (\gamma v u)_{s_u} \right) dx_e$$

$$f_n = \gamma v_{n_u} dx_e$$

$$f_s = \gamma v_{s_u} dx_e$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\gamma v u)}{\partial y} dx dy = f_n u_{n_u} - f_s u_{s_u}$$

Par interpolation linéaire de  $u_{nu}$  et  $u_{su}$  on obtient :

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\gamma v u)}{\partial y} dx dy = f_n \left( \gamma_{y_n} u_{N_u} + (1 - \gamma_{y_n}) u_{R_u} \right) - f_s \left( \gamma_{y_s} u_{P_u} + (1 - \gamma_{y_s}) u_{S_u} \right)$$

Où

$$\gamma_{y_n} = \frac{y_n - y_p}{y_N - y_p}$$

$$\gamma_{y_s} = \frac{y_p - y_s}{y_p - y_s}$$

Avec :

Où  $f_e, f_w, f_n$  et  $f_s$  sont les taux d'écoulement massiques à travers les faces ( $e, w, n$  et  $s$ ) du volume de contrôle.

$$f_w = \gamma \frac{(u_{P_u} + u_{W_u})}{2} \Delta y_p$$

$$f_e = \gamma \frac{(u_{P_u} + u_{E_u})}{2} \Delta y_p$$

(3.10)

$$f_n = \gamma \left( \frac{v_n + v_{ne_u}}{2} \right) dx_e$$

$$f_s = \gamma \left( \frac{v_s + v_{se_u}}{2} \right) dx_e$$

Le terme convectif obtenu par le schéma CDS  $(F_u^c)^{CDS}$  est :

$$\begin{aligned} (F_u^c)^{CDS} = & f_e \frac{(u_{R_u} + u_{E_u})}{2} - f_w \frac{(u_{P_u} + u_{W_u})}{2} \\ & + f_n (\gamma_{y_n} u_{N_u} + (1-\gamma_{y_n}) u_{R_u}) - f_s (\gamma_{y_s} u_{P_u} + (1-\gamma_{y_s}) u_{S_u}) \end{aligned}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_{y_n} &= \frac{y_n - y_p}{y_N - y_p} \\ \gamma_{y_s} &= \frac{y_p - y_s}{y_p - y_s} \end{aligned} \quad (3.11)$$

## 2. Par le schéma UDS :

- Si l'écoulement est dans la direction positive :

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (\gamma u u)}{\partial x} dx dy &= \left( (\gamma u u)_{e_u} - (\gamma u u)_{w_u} \right) \Delta y_P \\ &= f_e u_{e_u} - f_w u_{w_u} \\ \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (\gamma u u)}{\partial x} dx dy &= \left( (\gamma u u)_{e_u} - (\gamma u u)_{w_u} \right) \Delta y_P = f_e u_{P_u} - f_w u_{W_u} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec :

$$\begin{aligned} f_e &= \gamma u_{e_u} \Delta y_P \\ f_w &= \gamma u_{w_u} \gamma y_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (\gamma v u)}{\partial y} dx dy &= \left( (\gamma v u)_{n_u} - (\gamma v u)_{s_u} \right) dx_e \\ &= f_n u_{n_u} - f_s u_{s_u} \end{aligned}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} dx dy = \left( (\rho v u)_{n_u} - (\rho v u)_{s_u} \right) dx_e = f_n u_{P_u} - f_s u_{S_u} \quad (3.13)$$

Avec :

$$f_n = \rho v_{n_u} dx_e$$

$$f_s = \rho v_{s_u} dx_e$$

$$\left( F_u^c \right)^{UDS} = f_e u_{P_u} - f_w u_{W_u} + f_n u_{P_u} - f_s u_{S_u} \quad (3.14)$$

$$\left( F_u^c \right) = \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dx dy + \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} dx dy \quad (3.15)$$

Cette équation (terme convectif) sera mieux résolue en utilisant les différentes approches de correction, Ferziger (2002) :

$$\left( F_u^c \right) = \left( F_u^c \right)^{UDS} + \left[ \left( F_u^c \right)^{CDS} - \left( F_u^c \right)^{UDS} \right]^{m-1} \quad (3.16)$$

m-1 : itération précédente

$$\left( F_u^c \right)^{UDS} = f_e u_{P_u} - f_w u_{W_u} + f_n u_{P_u} - f_s u_{S_u} \quad (3.17)$$

Considérons l'intégration de l'équation de continuité dans le volume décalé suivant X :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy = \left( (\rho u)_{e_u} - (\rho u)_{w_u} \right) y_P \quad (3.18)$$

$$= f_e - f_w$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy = \left( (\rho v)_{n_u} - (\rho v)_{s_u} \right) dx_e \quad (3.19)$$

$$= F_n - F_s$$

La somme des deux équations est nulle, alors :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.20)$$

Multiplions l'équation (3.20) par  $u_{P_u}$  puis la soustraire de l'équation (3.17) on obtient :

$$\left( F_u^C \right)^{UDS} = -f_w u_{w_u} + f_w u_{P_u} + f_s u_{P_u} - f_s u_{s_u} \quad (3.21)$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy = -\left( P_{e_u} - P_{w_u} \right) \Delta y_P = \left( P_P - P_E \right) \Delta y_P \quad (3.22)$$

Pour le terme diffusif, on adopte le schéma des différences centrées CDS.

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = \left( \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{e_u} - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{w_u} \right) y_P$$

$$= \mu \left( \frac{u_{E_u} - u_{P_u}}{\Delta x_E} - \frac{u_{P_u} - u_{W_u}}{\Delta x_P} \right) y_P$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = D_e \left( u_{E_u} - u_{P_u} \right) - D_w \left( u_{P_u} - u_{W_u} \right)$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \left( \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{n_u} - \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{s_u} \right) dx_e$$

$$= \mu \left( \frac{u_{N_u} - u_{P_u}}{dy_n} - \frac{u_{P_u} - u_{S_u}}{dy_s} \right) dx_e$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = D_n (u_{N_u} - u_{P_u}) - D_s (u_{P_u} - u_{S_u}) \quad (3.23)$$

Où  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  sont les conductances diffusées :

$$D_e = \mu \frac{? y_P}{\Delta x_E}$$

$$D_w = \mu \frac{? y_P}{\Delta x_P}$$

$$D_n = \mu \frac{dx_e}{dy_n}$$

$$D_s = \mu \frac{dx_e}{dy_s}$$
(3.24)

L'équation de discrétisation de l'équation de mouvement suivant la direction  $X$  pour ( $u > 0$ ) :

$$A_{P_u} u_{P_u} = A_{E_u} u_{E_u} + A_{W_u} u_{W_u} + A_{N_u} u_{N_u} + A_{S_u} u_{S_u} + S_u \quad (3.25)$$

$$(f_w + f_s + D_e + D_w + D_n + D_s) u_{P_u} = D_e u_{E_u} + (F_w + D_w) u_{W_u}$$

$$+ D_n u_{N_u} + (f_s + D_s) u_{S_u} + (P_P - P_E) \Delta y_P - \left[ (F_u^c)^{CDS} - (F_u^c)^{UDS} \right]^{m-1} \quad (3.26)$$

Les termes intégrés de l'équation de quantité de mouvement (3.25) pour ( $u > 0$ ) peuvent être réarrangés sous les formes de discrétisation suivante :

$$\begin{aligned}
A_{E_u} &= D_e \\
A_{W_u} &= (D_w + f_w) \\
A_{N_u} &= D_n \\
A_{S_u} &= (D_s + f_s) \\
A_{P_u} &= A_{E_u} + A_{W_u} + A_{N_u} + A_{S_u} \\
S_u &= (P_p - P_e) \Delta y_p + \left[ (F_u^c)^{UDS} - (F_u^c)^{CDS} \right]^{m-1}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

- Si l'écoulement est dans la direction négative ( $u < 0$ ) :

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (?uu)}{\partial x} dx dy &= \left( (?uu)_{e_u} - (?uu)_{w_u} \right) \Delta y_p \\
&= f_e u_{e_u} - f_w u_{w_u} \\
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (?uu)}{\partial x} dx dy &= f_e u_{E_u} - f_w u_{P_u}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (?vu)}{\partial y} dx dy &= \left( (?vu)_{n_u} - (?vu)_{s_u} \right) dx_e \\
&= f_n u_{n_u} - f_s u_{s_u}
\end{aligned}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \frac{\partial (?vu)}{\partial y} dx dy = f_n u_{N_u} - f_s u_{P_u} \tag{3.29}$$

$$(F_u^c)^{UDS} = f_e u_{E_u} - f_w u_{P_u} + f_n u_{N_u} - f_s u_{P_u} \tag{3.30}$$

De la même manière Multiplions l'équation de continuité discrétisé (3.20) par  $u_{P_u}$  puis la soustraire de l'équation (3.30) on obtient :

$$\left(F_u^c\right)^{UDS} = f_e u_{E_u} - f_e u_{P_u} + f_n u_{N_u} - f_n u_{P_u} \quad (3.31)$$

L'équation de discrétisation de l'équation de mouvement suivant la direction  $X$  pour ( $u < 0$ ) :

$$\begin{aligned} (-F_e - F_n + D_e + D_w + D_n + D_s) u_{P_u} &= (-F_e + D_e) u_{E_u} + D_w u_{W_u} \\ &+ (-F_n + D_n) u_{N_u} + D_s u_{S_u} + (P_p - P_e) \Delta y_p + \left[ \left(F_u^c\right)^{UDS} - \left(F_u^c\right)^{CDS} \right]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les termes intégrés de l'équation de quantité de mouvement (3.25) pour ( $u < 0$ ) peuvent être réarrangés sous les formes de discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} A_{E_u} &= D_e - F_e \\ A_{W_u} &= D_w \\ A_{N_u} &= -F_n + D_n \\ A_{S_u} &= D_s \\ A_{P_u} &= A_{E_u} + A_{W_u} + A_{N_u} + A_{S_u} \\ S_u &= (P_p - P_e) \Delta y_p + \left[ \left(F_u^c\right)^{UDS} - \left(F_u^c\right)^{CDS} \right]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

La forme des coefficients de l'équation de discrétisation générale qui couvre les deux cas de directions de l'écoulement est donné par :

$$\begin{aligned} A_{P_u} u_{P_u} &= A_{E_u} u_{E_u} + A_{W_u} u_{W_u} + A_{N_u} u_{N_u} + A_{S_u} u_{S_u} + S_u \\ A_{E_u} &= D_e + \max(-F_e, 0) \\ A_{W_u} &= D_w + \max(F_w, 0) \\ A_{N_u} &= D_n + \max(-F_n, 0) \\ A_{S_u} &= D_s + \max(F_s, 0) \\ A_{P_u} &= A_{E_u} + A_{W_u} + A_{N_u} + A_{S_u} \\ S_u &= Q_u^p + Q_u^c \\ Q_u^p &= (P_p - P_e) \Delta y_p \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$Q_u^c = \left[ (F_u^c)^{UDS} - (F_u^c)^{CDS} \right]^{m-1}$$

Avec:

$$\begin{aligned} (F_u^c)^{UDS} = & -\max(-F_e, 0) u_{E_u} - \max(F_w, 0) u_{W_u} - \max(-F_n, 0) u_{N_u} \\ & - \max(F_s, 0) u_{S_u} + \max(-F_e, 0) u_{P_u} + \max(F_w, 0) u_{R_u} + \max(F_s, 0) u_{R_u} \\ & + \max(-F_n, 0) u_{P_u} \end{aligned} \quad (3.35)$$

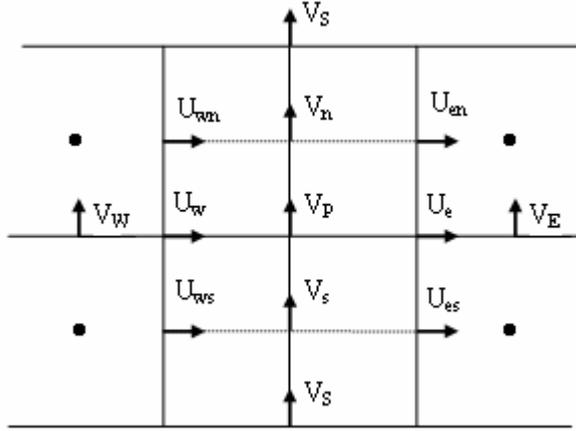
$$\begin{aligned} (F_u^c)^{CDS} = & f_e \frac{(u_{P_u} + u_{E_u})}{2} - f_w \frac{(u_{P_u} + u_{W_u})}{2} \\ & + f_n \left( ?_{y_n} u_{N_u} + (1-?_{y_n}) u_{R_u} \right) - f_s \left( ?_{y_s} u_{P_u} + (1-?_{y_s}) u_{S_u} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

De la figure (3.3), les points suivant du volume de contrôle associé à U sont confondus :

$$w_u \equiv P, \quad e_u \equiv E, \quad P_u \equiv e, \quad nw_u \equiv n, \quad sw_u \equiv s$$

### 3.1.3.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction Y

Considérons le volume de contrôle décalé associé à V présenté sur la figure (3.4) :



**Figure 3.4.** Stockage des composantes de vitesse sur les faces du volume de contrôle associé à V.

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \left( \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.37)$$

#### 1. Par le schéma CDS :

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} dx dy &= \left( (\rho uv)_{e_v} - (\rho uv)_{w_v} \right) dy_n \\ &= f_e v_{e_v} - f_w v_{w_v} \end{aligned}$$

$$f_e = \rho dy_n u_{e_v}$$

$$f_w = \rho dy_n u_{w_v}$$

Par interpolation linéaire de  $v_{e_v}$  et  $v_{w_v}$  on obtient :

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\theta uv)}{\partial x} dx dy = f_e (\theta_{x_e} v_{E_v} + (1-\theta_{x_e}) v_{P_v}) - f_w (\theta_{x_w} v_{P_v} + (1-\theta_{x_s}) v_{W_v}) \quad (3.38)$$

Où

$$\theta_{x_e} = \frac{x_e - x_p}{x_E - x_p}$$

$$\theta_{x_w} = \frac{x_p - x_w}{x_p - x_W}$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\theta vv)}{\partial y} dx dy = (\theta_{v_{n_v}} v_{n_v} - \theta_{v_{s_v}} v_{s_v}) \theta_{x_p} \quad (3.39)$$

$$= \left[ \left( \frac{v_{N_v} + v_{P_v}}{2} \right) \left( \frac{v_{P_v} + v_{N_v}}{2} \right) - \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) \right] \theta_{x_p}$$

$$= f_n \left( \frac{v_{P_v} + v_{N_v}}{2} \right) - f_s \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right)$$

$$f_e = \theta \left( \frac{u_{P_u} + u_{N_u}}{2} \right) dy_n$$

$$f_w = \theta \left( \frac{u_{n_{w_v}} + u_{w_u}}{2} \right) dy_n$$

$$f_n = \theta_{x_p} \left( \frac{v_{N_v} + v_{P_v}}{2} \right)$$

$$f_s = \theta_{x_p} \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right)$$

Le terme convectif  $(F_v^C)^{CDS}$  obtenu par le schéma CDS est :

$$\begin{aligned}
\left(F_v^C\right)^{CDS} &= f_n \left( \frac{v_{P_v} + v_{N_v}}{2} \right) - f_s \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) \\
&+ f_e \left( ?_{X_e} v_{E_v} + (1 - ?_{X_e}) v_{P_v} \right) - f_w \left( ?_{X_w} v_{P_v} + (1 - ?_{X_s}) v_{W_v} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

## 2. Par le schéma UDS :

- Si l'écoulement est dans la direction positive ( $v > 0$ ):

$$\begin{aligned}
\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(?uv)}{\partial x} dx dy &= \left( (?uv)_{e_v} - (?uv)_{w_v} \right) dy_n \\
&= \left[ \left( \frac{u_{P_u} + u_{N_u}}{2} \right) v_{P_v} - \left( \frac{u_{n_v} + u_{w_u}}{2} \right) v_{W_v} \right] ? dy_n
\end{aligned}$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(?uv)}{\partial x} dx dy = f_e v_{P_v} - f_w v_{W_v} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(?vv)}{\partial y} dx dy &= \left( ?_{v_{n_v}} v_{n_v} - ?_{v_{s_v}} v_{s_v} \right) ? x_p \\
&= \left[ \left( \frac{v_{N_v} + v_{P_v}}{2} \right) v_{P_v} - \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) v_{S_v} \right] ? ? x_p
\end{aligned}$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(?vv)}{\partial y} dx dy = f_n v_{P_v} - f_s v_{S_v} \tag{3.42}$$

$$\left(F_v^C\right)^{UDS} = f_e v_{P_v} - f_w v_{W_v} + f_n v_{P_v} - f_s v_{S_v} \tag{3.43}$$

Considérons l'intégration de l'équation de continuité dans le volume décalé suivant Y :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy = \left( (\rho u)_{e_v} - (\rho u)_{w_v} \right) y_p$$

$$= \left( \frac{u_{P_u} + u_{N_u}}{2} \right) - \left( \frac{u_{n_{w_v}} + u_{w_u}}{2} \right) \rho y_p$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy = f_e - f_w \quad (3.44)$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy = \left( (\rho v)_{n_v} - (\rho v)_{s_v} \right) x_p$$

$$= \left[ \left( \frac{v_{N_v} + v_{P_v}}{2} \right) - \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) \right] \rho x_p$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy = f_n - f_s \quad (3.45)$$

La somme des deux équations est nulle, alors :

$$f_e - f_w + f_n - f_s = 0 \quad (3.46)$$

Multiplions l'équation (3.46) par  $v_{P_v}$  puis la soustraire de l'équation (3.43) on obtient :

$$\left( F_v^c \right)^{UDS} = -f_w v_{w_v} - f_s v_{S_v} + f_w v_{P_v} + f_s v_{P_v} = 0 \quad (3.47)$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy = -(P_{n_v} - P_{s_v})? x_p$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy = (P_P - P_N)? x_p \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy &= \left[ \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{e_v} - \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{w_v} \right] dy_n \\ &= \mu dy_n \left[ \left( \frac{v_{E_v} - v_{P_v}}{dx_e} \right) - \left( \frac{v_{P_v} - v_{W_v}}{dx_w} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = D_e (v_{E_v} - v_{P_v}) - D_w (v_{P_v} - v_{W_v}) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy &= \left[ \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{n_v} - \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{s_v} \right] ? x_p \\ &= \mu \left[ \frac{(v_{N_v} - v_{P_v})}{? y_N} - \mu \frac{(v_{P_v} - v_{S_v})}{? y_P} \right] ? x_p \end{aligned}$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = D_n (v_{N_v} - v_{P_v}) - D_s (v_{P_v} - v_{S_v}) \quad (3.50)$$

$$D_e = \frac{\mu dy_n}{dx_e}$$

$$D_n = \frac{\mu ? x_p}{? y_N}$$

$$D_w = \frac{\mu dy_n}{dx_w}$$

$$D_s = \frac{\mu^? x_p}{\Delta y_p}$$

L'équation de discrétisation pour ( $v>0$ ) :

$$\begin{aligned} (F_w + F_s + D_e + D_w + D_n + D_s)v_{P_v} &= D_e v_{E_v} + (F_w + D_w)v_{W_v} + D_n v_{N_v} \\ &+ (F_s + D_s)v_{S_v} + (P_p - P_n)\Delta x_p + \left[ (F_v^c)^{UDS} - (F_v^c)^{CDS} \right]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les termes intégrés de l'équation de quantité de mouvement (3.51) suivant  $Y$  pour ( $v>0$ ) peuvent être réarrangés sous la forme de discrétisation suivante :

$$A_{P_v} u_{P_v} = A_{E_v} u_{E_v} + A_{W_v} u_{W_v} + A_{N_v} u_{N_v} + A_{S_v} u_{S_v} + S_v \quad (3.52)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{E_v} &= D_e \\ A_{W_v} &= (D_w + F_w) \\ A_{S_v} &= (D_s + F_s) \\ A_{N_v} &= D_n \\ A_{P_v} &= A_{E_v} + A_{W_v} + A_{N_v} + A_{S_v} \\ S_v &= (P_p - P_n)\Delta x_p + \left[ (F_v^c)^{UDS} - (F_v^c)^{CDS} \right]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Avec :

$$\left( F_v^c \right)^{UDS} = -f_w v_{W_v} - f_s v_{S_v} + f_w v_{P_v} + f_s v_{P_v} = 0$$

- Si l'écoulement est dans la direction négative ( $v<0$ ) :

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(?uv)}{\partial x} dx dy = \left( (?uv)_{e_v} - (?uv)_{w_v} \right) dy_n$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} dx dy = f_e v_{E_v} - f_w v_{P_v} \quad (3.54)$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} dx dy = (\rho v_{n_v} v_{n_v} - \rho v_{s_v} v_{s_v}) \Delta x_p$$

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} dx dy = f_n v_{N_v} - f_s v_{P_v} \quad (3.55)$$

$$\left( F_v^c \right)^{UDS} = F_e v_{E_v} - F_w v_{P_v} + F_n v_{N_v} - F_s v_{P_v} \quad (3.56)$$

Multiplions l'équation de continuité discrétisée (3.46) par  $v_{P_v}$  puis la soustraire de l'équation (3.56) on obtient :

$$\left( F_v^c \right)^{UDS} = f_e v_{E_v} - f_w v_{P_v} + f_n v_{N_v} - f_s v_{P_v} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} (-f_e - f_n + D_e + D_w + D_n + D_s) v_{P_v} &= (-f_e + D_e) v_{E_v} + D_w v_{W_v} + (-f_n + D_n) v_{N_v} \\ + D_s v_{S_v} + (P_P - P_N) \Delta x_p &+ \left[ \left( F_v^c \right)^{UDS} - \left( F_v^c \right)^{CDS} \right]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Les termes intégrés de l'équation de quantité de mouvement (3.52) suivant  $Y$  pour  $v < 0$  :

$$\begin{aligned} A_{E_v} &= D_e - F_e \\ A_{W_v} &= D_w \\ A_{N_v} &= D_n - F_n \\ A_{S_v} &= D_s \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_v = (P_P - P_N) \Delta x_p + \left[ (F_v^c)^{UDS} - (F_v^c)^{CDS} \right]^{m-1}$$

$$(F_v^c)^{UDS} = f_e v_{E_v} - f_e v_{P_v} + f_n v_{N_v} - f_n v_{P_v}$$

La forme des coefficients de l'équation générale qui couvre les deux cas de direction de l'écoulement est donné par :

$$A_{P_v} u_{P_v} = A_{E_v} u_{E_v} + A_{W_v} u_{W_v} + A_{N_v} u_{N_v} + A_{S_v} u_{S_v} + S_v$$

Avec :

$$A_{E_v} = D_e + \max(-F_e, 0)$$

$$A_{W_v} = D_w + \max(F_w, 0)$$

$$A_{N_v} = D_n + \max(-F_n, 0)$$

$$A_{S_v} = D_s + \max(F_s, 0)$$

$$A_{P_v} = A_{E_v} + A_{W_v} + A_{N_v} + A_{S_v}$$

$$S_v = Q_v^p + Q_v^c$$

Avec :

$$Q_v^p = (P_P - P_N) \Delta x_p$$

$$Q_v^c = \left[ (F_v^c)^{UDS} - (F_v^c)^{CDS} \right]^{m-1}$$

Avec :

$$(F_v^c)^{UDS} = -\max(-F_e, 0) v_{E_v} - \max(F_w, 0) v_{W_v} - \max(-F_n, 0) v_{N_v} - \max(F_s, 0) v_{S_v} + \max(-F_e, 0) v_{P_v} + \max(F_w, 0) v_{P_v} + \max(F_s, 0) v_{P_v} + \max(-F_n, 0) v_{P_v}$$

$$\begin{aligned} \left(F_v^C\right)^{CDS} = & f_n \left( \frac{v_{P_v} + v_{N_v}}{2} \right) - f_s \left( \frac{v_{S_v} + v_{P_v}}{2} \right) + f_e \left( \alpha_{x_e} v_{E_v} + (1 - \alpha_{x_e}) v_{P_v} \right) \\ & - f_w \left( \alpha_{x_w} v_{P_v} + (1 - \alpha_{x_w}) v_{W_v} \right) \end{aligned}$$

### 3.1.3.3 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations des conditions aux limites sont exprimées sous la forme de l'équation de discrétisation générale de transport. Les coefficients de ces équations sont spécifiés sur chaque frontière et pour chaque variable de transport.

#### 1. Conditions d'entrées

La distribution des variables de tous écoulements doit être spécifiée aux frontières d'entrée figure (3.5).

Les équations de discrétisation des conditions aux limites à l'entrée seront exprimées par la condition de Dirichlet qui est discrétisée en substituant les coefficients dans les équations discrétisées associées à u, v par les valeurs suivantes :

- **La vitesse u :**

La vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{1}, \mathbf{j}) = u_{in}$  est la vitesse d'entrée du fluide au canal alors :

$$A_p = 1, A_E = 0, A_W = 0, A_N = 0, A_S = 0, S_U = u(1, j) \quad (3.61)$$

- **La vitesse v :**

L'écoulement du fluide à l'entrée est en direction x c'est à dire  $v_{in} = 0$  alors :

$$A_p = 1, A_E = 0, A_W = 0, A_N = 0, A_S = 0, S_U = 0 \quad (3.62)$$

#### 2. Conditions de sorties

La condition de Newman sur les vitesses et les scalaires à la sortie, figure (3.5), est discrétisée en substituant les coefficients dans les équations discrétisées associées à u et v par les valeurs suivantes :

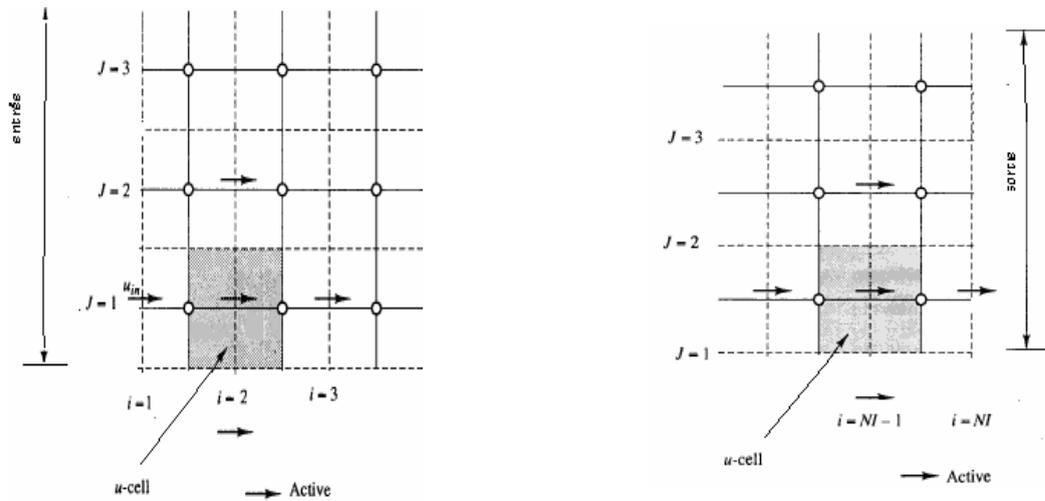
Dans le cas général :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.63)$$

La discrétisation est : 
$$\frac{F(NI,j) - F(NI-1,j)}{dx(NI-1)} = 0 \quad (3.64)$$

Ce qui implique que : 
$$F(NI,j) = F(NI-1,j) \quad (3.65)$$

$$A_P = A_W = 1 \text{ et } A_E = A_N = A_S = S_U = 0 \quad (3.66)$$



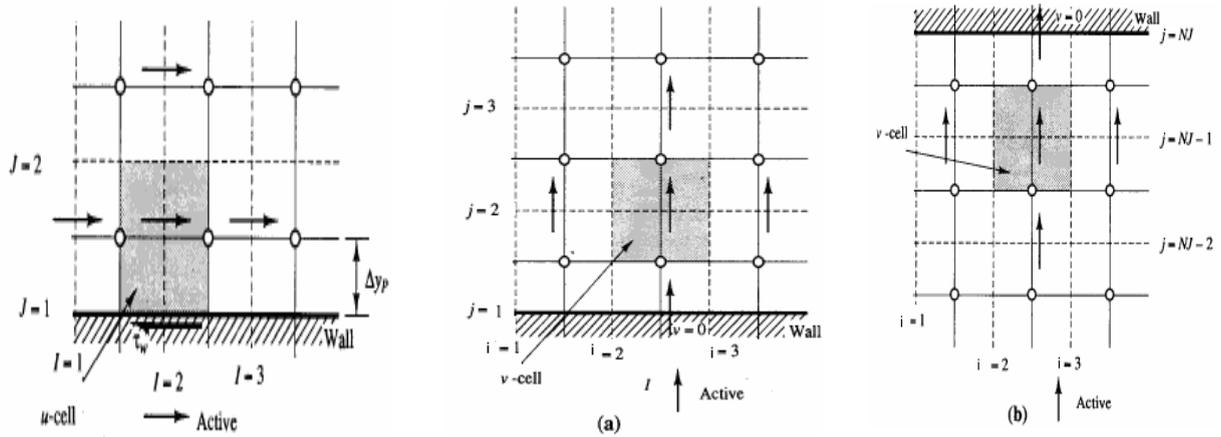
**Figure 3.5.** Les conditions d'entrées et de sorties Versteeg (1995)

### 3. Conditions aux frontières horizontales inférieure et supérieure :

Notre écoulement est délimité par des parois imperméables et le fluide d'essai est de l'eau, donc un fluide visqueux, ce qui nous conduit à une condition aux limites de non glissement ( $u=0, v=0$ ) sur les parois, figure (3.6).

Les coefficients dans les équations discrétisées associées à  $u$  et  $v$  par les valeurs suivantes :

$$A_P = 1, A_E = 0, A_W = 0, A_N = 0, A_S = 0, S_U = 0 \quad (3.67)$$



**Figure 3.6.** Conditions aux frontières horizontales inférieure et supérieure. Versteeg (1995)

### 3.1.4 Schémas de discrétisation spatiaux

Les profils approximatifs décrivant la variation  $F$  entre les nœuds, sont exprimés par la fonction  $A(|P|)$  spécifique pour chaque schéma numérique. Ou  $|P|$  est le nombre de Peclet  $|P| = F/D$ .

La concordance des résultats obtenus par ces schémas et la stabilité numérique, sont deux critères de choix du schéma. Suhas V. Patankar (1988) a cité les cinq schémas suivants :

#### a. Schéma des différences centrées :

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = 1 - 0.5|P| \quad (3.68)$$

Les coefficients de l'équation générale de transport discrétisée seront :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e (1 - 0.5|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w (1 - 0.5|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n (1 - 0.5|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s (1 - 0.5|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Le schéma des différences centrées est basé sur une interpolation linéaire des valeurs de  $F$  sur les interfaces. Comme il est caractérisé par sa haute diffusivité, ce schéma donne

des résultats satisfaisants lorsque la diffusion domine la convection ( $|P| < 2$ ), mais une fois la convection domine la diffusion ( $|P| > 2$ ), la solution de l'écoulement est sujette à une instabilité numérique sous forme d'oscillations non physique.

### **b. Schéma upwind**

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'expression suivante :

$$A(|P|) = 1 \quad (3.70)$$

D'ou les expressions suivantes des coefficients :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ce schéma est basé sur la meilleure contribution des valeurs de la fonction du transport aux nœuds. Suivant le sens d'écoulement il affecte à la variable  $F$  sur la face du volume de contrôle sa valeur sur le nœud en amont. Ce schéma est inconditionnellement stable, mais il perd son exactitude pour des vitesses d'écoulement élevées.

### **c. Schéma hybride :**

La fonction  $A(|P|)$  est exprimé comme suit :

$$A(|P|) = \max(0.1 - 0.5|P|) \quad (3.72)$$

D'ou les coefficients de l'équation générale de transport discrétisé :

$$\begin{aligned}
A_E &= \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \\
A_W &= \max\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) \\
A_N &= \max\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right) \\
A_S &= \max\left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

C'est un schéma qui n'a pas de fondement théorique, il combine les deux schémas précédents, en employant, le schéma des différences centrées là où la diffusion est dominante et le schéma upwind là où la convection est dominante.

#### **d. Le schéma exponentiel**

La fonction  $A(|P|)$  est donné par :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1} \tag{3.74}$$

Les coefficients de l'équation générale de transport sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}
A_E &= \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\
A_N &= \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} \\
A_W &= \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$A_s = \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1}$$

Bien que ce schéma s'approche de la solution exacte, il est par contre coûteux en temps de calcul machine.

**e. Schéma de puissance :**

La fonction  $A(|P|)$  est exprimé par :

$$A(|P|) = \max\left[0, (1 - 0.1|P_e|)^5\right] \quad (3.76)$$

D'ou les coefficients de l'équation générale de transport discrétisé :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e \max\left[0, (1 - 0.1|P_e|)^5\right] + \max(-F_e, 0) \\ A_N &= D_n \max\left[0, (1 - 0.1|P_n|)^5\right] + \max(-F_n, 0) \\ A_W &= D_w \max\left[0, (1 - 0.1|P_w|)^5\right] + \max(F_w, 0) \\ A_S &= D_s \max\left[0, (1 - 0.1|P_s|)^5\right] + \max(-F_s, 0) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Le schéma de puissance dérive du schéma exponentiel par interpolation polynomiale entre deux nœuds adjacents, il s'approche mieux de la solution exacte en augmentant les nombres d'intervalles d'approximation.

## 3.2 Calcul de l'écoulement :

### 3.2.1 Algorithme de SIMPLE

Algorithme SIMPLE de Patankar S.V. et Spalding D.B. (1972) (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) a été adopté dans cette étude pour sa simplicité et son efficacité sur la stabilité de la solution. L'idée générale de cet algorithme est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables vérifiant les équations de la quantité de mouvement vérifient également l'équation de

continuité. Il en résulte un processus itératif qui est intégré au sein de la résolution générale des équations discrétisées, (3.34) et (3.60).

Ceci est corrigé d'une manière continue en se référant aux résiduels de masses locales qui sont employées pour orienter le champ de pression vers le niveau correct. La stabilité de cet ordre itératif se base largement sur la rétention d'un couplage fort entre les perturbations dans le gradient de pression et les perturbations de vitesse, Versteeg (1995). On peut résumer ce qu'on a décrit au-dessus par les étapes suivantes :

1. Tous les champs sont estimés en tous les points du maillage.
2. À l'aide de ces valeurs, les coefficients des équations sont calculés.
3. Les coefficients étant fixes, un solveur linéaire est introduit pour résoudre tout d'abord les deux équations de la quantité de mouvement et fournir les composantes de vitesse  $U^*$  et  $V^*$ , la pression  $P^*$  correspondante demeurant celle utilisée pour calculer les coefficients de la deuxième étape.

Des corrections  $P'$ ,  $U'$ ,  $V'$  sont ensuite apportées à ces champs afin que les nouveaux champs  $P$ ,  $U$ ,  $V$ , soient les champs qui vérifient à la fois les équations de la quantité de mouvement et l'équation de continuité.

$$P = P^* + P' \tag{3.78}$$

$$U = U^* + U' \tag{3.79}$$

$$V = V^* + V' \tag{3.80}$$

Ces nouvelles valeurs  $P$ ,  $U$ ,  $V$ , sont alors réintégrées dans les équations de la quantité de mouvement, ce qui permet d'obtenir trois relations fonctionnelles entre les différentes corrections (les champs  $P^*$ ,  $U^*$  et  $V^*$  étant connus). Précisons qu'il s'agit de relations simplifiées car certains termes sont ici annulés, ce qui constitue d'ailleurs la seule approximation de l'algorithme SIMPLE.

$$U' = f_1(P') \tag{3.81}$$

$$V' = f_2(P') \tag{3.82}$$

Les champs  $U, V$  sont ensuite reconstitués à l'aide des relations (3.78) à (3.82) et n'ont plus que pour seule inconnue commune  $P'$ . La substitution de leurs valeurs dans l'équation de continuité donne une relation unique sur  $P'$  qui est résolue par le solveur.

$P'$  étant connu, les champs exacts  $P, U, V$ , vérifiant à la fois les équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité, le sont également, ce qui était notre objectif de départ.

Toutes les autres équations du problème sont résolues par le solveur.

4. Si les critères de convergence sont vérifiés, les champs ainsi déterminés sont les champs solutions du problème considéré. Si ce n'est pas le cas, le processus est réitéré à partir de la deuxième étape les coefficients sont recalculés à partir des nouvelles valeurs des champs.

### 3.2.2 Méthode de résolution

Une fois les équations algébriques décrivant l'évolution des variables de l'écoulement dans le domaine de calcul sont établies, une méthode numérique de résolution est choisie en fonction du type de ces équations.

Considérons la notation indicielle, utilisées en raison de faciliter la programmation des étapes de calcul. La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport sous la nouvelle notation est :

$$A_P^{(ij)} \Phi_{ij} = A_E^{(ij)} \Phi_{i+1,j} + A_W^{(ij)} \Phi_{i-1,j} + A_N^{(ij)} \Phi_{i,j+1} + A_S^{(ij)} \Phi_{i,j-1} + S^{(ij)} \quad (3.83)$$

Tels que :  $1 \leq i \leq n_i$  et  $1 \leq j \leq n_j$

Les coefficients de cette équation sont fonction des variables de transport  $F$  une méthode de résolution itérative doit être utiliser à cause de la non-linéarité.

Le système (3.83) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{A\}[\Phi] = [S] \quad (3.84)$$

La matrice  $\{A\}$  est une matrice à bande diagonale et la largeur de la bande dépend de la dimension de l'espace. Dans notre cas qui est bidimensionnel ou la fonction du

transport sur chaque nœud est liée aux valeurs de cette fonction sur quatre nœuds adjacents la matrice  $\{A\}$  est penta diagonale.

### 3.2.2.1 Méthode de stone

La méthode de Stone proposée en 1968, or SIP (strongly implicit procedure), est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations correspondants aux variables  $U, V, P$  et  $P$ . Cette méthode est un algorithme conçu spécialement pour résoudre les matrices linéaires creuses, elle utilise une approximation de la décomposition  $LU$  pour obtenir une solution itérative du problème. Ferziger (2002).

La décomposition  $LU$  est une excellente méthode de résolution de systèmes linéaires mais n'exploite pas la structure des matrices creuses. Dans une méthode itérative, elle peut exiger une quantité prohibitive de mémoire et des opérations arithmétiques.

Si  $M$  est une bonne approximation de  $A$ , il y' a une convergence rapide. Ces observations nous amènent à utiliser une approximation de la factorisation  $LU$  de  $A$  comme matrice d'itération  $M$  i.e. :

$$M = LU = A + N$$

La méthode, est aussi appelée fortement implicite (SIP), est conçue spécialement pour des équations algébriques résultants de la discrétisation des équations aux dérivées partielles, son algorithme est donné en annexe 1.

### 3.2.3 Etude de convergence

Le sous relaxation est utilisée dans notre programme pour éviter la divergence du processus itératif décrit précédemment. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation  $\alpha$ .

Toutes les équations de transport discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante :

$$a_p \Phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + S_u \tag{3.85}$$

Si nous notons  $\Phi_p^*$  la valeur de  $\Phi_p$  à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \left( \frac{\sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + S_u}{a_p} - \Phi_p^* \right) \quad (3.86)$$

Où le terme entre parenthèses représente le changement survenu à  $\Phi_p$  pendant une itération.

Cette variation peut alors être amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation  $\alpha_\Phi$  de la manière suivante :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \alpha_\Phi \left( \frac{\sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + S_u}{a_p} - \Phi_p^* \right) \quad (3.87)$$

Il est bien évident que cette procédure de relaxation n'est valable que si la solution finale de l'équation (3.87) (à la fin des itérations) satisfait bien l'équation (3.85). C'est ici le cas dans la mesure où lorsque le processus a convergé,  $\Phi_p$  est censé ne plus varier d'une itération à l'autre. La relation  $\Phi_p = \Phi_p^*$  est alors obtenue et associée à l'équation (3.87) donne finalement l'équation (3.85) recherchée.

Cette sous relaxation est donc appliquée à toutes les variables, sauf la pression, au niveau de la troisième étape du processus itératif lorsque les équations sont résolues par le solveur linéaire (SIP).

La pression demande également à être sous relaxée afin que l'équation de continuité soit résolue sans problème de divergence. La sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse-pression. Elle est simplement introduite dans la correction de pression  $P'$  sous la forme suivante :

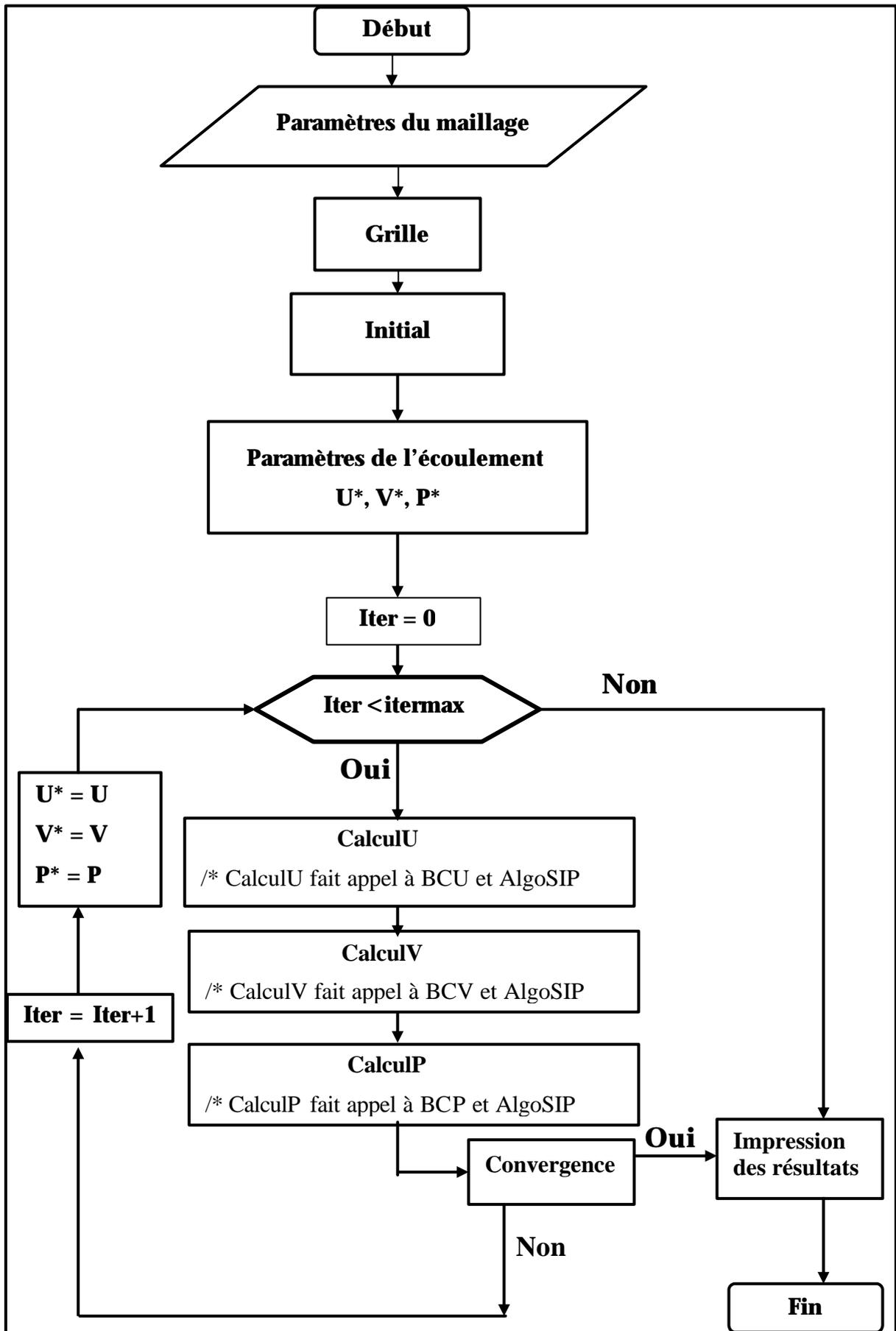
$$P = P^* + \alpha_p P'$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre les valeurs 0 et 1. Le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative.

### 3.3 Structure du code de calcul

Le code de calcul EMC est constitué d'un programme principal faisant appel à 10 procédures suivantes (voir l'organigramme) :

- ◆ Grille : Permet d'établir le maillage.
- ◆ Initial : Initialise les variables de l'écoulement.
- ◆ CalculU : Calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de quantité de mouvement suivant x.
- ◆ CalculV : Calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de quantité de mouvement suivant y.
- ◆ CalculP : Calcule les coefficients de l'équation discrétisée de l'équation de correction de pression et corrige, la pression (équation (3.78)) et les deux composantes de la vitesse (équation 3.79 et 3.80).
- ◆ AlgoSIP : Elle est appelée chaque fois par les procédures de calcul pour résoudre les systèmes d'équations résultants par la méthode des volumes finis.
- ◆ BCU : Détermine les conditions aux limites de la vitesse longitudinale.
- ◆ BCV : Détermine les conditions aux limites de la vitesse latérale.
- ◆ BCP : Détermine les conditions aux limites de la pression.
- ◆ Outbc : Détermine les conditions aux limites à la sortie (implémentation de la condition zéro- gradient à la sortie).



Organigramme du code EMC

## Conclusion

Afin de modéliser numériquement l'écoulement dans le minicanal mis en étude, nous avons résolu les équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis en discrétisant ces équations.

A travers ce chapitre, nous avons détaillé la linéarisation des termes des équations de quantité de mouvement et de continuité en utilisant deux schémas de discrétisation (CDS, UDS) avec la spécification de ces termes aux conditions aux limites.

Algorithme SIMPLE de Patankar S.V. et Spalding D.B. (1972) a été adopté dans cette étude avec le maillage intercalé. L'idée générale de cet algorithme est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables qui vérifient les équations de la quantité de mouvement vérifient également l'équation de continuité.

La méthode de Stone proposée en 1968, est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations correspondants aux variables  $U$ ,  $V$ ,  $P'$  et  $P$ .

Le sous relaxation est utilisée dans notre problèmes non linéaires pour l'étude de la convergence, pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation.

# Chapitre 4 : Résultats et discussions

## Introduction

Ce chapitre présente une série de résultats obtenus de l'étude numérique 2D que nous avons menée par la méthode des volumes finis pour caractériser les écoulements de l'eau dans un minicanal de 0,5 mm. Notre travail fait suite aux expériences et aux calculs numériques de Hamami (2005).

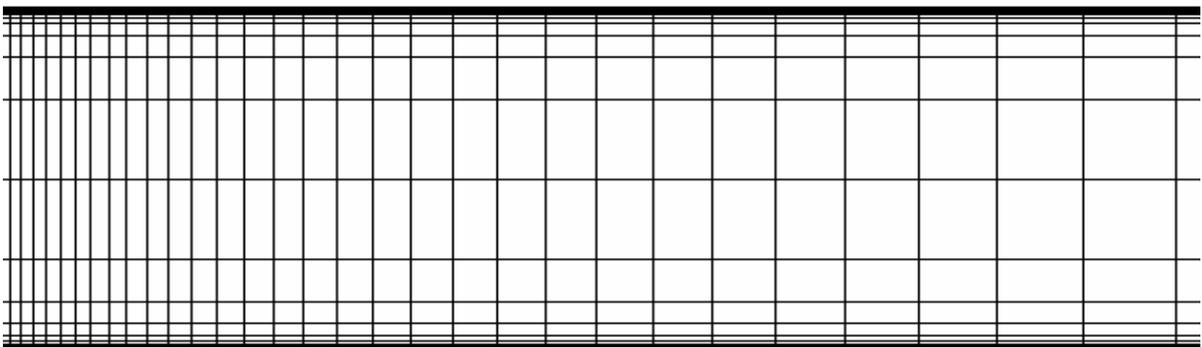
La résolution spatiale, pour la modélisation est de 460x20 points du maillage structuré raffiné à l'entrée et aux parois.

.Nous avons réalisé une série supplémentaire de calcul par le code de calcul Ansys qui emploie la méthode des éléments finis afin de comparer les résultats des deux différentes méthodes.

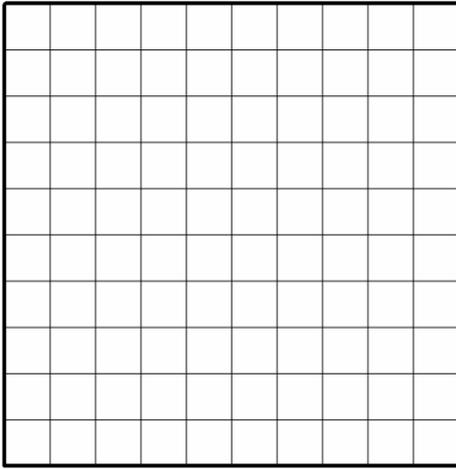
## 4.1 Modélisation et résolution en volumes finis

### 4.1.1 Génération de grilles

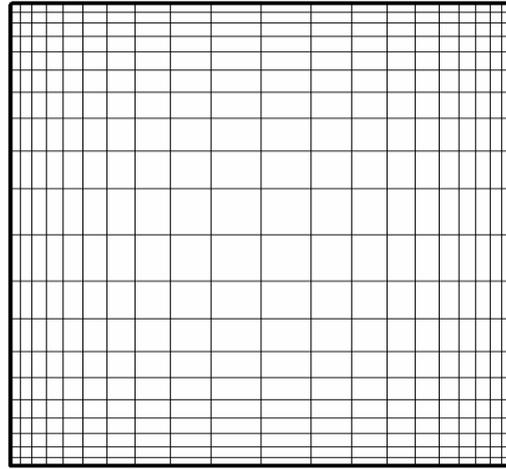
Dans cette étude on a réalisé un programme (EMC) en Delphi pour le maillage des domaines rectangulaires. Pour cela, il suffit de suivre les étapes décrites en annexe 1 pour obtenir un maillage de n'importe quel domaine rectangulaire et un raffinement dans n'importe quelle position figure (4.1, 4.2).



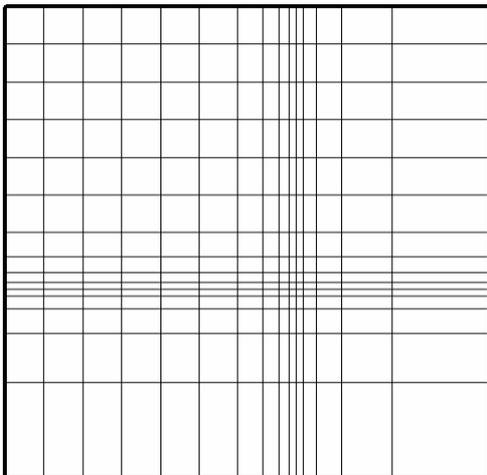
**Figure 4.1.** Maillage du minicanal de diamètre hydraulique est de 0.98 mm avec zoom



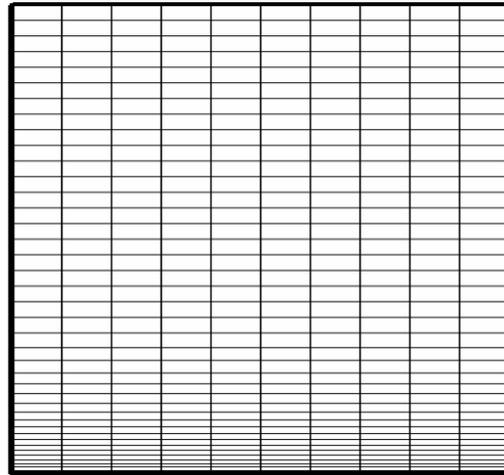
**(i)** Grille uniforme avec  
 $10 \times 10$  CV



**(ii)** Grille non uniforme  
(raffinement aux limites) avec  
 $20 \times 20$  CV



**(iii).** Grille non uniforme  
(raffinement à l'intérieur du cavité) avec  
 $15 \times 15$  CV



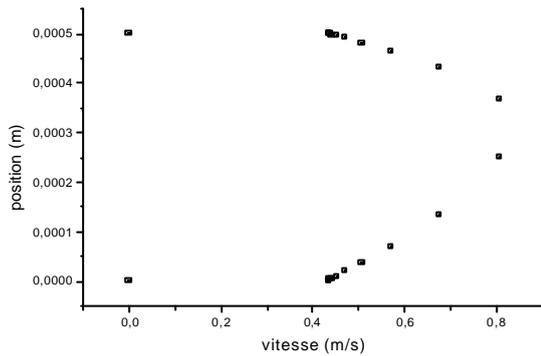
**(iv)** Grille non uniforme  
(raffinement au limite inférieure) avec  
 $20 \times 20$  CV

**Figure 4.2.** Différent maillage à utiliser pour les résolutions des problèmes d'écoulement ou de transfert thermique dans les cavités

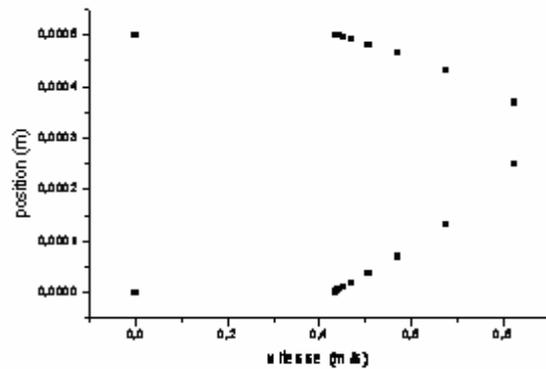
## 4.1.2 Calcul de l'écoulement

### 4.1.2.1 Profils des vitesses

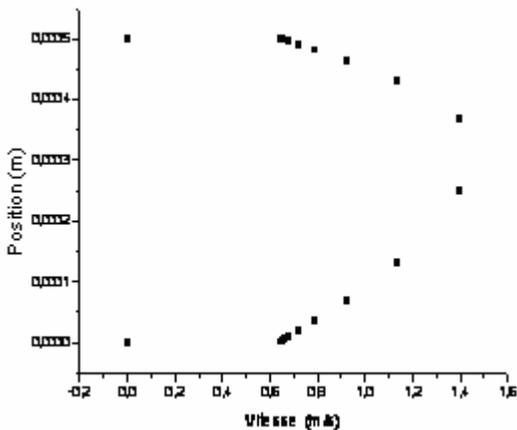
La simulation par le programme EMC nous a permis de tracer les profils de vitesses figures (4.3 à 4.6), qui représentent la variation de vitesse en travers une section transversale du minicanal en régime laminaire. La forme des courbes est parabolique, proche de celle donnée par la théorie de Poiseuille, et de celle obtenue par Fluent et Ansys.



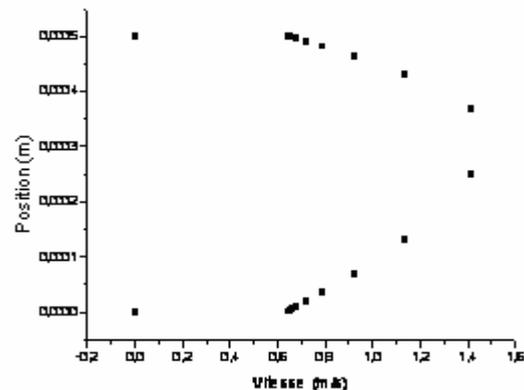
**Figure 4.3.** Profils de Vitesse avant l'établissement de l'écoulement (débit 450 ml/mn)



**Figure 4.4.** Profils de Vitesse après l'établissement de l'écoulement (débit 450 ml/mn)

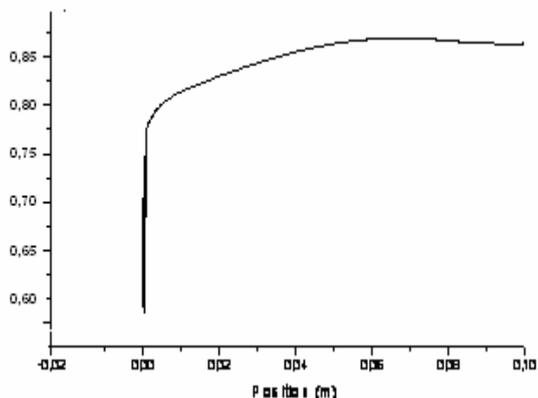


**Figure 4.5.** Profils de Vitesse avant l'établissement de l'écoulement (débit 850 ml/mn)

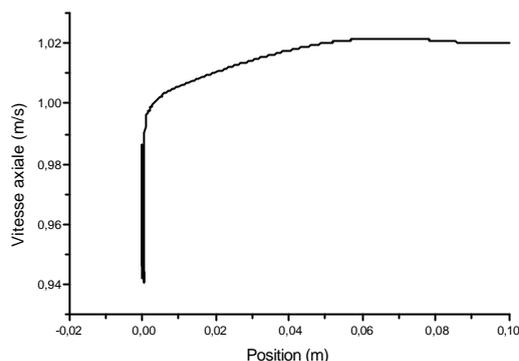


**Figure 4.6.** Profils de Vitesse après l'établissement de l'écoulement (débit 850 ml/mn)

Sur les figures (4.7 et 4.8) qui représentent les vitesses axiales de l'écoulement pour deux différentes vitesses d'entrée, on voit bien que la vitesse axiale s'étend à se stabiliser. Cette remarque s'approche de la théorie de Poiseuille qui néglige totalement la variation de cette vitesse par rapport à l'axe des X dans ces suppositions.



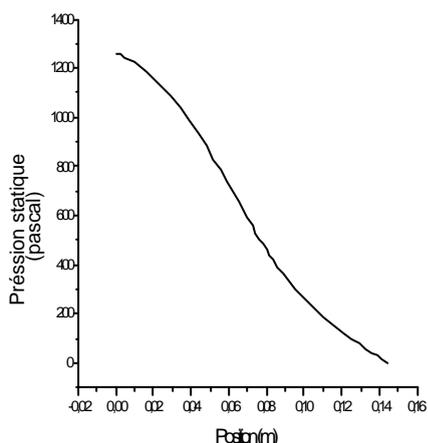
**Figure 4.7.** Variation de la vitesse axiale le long du canal (débit 450 ml/mn)



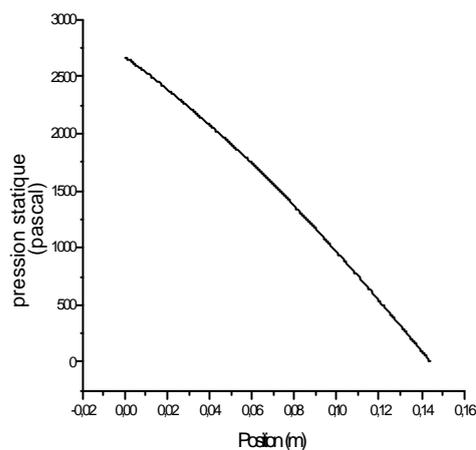
**Figure 4.8.** Variation de la vitesse axiale le long du canal (débit 850 ml/mn)

#### 4.1.2.2 Chute de pression

Mis à part les perturbations dues à l'entrée et à la sortie, on retrouve bien une chute de pression presque linéaire, figures (4.9, 4.10).



**Figure 4.9.** Variation de la pression le long du minicanal (débit 450 ml/mn)



**Figure 4.10.** Variation de la pression le long du canal (débit 850 ml/mn)

### 4.1.2.3 Coefficient de frottement

La manière la plus simple d'estimer la validité des lois classiques des écoulements internes, est de calculer le coefficient de frottement et la perte de pression correspondante sur une portion de longueur connue d'une conduite. Cette démarche permet de caractériser les écoulements laminaires, turbulents et de transition. En ce qui concerne ce coefficient, les résultats bibliographiques sont très dispersés. En se basant sur l'étude expérimental de Hamami (2003), le  $C_{f\ exp}$  est en dessous du  $C_{f\ théo}$  figure (4.11) ce qui implique que le nombre de poiseuille réduit est inférieure à un, figure (4.12).

Les courbes de la figure (4.13.) représentent les variations des coefficients de frottement théoriques, expérimentaux et simulés en fonction des nombres de Reynolds

On remarque, que les résultats des simulations se superposent plus ou moins parfaitement sur les valeurs théoriques et sur les valeurs simulées par les logiciels, Fluent et Ansys pour des différents nombres de Reynolds.

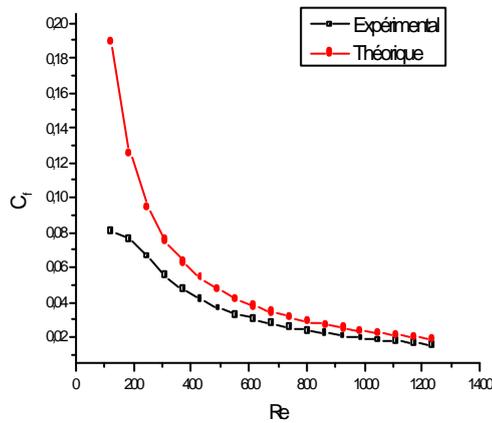


Figure 4.11. Comparaison théorique /expérimental

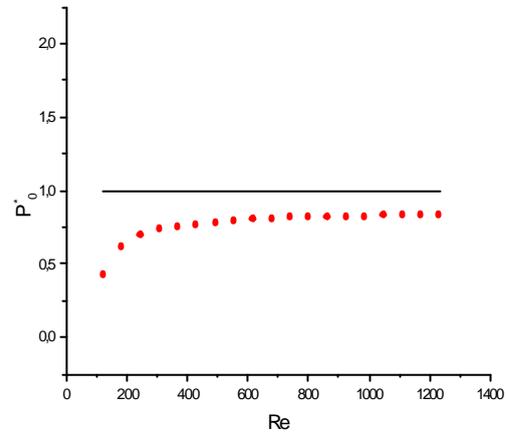
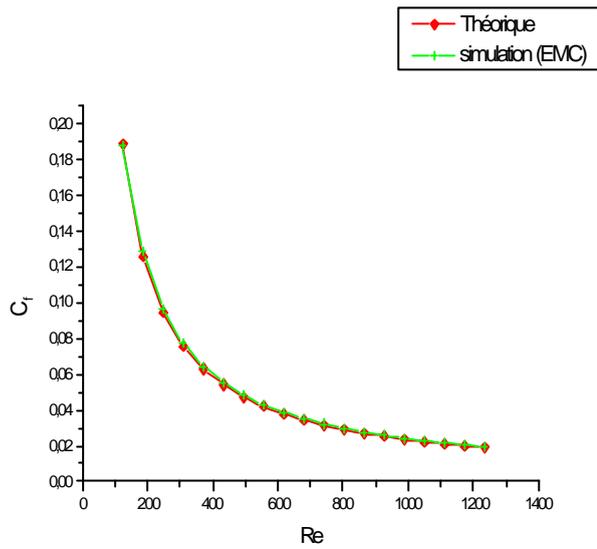
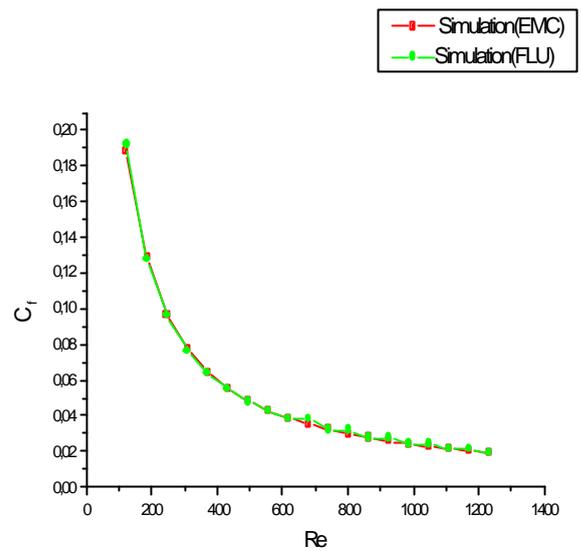


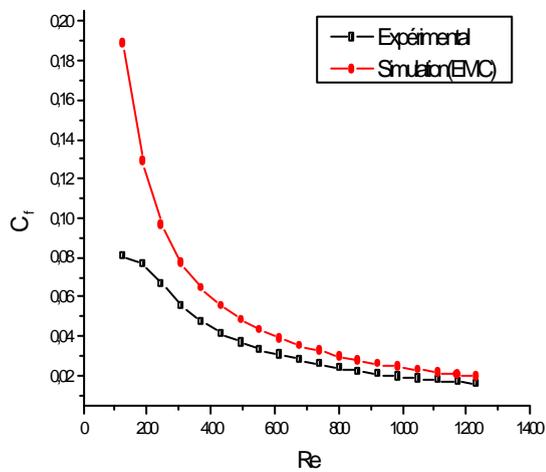
Figure 4.12. Nombre de Poiseuille réduit obtenu



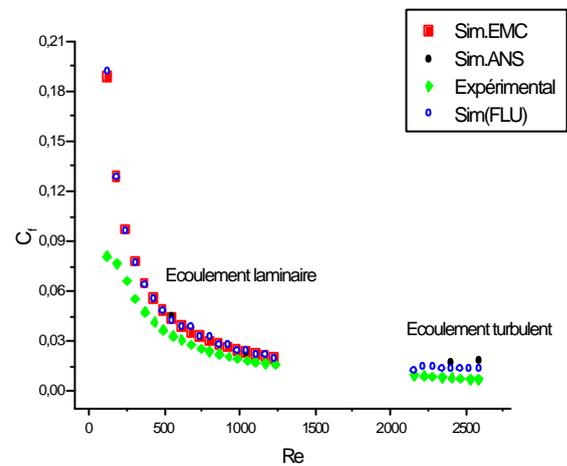
(1). Comparaison simulation EMC/théorique en régime laminaire



(2). simulation EMC / simulation Fluent en régime laminaire

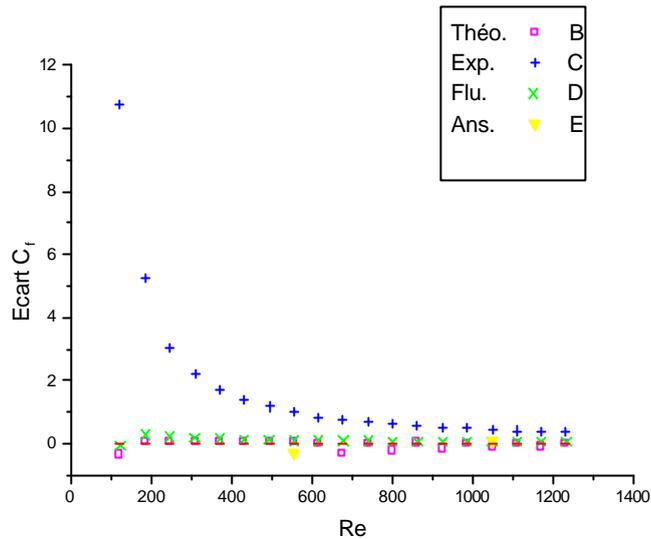


(3). Comparaison simulation EMC/Expérimental



(4). Variation du  $C_f$  en fonction du  $Re$  en régime laminaire et turbulent.

**Figure 4.13.** Comparaison entre simulation et données disponibles



**Figure 4.14.** Ecart en % entre les données disponibles et la simulation.

Nous avons tracé la courbe représentant les écarts en pourcentage pour mieux évaluer les différences entre les données simulées, théoriques, et expérimentales, figure (4.14). La comparaison des résultats de la simulation aux valeurs théoriques montre bien le regroupement des données de la simulation autour des valeurs de référence. D'autre part, cette figure prouve que les différences sont minimales et ne dépasse pas 0,28%.

Globalement, La confrontation des résultats obtenus avec notre programme EMC à ceux fournis par la théorie, et les résultats expérimentaux figure (4.14), nous énonce que, les valeurs du coefficient de frottement sont très proche, à celles données par la corrélation classique de Shah, à celles obtenues par Fluent et sont supérieures aux valeurs expérimentales, écart entre 0,36% et 10,77%.

## Conclusion

La compréhension de la méthode des volumes finis nous a permis de faire un programme en langage Delphi. Ce dernier nous à accorder la bonne caractérisation des écoulements dans des mini canaux qui est généralement réalisée par des logiciels commerciales et de la bonne maîtrise numérique de ce genre d'écoulement.

Ce travail a contribué à l'étude des lois de frottement dans un minicanal à section rectangulaire, en étudiant les profils de vitesse et les pertes de pression. Le minicanal a un diamètre hydraulique de 0.98mm.

On retient que les coefficients de frottement étudiés par la méthode des volumes finis, et par le logiciel Ansys, confirment celle obtenus par Fluent et s'approchent plutôt plus, des résultats théoriques ce qui confirme la validité des lois et corrélations classiques, que des données expérimentales, qui dès le départ étaient en dessous des valeurs théoriques.

Cette étude numérique est justifiée par le besoin en connaissances fines sur les phénomènes physiques qui régissent ce type d'écoulement.

## Conclusion générale

Les diversités des résultats expérimentaux publiés dans la littérature, en ce qui concerne les écoulements à petites échelles, ont conduit les scientifiques à se poser des diverses questions et à remettre en cause plusieurs principes régissant les micro-écoulements. Ces interrogations ont motivé le présent travail d'essayer de simuler ces écoulements et de cerner précisément les limites d'applicabilité des lois et corrélations classiques.

Ce travail de simulation des écoulements dans les minicanaux a été dicté par le besoin d'une part, de comprendre les mécanismes qui régissent ces écoulements, et d'autre part, la maîtrise de la méthode des volumes finis et la simulation par programmation, en notant que toutes les simulations trouvées dans la littérature consultée ont été faites en utilisant des codes de calcul particulièrement "Fluent".

La simulation des écoulements dans le minicanal mis en étude a été faite par deux approches ce qui nous a permis de comparer les différentes solutions. La première est réalisée par la programmation en langage Delphi en utilisant la méthode des volumes finis et la deuxième par l'utilisation du code de calcul Ansys qui emploie la méthode des éléments finis.

Pour la première approche, le modèle choisi pour toutes les configurations est le modèle laminaire. Il est logique de choisir celui-ci, puisque les nombres de Reynolds calculés à partir des essais expérimentaux sont compris entre 50 et 900. L'ensemble des variables est initialisé avant le déclenchement du calcul. L'algorithme de calcul est de type SIMPLE et nous avons choisi une discrétisation du 2<sup>eme</sup> ordre afin d'augmenter la précision. La convergence numérique est contrôlée en surveillant l'évolution des résidus et écarts de résultats entre deux itérations, pour les deux équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité. L'écoulement étant permanent, la conservation du débit entrant et sortant du domaine est introduite comme une condition au limite.

Pour la deuxième approche, les deux modèles laminaire et turbulent sont choisis. L'étape d'apprentissage du code de calcul nous a pris un temps considérable vu la

multitude des réglages disponibles sous le logiciel, ainsi que la base théorique elle-même des différents paramètres à ajuster. Entre temps, nous avons fait plusieurs feed-back sur la géométrie, le maillage, les conditions aux limites et les valeurs de référence de Ansys.

Les résultats du coefficient de frottement simulé par les deux approches, se sont quasiment superposés sur les valeurs théoriques, surtout en régime laminaire où les écarts sont positifs et ne dépassent guère quelques pour cent.

Les écarts sont plus larges en ce qui concerne la comparaison simulation-expérimental et sont majoritairement positifs, ce qui donne l'impression que les données expérimentales restent en général en dessous de la simulation.

Enfin, nous dirons que ce travail nous a permis de maîtriser surtout l'utilisation de la méthode des volumes finis pour les écoulements dans les canaux rectangulaires de hauteurs inférieurs au millimètre et d'explorer et estimer ce genre d'écoulement par une programmation en "DELHPI" et une autre par l'utilisation du code "ANSYS".

# Bibliographie

- Anduze, M. (2000). "Etude expérimentale et numérique de microécoulements liquides dans les microsystèmes fluidiques", INSA Département de Génie Mécanique. Thèse de doctorat.
- Baviere, R., Ayela, F., Person, S. L. et Favre-Marinet, M. (2005). "Experimental characterization of water flow through smooth rectangular microchannels." *Physics of fluids* 17(9): 098105.
- Bourouina, T., and Grandchamp, J. P. (1996). "Modeling micropumps with electrical equivalent networks", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 6, 398-404.
- Bricard A. (1995). "Ecoulement et transfert de chaleur dans les microcanaux et dans les microcaloducs", Centre d'études nucléaires de Grenoble, STI/LASP 95.01.
- Brutin, D. (2003). "Ecoulements liquides en microtubes et ébullition convective en minicanaux: étude expérimentale et modélisation", Université de Provence Mécanique Energétique. Thèse de doctorat.
- Brutin, D. et Tadrist, L. (2003). "Experimental friction factor of a liquid flow in microtubes.", *Physics of fluids* 15(3): 653.
- Carmona, M., Marco, S., Samitier, J., and Morante, J. R. (1996). "Dynamic simulations of micropumps " *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 6, 128-130.
- Churchill, R. V. (1948). "Introduction to Complex Variables", McGraw-Hill, New York.
- Davis, R. T. (1979). "Numerical Methods for Coordinate Generation Based on Schwarz-Christoffel Transformations", AIAA Paper 79-1463, Williamsburg, Virginia.
- Devasenathipathy, S., Santiago, J. G. et Takehara, K. (2002). "Particle tracking techniques for electrokinetic microchannel flows.", *Analytical chemistry* 74(15): 3704-3713.
- Farrashkhalvat, M. and Miles, J.P. (2003). "Basic Structured Grid Generation with an introduction to unstructured grid generation, Butterworth-Heinemann An imprint of Elsevier Science.
- Ferziger, J.H., Peric, M. (2002). "Computational Methods for Fluid Dynamic", 3rd Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York .
- Gad el hak, M. (1998). "The Fluid Mechanics of Microdevices. Manuscript based on the Fourteenth Freeman", Lecture presented at the 1998 ASME/WAM. Soumis au *Journal of Fluids Engineering*.
- Gad-el-Hak, M. (1999). "The Fluid Mechanics of Microdevices " *J. of Fluids Engineering*, 121 (1999) 7-33.
- Hamami A. (2005). "Simulation de l'écoulement dans un minicanal", mémoire de magistère. Département de mécanique. Université de Batna.
- Hamami A., (2003). "Contribution à l'étude des lois de frottement dans des minicanaux et des microcanaux", Rapport de stage de DEA, INPL, Nancy, 75

- Hao, P.-F., He, F. et Zhu, K.-Q. (2005). "Flow characteristics in a trapezoidal silicon microchannel.", *Journal of micromechanics and microengineering* 15: 1362-1368.
- HO, C.-H., and TAI, Y.-C. (1998). "Micro-electro-mechanical systems (MEMS) and fluid flow ", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30, 679-612.
- Hrnjak, P. et Tu, X. (2007). "Single phase pressure drop in microchannels", *International journal of heat and fluid flow* 28: 2-14.
- Ives, D.C. (1982). "Conformal Grid Generation, Numerical Grid Generation", *Proceedings of a Symposium on the Numerical Generation of Curvilinear Coordinate Systems and Their Use in the Numerical Solution of Partial Differential Equations* (J. F. Thompson, ed.), Elsevier, New York, pp. 107-130.
- Judy, J., Maynes, D. et Webb, B. W. (2002). "Characterization of frictional pressure drop for liquid flows through microchannels", *International journal of heat and mass transfer* 45(17): 3477-3489.
- Kandlikar S.G. (2002). "Fundamental issues related to flow boiling in minichannels and microchannels", *Experimental Thermal and Fluid Science*, N°26, pp. 389-407. 3, 78, 84.
- Kinoshita, H., Oshima, M., Hong, J.-W., Fujii, T., Saga, T. et Kobayashi, T. (2002). "PIV measurement of pressure- and electrokinetically- driven flow in microchannels". *Optical technology and image processing for fluids and solids diagnostics SPIE, Beijing*.
- Kohl, M. J., Abdel-Khalik, S. I., Jeter, S. M. et Sadowski, D. L. (2005b). "A microfluidic experimental platform with internal pressure measurements", *Sensors and actuators A* 118: 212-221.
- Lattes Christine Barrot (2007). "Développement de méthodes expérimentales pour l'analyse des écoulements de liquides dans les microcanaux", *Doctorat de L'I.N.S.A.T.*
- Li, B. et Kwok, D. Y. (2003). "A lattice Boltzmann model for electrokinetic microchannel flow of electrolyte solution in the presence of external forces with the Poisson-Boltzmann equation", *International journal of heat and mass transfer* 46(22): 4235- 4244.
- Li, H., Ewoldt, R. et Olsen, M. G. (2005). "Turbulent and transitional velocity measurements in a rectangular microchannel using microscopic particle image velocimetry", *Experimental Thermal and Fluid Science* 29(4): 435-446.
- Mala, G. M. et Li, D. (1999). "Flow characteristics of water in microtubes.", *International journal of heat and fluid flow* 20: 142-148.
- Moretti, G. (1979). "Conformal Mappings for the Computation of Steady Three-Dimensional Supersonic Flows", *Numerical/Laboratory Computer Methods in Fluid Mechanics* (A. A. Poiring and V. I. Shah, eds.), ASME, New York, pp. 13-28.
- Patankar S. V. (1988). "Numerical heat and fluid flow", Ed. Mc Graw-hill London.
- Pfahler, J., Harley, J., Ban, H. et Zemel, J. N. (1991). "Minicanaux: étude expérimentale et modélisation", *Université de Provence Mécanique*.

- Phares, D. J. et Smedley, G. T. (2004). "A study of laminar flow of polar liquids through circular microtubes", *Physics of fluids* 16(5): 1267.
- Piau, J.M. (1991). "Cours de Mécanique des Milieux Continus " Polycopie de cours de l'école d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble, INPG .
- Ren, L. et Li, D. (2001). "Electroosmotic flow in heterogeneous microchannels", *Journal of colloid and interface science* 243: 255-261. Rochester, ASME 849-853.
- Schomburg, W. K., Fahrenberg, J., Maas, D., and Rapp, R. (1993). "Active valves and pumps for microfluids" *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 3, 216-218.
- Shah R.K., London A.L. (1978). "Laminar flow forced convection in ducts", New York Academic Press, 20, 27.
- Sharp, K. V. et Adrian, R. J. (2003). "Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes", *Theoretical and Applied Mechanics Reports*, University of Illinois at Urbana-Champaign: 1030.
- Sharp, K. V. et Adrian, R. J. (2004). "Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes", *Experiments in fluids* 36: 741-747.
- Tannehill, J. C., Anderson, D. A., and Pletcher, R. H. (1997). "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Taylor & Francis.
- Tardu, S. (2004). "Spatio-temporal evolution of a spot under the EDL effect.", 2d International Conference on Microchannels and Minichannels (ICMM2004). S. G. Kandlikar.
- Thompson, J.F., Soni, B.K. and Weatherill, N.P. (1999). "Handbook of Grid Generation", CRC Press.
- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W. (1985). "Numerical Grid Generation: Foundations and Applications", North Holland.
- Versteeg H.K., Malalasekera W. (1995). "An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method", Longman Scientific & Technical, 28, 51
- Weilin, Q. G., Mala, G. M. et Li, D. Q. (2000). "Pressure-driven water flow in trapezoidal silicon microchannels", *International journal of heat and mass transfert* 43(3): 353-364.
- White M, (2001). "Fluid Mechanics", Fourth Edition, Mc Graw-Hill, 28,35,72
- Zengerle, R., et Richter, M. (1994). "Simulation of microfluid systems " *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 4, 192-204.

# Annexes

## Annexe A : Modélisation et résolution avec le programme " EMC"

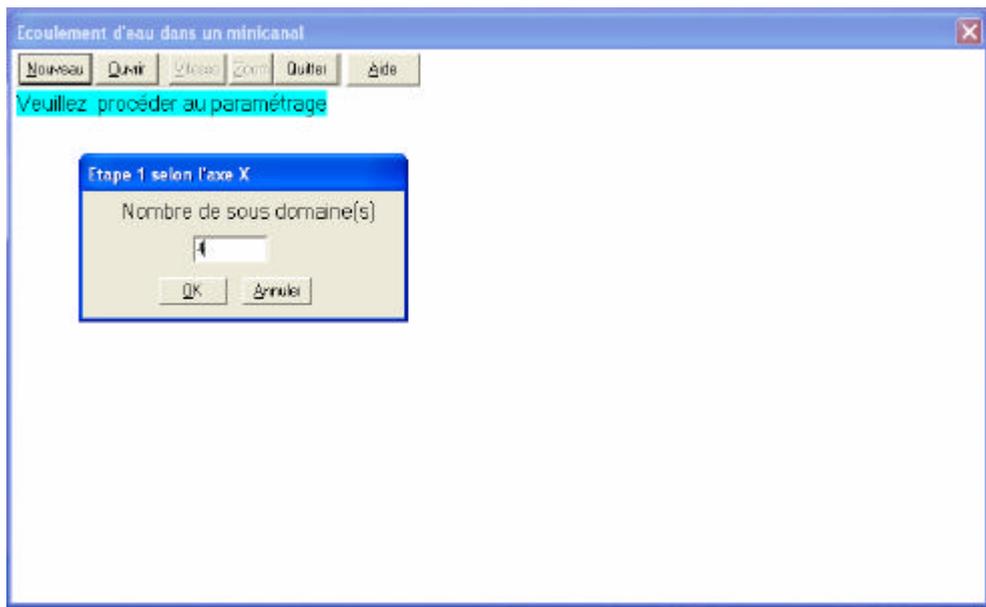
### ▪ Maillage du modèle

La figure (A.1) montre comment se présente l'interface du mailleur. Les étapes de génération de maillage sont données comme suit :

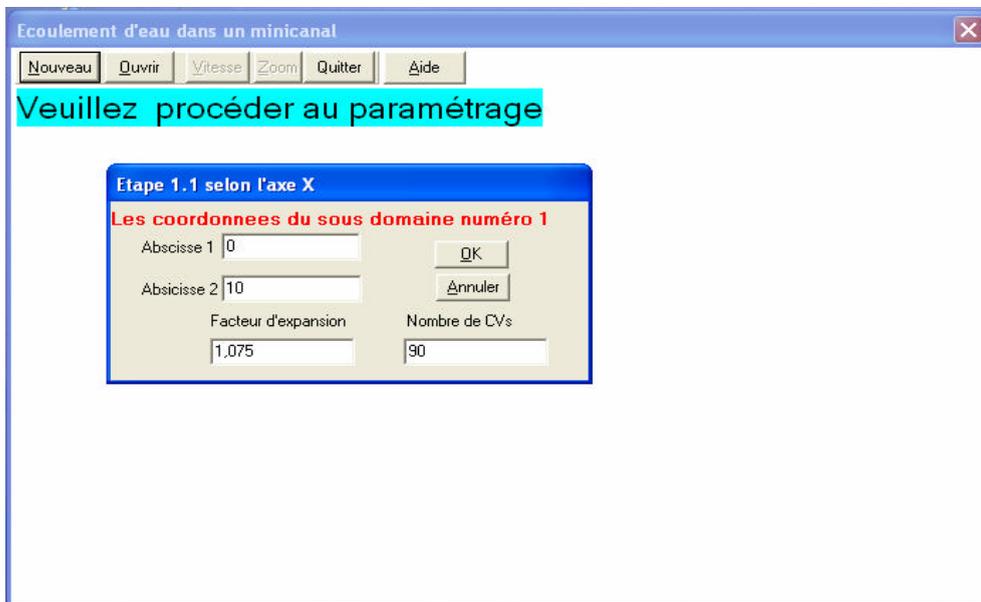
1. Définition des sous domaines SD suivant l'axe X.
  - 1.1. Définir le nombre de sous domaines, figure (A.2).
  - 1.2. Donner les abscisses 1 et 2 du sous domaine numéro 1 (*SD1*), figure (A.3).
    - Donner le facteur d'extension *G*.
    - Donner le nombre *N* de CVs.
  - 1.3. Définir l'abscisse du 2eme point du sous domaine *SD* suivant, figure (A.4).
    - Donner son nombre *N* de CVs.
  - 1.4. Aller à 1.3 et répéter jusqu'à le dernier *SD* (figure A.5) et (figure A.6).
2. Refaire l'étape 1 mais suivant l'axe Y, figure (A.7), figure (A.8) et figure (A.9).



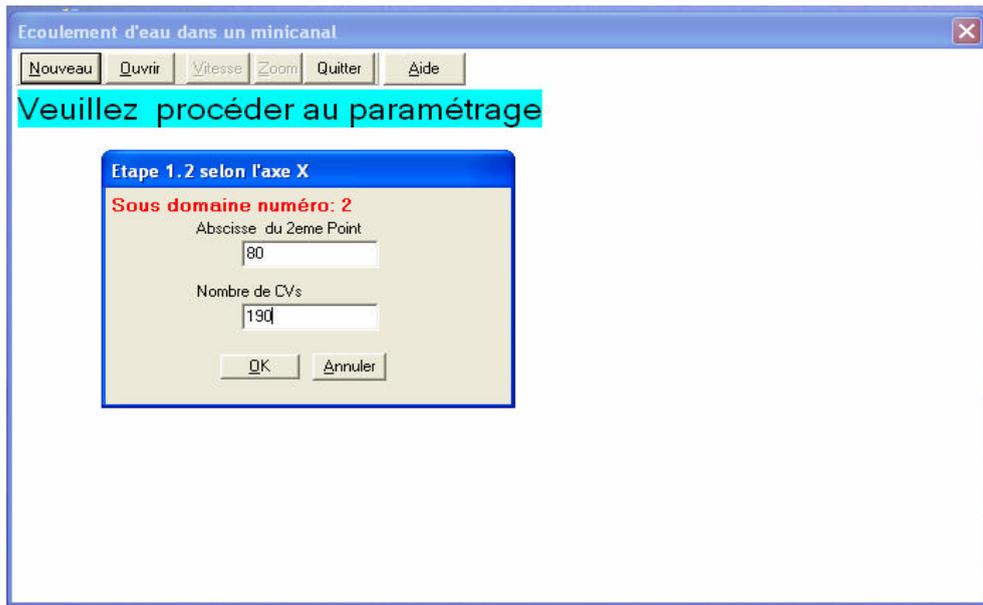
**Figure A.1.** L'interface du projet EMC



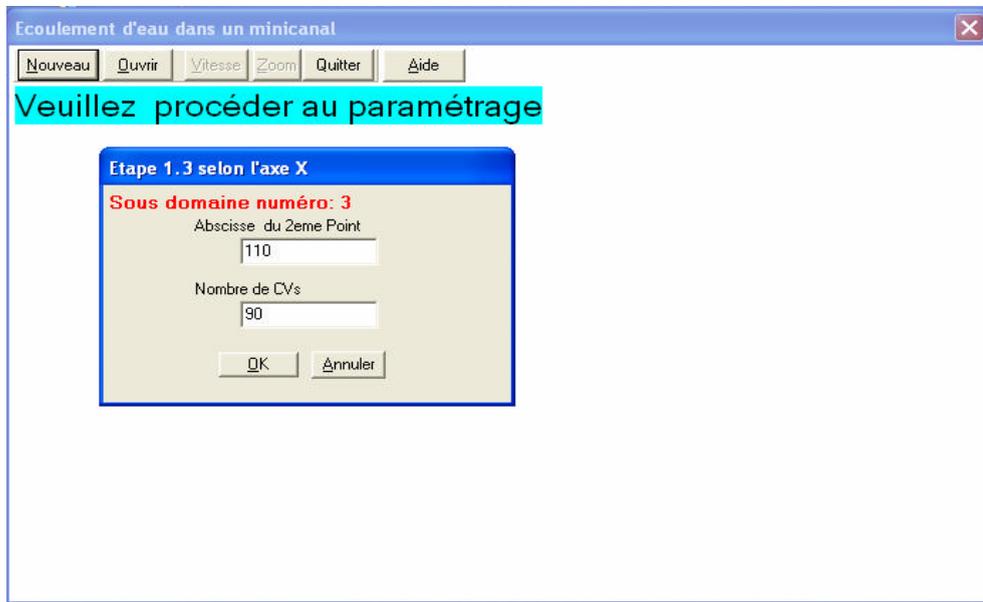
**Figure A. 2.** Définition du nombre de sous domaine du minicanal suivant X



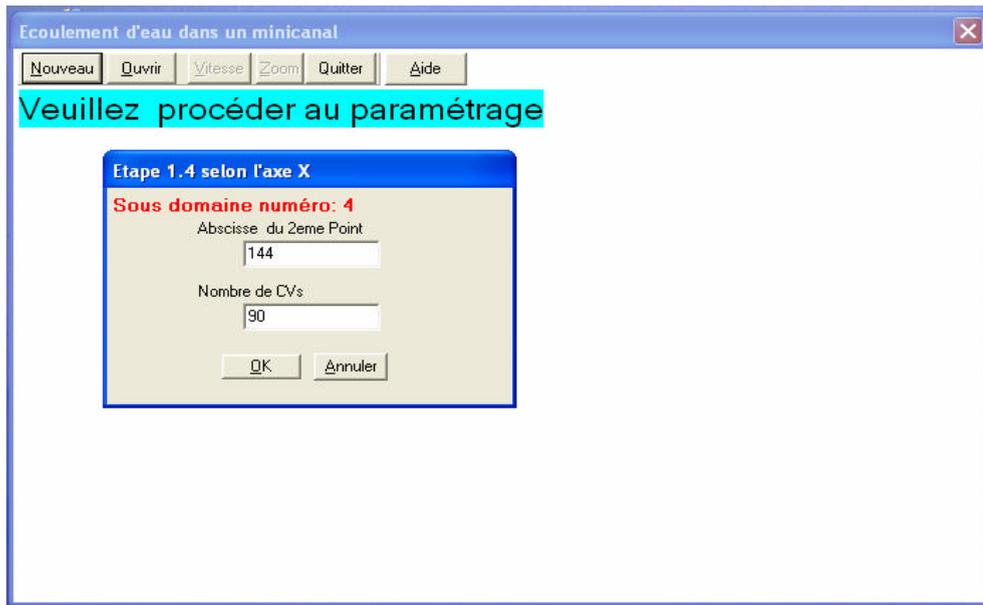
**Figure A. 3.** Définition des paramètres du premier sous domaine du minicanal suivant X



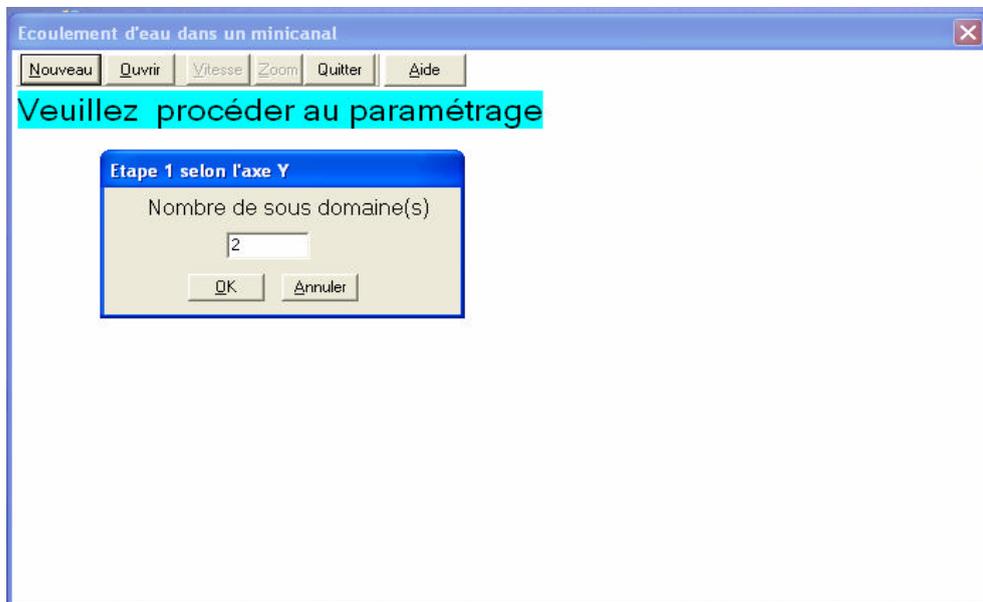
**Figure A. 4.** Définition des paramètres du deuxième sous domaine du minicanal suivant X



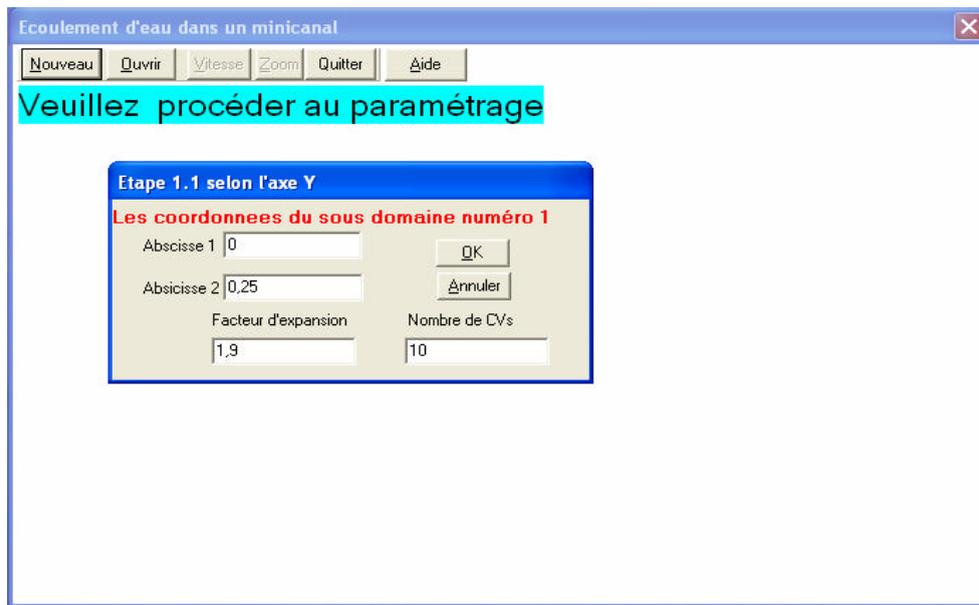
**Figure A. 5.** Définition des paramètres du troisième sous domaine du minicanal suivant X



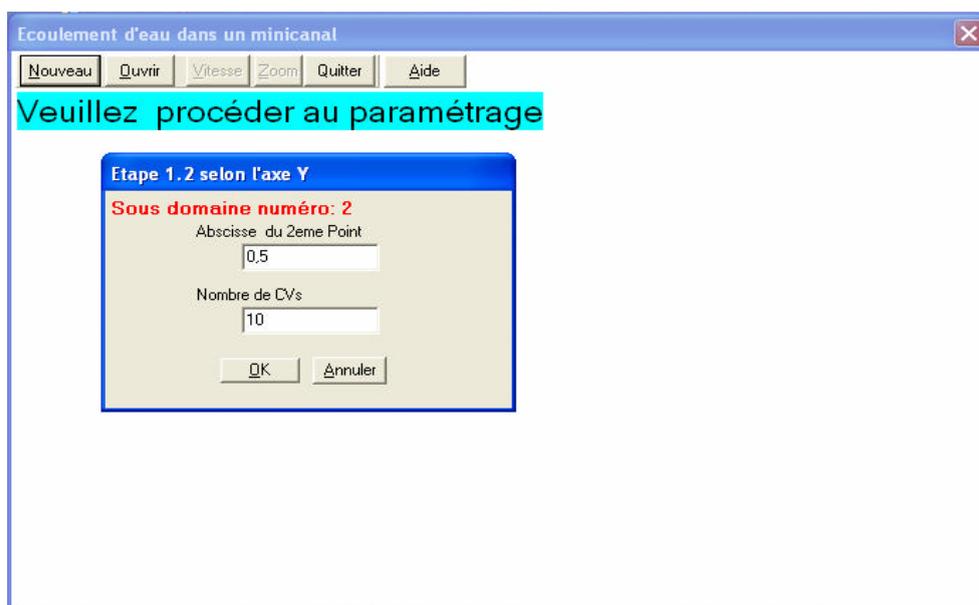
**Figure A. 6.** Définition des paramètres du quatrième sous domaine du minicanal suivant X



**Figure A. 7.** Définition du nombre de sous domaine du minicanal suivant Y



**Figure A. 8.** Définition des paramètres du premier sous domaine du minicanal suivant Y

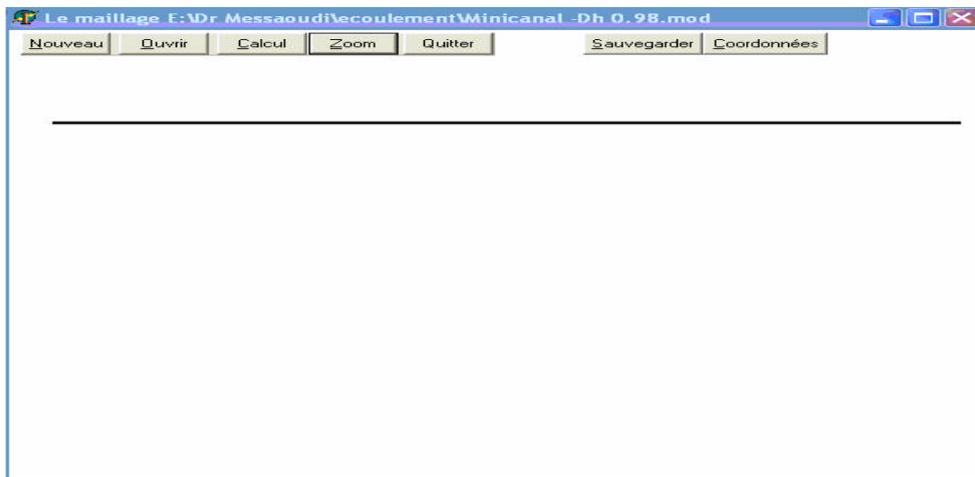


**Figure A. 9.** Définition des paramètres du deuxième sous domaine du minicanal suivant Y

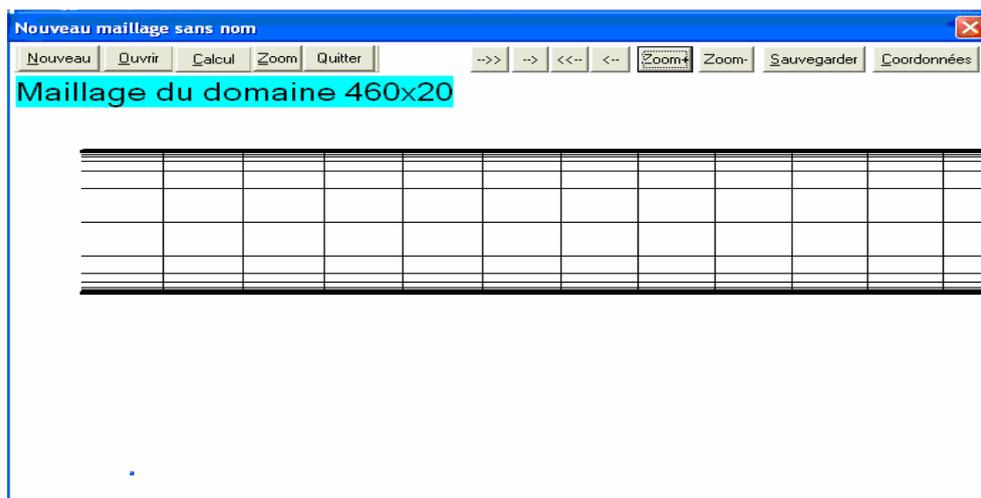
A la fin du procédé de paramétrage, le maillage rectangulaire et la géométrie du canal peuvent s'afficher rapidement, figure (A.10), avec possibilité de zoom de l'image figure (A.11).

Le bouton « coordonnées » affiche les coordonnées des nœuds et construit les tables de connectivité figure (A.12).

On peut bien entendu enregistrer et ouvrir un maillage existant figure (A.13).



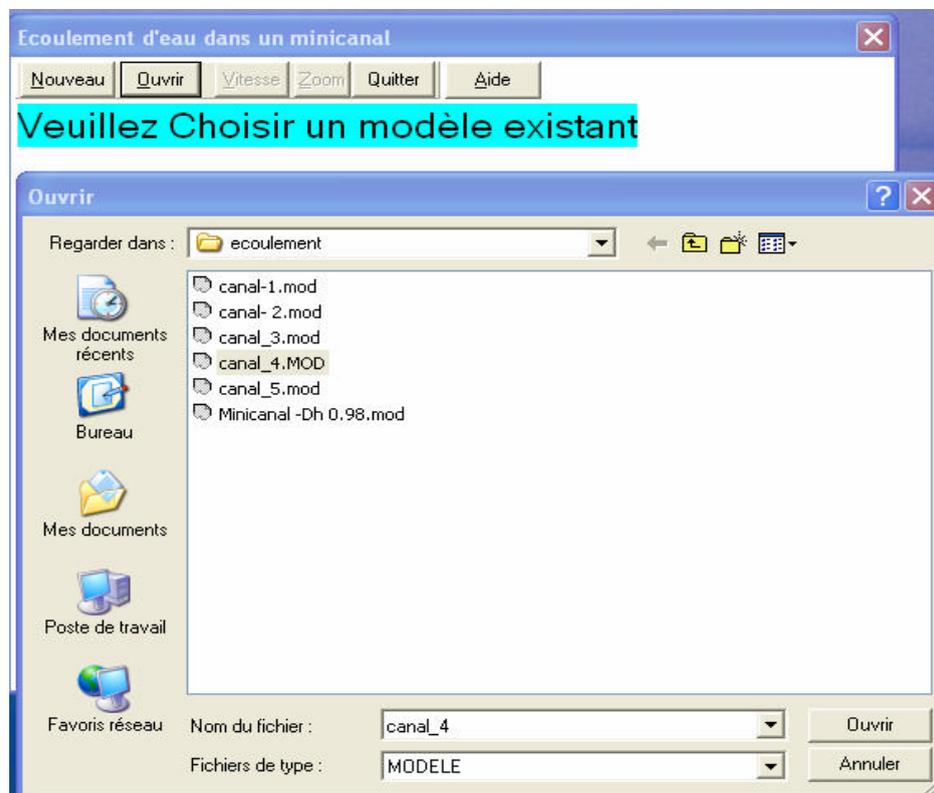
**Figure A. 10.** Géométrie du minicanal



**Figure A. 11.** Maillage du minicanal de diamètre hydraulique est de 0.98 mm avec zoom.



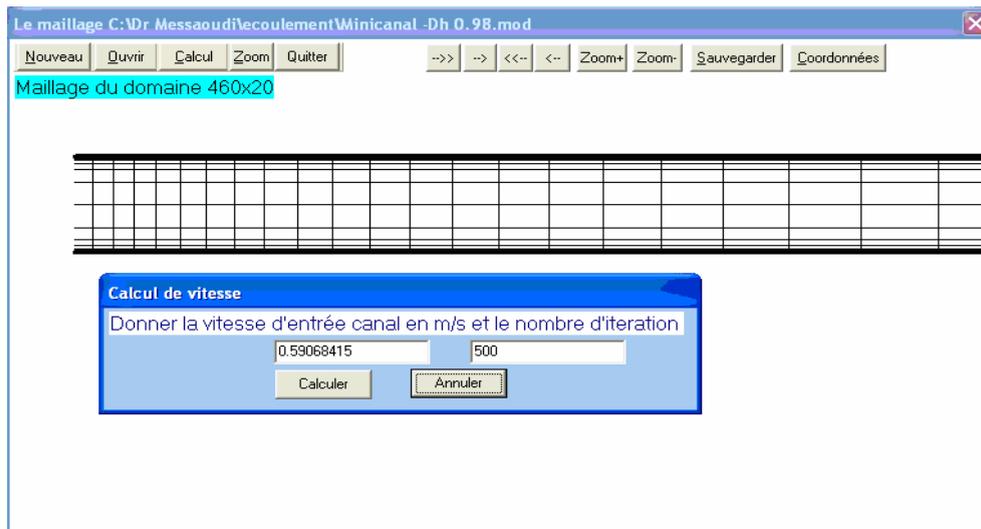
**Figure A. 12.** Fichier des cordonnées des frontières CVs



**Figure A. 13.** Ouverture d'un maillage existant

- Calcul de l'écoulement

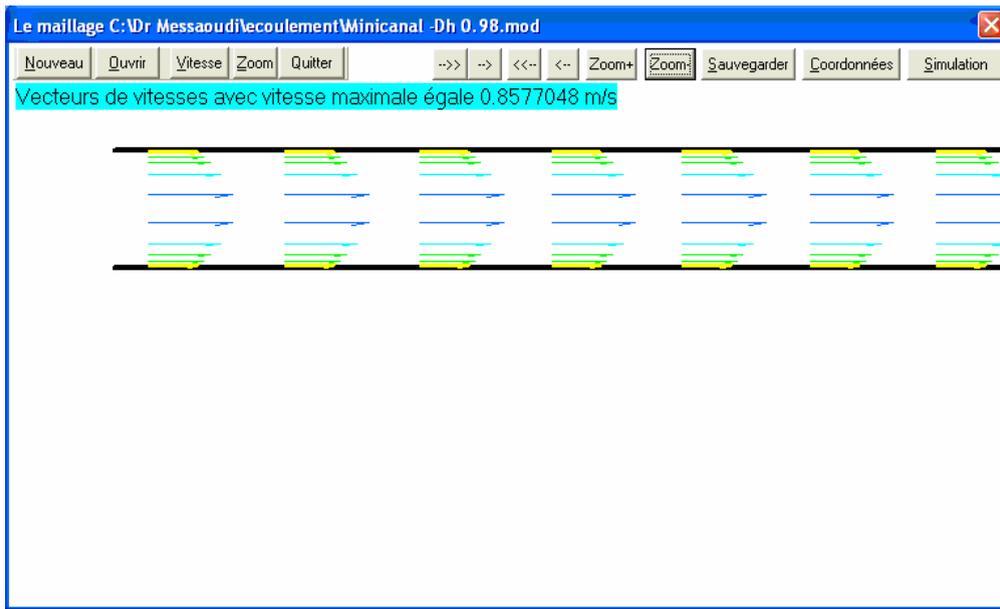
Après l'obtention de maillage du domaine figure (A.11), On peut passer au calcul de l'écoulement en cliquant sur le bouton «calcul » puis introduire le nombre d'itération et la vitesse d'entrée qui doit être convenable à un écoulement au régime laminaire, figure (A.14).



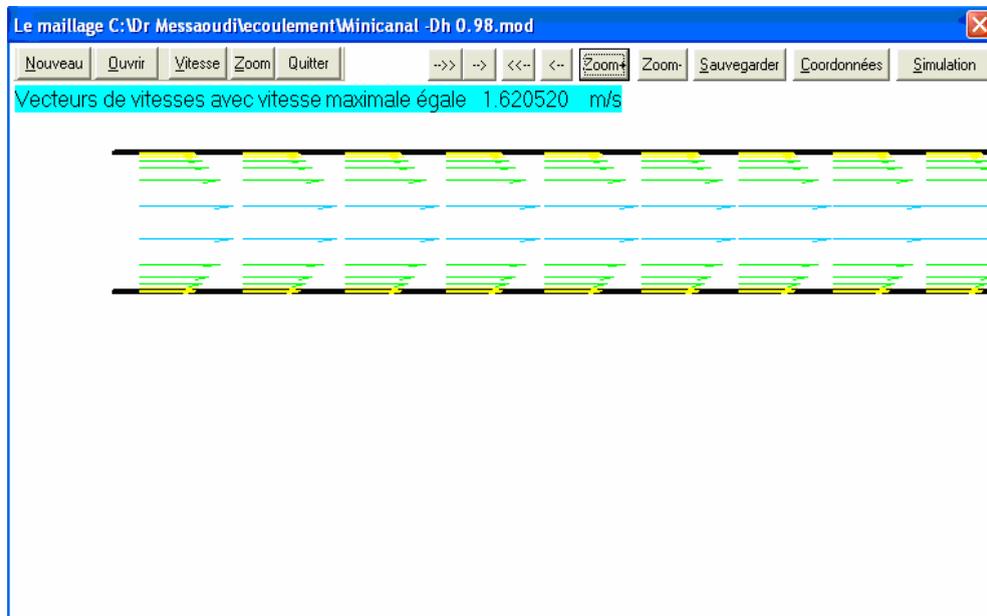
**Figure A. 14.** Introduction des conditions aux limites  
(un débit de 450,1 ml/mn)

Les temps des calculs variaient entre quatre à cinq minutes pour 500 itérations. Les résultats de simulations par le mailleur EMC s'affichent par les cliques sur les boutons suivants :

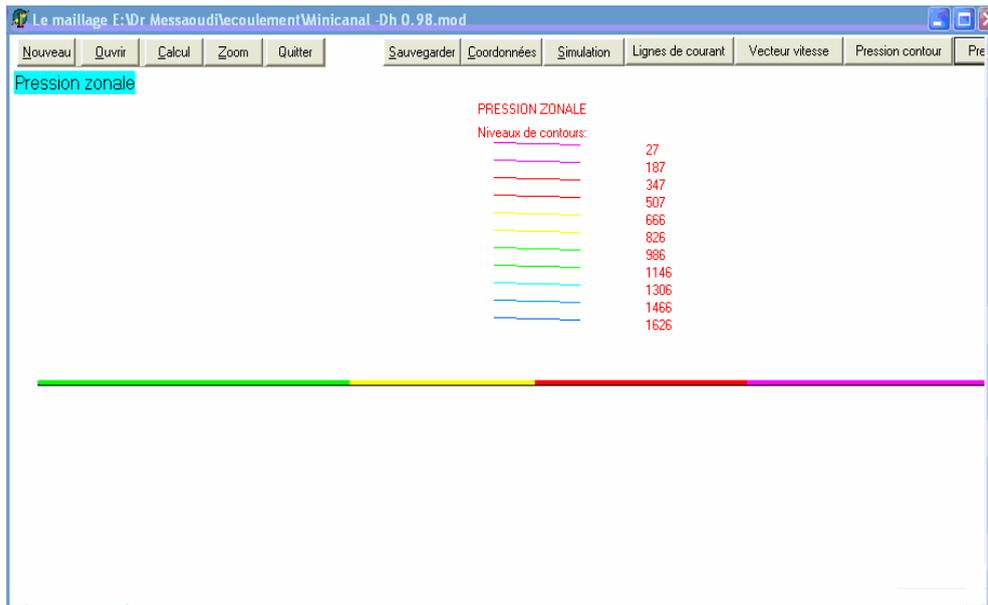
- Le bouton « Vecteur vitesse » affiche les vecteurs vitesses dans le minicanal figure (A.15, A.16)
- Le bouton « Pression contour » affiche les contours de pression le long du minicanal Figure (A.17).
- Le bouton «lignes de courant » affiche que cet écoulement a lieu par couches planes figure (A.18).
- Le bouton «Simulation » ouvre le fichier des valeurs, de vitesse et de pression Figure (A.19).



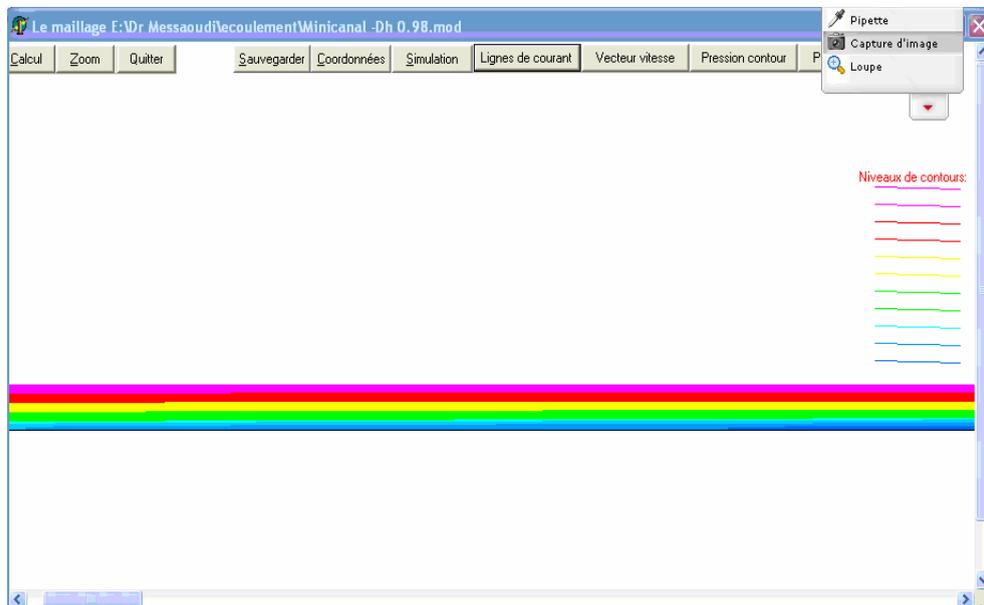
**Figure A. 15.** Profils de vitesse (un débit de 450,1 ml/mn)



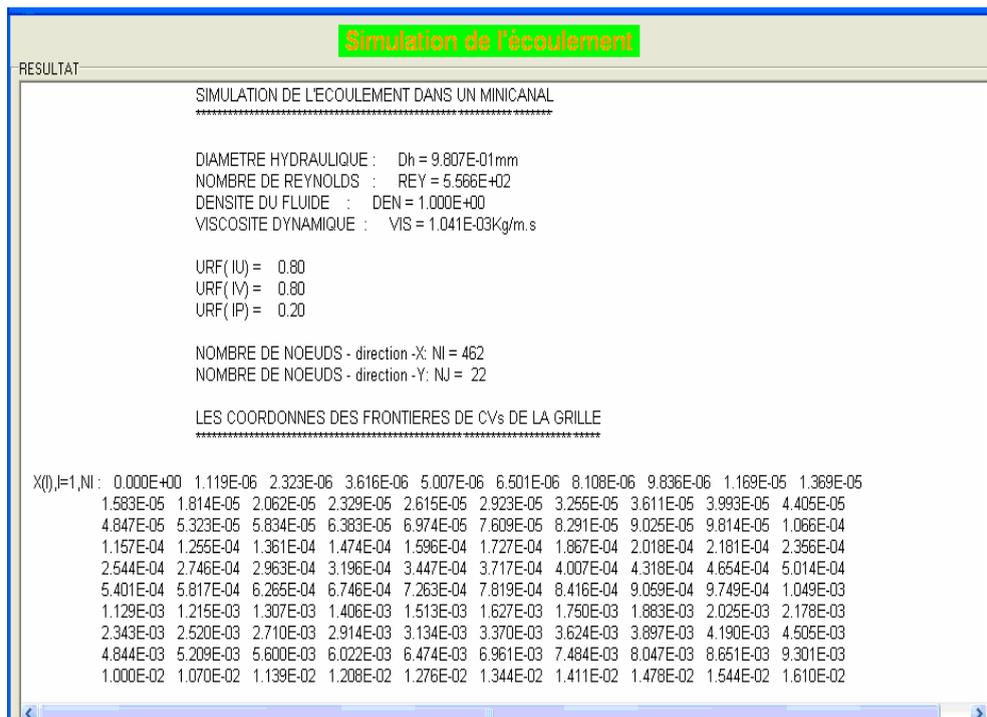
**Figure A. 16.** Profils de vitesse (un débit de 850 ml/mn)



**Figure A. 17.** Chute de pression le long du minicanal



**Figure A. 18.** Lignes de courant de l'écoulement dans le minicanal



**Figure A. 19.** Fichier des résultats de simulation

## ▪ Algorithme SIP

Pour un système linéaire  $Ax = b$  l'algorithme SIP commence par le Calcul de factorisation Incomplet LU de matrice A :

$$Ax = (M-N)x = (LU-N)x = b$$

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \text{ avec } \|M\| \gg \|N\|$$

$$Mx^{(k+1)} = LUx^{(k+1)} = c^{(k)}$$

$$LUx^{(k)} = L(Ux^{(k+1)}) = Ly^{(k)} = c^{(k)}$$

Mettre une estimation :

$$k = 0, x^{(k)}$$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Tant que  $(\|r^{(k)}\| \geq \epsilon)$  faire :

L'évaluation du nouveau côté droit.

$$c^{(k)} = Nx^{(k)} + b$$

Résoudre  $Ly^{(k)} = c^{(k)}$  par substitution en avant.

$$y^{(k)} = L^{-1} c^{(k)}$$

Résoudre  $Ux^{(k+1)} = y^{(k)}$  Par arrière substitution.

$$x^{(k+1)} = U^{-1}y^{(k)}$$

Fin tant que.

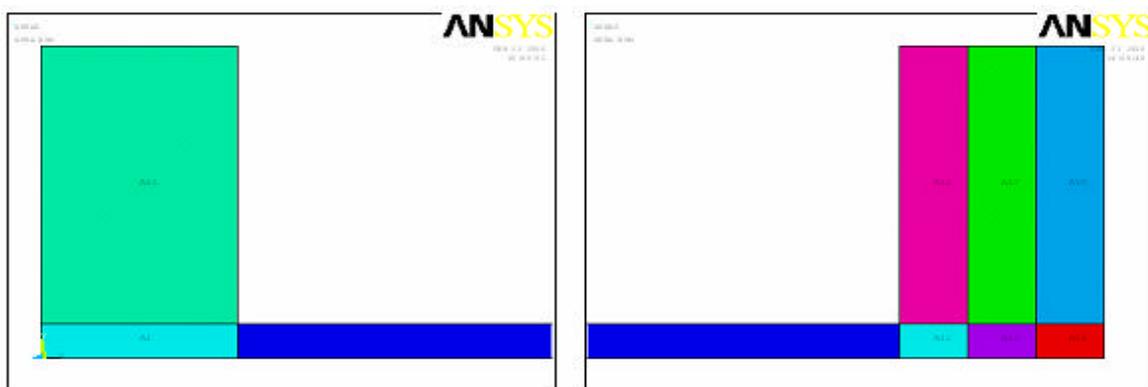
## Annexe B : Modélisation et résolution avec "Ansys"

"Ansys" est un code de calcul pour modéliser les écoulements des fluides et les transferts thermiques dans des géométries complexes. Ce code emploie la méthode des éléments finis comme procédé de discrétisation.

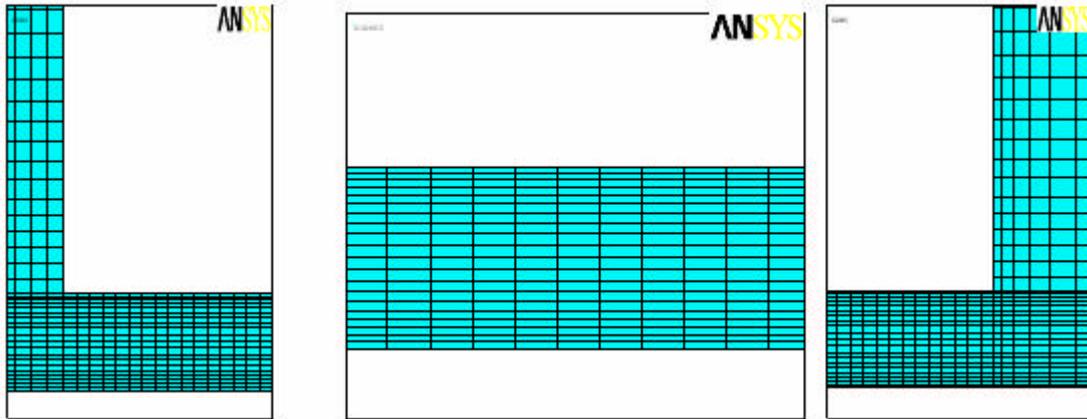
- Maillage du modèle

Après la création de la géométrie complète du minicanal figure (B.1), qui est assez simple où l'écoulement suit pratiquement la forme de la géométrie, on utilise un maillage à cellules quadrilatères, nous aurons un alignement de l'écoulement avec notre maillage, alors que ça ne sera jamais le cas avec des cellules triangulaires. Après plusieurs essais, nous avons pu obtenir les seuils de finesse des grilles.

Tous les maillages appliqués sont des maillages multi blocs. Le premier bloc représente le canal lui-même où le maillage est très fin (20 divisions pour 0,5mm), l'autre bloc représente l'entrée du canal où le maillage est relativement grossier (30 divisions pour 4mm) et le maillage proche du parois doit être fin figure (B.2).



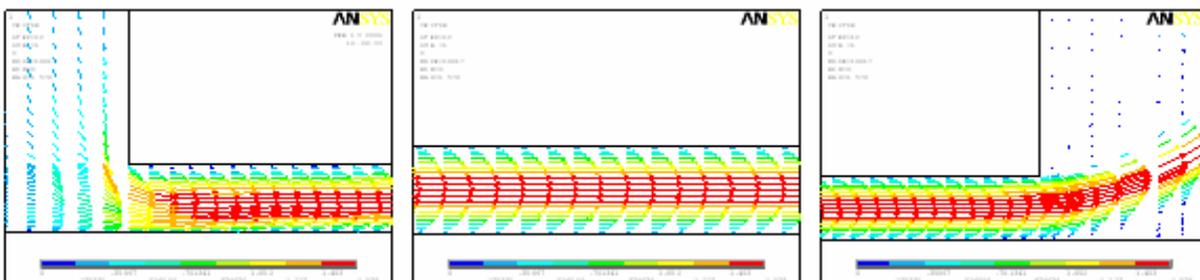
**Figure B. 1.** Création de la géométrie du modèle



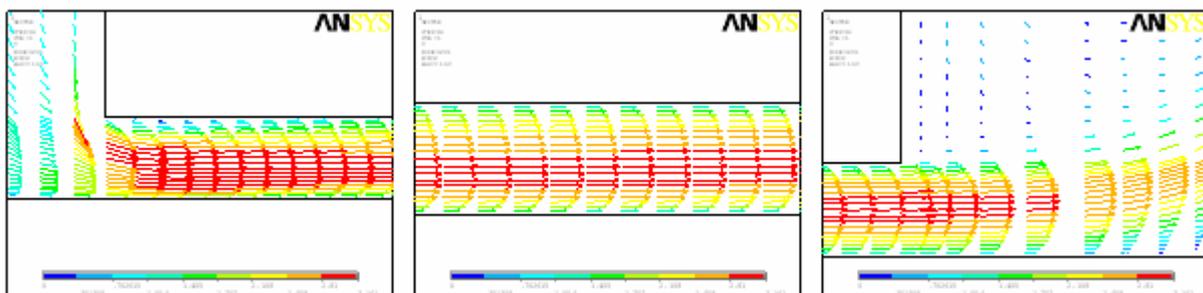
**Figure B. 2.** Maillage du modèle

- Calcul de l'écoulement

Après l'application des conditions aux limites et l'exécution de la solution, on obtient les profils de vitesse, pour un cas laminaire figure (B.3) et pour un cas turbulent figure (B.4)

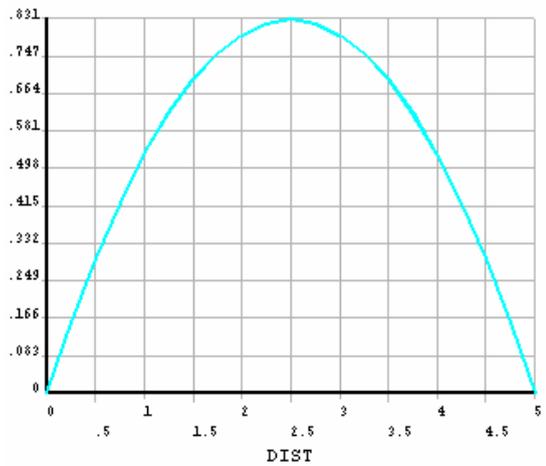


**Figure B. 3.** Profils de vitesse pour cas laminaire (un débit de 450,1 ml/mn)

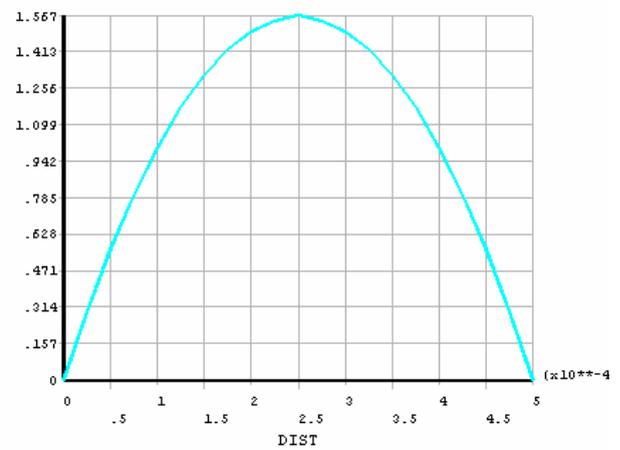


**Figure B. 4.** Profils de vitesse pour un cas turbulent (un débit de 1950 ml/mn)

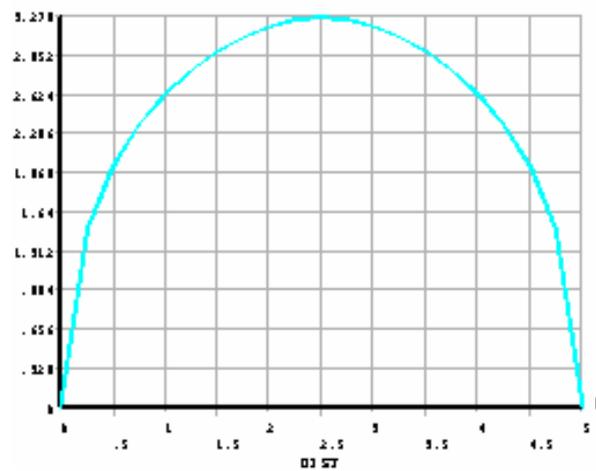
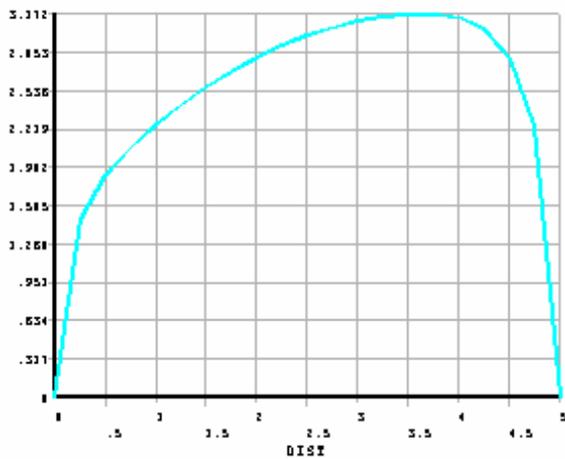
La détermination de la vitesse transversale pour l'écoulement laminaire est donnée par les figures (B.5 et B.6) et pour l'écoulement turbulent sont données par la figure (B.7).



**Figure B. 5.** Profils de vitesse, régime laminaire (450.1ml/mn)



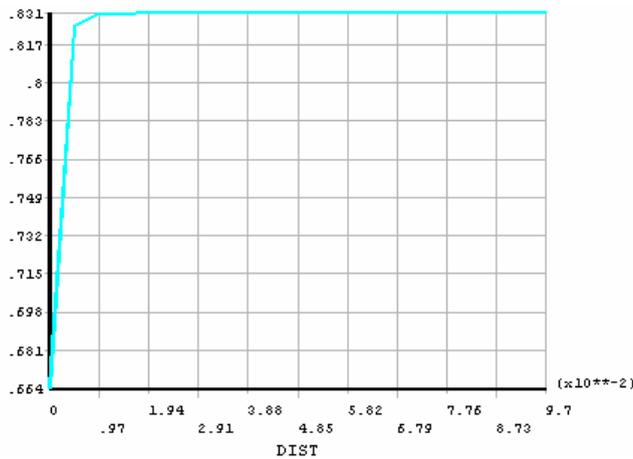
**Figure B. 6.** Profils de vitesse, régime laminaire (850. ml/mn)



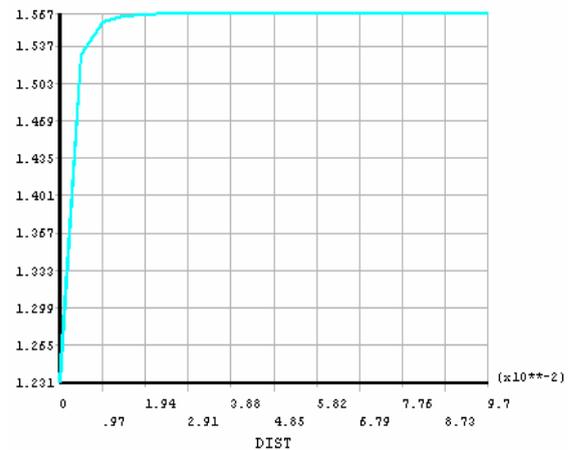
**Figure B. 7** Profils de vitesse avant et après l'établissement de l'écoulement. Régime turbulent (2100 ml/mn)

Les variations de la vitesse axiale pour le régime laminaire sont données par les figures (B.8 et B.9). Ces profils sont conformes aux profils théoriques de vitesse et très proches des ceux calculées par notre logiciel EMC en régime laminaire.

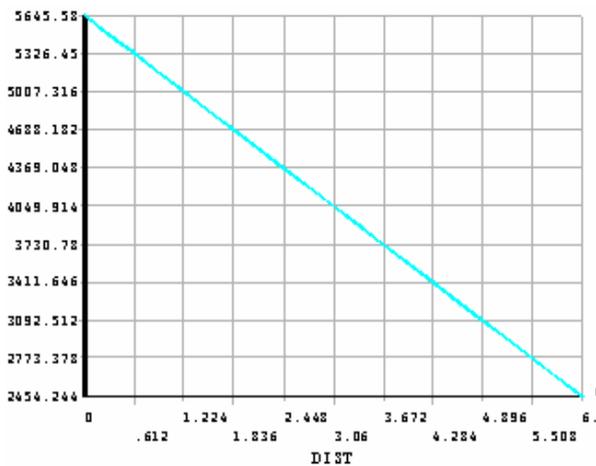
Les figures (B.10 et B.11.) donnent la variation de pression le long du minicanal. Il est bien clair que c'est une chute de pression linéaire.



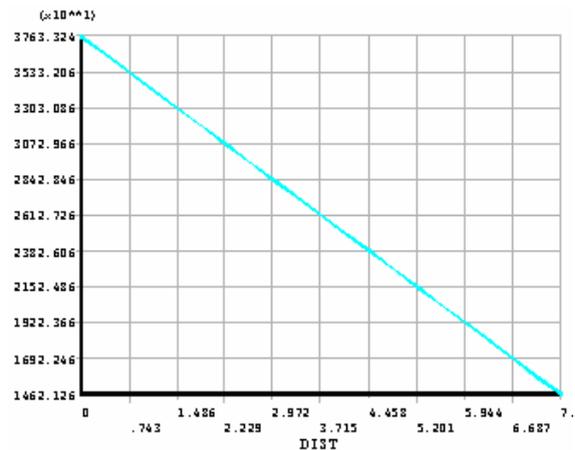
**Figure B. 8.** variation de la vitesse axiale (450.1ml/mn)



**Figure B. 9.** variation de la vitesse axiale (850. ml/mn)



**Figure B. 10.** Perte de charge (débit 850.6).



**Figure B. 11.** Perte de charge (débit 1950).